А. Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д. А. ШЫНЫБЕКОВ, Р. Н. ЖУМАБАЕВ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Учебник для 10 класса общеобразовательной школы естественно-математического направления

10

Рекомендовано Министерством образования и науки Республики Казахстан

Алматы «Атамұра» 2019

1–4416

УДК 373.167.1
ББК 22.14 я 72
Ш 98

Учебник подготовлен в соответствии с Типовой учебной программой обновленного содержания по предмету «Алгебра» для 10 класса уровня основного среднего образования, утвержденной Министерством образования и науки РК

Под редакцией **М. Отелбаева** – доктора физико-математических наук, профессора, академика НАН Республики Казахстан.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- Вопросы по основным материалам темы
- Материалы из истории математики
- Практические и творческие работы
- **A** Задачи первого уровня сложности
- **B** Задачи второго уровня сложности
- **C** Задачи третьего уровня сложности
- ✱ Задачи повышенной трудности
- ▲ Начало решения (доказательства) задачи, теоремы
- ■ Конец решения (доказательства) задачи, теоремы

Шыныбеков А.Н. и др.
Ш 98 **Алгебра и начала анализа:** Учебник для 10 кл. общеобразоват. шк. ест.-мат. направления / А. Н. Шыныбеков, Д. А. Шыныбеков, Р. Н. Жумабаев. – Алматы: Атамұра, 2019. – 272 с.

ISBN 978-601-331-522-5

ISBN 978-601-331-522-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный учебник предназначен для 10-х классов общеобразовательных школ с естественно-научным уклоном и для классов с углубленным изучением математики. В этом плане данный учебник так же, как и предыдущие учебники «Алгебра–7, 8, 9», является универсальным. Во избежание путаницы материалы по программе классов с углубленным изучением математики, не вошедшие в программу общеобразовательных школ, отмечены звездочкой (*). Все задания группы **C**, в основном, также предназначены только для классов с углубленным изучением математики. Учащиеся, обладающие математическими способностями, могут самостоятельно изучать эти материалы во внеурочное время. Следует помнить колоссальную разницу между механическим списыванием задачи и пониманием хода решения этой, даже списанной задачи.

При изучении курса «Алгебра и начала анализа» по данному учебнику, независимо от профиля класса, рекомендуем придерживаться следующих правил: при закреплении новой темы необходимо, чтобы каждый ученик в полном объеме освоил задания группы **A**. Иначе будет невозможным в полной мере освоить задания групп **B**, **C** и последующие новые темы. Поэтому необходимо следить за тем, чтобы учащиеся, которые не в полном объеме освоили задания группы **A**, не переходили поспешно к выполнению заданий следующих уровней сложности. Как бы это ни было сложно, переход к следующим уровням сложности должен осуществляться индивидуально по мере освоения учеником заданий группы **A**.

В целом отметим, что неустанный поиск, неутомимый труд и высокое стремление, несомненно, принесут свои плоды в освоении предмета!

Раздел 0. ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИАЛА, ПРОЙДЕННОГО В 7–9 КЛАССАХ

- Повторение пройденного материала в 7–9 классах.
- Подготовка к освоению материала 10 класса.

A

0.1. Напишите уравнение окружности с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиусом R:

1) $(1; 0)$, $R = 2$; 2) $(0; -1)$, $R = 1$.

0.2. Найдите угловой коэффициент прямой и постройте ее график:

1) $y = 2x - 3$; 2) $x - 3y + 4 = 0$; 3) $3x + 4y - 5 = 0$.

0.3. Постройте график уравнения:

1) $y = (x + 2)^2 - 3$; 2) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$; 3) $y = \dfrac{2}{x}$.

0.4. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - y = 2. \end{cases}$

0.5. Первая цифра двузначного числа в 2 раза меньше второй цифры, а их произведение равно 18. Найдите это двузначное число.

0.6. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x + 1 \leqslant 7, \\ 5x - 2 > 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x - x^2 > 0, \\ 7 - 3x > 4x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (x - 2)(x + 5) \geqslant 0, \\ x(x - 3) \leqslant 0. \end{cases}$

0.7. В какой координатной четверти находится радиус-вектор, определяющий угол:

1) 425°; 2) -200°; 3) $\dfrac{7\pi}{4}$; 4) $-\dfrac{5\pi}{3}$?

0.8. Выразите углы 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, -135°, -300° в радианной мере.

0.9. Выразите углы $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}, \pi, -\dfrac{\pi}{4}, -3\pi$ в градусной мере.

0.10. Существует ли угол α, при котором верно равенство:

1) $\sin\alpha = \dfrac{12}{11}$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{11}{12}$; 3) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\sin\alpha = -\dfrac{1}{3}$; $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$; 5) $\operatorname{tg}\alpha = 100$; 6) $\operatorname{ctg}\alpha = -20$?

0.11. Найдите значение выражения:

1) $2\sqrt{3}\sin 60^\circ + 4\cos 60^\circ$; 2) $\sqrt{3}\,\text{ctg}30^\circ - \text{tg}45^\circ$;

3) $\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sqrt{3}\text{tg}\dfrac{\pi}{6}$; 4) $\sin\dfrac{\pi}{6} - 2\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}$.

0.12. Упростите выражение:

1) $\cos^2\alpha - 1$; 2) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha$.

0.13. Определите знак выражения:

1) $\sin 460^\circ$; 2) $\cos 460^\circ$; 3) $\text{tg } 200^\circ$; 4) $\text{ctg } 280^\circ$.

0.14. Найдите значения тригонометрических функций угла α, если:

1) $\alpha = 300^\circ$; 2) $\alpha = -690^\circ$; 3) $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$; 4) $\alpha = -\dfrac{3\pi}{4}$.

0.15. Упростите выражение:

1) $\text{tg}\,\alpha - \dfrac{\sin\alpha - 1}{\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

3) $\text{tg}(3\pi + \alpha)\sin(270^\circ - \alpha) + \sin\alpha$; 4) $\dfrac{1-\cos^2(90^\circ + \alpha)}{\cos(\alpha + 4\pi)}$.

0.16. Дана арифметическая прогрессия с первым членом a_1 и разностью d. Напишите общий член и первые 5 членов этой прогрессии. Найдите сумму первых 5 членов при:
1) $a_1 = 3$, $d = 2$; 2) $a_1 = 1{,}8$, $d = -0{,}3$.

0.17. Дана геометрическая прогрессия с первым членом b_1 и знаменателем q. Напишите общий член и первые 5 членов этой прогрессии. Найдите сумму первых 5 членов при:
1) $b_1 = 4$, $q = 2$; 2) $b_1 = 16$, $q = -0{,}5$.

0.18. Оказалось, что 6 учеников из 30 пришли неподготовленными к уроку. Найдите вероятность того, что случайно вызванный к доске ученик окажется: 1) подготовленным; 2) неподготовленным к уроку.

B

0.19. Определите координаты центра и радиус окружности:
1) $x^2 + y^2 - 4x + 12y + 4 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 9x = 0$.

0.20. Постройте график уравнения:

1) $y + |x| = 3$; 2) $x^2 - 8x - y + 13 = 0$; 3) $y(x - 2) = 3$.

0.21. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} |x-1| + y = 2, \\ x + y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 19y^2 = 8, \\ x^2 - 6y^2 = 3. \end{cases}$

0.22. Во дворе находятся гуси и козы. Количество их ног равно 24, а количество голов – 9. Сколько гусей и коз во дворе?

0.23. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 5(x+2) - 9(x+1) - 3 < 1, \\ 7(3+5x) < 3x - 5(x-2); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leqslant 0, \\ 2x + 1 > 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 3x - 40 \leqslant 0, \\ 3x^2 - 5x + 2 \geqslant 0. \end{cases}$

0.24. Углы треугольника относятся как 5 : 6 : 7. Найдите градусные и радианные меры углов этого треугольника.

0.25. Найдите значение выражения $\sin\alpha - \cos^2\alpha + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$ при:

1) $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$; 2) $\alpha = 300°$; 3) $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$.

0.26. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha}$; 2) $\sin^2(\pi + \alpha) + \sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;

3) $\left(\sin(\pi + \alpha) - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 + \left(\cos(2\pi - \alpha) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2$.

0.27. Определите знак выражения:

1) $\cos 40° \cdot \sin 120° \cdot \mathrm{tg}\,150°$; 2) $\mathrm{tg}\,\dfrac{5\pi}{4} \cdot \mathrm{ctg}\,\dfrac{\pi}{6}$; 3) $\cos 8 \cdot \sin 5$.

0.28. Определите четность функции:

1) $y = x^3 - 7x$; 2) $y = 1 - \cos x$;

3) $y = \cos x \sin x$; 4) $y = \mathrm{tg}\,x \cdot \sin^2 x$.

0.29. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha} = 2;$

2) $\dfrac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} - \mathrm{ctg}^2\alpha = 0;$

3) $\dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta} = \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta.$

0.30. Найдите значение выражения $\dfrac{3\sin x + \cos x}{\sin x - 4\cos x}$, если $\mathrm{tg}\,x = 3$.

0.31. Дана последовательность:

1) 1, 4, 7, 10, 13, ...;

2) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{10}, \dfrac{16}{17}, ...;$

3) 1, –2, 3, –4, 5, –6, ...

Напишите формулу общего члена последовательности. Определите, является ли последовательность возрастающей, убывающей, ограниченной сверху или снизу.

0.32. Известно,что $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия, в которой

1) $a_1 + a_{10} = 12$, $a_8 - a_5 = 4$; 2) $a_5 + a_{11} = -0{,}2$, $a_4 + a_{10} = 2{,}6$.

Найдите первый член, разность, сумму первых 6 членов и общий член этой прогрессии.

0.33. Дана геометрическая прогрессия $\{b_n\}$:

1) $3, 3^2, 3^3, ...;$ 2) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, ...$

Найдите знаменатель, общий член и сумму первых 5 членов этой прогрессии.

0.34. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 7 и не превышающих 150.

C

0.35. Постройте график уравнения:

1) $y = |x^2 - 4 \cdot |x| + 3|$; 2) $|x| \cdot y = 1$; 3) $x \cdot |y| = 1$.

0.36. При каких значениях p и q вершина параболы $y = x^2 - px + q$ расположена в точке $(1; -2)$?

0.37. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y + xy = -1, \\ x^2 + y^2 + xy = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{3x - 9y}{x + y} + \dfrac{2x + y}{x - y} = 4, \\ x^2 - y^2 = 48; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

0.38. Бригада из 12 рабочих завершила данную работу за 6 дней. За сколько дней завершила бы эту работу бригада из 18 рабочих?

0.39. Найдите область определения функции $y = \dfrac{x - 1}{x + 2} + \dfrac{\sqrt{30 + x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

0.40. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 12x + 35}{2x^2 + x - 3} \geqslant 0, \\ |x - 3| \leqslant 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x + 7}{x - 5} + \dfrac{3x + 1}{2} \geqslant 0, \\ |x - 5| \leqslant 2. \end{cases}$

0.41. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $1 + 2\cos x$; 2) $2 - 5\sin x$; 3) $2 - 5|\sin x|$.

0.42. Может ли выполняться равенство:

1) $2\sin x + \cos x = 3$; 2) $5\sin x - 3\cos x = 8$?

0.43. Найдите наименьший положительный период функции:

1) $y = \{x\} - 3\sin \pi x$; 2) $y = \sin 3x - 2\cos 2x$.

0.44. Упростите выражение:

1) $$\frac{\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos^2(3\pi - \alpha) + \cos(\pi + \alpha)\cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)};$$

2) $\dfrac{\cos\varphi + \sin\varphi - \cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi + \cos\varphi\,\mathrm{ctg}\varphi}$.

0.45. Найдите значение следующего выражения, если $\mathrm{tg}\alpha = 3$:

1) $\dfrac{2\cos^2\alpha - 7\sin^2\alpha}{3\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha}$;

2) $\dfrac{\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\sin^3\alpha - 3\cos^3\alpha}$.

0.46. Докажите неравенство $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, n \geqslant 2$.

0.47. Сколько общих членов имеют арифметические прогрессии:

$1, 4, 7, 10, \ldots, a_n$ и $3, 7, 11, 15, \ldots, b_m$, если $a_n \leqslant 200$ и $b_m \leqslant 200$?

0.48. Могут ли быть членами (не обязательно соседними) одной геометрической прогрессии числа 10; 11; 15?

0.49. Числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, а числа a, $2b$, $3c$ – арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, отличный от 1.

0.50. Найдите сумму ряда:

1) $\dfrac{9}{25} - \dfrac{27}{125} + \ldots + \left(-\dfrac{3}{5}\right)^{n+1} + \ \ldots$;

2) $\sin\dfrac{\pi}{3} + \sin^2\dfrac{\pi}{3} + \sin^3\dfrac{\pi}{3} + \ldots + \sin^n\dfrac{\pi}{3} + \ldots$.

Раздел 1. ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

1.1. Понятие функции и способы ее задания.
1.2. Некоторые свойства функции.
1.3. Простейшая схема исследования функции.
1.4. Простейшие преобразования графиков функций.
1.5. Сложные и обратные функции.

1.1. Понятие функции и способы ее задания

1.1.1. Понятие функции

В окружающей нас среде, в науке и технике мы часто сталкиваемся с тем, что одна из величин меняется в зависимости от изменения другой величины. Например, рассмотрим прямой параллелепипед, основанием которого является квадрат со стороной, равной x, а высота параллелепипеда равна h. Тогда его объем находится по формуле

$$V = hx^2. \qquad (1)$$

Если в данной формуле x является переменной, то его объем V меняется в зависимости от x, т.е. объем V является функцией, зависящей от x (от стороны квадрата). Аналогично на рис. 1.1. изображен график годового показателя изменения температуры T в зависимости от времени по месяцам.

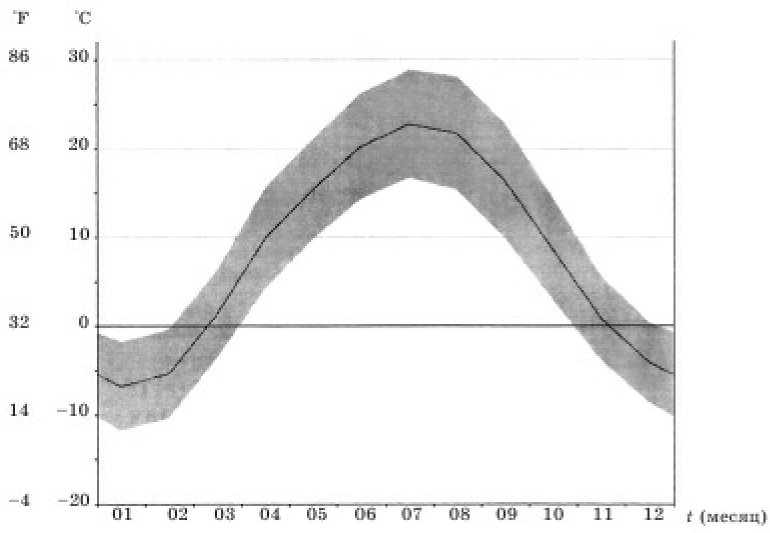


Рис. 1.1

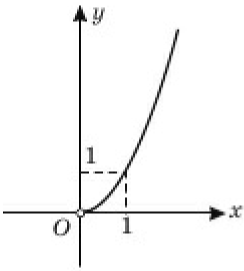


Рис. 1.2

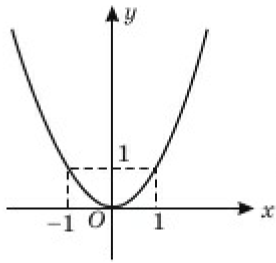


Рис. 1.3

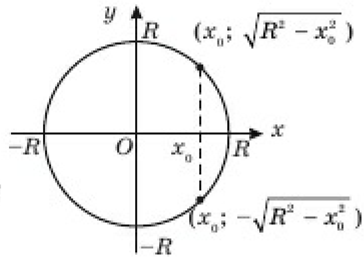


Рис. 1.4

Определение. *Если каждому значению x из числового множества $D(f)$ по какому-либо закону f ставится в соответствие единственное число y, то будем считать, что задана* ***числовая функция*** *$y = f(x)$.*

Здесь множество $D(f)$ называется областью определения, x – независимая переменная (аргумент), y – зависимая переменная (функция). Обозначим через $E(f)$ множество всех значений функции (зависимой переменной). $E(f)$ называется областью значений функции $y = f(x)$.

Множество точек плоскости вида $(x;\ f(x))$, $x \in D(f)$ называется ***графиком функции*** $y = f(x)$. Например, равенством (1) определяется объем V параллелепипеда в зависимости от стороны квадрата x. Здесь $D(V) = (0;\ +\infty)$ – область определения этой функции, а областью значений является множество $E(V) = (0;\ +\infty)$, т.к. по условию x не может равняться 0 или не может быть отрицательным числом. Если предположим, что $h = 1$, то график полученной функции изображен на рис. 1.2.

Мы знаем, что в общем случае график функции $y = x^2$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$ является параболой (рис. 1.3).

Работа в группе

Ответьте на нижеследующий вопрос и обоснуйте ответ.

Функция $y = x^2$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$ называется квадратичной функцией. Будет ли квадратичной функция $y = x^2$, $x \in (0;\ +\infty)$?

Теперь рассмотрим уравнение

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (2)$$

Этим уравнением определяется окружность радиусом R и с центром в начале координат (рис. 1.4.). Уравнение устанавливает зависимость между переменными x и y. Например, если x – независимая переменная, $(x \in [-R;\ R])$, то в зависимости от изменения

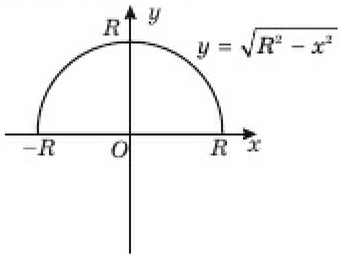


Рис. 1.5

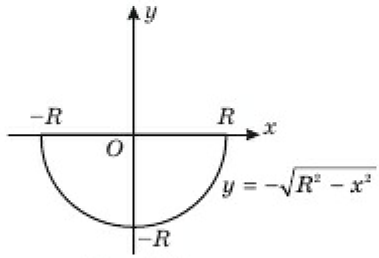


Рис. 1.6

x также меняются значения переменной y. Определяется ли равенством (2) функция y, зависящая от x? Выясним это.

Запишем равенство (2) в виде $y^2 = R^2 - x^2$ и, преобразуя его, получим:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow |y| = \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Отсюда видно, что каждому значению переменной $x_0 \in (-R;\ R)$ ставится в соответствие два значения переменной y: $y_1 = \sqrt{R^2 - x_0^2}$ и $y_2 = -\sqrt{R^2 - x_0^2}$.

Здесь мы видим, что нарушаются условия определения функции, т.е. каждому значению аргумента $x \in (-R;\ R)$ соответствует не единственное значение y, т.е. сразу два значения y_1 и y_2. Поэтому равенством (2) не определяется функция. А каждое из равенств $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R;\ R]$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R;\ R]$ по отдельности с указанными областями определения определяет функцию, и их графики изображены на рисунках 1.5 и 1.6 соответственно.

Итак, функция считается заданной, если заданы:

а) область определения функции, т.е. множество значений назависимой переменной;

б) правило, сопоставляющее каждому значению независимой переменной одно значение зависимой переменной.

Только при выполнении этих условий функция считается заданной. Если одно из данных условий нарушается, то функция не определяется. Например, функции: 1) $y = \dfrac{x}{2}$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$; 2) $y = \dfrac{x}{2}$,

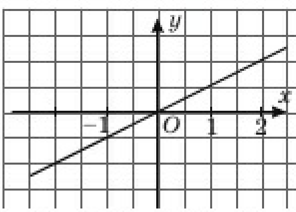


Рис. 1.7

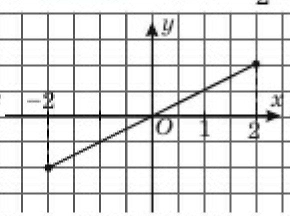


Рис. 1.8

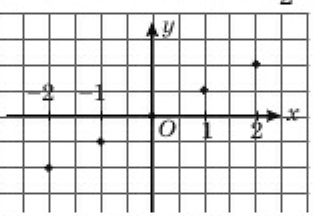


Рис. 1.9

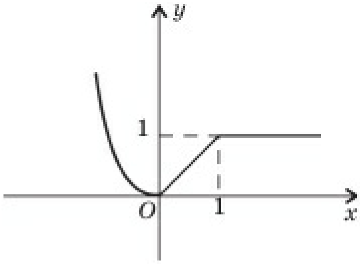


Рис. 1.10

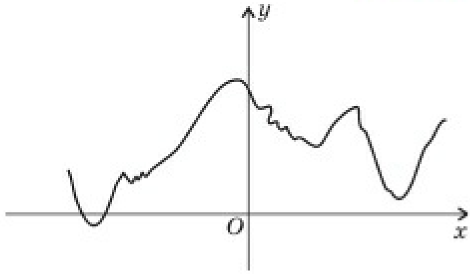


Рис. 1.11

$x \in [-2;\ 2]$; 3) $y = \dfrac{x}{2}$, $x \in \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$ являются разными, несмотря на то, что в этих функциях законы соответствия одинаковые, а области определения разные. Их графики изображены на рис. 1.7–1.9 соответственно.

1.1.2. Способы задания функции

Вам известны три способа задания функции: а) аналитический; б) графический; в) табличный.

а) Если функция задана аналитическим способом, то зависимость между независимой переменной (аргументом) x и зависимой переменной (функцией) y определяется с помощью формул, т.е. аналитическим выражением. Например, $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$, $y = \sin x$, $y = 3x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ и т.д.

Область определения функции, заданной аналитическим способом, обычно не указывается. За область определения функции, заданной аналитическим способом, берется область допустимых значений (ОДЗ) независимой переменной на множестве действительных чисел. Например, область определения функции $y = 3x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ определяется решением неравенства $x - 1 > 0$: $D(f) = (1;\ +\infty)$.

Иногда функцию задают различными формулами на разных участках числовой оси:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } & x < 0, \\ x, \text{ если } & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, \text{ если } & x > 1. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 1.10.

б) Если построен график функции, то говорят, что функция задана графическим способом. Графический способ задания функции нагляден. Он применяется также в тех случаях, когда не представляется возможным задать функцию аналитическим способом. Например, функцию, график которой изображен на рис. 1.11, очень сложно задать аналитическим способом. Также на рис. 1.1 изображен график изменения средней температуры воздуха в городе Алматы в 2017 году.

в) При исследовании некоторых явлений функцию задают при помощи таблицы. Например, метеорологи каждый час записывают в таблицу сведения о погоде. Табличное задание функции часто применяется и в математике.

Средняя температура воздуха над Европой

Высота в км	Температура в °C	
	Летом	Зимой
0	+14,7	+1,7
1	+11,8	+0,6
2	+6,2	−4,1
3	+1,0	−9,1
4	−4,2	−15,2
5	−9,9	−22,2
6	−16,2	−29,3
7	−24,2	−36,6
8	−30,7	−43,6
9	−38,2	−49,6
10	−44,8	−54,3
11	−50,0	−56,8
12	−52,8	−57,2
13	−52,7	−56,3
14	−52,3	−56,5
15	−51,9	−57,1
16	−51,5	−57,3
17	−51,0	−57,6
18	−50,1	−57,6
19	−49,5	−57,6
20	−49,8	−57,9

https://www.google.kz/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=ima ges&cd =&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjf-f7JoLzZAhWPLVAKHe3bAcMQjRx6B AgAEAY&url=http%3A%2F%2Fwww.sevparaplan.com%2Fmeteorology%2F temperatyra&psig=AOvVaw2VMy0eVA0do3gCrGqsn5SF&ust=151948269284 1570

В данной таблице указаны среднее значение температуры Европы по мере удаления от поверхности земли. Здесь задана функция, определяющая температуру воздуха в зависимости от высоты удаления от поверхности земли в виде таблицы.

Материалы из истории

С понятием зависимости одной величины от другой, называемой функцией, и со способами задания функции вы знакомы с 6 класса. В 7–8 классах были рассмотрены некоторые функции и их графики. В 9 классе было дано общее определение функции и изучены методы исследования элементарных функций. В этой главе мы более расширенно повторим пройденный материал и углубленно изучим свойства числовых функций.

Понятие функции складывалось в течение многих веков. До XVIII в. под функцией понимались только конкретно заданные зависимости. В те времена вопрос «что называется функцией?» особо не заботил ученых. Они по-разному давали определения этому понятию. Некоторые из них выражали функцию аналитически, т.е. с помощью формул, а другие же – в виде произвольно начерченных кривых. Все же в основе этих подходов лежала возможность установления зависимости между переменными x и y. Однако в этих определениях рассматривались только два вида зависимости и поэтому не прекращались споры о том, какое из этих определений функции охватывает более общий случай. Современное определение функции связано с именами таких ученых, как Леонард Эйлер (1707–1783), Жан Лерон Д'Аламбер (1717–1783), Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830), Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) и Петер Густав Дирихле (1805–1859), каждый из которых внес огромный вклад в развитие теории функций.

Труды Фурье доказали, что оба определения функции не охватывают в полной мере понятие функции. Позднее были установлены некоторые зависимости между переменными x и y, которые не выражались ни аналитически, ни произвольно начерченными кривыми. Например, рассмотрим функцию Дирихле:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ – рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ – иррациональное число.} \end{cases}$$

Очевидно, что эту функцию нельзя выразить аналитически, т.е. при помощи какой-нибудь формулы. Также невозможно на координатной плоскости построить кривую, являющуюся графиком этой функции. Современное общее определение понятия функции первыми дали Н. И. Лобачевский и П. Дирихле. Это понятие функции мы рассматривали в 9 классе.

Определение. ***Функцией*** *называется зависимость переменной y от переменной x, где каждому значению x (x – независимая переменная или аргумент) по некоторому правилу поставлено в соответствие единственное значение y (y – зависимая переменная или функция).*

Переменные x и y принадлежат множеству действительных чисел, и в данном учебнике использован аналог этого определения.

1. Сформулируйте определение функции. Поясните смысл определения с помощью графиков известных вам функций.
2. Что такое область определения, область значения и график функции? Как их обозначают?
3. Какие способы задания функции вы знаете? Поясните их на примере.
4. Область определения функции, заданной аналитическим способом, не указана. Какое множество берется в качестве ее области определения?
5. Даны функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Какое множество берется в качестве области определения: 1) суммы; 2) разности; 3) произведения; 4) частного этих функций? Обоснуйте ответ.

Практическая работа

По данным рис. 1.12 выразите a через α, здесь r, b – постоянные величины. Будет ли эта зависимость функцией? Какова область определения этой функции?

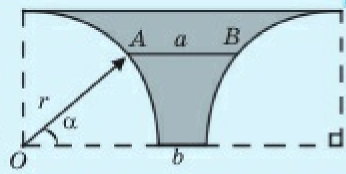


Рис. 1.12

Упражнения

A

1.1. Стороны прямоугольника равны 5 м и x м, а его площадь равна y м^2. Запишите соответствие между x и y с помощью формулы. Укажите область определения и область значений этого соответствия.

1.2. На множестве действительных чисел формулой заданы соответствия: 1) $y = 3x - 4$; 2) $y = (x - 2)^2$; 3) $y = \sqrt{x+1}$; 4) $y^2 = x + 1$. Найдите область определения, область значений и постройте их график. Какая из них определяет функцию? Почему?

1.3. На множестве $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ функция f определена формулой $y = \dfrac{3}{x-3}$. Постройте график этой функции.

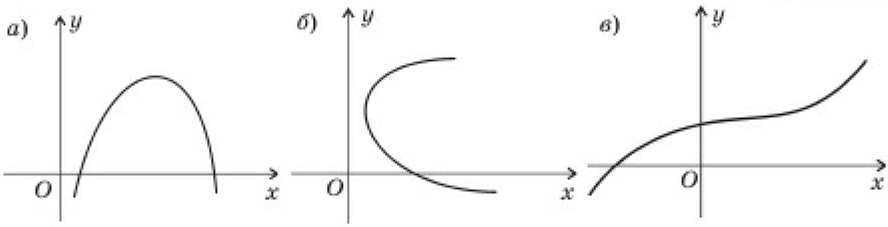


Рис. 1.13

1.4. Какие из точек $A(0; 1)$, $B(1; 0)$, $C(1; 2)$, $K(2; 1)$, $M(2; -1)$ принадлежат графику функции $y = \frac{(x-1)^2}{1-x}$, заданной на множестве действительных чисел?

1.5. Какое из соответствий, указанных на рис. 1.13, определяет функцию? Обоснуйте ответ.

1.6. Задайте функцию $y = x^2 - 6x + 5$ на множестве действительных чисел графическим способом.

1.7. Задайте функцию $y = x^2 - 6x + 5$ на множестве целых чисел графическим способом.

1.8. Задайте функцию $y = x^2 - 6x + 5$ на множестве $D = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ табличным способом.

1.9. Даны функции $f(x) = \sqrt{x+3}$ и $g(x) = x - 2$ на множестве действительных чисел. Найдите область определения функции:

1) $f(x) + g(x)$; 2) $f(x) - g(x)$; 3) $f(x) \cdot g(x)$; 4) $\frac{f(x)}{g(x)}$; 5) $\frac{g(x)}{f(x)}$.

1.10. На множестве действительных чисел заданы функции $f(x) = \sqrt{x-2}$ и $g(x) = 3x - \sqrt{x-2} + 2$. Найдите область определения функции:

1) $f(x) + g(x)$; 2) $f(x) - g(x)$.

B

1.11. Найдите область определения функции, заданной во множестве действительных чисел:

1) $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1}$;

2) $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$;

3) $\varphi(x) = \sqrt{x+2}$;

4) $\psi(x) = \sqrt{|x|+2}$.

1.12. Какие из точек $A(-2;\ 1)$, $B(-2;\ 3)$, $C(1;\ 0)$, $D(4;\ 3)$ принадлежат графику функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x < 0, \\ 1 - x, \text{ если } x \geqslant 0? \end{cases}$$

1.13. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2 - 3x + 2}$; 2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{3 - x}}$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 + |x|}}$; 4) $f(x) = \sqrt{(1 - x)(1 + 5x)}$;

5) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$; 6) $f(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x}$.

1.14. Задайте функцию $y = 2x^2 - 4x - 6$ на множестве $D = \{x \in Z : |x| \leqslant 3\}$: 1) графическим; 2) табличным способами.

1.15. Постройте график функции из задачи **1.12** на множестве: 1) действительных чисел; 2) целых чисел; 3) натуральных чисел.

1.16. Постройте график функции:

1) $f(x) = 2x - 3$, $D(f) = [-1;\ 2]$;

2) $g(x) = x^2 - 6x + 5$, $D(g) = [0;\ 5]$;

3) $h(x) = \dfrac{2}{x-1}$, $D(h) = [-2;\ 1) \cup (1;\ 3]$.

1.17. На множестве $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ задана функция $y = 2x - x^2$. Запишите множество пар чисел, принадлежащих графику этой функции. Изобразите этот график в прямоугольной системе координат.

1.18. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ на множестве: 1) действительных чисел; 2) действительных неотрицательных чисел; 3) целых чисел; 4) натуральных чисел.

1.19. Решите предыдущую задачу для функции:

1) $y = 3x - 4$; 2) $y = |3x - 4|$;

3) $y = 2 + \dfrac{1}{x-1}$; 4) $y = |x^2 - 4x + 3|$.

C

1.20. На множестве целых чисел дана функция:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, \text{ если } |x| \leqslant 2, \\ 1, \text{ если } |x| > 2. \end{cases}$$

Найдите значения $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

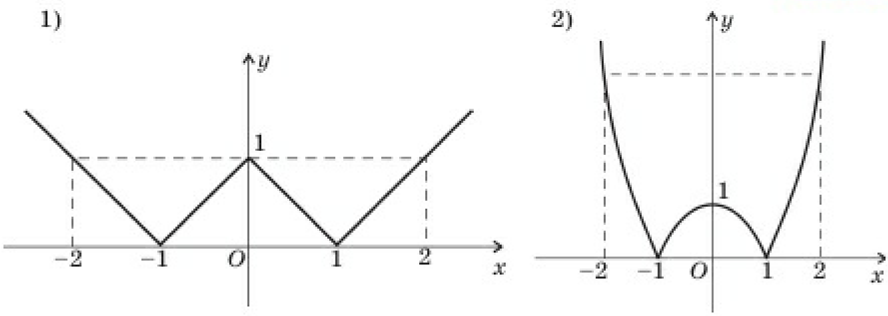


Рис. 1.14

1.21. Являются ли равными функции $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ и $g(x) = \sqrt{x(x-1)}$, если они заданы на множестве: 1) действительных чисел; 2) действительных неотрицательных чисел; 3) целых чисел; 4) натуральных чисел?

1.22. На рисунке 1.14 функции заданы графическим способом. Задайте их аналитическим способом.

1.23. Дана функция $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 1, \\ -1, \text{ если } x < 1. \end{cases}$

Задайте эту функцию одной формулой и постройте ее график.

1.24. Даны функции $f(x) = (2x+1)\sqrt{4-x}$ и $g(x) = \sqrt{4-x}$, $x \in (-\infty; 4]$.

Найдите область определения функции:

1) $f(x) \cdot g(x)$; 2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$; 3) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

4) В чем разница между функциями $f(x) \cdot g(x)$ и $h(x) = 4 + 7x - x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$? Обоснуйте ответ.

5) В чем разница между функциями $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\varphi(x) = 2x + 1$, $x \in (-\infty; +\infty)$? Обоснуйте ответ.

1.25. На множестве целых чисел функция задана графическим способом (рис. 1.15). Задайте эту функцию несколькими способами аналитически.

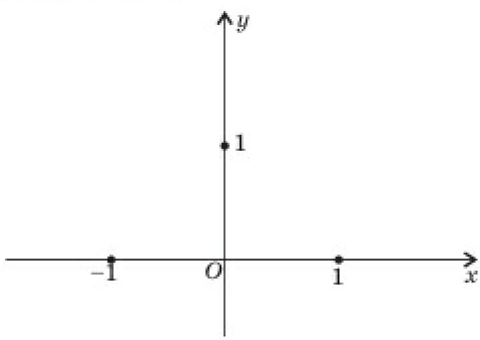


Рис. 1.15

1.26. Постройте график функции:

1) $f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x<0,\\ 0, \text{ если } x\geqslant 0;\end{cases}$ 2*) $h(x)=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right];$

3) $f(x)=\begin{cases}-1, \text{ если } x<0,\\ 0, \text{ если } x=0,\\ 1, \text{ если } x>0;\end{cases}$ 4) $g(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x<-1,\\ x, \text{ если } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ -1, \text{ если } x>1.\end{cases}$

Упражнения для повторения

1.27. Каковы наибольшее и наименьшее значения выражения:
1) $4+3\cos\alpha$; 2) $3-\sin\alpha$?

1.28. Докажите, что прямая $y=x-12$ не пересекается с окружностью $x^2+y^2=36$.

1.2. Некоторые свойства функции

1.2.1. Нули функции и понятие непрерывности функции

Определение. *Если при $x=a$ значение функции $f(x)$ равно нулю, т.е. выполняется равенство $f(a)=0$, то точка a называется* ***нулем функции*** *$f(x)$.*

Например, так как $f(1)=\dfrac{1-1}{1^2+1}=0$, то точка $x=1$ является нулем функции $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$.

Вообще, чтобы найти нули функции $y=f(x)$, достаточно найти корни уравнения $f(x)=0$. Если существуют корни этого уравнения, то они являются нулями функции $y=f(x)$. Например, чтобы найти нули функции $y=x^2+2x-3$, нужно найти корни уравнения $x^2+2x-3=0$: $x_1=-3$, $x_2=1$. Тогда точки $x_1=-3$ и $x_2=1$ являются нулями данной квадратичной функции.

Теперь рассмотрим понятие ***непрерывности*** функции. Это понятие далее будет рассмотрено на строго математической основе. Здесь же понятие непрерывности функции рассмотрим с помощью графика функции. Сначала рассмотрим примеры.

Пример 1. ▲ Функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ не определена в точке $x=0$. Ее область определения – $(-\infty;\ 0)\cup(0;+\infty)$, графиком этой функции является гипербола, расположенная в I и III координатных четвер-

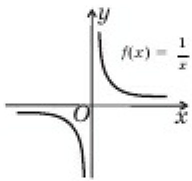


Рис. 1.16

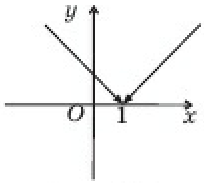


Рис. 1.17

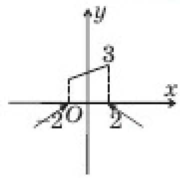


Рис. 1.18

тях (рис. 1.16), т.е. графиком функции $f(x) = \frac{1}{x}$ является кривая, состоящая из двух ветвей. Мы видим, что график этой функции «терпит разрыв» в точке $x = 0$. ■

Пример 2. ▲ Функция $f(x) = \frac{(x-1)^2}{|x-1|}$ определена во всех точках числовой оси, за исключением точки $x = 1$: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. По определению знака модуля данную функцию можно записать так:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, \text{ если } x > 1, \\ 1-x, \text{ если } x < 1. \end{cases}$$

График этой функции состоит из двух частей (рис. 1.17). Значит, график данной функции «терпит разрыв» в точке $x = 1$. ■

Пример 3. ▲ Хотя функция

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x+1, \text{ если } x < -2, \\ 0,5x+3, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ -0,5x+1, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

определена во всех точках множества $(-\infty; +\infty)$, ее график состоит из частей нескольких прямых (рис. 1.18.). Мы видим, что график этой функции «терпит разрыв» в точках $x = -2$ и $x = 2$.

Точка, в которой график функции «терпит разрыв», называется ***точкой разрыва*** функции. Если функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и на нем она не имеет точек разрыва, то функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной*** на этом промежутке. Например, функции $y = 2x^2 - 3$ и $y = 3x + 1$ непрерывны во всех точках числовой оси, а функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Однако во множестве всех действительных чисел $(-\infty; +\infty)$ она имеет точку разрыва ($x = 0$). Поэтому на множестве $(-\infty; +\infty)$ эта функция не является непрерывной. ■

1.2.2. Промежутки знакопостоянства функции

Определение. *Если функция $y = f(x)$ определена в промежутке $(a;\ b)$ и во всех точках этого промежутка выполняется только одно из неравенств $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$, то промежуток $(a;\ b)$ называется* ***промежутком знакопостоянства*** *функции $y = f(x)$.*

Например, для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ каждый из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$ является промежутком знакопостоянства, так на промежутке $(-\infty;\ 0)$ выполняется неравенство $\frac{1}{x} < 0$, а на промежутке $(0;\ +\infty)$ – неравенство $\frac{1}{x} > 0$. Аналогично, для функции $f(x) = \frac{(x-1)^2}{|x-1|}$ каждый из промежутков $(-\infty;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$ является промежутком знакопостоянства.

А для функции, рассмотренной в примере 3, промежутками знакопостоянства являются промежутки $(-\infty;\ -2)$, $[-2;\ 2]$ и $(2;\ +\infty)$.

Из этих примеров мы видим, что точки разрыва являются одним из концов промежутка знакопостоянства. Аналогично, нетрудно убедиться в том, что нули функции также являются одним из концов промежутка знакопостоянства. Сначала рассмотрим пример.

Пример 4. ▲ Функция $f(x) = x^2 - 3x - 4$ определена во всех точках числовой оси и непрерывна. Ее нулями являются точки $x = -1$ и $x = 4$. Графиком этой функции является парабола, проходящая через точки $(-1;\ 0)$ и $(4;\ 0)$, ветви которой направлены вверх (рис. 1.19). Мы видим, что при $x < -1$ или $x > 4$ функция принимает положительные значения, а при $-1 < x < 4$ – отрицательные значения, т. е. промежутки $(-\infty; -1)$, $(-1;\ 4)$ и $(4;\ +\infty)$ являются промежутками знакопостоянства функции.

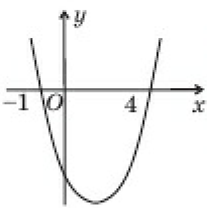


Рис. 1.19

В общем случае пусть будет задана функция $y = f(x)$. Через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначим нули функции и точки разрыва (если таковые имеются) данной функции, расположенные в порядке возрастания. Тогда на каждом из промежутков $(-\infty;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$, $(x_2;\ x_3)$, …, $(x_{n-1};\ x_n)$ и $(x_n; +\infty)$ функция непрерывна и на каждом из них она не имеет точек разрыва и нулей. Следовательно, на этих промежутках график функции расположен либо выше оси Ox, либо ниже этой оси, т.е. на каждом из указанных промежутков функция сохраняет свой знак.

Приведем доказательство данного утверждения методом доказательства от противного. Пусть на промежутке $(x_k;\ x_{k+1})$, где $k = 1, 2, \ldots, n-1$, найдутся точки u и v такие, что $f(u) < 0$ и $f(v) > 0$. Для определенности предположим, что $u < v$. Так как функция непрерывна на промежутке $(x_k; x_{k+1})$ и точки $(u; f(u))$ и $(v; f(v))$ расположены по разные стороны от оси Ox, то часть графика функции $y = f(x)$, соединяющая эти точки, должна пересечь ось Ox по меньшей мере один раз, т.е. на промежутке $(u; v)$ функция $f(x)$ имеет хотя бы один нуль. Это противоречит тому, что функция на промежутке $(x_k; x_{k+1})$ не имеет нулей. Полученное противоречие доказывает, что функция $f(x)$ на промежутке $(x_k; x_{k+1})$ сохраняет свой знак. Отсюда следует, что если в какой-либо точке $c \in (x_k; x_{k+1})$, где $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, выполнено неравенство $f(c) < 0$ ($f(c) > 0$), то функция во всех точках этого промежутка принимает отрицательные (положительные) значения. ■

Пример 5. Определим промежутки знакопостоянства функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2}.$$

▲ Так как корни квадратного трехчлена $x^2 + x - 2$ равны -2 и 1, а корни $x^2 + 3x - 4$ равны -4 и 1, то данную функцию можно записать так: $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+2)}$.

Отсюда видно, что функция не определена в точках $x = 1$ и $x = -2$ (точки разрыва), а точка $x = -4$ является нулем этой функции. Тогда точки -4, -2 и 1 делят числовую ось на 4 части: $(-\infty; -4)$, $(-4; -2)$, $(-2; 1)$ и $(1; +\infty)$. На каждом из указанных промежутков функция не меняет своего знака, т.е. они являются промежутками знакопостоянства функции. Так как при $-5 \in (-\infty; -4)$ имеем $f(-5) = \dfrac{1}{3} > 0$, то на этом промежутке функция принимает положительные значения, при $-3 \in (-4; -2)$ имеем $f(-3) = -1 < 0$, и на этом промежутке функция принимает отрицательные значения, а при $0 \in (-2; 1)$ имеем $f(0) = 2 > 0$, то на этом промежутке функция принимает положительные значения. Аналогично, на промежутке $(1; +\infty)$ функция принимает положительные значения, так как $f(2) = 3 > 0$. Итак, промежутки знакопостоянства данной функции можно видеть из следующей таблицы:

x	$(-\infty; -4)$	$(-4; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; +\infty)$
$f(x)$	+	−	+	+

■

1.2.3. Промежутки возрастания и убывания функции. Экстремум функции

Определение. *Если функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a; b)$ и для любых x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $a < x_1 < x_2 < b$, верно неравенство*

$$f(x_1) < f(x_2), \qquad (1)$$

то эта функция называется ***возрастающей*** *на промежутке $(a; b)$. Если выполняется неравенство*

$$f(x_1) > f(x_2), \qquad (2)$$

то функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** *на промежутке $(a; b)$.*

Другими словами, если для любых двух значений аргумента из $(a; b)$ большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то эта функция называется ***возрастающей***, а если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то эта функция называется ***убывающей***.

Например, функция, график которой изображен на рисунке 1.20, на промежутке $(-2; 2)$ возрастает, а на промежутке $(2; 4)$ убывает.

Теперь определим промежутки возрастания и убывания линейной функции $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. Пусть $x_1 < x_2$, тогда $y_1 = ax_1 + b$ и $y_2 = ax_2 + b$. Отсюда $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$. Здесь, так как $x_2 - x_1 > 0$, то знак разности $y_2 - y_1$ совпадает со знаком коэффициента a. Итак, если $a > 0$, то $y_2 - y_1 > 0$, или $y_2 > y_1$. Функция является возрастающей (рис. 1.21). Если $a < 0$, то $y_2 < y_1$. Функция является убывающей (рис. 1.22).

Если для функции $f(x)$ вместо неравенства (1) выполняется неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функция называется ***неубывающей***. А если вместо неравенства (2) выполняется неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функция называется ***невозрастающей***. Например, функция $f(x) = [x]$ (целая часть x) является неубывающей, так как для лю-

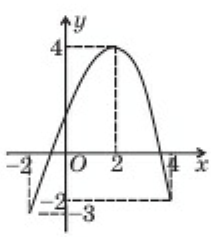


Рис. 1.20

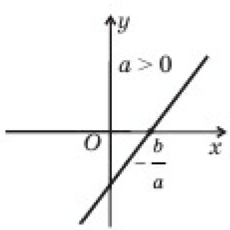


Рис. 1.21

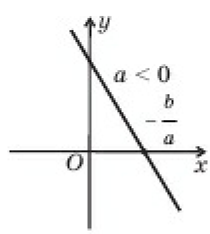


Рис. 1.22

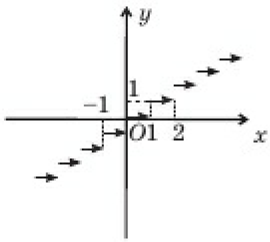


Рис. 1.23

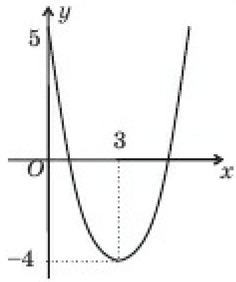


Рис. 1.24

бых x_1 и x_2 таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $[x_1] \leqslant [x_2]$. Ее график изображен на рис. 1.23.

Пример 1. Определим промежутки возрастания и убывания функции $y = x^2 - 6x + 5$.

▲ Для этого, выделив квадрат двучлена, данную функцию запишем в виде $y = (x - 3)^2 - 4$. Графиком этой функции является парабола с вершиной в точке $(3; -4)$, ветви которой направлены вверх (рис. 1.24). Отсюда видим, что эта квадратичная функция на промежутке $(-\infty; 3)$ убывает, а на промежутке $(3; +\infty)$ возрастает. ■

Теперь рассмотрим понятие экстремума функции. Для этого будем считать, что функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и ее графиком является непрерывная линия.

Определение. *Если функция определена в точке x_0 и при переходе через точку x_0 слева направо точка x_0 является границей соответственно промежутков возрастания и убывания функции $y = f(x)$, то точка x_0 называется* ***точкой максимума*** *этой функции. А если точка x_0 является границей соответственно промежутков убывания и возрастания, то x_0 называется* ***точкой минимума*** *функции. Точки максимума и минимума функции называются* ***точками экстремума функции.***

Если x_0 является точкой максимума функции $y = f(x)$, то значение $f(x_0)$ называют ***максимумом*** этой функции и его обозначают так: $\max f(x)$. Если x_0 является точкой минимума функции $y = f(x)$, то значение $f(x_0)$ называют ***минимумом*** этой функции и его обозначают так: $\min f(x)$. Например, для функции, график которой изображен на рисунке 1.20, точка $x = 2$ является точкой максимума, так как на промежутке $(-2; 2)$ функция возрастает, а на промежутке $(2; 4)$ убывает. Итак, $\max f(x) = f(2) = 4$. А для квадратичной функции $y = x^2 - 6x + 5$ точка $x = 3$ является точкой минимума. Следовательно, $\min(y) = y(3) = -4$ (рис. 1.24).

Определим наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке. Для этого определяют все точки минимума и максимума функции из $[a; b]$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – точки экстремума функции на отрезке $[a; b]$, расположенные в порядке возрастания. Тогда, включая точки a и b к этим точкам, находим следующие значения функции: $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n)$, $f(b)$ и среди них выбираем наибольшее и наименьшее значения, которые и являются соответственно наибольшим и наименьшим значениями данной функции на отрезке $[a; b]$.

Например, для функции, график которой изображен на рисунке 1.20, наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-2; 4]$ равны соответственно $f(2) = 4$ и $f(-2) = -3$.

Теперь определим наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции $y = x^2 - 6x + 5$ на отрезке $[0; 5]$. Так как $x = 3$ является точкой минимума функции и $3 \in [0; 5]$, то находим значения данной функции в точках 0, 3 и 5: $f(0) = 5$, $f(3) = -4$, $f(5) = 0$. Следовательно, 5 – наибольшее значение функции, а -4 – наименьшее значение функции (рис. 1.24).

1.2.4. Четная и нечетная функции

Считается, что область определения рассматриваемой в этом пункте функции $y = f(x)$ симметрична относительно начала координат.

Определение 1. *Если для функции $y = f(x)$ верно равенство*

$$f(-x) = f(x), \quad (1)$$

то эта функция называется ***четной.***

Например, функции $y = x^2$, $y = |x|$ – четные функции, так как $(-x)^2 = x^2$ и $|-x| = |x|$.

На графике функции $y = f(x)$ рассмотрим точки $M(a; b)$ и $N(-a; b)$.

Если точка $M(a; b)$ принадлежит графику четной функции $y = f(x)$, то верно равенство $b = f(a)$. В силу равенства (1) имеем $f(-a) = f(a) = b$. Следовательно, точка $N(-a; b)$ также лежит на графике этой функции. Отсюда следует, что ***график четной функции симметричен относительно оси Oy*** (рис. 1.25).

Определение 2. *Если для функции $y = f(x)$ верно равенство*

$$f(-x) = -f(x), \quad (2)$$

то эта функция называется ***нечетной.***

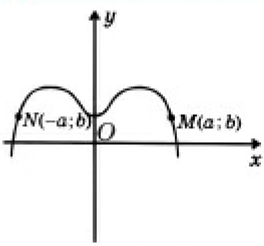


Рис. 1.25

Например, функции $y = x$, $y = x^3$ – нечетные функции, так как $(-x)^1 = -x$ и $(-x)^3 = -x^3$.

На графике функции $y = f(x)$ рассмотрим точки $P(a; b)$ и $Q(-a; -b)$.

Если точка $P(a; b)$ лежит на графике нечетной функции $y = f(x)$, то верно равенство $b = f(a)$. В силу равенства (2) имеем

$f(-a) = -f(a) = -b$. Следовательно, точка $Q(-a; -b)$ также лежит на графике этой функции. Отсюда следует, что ***график нечетной функции симметричен относительно начала координат*** (рис. 1.26).

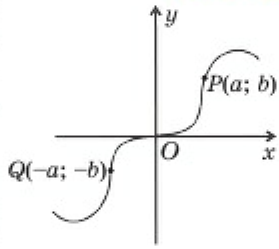


Рис. 1.26

Ошибочно думать, что любая функция является либо четной, либо нечетной. Существуют функции, не являющиеся ни четной, ни нечетной. Например, для функции $f(x) = x + x^2$ не выполняется ни одно из равенств (1) и (2), так как $f(-x) = -x + x^2$.

Функцию, которая не является ни четной, ни нечетной, называют ***функцией общего вида*** (ФОВ). Итак, $f(x) = x + x^2$ – ФОВ.

Кроме того, для проверки четности или нечетности функции необходимо, чтобы ее область определения была симметричной относительно начала координат, так как в области определения этих функций вместе с точкой a должна лежать и точка $-a$. Только в этом случае четность или нечетность функции проверяется с помощью равенств (1) и (2).

1. Какие точки называются нулями функции?
2. Какие точки называются точками разрыва функции? Объясните понятие непрерывности функции.
3. Как определяют промежутки знакопостоянства функции?
4. Дайте определение возрастающей и убывающей функций.
5. Какие точки называются точками максимума (минимума) функции?
6. Как определяют наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке?
7. Какие функции называются четными (нечетными) функциями?
8. Какую функцию называют функцией общего вида (ФОВ)?

Творческая работа

Квадраты со сторонами 8, 6, 4 и 2 парами построены так, как показано на рисунке 1.27. Найдите координаты центров этих квадратов. Покажите, что эти центры лежат на параболе, и напишите уравнение этой параболы.

Каковы координаты центров пар квадратов, если по указанному принципу продолжить построение этих квадратов ниже оси Ox.

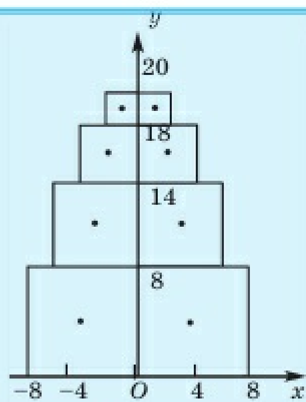


Рис. 1.27

Упражнения

А

1.29. Найдите нули функции:

1) $f(x) = 2x - 3$; 2) $\varphi(x) = 3 - |x|$;

3) $h(x) = 2x^2 + 5x - 7$; 4) $v(x) = 4 - x - 3x^2$;

5) $\psi(x) = \sqrt{x^2 + x}$; 6) $F(x) = \sqrt{x - x^2 + 2}$;

7) $g(x) = \dfrac{x+1}{2x^2 + 5x + 3}$; 8) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}$;

9) $h(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 + 5x + 3}$.

1.30. Докажите непрерывность функции, в противном случае найдите точки разрыва:

1) $y = 2x^2 + x + 1$; 2) $y = 3 - x$; 3) $y = \dfrac{21x - 9}{3x - 1}$;

4) $y = \dfrac{4x + 31}{x + 7}$; 5) $y = \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$; 6) $y = \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$;

7) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$; 8) $y = \dfrac{(x^3 + 8)(x - 4)}{x^2 - 2x - 8}$.

1.31. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = 2x - 3$; 2) $g(x) = -3x + 2$; 3) $f(x) = |x|$;

4) $u(x) = |x - 2|$; 5) $h(x) = \dfrac{x^2}{2}$; 6) $r(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$.

1.32. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = (x - 2)^2$; 2) $g(x) = -(x - 3)^2$; 3) $u(x) = (x - 1)^2 - 3$;

4) $h(x) = 3 - (x - 3)^2$; 5) $r(x) = x^2 - 4x + 5$; 6) $h(x) = -2x^2 + 6x - 7$.

1.33. Какие известные вам функции на всей числовой оси: 1) не имеют экстремумов; 2) имеют только один экстремум?

1.34. Найдите экстремумы функции:

1) $y = (x - 1)^2 + 5$; 2) $y = 12x^2 - x - 1$;

3) $y = 3 - (x + 2)^2$; 4) $y = (x - 1)(x - 3)$.

1.35. Найдите для функции $y = (x - 3)(x - 5)$ наибольшее и наименьшее значения на промежутке: 1) $[2; 3]$; 2) $[3; 4]$; 3) $[4; 5]$; 4) $[2; 5]$.

1.36. Определите четность или нечетность функции (устно):

1) $y = x^{10}$; 2) $y = x^6$; 3) $y = x^4 - 2x^2 + 3$; 4) $y = x^3 - 5x$.

1.37. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

1) $y = x - 2$; 2) $y = 2 - 3x$; 3) $y = x^2 - 3x + 2$;

4) $y = -3x^2 + 5x - 2$; 5) $y = (3x - 10)(x + 6)$; 6) $y = \dfrac{6 - x}{x}$.

1.38. Опираясь на определение возрастающей и убывающей функций, докажите, что функция:

1) $y = \dfrac{5}{2x}$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$;

2) $y = -\dfrac{4}{x}$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$.

B

1.39. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $g(x) = \dfrac{1}{x}$; 2) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$; 3) $f(x) = \sqrt{x}$;

4) $h(x) = -\sqrt{x}$; 5) $g(x) = \sqrt{|x|}$; 6) $h(x) = \sqrt[3]{x}$;

1.40. Докажите, что функция: 1) $y = \dfrac{5}{2x+1}$ убывает на промежутке $(-\infty; 0,5)$; 2) $y = \dfrac{4}{2-x}$ возрастает на промежутке $(2; +\infty)$;

3) $y = 3\sqrt{4x+1} - 1$ возрастает на промежутке $[-0,25; +\infty)$;

4) $y = 3x^2 - 4x + 7$ убывает на промежутке $\left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right]$.

1.41. Найдите область определения, область значений, нули, точки разрыва (если они есть) и промежутки знакопостоянства функции:

1) $y = x^2 + 2$; 2) $y = 3 - 4x^2$; 3) $y = 3x^2 - 6x + 1$;

4) $v(x) = \dfrac{|x|}{x}$; 5) $y = \dfrac{4 + 2x}{5 + x}$; 6) $y = \dfrac{6}{(x-1)(x+8)}$.

1.42. Равны ли функции $f(x)$ и $\varphi(x)$?

1) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$, $\varphi(x) = \sqrt{x(x-1)}$;

2) $f(x) = |x|\sqrt{x+1}$, $\varphi(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$.

1.43. Определите, является ли функция возрастающей или убывающей:

1) $y = \dfrac{3}{x-1}$; 2) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$; 3) $y = 2 + \dfrac{1}{x-2}$; 4) $y = 3 + \dfrac{x+1}{x+3}$.

1.44. Найдите точки пересечения функции с осью абсцисс:

1) $y = 3x - x^2$; 2) $y = 3x^2 - 6x + 1$; 3) $y = \sqrt{x-2} - 3$;

4) $y = 5 - \sqrt{2x+1}$; 5) $y = |x-4| - 2$; 6) $y = 3 - |2x+3|$.

7) $y = \begin{cases} (x-1)^3, \text{ если } x \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{x-1}, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ 8) $y = \begin{cases} -x^2 - 2x, \text{ если } x < 1, \\ -\dfrac{1}{x}, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

1.45. Для функции $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 0, \\ x, \text{ если } 0 < x < 1, \\ 1, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$

найдите значения $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$, $f(1)$, $f(4)$.

1.46. Для функции $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, \text{ если } |x| \leqslant 2, \\ 1, \text{ если } x > 2 \end{cases}$

найдите значения $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$.

1.47. На рис. 1.28 задан график функции $y=\varphi(x)$. Найдите:

1) $\varphi(-5), \varphi(-2), \varphi(3), \varphi(5)$;

2) значения x, удовлетворяющие равенствам $\varphi(x) = 2$, $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x) = -1$.

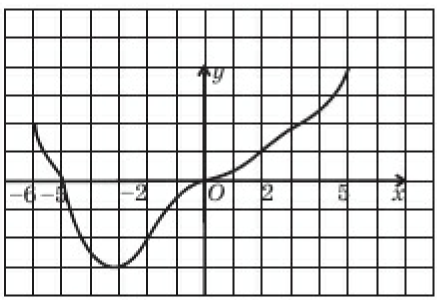


Рис. 1.28

1.48. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = x - 1$; 2) $g(x) = \sqrt{x+3}$; 3) $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

4) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$; 5) $g(x) = \sqrt{5 - 10x}$; 6) $\varphi(x) = \sqrt{10x - 5}$;

7) $F(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$; 8) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$; 9) $g(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-3x+2}$.

1.49. Исследуйте функцию на четность:

1) $f(x) = 9$; 2) $g(x) = 0$; 3) $h(x) = (2 - 3x)^3 + (2 + 3x)^3$;

4) $f(x) = (5x - 2)^4 + (5x + 2)^4$;

5) $f(x) = (x - 6)^9(x + 3)^5 + (x + 6)^9(x - 3)^5$.

1.50. Определите четность функции:

1) $y = (x+3)|x-1| + (x-3)|x+1|$;

2) $y = (x+5)|x-3| - (x-5)|x+3|$;

3) $y = \dfrac{|x-7|}{x+1} + \dfrac{|x+7|}{x-1}$;

4) $y = \dfrac{|x-4|}{x+2} + \dfrac{|x+4|}{x-2}$;

5) $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2}{x+1} - \dfrac{x^3+2x^2}{x-1}$;

6) $g(x) = \dfrac{(x-1)^5}{(3x+4)^3} - \dfrac{(x+1)^5}{(3x-4)^3}$.

1.51. Покажите, что для функции $\psi(x) = 3x + 5x^3 - 2x^5$ верно равенство $\psi(-x) = -\psi(x)$.

1.52. Покажите, что для функции $\psi(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ верно равенство $\psi(-x) = \psi(x)$.

C

1.53. Известно, что функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастают на промежутке $(a; b)$. Докажите, что на этом промежутке функция: 1) $f(x) + g(x)$ возрастает; 2) $f^2(x)$ возрастает; 3) $-f(x)$ убывает; 4) $\dfrac{1}{f(x)}$ убывает.

1.54. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 12x + 9} - 2$; 2) $g(x) = 3 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$;

3) $h(x) = -\dfrac{2}{x^2+1}$; 4) $u(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+5}$.

1.55. Сколько корней может иметь уравнение $f(x) = 0$, если известно, что функция $f(x)$ возрастает (убывает) на всей числовой прямой и ее график не имеет точек разрыва? Может ли это уравнение не иметь корней?

1.56*. Известно, что функция $f(x)$ нечетная, причем:

1) $f(x) = x^2,\ x \geqslant 0$; 2) $f(x) = x^2,\ x \leqslant 0$

3) $f(x) = x^2 - 2x,\ x \geqslant 0$; 4) $f(x) = \sqrt{x},\ x > 0$.

Задайте эту функцию одной формулой и постройте ее график.

1.57*. Известно, что функция $y = f(x)$ четная, причем:

1) $f(x) = \sqrt{x},\ \ x \geqslant 0$; 2) $f(x) = x^2 - 3x,\ x \geqslant 0$;

3) $f(x) = x^2 - 2x,\ \ x \geqslant 0$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ \ x \leqslant 0$.

Задайте эту функцию одной формулой и постройте ее график.

В упражнениях **1.58*** – **1.61*** исследуйте функции и постройте их графики.

1.58*. $y = \begin{cases} 3, \text{ если } x \leqslant -4, \\ \left|x^2 - 4|x| + 3\right|, \text{ если } -4 \leqslant x \leqslant 4, \\ 3 - (x-4)^2, \text{ если } x > 4. \end{cases}$

1.59*. $y = \begin{cases} 8 - (x+6)^2, \text{ если } x < -6, \\ \left|x^2 - 6|x| + 8\right|, \text{ если } -6 \leqslant x \leqslant 5, \\ 3, \text{ если } x \geqslant 5. \end{cases}$

1.60*. $y = \begin{cases} \left|\left||x| - 1\right| - 1\right|, \text{ если } |x| < 2, \\ \sqrt{|x| - 2}, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$

1.61*. $y = \begin{cases} 2 - \sqrt{4 - |x|}, \text{ если } |x| \leqslant 4, \\ \dfrac{8}{x}, \text{ если } |x| > 4. \end{cases}$

1.3. Простейшая схема исследования функции

Исследование функции удобно проводить по определенной схеме, что облегчает процесс изучения свойств функции и построения ее графика. Рассмотрим простейшую схему исследования функции.

1. *Находят область определения функции, точки разрыва, если таковые имеются.*
2. *Определяют четность и периодичность функции.*
3. *Находят точки пересечения графика функции с осями координат.*
4. *Находят промежутки знакопостоянства функции.*
5. *Определяют промежутки возрастания и убывания функции.*
6. *Находят точки экстремума и значения функции в этих точках.*
7. *Если это необходимо, то дополнительно находят координаты нескольких точек, принадлежащих графику функции, и схематично строят график функции.*

Теперь поясним применение этой схемы на примере.

Пример. Исследуем функцию $f(x) = x^4 - 2x^2$ и построим ее график.

▲ **1.** Так как выражение $x^4 - 2x^2$ имеет смысл при любом $x \in (-\infty; +\infty)$, то областью определения данной функции является $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Следовательно, функция не имеет точек разрыва.

2. а) Сначала вспомним определения четности и нечетности функции.

Вы это знаете

Определение. *Если область определения функции $y = f(x)$ симметрична относительно начала координат и выполняется равенство*

$$f(-x) = f(x),\ x \in D(f), \tag{1}$$

то функция $f(x)$ называется ***четной.***

А если вместо (1) выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x),\ x \in D(f), \tag{2}$$

то функция $f(x)$ называется ***нечетной.***

Если ни одно из равенств (1) и (2) не выполняется, то функция $y = f(x)$ называется ***функцией общего вида*** **(ФОВ).**

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции – относительно начала координат.

В нашем случае $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$, т.е. функция является четной и ее график симметричен относительно оси Oy. Тогда достаточно исследовать функцию при $x \geqslant 0$ и построить часть ее графика, расположенную в I и IV координатных четвертях.

б) Если найдется число $T \neq 0$, такое, что для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$, то функция $f(x)$ называется ***периодической*** с периодом, равным T.

В нашем случае данная функция непериодическая, т.к. не существует числа $T \neq 0$, для которого выполнялось бы указанное равенство.

3. Для того чтобы найти точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс, необходимо найти корни уравнения $f(x) = 0$: $x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{2}$. Тогда график данной функции пересекается с осью Ox в точках $A_1\left(-\sqrt{2}; 0\right)$, $O(0;\ 0)$ и $A_2\left(\sqrt{2}; 0\right)$.

Функция с осью Oy пересекается в точке $(0;\ f(0))$, т.е. в точке $O(0;\ 0)$.

4. Чтобы определить промежутки знакопостоянства функции, расположим нули функции в порядке возрастания (если имеются точки разрыва, то их также включают в этот список). Эти точки разбивают числовую ось на несколько промежутков. Следует определить знак функции на каждом из полученных промежутков (в каждом из них функция не меняет своего знака).

В рассматриваемом примере нулями функции являются точки $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$. Эти точки разбивают числовую ось на четыре промежутка: $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}; 0\right)$, $\left(0; \sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$. Чтобы определить знаки функции на каждом из указанных промежутков, преобразуем ее в произведение: $f(x) = x^4 - 2x^2 = x^2\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$ и определим знак функции методом интервалов (рис. 1.29).

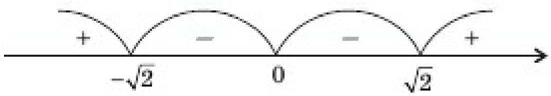


Рис. 1.29

Отсюда видно, что функция во множестве $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2};\ +\infty\right)$ принимает положительные значения, а во множестве $\left(-\sqrt{2}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{2}\right)$ – отрицательные значения.

5. Чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции, преобразуем ее: $f(x) = x^4 - 2x^2 = (x^2)^2 - 2x^2 + 1 - 1 = (x^2 - 1)^2 - 1$. Отсюда видно, что при $x^2 - 1 = 0$ или $x = \pm 1$ функция принимает наименьшее значение. А по мере возрастания величины $|x|$ функция $f(x) = x^4 - 2x^2$ неограниченно возрастает. Следовательно, на промежутке $(-\infty;\ -1)$ функция убывает, а на промежутке $(1;\ +\infty)$ возрастает. На отрезке $[-1;\ 1]$ функция в точке $x = 0$ принимает наибольшее значение. Значит, на промежутке $(-1;\ 0)$ она возрастает, а на промежутке $(0;\ 1)$ убывает.

6. Если при движении по оси Ox слева направо точки x_0, не являющейся точкой разрыва функции, в которой промежуток возрастания функции сменяется промежутком убывания и, наоборот, промежуток убывания сменяется промежутком возрастания, x_0 является точкой экстремума. А именно, если в точке x_0 промежуток убывания переходит в промежуток возрастания, то эта точка является точкой минимума. Если в точке x_0 промежуток возрастания переходит в промежуток убывания, то эта точка является точкой максимума. Точки максимума обозначаются через x_{max}, а точки минимума – через x_{min}. Соответствующие значения функции обозначаются через y_{max} и y_{min} соответственно.

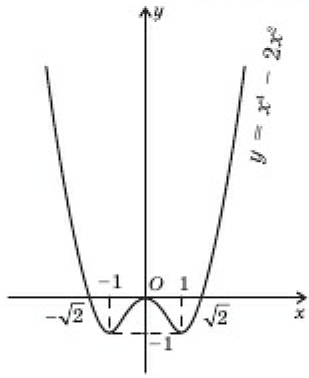


Рис. 1.30

Вернемся к нашему примеру. Функция $f(x) = x^4 - 2x^2 = (x^2 - 1)^2 - 1$ принимает наименьшее значение в точках $x = -1$ и $x = 1$, $f(\pm 1) = -1$. Значит, точки $x = -1$ и $x = 1$ – точки минимума этой функции. На отрезке $[-1; 1]$ функция принимает наибольшее значение в точке $x = 0$, $f(0) = 0$. Следовательно, $x = 0$ есть точка максимума.

7. Чтобы построить график данной функции (рис. 1.30), удобно пользоваться следующей таблицей, где отмечаются все выявленные свойства исследуемой функции:

x	$(-\infty; -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}; +\infty)$
$f(x)$	↘ +	0	↘ −	−1 min	↗ −	0 max	− ↘	−1 min	↗ −	0	↗ +

1. По какой схеме проводят исследование функции? Поясните смысл каждого из указанных пунктов.
2. Какие функции называются четными, какие – нечетными, а какие – функцией общего вида?
3. Какие функции называются периодическими?
4. Какие точки называются точками максимума и минимума (экстремума)?
5. Как иначе можно определить точки экстремума функции, не имеющей точек разрыва?
6. Насколько важно в предыдущем пункте условие «функции, не имеющей точек разрыва»? Приведите пример.

Упражнения

А

В заданиях **1.62 – 1.69** постройте графики указанных функций:

1.62. 1) $f(x) = 2x - 5$; 2) $f(x) = 3 - 0{,}5x$;

3) $f(x) = 3x + 4$; 4) $f(x) = \dfrac{x}{2} + 2$.

1.63. 1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; 2) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$;

3) $f(x) = 9 - x^2$; 4) $f(x) = 2 - 3x^2 + x$.

1.64. 1) $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$; 2) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x-2}$.

B

1.65. 1) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$; 2) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$; 3) $f(x) = x^3 - 8$.

1.66. 1) $y = x^4 - 10x^2 + 9$; 2) $y = x^3 - 2x$;
3) $y = x^3 - 3x + 2$; 4) $y = x^4 + 2x^2 + 1$.

1.67. 1) $y = \dfrac{3x - x^2 - 2}{3x^2 - x - 2}$; 2) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$.

C

1.68. 1) $y = |x - 1|$; 2) $y = |x^2 - 4x - 12|$;
3) $y = |x + 3| - |2x - 1|$; 4) $y = 2x^2 - |x| + 1$.

1.69. 1) $y = \dfrac{x^2 - x}{x^3 + x^2 - 2x}$; 2) $y = x^2 - |x - 2| - 4$;
3) $y = (x + 1)(|x| - 2)$; 4) $y = \dfrac{|x-2|+1}{x+3}$.

1.70. С помощью шаблона графика функции $y = x^2$ постройте график функции: 1) $y = x^2 - 8x + 7$; 2) $y = x^2 + 4x + 3$?

Упражнения для повторения

1.71. Напишите формулу общего члена последовательности:
1) $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \ldots$; 2) 3, 6, 12, 24, 48, … .

1.72. Докажите тождество:
1) $(1 + \mathrm{tg}^2\beta)(1 - \cos^2\beta) = \mathrm{tg}^2\beta$; 2) $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha} = 2\mathrm{tg}\,\alpha$.

1.73. Решите уравнение:
1) $x^2 - 3|x| = 0$; 2) $2p^2 + 3|p| - 7p = 0$.

1.4. Простейшие преобразования графиков функций

Как было сказано в п. 1.3 с помощью простейших исследований можно схематично построить график функции. Однако в отдельных случаях удобно строить график функции с помощью преобразования графика ранее изученной функции.

1.4.1. Параллельный перенос

Мы подробно изучали этот метод в курсе алгебры в 8 классе. Например, если построен график функции $y = f(x)$, то график функции $y = f(x - m) + n$ получается с помощью параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ на вектор $\vec{a} = (m; n)$. На рис. 1.31 изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = f(x - 1) + 2$.

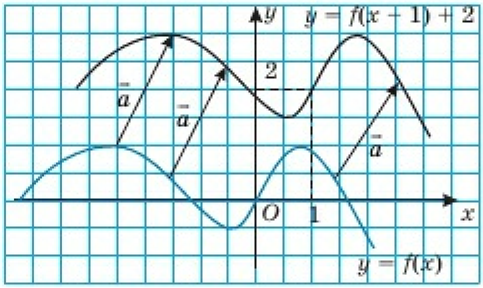


Рис. 1.31

Теперь рассмотрим пример построения графика дробно-линейной функции с помощью параллельного переноса графика обратной пропорциональности.

Пример 1. Построим график функции $y = \dfrac{x-1}{x+3}$.

▲ Т.к. $\dfrac{x-1}{x+3} = \dfrac{x+3-4}{x+3} = 1 - \dfrac{4}{x+3}$, то данную функцию можно записать так:

$$y = -\frac{4}{x+3} + 1.$$

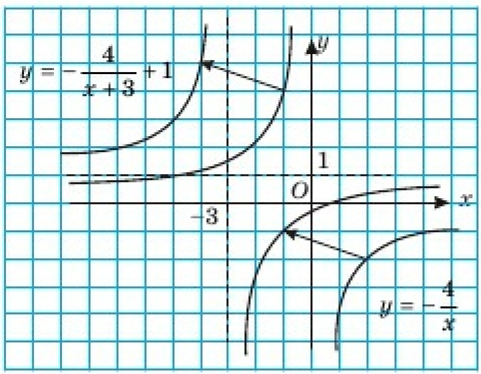


Рис. 1.32

График этой функции можно получить путем параллельного переноса графика функции $y = -\dfrac{4}{x}$ на вектор $\vec{a} = (-3; 1)$, т.е. график функции $y = -\dfrac{4}{x}$ нужно поднять вверх на 1 единицу параллельно оси Oy и перенести влево на 3 единицы параллельно оси Ox (рис. 1.32). ■

1.4.2. Растяжение и сжатие

Для каждого x сравним значения функций $y = f(x)$ и $y = af(x)$. При $x = x_0$ функция $y = f(x)$ принимает значение, равное $y_0 = f(x_0)$, а функция $y = af(x)$ – значение $y_1 = f(x_0) = ay_0$, т.е. каждое значение функции $y = af(x)$ изменилось в a раз по сравнению с соответствующими значениями функции $y = f(x)$. Например, на рис. 1.33 изображены графики

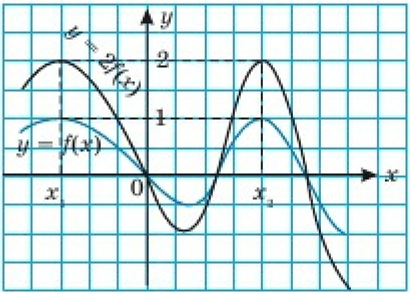


Рис. 1.33

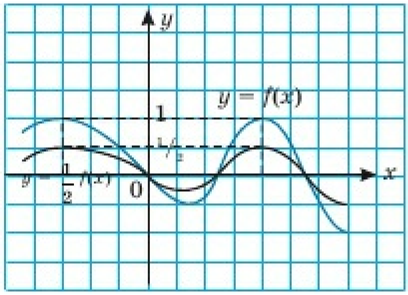


Рис. 1.34

функций $y = f(x)$ и $y = 2f(x)$. Мы видим, что график функции $y = 2f(x)$ получили путем растяжения в 2 раза графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy. А на рис. 1.34 изображены графики функции $y = f(x)$ и $y = \frac{1}{2}f(x)$. Здесь график функции $y = \frac{1}{2}f(x)$ получился путем сжатия в 2 раза графика $y = f(x)$ к оси Ox вдоль оси Oy.

При $a < 0$ график функции $y = af(x)$ получается симметричным отображением графика $y = |a|f(x)$. Например, на рис. 1.35 изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$.

На рис. 1.36 изображены графики функций $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = -\frac{1}{2}x^2$.

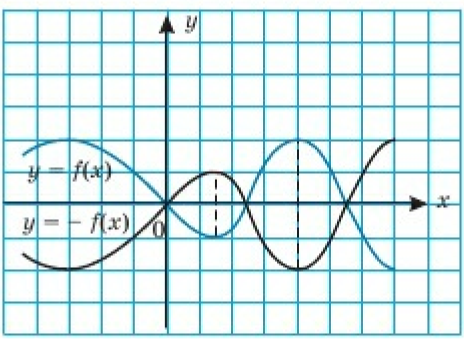


Рис. 1.35

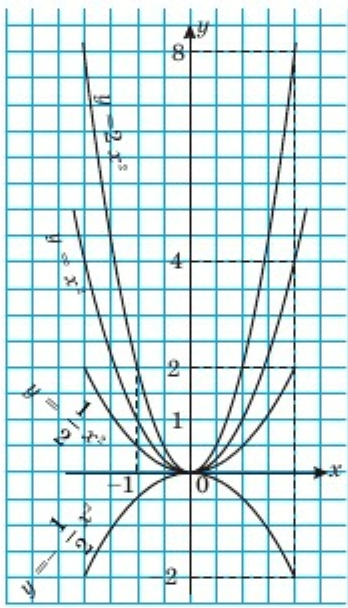


Рис. 1.36

1. Графики каких функций можно построить с помощью параллельного переноса? Приведите пример
2. При каких значениях a, $(a > 0)$ график функции $y = af(x)$ по сравнению с графиком $y = f(x)$:
   а) растягивается в a раз;
   б) сжимается к оси Ox в $\dfrac{1}{a}$ раз? Приведите пример.

Практическая работа

1. Заполните таблицу и проверьте достоверность графиков, изображенных на рис. 1.36.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$					
$y = \dfrac{1}{2}x^2$					
$y = -\dfrac{1}{2}x^2$					

2. Из жесткой бумаги изготовьте шаблон графика функции $y = \dfrac{1}{2}x^2$ и с его помощью постройте графики функций $y = \dfrac{1}{2}(x+2)^2 - 3$, $y = -0{,}5x^2$, $y = 4 - 0{,}5(x+1)^2$ и $y = \dfrac{1}{2}(x-3)^2 + 2$.
3. Изготовьте шаблон графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ и с его помощью постройте графики функций $y = -\dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x-2} + 3$, $y = -\dfrac{1}{x+1} - 2$.

Упражнения

А

1.74. Определите (устно), график какой функции нужно переместить параллельно оси Ox, чтобы получить график следующей функции. Постройте оба графика в одной системе координат:

1) $y = (x-2)^2$; 2) $y = x^2 + 6x + 9$; 3) $y = (x+1)^3$;

4) $y = \dfrac{1}{x+3}$; 5) $y = \dfrac{1}{x-3}$; 6) $y = -\dfrac{1}{x-2}$.

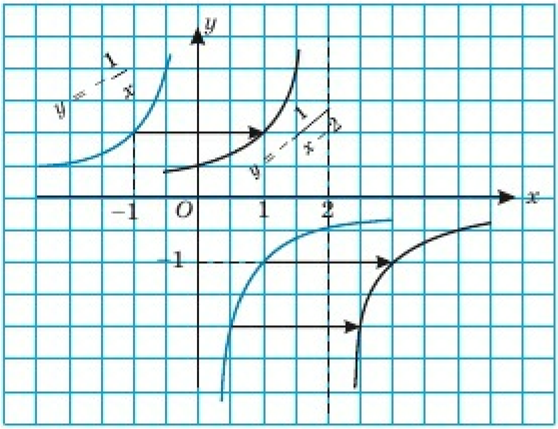


Рис. 1.37

6) ▲ График функции $y = -\frac{1}{x}$ нужно переместить вправо на 2 единицы, получим график функции $y = -\frac{1}{x-2}$. (рис. 1.37). ■

1.75. График какой функции нужно переместить параллельно оси Oy, чтобы получить график следующей функции? (*Определите устно.*) Постройте оба графика в одной системе координат:

1) $y = x^2 - 2$; 2) $y = x^2 + 3$; 3) $y = x^3 + 1$;

4) $y = \frac{1}{x} + 3$; 5) $y = \frac{1-x}{x}$; 6) $y = -2 - \frac{1}{x}$.

1.76. Постройте график функции с помощью параллельного переноса:

1) $y = (x - 3)^2 + 1$; 2) $y = x^2 - 4x + 5$; 3) $y = 7 - 6x - x^2$;

4) $y = \frac{2x-1}{x-1}$; 5) $y = \frac{3x-7}{x-2}$; 6) $y = \frac{4x+7}{x+2}$.

1.77. График какой функции нужно «сжать» или «растянуть» в направлении, параллельном оси Oy, и во сколько раз нужно «сжать» («растянуть»)? (*Определите устно.*)

1) $y = \frac{1}{3}x^2$; 2) $y = 3x^2$; 3) $y = \frac{5}{3}x^2$; 4) $y = -\frac{3}{5}x^3$;

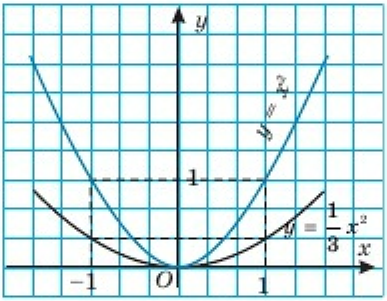


Рис. 1.38

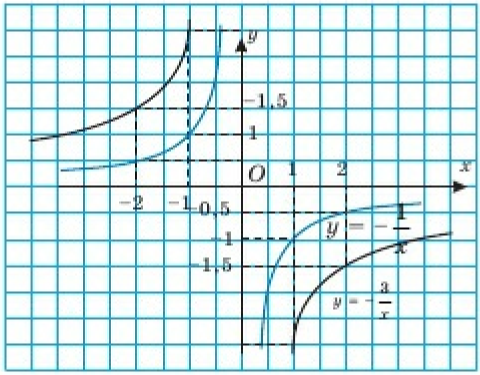


Рис. 1.39

5) $y = \dfrac{2}{x}$; 6) $y = \dfrac{1}{2x}$; 7) $y = -\dfrac{3}{x}$; 8) $y = -\dfrac{1}{3x}$.

1.78. Постройте графики функций, данных в задаче 1.77, путем сжатия (растяжения).

1) ▲ Смотрите рис. 1.38 ■; 7) ▲ Смотрите рис. 1.39 ■.

B

График какой функции и на какой вектор нужно перенести параллельно, чтобы получить график данной функции (**1.79–1.80**)? Постройте оба графика в одной системе координат.

1.79. 1) $y = x^2 + 3x + 7$; 2) $y = 2 + 7x - x^2$;

3) $y = x^3 + \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{3x}{4} + 1$; 4) $y = x^3 - x^2 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{37}{27}$.

4) ▲ Сначала проведем следующее преобразование:

$$x^3 - x^2 + \frac{x}{3} - \frac{37}{27} = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \frac{36}{27} = \left(x - \frac{1}{3}\right)^3 - \frac{4}{3}.$$

Тогда данная функция записывается так:

$$y = \left(x - \frac{1}{3}\right)^3 - \frac{4}{3}.$$

Поэтому график функции $y = x^3$ нужно перенести параллельно вектору $\vec{a} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$ (см. рис. 1.40). ■

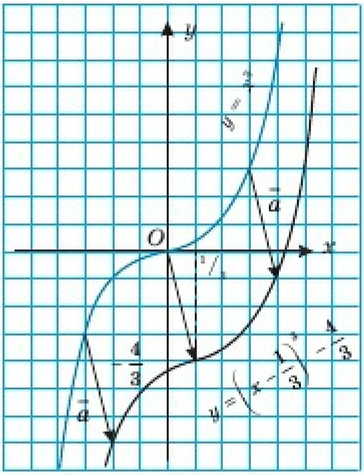


Рис. 1.40

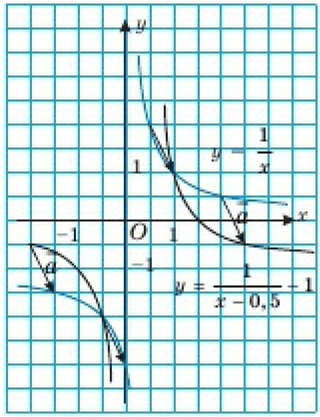


Рис. 1.41

1.80. 1) $y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{x-0,5}$; 2) $y = \dfrac{2}{2x-1} - 1$;

3) $y = \dfrac{6x-5}{2x-1}$; 4) $y = \dfrac{1-3x}{3x+2}$.

> 2) ▲ Т.к. $\dfrac{2}{2x-1} - 1 = \dfrac{2}{2(x-0,5)} - 1 = \dfrac{1}{x-0,5} - 1$, то данная функция записывается в виде $y = \dfrac{1}{x-0,5} - 1$. Поэтому график функции $y = \dfrac{1}{x}$ нужно перенести параллельно вектору $\vec{a} = (0,5; -1)$ (см. рис. 1.41). ■

1.81. Во сколько раз нужно «растянуть» («сжать») график функции $y = x^2$, чтобы полученный график проходил через точку $M_0(x_0; y_0)$? Постройте этот график.

1) $M_0(2; 2)$; 2) $M_0(1; 2)$; 3) $M_0(2; 5)$; 4) $M_0(-3; 6)$.

1.82. Проходит ли график через точку M_0, полученный параллельным переносом графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ на вектор $\vec{a} = (-2; 3)$:

1) $M_0(-1; 4)$; 2) $M_0(-1; 3)$;

3) $M_0\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{10}{3}\right)$; 4) $M_0\left(-2\dfrac{1}{3}; 0\right)$?

▲ 2) Если график функции $y = \dfrac{1}{x}$ смещается параллельно на вектор $\vec{a} = (-2; 3)$, то полученный график является графиком функции $y = \dfrac{1}{x+2} + 3$. Теперь легко проверить, проходит ли график этой функции через точку $M_0(-1; 3)$ или не проходит.

$3 = \dfrac{1}{-1+2} + 3 \Rightarrow 3 = 1 + 3 \Rightarrow 3 \neq 4$, т.е. не проходит. ■

C

1.83. Путем сжатия (растяжения) и параллельного переноса графика функции $y = x^2$ постройте график функции:

1) $y = 2x^2 - 3x + 1$; 2) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 1$;

3) $y = \dfrac{2}{3}x^2 + 4x + 2$; 4) $y = -\dfrac{2}{3}x^2 - 6x - 2$.

1.84. Напишите функцию, график которой проходит через точки M_1 и M_2 и получается параллельным переносом графика функции $y = \dfrac{1}{x}$:

1) $M_1(0; -3)$, $M_2(2; -1)$; 2) $M_1(0; 1)$, $M_2(-2; 3)$.

1.85. Арка моста является дугой параболы (рис. 1.42), здесь $OA = 8$ м, $BC = 2$ м. Взяв прямоугольную систему координат, как показано на рис. 1.42, определите, во сколько раз был «сжат» график функции $y = x^2$ и на величину какого вектора был перемещен этот график.

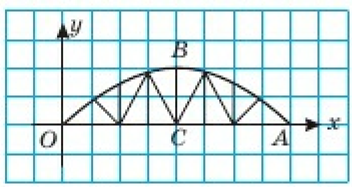


Рис. 1.42

Упражнения для повторения

1.86. Решите уравнения:

1) $\dfrac{3}{x-2} = \dfrac{2}{x-3}$; 2) $\dfrac{y^2}{y-3} = \dfrac{y+6}{y-3} + 1$.

1.87. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} u - v = 0, \\ 5u^2 + 2v = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} p + q = -2, \\ p^2 + q^2 = 100. \end{cases}$

1.5. Сложные и обратные функции

1.5.1. Сложные функции

Пример 1. ▲ Заданы функции: $y = \sqrt{u}$, $u \geqslant 0$ и $u = 4 - x^2$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Если в равенстве $y = \sqrt{u}$ вместо u подставить выражение $4 - x^2$, то получим функцию $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$. ■ Эту функцию называют ***сложной функцией***. Ее мы получили последовательным применением функциональных соответствий $y = \sqrt{u}$ и $u = 4 - x^2$: сначала каждому указанному значению x по закону $4 - x^2$ ставим в соответствие единственное число u, а затем этому числу по правилу $\sqrt{u}$ ставим в соответствие число y (рис. 1.43).

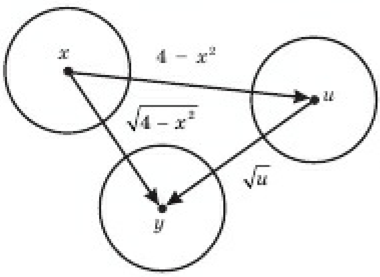


Рис. 1.43

Сложная функция – это функция от функции:

$$y = f(u),\ u = \varphi(x) \Rightarrow y = f(\varphi(x)).$$

1) Если рассматривать функцию $y = f(u)$, как функцию, зависящую только от u, то эта функция не сложная, а простая.

2) Если дополнительно к $y = f(u)$ задана функция $y = \varphi(x)$, то $y = f(u)$ – сложная функция.

Пример 2. Для данных функций $f(x) = \dfrac{x - 5}{3x + 2}$ и $\varphi(x) = \sqrt{4 + x}$ запишем сложные функции $f(\varphi(x))$ и $\varphi(f(x))$.

▲ 1) Запишем данные функции в виде $f(u) = \dfrac{u - 5}{3u + 2}$ и $u = \sqrt{4 + x}$. Тогда

$$f(\varphi(x)) = \frac{\sqrt{4 + x} - 5}{3\sqrt{4 + x} + 2}.$$

2) Если предположить, что $\varphi(u) = \sqrt{4 + u}$ и $u = \dfrac{x - 5}{3x + 2}$, то

$$\varphi(f(x)) = \sqrt{4 + \frac{x - 5}{3x + 2}}.$$

Замечание. Для функции $f(u) = \sqrt{4 - u}$ и $u = x^2 + 6$ сложная функция $f(u(x))$ не определена, т.к. выражение $f(u(x)) = \sqrt{4 - (x^2 + 6)} =$

$= \sqrt{-2 - x^2}$ не имеет смысла. Это является следствием того, что множества $D(f)$ и $E(u)$ не пересекаются. Здесь $D(f) = (-\infty; 4]$, $E(u) = [6; +\infty)$ (см. рис. 1.44).

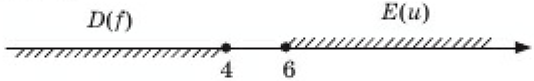


Рис. 1.44

В сложной функции $y = f(u(x))$ назовем функцию $u = u(x)$ внутренней функцией, а функцию $y = f(u)$ – внешней. Если область значений внутренней функции есть подмножество области определения внешней функции ($E(u) \subseteq D(f)$), то в качестве области определения берут область определения внутренней функции. Если $E(u) \not\subseteq D(f)$, то область определения сложной функции равна пересечению области значений внутренней функции и области определения внешней функции. Итак:

$$D[f(u(x))] = \begin{cases} D(u), \text{ если } E(u) \subseteq D(f), \\ D(f) \cap E(u), \text{ если } E(u) \not\subseteq D(f). \end{cases}$$

Аналогично определяется сложная функция, составленная последовательным применением трех и более функциональных соответствий. Например, пусть даны функции $\varphi(x) = 2x^2 + 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x+1}$. Тогда можно записать следующие сложные функции:

$$g(\varphi(x)) = \sqrt{2x^2 + 3}; \quad f(g(x)) = \frac{\left(\sqrt{x} - 2\right)^2}{\sqrt{x} + 1},$$

$$f(g(\varphi(x))) = \frac{\left(\sqrt{2x^2 + 3} - 2\right)^2}{\sqrt{2x^2 + 3} + 1} \text{ и т.п.}$$

Итак, чтобы записать сложную функцию, вместо аргумента внешней функции нужно поставить внутреннюю функцию, и если нужно, то упростить полученное выражение.

В качестве примера рассмотрим таблицу.

Внешняя функция	Внутренняя функция	Сложная функция
$f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x+1}$	$g(x) = \sqrt{x}$	$f(g(x)) = \dfrac{\left(\sqrt{x} - 2\right)^2}{\sqrt{x} + 1}$
$g(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x+1}$	$g(f(x)) = \sqrt{\dfrac{(x-2)^2}{x+1}} = \dfrac{\lvert x-2 \rvert}{\sqrt{x+1}}$

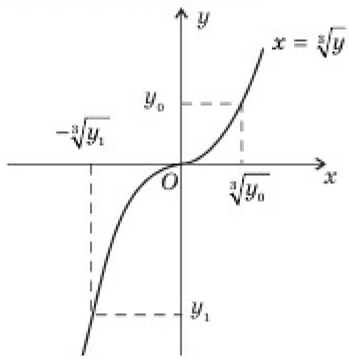


Рис. 1.45

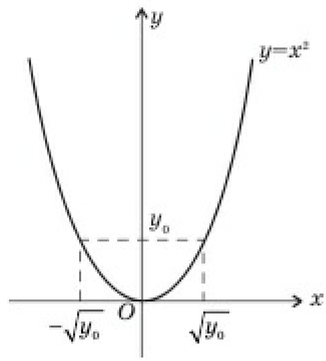


Рис. 1.46

1.5.2. Обратные функции

Пусть задана функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$. По определению каждому значению $x \in D(f)$ соответствует единственное значение $y \in E(f)$. Если к тому же каждое значение $f(x)$ определено единственным значением аргумента $x \in D(f)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ определяет ***взаимно однозначное соответствие***. Так, например, функция $y = x^3$, $x \in (-\infty; +\infty)$ определяет взаимно однозначное соответствие, потому что каждое значение функции y определено единственным числом вида $x = \sqrt[3]{y}$. А функция $y = x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$ не является взаимно однозначным соответствием, так как каждому значению y ($y > 0$) соответствуют два разных значения аргумента: $x = -\sqrt{y}$ и $x = \sqrt{y}$ (рис. 1.45, 1.46).

А если рассмотреть функцию $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$, то на указанном промежутке эта функция монотонно возрастает и устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством $[0; +\infty)$ на оси Ox и множеством $[0; +\infty)$ на оси Oy (график – первая ветвь параболы, рис. 1.46). Итак, каждая монотонно возрастающая (убывающая) функция устанавливает взаимно однозначное соответствие (обратимые функции).

Если функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$ монотонная, то каждому значению $x \in E(f)$ ставится в соответствие единственное число $x \in D(f)$, являющееся единственным решением уравнения $f(x) = y$. Это соответствие определяет функцию с областью определения $E(f)$ и областью значений $D(f)$.

Определяемую таким образом функцию $x = g(y)$, где $y \in D(g) = E(f)$, называют ***обратной*** к функции f и обозначают через f^{-1}. Если в записи $x = g(y) = f^{-1}(y)$ заменить x на y, а y – на x, то обратная функция записывается так: $y = f^{-1}(x)$, $x \in D(f^{-1}) = E(f)$.

Например, на рис. 1.47 изображен график функции $y = \sqrt[3]{x}$, обратной к функции $y = x^3$. Для функции $y = x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$ не существует обратной функции, так как она не определяет взаимно однозначное соответствие. Ее сужение $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$ является

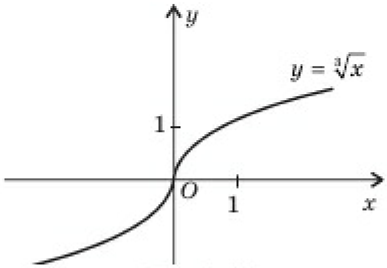


Рис. 1.47

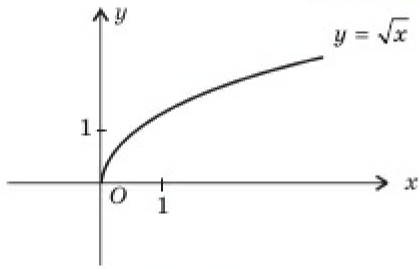


Рис. 1.48

взаимно однозначным соответствием, поэтому для нее существует обратная функция $y = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$ (рис. 1.48).

Взаимно обратные функции обладают нижеследующим свойством.

1. Если $y = f(x)$, $x \in D(f)$ монотонно возрастающая (убывающая) функция, то ее обратная функция $y = f^{-1}(x)$, $x \in D(f^{-1}) = E(f)$ также является монотонно возрастающей (убывающей) функцией.

▲ Пусть функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$ монотонно возрастающая. Тогда для любых $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in D(f)$ верно неравенство $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$, т.е. $y_1 < y_2$ и $x_1 < x_2$ (т.е. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$). Поэтому функция $y = f^{-1}(x)$ также монотонно возрастающая. В случае монотонно убывающей функции доказательство аналогично. ■

2. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов (см. рис. 1.49 и 1.50).

1. Заданы функции: $y = f(u)$, $u \in D(f)$ и $u = \varphi(x)$, $x \in D(\varphi)$.
   а) При каких условиях определена сложная функция $f(\varphi)$?
   б) Следует ли из существования сложной функции $f(\varphi)$ существование сложной функции $\varphi(f)$? Приведите пример.
2. Изобразите схему определения сложной функции.
3. Как определяется обратная функция? Какое соответствие называется взаимно однозначным?

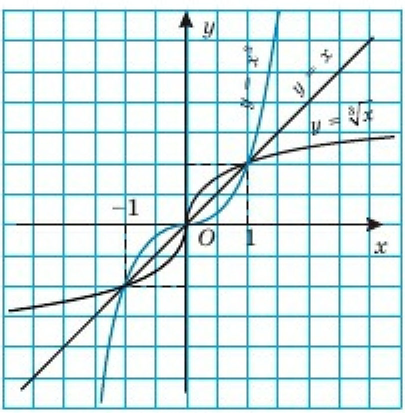


Рис. 1.49

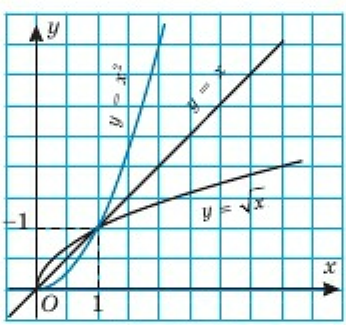


Рис. 1.50

Упражнения

A

1.88. Запишите сложную функцию $y = f(u(x))$:
1) $f(u) = u^2$, $u(x) = 2x - 1$; 2) $f(u) = 2u - 1$, $u(x) = x^2$;
3) $f(u) = \sqrt{u}$, $u(x) = x - 4$; 4) $f(u) = u - 4$, $u(x) = \sqrt{x}$;
5) $f(u) = 3 - 2\sqrt{u}, u(x) = x^2 - 1$; 6) $f(u) = u^2 - 1$, $u(x) = 3 - 2\sqrt{x}$.

1.89. Пусть R_+ – множество всех положительных действительных чисел и функция f каждому $x \in R_+$ ставит в соответствие число $y = 5x$. Запишите функцию, обратную функции f.

1.90. Функция $y = x^3$ определена на множестве всех действительных чисел. Найдите обратную функцию.

1.91. Задана функция $f : x \to x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Определите обратное ей соответствие. Является ли обратное соответствие функцией?

1.92. Даны функции:
1) $y = 2x + 6$; 2) $y = 2x - 8$;
3) $y = 3 - 0,5x$; 4) $\boldsymbol{y = 0,4x - 2,8}$.

Найдите обратную функцию. Постройте графики данных и обратных им функций в одной системе координат.

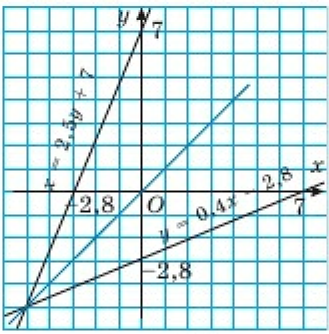


Рис. 1.51

4) ▲ $\boldsymbol{y = 0,4x - 2,8}$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Эта монотонно возрастающая функция, поэтому для нее существует обратная функция. Для того чтобы определить ее, в равенстве $y = 0,4x - 2,8$ переменную x выразим через y: $0,4x = y + 2,8 \Rightarrow x = 2,5y + 7$. В последнем равенстве поменяем местами переменные x и y и получим обратную к $y = 0,4x - 2,8$ функцию $y = 2,5x + 7$ (см. рис. 1.51). ■

B

1.93. На множестве действительных чисел даны функции $f(x) = x + 5$ и $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$. Запишите сложные функции $f(\varphi(x))$ и $\varphi(f(x))$.

1.94. Функция $y = f(x)$ задана табличным способом. Заполните таблицы для отображений $f(f^{-1}(x))$ и $f^{-1}(f(x))$. Сделайте вывод.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	4	5	6	7

1.95. Запишите сложные функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$:
1) $f(x) = x^2$ и $g(x) = 2x - 5$; 2) $f(x) = x^2 + 1$ и $g(x) = \sqrt{3 - x}$;
3) $f(x) = x^2 - 1$ и $g(x) = x^2 + 1$; 4) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ и $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

1.96. Найдите функцию, обратную функции:
1) $f(x) = \dfrac{3}{2x - 1}$; 2) $y = x^2 - 4$, $x > 0$;
3) $y = x^2 - 4x + 3$, $x > 2$; 4) $y = \sqrt{25 - x^2}, 0 \leqslant x \leqslant 5$.

▲ 3) $y = x^2 - 4x + 3$, $x > 2$. Здесь x нужно выразить через y: $y = (x^2 - 4x + 4) - 1 \Rightarrow y = (x - 2)^2 - 1 \Rightarrow (x - 2)^2 = y + 1 \Rightarrow |x - 2| = \sqrt{y+1}$. Т.к. $x > 2$, то $x = \sqrt{y+1} + 2$. Теперь поменяем местами переменные x и y и получим обратную функцию: $y = \sqrt{x+1} + 2$, $x > -1$. ■

1.97. Постройте в одной системе координат график функции, данной в задаче **1.96**, и график функции, обратной ей.

C

1.98. В задаче **1.95** найдите области определения сложных функций $f(g(x))$ и $g(f(x))$.

1.99. Периметр прямоугольника равен 10 см, длина x см, а площадь S см^2. Найдите зависимость S от x и x от S. Как эти зависимости связаны с понятием обратной функции? Найдите области определения прямой и обратной зависимостей.

1.100. Заданы отображения $f : x \to 2x$ и $g : x \to x - 2$, где $x \in Z$. Какой формулой задаются отображения $f \cdot g$ и $g \cdot f$? Совпадают ли эти композиции отображений?

1.101. Даны функции $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x$ и $\varphi(x) = x^2$, $x \in R$. Верно ли равенство $f(g(\varphi(x))) = f(\varphi(g(x)))$?

1.102. Выразите объем куба через площадь его поверхности. Как связана эта задача с понятием обратной функции и сложной функции?

Упражнения для повторения

1.103. Покажите, что прямая $6x + y + 19 = 0$ касается параболы $y = 3x^2 + 6x - 7$. Найдите координаты точки касания.

1.104. Решите уравнение:
1) $(6x - 2)^3 - 6x + 2 = 0$; 2) $(2x - 3)^2 = 2x - 1$.

Раздел 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2.1. Исследование свойств основных тригонометрических функций.

2.2. Примеры построения графиков некоторых тригонометрических функций.

2.3. Обратные тригонометрические функции.

2.1. Исследование свойств основных тригонометрических функций

В этом пункте мы исследуем и построим графики функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ по схеме, приведенной в пункте 1.3 (раздел 1).

2.1.1. Функция $y = \sin x$

1) Так как функция $y = \sin x$ имеет смысл для любого числового аргумента x, то эта функция определена на всей числовой оси: $D(\sin x) = (-\infty; +\infty)$.

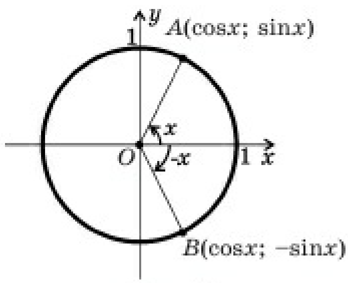


Рис. 2.1

2) Функция $y = \sin x$ нечетная, так как выполняется равенство $\sin(-x) = -\sin x$ (рис. 2.1). Функция $y = \sin x$ периодическая. Ее наименьший положительный период равен 2π. Число 2π называется основным периодом функции $y = \sin x$. Докажем это утверждение. Действительно, из тождества $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, верного для любого x, вытекает, что число 2π является периодом функции $\sin x$. Теперь покажем, что эта функция не имеет другого, меньшего чем 2π, положительного периода.

Предположим, что это не так. Пусть существует число T_0 $(0 < T_0 < 2\pi)$, удовлетворяющее равенству $\sin(x + T_0) = \sin x$ для любого $x \in (-\infty; +\infty)$. Отсюда, если $x = \frac{\pi}{2}$, то $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T_0\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. С другой стороны, из рис. 2.1 видно, что решение уравнения $\sin x = 1$ имеет вид $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, т.е. $T_0 = 2\pi n \geqslant 2\pi$. Это противоречит тому, что T_0 является наименьшим положительным периодом. Полученное противоречие показывает, что число 2π является наименьшим положительным периодом функции $y = \sin x$.

Из сказанного вытекает следующий вывод: график функции $\sin x$ симметричен относительно начала координат. Поэтому достаточно построить график $\sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ и перенести этот график симметрично относительно начала координат. На рис. 2.2 показан способ построения графика функции на отрезке $[0; \pi]$. Затем, используя периодичность функции, последний гра-

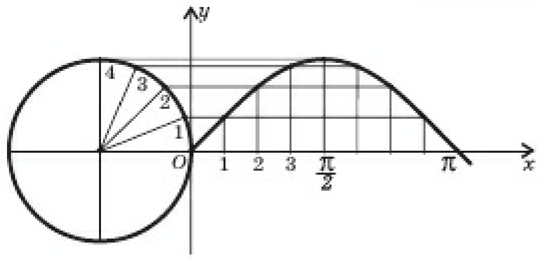


Рис. 2.2

фик нужно параллельно перенести на отрезки $[-(2k+1)\pi; -(2k-1)\pi]$ и $[(2k-1)\pi; (2k+1)\pi]$, $k \in N$ вдоль оси Ox.

3) Чтобы найти точки пересечения графика функции $y = \sin x$ с осью Ox, нужно найти корни уравнения $\sin x = 0$. На отрезке $[0; \pi]$ это уравнение имеет 2 корня: $x = 0$ и $x = \pi$ (рис. 2.2). В целом нетрудно показать, что все корни уравнения $\sin x = 0$ имеют вид $x = \pi k$, $k \in Z$.

Если $x = 0$, то $f(0) = \sin 0 = 0$. Поэтому график функции $y = \sin x$ с осью Oy пересекается в точке $O(0; 0)$.

4) Известно, что при $x \in (0; \pi)$ $\sin x > 0$ и при $x \in (-\pi; 0)$ $\sin x < 0$ (рис. 2.2) Тогда в силу периодичности функции при $x \in (2\pi k; (2k+1)\pi) \Rightarrow \sin x > 0$ и при $x \in ((2k-1)\pi; 2\pi k) \Rightarrow \sin x < 0$. Здесь $k \in Z$ – любое целое число.

5) Из рис. 2.1 видно, что значения функции $y = \sin x$ удовлетворяют двойному неравенству $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, т.е. множество точек, лежащих на отрезке $[-1; 1]$, является областью значений этой функции. Отсюда также видно, что функция на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает, а на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ убывает.

Приведем строго математическое доказательство сказанного. Сначала покажем, что функция возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Пусть $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $x_1 < x_2$. Тогда

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \sin\frac{x_2 - x_1}{2}. \qquad (1)$$

Так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Поэтому $\cos\frac{x_1 + x_2}{2} > 0$ и $\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$. Тогда из равенства (1) $\sin x_2 - \sin x_1 > 0 \Rightarrow \sin x_2 > \sin x_1$, т.е. функция $\sin x$ возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Аналогично доказывается, что функция $\sin x$ убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Отсюда, используя периодичность функции $\sin x$, заметим, что функция $\sin x$ возрастает на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right], k \in Z$, и убывает на отрезках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right], k \in Z$.

6) Точки $x = \frac{\pi}{2}+2\pi k, k \in Z$ являются точками максимума, а точки $x = -\frac{\pi}{2}+2\pi k, k \in Z$ – точками минимума функции $\sin x$. При этом ее значение в точках максимума равно 1, а значение в точках минимума равно −1.

7) По результатам сказанного выше можно заполнить таблицу:

x	$-\pi$	$\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$	0	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	π
$\sin x$	0	$\searrow$ −	min −1	$\nearrow$ −	0	$\nearrow$ +	man +1	$\searrow$ −	0

С помощью этой таблицы по графику функции в I четверти (рис. 2.2, здесь для удобства цифрами 1, 2, 3, 4 обозначены углы $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$) и периодичности функции $\sin x$ можем построить ее график (рис. 2.3). График функции $y = \sin x$ называется ***синусоидой.***

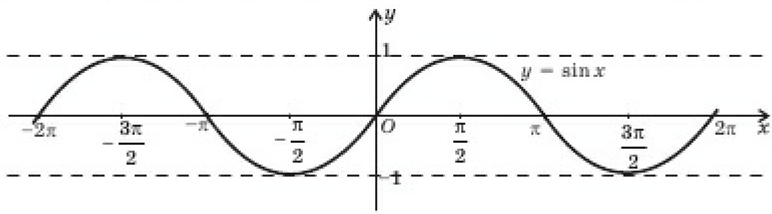


Рис. 2.3

2.1.2. Функция $y = \cos x$

В силу формул приведения верно равенство $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. График функции $y = \cos x$ получаем с помощью сдвига графика функции $y = \sin x$ на $\frac{\pi}{2}$ влево.

1) Область определения: $D(\cos x) = (-\infty; +\infty)$.

2) По определению, для любого $x \in (-\infty; +\infty)$ выполняется равенство $\cos(-x) = \cos x$, т.е. функция $\cos x$ четная. Это равенство также можно установить следующим образом:

$$\cos(-x) = \sin\left(-x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x.$$

Так как $\cos(x+2\pi)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}+2\pi\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$ и число 2π является наименьшим положительным периодом функции $y=\sin x$, то 2π также является наименьшим положительным периодом функции $y=\cos x$. Следовательно, сначала нужно построить график функции на промежутке $[0;\ \pi]$, а затем этот график нужно перевести симметрично относительно оси Oy. Полученный таким образом график необходимо продолжить на промежутке $[(2k-1)\pi;\ (2k+1)\pi]$, $k\in Z$.

3) Корни уравнения $\cos x=0$ являются точками пересечения графика функции $y=\cos x$ с осью Ox: $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow x+\dfrac{\pi}{2}=\pi k\Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ (k\in Z)$. Так как на числовой оси множества точек $x=-\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ и $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$, совпадают, т.е. определяют одно и то же множество, график функции $y=\cos x$ пересекает ось Ox в точках $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z$.

Если $x=0$, то $\cos 0=1$. Следовательно, график функции $y=\cos x$ пересекает ось Oy в точке $(0;\ 1)$.

4) Если $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in Z$, то $\cos x>0$;

если $x\in\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in Z$, то $\cos x<0$.

5) Так как $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, то функция $y=\cos x$ возрастает на промежутках $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right);\ -\dfrac{\pi}{2}+\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)=(-\pi+2\pi k;\ 2\pi k)$, $(k\in Z)$, аналогично убывает на промежутках $(2\pi k;\ (2k+1)\pi)$.

6) Также имеем, что точки $x=-\dfrac{\pi}{2}+\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)=2\pi k,\ k\in Z$ являются точками максимума, а точки $x=\pi+2\pi k,\ k\in Z$ – точками минимума функции $y=\cos x$.

Так как $|\cos x|=\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1$, значение $\cos x$ в точках максимума равно 1, а в точках минимума равно -1.

x	$-\pi$	$\left(-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right)$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$	0	$\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$	π
$\cos x$	min -1	$\nearrow$ $-$	0	$\nearrow$ $+$	max $+1$	$\searrow$ $+$	0	$\searrow$ $-$	min -1

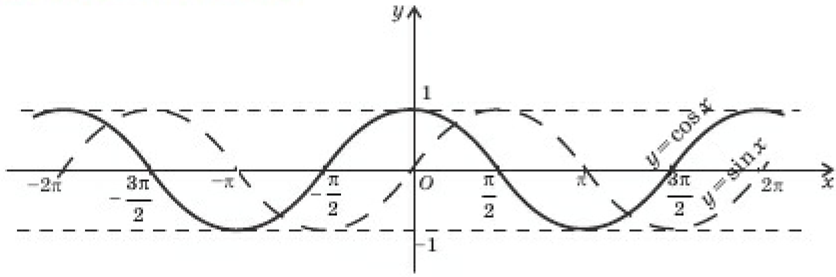


Рис. 2.4

График функции $y = \cos x$ можно построить параллельным переносом графика функции $y = \sin x$ (рис. 2.3) вдоль оси Ox влево на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 2.4).

2.1.3. Функция $y = \operatorname{tg} x$

1) Область определения: множество всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, так как в выражении $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ необходимо, чтобы $\cos x \neq 0$.

2) $y = \operatorname{tg} x$ – нечетная функция, так как $\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$. Наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$ равен π.

Действительно, $\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$. Если T_0 является наименьшим положительным периодом $\operatorname{tg} x$:

$\operatorname{tg}(x+T_0) = \operatorname{tg} x$, $x \in D(\operatorname{tg} x)$. Если $x = 0$, то $\operatorname{tg} T_0 = \operatorname{tg} 0 = 0$. С другой стороны, $\operatorname{tg} T_0 = \frac{\sin T_0}{\cos T_0} = 0 \Rightarrow \sin T_0 = 0 \Rightarrow T_0 = \pi k, \quad k \in Z$.

При $k = 1$ получим наименьший положительный период T_0, равный π.

3) Точки пересечения функции с осью Ox: $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \pi k$, $k \in Z$, т.е. график функции $y = \operatorname{tg} x$ с осью Ox пересекается в точках $x = \pi k$, $k \in Z$. С осью Oy пересекается в точке $O(0; 0)$.

4) Так как функция $\operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ принимает отрицательные значения, а на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ – положительные значения, то, учитывая периодичность $\operatorname{tg} x$, имеем: если $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k\right), k \in Z$, то $\operatorname{tg} x < 0$, если $x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$, то $\operatorname{tg} x > 0$.

5) Функция $y = \operatorname{tg} x$ в области определения является возрастающей. Действительно, для x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенству $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \sin x_1 \cos x_2}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}$.

Здесь $0 < x_2 - x_1 < \pi$, тогда $\sin(x_2 - x_1) > 0$, $\cos x_1 > 0$, $\cos x_2 > 0$ и тем самым $\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$, т.е. функция $\operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, в силу периодичности функция $y = \operatorname{tg} x$ является возрастающей во всей области определения: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Теперь выясним особенности изменения функции около точки $x = \frac{\pi}{2}$. При $x < \frac{\pi}{2}$ и по мере приближения x к $\frac{\pi}{2}$ соответствующие значения $\operatorname{tg} x$ неограниченно возрастают. Это объясняется тем, что при приближении x к $\frac{\pi}{2}$ соответствующие значения $\sin x$ приближаются к 1, а $\cos x$ – к 0. Поэтому соответствующие значения $\operatorname{tg} x$ становятся «сколь угодно большими», т.е. говорят, что значения $\operatorname{tg} x$ стремятся к «плюс бесконечности».

При $x > \frac{\pi}{2}$ и по мере приближения x к $\frac{\pi}{2}$ соответствующие значения $\operatorname{tg} x$ по модулю неограниченно возрастают. Эти значения являются отрицательными ($\sin x > 0$, $\cos x < 0$), т.е. соответствующие значения $\operatorname{tg} x$ стремятся к «минус бесконечности».

Итак, график функции $y = \operatorname{tg} x$ по мере приближения к прямой $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ слева неограниченно поднимается вверх все ближе к этой прямой, а по мере приближения к прямой $x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ справа неограниченно спускается вниз все ближе к этой прямой. Другими словами, прямые $x = \pm\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in z$ являются вертикальными асимптотами графика функции $y = \operatorname{tg} x$.

6) Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ является возрастающей, то она не имеет точек экстремума. График функции на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ строится способом, указанным на рис. 2.5. Затем этот

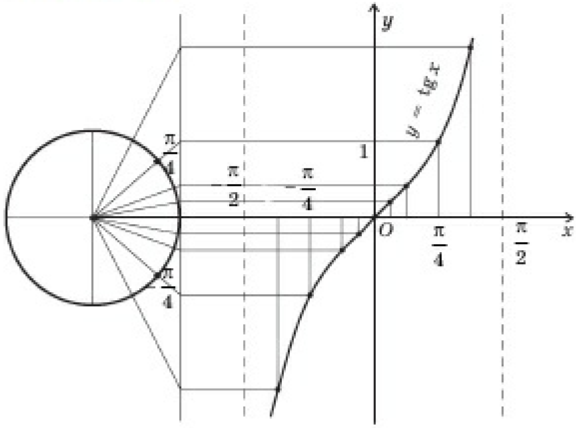


Рис. 2.5

график с помощью параллельного переноса переносится на промежутки $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in Z$, (рис. 2.6).

2.1.4. Функция $y = \operatorname{ctg} x$

Эта функция исследуется аналогично функции $y = \operatorname{tg} x$. Поэтому мы лишь перечислим ее основные свойства. Учащиеся могут самостоятельно провести полное исследование.

1) Область определения: $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq \pi k$, $k \in Z$, т.е. $D(\operatorname{ctg} x) = \{\pi k;\ (k+1)\pi;\ (k \in Z)\}$.

2) $y = \operatorname{ctg} x$ – нечетная функция. Наименьший положительный период равен π.

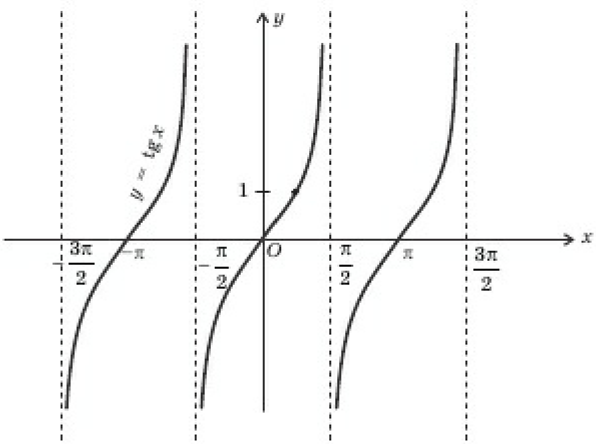


Рис. 2.6

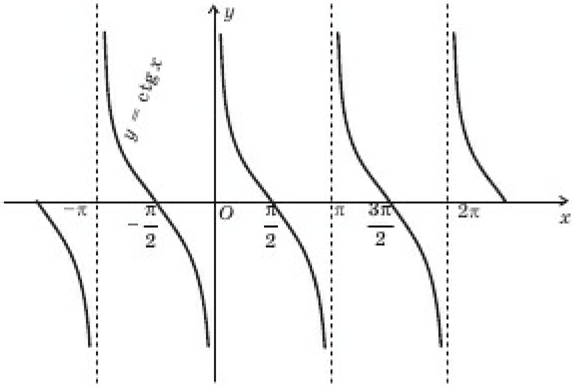


Рис. 2.7

3) График функции пересекается с осью Ox в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, а с осью Oy точек пересечения не имеет.

4) Если $x \in \left(k\pi; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$, то $\operatorname{ctg} x > 0$.

Если $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ (k+1)\pi\right)$, $k \in Z$, то $\operatorname{ctg} x < 0$.

5) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ в области определения $D(\operatorname{ctg} x)$ является убывающей функцией.

6) Точек экстремума функция не имеет. Ее график изображен на рис. 2.7.

1. Сформулируйте основные свойства тригонометрических функций: а) область определения; б) четность; в) периодичность; г) точки пересечения с осями Ox и Oy; д) промежутки знакопостоянства; е) промежутки убывания и возрастания; ж) точки экстремума. Обоснуйте ответ.
2. Схематически постройте графики каждой из основных тригонометрических функций.

Упражнения

А

2.1. В какой координатной четверти находится угол φ, если:

1) $|\sin\varphi| = \sin\varphi$; 2) $|\sin\varphi| = \sin(-\varphi)$; 3) $|\cos\varphi| = -\cos\varphi$;

4) $|\cos(-\varphi)| = \cos\varphi$; 5) $|\operatorname{tg}\varphi| = -\operatorname{tg}\varphi$; 6) $|\operatorname{ctg}\varphi| = \operatorname{ctg}\varphi$?

2.2. Определите знак выражения:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\frac{19\pi}{20}$; 2) $\sin\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos\frac{13\pi}{8} - \cos(-2,25\pi)$;

4) $\sin 139^\circ + \cos 50^\circ$; 5) $\operatorname{tg} 1,25 - 1$; 6) $\sqrt{3} - \operatorname{ctg}\frac{13\pi}{20}$.

2.3. Какое из указанных чисел больше:

1) $\sin 1^\circ$ или $\sin 1$; 2) $\cos 2^\circ$ или $\cos 2$;
3) $\sin 3^\circ$ или $\sin 3$; 4) $\cos 3{,}5$ или $\cos 6{,}5$?

2.4. Сравните числа:

1) $\sin\dfrac{7\pi}{5}$ и $\sin\dfrac{17\pi}{10}$; 2) $\cos\dfrac{6\pi}{5}$ и $\cos\dfrac{4\pi}{5}$;

3) $\operatorname{tg}1{,}5$ и $\operatorname{tg}1{,}6$; 4) $\operatorname{tg}3{,}14$ и $\operatorname{tg}\pi$;

5) $\operatorname{ctg}\dfrac{8\pi}{5}$ и $\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{5}$; 6) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}$ и $\operatorname{ctg}1{,}5$.

2.5. Является ли число 3π периодом функции: 1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \operatorname{tg}x$; 3) $y = \cos 4x$?
Является ли оно наименьшим положительным периодом этих функций? Найдите наименьший положительный период указанных функций.

B

2.6. Функция $y = f(x)$ является периодической. Покажите, что функция $y = |f(x)|$ также является периодической. Найдите наименьший положительный период функции: 1) $y = |\sin x|$; 2) $y = |\cos x|$.

2.7. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\sin x}$; 2) $y = \sqrt{\sin(-x)}$;

3) $y = \sqrt{\cos(-x)}$; 4) $y = \sqrt{-\operatorname{tg}(-x)}$.

2.8. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\dfrac{1}{\sin x - 1}$; 2) $\dfrac{1}{1+\cos x}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}$;

4) $\sqrt[3]{\cos(-x)}$; 5) $\sqrt{\operatorname{tg}^3(-x)}$; 6) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)$?

2.9. На промежутке $(0;\ \pi)$ найдите экстремумы функции: 1) $y = \sin 3x$; 2) $y = \cos 2x$. Найдите промежутки возрастания и убывания функции.

2.10. Укажите части промежутка $(1;\ 3)$, в которых функция $y = \sin\dfrac{1-3x}{6}\pi$ принимает положительные и отрицательные значения. Имеет ли эта функция нули на этом промежутке?

2.11. Укажите части промежутка $(0;1)$, в которых функция $y = \cos\dfrac{2x-1}{4}\pi$ принимает положительные и отрицательные значения. Имеет ли функция нули на этом промежутке?

2.12. Сколько корней имеет уравнение:
1) $\sin x = 0{,}5x$; 2) $\sin x = x$; 3) $\cos x = x^2$; 4) $\operatorname{tg} x = kx + b$?
Решите графически.

C

2.13. Найдите промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции $y = |\operatorname{tg} x|$.

2.14. $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число.} \end{cases}$

Докажите, что функция Дирихле периодическая.

2.15. Число T является периодом функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Покажите, что число T также является периодом функций $f_1(x) + f_2(x)$ и $f_1(x) \cdot f_2(x)$.

2.16. Докажите, что функция $y = \sin x + \{x\}$ непериодическая. Не противоречит ли это выводам задачи 2.15?

2.17. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определенные на всей числовой прямой, периодические. Периоды этих функций равны T_1 и T_2 соответственно. Докажите, что если отношение $T_1 : T_2$ является рациональным числом, то сумма $f_1(x) + f_2(x)$ – периодическая функция, а если отношение $T_1 : T_2$ является иррациональным числом, то сумма $f_1(x) + f_2(x)$ – непериодическая функция.

Упражнения для повторения

2.18. Изобразите множество точек координатной плоскости, заданных системой неравенств $\begin{cases} x + 2y \leqslant 4, \\ y < x^2 + 6x - 7. \end{cases}$

2.19. Покажите, что выражение $\left(\sqrt{\sqrt{45} + 2\sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{45} - 2\sqrt{5}}\right)^2 - 6\sqrt{5}$ является рациональным числом.

2.20. Добавив несколько литров воды к 4 л 10%-й кислоты, получили 4%-ю кислоту. Сколько литров воды добавили?

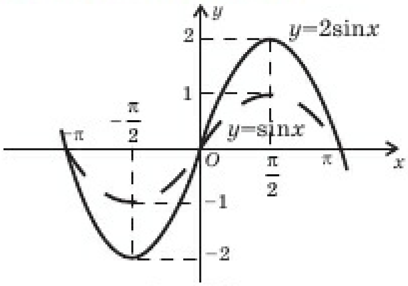


Рис. 2.8

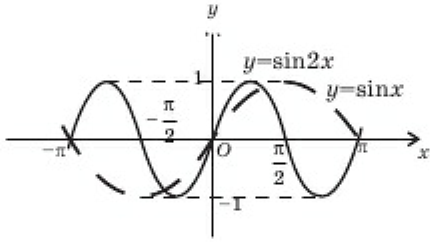


Рис. 2.9

2.2. Примеры построения графиков некоторых тригонометрических функций

В этом пункте мы рассмотрим примеры построения графиков некоторых тригонометрических функций с помощью простейших преобразований графиков функций (параллельный перенос, растяжение, сжатие).

Пример 1. Построим график функции $y = 2\sin x$.

▲ График функции $y = 2\sin x$ строится с помощью удвоения значений функции $y = \sin x$ в каждой точке x. Другими словами, график функции $y = 2\sin x$ получим путем растяжения в 2 раза графика функции $y = \sin x$ в направлении, перпендикулярном оси Ox (рис. 2.8). ■

Пример 2. Построим график функции $y = \sin 2x$.

▲ График функции $y = \sin 2x$ получается путем сжатия графика функции $y = \sin x$ в 2 раза вдоль оси Ox (рис. 2.9). ■

Пример 3. Построим график функции

$$y = \frac{1}{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

▲ Сначала нужно построить график функции $y = \frac{1}{2}\cos x$ преобразованием графика функции $y = \cos x$, а затем построенный график следует сжать в 3 раза относительно оси Ox. Тем самым мы

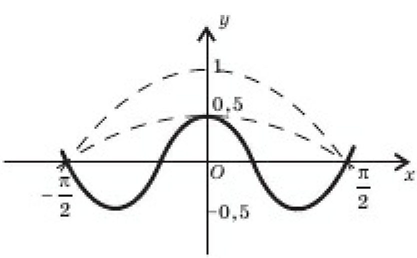


Рис. 2.10

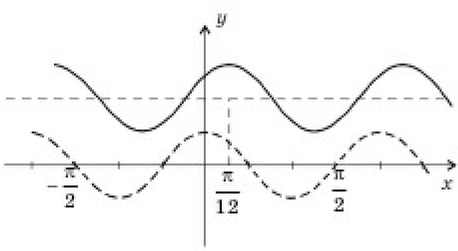


Рис. 2.11

построим график функции $y = \frac{1}{2}\cos 3x$ (рис. 2.10). После чего, записав данную функцию в виде $y = \frac{1}{2}\cos 3\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + 1$, построенный график функции $y = \frac{1}{2}\cos 3x$ с помощью параллельного переноса нужно передвинуть вправо на $\frac{\pi}{12}$ единиц и вверх на 1 единицу (рис. 2.11). ■

Пример 4. Построим график функции $y = x\sin x$.

▲ 1) Область определения: $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$.

2) Функция четная: $f(-x) = (-x)\sin(-x) = x\sin x = f(x)$. Функция непериодическая.

3) С осью Ox пересекается в точках $x = k\pi$, $k \in Z$, а с осью Oy – в точке $O(0;\ 0)$.

4) На промежутках $(2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$, $k \in N$ и $(-\pi - 2\pi m;\ -2\pi m)$, $m \in N$ функция принимает положительные значения, а на промежутках $(\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k)$, $k \in N$ и $(-2\pi - 2\pi m;\ -\pi - 2\pi m)$, $m \in N$ – отрицательные значения.

5) В этом примере определение промежутков возрастания и убывания точек экстремума теми способами, которыми до сих пор пользовались, невозможно (необходимый способ будет рассмотрен в разделе 7).

Для построения графика функции $y = x\sin x$ рассмотрим пределы (границы) изменения ее графика. Так как $|\sin x| \leqslant 1$, то выполняется неравенство $|x \sin x| \leqslant |x| \Rightarrow -|x| \leqslant |x \sin x| \leqslant |x|$. Геометрически это означает, что график функции $x\sin x$ заключен между графиками функций $y = |x|$ и $y = -|x|$, т.е. между прямыми $y = x$ и $y = -x$. А общие точки графика функции $y = x\sin x$ и прямых $y = x$ и $y = -x$ являются корнями уравнения $x\sin x = \pm x$. Это уравнение равносильно совокупности уравнений $x = 0$ и $\sin x = \pm 1$, т.е. точки $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, являются общими точками (точками касания) графика функции $y = x\sin x$ и прямых $y = x$ и $y = -x$ (рис. 2.12). ■

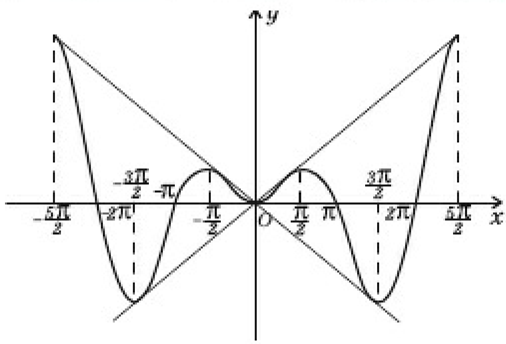


Рис. 2.12

1. Разъясните смысл слов «сжатие» и «растяжение» графика функции.
2. Как с помощью графика функции $y = f(x)$ построить график функции $y = f(x - m) + n$?

Упражнения

В упражнениях **2.21–2.26** постройте графики функций.

A

2.21. 1) $y = 3\cos x$; 2) $y = \cos 3x$; 3) $y = \frac{1}{2}\sin x$;
4) $y = \sin\frac{x}{2}$; 5) $y = 2\mathrm{tg}\, x$; 6) $y = \mathrm{tg}\, 2x$;
7) $y = \frac{1}{3}\mathrm{ctg}\, x$; 8) $y = \mathrm{ctg}\,\frac{x}{3}$;' 9) $y = \frac{1}{2}\cos 2x$.

2.22. 1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 4$;
3) $y = \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$; 4) $y = 3 - \mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

B

2.23. 1) $y = |\sin 2x|$; 2) $y = \cos\left|\frac{x}{2}\right|$;
3) $y = \left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 1\right|$; 4) $y = \mathrm{ctg}\,|3x + 2|$.

C

2.24. 1) $y = 4\left(\cos^4\frac{x}{2} + \sin^4\frac{x}{2}\right)$; 2) $y = \sin x + |\sin x|$;
3) $y = \mathrm{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}$; 4) $y = \sin x + \cos x$.

2.25 1) $y = \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x$; 2) $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$;
3) $y = \mathrm{ctg}\, x\,|\sin x|$; 4) $y = \mathrm{tg}\, x \cdot \cos x$.

2.26. 1) $y = |\sin x| + \sin|x|$; 2) $y = x - \sin x$;
3) $y = \mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x$; 4) $|y| = \sin x$.

Упражнения для повторения

2.27. Упростите выражение $\left(\frac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-1} + y^{-1}} - \frac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{4xy}{y^2 - x^2}\right)^{-1}$.

2.28. Решите систему уравнений графически:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ xy = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

2.29. Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 8.

2.3. Обратные тригонометрические функции

2.3.1. Функция $y = \arcsin x$

Функция $y = \sin x$ определена на всей числовой оси и не является монотонной на этом множестве. Поэтому на множестве $(-\infty; +\infty)$ невозможно определить обратную функцию для функции $\sin x$. В этой связи сначала нужно найти промежуток монотонности функции и в нем определить обратную функцию для функции $\sin x$. Функция $y = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ является возрастающей на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Эта монотонно возрастающая функция является сужением исходной функции $y = \sin x,\ x \in (-\infty; +\infty)$.

Определение. *Функция, обратная функции* $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, *обозначается так:* $y = \arcsin x,\ x \in [-1; 1]$. *Читается: «Арксинус икс».*

Итак, равенство $\alpha = \arcsin a$ означает, что выполняются соотношения $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\sin \alpha = a$.

Областью определения функции $y = \arcsin x$ является множество $x \in [-1; 1]$, а областью значений – множество $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. В области определения функция $y = \arcsin x$ является возрастающей. Для каждого $x \in [-1; 1]$ выполняется равенство $\sin(\arcsin x) = x$, а для каждого $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ – равенство $\arcsin(\sin x) = x$. Эти равенства вытекают из определения обратной функции. График функции $y = \arcsin x$ изображен на рис. 2.13.

2.3.2. Функция $y = \arccos x$

Так как отрезок $[0; \pi]$ является промежутком монотонности функции $y = \cos x$, то на этом множестве для функции $\cos x$ существует обратная функция $y = \arccos x$.

Определение. *Функция, обратная функции* $y = \cos x,\ x \in [0; \pi]$, *обозначается так:* $y = \arccos x,\ x \in [-1; 1]$. Читается: «Арккосинус икс».

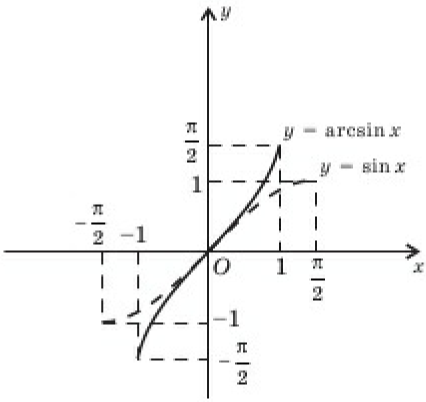


Рис. 2.13

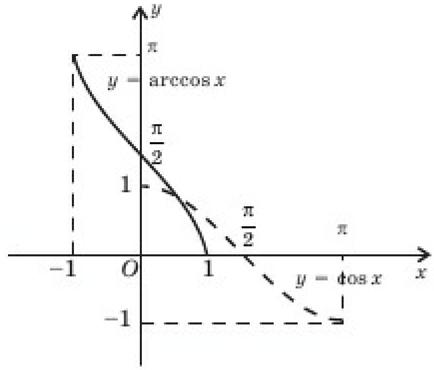


Рис. 2.14

Здесь равенство $\alpha = \arccos a$ означает, что выполняются соотношения $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ и $\cos \alpha = a$.

Областью определения функции $y = \arccos x$ является множество $x \in [-1; 1]$, а областью значений – множество $[0; \pi]$. В области определения функция является монотонно убывающей. Кроме того, также верны равенства $\cos(\arccos x) = x$, $x \in [-1; 1]$ и $\arccos(\cos x) = x$, $x \in [0; \pi]$. График функции $y = \arccos x$ изображен на рис. 2.14.

Рассмотрим свойство, которое устанавливает связь между функциями $\arcsin x$ и $\arccos x$. Для каждого $x \in [-1; 1]$ введем такие обозначения: $\alpha = \arcsin x$ и $\beta = \arccos x$. Тогда по определению выполняются соотношения $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, $\sin \alpha = x$ и $\cos \beta = x$. Из первого неравенства имеем $0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \pi$. Тогда $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = x$. Поэтому $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos x = \beta$, т.е. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Итак, мы доказали формулу

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \ x \in [-1;1].$$

2.3.3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$

Так как множество $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ является одним из промежутков монотонности функции $y = \operatorname{tg} x$, то в этом множестве можно определить обратную ей функцию $y = \operatorname{arctg} x$. Итак, равенство $\alpha = \operatorname{arctg} a$ означает, что выполнены соотношения $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} \alpha = a$.

Областью определения функции $y = \operatorname{arctg} x$ является множество $(-\infty; +\infty)$, а областью значений – множество $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Выполняют-

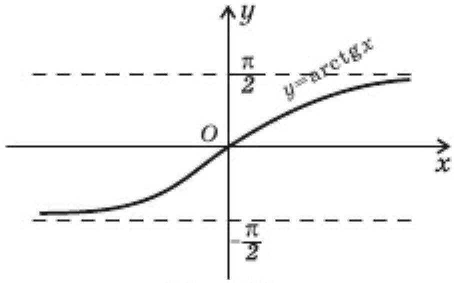


Рис. 2.15

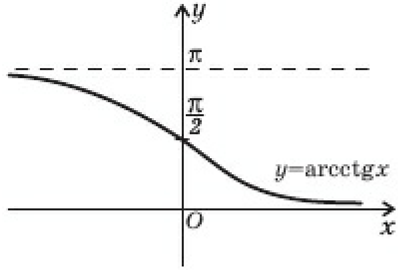


Рис. 2.16

ся равенства $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $x \in (-\infty; +\infty)$ и $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображен на рис. 2.15.

2.3.4. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$

Так как функция $y = \operatorname{ctg} x$ является монотонной на множестве $(0; \pi)$, то для нее на этом множестве можно определить обратную функцию $y = \operatorname{arcctg} x$: $\alpha = \operatorname{arcctg} a \Leftrightarrow 0 < \alpha < \pi$ и $\operatorname{ctg} \alpha = a$.

Множество $(-\infty; +\infty)$ является областью определения, а множество $(0; \pi)$ – областью значений функции $y = \operatorname{arcctg} x$. Кроме того, верны равенства $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, $x \in (-\infty; +\infty)$ и $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, $x \in (0; \pi)$. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображен на рис. 2.16.

Для обратных тригонометрических функций верны формулы

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \ x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \ x \in [-1; 1];$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \ x \in [-1; 1];$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \ x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, \ x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\arcsin a = \arccos\sqrt{1-a^2} = \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}, \ a \in (0;1).$$

Первые пять равенств не сложно доказать, применив формулы приведения и определения обратных тригонометрических функций. Докажем справедливость последнего равенства. Пусть $\sin\alpha = a$ и $0 < a < 1$. Так как $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, то $\cos\alpha = \sqrt{1-a^2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$, то $\alpha = \arcsin a$, $\alpha = \arccos\sqrt{1-a^2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ и $\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$.

Пример 1. Найдем значение выражения $\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{arcctg}\,3\right)$.

▲ Введем обозначение $\mathrm{arcctg}\,3 = \alpha$. Получим: $\mathrm{ctg}\,\alpha = 3$

Тогда $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$,

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{10}},\quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{10}+3} = \sqrt{10}-3.$$

Ответ: $\sqrt{10}-3$. ■

Пример 2. Найдем значение выражения

$$\sin\left(2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right).$$

▲ Введем обозначения $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{1}{2}$ и $\beta = \arccos\frac{3}{4}$. Тогда $\sin\left(2\alpha - \frac{\beta}{2}\right) = \sin 2\alpha\cdot\cos\frac{\beta}{2} - \cos 2\alpha\cdot\sin\frac{\beta}{2}$. Так как $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{3}{4}$, то $\sin 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{3}{5}$, $\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

Следовательно, $\sin\left(2\mathrm{arctg}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{14}}{4} - \frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{20}\left(4\sqrt{14} - 3\sqrt{2}\right)$. ■

Пример 3. Найдем область определения функции $y = \arcsin\frac{2x}{x-1}$.

▲ По определению необходимо, чтобы $-1 \leqslant \frac{2x}{x-1} \leqslant 1$. Отсюда $-1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$.

Ответ: $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$. ■

Пример 4. Найдем область определения функции

$$y = \sqrt{\pi - 4\arccos\frac{x}{2}}.$$

▲ Область определения функции определяется системой неравенств $\begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant 1, \\ \pi - 4\arccos\dfrac{x}{2} \geqslant 0. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ \arccos\dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ \arccos\dfrac{x}{2} \leqslant \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Так как функция $y = \arccos x$ – убывающая функция, то

$$\begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2, \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2.$$

Ответ: $[\sqrt{2}; 2]$. ■

1. Почему для определения обратных тригонометрических функций необходимо брать сужения тригонометрических функций на промежутках их монотонности?
2. Напишите область определения и область значений каждой из обратных тригонометрических функций.
3. Напишите формулы зависимости между обратными тригонометрическими функциями и докажите их.

Упражнения

A

2.30. Вычислите:

1) $\sin(2\arcsin 0,75)$;

2) $\cos(\arcsin(-0,5))$;

3) $\arcsin(\sin 2)$;

4) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\dfrac{2}{3}\right)$;

5) $\sin(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3)$;

6) $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{3} - \arccos\dfrac{2}{3}\right)$.

2.31. Найдите значение выражения:

1) $\arcsin(\sin 257^\circ)$;

2) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{11}\right)\right)$;

3) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+\cos\left(\operatorname{arctg}2\sqrt{3}\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

B

2.32. Проверьте справедливость равенства:

1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{2}$;

2) $\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}=\operatorname{arctg}\frac{11}{2}$;

3) $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}2=\pi-\operatorname{arctg}3$;

4) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$.

2.33. Докажите, что выполняется равенство $\alpha+\beta+\gamma=\alpha\beta\gamma$, если $\operatorname{arctg}\alpha+\operatorname{arctg}\beta+\operatorname{arctg}\gamma=\pi$.

2.34. Проверьте, что:

1) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$;

2) $\operatorname{arctg}3-\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\pi}{4}$;

3) $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}=\frac{\pi}{2}$;

4) $\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{77}{85}=\arcsin\frac{8}{17}+\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$.

C

2.35. Верно ли равенство $\arccos x+\arccos\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)=\frac{\pi}{3}$, $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$?

2.36. Верно ли равенство $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2-2x^2}}{2}\right)-\arcsin x=\dfrac{\pi}{4}$?

2.37. Постройте график функции:

1) $y=3\arcsin\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$;

2) $y=-\dfrac{1}{2}\arccos(1-3x)$;

3) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-2)+3$;

4) $y=2\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)-2$.

2.38. Постройте график функции:

1) $y=\left|\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right|$;

2) $y=\arcsin(|x|-1)$;

3) $y=|\operatorname{arctg}2x+1|$;

4) $y=\operatorname{arcctg}|1-x|$.

Упражнения для повторения

2.39. Найдите значение $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$, если $\sin x=\dfrac{5}{13}$, $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

2.40. Решите неравенство:

1) $2x^2-5x+30\leqslant 0$;

2) $4x^2+x+1>0$.

2.41. Проходит ли прямая $3x+0{,}6y=3{,}5$ через точку пересечения прямых $y=2x-8$ и $3y+7x=2$?

Раздел 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ

3.1. Тригонометрические уравнения.
3.2. Решение систем тригонометрических уравнений.
3.3. Обратные тригонометрические уравнения.
3.4. Тригонометрические неравенства.

3.1. Тригонометрические уравнения

3.1.1. Решение простейших тригонометрических уравнений

Определение. *Уравнение, содержащее переменную под знаком тригонометрической функции, называется* ***тригонометрическим.***

В основном тригонометрические уравнения решаются методом приведения их к простейшим тригонометрическим уравнениям вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Теперь покажем методы решения простейших тригонометрических уравнений.

1. Уравнение $\sin x = a$, $|a| \leqslant 1$. Если $|a| < 1$, то данное уравнение имеет два решения: $\alpha + 2\pi k$ и $\beta + 2\pi k$, $k \in Z$ (рис. 3.1). Так как $\beta = \pi - \alpha$, то эти решения можно записать так: $\alpha + 2\pi k$ и $-\alpha + (2k+1)\pi$. Объединив их, получим $(-1)^k \alpha + \pi k$, $k \in Z$. Учитывая, что $\alpha = \arcsin a$, решение уравнения $\sin x = a$ будет таким:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z. \qquad (1)$$

Если $|a| = 1$ или $a = 0$, то из формулы (1) получим следующие частные решения исходного уравнения:

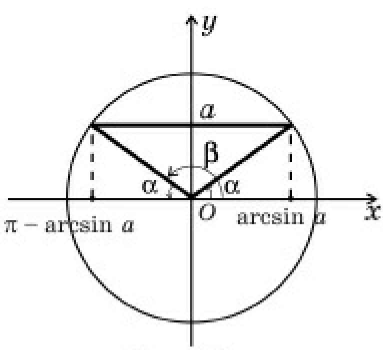


Рис. 3.1

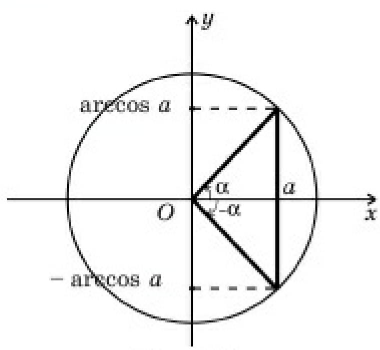


Рис. 3.2

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z; \qquad (2)$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k,\ k \in Z;$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Если $|a| > 1$, то равенство $\sin x = a$ не имеет смысла, так как $|\sin x| \leqslant 1$.

2. Уравнение $\cos x = a$, $|a| \leqslant 1$. Решения этого уравнения таковы:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z. \qquad (3)$$

Эту формулу можно доказать аналогично с помощью рис. 3.2. Частные виды этой формулы получаются при $|a| = 1$ и $a = 0$:

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k,\ k \in Z; \qquad (4)$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi,\ k \in Z.$$

3. Уравнение $\mathrm{tg}\, x = a$, $a \in (-\infty; +\infty)$ (рис. 3.3). Его решение:

$$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi k,\ k \in Z. \qquad (5)$$

4. Уравнение $\mathrm{ctg}\, x = a$, $a \in (-\infty; +\infty)$ (рис. 3.4). Его решение:

$$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi k,\ k \in Z. \qquad (6)$$

5. При $0 < a < 1$ удобно пользоваться формулами

$\sin x = -a \Rightarrow x = (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n, n \in Z$ и

$\cos x = -a \Rightarrow x = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi k, k \in Z.$

Справедливость этих формул докажите самостоятельно.

Пример 1. Решим уравнение $2\sin x = \sqrt{3}$.

▲ Разделив обе части данного уравнения на 2, получим уравнение $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Решение этого уравнения находится по формуле (1):

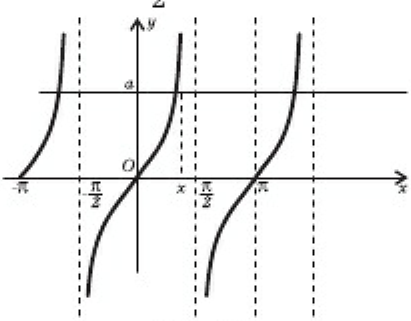


Рис. 3.3

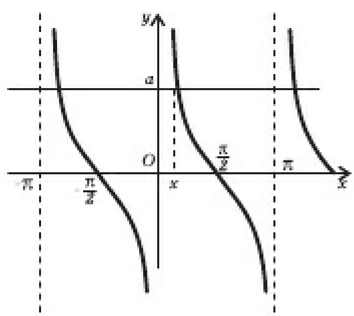


Рис. 3.4

$x=(-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi k,\ k\in Z$. Так как $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, то это решение записывается в виде $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$. ■

Пример 2. Решим уравнение $\sqrt{2}\cos x=1$.

▲ Умножим данное уравнение на число $\frac{\sqrt{2}}{2}:\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. По формуле (3) $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi k,\ k\in z$ или $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in z$. ■

Пример 3. Решим уравнение $3\operatorname{ctg}x=\sqrt{3}$.

▲ Данное уравнение запишем так: $\operatorname{ctg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, т.к. $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=$ $=\frac{\pi}{3}$, то по формуле (6) $x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in z$. ■

Пример 4. Решим уравнение $2\operatorname{tg}x=1$.

▲ Данное уравнение запишем так: $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$. Отсюда по формуле (5) $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in z$. Не каждый угол можно выразить через π. Поэтому во многих случаях ответы записываются в указанном виде. ■

3.1.2. Методы решения тригонометрических уравнений

В целом решение тригонометрических уравнений сводится к решению простейших тригонометрических уравнений с применением различных способов тригонометрических преобразований. Тригонометрические уравнения несколькими способами можно привести к простейшему виду. Рассмотрим их на примерах.

1. ***Уравнения вида*** $\sin f(x)=a$, $f(\sin x)=0$. Здесь рассматриваются методы решения уравнений вида

$$\sin f(x)=a,\ \ \cos f(x)=a,\ \ \operatorname{tg}f(x)=a,\ \ \operatorname{ctg}f(x)=a,$$

и

$$f(\sin x)=0,\ \ f(\cos x)=0,\ \ f(\operatorname{tg}x)=0,\ \ f(\operatorname{ctg}x)=0.$$

Все эти уравнения с помощью обозначений приводятся к простейшему виду. Например, вводя обозначения $f(x)=t$, уравнение $\sin f(x)=a$, $|a|<1$ можно привести к виду $\sin t=a$. Отсюда $t=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\in Z$, и решение исходного уравнения сводится к нахождению корней уравнения $f(x) = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$, $|a| < 1$.

Аналогично, вводя обозначение $\sin x = t$, уравнение $f(\sin x) = 0$ можно привести к виду $f(t) = 0$. Например, если $f(t)$ является многочленом n-й степени и $t_1, t_2, \ldots, t_m$, где $m \leqslant n$, есть его действительные корни, то уравнение $f(\sin x) = 0$ равносильно совокупности уравнений $\sin x = t_1$, $\sin x = t_2$, ..., $\sin x = t_m$, т.е. решение каждого из этих уравнений является также решением исходного уравнения.

Пример 5. Найдем действительные корни уравнения

$$\cos\left(x^2 - 2\right) = \frac{1}{2}.$$

▲ Как было сказано выше, это уравнение равносильно уравнению

$$x^2 - 2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z \text{ или } x^2 = 2 \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Так как $2 \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \geqslant 0$ только при $k = 0, 1, 2, \ldots$, то корни последнего уравнения будут такими: $x = \pm\sqrt{2 \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k}, k = 0, 1, 2\ldots$.

Ответ: $\pm\sqrt{2 \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. ■

Пример 6. Решим уравнение $6\cos^2 x + \cos 3x = \cos x$.

▲ Применяя формулу $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, данное уравнение можно записать так: $4\cos^3 x + 6\cos^2 x - 4\cos x = 0$ или $2\cos^3 x + 3\cos^2 x - 2\cos x = 0$. Вводя обозначение $\cos x = t$, $|t| \leqslant 1$, получим уравнение $2t^3 + 3t^2 - 2t = 0$, которое имеет три корня: $t_1 = 0$, $t_2 = -2$, $t_3 = \frac{1}{2}$. Так как $|t_2| = |-2| > 1$, то уравнение $\cos x = -2$ не имеет смысла. Итак, исходное уравнение на множестве действительных чисел равносильно совокупности уравнений $\cos x = 0$ и $\cos x = \frac{1}{2}$. Отсюда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. ■

2. ***Однородные уравнения.*** Уравнения вида

$$a_0 \cdot \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cdot \cos x + \ldots + a_n \cdot \cos^n x = 0$$

называются ***однородными уравнениями*** относительно $\sin x$ и $\cos x$. Здесь $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – заданные действительные числа. В этом уравнении сумма степеней $\sin x$ и $\cos x$ в каждом слагаемом равна n. Разделив данное уравнение на $\cos^n(x)$ и учитывая, что $\cos x \neq 0$, сведем его к виду $a_0 \mathrm{tg}^n x + a_1 \mathrm{tg}^{n-1} x + \ldots + a_n = 0$ $(a_0 \neq 0)$. А если $a_0 = 0$, $a_n \neq 0$, то это уравнение нужно разделить на $\sin x \neq 0$.

Пример 7. Решим уравнение

$$3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 2.$$

▲ Применяя тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, данное уравнение приведем к виду $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ или к виду $\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 6\cos^2 x = 0$. Разделив последнее уравнение на $\cos^2 x$ (здесь $\cos x \neq 0$, т.к. корни уравнения $\cos x = 0$ не удовлетворяют исходному уравнению), получим уравнение $\mathrm{tg}^2 x - 5\mathrm{tg} x + 6 = 0$. Вводя обозначение $\mathrm{tg}\, x = t$, получим уравнение $t^2 - 5t + 6 = 0$, корни которого равны $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. Итак, данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\mathrm{tg}\, x = 2$ и $\mathrm{tg}\, x = 3$. Тогда по формуле (5) $x = \mathrm{arctg}\, 2 + \pi k$, $x = \mathrm{arctg}\, 3 + \pi n$, $n \in Z$. ■

3. ***Метод введения дополнительных углов.*** Одним из эффективных методов решения уравнений вида

$$a\sin x + b\cos x = c \qquad (7)$$

является метод введения дополнительных углов. Так как $a^2 + b^2 \neq 0$, то, разделив уравнение (7) на $\sqrt{a^2 + b^2}$, получим:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, то существует угол φ такой, что $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

или

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (8)$$

Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leqslant 1$, т.е. если $a^2 + b^2 \geqslant c^2$, то уравнение (8) имеет корни, которые записываются в виде

$$x = -\varphi + (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Здесь вместо φ берут значение любого из выражений $\arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Вместо обозначений $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ также можно брать и другие обозначения: $\cos\psi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\psi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пример 8. Решим уравнение

$$\sin 8x-\cos 6x=\sqrt{3}\,(\sin 6x+\cos 8x).$$

▲ Данное уравнение перепишем в виде

$$\sin 8x-\sqrt{3}\cos 8x=\sqrt{3}\sin 6x+\cos 6x$$

или

$$\frac{1}{2}\sin 8x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 8x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6x+\frac{1}{2}\cos 6x. \qquad (9)$$

Для каждой части уравнения (9) определим соответствующее значение дополнительного угла. Для удобства рассмотрим нижеприведенную таблицу.

Выражение	a	b	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$	Дополнительный угол
$\sin 8x-\sqrt{3}\cos 8x$	1	$-\sqrt{3}$	2	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$
$\sqrt{3}\sin 6x+\cos 6x$	$\sqrt{3}$	1	2	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$

Отсюда $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$, $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$.

Поэтому уравнение (9) записывается в виде

$$\sin 8x\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos 8x\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 6x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos 6x\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

или в виде $\sin\left(8x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(6x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Тогда по формуле (1)

$$8x-\frac{\pi}{3}=(-1)^k\arcsin\left(\sin\left(6x+\frac{\pi}{6}\right)\right)+\pi k,\ \ k\in Z.$$

Так как $\arcsin\left(\sin\left(6x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=6x+\frac{\pi}{6}$, то при $k=2m$, где $m\in Z$, получим $8x-\frac{\pi}{3}=6x+\frac{\pi}{6}+2\pi m$ или $2x=\frac{\pi}{2}+2\pi m$, т. е. $x=\frac{\pi}{4}+\pi m$, $m\in Z$. А при $k=2m+1$, где $m\in Z$, имеем $8x-\frac{\pi}{3}=-6x-\frac{\pi}{6}+\pi+2\pi m$, где $m\in Z$, или $14x=\frac{7\pi}{6}+2\pi m$, $m\in Z$, т.е. $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{7}$, $m\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi m$, $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{7}$, $m\in Z$. ■

4. ***Метод замены переменной.*** После тригонометрических преобразований тригонометрическое уравнение приведем к виду $R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)=0$, где R – рациональное выражение. Данное уравнение решается с помощью замены $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ на t. При этом учитывается, что

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1-t^2};\qquad \operatorname{ctg} x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{2t}.$$

Пример 9. Решим уравнение

$$(\cos x-\sin x)\left(2\operatorname{tg} x+\cos^{-1}x\right)+2=0.$$

▲ Полагая, что $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, данное уравнение запишем в виде

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\left(\frac{4t}{1-t^2}+\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)+2=0 \text{ или}$$

$$\frac{3t^4+6t^3+8t^2-2t-3}{(t^2+1)(1-t^2)}=0.$$

Методом группировки разложим числитель дроби на множители: $3t^4+6t^3+8t^2-2t-3=(3t^4-t^2)+(6t^3-2t)+9t^2-3=(3t^2-1)(t^2+2t+3)$. Последнее рациональное уравнение эквивалентно совокупности уравнений $3t^2-1=0$, $t^2+2t+3=0$, $t\neq\pm1$. Второе уравнение не имеет действительных корней, а уравнение $3t^2-1=0$ имеет такие корни: $t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно, решение исходного уравнения сводится к решению совокупности уравнений $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Объединенное решение этих уравнений таково: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

ОДЗ исходного уравнения: $\cos x\neq 0$, т.е. $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Найденные решения удовлетворяют условию, данному выше.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. ■

В подобных случаях найденные решения постоянно нужно сверять с ОДЗ исходного уравнения, т.к. мы можем приобрести посторонние корни.

Если R – рациональное выражение, то уравнения вида

$$R(\sin x\pm\cos x;\ \sin x\cos x)=0 \qquad (9)$$

решаются с помощью введения новой переменной t: $\sin x\pm\cos x=t$. Из равенства $t^2=(\sin x+\cos x)^2=1\pm 2\sin x\cos x$ получается равенство $\sin x\cdot\cos x=\pm\frac{t^2-1}{2}$. То есть из (9) получаем рациональное уравнение $R\left(t;\ \pm\frac{t^2-1}{2}\right)=0$.

Пример 10. Решим уравнение $\sin x+\cos x-2\sqrt{2}\sin x\cos x=0$.

▲ Полагая, что $\sin x+\cos x=t$, данное уравнение запишем в виде $\sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2}=0$. Его корни: $t_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t_2=\sqrt{2}$. Тогда нужно решить уравнения $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ и $\sin x+\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Применяя метод введения дополнительных углов, получим решения этих уравнений. В группе решите эти уравнения, проверьте правильность ответа. Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. ■

Часто при решении тригонометрических уравнений используют формулы, понижающие степень. В таких случаях применяют замену $\cos 2x$ на t.

Пример 11. Решим уравнение $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{7}{4}\cos^2 2x$.

▲ Применяя формулы, понижающие степень, получим уравнение

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3=\frac{7}{4}\cos^2 2x.$$

Полагая, что $\cos 2x=t$, получим уравнение $t^2=\frac{1}{4}$.

Тогда $t_1 = -\frac{1}{2}$ и $t_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$ и $\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. ■

5. *Метод разложения на множители.*

Пример 12. Решим уравнение

$$2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0.$$

▲ Применяя метод группировки, запишем это уравнение в виде $2\cos 2x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$ или $(2\cos 2x - 1)(\sin x + 1) = 0$. Следовательно, данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\sin x + 1 = 0$ и $2\cos 2x - 1 = 0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. ■

6. *Метод оценки обеих частей уравнения.* Иногда, предварительно оценив левую и правую части уравнения, можно определить, имеет ли данное уравнение решения или не имеет. Рассмотрим примеры.

Пример 13. Решим уравнение $2\sin^4 x + \cos^5 x = 3$.

▲ Так как $|\sin x| \leqslant 1$ и $|\cos x| \leqslant 1$, то $|2\sin^4 x + \cos^5 x| \leqslant 2|\sin^4 x| + |\cos^5 x|$, то $2\sin^4 x + \cos^5 x = 3 \Leftrightarrow |\sin x| = 1$ и $\cos x = = 1$. Так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то не существует значения x, при котором имели бы место равенства $|\sin x| = 1$ и $\cos x = 1$. Ответ: $\varnothing$. ■

Пример 14. При каких значениях параметра a уравнение $\sin^4 x + \cos^6 x = a$ не имеет решения?

▲ Так как $\sin^4 x \geqslant 0$ и $\cos^6 x \geqslant 0$, то ясно, что при $a < 0$ уравнение не имеет решения, при $a = 0$ не существует значения x, при котором $\sin^4 x + \cos^6 x = 0$.

Пусть теперь $a > 0$. Так как $\sin^4 x \leqslant \sin^2 x$ и $\cos^6 x \leqslant \cos^2 x$, то $\sin^4 x + \cos^6 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, при $a > 1$ исходное уравнение также не имеет решения.

Ответ: $a \in (-\infty;\ 0] \cup (1;\ +\infty)$. ■

1. Напишите формулы решения простейших тригонометрических уравнений и обоснуйте их на чертеже.

2. Напишите формулы нахождения решений уравнений вида: $\sin x = 1$, $\sin x = -1$, $\sin x = 0$, $\cos x = 1$, $\cos x = -1$, $\cos x = 0$.
3. Какие методы решения тригонометрических уравнений вы знаете? Назовите (выделите) основные мотивы применения этих методов.

Упражнения

A

В упражнениях **3.1–3.6, 3.8–3.11** решите уравнения.

3.1. 1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} 3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.2. 1) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$;
3) $\operatorname{tg} 2x = -1$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$.

3.3. 1) $2\sin x - 1 = 0$; 2) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$;
3) $3\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$; 4) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 1 = 0$.

3.4. 1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0,5$; 2) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}$.

3.5. 1) $4\sin x + 3 = 0$; 2) $7\cos x - 2 = 0$;
3) $\operatorname{tg} 3x + 10 = 0$; 4) $12\operatorname{ctg} 2x = 5$.

3.6. 1) $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$; 2) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$;
3) $\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; 4) $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

B

3.7. Найдите решения, лежащие в указанном промежутке, и запишите их в градусах:

1) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0$, $(0^\circ, 90^\circ)$; 2) $2\cos\frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$, $(0^\circ, 90^\circ)$;

3) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; 4) $3\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$, $(-\pi; 0)$

3.8. 1) $2\sin x + 3\cos x = 0$; 2) $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$;

3) $\sin^2 3x = \cos^2 3x$; 4) $\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1$.

3.9. 1) $2\cos\frac{x}{2} = 1 + \cos x$; 2) $2\sin^2 2x = 3\cos 2x$;

3) $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 0$; 4) $\frac{\cos x}{\cos 3x} = 0$.

3.10. 1) $2\sin^2 x + \sin x = 1$;

2) $\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x = 0$;

3) $4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x$;

4) $\cos^2 x = \sin x - 1$.

3.11. $\sqrt{\frac{1}{16} + \cos^4 x - \frac{1}{2}\cos^2 x} + \sqrt{\frac{9}{16} + \cos^4 x - \frac{3}{2}\cos^2 x} = \frac{1}{2}$.

В упражнениях **3.12–3.14** решите уравнения методом сведения их к однородным уравнениям.

3.12. 1) $2\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 4$;

2) $\sin 2x - 3\cos^2 x = 4$;

3) $\sin^4 x - \cos^4 x = 0,5$;

4) $4\cos^2\frac{x}{2} + 0,5\sin x + 3\sin^2\frac{x}{2} = 3$.

3.13. 1) $3\cos^3 x - 7\cos^2 x\sin x + 4\sin^3 x = 0$;

2) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}$;

3) $\cos^6 x + \sin^6 x - \cos^2 2x = \frac{1}{16}$;

4) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x$.

3.14. 1) $2\sin^3 x + 2\cos x\sin^2 x - \sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0$;

2) $2\sin^3 x - \sin^2 x\cos x + 2\sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0$.

3.15. Решите уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = a\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)$ при всех действительных значениях параметра a.

В упражнениях **3.16, 3.17** решите уравнения методом введения дополнительных углов.

3.16. 1) $4\sin 3x + 3\cos 3x = 5,2$;

2) $3\sin x - 4\cos x = 5$;

3) $2\sin 7x + \sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = 0$;

4) $3\sin x + 4\cos x + 5\sin 3x = 0$.

3.17. 1) $(\sin 7x + \cos 7x)^2 = 2\sin^2 11x$;

2) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 7x$;

3) $(\sin 3x + \sin 5x)^2 = (\cos 3x + \cos 5x)^2$;

4) $\sin 10x + \cos 10x = \sqrt{2}\sin 15x$.

3.18. Найдите все корни уравнения $\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0$, лежащие на промежутке $\left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

В упражнениях **3.19, 3.20** решите уравнения методом замены переменной.

3.19. 1) $\sin x + \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = 2$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 5\operatorname{tg} 2x + 7$;

3) $3\sin 4x = (\cos 2x - 1)\operatorname{tg} x$; 4) $(1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 2} + \sin x = 2\cos x$.

3.20. 1) $\sin x + \cos x + \sin x\cos x = 1$;

2) $\sin x + \cos x - 2\sin x\cos x = 1$;

3) $5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$;

4) $\sin x + \cos x - 2\sqrt{2}\sin x\cos x = 0$.

C

3.21. Решите уравнение $\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin x\cos x} = a$, при всех действительных значениях параметра a.

3.22. При каких значениях b уравнение

$\sin 2x + 2b\sqrt{2}(\sin x - \cos x) + 1 - 4b = 0$ имеет решения?

Найдите эти решения.

3.23. При каких значениях a уравнение

$\cos^2 x\cos 2x + a(\cos^4 x - \sin^4 x) = (2a+1)^2$ имеет решения?

Найдите эти решения.

3.24. При каких значениях a уравнение

$\sin 2x - 2a\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1 - 6a^2 = 0$

имеет решения? Найдите эти решения.

В упражнениях **3.25, 3.26** решите уравнения.

3.25. 1) $\sin^2 6x + 8\sin^2 3x = 0$;

2) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$;

3) $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{17}{32}$;

4) $\cos 2x + 4\sin^4 x = 8\cos^6 x$.

3.26. 1) $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$;

2) $\cos^2 \dfrac{x}{2} + \cos^2 \dfrac{3x}{2} = \sin^2 2x + \sin^2 4x$;

3) $2 + \cos 4x = 5\cos 2x + 8\sin^6 x$;

4) $8\sin^2 x + 6\cos^2 x = 13\sin 2x$.

3.27. Решите уравнение методом разложения на множители:

1) $\sin(ax + b) = \sin(cx + d)$;

2) $\sin(ax + b) = \cos(cx + d)$;

3) $\cos 3x + \sin 5x = 0$;

4) $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cdot \cos 3x$;

5) $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$;

6) $\sin ax \cdot \sin bx = \cos cx \cdot \cos dx$, $a - b = c - d$.

3.28. Решите уравнение методом разложения на множители:

1) $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 3x$;

2) $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 3$.

3.29. Покажите, что уравнение $\sin^4 x + \cos^6 x = a$ не имеет решения, если $a > 1$.

C

3.30. Покажите, что уравнение $\sin 5x \cdot \sin 7x = 1$ не имеет решения.

3.31. При каких действительных значениях a уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ имеет решения? Найдите их.

Смешанные задачи

B

В заданиях **3.32–3.36** решите уравнения.

3.32. 1) $2\cos 2x = \sqrt{6}(\cos x - \sin x)$; 2) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x$;

3) $\operatorname{tg} x + \sin 2x = \dfrac{1}{\cos x}$; 4) $2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 4x$.

3.33. 1) $\sin 2x \cdot \sin 6x = \cos x \cdot \cos 3x$; 2) $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$;
3) $\sin^3 x \cos 3x + \sin 3x \cos^3 x = 0$; 4) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

3.34. 1) $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$;

2) $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = 1 - 2\sin^2 x$;

3) $\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x = \dfrac{1}{4}\sin 12x$;

4) $\sin 2x \sin 6x - \cos 2x \cos 6x = \sqrt{2} \sin 3x \cdot \cos 8x$.

3.35. 1) $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 32\cos^3 2x$; 2) $\dfrac{\cos x}{\cos 3x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 8\sin x \sin 3x$;

3) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 8\cos^2 x$; 4) $\dfrac{\cos x}{\cos 3x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = -2\cos 2x$.

3.36. 1) $\sin 2x + \sin^4 \dfrac{x}{2} = \cos^4 \dfrac{x}{2}$; 2) $\cos x = \sqrt{3}\sin x + 2\cos 3x$;

3) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = (\sin x + \cos x)^2$; 4) $\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x$.

C

3.37. Найдите все корни уравнения $\sqrt{\sin(1 - x)} = \sqrt{\cos x}$, лежащие на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3.38. Найдите все решения уравнения $\cos^4 x - \cos 3x = 3\cos x - \cos^3 x \cdot \cos 3x$, лежащие на отрезке $\left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

3.39. Найдите все решения уравнения $\cos 5x + \cos 7x + 2\cos^2 2x - 2\sin^2 3x = 0$, удовлетворяющие условию $|x| < 2$.

3.40. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg} x^2 = \operatorname{ctg} 5x$; 2) $\sin x = \cos\sqrt{x}$;

3) $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\cos x\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\sin x\right)$; 4) $\sin(\pi \operatorname{ctg} x) = \cos(\pi \operatorname{tg} x)$.

3.41. Покажите, что уравнение $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$ не имеет решения.

3.2. Решение систем тригонометрических уравнений

Опираясь на известные методы решения систем уравнений, остановимся на методах решения наиболее часто встречающихся систем тригонометрических уравнений.

3.2.1. Системы уравнений вида

$$\begin{cases}\sin x\cdot\sin y=a,\\ \cos x\cdot\cos y=b;\end{cases}\quad \begin{cases}\sin x\cdot\cos y=a,\\ \cos x\cdot\sin y=b.\end{cases}\qquad(1)$$

Складывая уравнения и вычитая из одного уравнения другое, получим

$$\begin{cases}\cos(x+y)=b-a,\\ \cos(x-y)=b+a;\end{cases}\text{ и }\begin{cases}\sin(x+y)=a+b,\\ \sin(x-y)=a-b.\end{cases}$$

Очевидно, что эти системы имеют действительные решения тогда и только тогда, когда $|a+b|\leqslant 1$ и $|a-b|\leqslant 1$. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим систему уравнений $\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{\sqrt3}{4},\\ \cos x\cos y=\dfrac{\sqrt3}{4}.\end{cases}$

▲ Как было сказано выше, данную систему запишем в виде

$$\begin{cases}\cos(x-y)=\dfrac{\sqrt3}{2},\\ \cos(x+y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z,\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z.\end{cases}$$

Отсюда, учитывая знаки «+» и «−» в первом уравнении, получим совокупность следующих систем:

$$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}(2k+m),\\ y=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}(m-2k),\ k,\ m\in Z;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}(2k+m),\\ y=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}(m-2k);\ k,\ m\in Z.\end{cases}$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}(2k+m);\ \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}(m-2k)\right\}$;

$\left\{\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}(2k+m);\ \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}(m-2k)\right\}$, $(k,m\in Z)$. ■

Системы вида

$$\begin{cases}\sin x\cdot\sin y=a,\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=b,\ a\cdot b\neq 0;\end{cases}\qquad\begin{cases}\sin x\cdot\sin y=a,\\ \operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}y=b,\ a\cdot b\neq 0;\end{cases}$$

$\begin{cases}\sin x\cdot\cos y=a,\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}y=b,\ a\cdot b\neq 0\end{cases}$ также сводятся к системам вида (1).

Разделив первое уравнение системы

$\begin{cases}\sin x\cdot\cos y=a,\\ \cos x\cdot\cos y=b,\ b\neq 0\end{cases}$ на второе, получим уравнение $\operatorname{tg}x=\dfrac{a}{b}$.

Из этого равенства определим x. Затем подставим его в любое уравнение системы и находим y.

Пример 2. Решим систему уравнений $\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

▲ Как уже отмечали, из этой системы получим уравнение

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$$

Так как $\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \pi k\right) = (-1)^k \dfrac{1}{2}$, то из первого уравнения данной системы имеем $(-1)^k \dfrac{1}{2}\cos y = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos y = (-1)^k \dfrac{1}{2}$. Отсюда $y = \pm\arccos\left((-1)^k \dfrac{1}{2}\right) + 2\pi m$, $k,\ m \in Z$.

Если $k = 2n$, $n \in Z$, то $y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$,

а если $k = 2n + 1$, $n \in Z$, то $y = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m\right)$, $k,\ m \in Z$. ■

3.2.2. Системы уравнений вида

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = b \end{cases} \tag{2}$$

решаются методом замены переменной: $u = \sin x$, $v = \sin y$.

$$\begin{cases} u + v = a, \\ u^2 + v^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = a, \\ uv = \dfrac{a^2 - b}{2}. \end{cases}$$

Решение системы вида

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = b; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x + \cos y = a, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = b; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x + \cos y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = b \end{cases}$$

аналогично решению системы (2).

Нетрудно показать, что следующие системы равносильны:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin x - \sin y = \dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

Обозначим $u = \operatorname{tg} x$, $v = \operatorname{tg} y$. Тогда систему $\begin{cases} a_1 \operatorname{tg} x + b_1 \operatorname{tg} y = c_1, \\ a_2 \operatorname{ctg} x + b_2 \operatorname{ctg} y = c_2 \end{cases}$ приводим к виду:

$$\begin{cases} a_1 u + b_1 v = c_1, \\ \dfrac{a_2}{u} + \dfrac{b_2}{v} = c_2. \end{cases}$$

Пример 3. Решим систему уравнений $\begin{cases} \cos x + \cos y = \dfrac{1}{2}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{7}{4}. \end{cases}$

▲ Применяя формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, данную систему запишем в виде

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \dfrac{1}{2}, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Вводя обозначения $u = \cos x$, $v = \cos y$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{1}{2}, \\ u^2 + v^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u + v = \dfrac{1}{2}, \\ u \cdot v = 0. \end{cases}$$

Отсюда $u_1 = 0$, $v_1 = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{1}{2}$, $v_2 = 0$, т. е.

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m, \ m \in Z; \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m, \ m \in Z; \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m\right)$, $\left(\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m; \ \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$; $k, \ m \in Z$. ■

3.2.3. Системы уравнений вида

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ x + y = \alpha \end{cases} \qquad (3)$$

решаются с помощью преобразования левой части ее первого уравнения в произведение: $2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = a$. Тогда эта система записывается так: $\begin{cases} 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = a, \\ x + y = \alpha. \end{cases}$

Здесь возможны два случая.

а) Если $\sin\frac{\alpha}{2} = 0$, то $\alpha = 2\pi k,\ k \in Z$. Тогда $y = 2\pi k - x$. Отсюда из первого уравнения системы (3) $\sin x - \sin x = a$, т.е. эта система имеет решение только при $a = 0$. В этом случае система (3) равносильна уравнению $x + y = \alpha$.

б) Если $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$, то

$$\begin{cases} \cos\frac{x-y}{2} = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \\ x + y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \pm 2\arccos\left(\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right) + 4\pi k, k \in Z, \\ x + y = \alpha. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{2} \pm \arccos\left(\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right) + 2\pi k, \\ y = \dfrac{\alpha}{2} \mp \arccos\left(\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right) - 2\pi k,\ k \in Z. \end{cases}$$

Очевидно, для того чтобы исходная система имела решение, необходимо выполнение условия $\left|\dfrac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right| \leqslant 1$. Если это условие нарушено, то данная система не имеет решения. ■

Решите самостоятельно

Системы вида

$$\begin{cases}\sin x - \sin y = a,\\ x \pm y = \alpha;\end{cases} \quad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a,\\ x \pm y = \alpha;\end{cases} \quad \begin{cases}\sin x \pm \cos y = a,\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

решаются аналогично.

Пример 4. Решим систему уравнений $\begin{cases}\sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2},\\ x + y = \dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

▲ Применяя формулы двойного аргумента, получим:

$$\begin{cases}\cos 2y - \cos 2x = -1,\\ x + y = \dfrac{\pi}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\sin(x+y)\sin(x-y) = -1,\\ x + y = \dfrac{\pi}{4}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin(x-y) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ x + y = \dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases}x - y = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z,\\ x + y = \dfrac{\pi}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{8}\left(1 + (-1)^{k+1}\right) + \dfrac{\pi k}{2},\\ y = \dfrac{\pi}{8}\left(1 - (-1)^{k+1}\right) - \dfrac{\pi k}{2}, \ k \in Z.\end{cases}$$

Если $k = 2n$, $n \in Z$, то $x = \pi n$, $y = \dfrac{\pi}{4} - \pi n$, $n \in Z$,

а если $k = 2n + 1$, $n \in Z$, то $x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi n$, $y = -\dfrac{\pi}{2} - \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\left(\pi n;\ \dfrac{\pi}{4} - \pi n\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{4} + \pi n;\ -\dfrac{\pi}{2} - \pi n\right)$, $n \in Z$. ■

Системы вида

$$\begin{cases}\sin x \cdot \sin y = a,\\ x \pm y = \alpha;\end{cases} \quad \begin{cases}\cos x \cdot \cos y = a,\\ x \pm y = \alpha;\end{cases} \quad \begin{cases}\sin x \cdot \cos y = a,\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

решаются с помощью преобразования произведения в сумму.

Пример 5. Решим систему уравнений $\begin{cases}\sin x \cos y = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ x + y = \dfrac{3\pi}{4}.\end{cases}$

▲ Как было отмечено выше, эту систему запишем в виде

$$\begin{cases} \sin(x+y)+\sin(x-y)=\sqrt{2}, \\ x+y=\dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x-y)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ x+y=\dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=(-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\pi k, \ k\in Z, \\ x+y=\dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}-\pi n\right),\ \left(\frac{3\pi}{4}+\pi n; -\pi n\right),\ n\in Z\ .$$ ■

Решите самостоятельно

Системы вида

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y=a, \\ x\pm y=\alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{ctg}x\pm\operatorname{ctg}y=a, \\ x\pm y=\alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=a, \\ x\pm y=\alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}y=a, \\ x\pm y=\alpha \end{cases}$$

также решаются указанным способом.

3.2.4. Системы уравнений вида

$$\begin{cases} a\sin x+b\sin y=c, & a,b,c\in R, \\ p\cos x+q\cos y=r, & p,q,r\in R. \end{cases}$$

Чтобы решить систему уравнений этого вида при $a\neq 0,\ p\neq 0$, ее записывают в виде

$$\begin{cases} \sin x=\dfrac{c}{a}-\dfrac{b}{a}\sin y, \\ \cos x=\dfrac{r}{p}-\dfrac{q}{p}\cos y. \end{cases}$$

Затем оба уравнения возводят в квадрат и, складывая их, получают уравнение $1=\left(\dfrac{c}{a}-\dfrac{b}{a}\sin y\right)^2+\left(\dfrac{r}{p}-\dfrac{q}{p}\cos y\right)^2$, которое зависит только от переменной y.

Пример 6. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 5\sin x-\sin y=0, \\ 3\cos x-\cos y=2. \end{cases}$$

▲ Имеем $\begin{cases} \sin y=5\sin x, \\ \cos y=3\cos x-2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = 25\sin^2 x + 9\cos^2 x - 12\cos x + 4 \Rightarrow 4\cos^2 x + 3\cos x - 7 = 0$.

Отсюда $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k,\ k \in Z$, а уравнение $\cos x = -\dfrac{7}{4}$ не имеет решения. Тогда из второго уравнения системы получим $\cos y = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 2m\pi,\ m \in Z$. *Проверка.* Если $x = 2\pi k$ и $y = 2\pi m,\ k, m \in Z$, то

$$\begin{cases} 5\sin 2k\pi - \sin 2m\pi = 0, \\ 3\cos 2k\pi - \cos 2m\pi = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\cdot 0 - 0 = 0, \\ 3\cdot 1 - 1 = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(2\pi k;\ 2\pi m),\ k, m \in Z$.

Упражнения

В упражнениях **3.42–3.48** решите системы уравнений.

A

3.42. 1) $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -0{,}5, \\ \sin y \cdot \cos x = 0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}36, \\ \cos x \sin y = 0{,}175; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{1+\sqrt{2}}{4}, \\ \cos x \sin y = -3 + 2\sqrt{2}. \end{cases}$

3.43. 1) $\begin{cases} \sin x - \sin y = 0{,}5, \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0{,}5, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{7}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \sin y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x \cdot \operatorname{ctg} y = \dfrac{\sqrt{6}}{2}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

3.44. 1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x = \sin y, \\ \sin x = 2\operatorname{ctg} y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin y = 3\sin x, \\ 2\cos x + \cos y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \cos x + 3\sin x = 2\cos y, \\ \cos y + 3\sin y = 2\cos x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = \sin y, \\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y. \end{cases}$

B

3.45. 1) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{4}, \\ x + y = \dfrac{5\pi}{6}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = -\dfrac{1}{3}, \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = 0,5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$

3.46. 1) $\begin{cases} \sin(x - y) = 3\sin x \cos y - 1, \\ \sin(x + y) = -2\cos x \sin y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x \sin y = -\dfrac{1}{4}, \\ \cos(x + y) + \cos(x - y) = 1,5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4\sin(3x + 2y) + \sin x = 0, \\ 4\sin(2x + 3y) + \sin y = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} a\cos(2x + y) = \cos y, \\ a\cos(x + 2y) = \cos x \quad (a > 1). \end{cases}$

C

3.47. 1) $\begin{cases} \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \dfrac{1}{\cos x} = \cos y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3, \\ |x - y| = \dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^3 y, \\ \cos x = \sin 2y. \end{cases}$

3.48. 1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z = 3, \\ \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = 6, \\ x + y + z = \pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\cos x = 3\operatorname{tg} y, \\ 2\cos y = 3\operatorname{tg} z, \\ 2\cos z = 3\operatorname{tg} x. \end{cases}$

Упражнения для повторения

3.49. Покажите, что прямая $x + 7y = 50$ касается окружности $x^2 + y^2 = 50$, и найдите координаты точки касания.

3.50. Найдите сумму первых 10 членов последовательности с общим членом $a_n = 2^{7-n}$.

3.51. Найдите значение выражения $\left(a + \left(1 + \left(\dfrac{3 - a}{a + 1}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$ при $a = -\dfrac{1}{3}$.

3.3. Обратные тригонометрические уравнения

3.3.1. Решение простейших обратных тригонометрических уравнений

Определение. *Уравнения, содержащие обратные тригонометрические выражения и зависящие от неизвестной переменной x, называются* ***обратными тригонометрическими уравнениями.***

При решении обратных тригонометрических уравнений пользуются следующими формулами:

1) $\arcsin x = \alpha,\ \left(|\alpha| \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \sin\alpha;$

2) $\arccos x = \alpha,\ (0 \leqslant \alpha \leqslant \pi) \Rightarrow x = \cos\alpha;$

3) $\operatorname{arctg} x = \alpha,\ \left(|\alpha| < \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \operatorname{tg}\alpha;$

4) $\operatorname{arcctg} x = \alpha,\ (0 < \alpha < \pi) \Rightarrow x = \operatorname{ctg}\alpha.$

Справедливость этих формул вытекает из определения обратных тригонометрических функций. Действительно, по определению функции $y = \arcsin x$ выполняются соотношения $x = \sin y$, $|y| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $|x| \leqslant 1$. Отсюда, если $y = \alpha$, $|\alpha| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, то $x = \sin\alpha$.

Докажите самостоятельно

Докажите формулы 2, 3, 4.

Пример 1. Решим уравнение $\operatorname{arctg}2x = \dfrac{\pi}{4}$.

▲ Так как $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$, то по формуле 3) $2x = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} == 1 \Rightarrow x = 0,5$.

Ответ: 0,5. ■

Пример 2. Решим уравнение $\arcsin(2x-1) = 2$.

▲ Так как $2 > \dfrac{\pi}{2}$, то данное уравнение не имеет решения.

Ответ: $\varnothing$. ■

3.3.2. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

1) Если $P(t)$ – рациональное выражение, то решение уравнения вида $P(\arcsin x) = 0$ с помощью замены $\arcsin x = t$ сводится к решению простейших обратных тригонометрических уравнений $\arcsin x = t_k$,

где t_k – корни рационального уравнения $P(t) = 0$. Уравнения $P(\arccos x) = 0$, $P(\operatorname{arctg} x) = 0$ и $P(\operatorname{arcctg} x) = 0$ решаются аналогично.

Пример 3. Решим уравнение $2\arcsin^2 x - \arcsin x - 6 = 0$.

▲ Если ввести обозначение $\arcsin x = t$, то данное уравнение приводится к виду $2t^2 - t - 6 = 0$. Это квадратное уравнение. Его корни: $t_1 = -1,5$, $t_2 = 2$. Тогда исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\arcsin x = -1,5$ и $\arcsin x = 2$.

Так как $2 > \frac{\pi}{2}$, а $|-1,5| < \frac{\pi}{2}$, то второе уравнение не имеет решения, а первое уравнение имеет единственное решение: $x = -\sin 1,5$. ■

2) Если в составе уравнения содержится несколько обратных тригонометрических функций, то подобные уравнения решаются вычислением значения какой-либо тригонометрической функции в обеих частях этого уравнения. При этом могут появиться посторонние корни, которые выявляются путем проверки. Если к данному уравнению применяется тангенс или котангенс, то может случиться потеря корней этого уравнения, которые не входят в область определения тангенса или котангенса. Поэтому в таких случаях производят предварительную проверку точек, не входящих в область определения тангенса (или котангенса), и определяют, являются ли они решением исходного уравнения.

Пример 4. Решим уравнение $\arcsin 6x + \arcsin 6\sqrt{3}x = -\frac{\pi}{2}$.

▲ Перепишем это уравнение в виде $\arcsin 6x = -\arcsin 6\sqrt{3}x - \frac{\pi}{2}$ и в обеих частях равенства найдем значение синуса:

$$\sin(\arcsin 6x) = \sin\left(-\arcsin 6\sqrt{3}x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда по формуле приведения имеем:

$$6x = -\cos\left(\arcsin 6\sqrt{3}x\right) \Rightarrow 6x = -\sqrt{1 - 108x^2} \Rightarrow 144x^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{12},\ x_2 = -\frac{1}{12}.$$

Теперь нужно выполнить проверку:

$x = \frac{1}{12} \Rightarrow \arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, т.е. число $x = \frac{1}{12}$ не является корнем данного уравнения.

$$x = -\frac{1}{12} \Rightarrow \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{12}$. ■

Пример 5. Решим уравнение $2\operatorname{arctg}(2x+1) = \arccos x$.

▲ В обеих частях уравнения найдем значение косинуса: $\cos(2\operatorname{arctg}(2x+1)) = x$. Если предположить, что $\operatorname{arctg}(2x+1) = \alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = 2x+1$. Тогда по формуле $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ имеем:

$$\cos(2\operatorname{arctg}(2x+1)) = \cos 2\alpha = \frac{1-(2x+1)^2}{1+(2x+1)^2} = \frac{-2x^2-2x}{1+2x+2x^2}.$$

Поэтому исходное уравнение сводится к уравнению

$$\frac{-2x^2-2x}{1+2x+2x^2} = x \Leftrightarrow -2x^2-2x = x+2x^2+2x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+4x^2+3x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Проверка. $x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{arctg}1 = \arccos 0 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0$ – корень уравнения.

Ответ: $x = 0$. ■

3) В некоторых уравнениях правая и левая части бывают тождественно равными в области определения, общей для обеих частей этого уравнения. В таких случаях достаточно найти эту общую область определения обеих частей данного уравнения.

Пример 6. Решим уравнение $2\arccos x = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

▲ По определению функции $y = \arccos x$ выполняются соотношения $x = \cos y$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $|x| \leqslant 1$. Если в правую часть подставить это значение x, то $\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \arcsin\left(2\cos y\sqrt{1-\cos^2 y}\right) = \arcsin(2\cos y \sin y) = \arcsin(\sin 2y) = 2y = 2\arccos x$. Здесь $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant 2y \leqslant \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow -\dfrac{\pi}{4} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, т.е. $y \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$. Итак, левая и правая части данного уравнения тождественно равны при любом $y = \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, $(y = \arccos x)$. Отсюда $x \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

Ответ: $x \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$. ■

1. Напишите формулы решения простейших обратных тригонометрических уравнений. Докажите их.
2. Напишите области определения и области значений обратных тригонометрических функций.

Упражнения

В упражнениях **3.52–3.58** решите уравнения.

A

3.52. 1) $\arcsin 2x=\frac{\pi}{2}$; 2) $\arccos\frac{x}{3}=\frac{\pi}{4}$;

3) $\operatorname{arctg} 3x=\frac{\pi}{3}$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}$.

3.53. 1) $\arcsin\left(\frac{x}{2}-3\right)=\frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos(1-2x)=\frac{\pi}{2}$;

3) $\operatorname{arctg}(2-3x)=-\frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{arcctg}(3x+2)=\frac{\pi}{4}$.

3.54. 1) $\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}-4\operatorname{arctg}\frac{x}{3}-5=0$; 2) $\operatorname{arctg}^2(3x+2)+2\operatorname{arctg}(3x+2)=0$;

3) $2\arcsin x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{9}\arcsin x$; 4) $3\operatorname{arctg}^2 x-4\operatorname{arctg} x+\pi^2=0$.

B

3.55. 1) $\arccos\frac{x}{2}=2\operatorname{arctg}(x-1)$; 2) $\arccos x-\pi=\arcsin\frac{4x}{3}$;

3) $\operatorname{arctg}2x+\operatorname{arctg}3x=\frac{3\pi}{4}$; 4) $\arcsin x+\arccos(x-1)=\pi$.

3.56. 1) $\arcsin x+\arccos\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2}$;

2) $\arcsin 2x=3\arcsin x$;

3) $\arccos x-\arcsin x=\arccos\sqrt{3}x$;

4) $\arccos x-\arcsin x=\arcsin(2-3x)$.

3.57. 1) $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$; 2) $\arccos x=\pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

3) $\arccos x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; 4) $\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=\arccos\left(2x^2-1\right)$.

3.58. 1) $2\arccos x=\arccos\left(2x^2-1\right)$; 2) $2\operatorname{arctg}x=\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$;

3) $2\operatorname{arctg}x=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$; 4) $\arccos x=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

C

3.59. Решите уравнение $2\arccos x = a + \frac{a^2}{\arccos x}$ при любом значении параметра a.

3.60. Решите уравнение при любом значении параметра a:

1) $\arcsin x = 2\arcsin a$; 2) $\arccos x = \arcsin 2a$.

Упражнения для повторения

3.61. Найдите область определения функции $y = \sqrt{9 - x|x|}$.

3.62. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней квадратного трехчлена $x^2 - (a-2)x - (a-1)$ принимает наименьшее значение?

3.63. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 32, а сумма ее первых пяти членов равна 31. Найдите первый член прогрессии.

3.4. Тригонометрические неравенства

3.4.1. Решение простейших тригонометрических неравенств

Неравенства, составленные из тригонометрических выражений, называются ***тригонометрическими неравенствами***. Решение тригонометрических неравенств сводится к решению простейших неравенств вида $\sin x < a$, $\cos x \leqslant a$, $\operatorname{tg} x \geqslant a$, $\operatorname{ctg} x > 0$ и т.д. Теперь покажем справедливость следующих формул:

1) $\sin x > a$, $(|a| < 1) \Rightarrow x \in (\arcsin a + 2\pi k;\ \pi - \arcsin a + 2\pi k)$, $k \in Z$;

2) $\sin x < a$, $(|a| < 1) \Rightarrow x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi k;\ \arcsin a + 2\pi k)$, $k \in Z$;

3) $\cos x > a$, $(|a| < 1) \Rightarrow x \in (-\arccos a + 2\pi k;\ \arccos a + 2\pi k)$, $k \in Z$;

4) $\cos x < a$, $(|a| < 1) \Rightarrow x \in (\arccos a + 2\pi k;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi k)$, $k \in Z$;

5) $\operatorname{tg} x > a \Rightarrow x \in \left(\operatorname{arctg} a + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$;

6) $\operatorname{tg} x < a \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \operatorname{arctg} a + \pi k\right)$, $k \in Z$;

7) $\operatorname{ctg} x > a \Rightarrow x \in (\pi k;\ \operatorname{arcctg} a + \pi k)$, $k \in Z$;

8) $\operatorname{ctg} x < a \Rightarrow x \in (\operatorname{arcctg} a + \pi k;\ \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

К примеру, покажем справедливость формул 1) и 5). Другие формулы доказываются аналогично.

Как показано на рис. 3.5, для выполнения неравенства $\sin x > a$, $(|a| < 1)$ необходимо выполнение двойного неравенства $\varphi_1 + 2\pi k < x < \varphi_2 +$

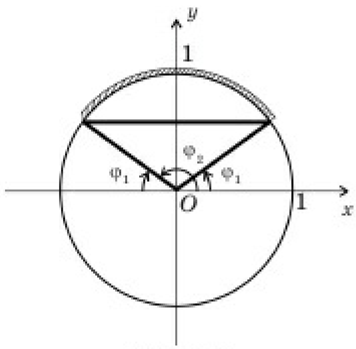


Рис. 3.5

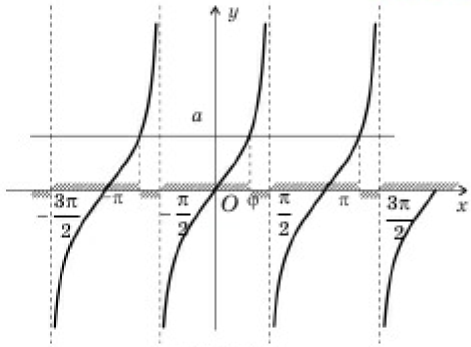


Рис. 3.6

$+2\pi k$, $k \in Z$. Так как $\varphi_1 = \arcsin a$, $\varphi_2 = \pi - \varphi_1 = \pi - \arcsin a$, то отсюда следует справедливость формулы 1), а из рис. 3.6 следует справедливость формул 5) и 6).

В целом тригонометрические неравенства решаются так же, как и тригонометрические уравнения (см. п. 3.1), т.е. применяются аналогичные преобразования. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим неравенство $2\sin x - 1 \geqslant 0$.

▲ Запишем данное неравенство в виде $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$, и по формуле 1) $x \in [\arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k;\ \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k]$, $k \in z$. Т.к. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то $x \in [\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k]$, $k \in z$. ■

Пример 2. Решим неравенство $3\operatorname{ctg} x + \sqrt{3} < 0$.

▲ Запишем данное неравенство в виде $\operatorname{ctg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, и по формуле 8) $x \in (\operatorname{arcctg}(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + k\pi,\ \pi + k\pi)$, $k \in z$. Т.к. $\operatorname{arcctg}(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2\pi}{3}$, то $x \in (\frac{2\pi}{3} + \pi k;\ \pi + \pi k)$, $k \in z$. ■

Пример 3. Решим неравенство $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$.

▲ Вводя обозначение $\sin x = t$, получим квадратное неравенство $2t^2 - 7t + 3 > 0$, решения которого определяются совокупностью неравенств $t < \frac{1}{2}$ и $t > 3$, т.е. исходное неравенство равносильно совокупности неравенств $\sin x < \frac{1}{2}$ и $\sin x > 3$. Второе неравенство не имеет решения, а решения первого неравенства находятся по формуле 2):

$$x \in \left(-\pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k;\ \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z.$$

Если учесть, что $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, то получим ответ задачи.

Ответ: $x\in\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in Z$. ■

Пример 4. Решим неравенство $\cos x+\cos 2x+\cos 3x>0$.

▲ Преобразуем сумму первого и третьего слагаемых в произведение. Тогда $\cos 2x+2\cos 2x\cdot\cos x>0$ или $\cos 2x\left(1+2\cos x\right)>0$. Это неравенство равносильно совокупности следующих двух систем неравенств:

$$\begin{cases}\cos 2x<0,\\ \cos x<-\frac{1}{2};\end{cases}\ \text{и}\ \begin{cases}\cos 2x>0,\\ \cos x>-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Используя формулы 3) и 4), получим:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2\pi k<2x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z,\\ \frac{2\pi}{3}+2\pi m<x<\frac{4\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z;\end{cases}\\ \begin{cases}-\frac{\pi}{2}+2\pi k<2x<\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z,\\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi m<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z;\end{cases}\end{array}\right.$$

т. е.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z,\\ \frac{2\pi}{3}+2\pi m<x<\frac{4\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z;\end{cases}\\ \begin{cases}-\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z,\\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi m<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z;\end{cases}\end{array}\right.$$

Из первой системы неравенств получим:

$x\in\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi m;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi m\right),\ k,m\in Z$, а из второй системы – $x\in\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k\right),\ k\in Z$. Объединяя полученные решения, получим нижеследующий ответ.

Ответ: $x\in\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi m;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi m\right)\cup\left(-\frac{\pi}{4}+\right.$

$+ 2\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\Big),\ k, m, n \in Z$. ■

Пример 5. Решим неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x > \frac{5}{8}$.

▲ Преобразуем левую часть неравенства:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x\right)^3 + \left(\cos^2 x\right)^3 =$$

$$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x\right) =$$

$$= \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - \frac{3}{4}\cdot 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{5}{8} + \frac{3\cos 4x}{8}.$$

Следовательно, исходное неравенство записывается в виде $\frac{5}{8} + \frac{3\cos 4x}{8} > \frac{5}{8}$ или $\cos 4x > 0$.

Отсюда $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 4x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right),\ k \in Z$. ■

Пример 6. Найдем область определения функции $y = \arccos \times$ $\times (2\sin x - 1)$.

▲ По определению обратных тригонометрических функций необходимо, чтобы $-1 \leqslant 2\sin x - 1 \leqslant 1$, т.е. $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Так как это неравенство равносильно неравенству $\sin x \geqslant 0$, то $2\pi k \leqslant x \leqslant (2k + 1)\pi,\ k \in Z$.

Ответ: $x \in [2k\pi;\ (2k + 1)\pi],\ k \in Z$. ■

3.4.2. Доказательство тригонометрических неравенств

В целом нельзя путать такие понятия, как «решение неравенства» и «доказательство неравенства». При решении неравенств находят все значения переменных, входящих в состав неравенства и удовлетворяющих этому неравенству. А при доказательстве неравенств показывают, что это неравенство справедливо при всех указанных значениях переменных (букв), входящих в состав этого неравенства. Если предварительно не указаны области изменения переменных, то неравенство доказывается при всех действительных значениях переменных. Рассмотрим несколько примеров на доказательство тригонометрических неравенств.

Пример 7. Докажем неравенство $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}$, если $\alpha,\ \beta \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

▲ Преобразуем сумму в правой части неравенства в произведение: $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. Так как $\alpha,\ \beta \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, то $\frac{\alpha+\beta}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ и $\frac{\alpha-\beta}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому $0 < \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant 1$ и $0 < \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leqslant 1$.

Тогда $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}$ равносильно неравенству $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leqslant 1$ и выполняется для любых $\alpha,\ \beta \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. ■

Пример 8. Докажем неравенство $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geqslant 6$, если $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – углы треугольника.

▲ Так как выражения $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2}$ положительны, то к ним можно применить неравенство Коши $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$:

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}}.$$

Теперь преобразуем подкоренное выражение

$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$. Так как $\beta+\gamma = \pi-\alpha$ и $\frac{\beta-\gamma}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}$ и $0 < \cos\frac{\beta-\gamma}{2} \leqslant 1$.

Поэтому $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. А так как функция $f(t) = \frac{t(1-t)}{2}$, $t \in [0;\ 1]$, $\left(0 < \sin\frac{\alpha}{2} = t < 1\right)$ свое наибольшее значение принимает только при $t = \frac{1}{2}$, то $\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) =$

$=\frac{1}{8}$, и тем самым $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}$. Поэтому $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+$ $+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}=6$, что и требовалось доказать. ■

Пример 9. Докажем неравенство $\sin x <$ $< x < \operatorname{tg} x$, если $x\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

▲ Рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом R (рис. 3.7).

Пусть $OA = OB = R$, $\angle AOB = x$,

$0 < x < \frac{\pi}{2}$, $AC \perp OA$.

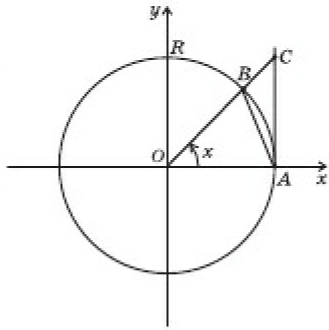


Рис. 3.7

Тогда верно неравенство

$S_{\Delta AOB} < S_{\text{сек}AOB} < S_{\Delta AOC}$, т.е.

$\frac{1}{2}R^2\cdot\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x$ или $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, что и требовалось доказать. ■

Пример 10. Докажем неравенство $x-\frac{x^3}{4}<\sin x$, если $x\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

▲ Имеем $\sin x = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$. Так как $\sin x < x <$ $< \operatorname{tg} x$, то справедливы неравенства $\operatorname{tg}\frac{x}{2}>\frac{x}{2}$ и $1-\sin^2\frac{x}{2}>1-\frac{x^2}{4}$.

Следовательно, $\sin x > 2\cdot\frac{x}{2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=x-\frac{x^3}{4}$, что и требовалось доказать. ■

1. Разъясните смысл понятий «решить неравенство» и «доказать неравенство».
2. Напишите формулы решения простейших тригонометрических неравенств. Докажите их.
3. Объясните смысл ограничения $|a|<1$ в формулах 1)–4). Почему в формулах 5)–8) нет подобного ограничения? Какие значения a допустимы в этих формулах? Почему?

Упражнения

В упражнениях **3.64–3.67** решите неравенства.

A

3.64. 1) $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$; 2) $\cos x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg}x>-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

4) $\sin x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\cos x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$.

3.65. 1) $2\cos x - 1 \geqslant 0$; 2) $2\sin x + \sqrt{2} \geqslant 0$;
3) $2\cos x - \sqrt{3} \leqslant 0$; 4) $3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} > 0$.

3.66. 1) $\sin 2x < \dfrac{1}{2}$; 2) $\cos\dfrac{x}{3} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin\dfrac{x}{2} < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $\operatorname{tg} 5x > 1$; 5) $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) < 1$; 6) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) < 1$.

3.67. 1) $\sin x\cos\dfrac{\pi}{6} - \cos x \cdot \sin\dfrac{\pi}{6} \leqslant \dfrac{1}{2}$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) > 1$;
3) $4\sin 2x \cdot \cos 2x \geqslant \sqrt{2}$; 4) $3\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{x}{2}\right) > -\sqrt{3}$;
5) $\cos\dfrac{\pi}{8} \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin\dfrac{\pi}{8} < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $0,5\sin 4x < -0,2$.

3.68. Найдите решения неравенств, лежащие на указанном промежутке:
1) $\sin x \geqslant -\dfrac{1}{2},\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{7\pi}{6}\right)$; 2) $\cos\dfrac{x}{2} > \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ 0\right]$;
3) $\operatorname{tg} x \geqslant -1,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{4}\right)$; 4) $\sin 2x < \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ x \in [0;\ \pi]$.

B

В упражнениях **3.69–3.71** и **3.73–3.75** решите неравенства.

3.69. 1) $\sin x > \cos x$; 2) $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x \geqslant 1$;
3) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) > 0,25$; 4) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \geqslant -1$.

3.70. 1) $\sin x - 3\cos x < 0$; 2) $1 - \sin x + \cos x < 0$;
3) $2\cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x$; 4) $\cos x \cdot \operatorname{tg} 2x > 0$.

3.71. 1) $\sin x + \cos x > -\sqrt{2}$; 2) $\operatorname{tg} x \geqslant \sin x$;
3) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 2$; 4) $\sin 2x \geqslant 2\sin x$.

3.72. Найдите область определения функции:
1) $y = \sqrt{\sin(\cos x)}$; 2) $y = \arcsin\left(1 + \operatorname{tg}^2 \pi x\right)$;
3) $y = \arccos(\operatorname{tg} x)$; 4) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x - \sin x}$.

3.73. 1) $|\sin x| < |\cos x|$; 2) $|\sin x| > |\cos x|$;

3) $|\sin x| \cdot \cos x > \dfrac{1}{4}$; 4) $4\left(\sin^2 x - |\cos x|\right) < 1$.

C

3.74. 1) $\dfrac{5 - 4\left(\sin^2 x + \cos x\right)}{\cos x} \leqslant 0$; 2) $\dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{\sin x - 1} < 0$;

3) $\left|\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right| \leqslant 1$; 4) $\sqrt{\dfrac{2(\sin x + \cos x) - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - (\sin x + \cos x)}} \geqslant 1$.

3.75. 1) $5\sin^2 x + \sin^2 2x > 4\cos 2x$; 2) $4\sin^3 x < 2\sin x + \cos 2x$;

3) $\sin 3x > 4\sin x \cdot \cos 2x$; 4) $6\sin x \cdot \cos 2x - 2\sin 3x < 4$;

5) $\cos(\sin x) < 0$; 6) $5 + 2\cos 2x \leqslant 3|2\sin x - 1|$.

3.76. Для каждого $x \in R$ докажите неравенство:

1) $|a\cos x + b\sin x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$; 2) $4\sin 3x + 5 \geqslant 4\cos 2x + 5\sin x$.

3.77. Докажите неравенство $(1 - \cos\alpha)(1 - \cos\beta)(1 - \cos\gamma) \leqslant \dfrac{1}{8}$, если α, β, γ – углы треугольника.

3.78. Докажите неравенство

1) $\dfrac{1}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{\cos\beta} + \dfrac{1}{\cos\gamma} \geqslant 6$; 2) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma \geqslant 9$, если α, β, γ – углы остроугольного треугольника.

3.79. Для каждого $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ докажите неравенство:

1) $\cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{16}$; 2) $x - \dfrac{x^3}{4} < \operatorname{tg} x$; 3) $1 - \cos x \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

Упражнения для повторения

3.80. Сравните числа: 1) $\sin\dfrac{5\pi}{7}$ и $\sin\dfrac{7\pi}{8}$; 2) $\operatorname{tg}\dfrac{9\pi}{7}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{6\pi}{5}$.

3.81. Решите уравнения:

1) $x^2 - 4x + |x^2 - 2x| + 4 = 0$; 2) $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$.

3.82. При каких значениях m уравнение $2x^2 + mx + 18 = 0$ имеет два разных корня?

Раздел 4. ВЕРОЯТНОСТЬ

4.1. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона.
4.2. Алгебра событий и классическое определение вероятности.
4.3. Полная вероятность события. Формула Байеса.
4.4. Формула Бернулли. Понятие закона больших чисел.

Так как элементы теории вероятностей и математической статистики изучаются с 7 класса, то здесь повторим пройденные темы, необходимые для изучения нового материала.

4.1. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона

На практике часто приходится подсчитывать всевозможные варианты взаимного расположения предметов или знать все возможные исходы какой-либо нашей деятельности и посчитать все возможные способы его выполнения. Например, сколькими способами можно распределить 5 учебников между двумя учениками или, сколькими способами можно выбрать «короля» и «королеву» школьного бала из претендентов, состоящих из 5 юношей и 5 девушек, и т. д. Подобные задачи называются ***комбинаторными задачами***, а область математики, изучающая комбинаторные задачи, – ***комбинаторикой***.

4.1.1. Элементы комбинаторики

1. ***Правило суммы.*** Через A обозначим множество, состоящее из конечного числа элементов, обозначаемое $n(A)$.

Для любых конечных множеств A и B верно равенство

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B). \qquad (1)$$

Заметим, что формула (1) верна для любого количества объединений конечных множеств. Например, эта формула для объединения трех множеств A, B и C записывается так:

$$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C). \qquad (2)$$

2. ***Правило произведения.*** *Для любых конечных множеств A и B количество m всех пар вида $(a; b)$, $(a\in A,\ b\in B)$ таково:*

$$m = n(A)\cdot n(B). \qquad (3)$$

Пример 1. Сколько существует трехзначных чисел, делящихся на 2, на 3, на 5?

▲ Через A обозначим множество всех трехзначных чисел, делящихся на 2, через B – делящихся на 3 и через C – делящихся на 5. Нужно найти значение выражения $n(A\cup B\cup C)$. Так как

$$n(A)=\left[\frac{900}{2}\right]=450,\quad n(B)=\left[\frac{900}{3}\right]=300,\quad n(C)=\left[\frac{900}{5}\right]=180,$$

$$n(A\cap B)=\left[\frac{900}{6}\right]=150,\quad n(A\cap C)=\left[\frac{900}{10}\right]=90,$$

$n(B\cap C)=\left[\frac{900}{15}\right]=60$, $n(A\cap B\cap C)=\left[\frac{900}{2\cdot 3\cdot 5}\right]=30$, то по формуле (2)

$$n(A\cup B\cup C)=450+300+180-150-90-60+30=660.$$

Ответ: 660. ■

Пример 2. У Абзала 3 рубашки, 2 брюк, туфли и кроссовки. Сколько образов он может составить из данных вещей? (Если Абзал меняет одну из вещей, то это будет одним из его образов).

▲ Пусть A – множество рубашек, B – множество брюк, C – множество обуви. Тогда $n(A)=3$, $n(B)=2$, $n(C)=2$. Если $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$, то тройка $(a;\ b;\ c)$ является одним из образов мальчика. По правилу произведения количество образов Абзала из данных вещей таково: $n(A)\cdot n(B)\cdot n(C)=3\cdot 2\cdot 2=12$.

Ответ: 12 образов. ■

3. *Размещения с повторениями.* Пусть дано множество X, состоящее из n элементов. Список его элементов

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ (x_i\in X), \tag{4}$$

где элементы могут повторяться, называется ***кортежем длиной k***.

Всякий кортеж длиной k, составленный из элементов множества X, называется ***размещением из n элементов по k с повторениями***. А количество всех размещений из n элементов по k с повторениями вычисляется по формуле

$$\bar{A}_n^k=n^k. \tag{5}$$

Пример 3. Сколькими способами можно распределить 7 разных учебников между двумя учениками?

▲ В условиях задачи даны два числа: 7 и 2. Тогда по формуле (5) должно быть либо 7^2, либо 2^7. Какое из них выбрать? Как правило, учащиеся после поверхностного анализа условия задачи выбирают первый вариант ответа. Здесь схема подобного рассуждения проста: «7 учебников нужно распределить (разместить) между двумя учениками». Следовательно, $\bar{A}_7^2=7^2=49$ способов. Природа этой ошибки кроется в «несовершенстве» человеческого языка общения (независимо от языка общения: казахского, русского, английского и т. д.). Ни на каком языке мира не говорят, что «нужно распределить между двумя учениками по 7 учебников». А на самом деле так и происходит. Обозначим через A и $Б$ имена учеников, записанные на форзаце полученного учебника. Тогда один из вариантов распределения этих 7 учебников между учениками *А* и *Б* можно изобразить так:

А	*А*	*Б*	*А*	*Б*	*Б*	*А* ,
1	2	3	4	5	6	7

т.е. получилось, что имена данных учеников распределены по 7 учебникам. Поэтому количество всех распределений таково:

$$\tilde{A}_2^7 = 2^7 = 128.$$

Ответ: 128 способов.

4. ***Размещения без повторений.*** Если в кортеже (4) элементы не повторяются, то этот кортеж называется ***размещением из n элементов по k без повторений.*** А количество всех размещений из n по k без повторений вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1), \text{ или } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (6)$$

Пример 4. Сколькими способами можно рассадить 3 учеников на 5 стульях?

▲ Здесь множество X состоит из 5 элементов (стульев), из которых нужно выбрать 3 стула, на которые сядут данные три ученика. Очевидно, что если имеет значение то место, на которое садится данный ученик, то искомое число равно размещению из 5 элементов по 3 без повторений:

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Ответ: 60 способами.

5. ***Перестановки.*** Если в размещениях из n элементов по k без повторений считать, что $n = k$, то это размещение без повторений называется ***перестановкой из n элементов***, а количество всех перестановок из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n! \qquad (7)$$

6. ***Сочетания без повторений.*** Пусть $n(X) = n$, тогда каждое k-е элементное подмножество множества X называется ***сочетанием из n по k без повторений.*** Количество всех сочетаний из n по k вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (8)$$

Число C_n^k называется ***коэффициентом сочетания.*** Коэффициенты сочетания обладают рядом свойств:

1°. $C_n^k = C_n^{n-k}$;

2°. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

3°. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$;

4°. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Заметим, что формулы 1° и 4° были доказаны в учебнике 9-го класса, а свойства 2° и 3° легко получаются из формулы бинома Ньютона, рассматриваемого ниже.

Пример 5. В турнире по мини-футболу, который проходил по круговой системе, участвовали 5 команд. Сколько всего матчей было сыграно?

▲ В каждом матче участвуют 2 команды. Поэтому количество сыгранных в турнире игр равно количеству всех сочетаний из 5 по 2: $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$. Ответ: 10 матчей.

4.1.2. Бином[1] Ньютона

Коэффициенты сочетания также применяются при разложении степени двучлена с любым натуральным показателем. Например, верна следующая формула, называемая ***биномом Ньютона***:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n. \quad (9)$$

Докажем ее методом математической индукции.

При $n = 1$ имеем: $(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b$.

При $n = 2$ имеем: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$.

Пусть при $n = k$ формула (9) верна. Докажем справедливость этой формулы при $n = k + 1$, т.е. докажем справедливость равенства

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \ldots + C_{k+1}^m a^{k+1-m} \cdot b^m + \ldots + C_{k+1}^k a b^k + C_{k+1}^{k+1} \cdot b^{k+1}.$$

Действительно

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}\cdot b + \ldots + C_k^m a^{k-m}\cdot b^m + \ldots +\right.$$
$$\left. + C_k^{k-1} a\cdot b^{k-1} + C_k^k b^k\right) = C_k^0 \cdot a^{k+1} + C_k^1 \cdot a^k b + \ldots + C_k^m \cdot a^{k-m+1} \cdot b^m + \ldots +$$
$$+ C_k^{k-1} a^2 \cdot b^{k-1} + C_k^k a b^k + C_k^0 \cdot a^k b + C_k^1 \cdot a^{k-1} b^2 + \ldots + C_k^{m-1} \cdot a^{k-m} \cdot b^m +$$
$$+ C_k^m\, a^{k-m} \cdot b^{m+1} + \ldots + C_k^{k-1} \cdot a b^k + C_k^k \cdot b^{k+1} = C_k^0 \cdot a^{k+1} + \left(C_k^0 + C_k^1\right) a^k \cdot b +$$
$$+ \ldots + \left(C_k^{m-1} + C_k^m\right) a^{k-m+1} \cdot b^m + \ldots + \left(C_k^{k-1} + C_k^k\right) a b^k + C_k^k b^{k+1}.$$

Так как $C_k^0 = C_{k+1}^0 = 1, C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1, C_k^{m-1} + C_k^m = C_{k+1}^m$, то получим требуемое: $(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \ldots + C_{k+1}^m a^{k+1-m} \cdot b^m + \ldots + C_{k+1}^k a b^k + C_{k+1}^{k+1} \cdot b^{k+1}$.

При разложении биномов на сумму часто пользуются так называемым «треугольником Паскаля». Здесь в каждой строке расположены коэффициенты разложения бинома в степени, равной номеру рассматриваемой строки.

[1] Бином применяется в смысле двучлена.

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

С помощью формулы бинома Ньютона покажем справедливость вышеприведенных свойств 2° и 3°. В формуле возьмем $a = b = 1$. Тогда $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Если предположить, что $a = 1$ и $b = -1$, то

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0.$$

4.1.3.* Размещения заданного состава[2]

Определение. *Всякий кортеж длиной $m = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, где элемент x_1 множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ встречается k_1 раз, x_2 – k_2 раз и т. д., x_n – k_n раз, называется **размещением заданного состава** $(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)$.*

Например, если $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, то кортеж $(x_1, x_2, x_2, x_1, x_1)$ является размещением состава (3, 2, 0). Количество всех размещений состава $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ обозначается через $P_m(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ и вычисляется по формуле

$$P_m(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}. \tag{10}$$

Действительно, размещение состава $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ есть кортеж длиной $m = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. В этом кортеже элемент x_1 встречается в k_1 местах, и эти места из m можно отобрать $C_m^{k_1}$ способами. Теперь из оставшихся $m - k_1$ мест должны отобрать k_2 для элемента x_2, и это можно сделать $C_{m-k_1}^{k_2}$ способами и т. д. В конце элемент x_n можно разместить $C_{m-k_1-k_2-\ldots-k_{n-1}}^{k_n}$ способами. Тогда по правилу умножения

$$P_m(k_1, k_2, \ldots, k_n) = C_m^{k_1} \cdot C_{m-k_1}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{m-k_1-k_2-\ldots-k_{n-1}}^{k_n} =$$

$$= \frac{m!}{k_1!(m-k_1)!} \cdot \frac{(m-k_1)!}{k_2!(m-k_1-k_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(m-k_1-k_2-\ldots-k_{n-1})!}{k_n!(m-k_1-k_2-\ldots-k_n)!} =$$

$$= \frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}, \text{ где } (m-k_1-k_2-\ldots-k_n)! = 0! = 1.$$

[2] Иногда размещения заданного состава называют перестановками с повторениями.

Пример 5. Сколькими способами можно разместить 4 учебника по математике и 3 учебника по физике в одном ряду книжной полки?

▲ При любом расположении данных учебников в одном ряду имеем размещение состава (4, 3) длиной 4 + 3 = 7. Тогда по формуле (9) $P_7(4,\ 3) = \dfrac{7!}{4!3!} = 35$.

Ответ: 35. ■

Число $P_m(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$ называется ***полинимиальным коэффициентом***, так как выполняется следующая полинимиальная формула:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^m = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=m} P_m(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)\cdot a_1^{k_1}\cdot a_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{k_n}. \quad (10')$$

Если $n = 2$, то получим формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^m = \sum_{n=0}^{m} C_m^n \cdot a^{m-n}\cdot b^n. \quad (11)$$

Теперь докажем формулу (10). Если сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ перемножить друг на друга m раз и подобные члены не объединять под одну степень, то получим все виды кортежей длиной $m = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Тогда в этом разложении выражение вида $a_1^{k_1}a_2^{k_2}\ldots a_n^{k_n}$ имеет коэффициент, равный $P_m(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$, что и требовалось доказать. ■

Формула (11) вытекает из равенства $C_m^k = P_m(m-k,\ k)$.

4.1.4.* Сочетания с повторениями

Пусть дано множество $X = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$, состоящее из n элементов. Рассмотрим множество всех кортежей длиной m, составленных из элементов множества X. Из них в один класс отнесем те кортежи, которые имеют одинаковый состав. Каждый из этих классов называют ***сочетанием из n элементов по m с повторениями***. А количество всех таких классов обозначают через $\overline{C_n^m}$. Например, пусть $X = \{a;\ b\}$. Тогда множество всех кортежей длиной 3 имеет вид: $(a,\ a,\ a)$, $(a,\ a,\ b)$, $(a,\ b,\ a)$, $(b,\ a,\ a)$, $(a,\ b,\ b)$, $(b,\ a,\ b)$, $(b,\ b,\ a)$, $(b,\ b,\ b)$, и их количество равно $\bar{A}_2^3 = 2^3 = 8$. Отсюда имеем 4 класса кортежей с одинаковым составом: $K_1 = \{(a,\ a,\ a)\}$, $K_2 = \{(a,\ a,\ b),\ (a,\ b,\ a),\ (b,\ a,\ a)\}$, $K_3 = \{(a,\ b,\ b),\ (b,\ a,\ b),\ (b,\ b,\ a)\}$ и $K_4 = \{(b,\ b,\ b)\}$, поэтому $\overline{C_2^3} = 4$.

В целом число $\overline{C_n^m}$ вычисляется по формуле

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^{m}. \quad (12)$$

▲ По определению $\overline{C_n^m}$ равно количеству числовых кортежей $(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$, для которых $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m$. Здесь все k_i – неотрицательные числа. Теперь каждый такой числовой кортеж $(k_1,$

Кортеж – упорядоченный набор из n элементов ($n \in N$), называемое его компонентами, или координатами.

k_2, ..., k_n) заменим на кортеж, состоящий из 1 и 0 следующим образом: число k_i (если $k_i \neq 0$) заменим на k_i единиц, а если $k_i = 0$, то вместо него ничего не пишем, здесь $i = 1, 2, \dots, n$. Далее все запятые заменим на 0. Другими словами, данный класс разбиения имеет такой состав: $(k_1, k_2, \dots k_n)$. Вместо $k_i \cdot x$ ставится k_1 раз число 1, а все запятые заменяются числом 0. Тогда этому классу ставится в соответствии кортеж, состоящий из $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$ единиц и $n - 1$ нулей (количество запятых равно $n - 1$). Например, в рассмотренном выше примере класс K_1 состоит из кортежа, имеющего состав (3, 0). Следовательно, этот числовой кортеж заменяется на (1, 1, 1, 0), класс K_2 состоит из кортежей состава (2, 1), поэтому заменяем его на (1, 1, 0, 1). Аналогично K_3 имеет состав (1, 2) и заменяется на (1, 0, 1, 1), и K_4 ~ (0, 1, 1, 1). Это соответствие является взаимно однозначным. Причем каждый такой кортеж состоит из $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$ единиц и $(n - 1)$ нулей. А количество таких кортежей равно C^{n-1}_{n+m-1}, так как из $n + m - 1$ мест кортежа нужно выбрать $n - 1$ мест, в которых должны располагаться нули. Итак, $\overline{C^m_n} = C^{n-1}_{n+m-1}$. ■

Пример 6. В цветочном магазине имеются 6 видов цветов. Из них нужно составить букет, состоящий из 7 цветов. Сколько таких различных букетов можно составить? Здесь различные формы расположения цветов в букете не учитываются.

▲ В этой задаче множество X состоит из 6 элементов (6 видов цветов), а каждый букет будем считать кортежем длиной 7. Тогда количество всех таких букетов равно количеству сочетаний из 6 по 7 с повторениями: $\overline{C^7_6} = C^{6-1}_{6+7-1} = C^5_{12} = \dfrac{12!}{5!7!} = 792$.

Ответ: 792. ■

Заметим, что при решении задач комбинаторики с помощью размещения заданного состава и сочетания с повторениями следует придерживаться следующего правила.

Сначала необходимо выяснить, что требуется найти по условию задачи: количество кортежей заданного состава или количество всех видов составов кортежа. В первом случае нужно использовать формулу (9), *а во втором случае – формулу* (12).

1. Какая область математики называется комбинаторикой?
2. Сформулируйте правило суммы и правило произведения. Поясните их смысл.
3. По какой формуле вычисляется количество всех: 1) размещений из n по k с повторениями; 2) размещений из n по k без повторений; 3) перестановок из n элементов; 4) сочетаний из n по k без повторений.
4. Что такое размещение заданного состава? Как определяется количество всех размещений заданного состава?
5. Что такое сочетание с повторениями из n по m? Чему равно количество всех сочетаний из n по m с повторениями?

Упражнения

A

4.1. Сколько существует двузначных натуральных чисел, делящихся: 1) на 3 или на 7; 2) на 5 или на 7?

4.2. Сколькими способами можно выбрать председателя и его заместителя из: 1) 4 претендентов; 2) 5 претендентов?

4.3. Сколькими способами можно разложить по двум карманам: 1) 4 монеты; 2) 5 монет разных достоинств?

4.4. Сколькими способами можно поставить в очередь: 1) 5 человек; 2) 7 человек?

4.5. Сколькими способами из 30 учеников класса можно назначить: 1) одного; 2) двух; 3) трех дежурных по классу?

4.6. Найдите количество всех перестановок букв в слове «рельс».

4.7. Сколько натуральных чисел, не превышающих 100, делятся и на 3, и на 5?

4.8. Сколькими способами можно посадить 5 учеников: 1) в один ряд; 2) за круглым столом?

4.9. Сколько различных треугольников можно составить из набора отрезков длиной 5 см, 6 см и 7 см?

4.10. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове: 1) «Отан»; 2) «Асар»?

4.11. Разложите бином на слагаемые:
1) $(x+2y)^3$; 2) $(3x-y)^3$; 3) $(a+b)^4$; 4) $(a-2b)^4$.

4.12. Запишите выражение в виде степени двучлена:
1) $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$;
2) $x^4+8x^3y+24x^2y^2+48xy^3+16y^4$.

B

4.13. На окружности отмечены 12 точек. 1) Сколько хорд можно провести с концами в указанных точках? 2) Сколько тре-угольников можно построить с вершинами в указанных точках?

4.14. Напишите пятый член в разложении бинома $\left(2x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)^8$.

4.15. Напишите средний член в разложении бинома $\left(2a+\dfrac{b}{2}\right)^{10}$.

4.16. Найдите n, если коэффициенты 3-го и 7-го членов в разложении бинома $(1+x)^n$ равны между собой.

4.17. Коэффициент третьего члена в разложении бинома $\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^n$ равен 28.

Найдите средний член разложения.

4.18. Сколькими способами можно расставить 6 шашек на черных клетках шахматной доски?

4.19. В пассажирском поезде 15 вагонов. Сколькими способами можно рассадить трех пассажиров в различные вагоны?

4.20. Для участия в соревнованиях по баскетболу тренер из 14 юношей составил команду численностью 5 игроков. Сколькими способами он может составить команду, если известно, что двое юношей обязательно войдут в состав команды?

4.21. Сколько параллелограммов образовалось при пересечении n параллельных прямых с другими m параллельными прямыми?

4.22. На книжной полке имеются 8 учебников по математике и 5 учебников по физике. Сколькими способами можно выбрать 3 учебника по математике и 2 учебника по физике?

4.23. Сколькими способами можно разместить 8 человек в 2 легковых автомобилях так, чтобы в каждом из них находились не менее 3 человек?

4.24. Сколькими способами можно выбрать 2 согласные и 1 гласную буквы из слова *логарифм*?

4.25. Найдите количество всех возможных перестановок букв в слове *логарифм*.

4.26. Очки на костях игры домино выражаются цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Сколько различных костей потребуется для этой игры?

4.27. Сколькими способами можно распределить $3n$ вещей между тремя людьми так, чтобы каждый из них получил ровно n вещей?

4.28. В магазине имеются 11 видов офисной мебели. Сколькими способами можно приобрести в офис 6 предметов мебели одного или нескольких видов?

4.29. Мать решила давать сыну ежедневно по одному фрукту из имеющихся у нее 4 яблок, 3 груш и 2 персиков. Сколькими способами она может это сделать?

4.30. Сколько различных слагаемых имеются в разложении многочлена: 1) $(x + y + z)^3$; 2) $(x + y + z)^4$?

C

4.31. Сколькими способами можно распределить 12 учебников поровну между 4 учениками?

4.32. Если A означает сумму членов, стоящих на нечетных местах, а B – сумму членов, стоящих на нечетных местах в разложении $(a + b)^n$, то $A^2 - B^2 = (a^2 - b^2)^n$. Докажите.

4.33. Найдите член, содержащий x^4 в разложении бинома $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^9$.

4.34. Найдите наибольший коэффициент в разложении бинома $\left[(1+x)\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\right]^n$.

4.35. Найдите члены, не содержащие a, в разложении выражения $\left[(1+a)\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\right]^n$.

4.36. Сколькими способами можно разбить 30 учеников на подгруппы, по 10 учеников в каждой, для обучения их английскому, немецкому и французскому языкам?

4.37. Каждый участник игры «Тоғыз құмалақ» должен сыграть одну партию с каждым из оставшихся участников. Двое участников, успев сыграть по три партии каждый, по состоянию здоровья выбыли из турнира. Сколько игроков участвовали в турнире первоначально, если известно, что было сыграно всего 16 партий?

4.38. При каких условиях разложения бинома $\left(3a+\dfrac{1}{2a}\right)^n$ имеет слагаемое, не зависящее от a?

4.39. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «Казахстан» так, чтобы три буквы a не располагались рядом?

4.40. Решите предыдущую задачу так, чтобы две буквы a не располагались рядом.

4.41. Сколько чисел, не превышающих 10^4, можно написать с помощью цифр 4 и 7?

4.42 Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$?

4.43. Сколько целых неотрицательных решений имеет неравенство $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqslant k$?

4.44. Найдите наибольший коэффициент в разложении выражения $(a + b + c + d)^5$.

4.45. Найдите коэффициент при x^5 в разложении выражения $(2 + x + 3x^2)^6$.

4.46. Номера автомобилей записываются тремя или четырьмя буквами латинского алфавита и тремя цифрами. Сколько номеров можно составить с помощью 26 латинских букв и 10 цифр?

Упражнения для повторения

4.47. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg}\varphi + \dfrac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}$; 2) $\operatorname{ctg}\varphi + \dfrac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$.

4.48. Найдите знаменатель геометрической прогрессии $\{b_n\}$:

1) $b_1 = 3,\ b_2 = -\dfrac{1}{3}$; 2) $b_1 = 1,\ b_2 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

4.49. Постройте график функции:

1) $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 3$; 2) $y = 3 - \cos 2\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

4.2. Алгебра событий и классическое определение вероятности

В этом параграфе повторим пройденный в 9 классе материал.

4.2.1. Алгебра событий

Элементарным событием называют наступление какого-либо исхода (результата) эксперимента (опыта, испытания). Например, при бросании игральной кости может выпасть одно из очков, равное 1, 2, 3, 4, 5, 6. Итак, при бросании игральной кости может произойти одно из следующих равновозможных элементарных событий: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, где A_k – событие «выпадение k очков» ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Если в процессе однократного бросания игральной кости нас интересует выпадение четного числа очков, то оно хотя и является случайным событием, но не является элементарным событием. Так как событие «выпадение четного числа очков» разлагается на элементарные события A_2, A_4, A_6.

Если каждый элемент множества U выражает какой-либо элементарный исход эксперимента и, наоборот, любой элементарный исход эксперимента является элементом множества U, то это множество U называется ***пространством элементарных событий***. Например, при бросании игральной кости пространство элементарных событий состоит из 6 элементов: $U = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$, а при бросании монеты имеем пространство: $U = \{Г, P\}$, где $Г$ означает событие «выпадение герба», а P – событие «выпадение решки».

Каждое подмножество пространства элементарных событий называется ***случайным событием***. Например, при бросании игральной кости подмножество $A = \{A_2, A_4, A_6\}$ определяет случайное событие «выпадение четного числа очков».

Если заранее известно, что при любом исходе испытания событие наступит, то такое событие называется ***достоверным***, а если известно, что событие не наступит, то его называют ***невозможным*** событием. Достоверное событие обозначается через U, а невозможное событие – через $\varnothing$. Например, при однократном бросании игральной кости событие «появление очков не менее 1» есть достоверное событие, а событие «появление очков не менее 7» есть невозможное событие. Заметим, что достоверное событие содержит все элементарные события, т.е. совпадает с пространством элементарных событий U, а невозможное событие не содержит ни одного элементарного события.

Два случайных события называются ***несовместными***, если они не могут произойти одновременно при одном и том же исходе испытания, а в других случаях, т.е. если два события могут произойти одновременно при некотором исходе испытания, их называют ***совместными***.

Итак, *чтобы данное событие $A \subset U$ наступило, необходимо и достаточно, чтобы выполнилось одно из элементарных событий, входящих в состав события A.*

События A и B называют ***равновозможными (одинаковыми)***, если они составлены из одних и тех же элементарных событий, и при этом пишут $A = B$.

Событие, выражающее невыполнение события A, называется ***событием, противоположным*** событию A и обозначается через $\bar{A}$. Например, при бросании игральной кости для $A = \{A_2, A_4, A_6\}$ противоположным является событие $\bar{A} = \{A_1, A_3, A_5\}$, выражающее выпадение нечетного числа очков.

Если выполнение или невыполнение события A не влияет на выполнение или невыполнение события B, то события A и B называются ***независимыми***.

Суммой событий A и B называется событие, означающее выполнение хотя бы одного из событий A или B, и обозначается так: $A + B$. Например, рассмотрим события $A = \{A_2, A_4, A_6\}$ и $B = \{A_1, A_2\}$, которые могут появиться при однократном бросании игральной кости, то $A + B = \{A_1, A_2, A_4, A_6\}$.

Произведением событий A и B называется событие, означающее одновременное выполнение событий A и B, и обозначается так: $A \cdot B$. Например, $A \cdot B = \{A_2\}$ (из предыдущего примера). Для противоположных событий A и $\bar{A}$ выполняются равенства $A \cdot \bar{A} = \varnothing$ и $A + \bar{A} = U$.

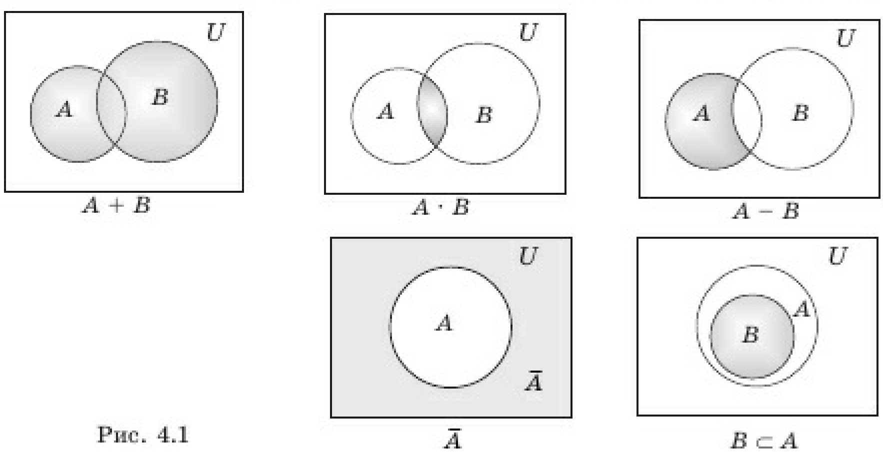


Рис. 4.1

Разностью событий A и B называется событие, означающее выполнение события A и невыполнение события B, и обозначается так: $A - B$. Например, $A - B = \{A_4, A_6\}$, $B - A = \{A_1\}$.

Если при каждом появлении события B также наступает событие A, то A называют ***следствием*** события B и записывают так: $B \subset A$. Например, если $A = \{A_2, A_4, A_6\}$ и $C = \{A_4, A_6\}$, то $C \subset A$. Событие A является следствием события C.

Случайные события и действия над ними удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера–Венна (рис. 4.1).

4.2.2. Классическое определение вероятности. Свойства вероятностей

Заданы пространство элементарных событий $U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ и случайное событие $A = \{A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m}\}$, где $A_{n_k} \in U$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Элементарные события $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m}$ называются ***благоприятствующими исходами*** для случайного события A.

> **Определение.** *Вероятностью случайного события $A \subset U$ называется отношение числа всех благоприятствующих исходов события A к числу всех возможных исходов (к числу всех элементарных событий) и обозначается через $P(A)$.*

Итак, по определению

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Это определение называют ***классическим определением вероятности***, так как считается, что все элементарные события являются равновозможными.

Пример 1. В урне имеются 4 красных и 6 белых шаров. Определим вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется белого цвета.

▲ Считается, что на ощупь все шары одинаковые, т.е. каждый из 10 шаров может быть извлечен из урны с равными возможностями. Следовательно, количество всех возможных исходов таково: $n = 10$. Если через A обозначим событие «из урны будет извлечен белый шар», то этому событию благоприятствуют 6 исходов ($m = 6$).

Тогда $P(A) = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$.

Теперь определим понятие условной вероятности. Пусть события A и B – совместные события. Тогда вероятность события A при условии, что событие B совершилось, называется ***условной вероятностью события*** A и обозначается так: $P_B(A)$. Например, при однократном бросании игральной кости через A обозначим событие «выпало четное число очков», а через B – событие «выпавшее очко меньше, чем 4». Эти события совместные, так как $A = \{A_2, A_4, A_6\}$, $B = \{A_1, A_2, A_3\}$. Если известно, что событие B наступило, то совершилось одно из элементарных событий A_1, A_2, A_3, из которых только A_2 благоприятствует событию A.

Следовательно, $P_B(A) = \frac{1}{3}$. ■

Теперь отметим свойства вероятностей.

1°. *Для любого события A верно неравенство $0 \leq P(A) \leq 1$, причем $P(U) = 1$ и $P(\varnothing) = 0$.*

2°. ***Теорема суммы.*** *Для любых событий A и B верно равенство*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Если A и B – несовместные события, то $A \cdot B = \varnothing$. В этом случае теорема суммы записывается так:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

3°. *Для любого события A верно равенство*

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

4°. *Для любых событий A и B верно равенство*

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Если A и B – независимые события, то $P_A(B) = P(B)$. Поэтому имеет место равенство

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример 2. Три стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Известно, что стрелки могут поразить мишень с вероятностью 0,5; 0,6 и 0,7 соответственно. Определим вероятность того, что в мишень попала хотя бы одна пуля.

▲ Через A обозначим событие «в мишень попал первый стрелок», через B – событие «в мишень попал второй стрелок», а через C – событие «в мишень попал третий стрелок». Тогда мы должны найти вероятность $P(A + B + C)$. Так как $\overline{A + B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$, то

$$P(A + B + C) = 1 - P\left(\overline{A + B + C}\right) = 1 - P\left(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}\right),$$

где $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$ – независимые между собой события. Поэтому $P\left(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}\right) = P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{B}\right) \cdot P\left(\overline{C}\right)$. Так как $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$, $P\left(\overline{B}\right) = 0{,}4$, $P\left(\overline{C}\right) = 0{,}3$, то $P(A + B + C) = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$. Ответ: 0,94. ■

1. Какие события называются элементарными событиями? Что такое пространство элементарных событий? Приведите пример.
2. Дайте классификацию событиям. Что такое несовместные, достоверные, невозможные, независимые события?
3. Что вы понимаете под случайным событием? Приведите пример. Что такое противоположное событие?
4. Какие действия применяются к случайным событиям? Объясните их с помощью диаграмм Эйлера–Венна.
5. Что такое благоприятствующие исходы и все возможные исходы испытания? Сформулируйте классическое определение вероятности. Приведите пример.

6. Сформулируйте основные свойства вероятности и докажите их. Приведите пример.

Упражнения

А

4.50. В урне имеются шары белого, красного и синего цветов. События A, B и C означают, что наудачу извлеченный из урны шар окажется белого, красного или синего цвета соответственно. Поясните смысл события: 1) $A + B + C$; 2) $A + B$; 3) A.

4.51. Событие A является следствием события B. Найдите значение события: 1) $A + B$; 2) $A \cdot B$.

4.52. Событие A – событие «при однократном бросании игральной кости выпала *пятерка*». Что означает событие $\bar{A}$?

4.53. Событие A – событие «по меньшей мере один из асыков, имеющихся в коробке, красного цвета». Что означает событие $\bar{A}$?

4.54. Пространство элементарных событий состоит из 8 элементов: $U = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$. Рассмотрим события $A = \{A_1, A_3\}$, $B = \{A_2, A_4, A_6, A_8\}$, $C = \{A_1, A_3, A_5, A_7\}$, $D = \{A_4, A_5, A_6, A_7\}$, $E = \{A_1, A_2, A_7, A_8\}$. Укажите: 1) все пары несовместных событий; 2) все пары совместных событий; 3) все пары противоположных событий; 4) все пары событий, в которых одно событие является следствием другого.

4.55. В предыдущей задаче выпишите элементы, принадлежащие событию: 1) $A + E$; 2) $C + D$; 3) $B \cdot D$; 4) $B - A$; 5) $\bar{A} - C$; 6) $C \cdot E + A$.

4.56. Задумано натуральное число, не превышающее 20. Найдите вероятность того, что это число: 1) кратно 5; 2) кратно 3; 3) простое число; 4) составное число.

4.57. В мешочке имеются 5 неокрашенных и 6 окрашенных альчиков. Первый вынутый альчик оказался неокрашенным. Какова вероятность того, что второй наудачу вынутый альчик также окажется неокрашенным? Имейте в виду, что первый вынутый альчик обратно в мешочек не кладут.

4.58. Монета подброшена трижды. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет «герб»?

4.59. Известно, что бракованные детали составляют 1% продукции цеха. Сколько в среднем бракованных деталей окажется в партии из 1000 деталей, произведенных в данном цехе?

4.60. Какова вероятность того, что случайно задуманное двузначное число, сумма цифр которого кратна 5, окажется простым?

4.61. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,7, а вторым – 0,8. Какова вероятность того, что в мишень: 1) попадет только один стрелок; 2) попадет по меньшей мере один стрелок; 3) попадут оба стрелка? Какова вероятность того, что по меньшей мере один стрелок промахнется?

4.62. В предыдущей задаче найдите вероятность того, что первый стрелок поразит мишень, а второй – промахнется.

4.63. В среднем из 100 электролампочек, имеющихся в магазине, одна бывает бракованной. В этом магазине было куплено 2 лампочки. Какова вероятность того, что среди купленных лампочек: 1) не окажется бракованной; 2) только одна бракованная; 3) обе бракованные?

B

4.64. Было приобретено по одному билету в двух видах лотереи. Событие A означает выпадание выигрыша по первому билету, а B – по второму билету. Каков смысл событий $P = A\overline{B} + \overline{A}B$ и $\varnothing = A\overline{B} + \overline{A}B + AB$?

4.65. Для случайных событий A, B и C определите смысл равенства: 1) $A \cdot B \cdot C = A$; 2) $A + B + C = A$.

4.66. Даны случайные события A, B и C. Выразите через A, B и C событие, выражающее, что: 1) произошло только событие A; 2) произошли события A и B, но C не произошло; 3) все три события произошли; 4) произошло по меньшей мере одно из данных событий; 5) произошли по меньшей мере два из данных событий; 6) не произошло ни одно из этих событий; 7) число происшедших событий не превышает двух.

4.67. Известно, что события A и B произошли, но C не произошло. Определите, произошло ли событие: 1) $A + BC$; 2) $(A + B)C$; 3) $\overline{A}B + C$; 4) ABC.

4.68. Какова вероятность того, что при трехкратном бросании игральной кости выпадает разное число очков?

4.69. В мешочке имеются 4 окрашенных и 5 неокрашенных альчиков. Какова вероятность того, что наудачу вынутые два альчика имеют разные цвета (один окрашенный, а другой – неокрашенный)?

4.70. Из отрезков длиной 2 см, 5 см, 6 см и 10 см случайно отобрали три отрезка. Какова вероятность того, что из отобранных отрезков можно составить треугольник?

4.71. Игральная кость брошена дважды. Какова вероятность того, что: 1) хотя бы один раз выпадет очко, меньше трех; 2) хотя бы один раз выпадет единица?

4.72. В районной олимпиаде по математике участвовали 15 учеников 10 класса, из которых 8 отличники учебы. Какова вероятность того, что первые призовые места заняли отличники учебы? Считается, что все 15 участников имеют равные возможности победить в данной олимпиаде.

4.73. Вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы один раз при четырех выстрелах, равна 0,9984. Какова вероятность поражения мишени при одном выстреле?

C

4.74. Даны события A, B и C. Разложите события на сумму попарно несовместных событий: 1) $A + B$; 2) $A + B + C$.

4.75. В лифт 9-этажного дома вошли 5 пассажиров. Считая, что каждый из них может выйти с равной возможностью на любом этаже дома, найдите вероятность того, что: 1) все выйдут на одном этаже; 2) все выйдут на 7 этаже; 3) все выйдут на разных этажах.

4.76. Шесть учеников случайно расселись за круглым столом. Какова вероятность того, что определенные 2 подруги сядут рядом?

4.77. На шахматной доске случайно расставлены 2 ладьи разных цветов. Какова вероятность того, что эти ладьи не «бьют» друг друга?

4.78. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,6. Выстрел производится до тех пор, пока мишень не будет поражена. Какова вероятность того, что количество выстрелов по мишени не превысит трех?

4.79. Двое играют, по очереди подбрасывая монету. По условию игры выигрывает тот, чья монета первой выпадет гербовой стороной. Определите вероятность выигрыша каждого игрока.

4.80. Предыдущую задачу решите, считая, что в игре участвуют три игрока.

4.81*. Из чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ случайно выбрали число m. Какова вероятность того, что при делении m на заданное натуральное число q в остатке останется число r? Найдите эту вероятность при $n \to \infty$.

4.82. Брошены три игральные кости. Через n обозначим сумму выпавших очков. Что вероятнее: $n = 11$ или $n = 12$?

Упражнения для повторения

4.83. Вычислите:

1) $\cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 10^\circ$; 2) $\sin 15^\circ - \sin 75^\circ$.

4.84. Напишите формулу общего члена последовательности:

1) 1; 4; 7; 10; ...; 2) 0; 1; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{8}$; ...

4.3. Полная вероятность события. Формула Байеса

4.3.1. Полная вероятность события

Теорема. *Пусть даны попарно несовместные события* H_1, H_2, ..., H_n, ($H_i \cdot H_j = \varnothing$, $i \neq j$), *такие, что* $H_1 + H_2 + ... + H_n = U$, $P(U) = 1$, *и событие* $A \subset U$ *может наступить совместно с одним из событий* H_1, H_2, ..., H_n. *Тогда вероятность события* A *определяется формулой*

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A). \quad (1)$$

Формула (1) называется формулой ***полной вероятности***.

▲ Так как $A = A \cdot U = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + ... + A \cdot H_n$ и события AH_i и AH_j – несовместные события ($i \neq j$), то

$$P(A) = P(A \cdot H_1) + P(A \cdot H_2) + \ldots + P(A \cdot H_n).$$

Теперь, учитывая, что $P(A \cdot H_j) = P(H_j) \cdot P_{H_j}(A)$, получим формулу (1). ■

Пример 1. Ученик подготовился по вопросам 20 экзаменационных билетов из 25. Каким по счету он должен зайти на экзамен, чтобы сдать его с наибольшей вероятностью?

▲ Билет, по которому ученик подготовился, назовем «хорошим», а билет, по которому он не подготовился, – «плохим». Сначала определим вероятность сдачи учеником экзамена в случае, когда он билет берет первым. В этом случае количество всех возможных исходов $n = 25$, а количество благоприятствующих исходов $m = 20$.

Тогда $P = \dfrac{20}{25} = 0{,}8$.

Теперь определим вероятность сдачи им экзамена в случае, когда он билет берет вторым. Это событие, разумеется, зависит от того, какой билет достался первому ученику: «хороший» или «плохой». Через H_1 обозначим событие «первый ученик взял *хороший* билет», а через H_2 – событие «первый ученик взял *плохой* билет». Тогда событие A – событие «наш ученик сдаст экзамены» – может наступить совместно с одним из событий: H_1 или H_2. Следовательно, по формуле (1)

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A).$$

Так как $P(H_1) = \dfrac{20}{25} = 0{,}8$, $P_{H_1}(A) = \dfrac{19}{24}$, $P(H_2) = \dfrac{5}{25} = 0{,}2$, $P_{H_2}(A) = \dfrac{20}{24}$, то $P(A) = 0{,}8 \cdot \dfrac{19}{24} + 0{,}2 \cdot \dfrac{20}{24} = 0{,}8$. Отсюда следует, что вероятность сдачи учеником экзамена не зависит от того, каким он по счету зайдет на экзамен. ■

4.3.2. Формула Байеса

Пусть в условиях теоремы полной вероятности известно, что событие A наступило. Тогда нужно определить вероятность того, что событие A наступило совместно с событием H_k. По теореме вероятности произведения событий $P(A \cdot H_k) = P_{H_k}(A) \cdot P(H_k) = P_A(H_k) \cdot P(A)$.

Отсюда $P_A(H_k) = \dfrac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{P(A)}$, т. е.

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{H_n}(A)}. \qquad (2)$$

Формула (2) называется формулой Байеса, или ***теоремой гипотез***.

Пример 2. Девочки составляют 60% учащихся школы. В театр купили билеты 80% всех девочек и 75% всех мальчиков. В учительскую принесли утерянный билет. Какова вероятность того, что этот билет потерял мальчик?

▲ Через A обозначим событие «ученик потерял билет», через H_1 – событие «девочка потеряла билет», а через H_2 – событие «мальчик потерял билет». Требуется найти вероятность $P_A(H_2)$. Так как $P(H_1) = 0{,}6$, $P_{H_1}(A) = 0{,}8$, $P(H_2) = 0{,}4$, $P_{H_2}(A) = 0{,}75$, то по формуле полной вероятности $P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}75 = 0{,}78$.

В силу формулы (2)

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}75}{0{,}78} = \frac{0{,}3}{0{,}78} = \frac{5}{13}.$$

Ответ: $\frac{5}{13}$. ■

1. Сформулируйте теорему о полной вероятности и докажите ее.
2. Напишите формулу Байеса и докажите ее. Как вы думаете, почему эту формулу называют теоремой гипотез?

Упражнения

А

4.85. Из 10 альчиков в первом мешочке 8 красного цвета, а из 20 альчиков во втором мешочке 4 красного цвета. Наугад из каждого мешочка извлекли по одному альчику, затем из этих двух альчиков случайно отобрали один. Какова вероятность того, что отобранный альчик окажется красного цвета?

4.86. Из трех стрелков один произвел выстрел по мишени и поразил ее. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,3, вторым стрелком – 0,5, а третьим стрелком – 0,8. Какова вероятность того, что по мишени выстрелил второй стрелок?

4.87. Предположим, что 0,5% всех мужчин и 0,25% всех женщин – дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? (Считать, что количество мужчин и женщин одинаковое.)

4.88. В одной урне имеются 5 белых и 10 черных шаров, а в другой – 10 белых и 5 черных шаров. Случайно выбирают одну из урн, из которой наугад извлекают один шар. Найдите вероятность того, что: 1) вынутый шар окажется белого цвета; 2) вынутый шар окажется белого цвета и что он вынут из второй урны.

4.89. В магазин поступили две равные по количеству партии обуви в одинаковых упаковках. Известно, что 40% обуви в первой партии и 70% обуви во второй партии черного цвета. Какова вероятность того, что взятая наугад в магазине пара обуви будет черного цвета?

4.90. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных в первом цехе, и 2 коробки деталей, изготовленных во втором цехе. Вероятность того, что деталь, изготовленная в первом цехе, стандартна, равна 0,8, а во втором цехе – 0,9. Сборщик наудачу извлек деталь из случайно взятой коробки. Найдите вероятность того, что: 1) извлечена стандартная деталь; 2) извлечена стандартная деталь, изготовленная во втором цехе.

B

4.91. В электрической сети три элемента соединены последовательно. Вероятности того, что эти элементы выйдут из строя, равны 0,1; 0,15 и 0,2 соответственно. Какова вероятность того, что в электрической сети будет ток?

4.92. В каждом из трех мешочков имеются по 4 красных и 6 белых альчиков. Из первого мешочка наугад взят альчик и переложен во второй мешочек. Затем из второго мешочка наугад взят альчик и переложен в третий мешочек. Наконец, из третьего мешочка наугад извлекли один альчик. Какова вероятность того, что этот альчик окажется красного цвета?

4.93. После того как трое стрелков произвели по одному выстрелу по мишени, оказалось, что в мишени имеются 2 пробоины.

Вероятности поражения мишени каждым стрелком равны 0,6; 0,5 и 0,4 соответственно. Какова вероятность того, что в мишень попал и третий стрелок?

4.94. В первой урне имеется 1 белый и 9 красных шаров, а во второй урне – 1 красный и 5 белых шаров. Из каждой урны наугад вынули по одному шару и отложили их. Оставшиеся шары из обеих урн переложили в третью урну. Найдите вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

4.95. В магазин поступили 70% трикотажных изделий, изготовленных на первой фабрике, и 30% трикотажных изделий, изготовленных на второй фабрике. Известно, что 10% изделий, изготовленных на первой фабрике, и 20% изделий, изготовленных на второй фабрике, оказались бракованными. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине трикотажное изделие окажется бракованным.

4.96. На сборку поступают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,4% брака, второй – 0,3%, третий – 0,2%. Найдите вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 100, со второго – 200, а с третьего – 250 деталей.

C

4.97. На одной из 10 монет, внешне одинаковых, с обеих сторон изображен герб, а другие нормальные. Наудачу выбрали одну из этих монет и подбросили 10 раз. Во всех случаях, т.е. 10 раз, монета упала гербовой стороной. Какова вероятность того, что подбрасывали монету с двумя гербовыми сторонами?

4.98. В мешочек с двумя альчиками положили альчик красного цвета, а затем из него наудачу вынули один альчик. Какова вероятность того, что этот альчик имеет красный цвет? Считается, что события «цвет альчиков, первоначально находившихся в мешочке, одинаковый» равновозможные.

4.99. Два равных по мастерству шахматиста играют в шахматы. Какое из событий более вероятно: 1) победа в двух партиях из четырех или в трех партиях из шести; 2) победа по крайней мере в двух партиях из четырех или по крайней мере в трех партиях из шести?

4.100. В цехе работают 20 станков. Из них 10 станков выпущено заводом №1, 6 станков – заводом №2 и 4 станка – заводом №3. Вероятности того, что детали окажутся качественными для этих станков, равны 0,9; 0,8 и 0,7 соответственно. Какой процент качественных деталей выпускается в данном цехе?

Упражнения для повторения

4.101. Решите уравнение: 1) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$; 2) $\frac{\sin 2x}{4+\sin x} = -2\cos x$.

4.102. Найдите производные функции:

1) $\sin^3 x$; 2) $\sqrt{x^2+2x+1}$; 3) $\sqrt[3]{x^2-1}$.

4.103. Определите промежутки монотонности функции:

1) $y = x + \frac{1}{x}$; 2) $y = 3x^2 - x^3$.

4.4. Формула Бернулли. Понятие закона больших чисел

4.4.1. Формула Бернулли

Пусть при некотором испытании событие A может наступить с вероятностью p. Если повторять это испытание несколько раз и результат каждого испытания не зависит от исходов других испытаний и не влияет на другие испытания, то эти испытания называются ***независимыми испытаниями***. Данное независимое испытание повторим n раз и получим последовательное чередование событий A и $\overline{A}$. Например, если при 4 испытаниях в первый раз A не наступило и во 2-м и 3-м испытаниях A наступило, а в 4-м испытании A не наступило, то получим чередование событий A и $\overline{A}$ вида: $\overline{A}\cdot A\cdot A\cdot\overline{A}$. Здесь $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$. Обычно пользуются обозначением $q = 1 - p$.

Пусть при n независимых испытаниях событие A наступило m раз. Тогда вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит в определенном порядке m раз, равна $p^m \cdot (1-p)^{n-m} = p^m \cdot q^{n-m}$. Так как при n испытаниях событие A может наступить m раз $P_n(m,\ n-m) = C_n^m$ различными способами, то вероятность наступления события A m раз при n испытаниях такова:

$$P_n(m) = C_n^m p^m \cdot q^{n-m}. \qquad (1)$$

Формулу (1) называют ***формулой Бернулли***. Отсюда получим формулу подсчета вероятности того, что событие A наступит в промежутке от m_1 до m_2 раз при n испытаниях:

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1+1) + \ldots + P_n(m_2). \qquad (2)$$

А вероятность наступления события A по крайней мере один раз при n испытаниях такова:

$$P_n(m \geqslant 1) = 1 - q^n,\ (q = 1 - p). \qquad (3)$$

Действительно, при n испытаниях событие A наступит по меньшей мере один раз. Оно является противоположным событию, что при n испытаниях A не наступит ни разу. Тогда по формуле $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ получим формулу (3).

Рассмотрим последовательность чисел $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(2)$, ..., $P_n(n)$ и пусть $P_n(m_0)$ есть наибольшее из них. Тогда число m_0 называется ***наивероятнейшим числом*** наступления данного события. Это число определяется неравенствами

$$np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p. \qquad (4)$$

Действительно, если m_0 – наивероятнейшее число, то выполнены неравенства $P_n(m_0-1) \leqslant P_n(m_0)$ и $P_n(m_0+1) \leqslant P_n(m_0)$, т.е. верна система неравенств

$$\begin{cases} C_n^{m_0-1} \cdot p^{m_0-1} \cdot q^{n-m_0+1} \leqslant C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0}, \\ C_n^{m_0+1} \cdot p^{m_0+1} \cdot q^{n-m_0-1} \leqslant C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dfrac{q}{n - m_0 + 1} \leqslant \dfrac{p}{m_0}, \\ \dfrac{p}{m_0 + 1} \leqslant \dfrac{q}{n - m_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qm_0 \leqslant np - (m_0 - 1)p, \\ p(n - m_0) \leqslant q(m_0 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_0(p+q) \leqslant np + p, \\ np - q \leqslant m_0(p+q). \end{cases}$$

Учитывая, что $p + q = 1$, получим формулу (4).

Пример 1. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,8. Стрелок произвел 5 выстрелов по мишени. Определим вероятность поражения мишени: 1) ровно 3 раза; 2) по меньшей мере 3 раза. Сколько выстрелов нужно произвести, чтобы мишень была поражена хотя бы один раз с вероятностью, не меньшей, чем 0,9? Нужно найти наивероятнейшее число поражения мишени при 5 выстрелах.

▲ 1) По формуле (1) (здесь $p = 0,8$, $q = 0,2$, $n = 5$, $m = 3$) $P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot (0,8)^3 \cdot (0,2)^2 = 0,2048$.

2) $P_5(m \geqslant 3) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$. Так как $P_5(3) = 0,2048$, $P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q = 0,4096$ и $P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 0,8^5 = 0,32768$, то $P_5(m \geqslant 3) \approx 0,942$.

3) По формуле (3) имеем $P_n(m \geqslant 1) = 1 - q^n = 1 - 0,2^n \leqslant 0,9 \Rightarrow 0,1 \leqslant 0,2^n \Rightarrow n \cdot \lg(0,2) \leqslant \lg(0,1) \Rightarrow n \geqslant \dfrac{\lg 0,1}{\lg 0,2} = \dfrac{1}{1 - \lg 2} \approx 1,429$. Отсюда следует, что по мишени нужно стрелять по меньшей мере 2 раза.

4) По формуле (4)

$5 \cdot 0,8 - 0,2 \leqslant m_0 \leqslant 5 \cdot 0,8 + 0,8 \Leftrightarrow 3,8 \leqslant m_0 \leqslant 4,8 \Rightarrow m_0 = 4$, т.е. наивероятнейшее число поражения мишени при 5 выстрелах равно 4. ■

4.4.2. Вероятностные модели реальных явлений и процессов окружающей среды, науки и техники

Теория вероятностей позволяет нам строить вероятностные модели реальных явлений и процесов окружающей среды, науки и техники, с ее помощью оценивать эти процессы и принимать верные решения. Рассмотрим примеры.

Пример 2. Четверо подруг зашли в магазин канцтоваров и купили себе разные письменные принадлежности. Поскольку у кассирши не хватало мелочи для сдачи, она вместо сдачи дала им один лотерейный билет, общий для всех. Подруги решили разыграть этот билет между собой с помощью жеребьевки. Кто имеет больше шансов получить этот билет: та, что возьмет жребий первой или кто-то из последующих участниц жеребьевки?

▲ Сначала подсчитаем вероятность получения лотерейного билета первой участницей жеребьевки. Количество всех возможных исходов $n = 4$ (4 жребия), количество благоприятствующих исходов $m = 4$. Поэтому вероятность выигрыша первой участницы жеребьевки такова:

$$P = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Теперь подсчитаем вероятность выигрыша второй участницы жеребьевки. Эта вероятность зависит от того, какой жребий взяла первая участница. Назовем выигрышный вариант жребия «хорошим», а остальные варианты – «плохими». Итак, если первая из подруг извлекла «хороший» жребий, то это событие обозначим через H_1, а если она извлекла «плохой» жребий, то это событие обозначим через H_2. Пусть событие A выражает то, что вторая из подруг вытащила «хороший» жребий. Тогда вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(\text{H}_1)\cdot P_{\text{H}_1}(A) + P(\text{H}_2)\cdot P_{\text{H}_2}(A).$$

Здесь $P(\text{H}_1) = 0,25$ – вероятность выигрыша первой из подруг. Тогда $P_{\text{H}_1}(A) = 0,\ P(\text{H}_2) = 0,75,\ P_{\text{H}_2}(A) = \frac{1}{3}$.

Поэтому

$$P(A) = 0,25 \cdot 0 + 0,75 \cdot \frac{1}{3} = 0,25.$$

Следовательно, вероятность получения билета, т.е. извлечение «хорошего» жребия не зависит от очередности извлечения жребия. ■

По мере увеличения числа независимых испытаний относительная частота $\frac{m}{n}$ наступления данного события становится все «ближе» к ее вероятности P. Напрмер, если подбрасывать монету 1000 раз то количество m выпадений гербовой стороны монеты будет близко к 500, т.е. относительная частота $\frac{m}{1000} = \frac{1}{2} = p$. Это важное утверждение принято называть ***законом больших чисел***. Вероятность отклонения относительной частоты события от его вероятности оценивается неравенством

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 n}, \qquad (5)$$

здесь n – количество испытаний, m – количество вероятностей наступления события, p – вероятность наступления события, $q = 1 - p$ – вероятность ненаступления события, ε – величина отклонения относительной частоты $\frac{m}{n}$ от вероятности P. (5) – неравенство Чебышева. Если n – достаточно большое число, то $\frac{pq}{\varepsilon^2 \cdot n}$ стремится к 0, и вероятность неравенства $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon$ стремится к 1. Рассмотрим пример.

Пример 2. Вероятность того, что изделия производственного объединения являются стандартными, равна 0,9. Сколько изделий нужно проверить, чтобы вероятность отклонения частоты стандартности изделий от вероятности по модулю не превышала 0,1, была не меньше 0,95?

▲ Воспользуемся неравенством (5) ($p = 0,9$, $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,1$):

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,9\right| \leqslant 0,1\right) \geqslant 1 - \frac{0,9 \cdot 0,1}{(0,1)^2 \cdot n} \geqslant 0,95.$$

Отсюда $0,05 \geqslant \frac{9}{n} \Rightarrow n \geqslant 180$, т.е. мы должны проверить по меньшей мере 180 изделий. ■

1. Что такое независимые испытания? Что вы понимаете под относительной частотой наступления события A при n независимых испытаниях?
2. Напишите формулу Бернулли и докажите ее.
3. Как вычисляется вероятность наступления события при n-независимых испытаниях хотя бы раз?
4. Как определяется наивероятнейшее число наступления события? Докажите соответствующую формулу.
5. Как вы понимаете смысл закона больших чисел?

Упражнения

A

4.104. Монета подброшена 5 раз. Найдите: 1) вероятность того, что монета выпадет гербовой стороной ровно 2 раза; 2) вероятность того, что монета выпадет гербовой стороной по меньшей мере 2 раза; 3) вероятность того, что монета выпадет гербовой стороной не менее, чем 3 раза; 4) наивероятнейшее число выпадания монеты гербовой стороной.

4.105. Испытания прошли 15 элементов устройства. Вероятность того, что каждый элемент пройдет испытание, равна 0,9. Каково наивероятнейшее число элементов, прошедших испытание?

4.106 Всхожесть семян данного сорта растений равна 80%. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдет не менее четырех?

4.107. Какова вероятность того, что при четырех бросаниях игральной кости «шестерка» выпадет по крайней мере один раз?

4.108. Найдите наиболее вероятное число выпадения «шестерки» при 50 бросаниях игральной кости.

B

4.109. В книжке-вопроснике ЕНТ абитуриент должен ответить на 30 вопросов по математике, где для каждого вопроса предлагается 5 вариантов ответа, из которых только один правильный. Считая, что абитуриент не знает правильного ответа ни на один вопрос из 30 и отмечает ответы наугад, найдите наивероятнейшее число правильно угаданных им ответов.

4.110. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найдите вероятность того, что из 5 первых покупателей обувь этого размера понадобится: 1) одному; 2) по крайней мере одному.

4.111. Мишень имеет форму квадрата, в который вписан круг. По мишени наудачу производится 4 независимых выстрела. Какова вероятность получения ровно 3 попаданий в круг?

4.112. В круг вписан равносторонний треугольник. В круг наудачу брошены 4 точки. Какова вероятность того, что ровно одна точка попадет в треугольник?

4.113. Проведено 5 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании 2 монет. Найдите вероятность того, что ровно в 3 испытаниях выпадет по 2 герба.

4.114. В автопарке имеются 12 автобусов. Вероятность выхода на линию каждого из них равна 0,8. Найдите вероятность нормальной работы автопарка в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии 8 автобусов.

4.115. Вероятность того, что деталь окажется нестандартной, равна 0,02. Оцените вероятность того, что отклонение модуля разности относительной частоты нестандартных деталей среди 5000 таких деталей от их вероятности было не более, чем 0,01.

4.116. Вероятность попадания стрелка в мишень равна 0,8. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно 20?

C

4.117. Вероятность того, что при наборе одной страницы рукописи оператор допустит ошибку, равна 0,3. Найдите наивероятнейшее число ошибок, которые может допустить оператор при наборе 200 страниц рукописи.

4.118. При проведении 50 независимых испытаний соотношение $p = \frac{m}{n}$ выполняется с вероятностью 0,9. Оцените это приближение.

4.119. В магазин поступило 40 коробок с фарфоровой посудой. Вероятность того, что в одной наудачу взятой коробке посуда окажется целой, равна 0,9. Найдите наивероятнейшее число коробок, в которых посуда окажется неповрежденной.

4.120. Два равных по мастерству партнера играют в шахматы. Какой счет наиболее вероятен – 1 : 1 или 2 : 2? Результат «ничья» в счет не берется.

Дополнительные задачи к разделу 4

4.121. Докажите, что среди любых 9 человек найдутся трое, знакомых друг с другом, либо найдутся 4 человека, не знакомых друг с другом.

4.122. Вырезали угловые клетки шахматной доски, расположенные на одной из ее диагоналей. Можно ли полностью покрыть оставшуюся часть шахматной доски прямоугольной фигурой, составленной из одной белой и одной черной клеток шахматной доски?

4.123. На почте есть 10 видов марок. Сколькими способами из них можно выбрать: 1) 8 марок; 2) 8 различных марок?

4.124. В коробке имеются 2 синих, 4 красных и 5 белых альчиков. Сколькими способами можно извлечь: 1) 3 альчика; 2) 3 альчика разных цветов; 3) 3 альчика так, чтобы 2 из них были одного цвета?

4.125. В течение 15 дней учащиеся должны сдать 5 экзаменов, среди которых имеются экзамены по алгебре и геометрии. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов так, чтобы экзамены по алгебре и геометрии не следовали друг за другом?

4.126. Сколькими способами можно составить пятизначное число из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы в составе этого числа были 3 нечетные и 2 четные цифры?

4.127. На «бесконечную» шахматную доску, длина стороны каждой клетки которой равна $2a$, уронили монету радиусом $r < a$. Какова вероятность того, что монета целиком окажется на одной клетке?

4.128. В древности один хан решил казнить виновного слугу. Но будучи в хорошем настроении он решил дать шанс быть помилованным этому слуге. Хан велел дать слуге два мешочка и 4 альчика, 2 из которых белого цвета и 2 красного цвета. По условию хана виновный слуга должен был разложить 4 альчика в два мешочка и отдать палачу. Затем палач наудачу выбирает один из мешочков и оттуда наудачу извлекает один альчик. Если альчик окажется белого цвета, то слуга будет помилован, а если альчик окажется красного цвета, то он будет казнен. Как должен был слуга распределить данные 4 альчика в двух мешочках, чтобы с наибольшей вероятностью быть помилованным?

4.129. Покажите, что $P_A(B + C) = P_A(B) + P_A(C)$, если B и C – несовместные события и $P(A) \neq 0$.

4.130. Докажите, что $P_A(B + C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(BC)$, если $P(A) \neq 0$.

4.131. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня лишь, что эти цифры нечетные и разные. Найдите вероятность того, что номер будет набран верно.

4.132. Бросили 4 игральные кости. Найдите вероятность того, что на них выпадет по одинаковому числу очков.

4.133. Брошены три монеты. Найдите вероятность того, что выпадут два «герба».

4.134. Человек после работы может возвращаться домой либо на автобусе, либо на маршрутном такси. Он ездит по-разному: в $\frac{1}{3}$ случаев выбирает автобус, а в $\frac{2}{3}$ – маршрутное такси. Если он едет на маршрутном такси, то в 75% случаев он возвращается домой к шести часам вечера, а если на автобусе, то только в 70% случаев он возвращается к этому времени. Какова вероятность того, что в случайно взятый день он возвращается домой к шести часам?

4.135. Какова вероятность равенства $p = \frac{m}{n}$ с точностью до 0,05 при 50 независимых испытаниях?

Раздел 5. МНОГОЧЛЕНЫ

5.1. Многочлены с несколькими переменными.
5.2. Общий вид многочлена с одной переменной и нахождение его корней.
5.3. Корни многочлена. Теорема Безу. Схема Горнера.
5.4. Формула Виета.
5.5. Решение уравнений высшего порядка.

5.1. Многочлены с несколькими переменными

5.1.1. Стандартный вид многочленов с несколькими переменными

Выражения, которые составлены из чисел, переменных и их степеней, соединенные знаком умножения, называются ***одночленами***. Например, $5x$, $xy \cdot zx$, $2x^3(-3)\ u^3 \cdot zy^2$, $-5x^2y \cdot z^3$, -4, y^5– одночлены. Одночлены можно упростить. Например, $2x^3(-3)z \cdot x^2 \cdot y^3 = -6x^5 \cdot y^3 \cdot z$. Такой вид одночлена, где на первом месте стоит числовой множитель, а за ним – переменные и их показатели, называют ***стандартным видом одночлена***.

Итак, если a – заданное число, ax_1, x_2 ..., x_n – переменные, то стандартный вид одночлена, зависящий от этих переменных, записывается так:

$$a \cdot x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n}, \qquad (1)$$

здесь m_1, m_2, ..., m_n – целые неотрицательные числа. Сумма $N = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ называется *степенью* одночлена (1). Например, $5x^2yz^3$ – одночлен, зависящий от переменных x, y, z, число $6 = 2 + 1 + 3$ является его степенью, а 5 – *коэффициентом* этого одночлена.

Пусть дано целое выражение $f(x, y, z) = xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + xz(x^2 + z^2)$. Раскрыв скобки в этом выражении, можно привести его к виду

$$f(x, y, z) = x^3y + x^3z + y^3x + z^3x + y^3z + z^3y. \qquad (2)$$

Здесь нет подобных членов.

> **Определение 1.** *Выражение, состоящее из суммы одночленов, называется* ***многочленом.*** *Степенью многочлена стандартного вида называется наибольшая из степеней, входящих в него одночленов.*

Например, степень многочлена $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz$ равна $3 = 1 + 1 + 1$.

Чтобы привести многочлен с одной переменной к стандартному виду, нужно записать его члены в порядке убывания степеней. Например, многочлен $f(x) = 2x^4 + x^3 - 5x + 7$ записан в стандартном виде.

Для многочлена с несколькими переменными запись в стандартном виде иная. Вначале упорядочиваются переменные x_1, x_2,..., x_n. Обычно считается, что переменные с большим индексом имеют меньший «статус» или этот «статус» определяется по алфавиту x, y, z, ... и т. д. Далее степень одночлена определяется сравнением показателя переменных.

Определение 2. *Если в многочлене с n переменными* $m_1 > k_1$ *или* $m_1 = k_1$, $m_2 > k_2$ *или* $m_1 = k_1$, $m_2 = k_2$, $m_3 > k_3$ *и т.д., то говорят, что ранг члена* $a \cdot x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \dots \cdot x_n^{m_n}$, $a \neq 0$, *выше ранга члена* $b \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, $b \neq 0$.

А если $m_1 = k_1$, $m_2 = k_2$, то указанные одночлены будут подобными и объединяются.

Например, ранг одночлена $3x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot x_3^2 x_4$ выше ранга одночлена $7x_1^2 x_2^3 x_3 x_4^5$, а ранг одночлена $4y^2z^2$ ниже ранга одночлена xyz.

Если ранги членов многочлена записаны по убыванию, то такую запись многочлена называют ***стандартной***.

Например, запись многочлена (2) является стандартной формой. Такой порядок записи членов многочлена является *лексикографическим*. Запишем, например, многочлен

$$f(x, y, z) = -2y^5z + x^4yz^5 - 0{,}5x^2y^5z + 6x^2y^4z^2$$

в лексикографическом порядке.

Будем считать, что x – первая, y – вторая, а z – третья переменная (по алфавиту). Поэтому среди членов заданного многочлена ранг одночлена x^4yz^5 выше остальных, затем идет ранг одночлена $(-0{,}5x^2y^5z)$, третьим будет $(6x^2y^4z^2)$, а последним будет $(-2y^5z)$. Тогда многочлен $f(x, y, z)$ в стандартной форме запишется так: $f(x, y, z) = x^4yz^5 - 0{,}5x^2y^5z + 6x^2y^4z^2 - 2y^5z$.

Определение 3. *Если для многочлена* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *и любого числа t выполняется равенство*

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad (3)$$

то этот многочлен называют ***однородным многочленом*** *степени m. Например, (2) – однородный многочлен 4-й степени, а* $x - 2y + 3z$ *– однородный многочлен 1-й степени.*

Другими словами, чтобы многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ был однородным многочленом степени m, необходимо, чтобы степень каждого его члена была равна m. Так в (2) степень каждого члена действительно равна 4.

Иногда записывают многочлен не в лексикографическом порядке, а объединяя его однородные члены. Например, многочлен

$$f(x, y, z) = x^3 - 3x^2y + 2x^2 - y^2 + xy^2 - 2xy - 3y^3 + 4x + 5y - xyz$$

указанным способом запишется так:

$$f(x, y, z) = x^3 - 3x^2y + xy^2 - 3y^3 - xyz + 2x^2 - y^2 - 2xy + 4x + 5y.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \qquad (4)$$

где $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – многочлен с несколькими переменными. Если для чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ будет выполнено равенство $f(c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, то $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, …, $x_n = c_n$ называют решением уравнения (4).

Вообще уравнение с несколькими переменными имеет бесконечно много решений. К примеру, линейное уравнение с двумя переменными $2x - y + 3 = 0$ имеет бесконечно много решений. Решением этого уравнения является любая пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $y = 2x + 3$, т.е. решением данного уравнения будут координаты любой точки прямой, заданной уравнением $y = 2x + 3$.

Нахождение решений уравнения с несколькими переменными в общем случае довольно сложно. Но в некоторых частных случаях удается отыскать все решения таких уравнений. Приведем примеры таких уравнений.

Пример 1. Найдем все решения уравнения $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$.

▲ Очевидно, что $x = 0$, $y = 0$ будут решениями уравнения. Найдем решения уравнения, отличные от нуля. Разделив данное уравнение на y^2, получим уравнение $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4\cdot\frac{x}{y} + 3 = 0$.

Обозначив $\frac{x}{y} = t$, получим уравнение $t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

Тогда решения данного уравнения находим из уравнения $\frac{x}{y} = 1$ или $\frac{x}{y} = 3$. Таким образом, решения данного уравнения запишем так: $\{(C; C)\} \cup \{(3C; C)\}$, $C \in R$. ■

В этом примере левая часть исходного уравнения – однородный многочлен 2-й степени.

Вообще, всякий однородный многочлен с двумя переменными можно преобразовать в многочлен с одной переменной. В самом деле, пусть $f(x, y)$ – однородный многочлен с двумя переменными. Тогда, сделав замену $\frac{y}{x} = t$ или $y = xt$, получим равенство $f(x, y) = x^k f(1, t)$. Здесь $f(1, t)$ – многочлен с одной переменной.

5.1.2. Симметрические многочлены

Определение. *Если в процессе преобразования многочлена $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ путем произвольной перестановки местами переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ получится многочлен, тождественный исходному многочлену, то этот многочлен называется* ***симметрическим***.

Например, многочлен $5x^3y^2 + x^3 + y^3 + 5x^2y^3$ симметрический, так как при перестановке местами переменных x и y он не меняется (т.е. при замене буквы x буквой y, а буквы y буквой x он не меняется), а многочлен $5x^2y^3 + x^3 + y^3$ не является симметрическим, так как многочлен $5y^2x^3 + y^3 + x^3$ отличается от исходного.

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ и $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ – симметрические многочлены, так как сумма (произведение) не изменяется при перестановке слагаемых (множителей). Общий вид симметрического многочлена можно представить в таком виде: $(x_1 + a)(x_2 + a) \ldots (x_n + a)$, $a \in R$. Коэффициенты при одинаковых степенях a в этом многочлене

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\ \sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_n = x_1x_2x_3\ldots x_n \end{cases} \qquad (5)$$

суть симметрические многочлены. Эти многочлены называются элементарными симметрическими многочленами. Например, при $n = 2$, $n = 3$ элементарные симметрические многочлены будут такими:

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2, \\ \sigma_2 = x_1x_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ \sigma_3 = x_1x_2x_3. \end{cases}$$

Наряду с элементарными симметрическими многочленами рассматриваются симметрические многочлены, представляющие суммы одинаковых степеней:

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ S_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \\ S_3 = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad (6)$$

Например, для $n = 2$ симметрические многочлены записываются так: $S_1 = x_1 + x_2$; $S_2 = x_1^{\,2} + x_2^{\,2}$; $S_3 = x_1^{\,3} + x_2^{\,3}$ и т.д.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Всякий симметрический многочлен вида $S_n = x^n + y^n$ может быть представлен в виде многочлена, зависящего от элементарных многочленов $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$.*

▲ Используем метод математической индукции. При $n = 1$ $\sigma_1 = x + y = S_1$, при $n = 2$ $S_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^{\,2} - 2\sigma_2$.

Допустим, что это утверждение верно для $n = k$, т.е. найдется многочлен $f_k(\sigma_1, \sigma_2)$, такой, что выполняется равенство

$$S_l = f_l(\sigma_1, \sigma_2),\ l = 1, 2, \ldots, k. \qquad (7)$$

Тогда для $n = k + 1$

$$S_{k+1} = x^{k+1} + y^{k+1} = x^{k+1} + xy^k + x^ky + y^{k+1} - x^ky - xy^k =$$
$$= (x + y)(x^k + y^k) - xy(x^{k-1} + y^{k-1}) = \sigma_1S_k - \sigma_2S_{k-1}.$$

Поэтому в силу равенства (7) имеем

$$S_{k+1} = \sigma_1f_k(\sigma_1, \sigma_2) - \sigma_2f_{k-1}(\sigma_1, \sigma_2). \ ■$$

Теорема 2. *Всякий симметрический многочлен от двух переменных можно представить в виде многочлена, зависящего от многочленов σ_1 и σ_2.*

▲ Если многочлен $f(x, y)$ содержит члены вида ax^ky^k, то $ax^ky^k = a(xy)^k = a\sigma_2^k$.

Если многочлен содержит члены вида bx^ky^m $(k > m)$, то он должен содержать члены вида bx^my^k (т.к. $f(x{\cdot}y)$ – симметрический многочлен). Тогда $bx^ky^m + bx^my^k = b(xy)^m(x^{k-m} + y^{k-m}) = b\sigma_2^m S_{k-m}$.

Но в силу теоремы 1 представим S_{k-m} через σ_1 и σ_2. ■

В высшей математике доказывается общий вид теоремы 2 для многочленов от n переменных.

Теорема 3. *Всякий симметрический многочлен от n переменных может единственным образом быть представлен через элементарные многочлены $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$.*

Пример 3. Представим многочлен

$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^3 - 2y^3 + 3xy^3 + 3x^3y$ через σ_1 и σ_2.

▲ $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$.

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2 - \sigma_2) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$.

$x^4 + y^4 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2\sigma_2^2 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$. Отсюда $f(x, y) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 - 2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) + 3xy(x^2 + y^2) = \sigma_1^4 - 2\sigma_1^3 - \sigma_1^2\sigma_2 + 6\sigma_1\sigma_2 - 4\sigma_2^2$. ■

1. Какое выражение называется многочленом с несколькими переменными?
2. Что называется степенью многочлена?
3. Как сравниваются ранги членов многочлена?
4. Что мы называем стандартным видом многочлена?
5. Какие многочлены называются однородными многочленами степени m?
6. Какое уравнение называется уравнением с несколькими переменными?
   Что нужно понимать под решением такого уравнения?
7. Какие многочлены называются симметрическими? Приведите пример.
8. Что такое элементарные симметрические многочлены? Какими свойствами они обладают?

Упражнения

A

5.1. Найдите все решения уравнения:
а) $x^2 - 6xy + 8y^2 = 0$; б) $x^2 - 6xy - y^2 = 0$;
в) $x^2 + 2xy - 24y^2 = 0$; г) $x^2 + 9xy + 14y^2 = 0$;
д) $3x^2 - 8xy + 5y^2 = 0$; е) $2x^2 + 7xy + 5y^2 = 0$.

5.2. Выразите a через b:
а) $a^2 - 3ab - 4b^2 = 0$; б) $21a^2 - 4ab - b^2 = 0$.

5.3. Сумму $x^5 + y^5$ выразите через σ_1 и σ_2.

5.4. Выразите симметрические многочлены через элементарные симметрические многочлены.
а) $4x^2 - 5xy + 4y^2$; б) $-2x^2 + 7xy - 2y^2$;
в) $x^3 - 2x^2y^2 + y^3$; г) $2x^4 + 2x^2y^2 + 2y^4 - x - y$.

B

5.5. Выразите в уравнении одну переменную через другую.
а) $6x^4 - 11x^3y - 18x^2y^2 - 11xy^3 + 6y^4 = 0$;
б) $2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^4 = 0$;
в) $18a^4 - 21a^3b - 94a^2b^2 - 21ab^3 + 18b^4 = 0$;
г) $10u^4 - 27u^3v + 25u^2v^2 - 27uv^3 + 10v^4 = 0$.

5.6. Докажите тождество:
а) $x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$;
б) $x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$;
в) $x^4 + y^4 + z^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$;
г) $x^2y^2 + x^2z^2 + z^2y^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3$;
д) $x^2y + x^2z + y^2x + z^2x + y^2z + yz^2 = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$;
е) $x^3y + x^3z + y^3x + z^3x + y^3z + yz^3 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3$.

5.7. Выразите многочлены из задачи **5.5** через элементарные симметрические многочлены.

C

5.8. Разложите на множители.
а) $2x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + 2y^4$;
б) $3x^4 - 8x^3y + 14x^2y^2 - 8xy^3 + 3y^4$;
в) $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3)$;
г) $(x + y + z)^5 - (x^5 + y^5 + z^5)$.

5.9. Докажите тождество:

а) $(x + y)(x + z)(z + y) + xyz = (x + y + z)(xy + xz + yz)$;

б) $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)^2 - (a + b + c)^2(a^2 + b^2 + c^2) =$
$= (ab + ac + bc)^2$;

в) $y^2z^2(y^2 - z^2) + x^2z^2(z^2 - x^2) + x^2y^2(x^2 - y^2) =$
$=(x + y)(x + z)(z + y)(x - z)(y - z)(x - y)$;

г) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = (a - b)(b - c)(c - a)$.

5.10. Дано уравнение $4x^2 - 6x - 1 = 0$. Не вычисляя его корни α и β, составьте квадратное уравнение с корнями $x_1 = \frac{\alpha}{\beta} + 1$ и $x_2 = \frac{\beta}{\alpha} + 1$.

5.11. Используя условие предыдущей задачи, решите задачи.

а) $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = \alpha^3$, $x_2 = \beta^3$;

б) $2x^2 - 7x - 3 = 0$, $x_1 = \alpha + \frac{1}{\beta}$, $x_2 = \beta + \frac{1}{\alpha}$;

в) $4x^2 - 6x - 1 = 0$, $x_1 = \frac{2}{\alpha^3} - 1$, $x_2 = \frac{2}{\beta^3} - 1$;

г) $3x^2 + 7x + 4 = 0$, $x_1 = \frac{\alpha}{\beta - 1}$, $x_2 = \frac{\beta}{\alpha - 1}$.

5.12. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$;

б) $\dfrac{bc - a^2 + ac - b^2 + ab - c^2}{a(bc - a^2) + b(ac - b^2) + c(ab - c^2)}$.

5.13. Зная, что $a + b + c = 0$, докажите тождество:

а) $a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c) = 0$;

б) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$;

в) $a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$;

г) $2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$.

5.14. Докажите тождество $(p - a)^3 + (p - b)^3 + (p - c)^3 + 3abc = p^3$, приняв $p = \frac{a + b + c}{2}$.

5.15. Покажите, что многочлен $x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 + 4x^3yz + 4xy^3z + 4xyz^3 + 3x^2y^2z^2$ можно разложить на множители.

5.2. Общий вид многочлена с одной переменной и нахождение его корней

5.2.1. Общий вид многочлена с одной переменной

Общий вид многочлена с одной переменной записывается так:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1)$$

здесь x – переменная, n – натуральное число, степень данного многочлена, числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – коэффициенты, a_0 – коэффициент старшего члена (старший коэффициент), а a_n – свободный член. Говорят, что многочлен с одной переменной записан в ***стандартном виде***, если он записан в виде (1). Например, $f(x) = 2x^3 + x - 3$ – многочлен 3-й степени, $a_0 = 2$ – старший коэффициент, а $a_3 = -3$ – свободный член. Кроме того, $a_1 = 0$ (коэффициент при x^2), $a_2 = 1$. Чтобы привести многочлен $f(x) = (x^2 - 2x)^2 + x^2 + x - 5$ к стандартному виду, необходимо раскрыть скобку, привести подобные слагаемые и полученные слагаемые записать по мере убывания степеней переменных:

$f(x) = (x^2 - 2x)^2 + x^2 + x - 5 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x^2 + x - 5 = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 5$, т.е. данный многочлен имеет вид

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 5.$$

5.2.2. Понятие корня многочлена

Пусть дан многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 2$. Тогда легко проверить, что $f(-1) = 0 : f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 2(-1) + 2 = -1 - 3 + 2 + 2 = 0$. Здесь $x = -1$ называется ***корнем*** многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 2$. Итак, чтобы найти корни многочлена, нужно найти корни уравнения $f(x) = 0$.

> **Определение.** *Корни уравнения*
>
> $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (2)$$
>
> *называется* ***корнями многочлена*** $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

Пример 1. Найдем корни многочлена $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$.

▲ Сгруппировав члены многочлена, разложим его на множители:

$x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = (x^3 + 8) + (2x^2 + 4x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 2x(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 4)$. Тогда уравнение $x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$

записывается в виде $(x + 2)(x^2 + 4) = 0$, и это уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} x+2=0, \\ x^2+4=0. \end{array}\right.$ Корень первого уравнения таков: $x = -2$, а второе уравнение не имеет действительных корней $(D < 0)$.

Ответ: $x = -2$. ■

В рассмотренном примере мы воспользовались формулой $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. При разложении многочленов высшей степени на множители часто используют формулы

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}); \quad (3)$$

$$x^{2n+1} + a^{2n+1} = (x + a)(x^{2n} - a \cdot x^{2n-1} + a^2 \cdot x^{2n-2} - \ldots + a^{2n}). \quad (4)$$

Работа в группе

Докажите справедливость формулы (3) при $n = 3, 4, 5$, а формулы (4) – при $n = 1, 2$.

Пример 2. Найдем корни уравнения

$$x^5 + 3x^4 + 4x^3 + x^2 + 1 = 0.$$

▲ Сначала разложим многочлен на множители:

$x^5 + 3x^4 + 4x^3 + x^2 + 1 = (x^5 + 1) + (3x^4 + 4x^3 + x^2) = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + x^2(3x^2 + 4x + 1) = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + x^2(x + 1)(3x + 1) = (x + 1)(x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x + 1)$. Здесь мы использовали то, что числа $x = -1$ и $x = -\dfrac{1}{3}$ – корни квадратного трехчлена $3x^2 + 4x + 1$. Из этого разложения видно, что $x = -1$ является корнем данного уравнения. А многочлен $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x + 1 = x^4 + 2x^3 + x^2 + x^2 - x + 1 = x^2(x + 1)^2 + x^2 - x + 1$ не имеет корней, т.к. $x^2(x + 1)^2 \geqslant 0$ и $x^2 - x + 1 > 0$.

Ответ: $x = -1$. ■

5.2.3. Деление многочлена на многочлен. Нахождение целых корней многочлена с целыми коэффициентами

Если для данных многочленов $A(x)$ и $B(x)$ существуют многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, где степень $R(x)$ меньше степени многочлена $B(x)$, такие, что справедливо равенство $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$, то говорят, что многочлен $A(x)$ делится на многочлен $B(x)$ с остатком $R(x)$. Здесь $Q(x)$ называют неполным частным при делении многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$. Если $R(x) = 0$, то говорят, что многочлен $A(x)$ делится на $B(x)$ без остатка. Например, двучлен $x^3 - 8$ делится на $x^2 + 2x + 4$ без остатка, т.к. по формуле сокращенного умножения верно равенство $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. Здесь $A(x) = x^3 - 8$, $B(x) = x^2 + 2x + 4$, $Q(x) = x - 2$, $R(x) = 0$. Аналогично, т.к. $x^3 - 1 =$

$= (x^2 + 3x + 1)(x - 3) + 8x + 2$, то многочлен $A(x) = x^3 - 1$ делится на многочлен $B(x) = x^2 + 3x + 1$ с остатком $R(x) = 8x + 2$. Здесь $Q(x) = x - 3$ – неполное частное.

Деление многочлена на многочлен можно производить обычным способом деления **«уголком»**. Рассмотрим этот способ на примерах.

Пример 1. Разделим многочлен $x^3 - 1$ на многочлен $x^2 + 3x + 1$.

▲
$$
\begin{array}{rr|l}
- & x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & x^2 + 3x + 1 \\
 & x^3 + 3x^2 + x & \hline x - 3 \\
\hline
- & -3x^2 - x - 1 & \\
 & -3x^2 - 9x - 3 & \\
\hline
 & 8x + 2 &
\end{array}
$$

Отсюда $Q(x) = x - 3$, $R(x) = 8x + 2$. Тем самым $x^3 - 1 = (x^2 + 3x + 1)(x - 3) + 8x + 2$. ■

Пример 2. Разделим многочлен $3x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x - 6$ на многочлен $x^4 + 2x + 2$.

▲
$$
\begin{array}{rr|l}
- & 3x^6 + 2x^4 - 2x^3 + x - 6 & x^4 + 2x + 2 \\
 & 3x^6 + 6x^3 + 6x^2 & \hline 3x^2 + 2 \\
\hline
- & 2x^4 - 8x^3 - 6x^2 + x - 6 & \\
 & 2x^4 + 4x + 4 & \\
\hline
 & -8x^3 - 6x^2 - 3x - 10 &
\end{array}
$$

Т.е. $Q(x) = 3x^2 + 2$ – многочлен 2-й степени, а $R(x) = -8x^3 - 6x^2 - 3x - 10$ – многочлен 3-й степени. ■

Пример 3. Разделим многочлен $x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 1$ на многочлен $x^3 - x^2 + 2x - 1$.

▲
$$
\begin{array}{rr|l}
- & x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 1 & x^3 - x^2 + 2x - 1 \\
 & x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 & \hline x^2 - 1 \\
\hline
- & -x^3 + x^2 - 2x + 1 & \\
 & -x^3 + x^2 - 2x + 1 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Здесь $Q(x) = x^2 - 1$, $R(x) = 0$, т.е. первый многочлен делится на второй без остатка. ■

Теперь рассмотрим способы нахождения целых корней (если таковые имеются) многочлена с целыми коэффициентами.

Теорема. *Каждый целый корень (если существует) многочлена с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена. Другими словами, если $a_0, a_1, a_2, ,,..., a_n$ – целые числа и число $x = m$ является целым корнем многочлена*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \ (a_0 = 1), \qquad (1)$$

то число a_n делится на m без остатка.

▲ Допустим, что многочлен (1) с целыми коэффициентами имеет целый корень, равный m. Тогда $f(m) = 0$, т.е. число $a_0m^n + a_1m^{n-1} + \ldots + a_{n-1}m + a_n = 0$. Отсюда $a_n = m(-a_0m^{n-1} - a_1m^{n-2} - \ldots - a_{n-1})$, т.е. число a_n делится на m без остатка, что и требовалось доказать. ■

Пример 4. Найдем целые корни многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$.

▲ Если данный многочлен имеет целые корни, то эти корни находятся среди делителей числа 2, т.е. среди чисел ±1, ±2. С помощью проверки убеждаемся, что $f(1) = 1$, $f(-1) = -3$, $f(2) = 0$, $f(-2) = -20$. Следовательно, $x = 2$ – единственный целый корень данного многочлена. ■

Пример 5. Разложим многочлен $f(x) = x^3 - 19x - 30$ на множители.

▲ Если данный многочлен имеет целые корни, то они находятся среди чисел ±1; ±2; ±3; ±5; ±6; ±15; ±30. Непосредственная проверка того, являются ли эти числа корнями исходного многочлена, есть очень трудоемкая работа, которая занимает много времени. Поэтому проверку производят до определения первого целого корня: $f(1) = -48$, $f(-1) = -30$, $f(2) = -60$, $f(-2) = 0$. Тогда данный многочлен делится на двучлен $x + 2$ без остатка:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 19x - 30 & x + 2 \\
-\ \ x^3 + 2x^2 \qquad\quad & \overline{x^2 - 2x - 15} \\
\hline
-2x^2 - 19x - 30 & \\
-\ \ -2x^2 - 4x \qquad & \\
\hline
-15x - 30 & \\
-\ \ -15x - 30 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Следовательно, $x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x^2 - 2x - 15)$. Теперь для определения других целых корней многочлена $x^3 - 19x - 30$ достаточно определить целые корни многочлена $x^2 - 2x - 15$. Эти корни (если существуют) находятся среди чисел ±3; ±5; ±15. Мы уже определили, что ±1 не являются корнями. Так как $f(-3) = (-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 15 = 0$, то $x^2 - 2x - 15$ делится на двучлен $x + 3$ без остатка:

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 - 2x - 15 & x + 3 \\
-\ \ x^3 + 3x \qquad & \overline{x - 5} \\
\hline
-5x - 15 & \\
-\ \ -5x - 15 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Тогда $x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5)$. Поэтому $x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x + 3)(x - 5)$. ■

1. Как записывается стандартный вид многочлена с одной переменной?
2. Что называется старшим коэффициентом и свободным членом? Приведите пример.
3. Какое число называется корнем многочлена? Приведите пример.
4. На примере покажите деление многочлена на многочлен «уголком».
5. Что называется неполным частным и остатком при делении многочлена на многочлен? Приведите пример.
6. Какой должна быть степень остатка?
7. При каких условиях один многочлен делится на второй без остатка? Приведите пример.
8. Как можно определить целый корень многочлена с целыми коэффициентами? Приведите пример.

Упражнения

A

5.16. Укажите степень, старший коэффициент и свободный член многочлена:

1) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x - 7$; 2) $2x^4 - 8x^2 - 8x$;
3) $(x^2 + 4x)(x^2 - x - 1)$; 4) $(x^2 + 5x)(x^2 + x - 3)$;
5) $(3x + 4)(x^4 - x^2 - 1)$; 6) $(x - 1)(x^2 + 1)(4x + 3)$.

5.17. Разделите с остатком:

1) $(x^4 + x^2 + 1) : (x + 5)$; 2) $(x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4) : (x^2 - x + 1)$;
3) $(x^7 - 1) : (x^2 + x + 1)$; 4) $(x^6 - 1) : (x - 3)$.

5.18. Выполните действия:

1) $(4x^4 - 5x^3 + x^2) : (3x^2 - 4x + 1)$
2) $(9x^4 + 5x^2 + 1) : (3x^2 - 2x + 1)$;
3) $(2x^5 - 5x^4 - 4x + 1) : (2x^3 + x^2 - 1)$
4) $(3x^5 - x^4 - 3x + 1) : (x^2 - 5x^2 + 6x)$.

5.19. Найдите целые корни многочлена:

1) $x^2 - 4x + 3$; 2) $x^2 + 3x - 4$; 3) $x^2 + 3x - 10$;
4) $x^2 + 5x - 6$; 5) $3x^2 - 2x - 21$; 6) $2x^2 + x - 21$.

5.20. Разложите на множители:

1) $x^2 - 6x - 16$; 2) $x^2 + 12x + 20$; 3) $x^2 - 3x - 10$;
4) $x^2 + 4x + 3$; 5) $2x^2 - 9x + 10$; 6) $x^2 + 2x - 80$.

5.21. Разложите на множители:

1) $x^4 - 16$; 2) $x^6 - 64$; 3) $x^4 + x - 2$; 4) $y^3 + 3y + 4$.

B

5.22. Делится ли многочлен $x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 5$ на трехчлен $x^2 - 3x + 2$ без остатка?

5.23. Выполните деление с остатком:

1) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) : (x^3 - 1)$;

2) $(x^2 - 1)(x^3 + x + 1) : (x^2 + x + 1)$;
3) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) : (x^3 + x^2 + x + 1)$;
4) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) : (x - 2)(x - 1)x$.

5.24. Найдите целые корни и разложите на множители:
1) $x^3 - 7x - 6$;
2) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$;
3) $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$;
4) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$;
5) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$;
6) $x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 4$.

5.25. Определите целые корни:
1) $x^5 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 10$; 2) $x^5 - 4x^3 + 4x^2 + 5x - 6$;
3) $x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 38x - 24$; 4) $x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 4$.

5.26. Разложите на множители:
1) $x^3 - x^2 - x - 2$; 2) $x^3 - 6x^2 - x + 30$.

5.27. Разложите на множители:
1) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$; 2) $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$;
3) $(x + 1)(x^2 + 2) + (x + 2)(x^2 + 1) - 2$;4) $x^8 - 15x^4 - 16$.

5.28. Один из корней многочлена: 1) $x^3 + ax^2 - 5x + 6$ равен 3; 2) $x^3 - x^2 + ax + 12$ равен -3. Найдите остальные корни.

C

5.29. Докажите, что при каждом четном натуральном n значение многочлена $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 240.

5.30. Докажите, что для каждого нечетного $x = 4n + 1$ значение многочлена $x^3 + 3x^2 - x - 3$ делится на 48.

5.31. При каком значении k многочлен $x^3 + 6x^2 + kx + 12$ делится на двучлен $x + 4$ без остатка?

5.32. При каких значениях a и b первый многочлен делится без остатка на второй многочлен: 1) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax + b$ на $x^2 - 3x + 2$; 2) $x^3 - 2x^2 + ax + b$ на $x^2 - x + 1$?

5.33*. Определите остаток от деления любого многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$.

Упражнения для повторения

5.34. Решите уравнение $x^2 - 2x + 3 = 0$ графическим способом.

5.35. Решите неравенства:
1) $|x - 3| \leqslant 4$; 2) $2x^2 + 3x - 5 > 0$.

5.3. Корни многочлена. Теорема Безу. Схема Горнера

Если в многочлене

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

вместо x подставить значение c, то получим

$$f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ldots + a_{n-1}c + a_n,$$

которое называется ***значением многочлена*** $f(x)$ при $x = c$.

Если $f(c) = 0$, то число c называется ***корнем многочлена*** $f(x)$. Докажем следующую теорему, которая носит имя французского математика Э.Безу (XVIII в.), занимавшегося исследованием системы алгебраических уравнений высших степеней.

Теорема Безу. *Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$ равен $f(a)$.*

▲ Остаток r от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$ является многочленом нулевой степени, т.е. $f(x) = (x - a)q(x) + r$. Отсюда при $x = a$ имеем: $f(a) = (a - a)q(a) + r$ или $f(a) = r$. ■

Теорема 2. *Для того чтобы число $x = a$ было корнем многочлена $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы многочлен $f(x)$ делился на двучлен $x - a$ без остатка.*

▲ Пусть многочлен $f(x)$ делится на $x - a$ без остатка. Тогда $r = 0$ и по теории Безу $f(a) = r = 0$, т.е. $x = a$ – корень многочлена $f(x)$.

Обратно, пусть $x = a$ – корень многочлена $f(x)$, т.е. $f(a) = 0$. Тогда по теореме Безу остаток от деления $f(x)$ на двучлен $x - a$ таков: $r = f(a) = 0$, т.е. многочлен $f(x)$ делится на $x - a$ без остатка. ■

Итак, чтобы найти корни многочлена $f(x)$, в силу доказанной теоремы, возникает необходимость нахождения его линейных делителей. В этой связи существует простая схема деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$. Этот метод деления называют ***схемой Горнера*** (этот способ по существу совпадает с ***методом тянь-юань***, применявшимся в средневековом Китае. В начале XIX в. он был заново открыт английским математиком У. Горнером).

Пусть для многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ выполняется равенство

$$f(x) = (x - c)q(x) + r. \qquad (2)$$

Здесь $q(x)$ – многочлен $(n - 1)$-й степени:

$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}.$$

Умножив двучлен $x - c$ на многочлен $q(x)$ и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях x в равенстве (2), получим:

$$
\begin{aligned}
&a_0 = b_0,\\
&a_1 = b_1 - cb_0,\\
&a_2 = b_2 - cb_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n-1} = b_{n-1} - cb_{n-2},\\
&a_n = r - cb_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Отсюда $b_0 = a_0$, $b_k = cb_{k-1} + a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, т.е. коэффициент b_k равен сумме произведения числа c на коэффициент b_{k-1} и соответствующего коэффициента a_k. В конце выполняется равенство $r = cb_{n-1} + a_n$. Итак, коэффициенты многочлена $q(x)$ и остаток r можно определить простейшими арифметическими действиями. Теперь рассмотрим примеры.

Пример 1. Разделим многочлен $f(x) = x^4 + 19x^2 - 30$ на двучлен $x + 1$.

▲ Составим следующую таблицу, состоящую из двух строк. В первой строке записываются коэффициенты многочлена $f(x)$, а во второй – коэффициенты $q(x)$ и остаток r.

	$a_0 = 1$	$a_1 = 0$	$a_2 = 19$
$c = -1$	$b_0 = 1$	$b_1 = (-1) \cdot 1 + 0 = -1$	$b_2 = (-1) \cdot (-1) + 19 = 20$

	$a_3 = 0$	$a_4 = -30$
$c = -1$	$b_3 = (-1) \cdot 20 + 0 = -20$	$r = (-1) \cdot (-20) - 30 = -10.$

Итак, $q(x) = x^3 - x^2 + 20x - 20$, $r = f(-1) = -10$. ■

Пример 2. Разделим многочлен $f(x) = x^4 - 8x^3 + x^2 + 4x - 9$ на двучлен $x - 3$.

▲

	1	–8	1	4	–9
3	1	–5	–14	–38	–123

Итак, $q(x) = x^3 - 5x^2 - 14x - 38$, $r = f(3) = -123$. ■

Схема Горнера часто используется при нахождении целого корня многочленов с целыми коэффициентами.

Пример 3. Найдем целые корни многочлена

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$$

▲ Целые корни данного многочлена (если они имеются) являются делителями свободного члена (–6), т.е. целые корни находятся среди чисел ±1; ±2; ±3; ±6. Являются ли эти числа корнями данного многочлена проверим с помощью схемы Горнера.

1) Проверим, является ли число 1 корнем многочлена.

	1	2	–5	–6
1	1	3	–2	–8

Отсюда $r = -8 \neq 0$, т.е. $x = 1$ не является корнем многочлена.

2) Проверим, является ли число -1 корнем многочлена.

	1	2	−5	−6
−1	1	1	−6	0

Т.е. $r = 0$ и верно разложение $f(x) = (x + 1)(x^2 + x - 6)$. Следовательно, $x = -1$ – корень многочлена.

Какие еще числа являются корнями квадратного трехчлена $q(x) = x^2 + x - 6$?

2 и -3 – корни данного квадратного трехчлена.

Ответ: -1; 2; -3.

5.4. Формула Виета

Если многочлен $f(x)$ делится без остатка на $(x - a)^k$, а на $(x - a)^{k+1}$ не делится, то $x = a$ называется ***корнем многочлена $f(x)$ кратности k***, т.е., если $f(x) = (x - a)^k q(x)$ и $q(x)$ не делится на $x - a$, то ***a – корень кратности k.***

Если $k = 1$, то $x = a$ называется ***простым корнем*** многочлена $f(x)$. Например, для многочлена $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$ число -1 – простой корень, а $x = 2$ – корень кратности 2.

Если коэффициент при старшем члене многочлена $f(x)$ равен 1, то его можно записать в виде

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Этот многочлен называют ***приведенным многочленом.***

Для любого многочлена n-й степени с действительными коэффициентами количество его действительных корней не превышает числа n.

▲ Действительно, если количество корней многочлена n-й степени $f(x)$ равно $n + k$, то для его действительных корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_{n+k}$ имеет место равенство

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)\ldots(x - \alpha_{n+k}) \text{ (теорема 2).}$$

В левой части этого равенства – многочлен n-й степени, а в правой – многочлен $(n + k)$-й степени. Этого быть не может, т.к. это противоречит определению равенства многочленов. Следовательно, количество действительных корней многочлена $f(x)$ не превышает числа n. ■

Теперь рассмотрим приведенный многочлен 3-го порядка:

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r. \qquad (3)$$

Пусть этот многочлен имеет 3 действительных корня: c_1, c_2, c_3. Среди этих корней могут быть и кратные корни. Тогда верно тождество

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3).$$

Раскроем скобки в правой части равенства и запишем полученный многочлен в стандартном виде:

$$(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) = (x^2 - (c_1 + c_2)x + c_1c_2)(x - c_3) =$$
$$= x^3 - (c_1 + c_2 + c_3)x^2 + (c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3)x - c_1c_2c_3.$$

Итак,

$$x^3 + px^2 + qx + r = x^3 - (c_1 + c_2 + c_3)x^2 + (c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3)x - c_1c_2c_3.$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = -p, \\ c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 = q, \\ c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 = -r. \end{cases} \quad (4)$$

Эта формула называется ***формулой Виета*** для многочленов 3-го порядка.

Используя формулы Виета, по заданным корням можно восстановить соответствующий многочлен.

Пример 4. Запишем многочлен, простой корень которого равен 2, а двукратный корень равен -3.

▲ Так как $c_1 = 2$, $c_2 = c_3 = -3$, то по формуле Виета $p = -(2 - 3 - 3) = 4$, $q = 2 \cdot (-3) + 2(-3) + (-3)(-3) = -3$, $r = -2(-3)(-3) = -18$. Поэтому $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$. ■

При нахождении корней многочленов высшей степени пользуются методом понижения их степеней, разлагая эти многочлены на множители. Для этой цели иногда пользуются методом неопределенных коэффициентов. Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 5. Найдем числа A и B такие, чтобы имело место равенство $x^4 - 3x^3 - x + 3 = (x^2 + x + 1)(x^2 + Ax + B)$.

▲ Раскроем скобки в правой части этого равенства и приведем его к стандартному виду:

$(x^2 + x + 1)(x^2 + Ax + B) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + x^3 + Ax^2 + Bx + x^2 + Ax + B = x^4 + (A + 1)x^3 + (A + B + 1)x^2 + (A + B)x + B.$

Сравнивая это выражение с многочленом $x^4 - 3x^3 - x + 3$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A + 1 = -3, \\ A + B + 1 = 0, \\ A + B = -1, \\ B = 3. \end{cases} \quad (5)$$

Отсюда $A = -4$, $B = 3$. Ответ: $A = -4$, $B = 3$. ■

Замечание. В системе (5) имеются 4 уравнения и 2 неизвестных, т.е. количество уравнений больше, чем количество неизвестных. Подобные системы могут и не иметь решения. Если система (5) не имела бы решения, то многочлен $x^4 - 3x^3 - x + 3$ не делился бы на квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ без остатка.

1. Напишите общий вид многочлена n-й степени. Укажите старший член и свободный член.
2. Сформулируйте и докажите теорему о делении многочлена на многочлен.
3. Сформулируйте и докажите теорему Безу и ее следствия.
4. На примере поясните смысл схемы Горнера.
5. Напишите формулу Виета для многочленов 2-й, 3-й и 4-й степени.
6. Как используется метод неопределенных коэффициентов? Объясните это на примере.

Упражнения

А

5.36. Выполните деление с остатком первого многочлена на второй:
1) $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$; $x^3 - x + 1$;
2) $x^6 - 2x^2 + x - 1$; $x^5 - x$;
3) $x^4 + x^2 - 2$; $x^2 - 1$;
4) $x^7 - 1$; $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

5.37. Определите A, B и C так, чтобы:
1) $x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 = (x + 1)(x^3 + Ax^2 + Bx + C)$;
2) $3x^5 - x^4 - 3x + 1 = (x^2 + 1)(3x^3 + Ax^2 + Bx + C)$.

5.38. Выполните деление многочлена на двучлен $x + 1$ по схеме Горнера. Найдите остаток и неполное частное:
1) $x^6 + 9x^3 + 32x + 16$; 2) $14x - 4 + 27x^4 - 9x^7$;
3) $x^5 - 7x - 6$; 4) $x^4 + 19x^2 - 30$.

5.39. По схеме Горнера покажите, что числа -2 и 1 являются корнями многочлена:
1) $2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 13x + 6$; 2) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$;
3) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$.

5.40. Напишите многочлен 3-й степени, корни которого равны:
1) 1, 2, -3; 2) 0, -1, 1; 3) -2, 1, 4; 4) -1, 2, 3.

5.41. Числа 1 и -2 являются корнями многочлена $2x^3 + mx^2 + nx + 12$. Найдите его третий корень.

5.42. Числа 1 и 2 являются корнями многочлена $x^3 - 4x^2 + ax + b$. Найдите числа a, b и третий корень.

5.43. Число -1 является корнем многочлена $x^3 - 2x^2 + ax - 2$. Найдите два других корня и коэффициент a.

5.44. Напишите многочлен, корни которого равны:
1) -1, 2, 3, 4; 2) -1, 0, 1, 2, 3.

5.45. Найдите целые корни многочлена и разложите его на множители:
1) $x^3 - 4x^2 - x + 4$; 2) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$.

B

5.46. С помощью схемы Горнера покажите, что многочлен $(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 12x + 35) + 15$ делится на многочлен $(x + 2)(x + 6)$.

5.47. Покажите, что многочлен $x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 32x^2 + 48x - 32$ делится на $(x - 2)^2$.

5.48. Делится ли многочлен $(x^4 - 10x^2 + 16)(x^4 - 11x^2 + 24)$ на $(x^2 - 8)^2$?

5.49. Найдите целые корни многочлена $x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$.

5.50. Найдите сумму коэффициентов многочлена

$(1 + 2x - 4x^2)^{24} \cdot (1 - 7x + 5x^2)^{25}$.

5.51. Покажите, что значение суммы $f\left(a+\sqrt{b}\right)+f\left(a-\sqrt{b}\right)$ равно целому числу, если $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Здесь a и b $(b > 0)$ – любые целые числа.

5.52. Делится ли многочлен $x^{2006} - 3x + 2$ на двучлен $x^2 - 1$?

5.53. При делении многочлена на двучлен $x - 1$ остаток равен 3, а при делении на двучлен $x - 2$ остаток равен 4. Чему равен остаток от деления этого многочлена на многочлен $(x - 1)(x - 2)$?

5.54. При делении многочлена на двучлены $(x + 1)$, $(x - 2)$ и $(x - 3)$ получаются остатки, равные 3, 1, –1 соответственно. Чему равен остаток от деления этого многочлена на многочлен $(x + 1)(x - 2)(x - 3)$?

5.55. Найдите общие корни уравнений $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$ и $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 2 = 0$.

5.56. Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Докажите справедливость формулы Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

C

5.57. Числа x_1, x_2, ..., x_n являются корнями многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$. Найдите корни многочленов $g(x) = a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n$,

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

5.58. Покажите, что число $f(m)$ при каждом целом m делится на разность $c - m$, если $x = c$ – целый корень многочлена $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами.

5.59. Покажите, что каждый рациональный корень многочлена $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами является целым числом.

5.60. Если $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$ – попарно различные действительные числа, то существует ли многочлен n-й степени, корни которого равны $c_1, c_2, \ldots, c_n$, а его значение при $x = c_{n+1}$ было бы равно 1?

5.61. Докажите, что при каждом неотрицательном значении m, n, k многочлен $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3k+2}$ делится на квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ без остатка.

5.62. Докажите, что для корней x_1, x_2, x_3 многочлена $x^3 + px + q$ выполняется равенство $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1x_2x_3$.

5.63. Выразите сумму $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ через p и q, если x_1, x_2, x_3 – корни многочлена $x^3 + px + q$.

5.64. При каких значениях p и q многочлен $6x^4 - 7x^3 + px^2 + 3x + 2$ делится на $x^2 - x + q$ без остатка?

5.65. При каких значениях a оба корня квадратного трехчлена $x^2 - (a + 1)x + a + 4$ отрицательные?

Упражнения для повторения

5.66. Найдите сумму ряда:

1) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots$; 2) $1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{125} + \ldots$.

5.67. Решите неравенство методом интервалов:

1) $(2x + 7)(3x - 4)(x + 5) > 0$; 2) $(x - 6)(0,5x + 4)(5x + 10) < 0$;

3) $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} > -3$; 4) $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} > 3$.

5.5. Решение уравнений высшего порядка

5.5.1. Теорема о рациональном корне многочлена с целыми коэффициентами

Рассмотрим многочлен с целыми коэффициентами:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (1)$$

где a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n – целые числа. Пусть $r = \frac{m}{k}$ – рациональный корень многочлена (1) и эта дробь несократима, т.е. числа m и k взаимно простые числа: $(m, k) = 1$, $m \in Z$, $k \in N$. Тогда верна следующая теорема.

Теорема. *Если* $r = \frac{m}{k}$ *– рациональный корень многочлена (1), то число k является делителем старшего коэффициента, а m – делитель свободного члена:* $a_n \vdots m$, $a_0 \vdots k$.

▲ Если $r = \frac{m}{k}$ является корнем многочлена (1), то верно тождество

$$a_0\left(\frac{m}{k}\right)^n + a_1\left(\frac{m}{k}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{m}{k}\right) + a_n = 0 .$$

Умножив это тождество на k^n, получим:

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} \cdot k + \ldots + a_{n-1} \cdot m \cdot k^{n-1} + a_n \cdot k^n = 0. \qquad (2)$$

Запишем (2) в следующем виде:

$$-a_0 m^n = k(a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} \cdot k + \ldots + a_{n-1} m \cdot k^{n-2} + a_n k^{n-1}).$$

Здесь $(m, k) = 1 \Rightarrow (m^n, k) = 1$, поэтому $a_0 \vdots k$. Теперь запишем (2) в следующем виде:

$$-a_n k^n = m(a_0 m^{n-1} + a_1 \cdot m^{n-2} \cdot k + \ldots + a_{n-1} \cdot k^{n-1}).$$

Здесь $(k^n, m) = 1$, поэтому необходимо, чтобы $a_n \vdots m$. ■

Пример 1. Определим рациональные корни многочлена $f(x) = 12x^3 - 8x^2 - 3x + 2$.

▲ Т.к. числа ±1, ±2 являются делителями числа 2, а числа ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12 – делители числа 12, то рациональные корни нужно искать среди чисел ±2, ±1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{6}$, $\pm\frac{1}{12}$.

Ясно, что числа ±2 и ±1 не являются корнями. Это легко можно проверить с помощью схемы Горнера. Проверим, являются ли другие числа корнями данного многочлена. Для дробных чисел также применима схема Горнера.

	12	–8	–3	2
$\frac{1}{2}$	12	–2	–4	0
$-\frac{1}{2}$	12	–8	0	

Здесь видно, что $x = \frac{1}{2}$ – корень данного многочлена. Поэтому схему Горнера применим для многочлена $12x^2 - 2x - 4$, т.е. из этой схемы следует последовательное разложение вида

$$12x^3 - 8x^2 - 3x + 2 = (x - \frac{1}{2})(12x^2 - 2x - 4) = (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})(12x - 8) =$$
$$= (2x - 1)(2x + 1)(3x - 2).$$

Ответ: $\pm\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$. ■

5.5.2. Симметричные уравнения

Симметричное уравнение n-го порядка таково:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0, \qquad (1)$$

т.е. коэффициенты членов, равноудаленные от начала и конца уравнения, равны между собой. Например, $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$, $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$ – симметричные уравнения. Чтобы найти корни симметричного уравнения, вводят обозначение $z = x + \frac{1}{x}$. Рассмотрим примеры.

Пример 2. Найдем корни уравнения $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$.

▲ Так как $x = 0$ не является корнем данного уравнения, то, разделив его на x^2, получим уравнение

$$6x^2 - 13x + 12 - 13\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^2} = 0.$$

Отсюда, объединяя члены с одинаковыми коэффициентами, получим уравнение

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0.$$

Введя обозначение $z = x + \frac{1}{x}$ и возведя полученное равенство в квадрат, получим уравнение $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$. Последнее уравнение можно записать в виде $6(z^2 - 2) - 13z + 12 = 0$, или $6z^2 - 13z = 0$. Так как $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{13}{6}$, то получим совокупность уравнений $x + \frac{1}{x} = 0$ и $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$. Здесь первое уравнение не имеет корней, а второе записывается в виде $6x^2 - 13x + 6 = 0$. Его корни: $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$. ■

Пример 3. Найдем корни уравнения $30x^4 - 17x^3 - 228x^2 + 17x + 30 = 0$.

▲ Здесь коэффициенты при нечетных степенях x противоположны по знаку. Такие уравнения, называемые ***симметричными уравнениями II рода***, решают аналогично. Разделим данное уравнение на x^2:

$$30\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 17\left(x - \frac{1}{x}\right) - 228 = 0.$$

Введя обозначение $x - \frac{1}{x} = z$, получим уравнение $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 + 2$. Тогда данное уравнение можно заменить уравнением $30(z^2 + 2) - 17z - 228 = 0$, или $30z^2 - 17z - 168 = 0$. Его корни: $z_1 = \frac{8}{3}$, $z_2 = -2{,}1$. Следовательно, из уравнений $x - \frac{1}{x} = -\frac{21}{10}$ и $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$ находим корни исходного уравнения: $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_3 = 3$, $x_4 = -\frac{1}{3}$. ■

5.5.3. Решение уравнений высшего порядка методом разложения на множители

Итак, чтобы решить уравнение, нужно его заменить более простым равносильным ему уравнением или несколькими уравнениями. Например, решим уравнение $(2x - 5)(4x + 3)(x - 2) = 0$. Для его решения необходимо, чтобы был равен нулю по крайней мере один из сомножителей. Следовательно, это уравнение равносильно совокупности следующих трех уравнений: $2x - 5 = 0$, $4x + 3 = 0$ и $x - 2 = 0$. Их решениями соответственно являются числа $\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{4}$ и 2. Эти числа и являются корнями исходного уравнения.

Указанный способ решения уравнений, т.е. метод разложения на множители, бывает эффективным при решении уравнений высшего порядка. А разложение многочлена на множители является очень сложной, порой требующей изобретательности, трудной и в то же время интересной задачей. Тем не менее существуют отдельные, часто встречающиеся способы разложения на множители. Рассмотрим их на примерах.

Пример 4. Решим уравнение $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$.

▲ Так как $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = x^3 + 4x^2 + 4x + 2x + 4 = x(x^2 + 4x + 4) + 2(x + 2) = x(x + 2)^2 + 2(x + 2) = (x + 2)(x(x + 2) + 2) = (x + 2)(x^2 + 2x + 2)$, то данное уравнение равносильно совокупности уравнений $x + 2 = 0$ и $x^2 + 2x + 2 = 0$. Здесь $x = -2$ является корнем первого уравнения, а второе уравнение не имеет корней.

Ответ: -2. ■

Пример 5. Решим уравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

▲ **I способ.** Так как

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^4 + \frac{1}{4}x^2 + 1 + x^3 + 2x^2 + x - \frac{5}{4}x^2 =$$

$$= (x^2)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{2} + 2x^2 + 2\frac{x}{2} - \frac{5}{4}x^2 = \left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2 =$$

$$= \left(x^2 + \frac{x}{2} + 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}x\right)\left(x^2 + \frac{x}{2} + 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}x\right) = \left(x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1\right) \times$$

$$\times \left(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1\right),$$ то данное уравнение равносильно совокупности уравнений $x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1 = 0$ и $x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1 = 0$. Эти уравнения не имеют действительных корней, т.к. их дискриминанты – отрицательные числа.

Ответ: $\varnothing$. ■

▲ **II способ.** Это уравнение можно решить методом решения симметричного уравнения, введя обозначение $z = x + \frac{1}{x}$. В этом случае данное уравнение не имеет действительных корней. ■

▲ **III способ.** Коэффициенты уравнения – положительные числа, поэтому оно не может иметь положительных корней. Значение $x = 0$ также не является корнем уравнения. Если $-1 \leqslant x < 0$, то из неравенств $|x^3| \leqslant x^2$, $|x| \leqslant 1$ имеем неравенство $x^4 + (x^3 + x^2) + (x + 1) > 0$. Если $x > -1$, то из неравенств $x^4 > |x^3|$, $x^2 > |x|$ имеем неравенство $(x^4 + x^3) + (x^2 + x) + 1 > 0$, т.е. данное уравнение не имеет действительных корней. ■

Пример 6. Решим уравнение $x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = 0$.

▲ Так как $x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = (x^4 + 12x^3 + 36x^2) - (4x^2 + 8x + 4) = (x^2 + 6x)^2 - (2x + 2)^2 = (x^2 + 8x + 2)(x^2 + 4x - 2)$, то данное уравнение равносильно совокупности уравнений $x^2 + 8x + 2 = 0$ и $x^2 + 4x - 2 = 0$ с корнями $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{14}$, $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{6}$. ■

Упражнения

A

В упражнениях **5.68, 5.69** решите уравнения.

5.68. 1) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$;
2) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$;
3) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$;
4) $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$;
5) $5x^4 - 12x^3 + 11x^2 - 12x + 5 = 0$;
6) $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$.

5.69. 1) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$;
2) $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$;
3) $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$;
4) $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0$.

В упражнениях **5.70 – 5.74** решите уравнения методом разложения на множители.

5.70. 1) $x^3 - 3x - 2 = 0$; 2) $x^3 - 19x - 30 = 0$;
3) $2x^3 - x^2 - 1 = 0$; 4) $x^3 + x - 2 = 0$.

5.71. 1) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$; 2) $3x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0$;
3) $x^3 - x^2 - 81x + 81 = 0$; 4) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$.

B

5.72. 1) $x^4 - 2x^3 - x - 2 = 0$; 2) $x^4 - 3x^3 + x - 3 = 0$;
3) $2x^4 + 3x^3 + 16x + 24 = 0$; 4) $24x^4 + 16x^3 - 3x - 2 = 0$.

5.73. 1) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$; 2) $x^3 + 5x^2 + 15x + 27 = 0$;
3) $8x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0$; 4) $27x^3 - 15x^2 + 5x - 1 = 0$.

5.74. 1) $x^3 + 2003x + 2004 = 0$; 2) $x^3 + 4x^2 - 5 = 0$;
3) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$; 4) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$.

В упражнениях **5.75 – 5.77** решите уравнения методом разложения на множители.

5.75. 1) $3x^4 + 7x^3 + 7x + 3 = 0$; 2) $2x^4 - 9x^3 + 9x + 2 = 0$;
3) $x^4 + 1 = 2(1 + x)^4$; 4) $(1 + x^2)^2 = 2x(1 - x^2)$.

5.76. 1) $12x^5 - 56x^4 + 107x^3 - 107x^2 + 56x - 12 = 0$;
2) $15x^5 + 34x^4 + 15x^3 - 15x^2 - 34x - 15 = 0$.

C

5.77. 1) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$;
2) $x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 8x + 16 = 0$;

5.78. Составьте симметричное уравнение 4-го порядка с корнями, равными 5, 3, $\frac{1}{3}$.

5.79. Решите уравнения:
1) $28x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$;
2) $126x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$;
3) $(x^2 + 4x)(x^2 + x - 6) = (x^3 - 16x)(x^2 - 2x - 35)$;
4) $(x^2 + 5x)(x^2 - 3x - 28) = (x^3 - 16x)(x^2 - 2x - 35)$.

5.80. Один из корней уравнения:
1) $ax^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ равен -2;
2) $x^3 + ax^2 - 5x + 6 = 0$ равен 3;
3) $x^3 - x^2 + ax + 12 = 0$ равен -3;
2) $2x^3 + 11x^2 + 17x + a = 0$ равен $-0,5$;
Найдите значение a и другие корни уравнения.

5.81. Решите уравнения:
1) $x^3 + (1 - a^2)x + a = 0$;
2) $(a - x)^3 + (b - x)^3 = (a + b - 2x)^3$.

Упражнения для повторения

5.82. Определите частоту месяца рождения всех учеников 8 класса вашей школы и составьте таблицу частот вариационного ряда и постройте полигон частот. Найдите моду и медиану.

5.83. Докажите тождество $\frac{n - nm + k - km}{1 - 3m + 3m^2 - m^3} = \frac{n - k}{(1 - m)^2}$.

5.84. Если $xy + z^2 = 0$, то покажите, что верно равенство $(x + z)(y + z) + (x - z)(y - z) = 0$.

5.85. Найдите неизвестный член x пропорции:
$$\frac{a^3 + b^3}{n} : \frac{a^3 - b^3}{p} = \frac{p(a + b)}{n(a - b)} : x.$$

Раздел 6. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

6.1. Предел функции в точке.
6.2. Предел числовой последовательности.
6.3. Непрерывность функции.

6.1. Предел функции в точке

6.1.1. Предел функции в точке

Прежде чем дать определение предела функции в точке рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. ▲ Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Эта функция определена на всей числовой оси. Например, определена в точке $x = 3$. Если значения переменной все ближе приближаются к точке 3, то соответствующие значения функции $f(x) = x^2$ также приближаются к 9. Это видно из следующей таблицы значений функции около точки $x = 3$:

x	2,9	2,95	2,98	3	3,02	3,05	3,1
x^2	8,41	8,7025	8,8804	9	9,1204	9,3025	9,61

Вообще, каким бы малым ни было число $\varepsilon > 0$, можно найти значения x, при которых выполнялось бы неравенство $\left|x^2 - 9\right| < \varepsilon$. Для этого достаточно взять значения x, расположенные «как можно ближе» к точке 3. Поэтому, если значения x меняются, стремясь к 3, то соответствующие значения функции $f(x) = x^2$ приближаются к 9. В этом случае говорят, что 9 является пределом функции $f(x) = x^2$ при аргументе x стремящемся к 3. Его записывают так: $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$. ■

Пример 2. ▲ Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Областью определения этой функции является множество $D(f) = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$, т.е.функция не определена только в точке $x = 2$. Если значения x хотя бы не намного отличаются от 2, то знаменатель дроби $\dfrac{x^4-4}{x-2}$ не равен нулю и эта дробь имеет смысл. Поэтому можно рассматривать порядок изменения этой функции во всех точках $x \neq 2$. В следующей таблице указан порядок изменения значений данной функции около точки $x = 2$:

x	1,97	1,98	1,99	2	2,01	2,02	2,03
$\dfrac{x^2-4}{x-2}$	3,97	3,98	3,99	Функция не определена	4,01	4,02	4,03

Отсюда видно, что по мере приближения значений x к 2 (справа или слева) соответствующие значения функции приближаются к 4. Теперь этот факт установим математическим путем. Другими словами, покажем, что, подбирая значения x в достаточно малой окрестности точки 2, значения разности $\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|$ можно сделать меньше, чем любого, наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Действительно, если $x \neq 2$ и так как $\frac{x^2-4}{x-2} - 4 = x + 2 - 4 = x - 2$, то неравенство

$$\left|\frac{x^4-4}{x+2}-4\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

можно записать в виде

$$|x-2| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Отсюда видно, что если значения x удовлетворяют неравенству (2) (при этом $x \neq 2$), то соответствующие значения функции $f(x)$ также удовлетворяют неравенству (1), т.е. если значения x стремятся к 2, то соответствующие значения функции $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ приближаются к 4. В таких случаях, хотя и функция не определена в самой точке $x = 2$, следует считать, что она имеет предел при x стремящемся к 2: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$. Сказанное можно пояснить геометрически с помощью графика функции $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ (рис. 6.1). Отсюда видно, что по мере приближения значений x к 2 ($x \neq 2$) соответствующие значения функции приближаются к 4. ■

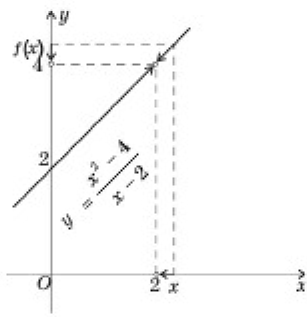


Рис. 6.1

Теперь дадим определение понятию предела функции в точке.

> **Определение.** *Если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется окрестность точки $x = a$, то для любой точки x ($x \neq a$) этой окрестности выполняется неравенство*
>
> $$|f(x) - A| < \varepsilon,$$
>
> *и число A называется* ***пределом функции*** *$f(x)$ в точке $x = a$.*

Это записывают так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и читают: «Предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, равен A».

Итак, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то не обязательно, чтобы функция $f(x)$ была определена в точке $x = a$ (пример 2). В целом, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то число A и значение функции $f(a)$ независимы друг от друга. Во многих случаях выполняется равенство $A = f(a)$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ (пример 1). А иногда может оказаться, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. Поясним это на примере.

Пример 3. ▲ Рассмотрим предел функции

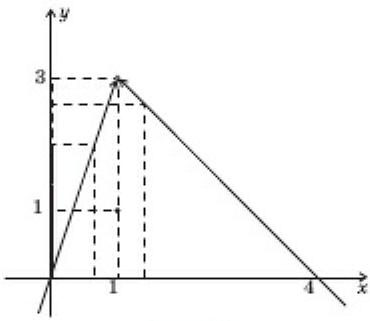


Рис. 6.2

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1, \\ 4 - x, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

в точке $x = 1$. На рис. 6.2 изображен график этой функции. Отсюда видно, что по мере приближения аргумента x к 1 соответствующие значения функции неограниченно приближаются к 3, т.е. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$. А так как $f(1) = 1$, то $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$. ■

6.1.2. Основные свойства предела функции

Предел функции обладает следующими свойствами.

1°. *Предел постоянной равен самой постоянной:* $\lim\limits_{x\to a} C = C$.

2°. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:* $\lim\limits_{x\to a}\left[k \cdot f(x)\right] = k \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

3°. *Если слагаемые имеют предел, то предел суммы равен сумме пределов:* $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) + g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

4°. *Если сомножители имеют предел, то предел произведения равен произведению пределов:* $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

5°. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел в точке $x = a$, причем* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел частного равен частному пределов:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

▲ В качестве образца докажем свойство 2°. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда по определению для $\forall \varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для $\forall x$, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - a| < \delta$, верно неравенство $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Поэтому $|(f(x) + g(x)) - (A + B)| \leqslant |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Следовательно, по определению $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = A + B = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$. ■

Работа в группе

Докажите свойства 1°, 3°, 4°, опираясь на доказательство свойства 2°.

Рассмотрим $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Если здесь выполняются равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(g) = 0$, то этот предел называется неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. А если выполняются равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, то данный предел называется неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Рассмотрим примеры нахождения пределов.

Пример 4. Найдем $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2}{x^3 - x + 1}$.

▲ Знаменатель дроби $x^3 - x + 1$ под знаком предела не равен нулю при $x = 2$. Поэтому выражение $\frac{x^2}{x^3 - x + 1}$ при $x = 2$ определено. Следовательно, по теореме 5

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x^3 - x + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} x^2}{\lim\limits_{x \to 2}\left(x^3 - x + 1\right)} = \frac{2^2}{2^3 - 2 + 1} = \frac{4}{7}. \ ■$$

Пример 5. Найдем $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 8x + 7}$.

▲ Здесь сразу применить теорему 5 не получится, т.к. при $x = 1$ выражение $x^2 - 8x + 7 = 1 - 8 + 7 = 0$. В таких случаях нужно предварительно преобразовать выражение, содержащееся под знаком предела. Так как $x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7)$ и $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$, то при $x \neq 1$ имеет место равенство $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 8x + 7} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-7)} = \frac{x - 4}{x - 7}$.

Поэтому $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 8x + 7} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 4}{x - 7} = \frac{1 - 4}{1 - 7} = \frac{3}{6} = 0,5$. ■

Пример 6. Найдем $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+10x-12}{x^3-2x^2-2x-3}$.

▲ Так же, как и в примере 5, знаменатель и числитель дроби под знаком предела равны 0 при $x = 3$. Поэтому так же, как и в предыдущем примере, предварительно нужно упростить дробь, разложив числитель и знаменатель на множители. Для этого по схеме Горнера эти многочлены нужно разделить на двучлен $x - 3$:

	1	−5	10	−12
$a = 3$	1	−2	4	0

	1	−2	−2	−3
$a = 3$	1	1	1	0

Отсюда $x^3 - 5x^2 + 10x - 12 = (x - 3)(x^2 - 2x + 4)$ и $x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x^2 + x + 1)$.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+10x-12}{x^3-2x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2-2x+4)}{(x-3)(x^2+x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+4}{x^2+x+1} = \frac{9-6+4}{9+3+1} = \frac{7}{13}. \ ■$$

Пример 7. Найдем $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$.

▲ При $x = -2$ и числитель, и знаменатель дроби равны нулю.

Чтобы избавиться от неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, и числитель, и знаменатель дроби умножим на сопряженное выражение знаменателя, т.е. на выражение $\sqrt{x+3}+1$:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}{\left(\sqrt{x+3}-1\right)\left(\sqrt{x+3}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}{x+2} = \lim_{x\to -2}\left(\sqrt{x+3}+1\right) = 2. \ ■$$

6.1.3. Предел функции на бесконечности

До сих пор мы рассматривали пределы функции в конечных точках, т.е. рассматривали выражение $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ в точках a, для которых $|a| < +\infty$. Если функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой, то есть смысл рассматривать предел этой функции при $x\to+\infty$ (или при $x\to-\infty$).

Определение. *Если функция $y = f(x)$ определена на множестве $(-\infty; +\infty)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $k > 0$, такое, что при всех $x > k$ (или $x < -k$) выполняется неравенство*

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \qquad (3)$$

то число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (соответственно при $x \to -\infty$) и его записывают так:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \ (\text{или } \lim_{x\to-\infty} f(x) = A). \qquad (4)$$

Предел, определяемый равенством (4), называют ***пределом функции*** $f(x)$ на бесконечности. Для пределов функции на бесконечности выполняются все теоремы 2–5 из п. 6.1.2.

Пример 8. Докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{5x+3} = \dfrac{2}{5}$.

▲ Рассмотрим модуль разности

$$|f(x) - A| = \left|\frac{2x-1}{5x+3} - \frac{2}{5}\right| = \left|\frac{-11}{5(5x+3)}\right| = \frac{11}{5(5x+3)}.$$

Так как при $x \to +\infty \Rightarrow 5x + 3 \to +\infty$, то $\dfrac{11}{5(5x+3)} \to 0$. Следовательно, при достаточно больших $x > k > 0$ модуль разности $\left|\dfrac{2x-1}{5x+3} - \dfrac{2}{5}\right|$ может принимать значение, меньшее, чем любое наперед заданное число $\varepsilon > 0$. Следовательно, число $\dfrac{2}{5}$ является пределом функции $\dfrac{2x-1}{5x+3}$ при $x \to +\infty$. ■

Примечание. Этот предел можно найти, используя равенство $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{5x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{5 + \frac{3}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 5 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x}} = \frac{2-0}{5+0} = \frac{2}{5}.$$

Пример 9. Найдем предел $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - 2x}{1 + 10x - 4x^2}$.

▲ $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x}{1+10x-4x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{10}{x} - 4} = \frac{1-0}{0+0-4} = -\frac{1}{4}.$$ ■

6.1.4. Асимптоты функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $(a; c) \cup (c; b)$. Хотя функция не определена в точке $x = c$, все же в этой точке можно рассматривать предел этой функции. Пределы $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \in (a;\, c)}} f(x)$ и $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \in (c;\, b)}} f(x)$ называются ***односторонними пределами*** функции $y = f(x)$ в точке $x = c$, а именно первый предел называется ***левым пределом*** функции $y = f(x)$ в точке $x = c$ и второй предел – ***правым пределом*** этой функции в точке $x = c$. Их соответственно записывают так:

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c-0) \text{ и } \lim_{x \to c+0} f(x) = f(c+0).$$

Например, рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } x < 1, \\ 2, & \text{если } x = 1, \\ 3-2x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Для этой функции $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 1$ и $f(1) = 2$ (рис. 6.3).

Односторонние пределы тесно связаны с понятием асимптоты функции. В целом различают три вида асимптот функции: вертикальная асимптота, горизонтальная асимптота и наклонная асимптота.

Определение. 1) *Если функция $y = f(x)$ определена на множестве $[a;\, c) \cup (c;\, b]$ и выполняется по крайней мере одно из соотношений $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = \pm\infty$ и $\lim\limits_{x \to c+0} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = c$ называется* ***вертикальной асимптотой*** *этой функции.*

2) *Если для функции $y = f(x)$ выполняется хотя бы одно из соотношений $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, то прямая $y = b$ называется* ***горизонтальной асимптотой*** *данной функции.*

3) *Если для функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ выполняется хотя бы одно из соотношений $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - (kx+b)\right) = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) -$*

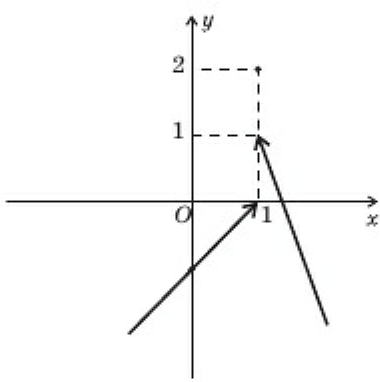


Рис. 6.3

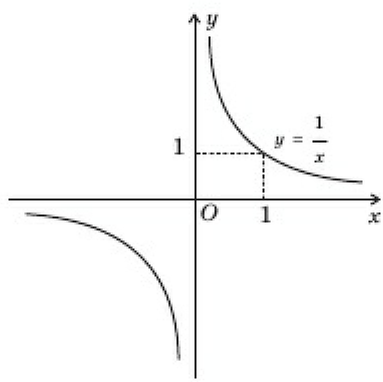


Рис. 6.4

$-(kx+b)\big)=0$, *то прямая* $y = kx + b$ *называется* ***наклонной асимптотой*** *этой функции.*

Например, функция $y=\dfrac{1}{x}$ имеет вертикальную и горизонтальную асимптоты. Так как $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{x}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, то ось ординат $x = 0$ является вертикальной асимптотой. Поскольку $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$, то прямая $y = 0$ (ось абсцисс) является горизонтальной асимптотой функции $y=\dfrac{1}{x}$ (рис. 6.4).

Для того чтобы определить наклонную асимптоту $y = kx + b$, используют формулы

$$k=\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to -\infty}\left[f(x)-kx\right], \tag{5}$$

$$k=\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to +\infty}\left[f(x)-kx\right]. \tag{6}$$

Если наклонная асимптота определена с помощью формулы (5), то она является асимптотой при $x\to-\infty$, а если она определена с помощью формулы (6), то она является асимптотой функции $y = f(x)$ при $x\to+\infty$.

Пример 10. Найдем асимптоты функции $y=x+\dfrac{1}{x-1}-2$.

▲ Так как $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(x+\dfrac{1}{x-1}-2\right)=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(x+\dfrac{1}{x-1}-2\right)=+\infty$, то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой данной функции.

$$k=\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x(x-1)}-\frac{2}{x}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to -\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to -\infty}\left[x+\frac{1}{x-1}-2-x\right]=-2,$$

т.е. прямая $y = x - 2$ является наклонной асимптотой этой функции при $x\to-\infty$ (на $-\infty$). Так как $k=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{2}{x}\right)=1$,

$$b=\lim_{x\to +\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to +\infty}\left(x+\frac{1}{x-1}-2-x\right)=-2,$$

то прямая $y = x - 2$ также является наклонной асимптотой данной функции при $x\to+\infty$ (на $+\infty$) (рис. 6.5). ■

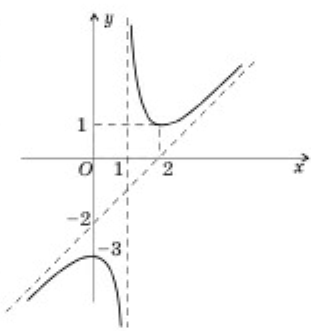


Рис. 6.5

В целом асимптоты функции намного облегчают построение графика этой функции. При $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$) по определению график функции неограниченно приближается к асимптотам, не касаясь их.

6.1.5. Первый замечательный предел

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Эта функция не определена в точке $x = 0$ (рис. 6.6). Тем не менее предел этой функции при $x \to 0$ существует:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{7}$$

Этот предел называют ***первым замечательным пределом***. Теперь докажем эту формулу.

▲ На единичном тригонометрическом круге отметим центральный угол AOB радианной меры x, $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ (рис. 6.7.). Пусть $AD \perp AO$, $AO = BO = 1$. Тогда, сравнивая площади треугольников AOB, AOD и площадь сектора AOB, получим неравенство $S_{\Delta AOB} <$ $< S_{сек.\ AOB} < S_{\Delta AOD}$. Так как

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x,$$

$$S_{сек.\ AOB} = \frac{1}{2} AO^2 \cdot x = \frac{1}{2} x,$$

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot AD = \frac{1}{2} AO \cdot AO \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

то получим неравенство $\dfrac{1}{2}\sin x < \dfrac{1}{2} x < \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$ или $\sin x <$ $< x < \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Поскольку $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ и $\sin x > 0$, то, разделив пос-

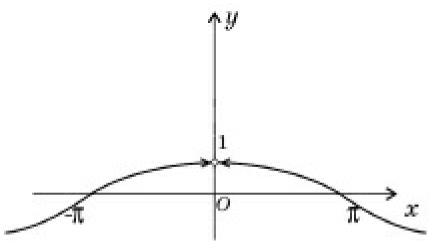


Рис. 6.6

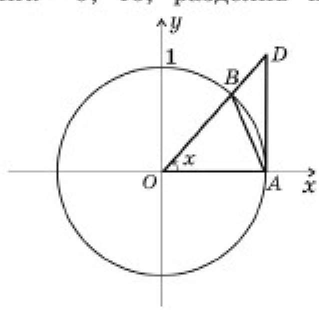


Рис. 6.7

леднее неравенство на $\sin x$, получим неравенство $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ или для обратных величин неравенство $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$. Так как функции $\cos x$ и $\dfrac{\sin x}{x}$ – четные функции, то данное неравенство верно и при $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$. Т.е. при любых x, удовлетворяющих неравенствам $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ и $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, верно неравенство $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. ■

Пример 11. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

$$▲\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3x} = \left|\begin{matrix} 3x = t \\ x\to 0 \\ t\to 0\end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0} 3\frac{\sin t}{t} = 3\cdot 1 = 3.\ ■$$

Пример 12. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

$$▲\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{4}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}.\ ■$$

Пример 13. Определим значение предела $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi - 2x}$.

$$▲\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi - 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)}{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \left|\begin{matrix} \frac{\pi}{2} - x = t \\ x\to\frac{\pi}{2} \\ t\to 0\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}.\ ■$$

1. Дайте определение предела функции в точке. Поясните смысл этого определения.
2. Сформулируйте основные свойства предела функции в точке и докажите их.
3. Как вы понимаете предел функции на бесконечности?
4. Что такое односторонний предел функции в точке?
5. Какие виды асимптот функции вы знаете и как их определяют? Может ли функция не иметь каких-либо асимптот?
6. Напишите первый замечательный предел и докажите его.

Упражнения

A

6.1. Докажите равенство, используя определение предела функции в точке:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$;
2) $\lim\limits_{x\to 1}(4x-3)=1$;
3) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+5)=7$;
4) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5)=-1$;
5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$;
6) $\lim\limits_{x\to 1,5}\dfrac{4x^2-9}{2x-3}=6$.

В упражнениях **6.2–6.5** найдите пределы.

6.2. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{x^2}$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x^2-1}$;
3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}+3}{x^2+1}$;
4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2-x}{1-\sqrt{x+1}}$.

6.3. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$;
2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2-1}$;
3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-2x^2}$.

6.4. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin x}$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{x}$.

6.5. 1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-1}{3-2x}$;
2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}$;
3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;
4) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}}$.

6.6. Для заданной функции $y = f(x)$ найдите значения односторонних пределов $f(a - 0)$, $f(a + 0)$ в указанной точке $x = a$ и сравните их со значением $f(a)$:

1) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $a = 1$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, $a = -3$.

6.7. Покажите, что при $x \to 1$ функция $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < 1, \\ x - 1, & \text{если } x \geqslant 1 \end{cases}$ не имеет предела. Найдите односторонние пределы $f(1 - 0)$, $f(1 + 0)$ и сравните их с $f(1)$.

6.8. Найдите вертикальные и горизонтальные асимптоты функции:

1) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 1}$; 2) $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x - 4}$; 3) $f(x) = \dfrac{5}{x + 2} - 3$.

6.9. Найдите вертикальные и наклонные асимптоты функции:

1) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x + 1}$.

B

6.10. Покажите, что данная функция не имеет предела при $x \to 2$. Найдите значения $f(2 - 0)$, $f(2 + 0)$ и $f(2)$:

1) $f(x) = [x]$; 2) $f(x) = \{x\}$. Какой вывод можно сделать?

В упражнениях **6.11–6.19** найдите пределы.

6.11. 1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$; 2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4}$;

3) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{5x^2 + 12x + 4}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0,5} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 15x + 7,25}$.

6.12. 1) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + 3x + 2}$; 2) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{6x^2 - 5x + 1}{27x^3 - 1}$;

3) $\lim\limits_{x \to 1,5} \dfrac{8x^3 - 36x^2 + 54x - 27}{4x^2 - 12x + 9}$; 4) $\lim\limits_{x \to -0,5} \dfrac{4x^3 - 8x^2 + 5x - 1}{4x^3 - 3x + 1}$.

6.13. 1) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$; 2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$;

3) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^3 - 8}$; 4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

6.14. 1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$;

3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$; 4) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

6.15. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x}-3x}{3\sqrt{x}-2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x\sqrt{x}-5\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

6.16. 1) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-5x+6}$; 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2+5x-1}{5x^2-12x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+10}{25-5x-3x^2}$.

6.17. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

6.18. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\operatorname{tg} ax}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 4x}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 6x}{10x}$.

6.19. 1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{x-\dfrac{\pi}{3}}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}{4x+\pi}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

C

6.20. Докажите равенство $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\dfrac{m}{n}$, $(m,\ n\in N)$.

6.21. Докажите формулу $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

6.22. Найдите все асимптоты функции и схематически постройте ее график:

1) $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$; 2) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$; 3) $y=2x-\dfrac{4}{x+2}-3$;

4) $y=\dfrac{2x}{3-x}+4$; 5) $y=3x-\dfrac{1}{x}$; 6) $y=\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$.

6.23. Найдите односторонние пределы функции в точке $x = 1$ и сравните их со значением $f(1)$:

1) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{если } x>1,\\ 2x-1, & \text{если } x\leqslant 1;\end{cases}$ 2) $g(x)=\begin{cases}2, & \text{если } x>1,\\ -2, & \text{если } x\leqslant 1.\end{cases}$

6.24. Докажите, что для существования предела функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ необходимо и достаточно выполнение равенства $f(a-0) = f(a+0)$. Здесь функция $f(x)$ определена на множестве $[c;\ a)\cup(a;\ b]$.

6.25. Найдите предел:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin^3 x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{3x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2\alpha}{x^2-\alpha^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

6.26. Найдите предел:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{1+\cos x}-1}$.

Упражнения для повторения

6.27. Найдите область определения функции:

1) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{18x^2-3x-1}}$; 2) $g(x)=\sqrt{(x+3)(11-x)}$.

6.28. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg}^4\varphi[8\cos^2(\pi-\varphi)-\cos(\pi+4\varphi)-1]$; 2) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}-\dfrac{2\cos 2\alpha}{1+\sin(2\alpha+1{,}5\pi)}$.

6.29. Постройте график уравнения:

1) $4x^2-3y=0$; 2) $x^2+y^2=25$.

6.2. Предел числовой последовательности

6.2.1. Понятие числовой последовательности

Задана числовая функция $f(x)$, определенная во множестве натуральных чисел N. Тогда множество ее значений записывается так:

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots \qquad (1)$$

Это множество принято называть ***числовой последовательностью***. Во многих случаях члены этой последовательности обозначают следующим образом:

$$a_1 = f(1),\ a_2 = f(2),\ a_3 = f(3),\ \ldots,\ a_n = f(n),\ \ldots$$

Тогда последовательность (1) записывается в виде

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \qquad (2)$$

Последовательности (1) и (2) вкратце записывают так: $\{f(n)\}$ $\{a_n\}$ соответственно.

Здесь a_n и $f(n)$ называются общим членом последовательности. Например, в области определения функции: 1) $y = x$; 2) $y = 3^x$; 3) $y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$; 4) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ содержится множество натуральных чисел N. Поэтому сужения этих функций на множестве натуральных чисел N задают следующие числовые последовательности: 1) 1, 2, 3, …, n, …; 2) 3, 9, 27, …, 3^n, …; 3) 1, 0, –1, 0, 1, …; 4) 0, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$, …, $\sqrt{n^2 - 1}$, … .

Наиболее удобным способом задания числовой последовательности является задание формулы ее общего члена. Например, последовательности 1) – 4) могут быть определены следующими формулами общего члена: 1) $a_n = n$; 2) $a_n = 3^n$; 3) $a_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$; 4) $a_n = \sqrt{n^2 - 1}$.

Иногда последовательности задаются рекуррентными соотношениями, т.е. формулами, выражающими a_n через ее предыдущие члены. Например, последовательность чисел Фибоначчи задается рекуррентной формулой $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n > 2$ и $a_1 = a_2 = 1$.

Наряду с этим, числовая последовательность может быть задана словесным описанием ее членов. Например, десятичные приближения числа π по недостатку записываются так: 3; 3,1; 3,14; 3,141; … .

Так как числовую последовательность можно рассматривать как значения функции, определенной во множестве натуральных чисел, то для них, аналогично функциям, можно определить такие понятия, как монотонность и ограниченность.

6.2.2. Предел числовой последовательности

Сначала рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. ▲ Пусть задана последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1},$ … . Ее общий член имеет вид $a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Отсюда видно, что по мере возрастания номера n модуль разности a_n и единицы, равный $\frac{1}{n+1}$, убывает и приближается к 0. Например, если $n > 99$, то $|a_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} = 0{,}01$, а если $n > 999$, то $|a_n - 1| < 0{,}001$ и т.д., т.е. по мере возрастания номера n члены последовательности $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ неограниченно приближаются к 1. ■

Пример 2. ▲ Выпишем несколько членов последовательности $\left\{\frac{\sin n\pi}{n}\right\}$: $1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7}, \ldots$. Отсюда видно, что члены последовательности то больше нуля, то равны нулю, то меньше нуля. По мере возрастания номера n члены последовательности приближаются к нулю. ■

Пример 3. ▲ Рассмотрим последовательность 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; …, члены которой являются десятичными приближениями числа $\sqrt{2}$ по недостатку. Нам хорошо известно, что члены этой последовательности по мере возрастания n неограниченно приближаются к $\sqrt{2}$. ■

Во всех рассмотренных примерах члены последовательности $\{a_n\}$ по мере возрастания номера n приближаются к некоторому числу a. Число a в этом случае называют ***пределом*** соответствующей последовательности. Теперь приведем строгое определение понятия предела последовательности.

Определение. *Если для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ можно найти такой номер n_0, что при любом натуральном n, удовлетворяющем неравенству $n > n_0$, выполняется неравенство*

$$|a_n - a| < \varepsilon, \qquad (1)$$

*то число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$. Это записывают так: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.*

Например, предел последовательности $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ из примера 1 равен 1, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$, предел последовательности $\left\{\frac{\sin n\pi}{n}\right\}$ из примера 2 равен 0, а предел последовательности из примера 3 равен $\sqrt{2}$.

Теперь поясним смысл неравенства (1). Это неравенство равносильно двойному неравенству вида $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ или неравенству

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon. \qquad (2)$$

Итак, по определению для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что при всех $n > n_0$ справедливо двойное неравенство (2). Другими словами, все члены последовательности $\{a_n\}$, начиная с a_{n_0+1}, лежат на промежутке $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, а за пределами этого промежутка может находиться лишь конечное число элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, т.е. каким бы малым ни было число $\varepsilon > 0$, для него найдется такой номер n_0, что все бесконечное множество членов последовательности $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$ лежит на промежутке $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Например, если для последовательности $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ взять число $\varepsilon = 0{,}1$, то неравенство $\left|\frac{n}{n+1}-1\right| < 0{,}1$ или неравенство $\left|\frac{1}{n+1}\right| < 0{,}1$ выполняется для любого $n > 10$. Следовательно, все члены этой последовательности, начиная с 11-го, принадлежат промежутку $(0{,}9; 1{,}1)$ (рис. 6.8). В этом случае (т.е. при $\varepsilon = 0{,}1$) $n_0 = 10$. Если в этом примере считать, что $\varepsilon = 0{,}01$, то, начиная со 101-го номера, все члены этой последовательности лежат на промежутке $(0{,}99; 1{,}01)$ и т.д.

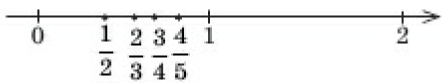


Рис. 6.8

Ошибочно думать, что всякая последовательность имеет предел. Встречаются последовательности, не имеющие предела. Например, последовательности $\{2n-1\}$ и $\{1+(-1)^n\}$ не имеют предела. Первая из этих последовательностей не ограничена, и поэтому ее члены не могут приближаться к некоторому числу. Вторая последовательность, невзирая на ее ограниченность, не имеет предела. Так как все члены этой последовательности равны либо 0, либо 2, причем количество ее членов, равных 0, 2, бесконечно больше. Поэтому при $\varepsilon < 1$ невозможно найти интервал $(a - 1; a + 1)$, где было бы сосредоточено множество членов этой последовательности, а за ее пределами находилось лишь конечное число членов данной последовательности.

Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то ее называют ***сходящейся***, а если она не имеет предела, то ее называют ***расходящейся***. Например, все неограниченные последовательности являются расходящимися.

Если функция $f(x)$ ***монотонная*** (возрастающая или убывающая), то соответствующая ***числовая последовательность*** $\{f(n)\}$ также монотонная (возрастает или убывает соответственно). Если функция $f(x)$ ограниченная (ограничена сверху, ограничена снизу), то соответствующая последовательность $\{f(n)\}$ также ограничена (ограничена сверху, ограничена снизу соответственно).

Например, 1) последовательность $\left\{\dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}$ монотонно убывающая и ограниченная:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{2^2} > \ldots > \frac{1}{2^{n-1}} > \ldots \text{ и } 0 < \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 1;$$

2) последовательность 1, 3, 5, ..., $2n-1$, ... монотонно возрастает, ограничена снизу, но не ограничена сверху, поэтому не ограничена.

Нас более всего интересует вопрос о существовании предела заданной последовательности. Это очень сложный вопрос, и в некоторых частных случаях ответ можно найти в следующей теореме К. Вейерштрасса.

Теорема 1. *Каждая монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел.*

Каждая монотонно убывающая и ограниченная снизу последовательность имеет предел.

Эту теорему примем без доказательства и ее смысл поясним на примерах. Например, последовательность $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ монотонно возрастающая, и каждый ее член не превышает 1, т.е. последовательность ограничена сверху. Тогда по теореме Вейерштрасса она имеет предел, т.е. является сходящейся. А последовательность $b_n = \dfrac{2n+3}{n^2}$ является убывающей и ограничена снизу. Поэтому и эта последовательность имеет предел. Числовая последовательность $c_n = n^2$, хотя и является монотонно возрастающей (1, 4, 9, 16, ...), не ограничена сверху. Члены этой последовательности, по мере возрастания их номера, бесконечно возрастают, и тем самым последовательность $\{c_n\}$ не имеет предела.

Если для любого числа $M > 0$ найдется такой номер n_0, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $a_n > M$, то члены последовательности $\{a_n\}$ называют ***бесконечно большими положительными величинами*** и обозначают так: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Аналогично, если для любого числа $M > 0$ найдется такой номер n_0, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $a_n < -M$, то члены последовательности $\{a_n\}$ называют ***бесконечно большими отрицательными величинами*** и записывают так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Например, $c_n = n^2$ является бесконечно большой положительной величиной: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, а $a_n = 2 - n$ есть бесконечно большая отрицательная величина: $\lim\limits_{n\to-\infty}(2-n) = -\infty$.

Если предел последовательности $\{a_n\}$ равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то a_n называют ***бесконечно малой величиной***. Например, члены последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ являются ***бесконечно малыми величинами***, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Существует тесная связь между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами.

Теорема 2. *Если a_n – бесконечно большая величина (положительная или отрицательная), то выражение $\frac{1}{a_n}$ является бесконечно малой величиной. Обратно, если b_n – бесконечно малая величина, то выражение $\frac{1}{b_n}$ является бесконечно большой величиной.*

▲ Для определенности предположим, что a_n является бесконечно большой положительной величиной. Тогда по определению для любого числа $M > 0$ найдется такой номер n_0, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $a_n > M$. Тогда для их обратных величин верно неравенство $0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{M}$, т.е., начиная с номера n_0, любой член последовательности $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ становится меньше числа $\frac{1}{M}$. Так как $M > 0$ – любое число, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$, т.е. $\frac{1}{a_n}$ – бесконечно малая величина. ■ Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Теорема 3. *Общий член любой последовательности, имеющей предел, можно представить в виде суммы ее предела и некоторой бесконечно малой величины.*

▲ Пусть последовательность $\{a_n\}$ имеет предел: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Тогда, по определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, что при всех $n > n_0$ верно неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Если ввести обозначение $\alpha_n = a_n - a$, то для любого $n > n_0$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, т.е. α_n – бесконечно малая величина. С другой стороны, $a_n = a + \alpha_n$, что и требовалось доказать. ■

Пример 4. ▲ Рассмотрим последовательность $\frac{n+1}{n}$. Так как $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ и $\alpha_n = \frac{1}{n}$ – бесконечно малая величина, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. ■

6.2.3. Основные теоремы о пределах последовательности

Рассмотрим основные свойства предела.

1°. *Предел постоянной равен этой постоянной:* $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

2°. *Предел суммы равен сумме пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3°. *Предел произведения равен произведению пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

4°. *Если знаменатель не равен нулю, то предел частного равен частному пределов:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Следствие. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:* $\lim\limits_{n\to\infty}(C \cdot a_n) = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Примечание. В этих свойствах имеется в виду, что рассматриваемые пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существуют. Если хотя бы один из указанных пределов не существует, то свойства 2°–4° не выполняются.

▲ 1°. Здесь постоянную C нужно рассматривать как член постоянной последовательности: $C, C, C, \ldots, C, \ldots$, т.е. $a_n = C$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$. ■

2°. ▲ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда по теореме 4 найдутся такие бесконечно малые величины α_n и β_n и соответственно имеют место равенства $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$.

Отсюда $a_n + b_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n)$. Так как $(\alpha_n + \beta_n)$ является бесконечно малой величиной, то

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n. \ ■$$

3°. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то найдутся такие бесконечно малые величины α_n и β_n, что $a_n = a + \alpha_n$ и $b_n = b + \beta_n$. Тогда $a_n \cdot b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = a \cdot b + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$. Так как $(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$ является бесконечно малой величиной, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. ■

Докажите самостоятельно

Свойство 4° доказывается аналогично, а следствие следует из свойств 1° и 3°.

Примечание. Доказанные свойства справедливы и для нескольких слагаемых и сомножителей. Их нетрудно доказать методом математической индукции.

Пример 5. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - n - 5}{3n^2 + n + 5}$.

▲ Разумеется, нельзя сразу применять свойство о пределах отношения 4°, так как и числитель, и знаменатель отношения $\dfrac{2n^2 - n - 5}{3n^2 + n + 5}$ есть бесконечно большие величины. Поэтому сначала преобразуем это выражение. Для этого и числитель, и знаменатель этой дроби делят на наибольшую степень n:

$$\frac{2n^2 - n - 5}{3n^2 + n + 5} = \frac{2 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}.$$

Теперь используем свойства 2° и 4°:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - n - 5}{3n^2 + n + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}} = \frac{2 - 0 - 0}{3 + 0 + 0} = \frac{2}{3}. \ ■$$

Рассмотрим еще одно, часто используемое свойство предела. ***Если существует предел*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ***то верно равенство*** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$. В общем виде это свойство называется правилом перехода в предел под знаком непрерывной функции и формулируется так. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, a_n, $a \in D(f)$ и функция $y = f(x)$ непрерывна, то верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$. Это свойство следует из свойств непрерывной функции, которые будут рассмотрены в следующем параграфе.

Приведем еще одно свойство ограниченной последовательности $\{a_n\}$ $(A \leqslant a_n \leqslant B)$, доказательство которого выходит за рамки школьного курса математики. Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Поясним смысл этого утверждения на примерах. Так, например, последовательность $x_n = 2 + (-1)^n$ ограничена $(1 \leqslant x_n \leqslant 3)$. Она записывается так: 1, 3, 1, 3, ... и не имеет предела. Но ее подпоследовательность 1, 1, 1, ..., 1, ... является сходящейся, как стационарная (постоянная) последовательность, ее предел равен 1. Последовательность $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$ также является ограниченной, и ее подпоследовательности $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ и $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ являются сходящимися.

Пример 6. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{\sqrt{n^2-4}}$.

▲ Разделив и числитель, и знаменатель на n, получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{\sqrt{n^2-4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}} = \frac{2-0}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)}} = \frac{2-0}{\sqrt{1-0}} = 2.$$ ■

Пример 7. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+1}-\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

▲ Сначала преобразуем выражение под знаком предела:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+1}-\sqrt{n^2+n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2-3n+1}-\sqrt{n^2+n+1}\right)\left(\sqrt{n^2-3n+1}+\sqrt{n^2+n+1}\right)}{\sqrt{n^2-3n+1}+\sqrt{n^2+n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2-3n+1\right)-\left(n^2+n+1\right)}{\sqrt{n^2-3n+1}+\sqrt{n^2+n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-4n}{\sqrt{n^2-3n+1}+\sqrt{n^2+n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to-\infty} \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{-4}{\sqrt{1-0+0}+\sqrt{1+0+0}} = \frac{-4}{2} = -2.$$

1. Что такое числовая последовательность? Назовите способы ее задания. Как обозначаются последовательности?
2. Какая последовательность называется: а) ограниченной сверху; б) ограниченной снизу; в) ограниченной; г) монотонно возрастающей; д) монотонно убывающей?
3. Сформулируйте определение предела числовой последовательности. Разъясните его смысл.
4. Сколько пределов может иметь сходящаяся последовательность?
5. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности и поясните ее смысл.
6. Какие последовательности называются бесконечно большими (положительными или отрицательными) величинами и бесконечно малыми величинами? Какова связь между ними?
7. Сформулируйте основные свойства предела и докажите их.

Упражнения

А

6.30. Напишите первые пять членов последовательности $\{a_n\}$:

1) $a_n = 9$; 2) $a_n = \dfrac{n^2-4}{n}$; 3) $a_n = \dfrac{2n-1}{n!}$;

4) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{5n-7}$; 5) $a_n = 2^n + (-2)^n$; 6) $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$.

6.31. Выпишите первые пять членов последовательности $\{r_n\}$, заданной рекуррентной формулой:

1) $r_1 = 9,\ r_{n+1} = 0{,}1 \cdot r_n + 10$; 2) $r_1 = -3,\ r_{n+1} = 9 - 2r_n$;
3) $r_1 = 5,\ r_{n+1} = (-1)^n \cdot r_n - 8$; 4) $r_1 = r_2 = 1,\ r_{n+2} = r_{n+1} + r_n$.

6.32. Напишите первые пять членов последовательности натуральных чисел: 1) кратных 4; 2) кратных 3; 3) при делении которых на 5 в остатке получается 3; 4) кратных 3 и 5.

6.33. Напишите общий член последовательности:

1) 4, 16, 36, 64, 100, ...; 2) 1, 2, 6, 24, 120, ...;

3) $1, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{6}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{6}{10}, \ldots$; 4) $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, -\dfrac{5}{6}, \ldots$;

5) 2, −2, 2, −2, 2, ...; 6) 3, 1, 3, 1, 3, ...

6.34. Последовательность $\{b_n\}$ задана формулой общего члена: $b_n = 10n^2 + 4$. Запишите b_{k+4}.

6.35. Покажите, что число -21 является членом последовательности $c_n = n^2 - 10n$, и найдите его номер.

6.36. Напишите формулу общего члена последовательностей, заданных в задаче **6.32**.

6.37. Является ли последовательность возрастающей (убывающей):
1) $a_n = -9n^2 + 10n + 25$; 2) $b_n = n^2 + 2n - 3$; 3) $u_n = 3^n - 2^n$;

5) $x_n = \dfrac{3n+4}{n+2}$; 4) $c_n = \dfrac{n}{n^2+1}$; 6) $y_n = \dfrac{2n+9}{n+3}$?

6.38. Является ли последовательность монотонной:

1) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $b_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$;

3) $c_n = \sqrt{n^2+n} - n$; 4) $x_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$?

6.39. Является ли последовательность ограниченной:

1) $12n - 5$; 2) $\dfrac{1}{2n}$; 3) $(-1)^n\sqrt{n}$;

4) $\dfrac{n+3n^2}{n}$; 5) $\dfrac{n+\cos n}{2n+1}$; 6) $\dfrac{n^2}{100n+1}$?

6.40. Приведите пример последовательности: 1) ограниченной сверху, но не ограниченной снизу; 2) ограниченной снизу, но не ограниченной сверху; 3) неограниченной ни сверху, ни снизу; 4) ограниченной, но не имеющей предела; 5) возрастающей; 6) убывающей.

B

6.41. Найдите отрезок $[a; b]$ такой, чтобы в нем лежали все члены последовательности $a_n = \dfrac{5+4n}{2+n}$.

6.42. Последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ заданы рекуррентными формулами $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 0{,}1 \cdot a_n + 14$; $b_1 = 5$, $b_{n+1} = b_n + 4$; $c_1 = 5$, $c_{n+1} = -3c_n$. Какая из этих последовательностей образует: 1) арифметическую прогрессию; 2) геометрическую прогрессию?

6.43. При каких значениях a и b последовательность $y_n = \dfrac{an+2}{bn+1}$

является: 1) возрастающей; 2) убывающей; 3) неубывающей; 4) невозрастающей?

6.44. При каких значениях n для последовательности $x_n = \dfrac{2n-3}{n}$ выполняется неравенство: 1) $|x_n - 2| < 0{,}1$; 2) $|x_n - 2| < 0{,}01$?

6.45. При каких значениях n для последовательности $u_n = \dfrac{3n+5}{2n+1}$ выполняется неравенство: 1) $|u_n - 1{,}5| < 0{,}1$; 2) $|u_n - 1{,}5| < 0{,}01$?

6.46. При каких значениях n члены последовательности $y_n = n^2 - 3n$ удовлетворяют неравенству $y_n < 40$?

6.47 При каких значениях n члены последовательности $u_n = |n^2 - 2n - 3|$ удовлетворяют неравенству $u_n \leqslant 2$?

6.48. Имеет ли последовательность $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ предел?

6.49. Докажите равенство по определению:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+n^2} = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-3n^2}{(2n+1)(n+1)} = -\dfrac{3}{2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{4n+5} = \dfrac{3}{4}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{n-2} = 0$.

В заданиях **6.50–6.54** найдите пределы.

6.50. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+5n}{n-2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+4}{3-2n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-n+2n^2}{2+n-4n^2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n+1}{3+2n-4n^2}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-4n}{16-n^2}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^2-2n}{7n^2-13}$.

6.51. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)(n+5)}{n^2+4}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3(n+1)(3-n)}{4n^2+n-1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n+1}{(3n+1)^2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+n-3}{(2n-1)^3}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3+2n+1}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-1)(1-2n)}{(2n+3)(n-3)}$.

6.52. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+1}-\dfrac{2n^2+3}{3n^2-1}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+5n^2-1}{3n^3-2n^2}-\dfrac{3+5n}{3n-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(-1)^n n}{5n^2+2}\cdot\dfrac{n^2}{2n^2+n-1}\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{5n-1}\cdot\dfrac{2n^2+1}{n^2+4n-1}\right)$.

C

6.53. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

6.54. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+2n-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+n+1}-\sqrt{3n^2+2n-1}}{\sqrt{n^2-1}+2n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-4n-1}\right)$.

6.55. Найдите предел последовательности $x_n=\dfrac{c^n}{1+c^n}$, $c\neq -1$, при $|c|<1$, $|c|>1$ и $c=1$.

6.56. Последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ удовлетворяют условиям $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$. Покажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

Это правило нахождения предела в шутку называют «правилом двух полицейских».

6.57. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентной формулой $x_1=1$, $x_{n+1}=bx_n+1$. При каких значениях b эта последовательность сходится?

6.58. Найдите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+2^{-n}}{2-3^{-n}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^{-n}+3\cdot 5^{-n}}{7+3^{-n}+7^{-n}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5^n}{5^{n+1}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n+4^n}{4^{n+1}+3}$.

Упражнения для повторения

6.59. Упростите выражения:

1) $1+\sin(\pi-\varphi)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\varphi\right)$; 2) $1-\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\varphi\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)$;

3) $1+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}2\beta$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha$.

6.60. Решите неравенство:

1) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}>\dfrac{3}{x+2}$; 2) $\dfrac{x-1}{x+2}>\dfrac{2x-3}{4x+3}$.

6.3. Непрерывность функции

6.3.1. Непрерывность функции в точке и ее свойства

Определение. *Если для функции $y = f(x)$, определенной в окрестности точки $x = x_0$, выполняется равенство*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \qquad (1)$$

*то функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной** в точке $x = x_0$.*

Здесь непрерывность функции в точке $x = x_0$ определена с помощью предела (1). Тогда, опираясь на определение предела функции, данное определение можно переформулировать следующим образом.

Если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, верно неравенство

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon, \qquad (2)$$

*то функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной** в точке $x = x_0$.*

Итак, существует тесная связь между непрерывностью функции в точке $x = x_0$ и ее пределом в этой точке.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то функция в этой точке имеет предел (1). А обратное утверждение не всегда верно. Так как, по определению предела, в точках существования предела сама функция может быть и не определена. Для того чтобы функция была непрерывной в точке x_0, необходимо, чтобы она была определена в этой точке.

Теперь дадим определение понятию непрерывности функции с несколько иной точки зрения. Рассмотрим величину $\Delta x = x - x_0$. Здесь Δx называют ***приращением аргумента*** в точке x_0. Тогда выражение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют ***приращением функции*** $y = f(x)$ в точке x_0. Теперь равенство (1) можно записать в

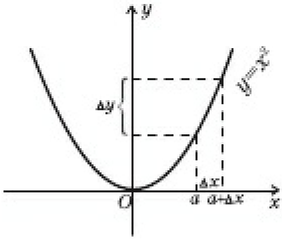


Рис. 6.9

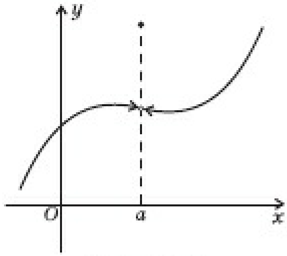


Рис. 6.10

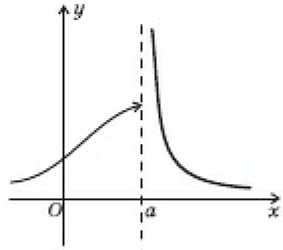


Рис. 6.11

виде $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$. Отсюда, если учесть, что при $x\to x_0$ имеем $\Delta x\to 0$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$ или

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0. \qquad (3)$$

Поэтому непрерывность функции в точке x_0 дополнительно можно определить следующим образом.

Если предел приращения Δy функции $y = f(x)$ в точке x_0 при $\Delta x\to 0$ равен нулю, то функция называется ***непрерывной*** *в точке $x = x_0$.*

Пример 1. Покажем, что функция $y = x^2$ непрерывна в точке $x = a$. Действительно, воспользуемся равенством (3):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left((a+\Delta x)^2-a^2\right)=\lim_{\Delta x\to 0}(2a+\Delta x)\cdot\Delta x=0.$$

Следовательно, данная функция непрерывна в точке $x = a$. Из рис. 6.9 мы можем убедиться в том, что функция $y = x^2$ непрерывна в точке $x = a$. А функции, графики которых изображены на рис. 6.10 и 6.11, не являются непрерывными в точке $x = a$. Если для функции (рис. 6.10) выполняется неравенство $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq f(a)$, то для функции (рис. 6.11) предел $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ вовсе не существует. К тому же, существуют функции, которые не являются непрерывными ни в одной точке области определения. Это функция Дирихле:

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x \text{ – рациональное число,}\\ 0, \text{ если } x \text{ – иррациональное число}\end{cases}$$

Эта функция ни в одной точке числовой оси не имеет предела. К непрерывным функциям можно применять арифметические действия, данные ниже.

Теорема 1. *Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке $x = x_0$, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $f(x) : g(x)$, $(g(x_0)\neq 0)$ также непрерывны в точке $x = x_0$.*

Эта теорема доказывается аналогично соответствующим свойствам 2–5 предела функции (пункт 6.1, подпункт 6.1.2).

6.3.2. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке множества $[a; b]$, то ее называют непрерывной на отрезке $[a; b]$.*

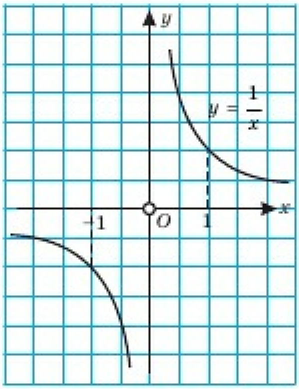


Рис. 6.12

Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом замечательных свойств. Рассмотрим их без доказательства, раскрывая их смысл на примерах.

1. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Здесь важно, чтобы функция была непрерывной на отрезке $[a; b]$. Например, функция $y = \frac{1}{x}$ не ограничена на отрезке $[-1; 1]$ (рис. 6.12), т.к. функция не определена в точке $x = 0$, т.е. в этой точке она разрывная. Также важно рассмотреть отрезок. Например, функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна на промежутке $(0; 1)$, но однако не ограничена в этом интервале, т.к. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$.

2. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то эта функция на отрезке $[a; b]$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений, т.е. существуют точки α, $\beta \in [a; b]$, для которых выполняются равенства*

$$\min_{x \in [a;\, b]} f(x) = f(\alpha) \text{ и } \max_{x \in [a;\, b]} f(x) = f(\beta).$$

Например, функция $y = x^2$ непрерывна на промежутке $(0; 1)$. Однако функция $y = x^2$ не может достичь своего наибольшего и наименьшего значений в этом интервале. Т.к. эта функция на промежутке $(0; 1)$ является возрастающей и удовлетворяет неравенству $0 < x^2 < 1$. А уравнения $x^2 = 0$ или $x^2 = 1$ не имеют корней на промежутке $(0;1)$. Поэтому в теореме важно, что вместо промежутка $(a; b)$ рассматривается отрезок $[a; b]$. Теперь рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$ на отрезке $[-1; 1]$. Эта функция также не достигает своего наибольшего и наименьшего значений на отрезке $[-1; 1]$, так как здесь нарушено условие непрерывности функции на отрезке $[-1; 1]$. Функция $y = \frac{1}{x}$ не определена в точке $x = 0$ (рис. 6.12).

3. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то найдется по меньшей мере одна точка $c \in [a; b]$, в которой $f(c) = 0$.*

Поясним смысл свойства на примерах. Например, на рис. 6.13 видно, что $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$. Тогда на основании данного свойства график функции $y = f(x)$ должен пересечь ось Ox по меньшей мере один раз. В нашем случае график функции $y = f(x)$ пересекает ось Ox три раза. Это означает, что уравнение $f(x) = 0$ имеет три корня. Здесь важно, чтобы функция была непрерывной на отрезке $[a; b]$. Например,

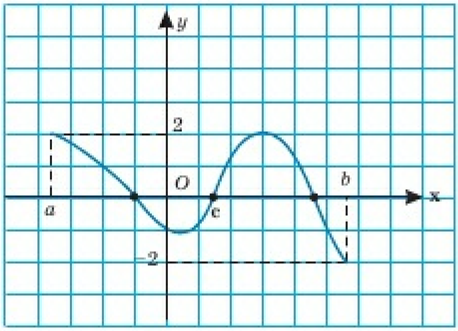


Рис. 6.13

для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на отрезке $[-1; 1]$ имеем $f(-1) = -1$ и $f(1) = 1$ (рис. 6.12). Однако уравнение $f(x) = 0$, т.е. уравнение $\dfrac{1}{x} = 0$ не имеет корней, здесь нарушена непрерывность. Эта функция не определена в точке $x = 0$.

Следствие. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда для любого числа C, расположенного между числами A и B, найдется по крайней мере одна точка $x_0 \in [a; b]$, удовлетворяющая равенству $f(x_0) = C$.*

▲ Функция $F(x) = f(x) - C$ непрерывна на $[a; b]$ и знаки чисел $F(a) = A - C$ и $F(b) = B - C$ разные. Тогда по доказанной теореме существует точка $x_0 \in [a; b]$, что $F(x_0) = 0$, т. е. $f(x_0) - C = 0 \Rightarrow f(x_0) = C$, что и требовалось доказать. ■

Пример 2. Покажем, что уравнение $\cos x - x = 0$ имеет корни, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

▲ Действительно, так как $f(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0$ и $f(\pi) = \cos\pi - \pi = -(1 + \pi) < 0$, то по свойству 3 найдется точка $x_0 \in [0; \pi]$, в которой $f(x_0) = 0$ или $\cos x_0 - x_0 = 0$, т.е. x_0 является корнем данного уравнения.

В данной теореме условие непрерывности функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ очень важно. Действительно, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ если } -1 \leqslant x < 0, \\ 1, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

определенную на отрезке $[-1;\ 1]$. На концах этого отрезка $f(-1) = -1 < 0$ и $f(1) = 1 > 0$. Однако ни в одной точке отрезка $[-1;\ 1]$ эта функция не обращается в ноль, так как функция не является непрерывной на отрезке $[-1;\ 1]$. ■

1. Дайте определение непрерывности функции в точке x_0. Сформулируйте все три разновидности определения непрерывности функции и поясните связь между ними.
2. Какими свойствами обладает функция, непрерывная на отрезке? Поясните их смысл.
3. Какое из понятий является более общим: существование предела функции в точке $x = x_0$ или непрерывность функции в точке $x = x_0$? Почему?

Упражнения

A

6.61. Докажите непрерывность функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$:

1) $f(x) = 5x - 3,\ x_0 = 1$; 2) $f(x) = 2x^2 + x - 3,\ x_0 = -2$;

3) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2},\ x_0 = -1$; 4) $f(x) = \sqrt{x-3} + 2x,\ x_0 = 4$.

6.62. Покажите непрерывность функции, используя все три определения:

1) $f(x) = x^2 + 3,\ x_0 = 2$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{x-5},\ (x \neq 5),\ x_0 = 3$.

6.63. Докажите, что уравнение имеет корень в указанном отрезке:

1) $\sin x + 2x = 0,\ \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$; 2) $\cos x + 3x = 0,\ x \in [-\pi;\ 0]$;

3) $\cos x - \sqrt{x} = 0,\ x \in [0;\ \pi]$; 4) $\operatorname{tg} x + x - \dfrac{1}{2} = 0,\ x \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

6.64. Если для функции $y = f(x)$ нарушены условия непрерывности в точке $x = x_0$, то эту точку называют ***точкой разрыва*** этой функции. Здесь функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 (за исключением, быть может, самой точки $x = x_0$). Если $x = x_0$ является точкой разрыва функции $y = f(x)$ и односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ существуют и принимают конечные значения,

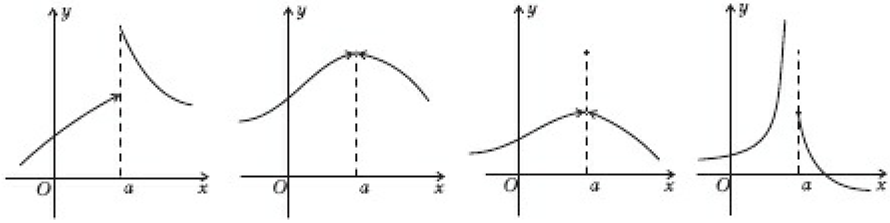


Рис. 6.14

причем $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то точка $x = x_0$ называется ***точкой разрыва функции I рода***. А если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ не определен или обращается в бесконечность, то точка $x = x_0$ называется ***точкой разрыва функции II рода***. Для функций, заданных на рис. 6.14, определите тип точек разрыва.

B

6.65. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывной в точке $x = x_0$, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

6.66. Определите тип точек разрыва функции, если таковые имеются, и постройте график функции:

1) $f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ если } x \leqslant 1, \\ 1 - x^2, \text{ если } x > 1; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ если } x < 1, \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \geqslant 1; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } x < 0, \\ x^2, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$.

6.67. Является ли функция непрерывной в указанном промежутке:

1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, $(-\infty; +\infty)$;

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$, $[2; +\infty)$;

3) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant -1, \\ -x, \text{ если } x < -1, \end{cases}$ $(-\infty; +\infty)$;

4) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, $(-\infty; +\infty)$?

6.68. Дана функция $y = x^2 + 4$. Найдите:

1) Δx и Δy, если $x = 2{,}5$ и $x_0 = 2$.

2) x и Δy, если $x_0 = 3$ и $\Delta x = 0{,}1$.

6.69. Найдите приращение функции:

1) $y = 5 - 3x$; 2) $y = 3x^2$; 3) $y = 2\sqrt{x}$; 4) $y = 2x - x^2$.

6.70. Покажите, что для функции $f(x) = kx + c$ верно равенство $\Delta y = k \cdot \Delta x$.

6.71. Исследуйте функцию на непрерывность и постройте ее график:

1) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$;

2) $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 2x - 3}$;

3) $f(x) = \begin{cases} 3x, \text{ если } x \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{x-1}, \text{ если } x < 1; \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} 2x + 3, \text{ если } x \leqslant 3, \\ 1 - x^2, \text{ если } x > 3. \end{cases}$

C

6.72. Если для функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ выполнено равенство $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ и функция не определена в точке x_0, то x_0 называется ***устранимой особой точкой***. Например, функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Эта функция не определена в точке $x = 0$, но $f(-0) = f(+0) = 1$ и точка $x = 0$ является устранимой особой точкой. Эту функцию можно определить в точке $x = 0$ так, чтобы полученная функция была непрерывной в точке $x = 0$:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x \neq 0, \\ 1, \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что функция $f_1(x)$ непрерывна в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f_1(0).$$

Определите по непрерывности следующие функции в указанных точках:

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ в точке $x=0$;

2) $f(x)=\dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$ в точке $x=81$.

6.73. Подберите параметр m так, чтобы функция была непрерывной в указанной точке:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}, \text{ если } x\neq 0,\\ m, \text{ если } x=0,\end{cases}$ в точке $x=0$;

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}, \text{ если } x\neq 0,\\ m, \text{ если } x=0,\end{cases}$ в точке $x=0$.

6.74. Определите функцию $y=2^{-\frac{1}{x^2}}$ так, чтобы она была непрерывной на всей числовой оси.

6.75. Подберите параметры a и b так, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной:

1) $f(x)=\begin{cases}ax+1, \text{ если } x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ \sin x+b, \text{ если } x>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}\left|x^2-5x+6\right|, \text{ если } x>2,\\ ax-b, \text{ если } x\leqslant 2.\end{cases}$

6.76. При каком значении параметра p функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}, \text{ если } x\neq 3,\\ p, \text{ если } x=3\end{cases}$$

непрерывна в точке $x=3$?

Дополнительные задачи к разделу 6

6.77. Найдите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\right]$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-7}\right)\right]$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{3n^2}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2}$.

6.78. Покажите, что последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, и найдите этот предел, если $a_1=a$, $a_2=b$, $a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$, $n=1, 2, 3, \ldots$.

6.79. Докажите, что последовательность имеет предел:

1) $y_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$;

2) $z_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$;

3) $u_n=1+\dfrac{1}{2\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^2}+\dfrac{1}{4\cdot 2^3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$;

4) $v_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

6.80. Найдите площадь закрашенной фигуры (рис. 6.15).

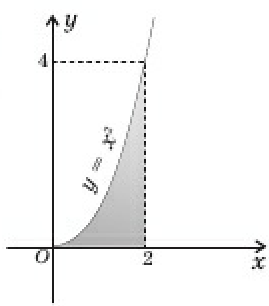


Рис. 6.15

В заданиях **6.81–6.86** найдите указанные пределы.

6.81. 1) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$; 4) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

6.82. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{1-\sqrt[3]{x^2-8}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 81}\dfrac{\sqrt[4]{x}-3}{\sqrt{x}-9}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$.

6.83. 1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 15}\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-2}{\sqrt{x+1}-4}$.

6.84. 1) $\lim\limits_{x\to 0,4}\dfrac{125x^3-150x^2+60x-8}{25x^2-20x+4}$;

2) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{4}}\dfrac{16x^3-40x^2-23x-3}{16x^3+56x^2+25x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3-3x^2-4x+12}$.

6.85. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$.

6.86. 1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

Раздел 7. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

7.1. Производная и дифференциал функции.
7.2. Правила дифференцирования.
7.3. Производные сложной и обратной функций.
7.4. Применение производной в исследовании функции.
7.5. Упрощенная схема исследования и построения графика функции.
7.6. Полная схема исследования и построения графика функции.

7.1. Производная и дифференциал функции

В этом параграфе мы рассмотрим одно из важнейших понятий математики – понятие производной функции. Это понятие впервые появилось в XVII веке в связи с необходимостью определения мгновенной скорости прямолинейного неравномерного движения и построения касательной к произвольной плоской кривой. Поэтому изучение понятия производной начинаем с определения мгновенной скорости и решения задачи о касательной к плоской кривой.

7.1.1. Задачи, приводимые к понятию производной функции

Пример 1. Пусть некоторая материальная точка M совершает прямолинейное движение. Каждому значению времени t поставим в соответствие длину пути, который прошла материальная точка M за время t. Так как это соответствие однозначное, то оно определяет некоторую функцию, т.е. пройденный путь s можно рассматривать как функцию, зависящую от времени t:

$$s = f(t). \qquad (1)$$

Рис. 7.1

Отсюда, зная функциональную зависимость $f(t)$, мы можем определить длину пути s, пройденного материальной точкой M за время t (рис. 7.1). Функция $f(t)$ выражает закономерность движения материальной точки M. Если материальная точка находится в состоянии равномерного движения, т.е. если она проходит равные расстояния за равные промежутки времени, то скорость этого движения будет постоянной. А если тело совершает неравномерное движение, то его скорость будет непостоянной, т.е. с течением времени изменчивой. Например, скорость свободного падения тела. Поэтому для таких движений вводится понятие мгновенной скорости. Прежде чем перейти к этому понятию, сначала рассмотрим понятие средней скорости движения тела за определенный промежуток времени.

Определение. *Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону $s = f(t)$. Если $s = f(t_0) = s_0$ и $f(t_1) = s_1$, то выражение*

$$v_{ср.} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \qquad (2)$$

*называют **средней скоростью** движения материальной точки за промежуток времени от t_0 до t_1.*

Очевидно, что на различных этапах движения скорость материальной точки может быть различной. Например, если рассмотрим движение автомобиля, то мы берем среднюю скорость за определенный промежуток времени. Однако, автомобиль на некоторых участках пути может ускорить свое движение, а на других – замедлить свой ход.

Также мы знаем, что пройденный путь в режиме свободного падения определяется формулой $s = \frac{gt^2}{2}$. Здесь путь s измеряется в метрах, время t – в секундах и $g = 9{,}8$ м/с².

Тогда тело за первую секунду падения пролетит $s(1) = \frac{g \cdot 1}{2} = 4{,}9$ м пути. А в промежутках от $t_0 = 4$с до $t_1 = 5$с тело проходит $s(t_1) - s(t_0) = \frac{g \cdot 25}{2} - \frac{g \cdot 16}{2} = 44{,}1$ м пути. Поэтому свободное падение не является равномерным движением.

Во многих задачах техники и естествознания нам необходимо знать не среднюю скорость движения тела, а его мгновенную скорость. Теперь определим это понятие. В момент времени $t = t_0$ зададим приращение Δt и рассмотрим среднюю скорость тела в промежутке времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$:

$$v_{ср.} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Тогда ***мгновенной скоростью*** $v(t_0)$ тела в момент времени $t = t_0$ называется предел средней скорости $v_{ср.}$ в промежутке времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}, \qquad (3)$$

или, если учесть, что $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$, то

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \qquad (3')$$

т.е. мгновенная скорость $v(t_0)$ в момент времени $t = t_0$ определяется пределом отношения приращения функции $s = f(t)$ в точке t_0 к приращению аргумента Δt при $\Delta t \to 0$.

Например, определим мгновенную скорость тела в момент времени $t = t_0$ при свободном падении:

$$v\left(t_0\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{g\left(t_0 + \Delta t\right)^2}{2} - \dfrac{gt_0^{\ 2}}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g\left(t_0^{\ 2} + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 - t_0^{\ 2}\right)}{2\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} g\left(t_0 + 0,5\Delta t\right) = gt_0.$$

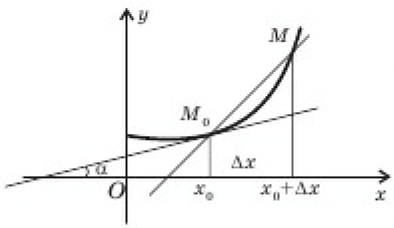


Рис. 7.2

Пример 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки $x = x_0$. Если в точке $x = x_0$ можно провести касательную к графику функции $y = f(x)$, то нужно написать уравнение этой касательной. Для этого определим понятие касательной, проведенной к данной кривой. Возьмем точки $M_0(x_0;\ f(x_0))$ и $M(x;\ f(x))$, принадлежащие графику функции $y = f(x)$. Прямая M_0M называется секущей, проведенной к данной кривой (рис. 7.2).

Определение. *Если вдоль данной кривой точка M стремится к точке M_0, то предельное положение секущей M_0M называется **касательной к графику** функции $y = f(x)$, проведенной в точке $x = x_0$.*

В этом определении вместо требования, что точка M стремится к точке $M_0\left(M \to M_0\right)$, достаточно потребовать, чтобы выполнялось $x \to x_0$. Действительно, если $x \to x_0$, то ясно, что $M\left(x; f\left(x\right)\right) \to M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$, и, обратно, если $M \to M_0$, то $x \to x_0$. Теперь напишем уравнение прямой M_0M, где $M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$, $M\left(x; f\left(x\right)\right)$. Если через $(X;\ Y)$ обозначить координаты произвольной точки прямой M_0M, то по формуле прямой, проходящей через две заданные точки, имеем:

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - f\left(x_0\right)}{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)},$$

$$\text{или } Y - f\left(x_0\right) = \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} \cdot \left(X - x_0\right). \qquad (4)$$

Если ввести обозначение $\Delta x = x - x_0$, $\left(x = x_0 + \Delta x\right)$, то $f\left(x\right) - f\left(x_0\right) = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = \Delta y$, т.е. получили приращение функции в точке $x = x_0$. Тогда уравнение секущей M_0M (4) можно переписать в виде

$$Y - f\left(x_0\right) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \left(X - x_0\right). \qquad (4')$$

Отсюда по определению при $x \to x_0$ $(\Delta x \to 0)$ получим уравнение касательной:

$$Y - f(x_0) = k(X - x_0). \quad (5)$$

Здесь

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (6)$$

Итак, как мы увидели в двух рассмотренных выше примерах, предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

играет определяющую роль и в них он занимает важное место. Этот предел называют производной функции $f(x)$ в точке x_0.

7.1.2. Производная функции

Определение. *Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки $x = x_0$. Тогда, если отношение $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ имеет предел при $x \to x_0$, то этот предел называют* ***производной функции*** *$y = f(x)$ в точке $x = x_0$.*

Производную обозначают так: $f'(x_0)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Итак, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (7)$$

f' читается так: «Эф штрих».

Если $x - x_0 = \Delta x$, $(x \to x_0 \Rightarrow \Delta x \to 0)$, то определение (7) можно записать так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (7')$$

А так как $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ является приращением функции, то определение производной таково:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (7'')$$

Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в каждой точке интервала $(a; b)$ (здесь допускается, что $a = -\infty$ и $b = +\infty$), то говорят, что функция дифференцируема на промежутке $(a; b)$.

В целом, процесс нахождения производной функции называется ***дифференцированием функции***. Итак, если $x \in (a; b)$, то ясно, что функция $f'(x)$ определяется равенством (7'). Функцию $f'(x)$ называют производной данной функции $f(x)$ на промежутке $(a; b)$.

Теперь из двух примеров, рассмотренных в п.7.1.1, можно определить геометрический смысл и механический смысл производной.

Если материальная точка по закону $s = s(t)$ совершает прямолинейное движение, то в силу примера 1 ее мгновенная скорость $v = v(t_0)$ в момент времени $t = t_0$ определяется равенством

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Следовательно, по определению производной

$$v(t_0) = s'(t_0), \tag{8}$$

т.е. производная от пути $s(t)$ равна мгновенной скорости этого движения.

А во втором примере мы выяснили, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ записывается в виде $y - f(x_0) = k(x - x_0)$ и ее угловой коэффициент k определяется равенством

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ (рис. 7.2).}$$

Тогда по определению производной $k = f'(x_0)$, т.е. производная функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной прямой к графику функции в точке $x = x_0$. Если касательная составляет угол, равный α, с положительным направлением оси абсцисс Ox, то из курса геометрии известно, что $k = \operatorname{tg}\alpha$. Следовательно, $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$. Итак, равенством $f'(x_0) = k$ или $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ определяется геометрический смысл производной.

На основании вышеизложенного формулу (5) касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке $M_0(x_0; f(x_0))$, можно записать в следующем виде:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{*}$$

Пример 3. Напишем уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

▲ Уравнение касательной находим по формуле (*). Поэтому сначала найдем значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$. $f(x_0) = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$. Так как $y' = 3x^2 - 3$, $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$. Тогда уравнение касательной записывается таким образом:

$$y = 9(x - 2) + 2 \text{ или}$$

$$y = 9x - 16. \blacksquare$$

Теперь рассмотрим несколько примеров на нахождение производной.

Пример 4. Найдем производную постоянной функции $f(x) = C$ в произвольной точке x.

▲ Сначала определим приращение этой функции, т.е. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$. Поэтому $C' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$, т.е. производная постоянной функции равна нулю: $C' = 0$. ■

Пример 5. Найдем производную функции $f(x) = x$.

▲ $\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x$. Тогда $x' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$. ■

Пример 6. Найдем производную функции $f(x) = x^2 - 3x$.

▲ $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - (x^2 - 3x) = 2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2$.

Отсюда

$$(x^2 - 3x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x - 3 + \Delta x) = 2x - 3.$$

Итак, $(x^2 - 3x)' = 2x - 3$. ■

Пример 7. Найдем производную функции $f(x) = |x|$.

▲ Так как $|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{если } x < 0, \end{cases}$ то при $x > 0$ имеем $|x| = x$ и $(|x|)' = 1 \ (x > 0)$. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $(|x|)' = -1$.

Теперь покажем, что эта функция не имеет производной в точке $x = 0$. Приращение функции в точке $x = 0$ имеет вид

$\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ и этот предел не существует, т.к. $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$ и $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$, т.е. предел слева и предел справа отношения $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не равны между собой.

Итак, $f'(x) = (|x|)' = \begin{cases} 1, \ \text{если } x > 0, \\ -1, \ \text{если } x < 0, \\ \text{не существует, если } x = 0. \end{cases}$ ■

7.1.3. Дифференциал функции и его геометрический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$. Тогда $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, и отсюда по определению предела

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x). \qquad (9)$$

Здесь $\varepsilon(\Delta x)$ – бесконечно малая величина: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Умножив (9) на Δx, получим равенство

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x. \qquad (10)$$

Итак, мы показали, что если функция $y = f(x)$ дифференцируема, то приращение Δy этой функции в точке $x = x_0$ можно представить в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x, A = f'(x_0)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$.

Обратно, пусть теперь приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ представлено в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x, \qquad (11)$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Покажем, что функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$ и $f'(x_0) = A$. Действительно, разделив равенство (11) на Δx, перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(A + \varepsilon(\Delta x)) = \lim_{\Delta x \to 0} A + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = A + 0 = A.$$

Итак, мы доказали следующее. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то ее приращение можно представить в виде (11), и наоборот, если приращение функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ можно представить в виде (11), то эта функция дифференцируема в точке $x = x_0$.

Определение. *Линейная часть приращения функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ относительно Δx называется* ***дифференциалом*** *этой функции в точке $x = x_0$.*

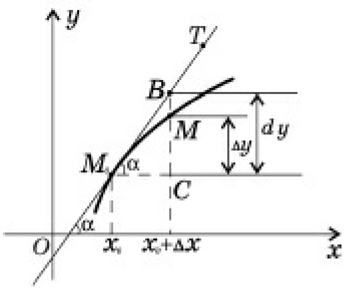


Рис. 7.3

Дифференциал функции обозначается так: dy, $df(x_0)$. Итак, по определению

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Теперь определим дифференциал функции $f(x) = x$. Так как $f'(x) = (x)' = 1$, то $dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Отсюда видно, что дифференциал и приращение аргумента равны между собой. Тогда дифференциал функции записывается так:

$$dy = f'(x_0)dx.$$

Теперь выясним геометрический смысл дифференциала. Проведем касательную M_0T к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$. Пусть касательная M_0T составляет угол α с положительным направлением оси Ox. В точке x_0 придадим аргументу приращение, равное Δx. Тогда получим приращение функции $\Delta y = MC$ (рис. 7.3). Из треугольника BCM_0 имеем $BC = M_0C \cdot \operatorname{tg}\alpha = \Delta x \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Так как $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ и $\Delta x = dx$, то

$$BC = f'(x_0) \cdot dx.$$

Тогда по определению дифференциала $dy = BC$, т.е. дифференциал функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ равен приращению касательной к графику этой функции в точке $x = x_0$.

Пример 8. Найдем дифференциал функции $f(x) = x^2 - 3x$ в точке $x = 4$.

▲ В силу примера 5 имеем, что $f'(x) = 2x - 3$. Поэтому дифференциал данной функции записывается так: $dy = (2x - 3)dx$. А так как $f'(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$, то дифференциал этой функции в точке $x = 4$ записывается так: $dy = 5dx$. ■

1. Как вы понимаете среднюю скорость и мгновенную скорость движения материальной точки? Как определяется мгновенная скорость?
2. Какая прямая называется касательной к графику функции $y = f(x)$? Чему равен угловой коэффициент касательной?
3. Дайте определение производной функции в точке. Как обозначаются производные? Каков геометрический и механический смысл производной?
4. Почему функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$? Как это связано с касательной к графику функции в данной точке?
5. Что такое дифференциал функции и каков его геометрический смысл?

Упражнения

А

7.1. Найдите приращение функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$:

1) $f(x) = 2x - 3, x_0 = 1, \Delta x = 0,1;$

2) $f(x) = 5, x_0 = -3, \Delta x = -0,1;$

3) $f(x) = x^2 + 1, x_0 = 0, \Delta x = 0,2;$

4) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}, x_0 = 2, \Delta x = -0,2.$

7.2. Для функции $y = f(x)$ найдите Δy и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ в указанной точке $x = x_0$:

1) $y = -3, x_0 = 2, \Delta x = 0,01;$

2) $y = 4 - 3x, x_0 = -2, \Delta x = 0,3;$

3) $y = 2 - x^2, x_0 = 1, \Delta x = 0,1;$

4) $y = \dfrac{4x-2}{x}, x_0 = -1, \Delta x = -0,1.$

7.3. Найдите угловой коэффициент прямой:

1) $y = 4 - 5x;$ 2) $y = \dfrac{2}{3}x - 7;$

3) $4x - 5y + 7 = 0;$ 4) $x + 3y - 4 = 0.$

Каким является угол, образованный этой прямой с положительным направлением оси абсцисс: острым или тупым?

7.4. Найдите угловой коэффициент секущей, проведенной к графику функции $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ в точках $x = x_1$ и $x = x_2$:

1) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$;
3) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

7.5. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 2t^2 + 3t + 5$ (s измеряется в метрах, а t – в секундах). Найдите мгновенную скорость точки в момент времени: 1) $t = 0$; 2) $t = 2$; 3) $t = t_0$.

7.6. Найдите мгновенную скорость материальной точки в момент времени $t = t_0$, которая движется по закону:

1) $s(t) = 2t + 3$; 2) $s(t) = 5 - \frac{t}{2}$; 3) $s(t) = 5t^2 - 4t + 9$.

7.7. При $t > 2$с тело движется по закону $s(t) = \frac{3}{t-2}$. Найдите мгновенную скорость тела при: 1) $t = 3$с; 2) $t = 4{,}5$с.

В упражнениях **7.8–7.13** найдите производные указанных функций по определению и найдите указанные значения производной.

7.8. $y(x) = 3x + 4$: 1) $y'(x)$; 2) $y'(2)$; 3) $y'(-2)$.

7.9. $f(x) = ax + b$: 1) $f'(2)$; 2) $f'(4)$.

B

7.10. $f(x) = \frac{1}{x}$: 1) $f'(x)$; 2) $f'(1)$; 3) $f'(-3)$.

7.11. $g(x) = x^2 + 3x + 1$: 1) $g'(x)$; 2) $g'(2)$.

7.12. $u(x) = \sqrt{x}$: 1) $u'(x)$; 2) $u'(4)$.

7.13. $v(x) = \frac{3}{x-1}$: 1) $v'(x)$; 2) $v'(2)$.

7.14. Найдите $f'(x)$, если: 1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = ax^2 + bx + c$; 3) $f(x) = x^3 + 2x$.

7.15. Найдите мгновенную скорость движения тела по закону $s(t)$ в момент времени t_0: 1) $s(t) = 2t^3 - 3t^2$; 2) $s(t) = t^3 + 2t^2 + 3$.

C

7.16. Покажите, что функция не имеет производной в указанной точке: $g(x) = |x - 1|$ в точке $x = 1$.

7.17. Напишите уравнение касательной к графику функции $g(x) = x^2$ в точке: 1) $x = 1$; 2) $x = -1$; 3) $x = 2$.

7.18. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = 1$:
1) $f(x) = x^2 + x + 1$; 2) $f(x) = x - 2x^2$; 3) $f(x) = x^3$; 4) $f(x) = 2x^2 - 3$.

7.19. Пусть графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ пересекаются в точке $x = x_0$. Тогда угол, образованный касательными, проведенными к графикам данных функций в точке $x = x_0$, называется углом между данными кривыми. Найдите угол между кривыми $y = x^2$ и $y = \dfrac{8}{x}$.

7.20. Найдите дифференциал функции в точках $x = 1$, $x = -1$ и $x = x_0$:
1) $f(x) = x + 4$; 2) $g(x) = 2x + 3$; 3) $u(x) = x^2 - 1$; 4) $v(x) = 4 - x^2$.

7.21. Покажите, что дифференциал функции $y = ax + b$ не зависит от точки $x = x_0$.

Упражнения для повторения

7.22. Найдите область определения и область значений функций:

1) $y = \sqrt{x^2 + 4}$; 2) $y = 1 + \sin^2 2x$; 3) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

7.23. Постройте график функции:

1) $y = |x - 1|$; 2) $y = \sqrt{x - 1}$; 3) $y = \begin{cases} 3 - x^2, \text{если } x > 1, \\ x - 2, \text{если } x \leqslant 1. \end{cases}$

7.24. Решите уравнение:

1) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; 2) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$;
3) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x - \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x = 2$; 4) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 1$.

7.2. Правила дифференцирования

7.2.1. Правила нахождения производной

Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила нахождения производных. Для удобства мы запишем эти формулы без указания аргументов.

1°. $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 2°. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3°. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$; 4°. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

▲ Приведем доказательство формулы 2°.

2°. Так как $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$, $\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x)$ и

$$\Delta(u \cdot v) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$$

$$= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$$

$$= \left[u(x+\Delta x) - u(x)\right] \cdot v(x+\Delta x) + u(x)\left[v(x+\Delta x) - v(x)\right],$$

то

$$(u \cdot v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u \cdot v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[u(x+\Delta x) - u(x)\right] \cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)\left[v(x+\Delta x) - v(x)\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u' \cdot v + u \cdot v'. \blacksquare$$

Докажите самостоятельно

Формулы 1°, 3°, 4° доказываются аналогично.

7.2.2. Производные элементарных функций

Производные элементарных функций приведены в следующей таблице.

Функция	Производная	Функция	Производная
$C = \text{const}$	0	$\sin x$	$\cos x$
$x^{\alpha}, \alpha \in R$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$		

Докажем некоторые из этих формул, а другие будут доказаны в следующем пункте.

▲ 1. Формула $C' = 0$ доказана в п. 7.1 (пример 4).

2. Теперь докажем формулу $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ при $\alpha \in N$. Для этого применим метод математической индукции.

При $\alpha = 1 \Rightarrow x' = 1$ (см. пример 4), т.е. формула верна.

Пусть при $\alpha = k$ верно равенство $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$. Тогда при $\alpha = k + 1$ имеем $(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = x' \cdot x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1} = (k+1) \cdot x^k$, что и требовалось доказать.

3. В целом формула $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ является частным случаем формулы $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ при $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Так как эта формула при решении задач применяется очень часто, то приведем ее доказательство. Для функции $y = \sqrt{x}$ имеем $\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$.

Тогда $\left(\sqrt{x}\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. Найдем приращение функции $y = \sin x$:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Тогда $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos(x + 0) = \cos x.$$

Докажите самостоятельно

Формула $(\cos x)' = -\sin x$ доказывается аналогично.

Согласно правилу 4°

$$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}. \blacksquare$$

Докажите самостоятельно

Формула $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ доказывается аналогично.

Другие формулы докажем в следующем пункте.

Пример 1. Найдем производную функции $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

▲ Введем обозначения $u(x) = x$ и $v(x) = 1 + x^2$, то $u' = x' = 1$ и $v' = 1' + (x^2)' = 0 + 2x = 2x$ (см. примеры 3, 4 и 5 в пункте 7.1). Поэтому по формуле 4°

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{x' \cdot (1+x^2) - x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}. \blacksquare$$

1. Напишите основные правила нахождения производной и докажите их.
2. Выучите формулы нахождения производных элементарных функций.

Упражнения

А

В упражнениях **7.25–7.30**, **7.33–7.37** найдите производные функций.

7.25. 1) $y = x^2$; 2) $y = 1 - x^3$; 3) $y = 3x^2 - 4x + 5$; 4) $y = 4x^3 - x^5$.

7.26. 1) $y = x^2(x - 3)$; 2) $y = (x^3 - 2)(2x^3 + 1)$;

3) $y = x^3(3x + 2)$; 4) $y = (3x^2 - 4)(7x^2 + x - 1)$.

7.27. 1) $y=\dfrac{1+2x}{3-5x}$; 2) $y=\dfrac{3x-2}{x+8}$; 3) $y=\dfrac{3x-2}{x-8}$; 4) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

7.28. 1) $y = 3x^3 - 2x^2 + 1$; 2) $y = 4x^5 - 4x^4 + x^2 - 1$;
3) $y = 4 + 6x - 3x^4$; 4) $y = (x - 2)^3$.

7.29. 1) $y=\sqrt{x}\left(x^2+1\right)$; 2) $y = (x^{10} - 1)(x^3 + 3)$;
3) $y = x^2\sin x$; 4) $y = (x^2 + x + 1)\cos x$;
5) $y = (x + 1)\operatorname{tg} x$; 6) $y = (x^3 + 1)\operatorname{ctg} x$.

7.30. 1) $y=x^9+2x^6-\sqrt{x}$; 2) $y = x^{10} + \operatorname{tg} x$;
3) $y = 5x^5 - \sin x$; 4) $y = 5x^6 + \cos x$.

7.31. Найдите значение производной функции в указанных точках:
1) $y = 2x^3 - 3x$, $x = 1$, $x = 0,5$;
2) $y=3x+2\sqrt{x}$, $x=0,09$, $x=4$;
3) $y=\dfrac{3}{x}-x$, $x=-2$, $x=\dfrac{1}{3}$;
4) $y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}$, $x=-1$, $x=\dfrac{1}{4}$.

7.32. Найдите корни уравнения $f'(x) = 0$:

1) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-4x$; 2) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+7$;

3) $f(x) = 3x - 5x^2$; 4) $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+2x-5$.

B

7.33. 1) $y = 2x^{1,5}$; 2) $y=x^{-\frac{4}{3}}$; 3) $y=\dfrac{3}{x}$; 4) $y=-\dfrac{2}{x^2}$.

7.34. 1) $y=\sqrt{x\sqrt{x}}$; 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 3) $y=\sqrt[3]{3x\sqrt{4x}}$;

4) $y=\dfrac{1}{x\sqrt{2x}}$; 5) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}$; 6) $y=x\sqrt{x^3}$.

7.35. 1) $y = (x^2 + 1)\sin x$; 2) $y=\dfrac{3x-2}{\cos x}$;

3) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{x+1}$; 4) $y = (x^5 + x^2 - 3)\operatorname{ctg} x$.

7.36. 1) $y = x\operatorname{arctg} x$; 2) $y = \sqrt{x}\arccos x$;

3) $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{\arcsin x}$; 4) $y = -\dfrac{\operatorname{arcctg} x}{\sqrt{2x}}$.

7.37. 1) $y = \sqrt{1+x^2}\cdot\cos x$; 2) $y = \sqrt{1-x^2}\cdot\sin x$.

7.38. Решите уравнение $f'(x) = 0$:

1) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + 4$;

2) $f(x) = x^4 + \dfrac{4x^3}{3} - 8x^2 - 16x + 17$.

7.39. Найдите значение производной функции в указанной точке:

1) $y = \dfrac{x^3 - 3x}{2x^4 + 1}, x = -1; x = 2$;

2) $y = \left(\dfrac{3}{x} + x\right)\left(\sqrt{x} - 1\right), x = 1, x = 4$.

7.40. Докажите формулу $(f(ax + b))' = a \cdot f'(ax + b)$, если функция $y = f(x)$ дифференцируема.

7.41. Используя формулу из предыдущей задачи, найдите производную функции:

1) $y = (2x + 3)^{10}$; 2) $y = (3 - 4x)^8$;

3) $y = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = \cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$;

5) $y = \operatorname{tg} 4x$; 6) $y = (2x - 1)^6 \cdot (3x + 2)^4$.

C

7.42. Определите коэффициент при x в многочлене $(x + 1)^{30}$.

7.43. Дан многочлен $(x - 2)^{100} = a_0 \cdot x^{100} + a_1 \cdot x^{99} + \ldots + a_{99} \cdot x + a^{100}$. Найдите сумму: 1) $a_0 + a_1 + \ldots + a_{99} + a_{100}$; 2) $100 \cdot a_0 + 99 \cdot a_1 + \ldots + a_{99} + a_{100}$.

7.44. Известно, что функция $g(x) = u(x) \cdot v(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$. Что можно сказать про каждую из функций $u(x)$ и $v(x)$? Необходимо ли, чтобы каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ не имела производную в точке $x = x_0$?

7.45. Решите задачу **7.44** относительно функции:

1) $u(x) + v(x)$; 2) $\dfrac{u(x)}{v(x)}$.

Упражнения для повторения

7.46. Вычислите:

1) $2\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}(-1)+\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\arcsin 1+\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7.47. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:
1) $y = 3x^2 + 2x - 5$; 2) $y = \sin x + 0,5$.

7.48. Между числами 2 и 64 расположите четыре числа так, чтобы полученные шесть чисел были последовательными членами геометрической прогрессии.

7.3. Производные сложной и обратной функций

7.3.1. Производная сложной функции

В дополнении к правилам 1°–4° мы здесь рассмотрим правило дифференцирования сложной функции. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке x_0 и функция $f(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = g(x_0)$, то сложная функция $F(x) = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0 и при этом выполняется равенство*

$$F'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \qquad (1)$$

▲ $\dfrac{\Delta F}{\Delta x}=\dfrac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{\Delta x}=$

$$=\frac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta f(g(x_0))}{\Delta g(x_0)}\cdot\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}.$$

Так как функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\right]=0$, т.е. $\Delta g\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Поэтому

$$F'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(g(x_0))}{\Delta g(x_0)}\cdot\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta g\to 0}\frac{\Delta f(g(x_0))}{\Delta g(x_0)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0). ■$$

Строгое доказательство этой теоремы можно найти в курсе высшей математики.

Пример 1. Найдем производную функции $y = (x^2 - 2x + 5)^2$.

▲ Если ввести обозначения $y = u^2$ и $u = x^2 - 2x + 5$, то данную функцию можно выразить через сложную функцию $y(u(x))$. Так как $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $5' = 0$ (см. примеры 3, 4 и 5 в п. 7.1), то по формуле (1) $y' = (u^2)' \cdot (x^2 - 2x + 5)' = 2u \cdot (2x - 2) = 4(x - 1) \cdot (x^2 - 2x + 5)$. ■

Пример 2. Найдем производную функции $y = \sqrt{3x^2 + x}$.

▲ $$\left(\sqrt{3x^2 + x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + x}} \cdot \left(3x^2 + x\right)' = \frac{6x + 1}{2\sqrt{3x^2 + x}}.$$

В целом справедлива формула

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$ ■

Пример 3. Найдем производную функции

$$f(x) = \sqrt{\left(x^3 + x + 1\right)^3}.$$

▲ Здесь данную функцию следует принимать за сложную функцию, составленную из трех функций: $f(x) = g\left[u\left(v(x)\right)\right]$.

В этом случае формула (1) записывается так:

$$f'(x) = g'\left[u\left(v(x)\right)\right] \cdot u'\left(v(x)\right) \cdot v'(x).$$

В силу этой формулы

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\left(x^3 + x + 1\right)^3}} \cdot 3\left(x^3 + x + 1\right)^2 \cdot \left(3x^2 + 1\right) =$$

$$= \frac{3\left(x^3 + x + 1\right)^2 \cdot \left(3x^2 + 1\right)}{2\sqrt{\left(x^3 + x + 1\right)^3}} = \frac{3}{2}\left(3x^2 + 1\right) \cdot \sqrt{x^3 + x + 1}.$$ ■

Пример 4. Найдем производную функции

$$y = \sin\left(\operatorname{tg}\sqrt{x^2 + 1}\right).$$

▲ $$y' = \cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x^2 + 1}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x^2 + 1}\right)}{\cos^2\sqrt{x^2 + 1}}.$$ ■

Пример 5. Найдем производную функции $y = \operatorname{arctg}\left(\sin\sqrt{x}\right)$.

▲ $$y' = \frac{1}{1+\sin^2\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\left(1+\sin^2\sqrt{x}\right)}.$$ ■

7.3.2. Производная обратной функции

Теорема 2. *Пусть функция $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 непрерывна, строго монотонна и в точке x_0 имеет производную $\frac{df(x_0)}{dx}\neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и верно равенство*

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{2}$$

▲ Зафиксируем какую-нибудь окрестность точки x_0, в которой функция $y = f(x)$ строго монотонная. В этой окрестности для $f(x)$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$ и точка $y_0 = f(x_0)$ лежит в области определения обратной функции $f^{-1}(y)$ и эта функция непрерывна в точке y_0. Поэтому для приращений $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - y_0$ верны соотношения $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$ и $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta x = 0$, т.е. если $\Delta x\to 0$, то $\Delta y\to 0$, и наоборот, если $\Delta y\to 0$, то $\Delta x\to 0$.

Отсюда для любых $\Delta x\neq 0$, $\Delta y\neq 0$ верно равенство $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Тогда $\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$. ■

Так как $x_0 = f^{-1}(y_0)$, то формулу (2) можно записать в виде

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}. \tag{3}$$

Докажем справедливость следующих формул:

1) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

2) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

3) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

4) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

▲ Приведем доказательство формул 1) и 3), а формулы 2) и 4) доказываются аналогично.

1) Так как $y = \arcsin x$, $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то по формуле (2)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3) Так как $y = \operatorname{arctg} x$, $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, $-\infty < x < +\infty$, то

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Мы здесь воспользовались тем, что $(\sin x)' = \cos x$ и $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. ■

Пример 6. Найдем производную функции $y = \arcsin(1-x^2)$.

▲ По правилу дифференцирования сложной функции и доказанной формуле 1)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} \cdot (1-x^2)' = \frac{1}{\sqrt{2x^2-x^4}} \cdot (-2x) =$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{x^2(2-x^2)}} = -\frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}.$$ ■

7.3.3. Понятие производной высшего порядка. Механический смысл производной второго порядка

В целом производная $f'(x)$ функции $f(x)$ сама является функцией, зависящей от x. Поэтому возникает необходимость дифференцирования функции $f'(x)$. Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производную называют производной второго порядка функции $f(x)$ и обозначают $f''(x)$ или y''. Итак, по определению: $f''(x) = (f'(x))'$ или $y'' = (y')'$.

Пример 7. Найдем вторую производную функции $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x + 1$.

▲ Так как $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3$, то $f''(x) = (f'(x))' = (4x^3 - 6x^2 + 3)' = 12x^2 - 12x$. ■

Рассмотрим закон свободного падения тела $s(t) = \frac{gt^2}{2}$.

Нам известно, что первая производная $s'(t)$ является скоростью свободного падения: $v(t) = s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = gt$. Тогда $s''(t) = (gt)' = g$, т.е. вторая производная $s''(t)$ является ускорением движения тела при свободном падении.

Итак, мы видим, что вторая производная y'' функции $y = f(x)$ имеет механический смысл. Действительно, если материальная точка движется по закону $y = f(x)$ в зависимости от времени x, то первая производная $f'(x)$ определяет мгновенную скорость движения материальной точки. Вторая производная $f''(x)$ функции $f(x)$, как производная от производной $(f'(x))'$, является «скоростью изменения скорости». Это понятие в курсе физики называется ***ускорением*** движения. Следовательно, вторая производная $f''(x)$ является ускорением движения материальной точки.

Производная от второй производной функции называется третьей производной этой функции и обозначается y'''или $f'''(x)$: $y''' = (y'')'$ или $f'''(x) = (f''(x))'$.

Аналогично определяются 4-я, 5-я и т.д. производные y^{IV}, y^{V} и т.д. функции $y = f(x)$. Вообще, n-я производная функции $y = f(x)$ определяется как производная от $(n - 1)$-й производной: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ или $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Пример 8. ▲ Для функции $y = x^2 + 14x - 2$ имеем: $y' = 2x + 14$, $y'' = 2$, $y''' = 0$, $y^{\text{IV}} = 0$, … . ■

Пример 9. Найдем n-ю производную функции $y = \sin x$.

▲ $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{\text{IV}} = \sin x$, ...

Т.к. любое натуральное число n может быть представлено в одном из следующих четырех видов: $4k$; $4k + 1$; $4k + 2$; $4k + 3$; $(k \in N)$. При любом натуральном $n \in N$ верно равенство

$$\sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Аналогично можно доказать равенство $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$. ■

n-я производная функции $y = \sin x$

n	$\sin^{(n)} x$	$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$n = 4k$	$\sin^{(4k)} x = \sin x$	$\sin\left(x + \frac{4k\pi}{2}\right) = \sin(x + 2k\pi) = \sin x$
$n = 4k + 1$	$\sin^{(4k+1)} x = (\sin^{(4k)} x)' =$ $= \sin' x = \cos x$	$\sin\left(x + \frac{4k+1}{2}\pi\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) =$ $= \cos x$

$n = 4k + 2$	$\sin^{4k+2} x = \left(\sin^{(4k)} x\right)'' = \sin'' x = -\sin x$	$\sin\left(x + \dfrac{4k+2}{2}\pi\right) = \sin(x + \pi + 2k\pi) = -\sin x$
$n = 4k + 3$	$\sin^{4k+3} x = \left(\sin^{(4k)} x\right)''' = \sin''' x = -\cos x$	$\sin\left(x + \dfrac{4k+3}{2}\pi\right) = \sin\left(x + \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -\cos x$

1. Как находится производная сложной функции? Поясните ответ на примере.
2. Как находится производная обратной функции? Поясните ответ.
3. Как определяется производная функции высшего порядка?
4. Каков механический смысл второй производной?

Упражнения

А

В упражнениях **7.49–7.52**, **7.54–7.59**, **7.64–7.67** найдите производные функций.

7.49. 1) $y = (2x - 3)^5$; 2) $y = (4 + 7x)^6$; 3) $y = (2 - 3x)^8$; 4) $y = (1 - 5x)^5$.

7.50. 1) $y = (2x^2 - 3)^5$; 2) $y = (4 + 7x^3)^6$; 3) $y = (2 - 3x^2)^8$; 4) $y = (1 - 5x^5)^5$.

7.51. 1) $y = \sin 3x$; 2) $y = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = \operatorname{ctg}\left(4x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

7.52. 1) $y = \sqrt{9 - 2x^2}$; 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$;

3) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$; 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.

7.53. Найдите значение производной в указанной точке:

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $x = \dfrac{\pi}{12}$, $x = -\dfrac{\pi}{6}$;

2) $f(x) = x - \operatorname{ctg} 3x$, $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{18}$.

7.54. 1) $y = \arcsin(5x - 3)$; 2) $y = \sqrt{x-1} + \arccos(x-1)$;

3) $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$; 4) $y = \sqrt{x-1}\cdot\operatorname{arcctg}(2x+1)$.

B

7.55. 1) $y = (x^6 + x)^2$; 2) $y = (1 - x)^{12}$;

3) $y = (2x^3 - 5x^2)^{16}$; 4) $y = (3x^3 - 2x^2)^5$.

7.56. 1) $y = (x^3 - 2x^2 + 3)^{17}$; 2) $y = \sqrt{1-x^4} + \dfrac{1}{x^2+3}$;

3) $y = \sqrt{4x^2+5}$; 4) $y = (3-x^3)^5 + \sqrt{2x^2+7}$.

7.57. 1) $y = \sqrt{x-2}\cdot\sin(3x-2)$; 2) $y = (x^2+4)\cos\sqrt{x-3}$;

3) $y = (3x^2-2x-5)\operatorname{tg}\sqrt{x}$; 4) $y = \sqrt{x}\operatorname{ctg}(3x^2-2x-5)$.

7.58. 1) $y = \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x-1}}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{2x-3}}{\cos\dfrac{x}{2}}$.

7.59. 1) $y = (2x+1)\arcsin\sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{x}\cdot\arccos(x^2+2x-1)$;

3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x-4}$; 4) $y = \operatorname{arcctg}(5x^2 - 3)$.

7.60. Найдите производную функции в указанной точке:

1) $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x},\ x = 4,\ x = 16$;

2) $g(x) = x^2\sin\dfrac{x}{2},\ x = \dfrac{\pi}{3},\ x = \pi$.

7.61. Решите уравнение $f'(x) = 0$:

1) $f(x) = x - \sin 2x$; 2) $f(x) = x + \operatorname{ctg} 3x$;

3) $f(x) = \cos 2x + x$; 4) $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3}x$.

7.62. Даны функции $f(x) = 3 - 2x$, $g(x) = x^2$ и $u(x) = \sin x$. Задайте формулой сложную функцию $F(x)$ и найдите $F'(x)$:

1) $F(x) = f(g(x))$; 2) $F(x) = g(u(x))$; 3) $F(x) = g(f(x))$;

4) $F(x) = u(g(x))$; 5) $F(x) = f(g(u(x)))$; 6) $F(x) = u(g(f(x)))$.

7.63. Даны функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $g(x) = \sqrt{x}$ и $u(x) = \operatorname{arctg} x$. Задайте формулой сложную функцию $F(x)$ и найдите $F'(x)$:
1) $F(x) = f(u(x))$;
2) $F(x) = g(u(x))$;
3) $F(x) = u(f(x))$;
4) $F(x) = u(g(x))$.

7.64. 1) $y = \sqrt{4 + \sin^2 x}$;
2) $y = \sin^2 x + \sqrt{1 + 2\operatorname{tg}^2 x}$;
3) $y = 4 + \sqrt{1 + \cos^2 x}$;
4) $y = 2 - \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x - 1}$.

7.65. 1) $y = \sin\sqrt{x} \cdot \cos(x^2 + 1)$;
2) $y = \operatorname{tg}\sqrt{x} \cdot \sin(x + 4)$;
3) $y = \dfrac{2x^2 + 1}{\cos(2x - 1)}$;
4) $y = \dfrac{\operatorname{ctg}\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

7.66. 1) $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{\arcsin x}$;
2) $y = \dfrac{1 + x^2}{\operatorname{arctg} x}$;
3) $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\arccos\frac{x}{2}}$;
4) $y = \dfrac{9 + x^2}{\operatorname{arcctg}\frac{x}{3}}$.

7.67. 1) $y = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$;
2) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$;
3) $y = x \cdot \sqrt{1 + x^2}$;
4) $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$;
5) $y = \dfrac{x}{x - \sqrt{x^2 - 4}}$;
6) $y = \left(\dfrac{x^2}{3x - 1}\right)^5$.

C

7.68. Найдите коэффициент при x в составе многочлена:
1) $(2 + x^2)^7$; 2) $(1 - 2x + x^2)^8$; 3) $(2 + x - x^2)^{10}$; 4) $(x^3 + x^2 + x + 1)^5$.

7.69. Чему равна производная 300-го порядка функции:
1) $(7 + x^2)^{100}$;
2) $(8 - 3x^2)^{149}$;
3) $\cos 3x$
4) $\sin\dfrac{x}{2}$; ?

7.70. Найдите производную 3-го порядка функции:
1) $(x - 1)^{-1}$; 2) $(2x - 1)^{100}$; 3) $\sin(3x - 2)$; 4) $\cos(ax + b)$.

7.71. Сколько раз нужно продифференцировать функцию $(2 + x^2)^{100}$, чтобы в результате получить многочлен 50-й степени?

7.72. Задайте функцию $f(x)$, если:

1) $f'(x) = 2x - 1$; 2) $f'(x) = \sin 5x$;

3) $f'(x) = x^2 - 2x + 1$; 4) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2\cos\dfrac{x}{2}$.

7.73. Решите неравенство $f'(x) > 0$:

1) $f(x) = \sqrt{2}x + 2\cos^2 x$; 2) $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3}x$.

7.74. Найдите коэффициент при x^3: 1) $(3x - 5)^{10}$; 2) $(2x - x^2)^{10}$.

7.75. Найдите производную 100-го порядка функции $y = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

7.76. Докажите формулу бинома Ньютона:

$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} \cdot a + \ldots + C_n^k x^{n-k} \cdot a^k + \ldots + C_n^n \cdot a^n$, пользуясь понятием производной высшего порядка.

7.4. Применение производной в исследовании функции

7.4.1. Промежутки возрастания и убывания функции

При исследовании функции в пункте 1.3 раздела 1 мы указывали на важность определения промежутков возрастания и убывания функции. Теперь покажем, что применение производной намного упрощает нахождение этих промежутков. Для этого, объединившись в группы, выполните следующие задания.

Задание 1. 1) Постройте график функции $y = 6x - x^2 - 5$, $x \in (1; 5)$.

2) Найдите промежутки возрастания и убывания функции.

3) Найдите производную функции и определите знак производной в промежутках возрастания и убывания.

4) Как называется точка $x_0 = 3$ для этой функции?

5) Найдите значение $f'(3)$.

6) Сделайте выводы и обсудите их вместе с классом.

Задание 2. 1) Постройте график функции $y = |x - 2|$, $x \in (0; 4)$.

2) Найдите промежутки возрастания и убывания функции.

3) Найдите производную и определите знаки производной в промежутках возрастания и убывания.

4) Как называется точка $x_0 = 2$ для этой функции?

5) Существует ли $f'(2)$? Обоснуйте ответ.

6) Сделайте выводы и обсудите их вместе с классом.

Как согласуются ваши выводы с достаточным условием возрастания и убывания функции, а также с необходимым условием экстремума? Обоснуйте ответы.

Замечание. Для удобства представьте данные функции в виде $y = 4 - (x - 3)^2$ и $y = \begin{cases} x - 2, \text{ если } x \in [2; 4), \\ 2 - x, \text{ если } x \in (0; 2). \end{cases}$

1) *Достаточное условие возрастания функции.*

Если в каждой точке x промежутка $(a; b)$ выполняется условие $f'(x) > 0$, то функция является возрастающей на этом промежутке.

2) *Достаточное условие убывания функции.*

Если в каждой точке x промежутка $(a; b)$ выполняется условие $f'(x) < 0$, то функция является убывающей на этом промежутке.

Заметим, что в данных выше условиях вместо a и b можно взять $-\infty$ и $+\infty$. В этом случае утверждение теоремы окажется верным.

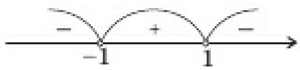


Рис. 7.4

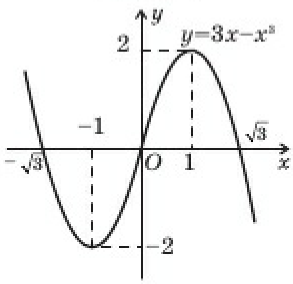


Рис. 7.5

Пример 1. Определим промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 3x - x^3$.

▲ Данная функция определена на множестве $(-\infty; +\infty)$ и во всех точках этого множества дифференцируема: $f'(x) = 3 - 3x^2$ или $f'(x) = -3(x - 1)(x + 1)$. Тогда в силу достаточного условия возрастания и убывания функции (см. выше) промежуток, где $f'(x) > 0$, является промежутком возрастания функции $f(x)$, а промежуток, где $f'(x) < 0$, является промежутком убывания функции. Знак производной $f'(x)$ можно установить методом интервалов (рис. 7.4). Следовательно, на промежутке $(-1; 1)$ функция возрастает, а на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция убывает. График этой функции изображен на рис. 7.5. ■

7.4.2. Необходимые и достаточные условия экстремума функции

Понятие экстремума функции мы изучали в пункте 1.3 из раздела 1. Применение производной намного облегчает процесс определения экстремумов функции. Сначала рассмотрим необходимое условие экстремума.

Необходимое условие экстремума функции. *Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки $x = x_0$ и x_0 является точкой экстремума функции. Тогда либо $f'(x_0) = 0$, либо в точке x_0 не существует производной данной функции.*

▲ Для определенности предположим, что x_0 является точкой максимума функции $y = f(x)$. Тогда по определению найдется окрестность точки x_0 $((x_0 - \delta; x_0 + \delta), (\delta > 0))$, в которой $f(x_0)$ является наибольшим значением функции. Так как x_0 – точка максимума, то промежуток $(x_0 - \delta; x_0)$ является промежутком возрастания функции, т.е. $f'(x) > 0$ при $(x_0 - \delta; x_0)$. Поэтому $f'(x) \geqslant 0$. С другой стороны, на промежутке $(x_0; x_0 + \delta)$ функция убывает, т.е. $f'(x) < 0$, $x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Следовательно, $f'(x_0) \leqslant 0$, если в точке x_0 существует производная. Из этих двух неравенств $f'(x_0) = 0$ или в точке x_0 производная функции не существует. ■

В целом точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются ***критическими (стационарными) точками*** функции. Например, для функции, график которой изображен на рис. 7.6, точки x_1, x_2, x_3, x_4 являются критическими. Так как в точках x_1, x_2, x_3 производная функции равна нулю (касательная в этих точках параллельна оси Ox), а в точке x_4 производная не существует (в этой точке невозможно провести касательную).

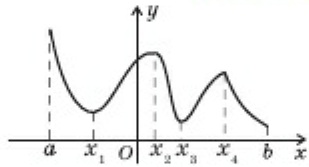


Рис. 7.6

Пример 2. ▲ На рис. 7.7 изображен график функции $y = |x|$. Нам известно, что в точке $x = 0$ эта функция не имеет производной, т.е. $x = 0$ – критическая точка. По графику видно, что в этой точке функция достигает своего минимума. ■

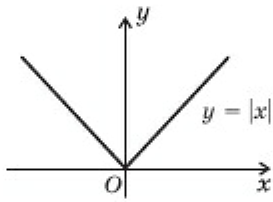


Рис. 7.7

Пример 3. ▲ Производная функции $y = x^3$ обращается в нуль в точке $x = 0$, т.е. $x = 0$ является критической точкой этой функции. Однако в этой точке функция не имеет экстремума (рис. 7.8). ■

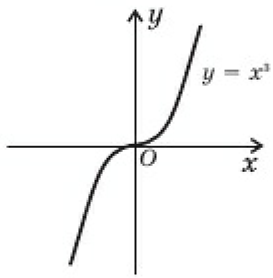


Рис. 7.8

Пример 4. ▲ Рассмотрим функцию $y = 2x + |x|$ (рис. 7.9). Так как функция в точке $x = 0$ не имеет производной, то $x = 0$ рассматривается как критическая точка этой функции. Тем не менее из рис. 7.8 видно, что $x = 0$ не является точкой экстремума функции. ■

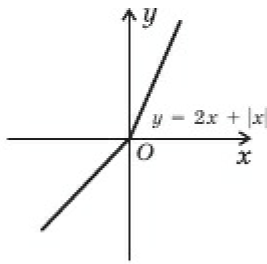


Рис. 7.9

Итак, мы видим, что не каждая критическая точка является точкой экстремума функции (примеры 3 и 4). Поэтому, чтобы определить, является ли данная критическая точка точкой экстремума функции, используют следующие достаточные условия экстремума функции.

Достаточные условия экстремума функции. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и производная $f'(x)$ на промежутках $(a; x_0)$ и $(x_0; b)$ имеет различные знаки, то x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$.*

А именно, если при переходе через точку x_0 слева направо знак производной меняется: а) с «+» на «−», то x_0 – точка максимума; б) с «−» на «+», то x_0 – точка минимума.

▲ Пусть $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a; x_0)$ и $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; b)$. Тогда по достаточному условию возрастания и убывания функции (стр. 218) функция $f\ (x)$ на промежутке $(a;\ x_0)$ возрастает, а на промежутке $(x_0;\ b)$ убывает. Отсюда $f(x_0) > f(x)$, $\forall x \in (a; x_0)$ и $f(x_0) > f(x)$, $\forall x \in (x_0; b)$, т.е. для любого $x \in (a;\ b)$ выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$, $(x \neq x_0)$. Следовательно, x_0 – точка максимума. ■

Докажите самостоятельно

Пункт б) доказывается аналогично.

Итак, при определении экстремума функции следует придерживаться следующих правил.

1) Нужно найти критические точки функции, т. е. необходимо найти точки, в которых производная функции равна нулю или производная не существует.

2) Нужно исследовать знаки производной в окрестности каждой критической точки. Если при прохождении через критическую точку x_0 слева направо знак производной:

а) меняется с «+» на «–», то x_0 – точка максимума;

б) меняется с «–» на «+», то x_0 – точка минимума;

в) не меняется, то x_0 не является точкой экстремума.

Например, рассмотрим функцию $y = 3x - x^3$ (пример 1). Так как $y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x)(1 + x)$, то точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ явля-ются критическими точками. На рис. 7.4 показано изменение знака производной. Отсюда $x_2 = 1$ – точка максимума функции, а $x_1 = -1$ – точка минимума.

Функция $y = |x|$, рассмотренная нами в примере 2, не имеет производной в точке $x = 0$, т.е. $x = 0$ – критическая точка. Так как при $x < 0 \Rightarrow y = -x$ и $y' = -1 < 0$ и при $x > 0 \Rightarrow y = x$ и $y' = 1 > 0$, то точка $x = 0$ является точкой минимума.

А для функции $y = x^3$ (пример 3) точка $x = 0$ является критической точкой. Так как при $x \neq 0 \Rightarrow y' = 3x^2 > 0$, то в окрестности точки $x = 0$ производная не меняет своего знака и в этой точке нет экстремума (рис. 7.8). ■

1. Как определяются промежутки возрастания и убывания функции?
2. Что такое точка экстремума? Какие точки называются точками максимума (минимума)? Дайте определение.
3. Какие точки называются критическими точками функции?
4. Сформулируйте необходимое условие экстремума функции и докажите его.
5. Сформулируйте первое достаточное условие экстремума функции и докажите его.
6. Сформулируйте правила нахождения точек экстремума (максимума и минимума) функции и поясните их смысл на примере.

Упражнения

A

В упражнениях **7.77–7.80** найдите промежутки возрастания и убывания функций.

7.77. 1) $y = 2x - 1$; 2) $y = 3 - \frac{x}{2}$; 3) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
4) $y = (x - 2)(x + 3)$; 5) $y = 1 - (2 - x)(3 + 2x)$; 6) $y = x^2 + x + 1$.

7.78. 1) $y = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 7x - 8$; 2) $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 5$;
3) $y = \frac{1}{x-2}$; 4) $y = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$.

7.79. 1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 3 - \cos 2x$;
3) $y = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = \mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}$.

7.80. 1) $y = 4x - \frac{x^3}{3}$; 2) $y = \frac{x^4}{4} - x^3$;
3) $y = x^2(1 - x)$; 4) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

В упражнениях **7.81–7.83** найдите точки экстремума функции и значения функции в точках экстремума.

7.81. 1) $y = 4x - x^2$; 2) $y = 7x^2 - 56x + 8$;
3) $y = x^2 + 2x - 3$; 4) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$.

7.82. 1) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$; 2) $y = x^3 - 3x$;
3) $y = x^4 - 2x^2$; 4) $y = \frac{1}{x} + x$.

7.83. 1) $y = 3\cos x$; 2) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$;

B

В упражнениях **7.84–7.87** найдите промежутки монотонности функций.

7.84. 1) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; 2) $y = x^3 - 3x + 1$;
3) $y = 2x^4 - x + 1$; 4) $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

7.85. 1) $y = 1 + \dfrac{3}{2-x}$; 2) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$;
3) $y = \left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)^3$; 4) $y = x + \dfrac{4}{x^2}$.

7.86. 1) $y = \sin 2x + x$; 2) $y = \sin x + \cos x$;
3) $y = x - \cos 2x$; 4) $y = x - \sin 2x$.

7.87. 1) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; 2) $y = \sqrt{5 - 2x}$;
3) $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$; 4) $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$.

В упражнениях **7.88–7.91** найдите экстремумы функций.

7.88. 1) $y = 2x^3 - 3x^2$; 2) $y = x^3 - 6x^2 + 12x$;
3) $y = 4x - x^4$; 4) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

7.89. 1) $y = \dfrac{x}{1+x+x^2}$; 2) $y = \dfrac{3x}{1+x^2}$;
3) $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; 4) $y = \dfrac{2x-1}{x^2-1}$.

7.90. 1) $y = \dfrac{2x^2}{3} \cdot \sqrt[3]{6x-7}$; 2) $y = -x^2 \cdot \sqrt{x^2+2}$.

7.91. 1) $y = \sin^2 x - \cos x$; 2) $y = \sin^2 x - \dfrac{x}{2}$; 3) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$;
4) $y = x - \operatorname{arctg} x$; 5) $y = \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \cos x$; 6) $y = \dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$.

7.92. Покажите, что функция является монотонной на всей числовой прямой:

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} + x - 5$; 2) $f(x) = 6 - 6x - 2x^3 + 3x^2$;
3) $y = 2x - \sin x$; 4) $y = \cos\dfrac{x}{2} - x$.

C

7.93. Сколько корней имеет уравнение:
1) $x^3 - 6x^2 - 15x + 2 = 0$; 2) $3x^2 - x^3 - 2 = 0$;
3) $2x^3 - 6x^2 - 48x - 17 = 0$; 4) $4x - x^4 = 0$?

7.94. Напишите уравнение касательной к кривой $y = \sqrt{2-5x}$ в точке ее пересечения с осью ординат.

7.95. Напишите уравнение касательной к кривой $y = 2x^3 - 3x^2 + 6x$, параллельной прямой $6x - y = 5$.

7.96. Существует ли касательная к кривой $y = \sqrt{x^2+1}$, которая параллельна прямой $y = x$?

7.97. Найдите промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функции:
1) $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$; 2) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Упражнения для повторения

7.98. Вычислите:
1) $432 + 72 + 12 + \ldots + 2$; 2) $512 + 256 + 128 + \ldots + 2$.

7.99. Вычислите $\operatorname{tg} x$, если $\cos 2x = -\dfrac{5}{13}$ и $x \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

7.100. Решите уравнение: 1) $|x - 3| + 2|x + 1| = 4$; 2) $|3x + 1| + x = 9$.

7.5. Упрощенная схема исследования и построения графика функции

7.5.1. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда она на отрезке $[a; b]$ принимает свои наибольшее и наименьшее значения. Теперь рассмотрим вопросы нахождения этих значений.

Очевидно, что функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ свои наибольшее и наименьшее значения может принимать в точках экстремума, принадлежащих отрезку $[a; b]$ или на концах a, b этого отрезка. Поэтому наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке определяют по нижеследующим правилам.

1) *Нужно найти критические точки функции $y = f(x)$, принадлежащие отрезку $[a; b]$, и их вместе с a и b нужно выписать в порядке возрастания: $a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b$.*

2) *В найденных точках нужно определить значения функции: $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)$.*

3) *Среди этих найденных значений функции нужно отобрать наибольшее и наименьшее, которые и будут, соответственно, наибольшим и наименьшим значениями функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.*

Пример 1. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x + 1$ на отрезке $[-3; 0]$.

▲ Сначала определим критические точки функции: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$. Из них только $x = -1$ принадлежит отрезку $[-3; 0]$. Поэтому нужно определить значения функции в точках: $-3; -1; 0$. Имеем $f(-3) = (-3)^3 - 3(-3) + 1 = -17$, $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$, $f(0) = 1$. Следовательно, $f(-1) = 3$ – наибольшее значение функции на отрезке $[-3; 0]$, а $f(-3) = -17$ – ее наименьшее значение. Ответ: $\max\limits_{x\in[-3;0]} f(x) = f(-1) = 3;\ \min\limits_{x\in[-3;0]} f(x) = f(-3) = -17.$ ■

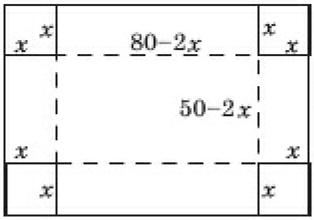


Рис. 7.10

Пример 2. Из прямоугольной жести размером (80×50) см² нужно сделать коробку без крышки с наибольшей вместимостью (объемом) (рис. 7.10).

▲ Как показано на рис. 7.10, сторону квадрата, который вырезается из данной жести, обозначим через x.

Тогда $0 \leqslant x \leqslant 25$ и объем коробки равен $V(x) = x\cdot(80-2x)(50-2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$, т.е. объем коробки $V(x)$ есть функция, зависящая от x. Теперь нужно определить наибольшее значение этой функции на отрезке $[0; 25]$: $V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 130x + 1000 = 0 \Rightarrow x_1 = 10$ и $x_2 = \frac{100}{3}$. Так как $10\in[0; 25]$ и $\frac{100}{3} \notin [0;25]$, то находим значения $V(x)$ функции в точках $0; 10; 25$, т. е. $V(0) = V(25) = 0$ и $V(10) = 18000$. Следовательно, при $x = 10$ см объем коробки будет наибольшим.

Ответ: $V = 18000$ см³. ■

7.5.2. Упрощенная схема исследования и построения графика функции

Мы уже рассматривали эту схему исследования и построения графика функции в пункте 1.3 из раздела 1. Здесь мы будем придерживаться той же схемы исследования и построения графика функции. Однако наша дальнейшая работа по исследованию функции во многом отличается от указанной схемы по содержанию, т.к. здесь мы в полной мере используем понятие производной функции, которая намного облегчает работу по многим пунктам схемы. Итак, при исследовании функции удобно придерживаться следующей схемы.

1. *Нужно найти область определения функции.*
2. *Если есть, то нужно найти точки разрыва функции и определить вертикальные асимптоты.*
3. *Нужно определить четность и периодичность функции.*

4. *Нужно определить координаты точек пересечения графика функции с осями координат.*

5. *Нужно найти критические точки функции.*

6. *Определить промежутки возрастания и убывания функции и ее точки экстремума.*

7. *Если необходимо, то определяют координаты нескольких точек, принадлежащих графику функции, и найденные данные для удобства заносят в итоговую таблицу. С помощью этой таблицы схематически строят график функции.*

Рассмотрим пример.

Пример 3. Исследуем и построим график функции $y = x^3 + x^2 - 2$.

▲ 1) Область определения: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) Функция не имеет точек разрыва, т.е. она непрерывна на всей числовой прямой.

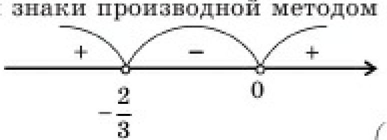
3) Функция общего вида (ФОВ), т.е. не является четной или нечетной. Непериодическая.

4) Пересечение с осью Ox: $y = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1$, т.е. с осью Ox пересекается в точке $(1; 0)$.

Пересечение с осью Oy : $x = 0 \Rightarrow y = -2$, т.е. с осью Oy пересекается в точке $(0; -2)$.

5) $y' = 3x^2 + 2x = 3x\left(x + \dfrac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{2}{3}, x_2 = 0$ – критические точки.

6) Определим знаки производной методом интервалов.



Отсюда видно, что функция на множестве $\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup (0; +\infty)$ возрастает, а на промежутке $\left(-\dfrac{2}{3}; 0\right)$ убывает. Значит, $x_1 = -\dfrac{2}{3}$ – точка максимума, а $x_2 = 0$ – точка минимума, т. е. $\max f(x) = f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{50}{27} = -1,85$, $\min f(x) = f(0) = -2$.

7) Определенные выше данные внесем в таблицу.

x	$\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$	0	$(0; +\infty)$	1
$f(x)$	$\nearrow$	max $-\frac{50}{27}$	$\searrow$	min -2	$\nearrow$	0
$f'(x)$	+	0	–	0	+	

Теперь по данным этой таблицы схематично можно построить график данной функции (рис. 7.11). ■

1. Как определить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке? Поясните ответ.
2. Сформулируйте основные этапы схемы исследования и построения графика функции и поясните их.

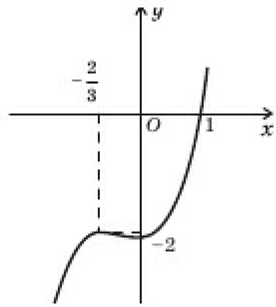


Рис. 7.11

Упражнение

А

В упражнениях **7.101–7.106** найдите наибольшее и наименьшее значения функции на указанных отрезках.

7.101. $y = x^3 - 3x^2 + 3$; 1) $[-1; 1]$; 2) $[1; 3]$; 3) $[-1; 3]$.

7.102. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 10$; 1) $[0; 1]$; 2) $[0; 2{,}5]$; 3) $[0; 4]$.

7.103. $y = x^4 - 8x^2 - 9$; 1) $[-1; 1]$; 2) $[0; 3]$; 3) $[3; 5]$.

7.104. $y = \frac{2x-5}{x^2-4}$; 1) $[-1{,}5; 1{,}5]$; 2) $[3; 5]$; 3) $[-3; 5]$.

7.105. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; 1) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; 2) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

7.106. $y = 2\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 1) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

В упражнениях **7.107–7.109** исследуйте и постройте график указанных функций.

7.107. 1) $y = 4x - x^2$; 2) $y = x^2 + 2x - 3$;
3) $y = 1 - x - x^2$; 4) $y = 2x^2 - x - 3$.

7.108. 1) $y = 3x^2 - x^3$; 2) $y = 2x^2 - x^4$;
3) $y = (x + 3)^3$; 4) $y = x^4 + 4x^3 - 18x^2 + x - 17$.

7.109. 1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

В

7.110. Среди всех прямоугольников с периметром $2a$ найдите такой, который имеет наибольшую площадь.

7.111. Разложите 12 на два положительных слагаемых так, чтобы сумма кубов этих слагаемых была наименьшей.

7.112. Разложите 10 на два слагаемых так, чтобы произведение этих слагаемых было наибольшим.

7.113. Разложите 36 на два положительных множителя так, чтобы сумма этих множителей была наименьшей.

7.114. Покажите, что среди всех равнобедренных треугольников с периметром P наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

7.115. Найдите радиус цилиндра наибольшего объема, вписанного в данную сферу радиусом R.

7.116. Впишите в остроугольный треугольник с основанием a и высотой h прямоугольник наибольшей площади. Найдите площадь этого прямоугольника.

В упражнениях **7.117–7.119** исследуйте и постройте график указанных функций.

7.117. 1) $y = x^2(1 - x)$; 2) $y = (1 - x^2)(2 + x)$;
3) $y = (1 - x^2)(1 - x^3)$; 4) $y = (x - 2)^2(x + 1)^2$.

7.118. 1) $y = \sqrt{2} - 2\sin^2 x$; 2) $y = 2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.119. 1) $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$; 2) $y = \frac{3 - x^2}{x + 2}$; 3) $y = \frac{x^2}{x - 2}$; 4) $y = \frac{x + 2}{x - 1}$.

C

7.120. Какой сектор нужно вырезать из круга радиусом R, чтобы из оставшейся части круга можно было построить конус наибольшего объема?

7.121. Найдите положительное число x, такое, чтобы разность $x - x^2$ принимала наибольшее значение.

7.122. Материальная точка движется прямолинейно по закону: $s(t) = 5t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$. Здесь s (t) измеряется в метрах, а время t – в секундах. В какой момент времени скорость материальной точки будет наибольшей?

7.123. Даны два прожектора, расстояние между которыми равно 30 м, и соотношение мощности освещения которых равно 27 : 8. В какой точке отрезка, соединяющего эти прожекторы, освещенность наименьшая?

7.124. Расстояние от буровой вышки до ближайшей точки прямолинейной трассы 9 км, а от последней точки до населенного пункта на трассе – 23 км. Скорость велосипедиста по бездорожью равна 8 км/ч, а по трассе – 10 км/ч. До какой точки трассы велосипедист должен ехать по бездорожью, чтобы доехать до населенного пункта за наименьшее время?

7.125. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x-1}{|x-3|}\cdot\left(x^2-9\right)$; 2) $y = \dfrac{2-x}{|x+1|}\cdot\left(x^2-x-2\right)$.

Упражнения для повторения

7.126. Решите неравенство: 1) $\dfrac{8|x|-14}{x-3} \leqslant 4$; 2) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8} \leqslant 0$.

7.127. Найдите значение выражения $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}\cdot\dfrac{a^2b^2}{a+b}$ при $a = -0{,}1$ и $b = 95$.

7.6. Полная схема исследования функции и построения ее графика

7.6.1. Промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a; b)$ и $a < x_1 < x_2 < b$. Тогда уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1; f(x_1))$ и $B(x_2; f(x_2))$ графика функции, таково:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)},$$

или $$y = \frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x)}{x_2-x_1}. \qquad (1)$$

Правую часть равенства (1) обозначим через $h(x)$. Тогда секущая AB имеет уравнение $y = h(x)$. Отсюда $h(x_1) = f(x_1)$ и $h(x_2) = f(x_2)$.

Определение 1. *Если для любых точек x_1 и x_2, таких как $a < x_1 < x_2 < b$ и любого $x_0 \in (x_1; x_2)$ выполняется неравенство*

$$h(x_0) \leqslant f(x_0), \qquad (2)$$

то график функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вверх*** *на промежутке $(a; b)$. А если выполняется неравенство*

$$h(x_0) \geqslant f(x_0), \qquad (3)$$

то график функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вниз*** *на промежутке $(a; b)$.*

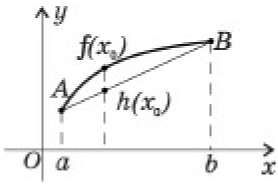


Рис. 7.12

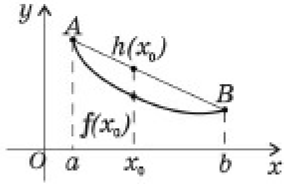


Рис. 7.13

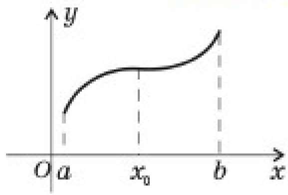


Рис. 7.14

Геометрически график выпуклой вверх (вниз) функции расположен выше (ниже) хорды AB (рис. 7.12 и 7.13).

Теорема 1. (***Достаточные условия выпуклости функции.***) *Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке $(a; b)$. Тогда, если: 1) для любого $x \in (a; b)$ выполняется неравенство $f''(x) < 0$, то функция на промежутке $(a; b)$ будет выпуклой вверх; 2) для любого $x \in (a; b)$ выполняется неравенство $f''(x) > 0$, то функция на промежутке $(a; b)$ будет выпуклой вниз.*

Эту теорему приведем без доказательства.

Данная теорема дает достаточные условия выпуклости функции, но они не необходимы. Например, функция $y = x^4$ является выпуклой книзу на всей числовой оси, хотя ее вторая производная $y'' = 12x^2$ равна нулю в точке $x = 0$.

Определение 2. *Если знаки разности $h(x) - f(x)$, где $x \in (a; b)$, различны на промежутках $(a; x_0)$ и $(x_0; b)$, то x_0 называется* ***точкой перегиба функции*** $y = f(x)$ (рис. 7.14).

Итак, точка перегиба является граничной точкой между промежутками выпуклости вверх и вниз данной функции.

Теорема 2. (***Необходимое условие точки перегиба.***) *Пусть функция $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет непрерывную производную второго порядка. Если x_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.*

▲ Предположим, что это не так. Пусть $f''(x_0) \neq 0$. Для определенности будем считать, что $f''(x_0) > 0$. Так как $f''(x)$ непрерывна в окрестности x_0, то $f''(x)$ сохраняет свой знак в некоторой окрестности точки x_0, т.е. в этой окрестности $f''(x_0) > 0$. Следовательно, по теореме 1 разность $h(x) - f(x) > 0$ в окрестности точки x_0, т.е. x_0 не является точкой перегиба. Это противоречит тому, что x_0 есть точка перегиба функции $f(x)$. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Доказанная теорема дает только необходимое условие точки перегиба, оно недостаточно. Например, для функции $y = x^4$ вторая производная $y'' = 12x^2$ равна нулю в точке $x = 0$. Однако точка $x = 0$ не является точкой перегиба этой функции, т.к. она выпукла вниз на всей числовой оси.

Теорема 3. (***Достаточное условие точки перегиба.***) *Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке $(a; b)$. Если знаки второй производной $f''(x)$ различны на промежутках $(a; x_0)$ и $(x_0; b)$, то x_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$.*

▲ Пусть $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$ и для определенности предположим, что $f''(x) > 0$ при $\forall x \in (x_1; x_0)$ и $f''(x) < 0$ при $\forall x \in (x_0; x_2)$. Тогда функция $y = f(x)$ выпукла вниз на промежутке $(x_1; x_0)$ и выпукла вверх на промежутке $(x_0; x_2)$, (теорема 1). Тогда по определению x_0 является точкой перегиба данной функции. ■ В другом случае теорема доказывается аналогично.

Заметим, что строгое доказательство данной теоремы приводится в курсе высшей математики.

Пример 1. Определим промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба функции: 1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 7$.

▲ 1) $y' = 2x + 2$ и $y'' = 2 > 0$ для $\forall x \in (-\infty; +\infty)$. Следовательно, функция выпукла вниз на всей числовой оси и точек перегиба не имеет.

2) $y' = 3x^2 + 6x - 2$ и $y'' = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$. Если $x < -1$, то $y'' < 0$, а если $x > -1$, то $y'' > 0$. Поэтому эта функция на промежутке $(-\infty; -1)$ выпукла вверх, а на промежутке $(-1; +\infty)$ выпукла вниз и является точкой перегиба. ■

7.6.2. Полная схема исследования и построения графика функции

Здесь мы уточним и дополним схему исследования и построения графика функции, рассмотренную нами в пункте 7.5 (подпункт 7.5.2), с учетом нахождения промежутков выпуклости кверху и книзу, точек перегиба, наклонных асимптот и применения теории пределов. Эти дополнительные свойства позволяют исследовать функцию более широко, глубже и помогают точно строить их графики.

В целом при исследовании функции нет необходимости в строгом соблюдении пунктов какой-либо схемы исследования. Эти работы во многом зависят от той задачи и цели, которую мы ставим перед собой. Однако удобство систематизации всякой исследовательской работы очевидно. Поэтому мы предлагаем следующую схему исследования функции.

1. *Нужно определить область определения функции и точки разрыва функции, если таковые имеются.*

2. *Нужно найти вертикальную и наклонную асимптоты функции.*
3. *Нужно определить четность и периодичность функции.*
4. *Нужно найти точки пересечения с осями координат графика функции.*
5. *Нужно найти первую и вторую производные функции, точки, в которых они обращаются в нуль, и точки, в которых не существуют эти производные.*
6. *Исследуя знаки первой и второй производной, нужно определить промежутки возрастания и убывания, вогнутости кверху и книзу, точки экстремума, точки перегиба и значения функции в этих точках (хотя бы приближенно).*
7. *Если необходимо, то определяют координаты еще нескольких точек, принадлежащих графику функции, и найденные данные для удобства заносят в одну таблицу. С помощью этой таблицы схематично строят график функции.*

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2. Построим график функции $y = 0{,}1x^4 - 1{,}3x^2 + 3{,}6$.

▲ 1. Функция определена на всей числовой оси: $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и точек разрыва не имеет.

2. Так как функция не имеет точек разрыва, то она не имеет вертикальной асимптоты. Она также не имеет наклонной асимптоты, т.к. $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. А предел функции на бесконечности таков:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(0{,}1x^4 - 1{,}3x^2 + 3{,}6\right) = +\infty \text{ и}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(0{,}1x^4 - 1{,}3x^2 + 3{,}6\right) = +\infty.$$

3. $f(-x) = 0{,}1(-x)^4 - 1{,}3(-x)^2 + 3{,}6 = 0{,}1x^4 - 1{,}3x^2 + 3{,}6 = f(x)$, т.е. функция четная и ее график симметричен относительно оси Oy.

Функция непериодическая.

4. Точки пересечения с осью Ox: $y = 0 \Rightarrow 0{,}1x^4 - 1{,}3x^2 + 3{,}6 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Rightarrow x^2 = z \Rightarrow z^2 - 13z + 36 = 0 \Rightarrow z_1 = 4,\ z_2 = 9$. Тогда $x_{1,2} = \pm 2$ и $x_{3,4} = \pm 3$, т.е. график функции ось абсцисс пересекает в точках $M_1(-3;\ 0)$, $M_2(-2;\ 0)$, $M_3(2;\ 0)$, $M_4(3;\ 0)$, а ось Oy пересекает в точке $N(0;\ 3{,}6)$, т.к., если $x = 0$, то $y = 3{,}6$.

5. Производная первого порядка: $y' = 0{,}1 \cdot 4x^3 - 1{,}3 \cdot 2x = 0{,}2x\,(2x^2 - 13) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ и $y' = 0{,}4x\left(x - \dfrac{\sqrt{26}}{2}\right)\left(x + \dfrac{\sqrt{26}}{2}\right)$.

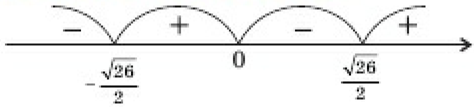


Рис. 7.15

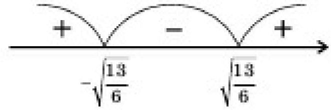


Рис. 7.16

Вторая производная:

$$y'' = 1,2x^2 - 2,6 = 1,2\left(x - \sqrt{\frac{13}{6}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{13}{6}}\right) \Rightarrow y'' = 0, \text{ если } x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{13}{6}}.$$

6. Знаки первой и второй производных функции удобно определять методом интервалов. На рис. 7.15 изображены знаки y', а на рис. 7.16 – знаки y''.

Тогда на множестве $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{26}}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{26}}{2}\right)$ функция убывает, а на множестве $\left(-\frac{\sqrt{26}}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{26}}{2}; \infty\right)$ функция возрастает.

$x = -\frac{\sqrt{26}}{2}$ – точка минимума: $f\left(-\frac{\sqrt{26}}{2}\right) = -0,625$;

$x = 0$ – точка максимума: $f(0) = 3,6$;

$x = \frac{\sqrt{26}}{2}$ – точка минимума: $f\left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right) = -0,625$.

На множестве $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{13}{6}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{13}{6}}; +\infty\right)$ функция выпукла вниз, а на множестве $\left(-\sqrt{\frac{13}{6}}; \sqrt{\frac{13}{6}}\right)$ функция выпукла вверх, $x = \pm\sqrt{\frac{13}{6}}$ являются точками перегиба: $f\left(\pm\sqrt{\frac{13}{6}}\right) = \frac{451}{360} \approx 1,25$.

7. Определенные выше данные занесем в таблицу:

x	$-\infty$	$\left(-\infty; -\frac{\sqrt{26}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{26}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{26}}{2}; -\sqrt{\frac{13}{6}}\right)$	$-\sqrt{\frac{13}{6}}$	$\left(-\sqrt{\frac{13}{6}}; 0\right)$	0
y	$-\infty$	↘ ∪	min −0,625	↗ ∪	Точка перегиба ≈1,25	↗ ∩	max 3,6
y'		–	0	+	+	+	0
y''		+	+	+	0	–	–

x	$\left(0; \sqrt{\frac{13}{6}}\right)$	$\sqrt{\frac{13}{6}}$	$\left(\sqrt{\frac{13}{6}}; \frac{\sqrt{26}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{26}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{26}}{2}; +\infty\right)$	$+\infty$
y	$\searrow \cup$	Точка перегиба $\approx 1{,}25$	$\searrow \cup$	min $-0{,}625$	$\nearrow \cap$	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	

По данным этой таблицы схематично строим график данной функции (рис.7.17). ■

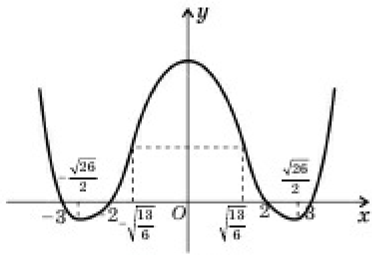


Рис. 7.17

Пример 3. Построим график функции $y = (x+1)^3 \sqrt[3]{x^2}$.

▲ 1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет.

2. Асимптот не имеет.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$

3. ФОВ, непериодическая.

4. Ox : $y = 0 \Rightarrow (x+1)^3 \sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0$, т.е. с осью Ox пересекается в точках $(-1;\ 0)$ и $(0;\ 0)$, а с осью Oy также пересекается в точке $(0;\ 0)$.

5. $y' = \dfrac{(x+1)^2(11x+2)}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y'$ не определена в точке $x = 0$ и $y' = 0$ при $x_1 = -1$ и $x_2 = -\dfrac{2}{11}$, т.е. точки $-1;\ -\dfrac{2}{11};\ 0$ – критические точки.

$y'' = \dfrac{2(x+1)(44x^2+16x-1)}{9x\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y''$ не определена в точке $x = 0$ и $y'' = 0$ при $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{27}}{22}$, $\left(x_2 = -\dfrac{9}{22},\ x_3 = \dfrac{1}{22}\right)$.

6. Знаки y' и y'' соответственно изображены на рис. 7.18 и рис. 7.19.

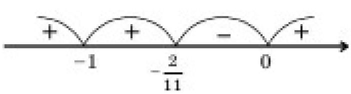


Рис. 7.18

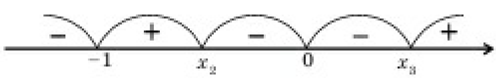


Рис. 7.19

Отсюда функция на множестве $\left(-\infty; -\frac{2}{11}\right) \cup (0; +\infty)$ возрастает, а на промежутке $\left(-\frac{2}{11}; 0\right)$ – убывает. В точке $x = -1$ нет экстремума. Точка $x = -\frac{2}{11}$ – точка максимума: $f\left(-\frac{2}{11}\right) = 0{,}18$; $x = 0$ – точка минимума: $f(0) = 0$. На множестве $(-\infty; -1) \cup (x_2; 0) \cup (0; x_3)$ функция выпукла вверх, а на множестве $(-1; x_2) \cup (x_3; +\infty)$ функция выпукла вниз.

Точки $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{-4 - \sqrt{27}}{22} = -\frac{9}{22}$, $x_3 = \frac{-4 + \sqrt{27}}{22} = \frac{1}{22}$ – точки перегиба: $f(-1) = 0$, $f(x_2) \approx 0{,}114$, $f(x_3) \approx 0{,}146$. В этом примере отчетливо видна важность знания промежутков выпуклости и точек перегиба функции. Действительно, если бы мы построили график функции без помощи второй производной, т.е. по упрощенной схеме (пункт 7.4, подпункт 7.4.2), то график этой функции имел бы вид как на рис. 7.20. А с учетом промежутков выпуклости и точек перегиба график этой функции выглядит как на рис. 7.21.

7. Разумеется, удобно строить график данной функции, имея следующую таблицу:

x	$-\infty$	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; x_2)$	x_2	$\left(x_2; -\frac{2}{11}\right)$	$-\frac{2}{11}$
y	$-\infty$	$\nearrow \cup$	Точка перегиба 0	$\nearrow \cup$	Точка перегиба $\approx 0{,}114$	$\nearrow \cap$	max $\approx 0{,}18$
y'		+	0	+	+	+	0
y''		–	0	+	0	–	–

x	$\left(-\frac{2}{11}; 0\right)$	0	$(0; x_3)$	x_3	$(x_3; +\infty)$	$+\infty$
y	$\searrow \cup$	min 0	$\nearrow \cup$	Точка перегиба $\approx 0{,}146$	$\nearrow \cap$	$+\infty$
y'	–	нет	+		+	
y''	–	нет	–		+	

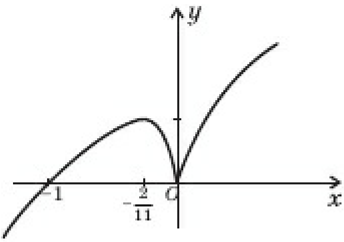


Рис. 7.20

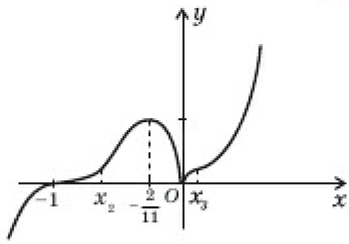


Рис. 7.21

Пример 4. Построим график функции $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$.

▲ 1. Т.к. $x \neq 1$, то $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ есть область определения данной функции.

2. $x = 1$ есть точка разрыва; в этой точке найдем односторонние пределы $f(1 - 0)$ и $f(1 + 0)$:

$$f(1-0) = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = +\infty, \qquad f(1+0) = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = -\infty,$$

т.е. прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика данной функции.

Далее найдем наклонную асимптоту (если она существует):

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4}{x(x-1)} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 - 4}{x - 1} - x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 4}{x - 1} = 1.$$

Т.е. при $x \to +\infty$ прямая $y = x + 1$ является наклонной асимптотой. Аналогично, при $x \to -\infty$ прямая $y = x + 1$ также является наклонной асимптотой.

Теперь определим пределы функции на бесконечности:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 4}{x - 1} = +\infty.$$

Эти соотношения также показывают на то, что функция не имеет горизонтальных асимптот.

3. Функция непериодическая и ФОВ.

4. Точки пересечения с осью

$$Ox: y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x - 1} = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

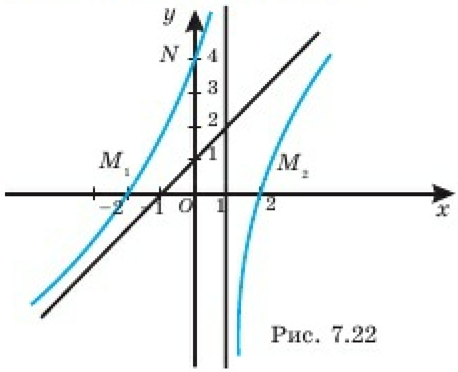


Рис. 7.22

Т.е. график функции пересекает ось Ox в точках $M_1(-2;\ 0)$ и $M_2(2;\ 0)$. Так как при $x = 0$ имеем, что $y = 4$, то график функции пересекает ось Oy в точке $N(0;\ 4)$ (рис. 7.22).

5. Найдем производные первого и второго порядков:

$$y' = \frac{2x(x-1)-(x^2-4)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2} \neq 0,$$

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x+4)}{(x-1)^4} = -\frac{2}{(x-1)^3} \neq 0.$$

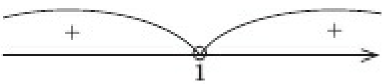


Рис. 7.23

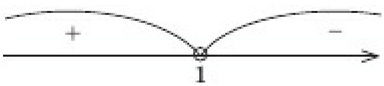


Рис. 7.24

6. Знаки производной первого порядка (рис. 7.23).

Т.е. функция во всей области определения монотонно возрастает и не имеет точек экстремума.

Знаки производной второго порядка (рис. 7.24).

На промежутке $(-\infty;\ 1)$ функция выпукла вниз, а на промежутке $(1;\ +\infty)$ выпукла вверх. Т.к. $y'' \neq 0$, то график функции не имеет точек перегиба.

7. Данные, определенные выше, занесем в таблицу:

x	$-\infty$	$(-\infty;\ -1)$	$1-0$	1	$1+0$	$(1;\ +\infty)$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow \cup$	$+\infty$	Не опред.	$-\infty$	$\nearrow \cap$	$+\infty$
y'		$+$		Не опред.		$+$	
y''		$+$		Не опред.		$-$	

1. Напишите уравнение секущей к графику функции $y = f(x)$, проходящей через точки $A(x_1; f(x_1))$ и $B(x_2; f(x_2))$.
2. Дайте определение выпуклости функции вверх и вниз.
3. Сформулируйте достаточное условие выпуклости функции и докажите его.
4. Какая точка называется точкой перегиба функции?
5. Сформулируйте необходимое условие точки перегиба функции и докажите его.
6. Сформулируйте достаточное условие точки перегиба функции и докажите его.
7. Сформулируйте полную схему исследования функции и поясните ее. Чем отличается эта схема от упрощенной схемы из пункта 7.6 (подпункт 7.6.2)?

Упражнения

А

В упражнениях **7.128–7.130** определите промежутки выпуклости и точки перегиба данных функций.

7.128. 1) $y = 3x^2 - x^3$; 2) $y = 2x^2 - x^4$;
3) $y = (x + 3)^2$; 4) $y = x^4 + 4x^3 - 18x^2 + x - 17$.

7.129. 1) $y = \dfrac{3}{3 + x^2}$; 2) $y = \dfrac{x - 1}{2x + 3}$; 3) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$; 4) $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}$.

7.130. 1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

В упражнениях **7.131–7.139** исследуйте функции и постройте их график.

7.131. 1) $y = x(2 - x)^2$; 2) $y = 0{,}2(x^3 - 6x^2 + 25)$;
3) $y = x^3 - 5x^2 + 8x$; 4) $y = 2x^3 - 3x + 1$.

7.132. 1) $y = x^4 - 2x^2 - 3$; 2) $y = 2x^2 - x^4$;
3) $y = 9x^5 + 3x^3$; 4) $y = 0{,}5(x + 1)^2(x - 2)^3$.

В

7.133. 1) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$; 2) $y = \dfrac{2}{x^2 + x + 1}$; 3) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; 4) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$.

7.134. 1) $y = x\sqrt{2 - x}$; 2) $y = x^2\sqrt{1 + x}$;
3) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$; 4) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$.

7.135. 1) $y = \dfrac{1}{3}\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 2\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right)$;

3) $y = x + \sin x$; 4) $y = \cos 2x - x + 1$.

7.136. 1) $y = \sin x - \cos 2x$; 2) $y = \sin x - \operatorname{tg} x$;
3) $y = \sin^2 x + \cos x$; 4) $y = \sin 2x + \cos x$.

C

7.137. 1) $y = \dfrac{1}{3+2\cos x}$; 3) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$;

2) $y = \dfrac{1+\cos x}{3-\sin x}$; 4) $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

7.138. 1) $y = x\sin x$; 2) $y = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$; 3) $|y| = \cos x$.

7.139. 1) $y = x|x| + 1$; 2) $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}\cdot(x^2-4)$.

7.140. Даны числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. При каких значениях x функция $f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$ принимает минимальное значение?

7.141. Покажите, что точки перегиба функции $y = 3x^5 - 10x^3 + 3x$ лежат на одной прямой.

Упражнения для повторения

7.142. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства:

1) $x^3 - 4x < 0$; 2) $\dfrac{x^2+x}{x-3} < 0$.

7.143. Найдите корни уравнения:
1) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$; 2) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$.

Материалы из истории

Начиная с XVII в., одним из важнейших понятий математики является понятие функции. Оно сыграло и ныне играет большую роль в познании реального мира. Значительную роль в развитии понятий функции сыграл метод координат, созданный французскими учеными Р. Декартом (1596–1650) и П. Ферма (1601–1665). В труде «Геометрия» Декарта и в работах Ферма, Ньютона и Лейбница понятие «функции» носило по существу интуитивный характер и было связано либо с геометрическими, либо с механическими представлениями: ординаты точек кривых – функции от абсциссы (x); путь и скорость – функции от времени (t) и т.п. Так Ньютон функцию назвал флюэнтой (в смысле текущей величины, от латинского fluere – течь), производную – флюксией (от того же fluere), и тем самым функция в трактовке Ньютона уже по определению является непрерывной. Слово «функция» (от латинского functio – совершение, выполнение) Лейбниц употреблял с

1673 г. в смысле роли (величина, выполняющая ту или иную функцию). У Лейбница понятие функции связывалось с графиком. С именами Л. Эйлера (1707–1783) и И. Бернулли (1667–1748) связано понимание функции как аналитического выражения, т.е. выражения, составленного из переменных и чисел с помощью аналитических действий. Л. Эйлер пользовался более общим подходом к понятию функции: он рассматривал функцию как зависимость одной переменной величины от другой. Эта точка зрения получила дальнейшее развитие в трудах Н. И. Лобачевского (1792 – 1856), немецкого математика П. Дирихле (1805 – 1859) и других ученых. В результате функцию начали рассматривать как соответствие между числовыми множествами.

Происхождение понятия предела, корни которого уходят в глубокую древность, связано с определением площадей криволинейных фигур и объемов тел, ограниченных кривыми поверхностями. Древнегреческий математик Евдокс (IV в. до н. э.) неявно пользовался предельным переходом. Метод Евдокса был назван в XVII веке методом исчерпывания и им пользовались Евклид, Архимед и другие ученые древности. С помощью своего метода Евдокс доказал, что объем пирамиды равен трети объема призмы с той же высотой и тем же основанием. Динострат, современник и ученик Евдокса, применяя метод своего учителя, фактически нашел первый замечательный предел, который в современной записи имеет вид: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Вопросам, связанным с переменными и бесконечно малыми величинами, посвящено много трудов ученых древности и средних веков. Во второй половине XVI и XVII веков сочинения Архимеда получили широкое распространение. В трудах Г. Галилея, И. Кеплера, Б. Кавальери, А. Таке и др. ученых впервые были применены идеи бесконечного в геометрии. В тот же период последовали работы Ферма, Паскаля, Валлиса, Ньютона и Лейбница, которые привели к формированию новых важных понятий – производной, интеграла и к созданию исчисления бесконечно малых. Термин «предел» ввел Ньютон. Обозначение lim – сокращение латинского слова limes (в смысле: межа, граница). Уменьшая, например Δx, мы устремляем $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ к «границе» $f'(x_0)$.

Термин «производная» является буквальным переводом французского слова derivee, которое ввел Ж. Лагранж (1736–1813) и он же ввел современное обозначение производной y', f'. Если Ньютон производную назвал флюксией, то Г. Лейбниц (1646–1716) говорил о дифференциальном отношении и обозначал производную как $\frac{df}{dx}$. Дифференциальное исчисление создано И. Ньютоном и Г. Лейбницем в конце XVII в. Если Ньютон исходил в основном из задач механики, то Лейбниц по преимуществу исходил из геометрических задач.

Говоря о последующем развитии идей анализа, следует отметить имена таких ученых, как Я. Бернулли, И. Бернулли, А. Лопиталь и др. Ряд значительных результатов получили Ж. Лагранж, Л. Эйлер, К. Гаусс, работы которых сыграли важную роль в осмыслении основ анализа. Решающий шаг к созданию прочного фундамента анализа был сделан в 20-е годы XIX века французским математиком О. Коши (1789–1857), предложившим точное определение предела функции и определение непрерывности на языке «$\varepsilon - \delta$». Этими определениями мы пользуемся до сих пор.

Раздел 8. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

8.1. Случайные величины и их числовые характеристики.
8.2. Виды некоторых дискретных случайных величин.

8.1. Случайные величины и их числовые характеристики

8.1.1. Случайные величины

Понятие случайной величины является одним из основных понятий теории вероятностей. Во всех примерах теории вероятностей, рассмотренных нами в младших классах, случайные события так или иначе связаны с некоторыми числовыми значениями. Например, при бросании игральной кости может выпасть одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6, т.е. наступившее при этом случайное событие выражается одним из этих чисел, причем невозможно предугадать точно, какое из этих чисел выпадет. Подобные случайные события, выражающиеся числовыми значениями, называются случайными величинами. Аналогично, число вызовов, поступивших на станцию скорой помощи в определенный временной промежуток суток, число учащихся, опоздавших на занятия в определенный день, процент всхожести семян, посеянных на данном участке земли, и т.п. являются случайными величинами[1].

Итак, ***случайной величиной*** называют величину, которая в результате некоторого испытания (эксперимента) принимает одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены. Другими словами, случайной величиной называют значения числовой функции $X = X(A_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, определенной в пространстве элементарных функций $U = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Случайные величины обозначают заглавными буквами латинского алфавита: X, Y, Z, ..., а значения случайных величин — малыми буквами этого алфавита: x, y, z,... .

Вообще, в курсе высшей математики рассматриваются два вида случайных величин: дискретные случайные величины и непрерывные случайные величины. Мы же здесь будем рассматривать только дискретные случайные величины.

Пусть случайная величина X принимает значения x_1, x_2, ... , x_n,... с вероятностью P_1, P_2,..., P_n,... соответственно. Тогда X называется ***дискретной случайной величиной***, т.е. дискретные случайные величины принимают только изолированные значения. Составим таблицу

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Ее называют ***законом распределения дискретной случайной величины*** X. Так как сумма вероятностей всех элементарных событий равна 1, то необходимо, чтобы

[1] Такие числовые значения выражений называются случайными величинами событий.

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n + \dots = 1.$$

Например, при бросании игральной кости закон распределения величины появления каких-либо очков записывается так:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Пример 1. В коробке имеются 5 белых и 10 красных шаров. Случайная величина X равна числу белых шаров, если из коробки наудачу извлекается один шар, т.е. значение X равно 0, если извлечен красный шар, равно 1, если извлечен белый шар. Напишем закон распределения этой случайной величины.

▲ Чтобы написать закон распределения случайной величины, необходимо, во-первых, знать все значения, которые может принимать данная случайная величина, и, во-вторых, все вероятности, с которыми эти значения принимаются данной случайной величиной. В нашем случае X принимает два значения: 0, если извлечен красный шар; 1, если извлечен белый шар.

Вероятность извлечения красного шара $P(0) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, а вероятность извлечения белого шара $P(1) = 1 - P(0) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Тогда закон распределения случайной величины X записывается так:

X	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

■

8.1.2. Числовые характеристики случайной величины

Итак, мы узнали, что закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться меньшими сведениями. Иногда даже выгоднее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно. Такие числа называют ***числовыми характеристиками случайной величины***. К числу важных числовых характеристик относится математическое ожидание.

Определение. *Пусть случайная величина X распределена по закону*

X	x_1	x_2	...	x_n	...
p	p_1	p_2	...	p_n	...

(1)

Тогда число

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n + \dots \quad (2)$$

называется ***математическим ожиданием*** *(****средним значением****) случайной величины X.*

Таким образом, при многократном повторе испытания среднее значение принимаемых случайной величиной X значений, по определению, приближенно равно $M(X)$.

Не всегда математическое ожидание может в полной мере описывать случайную величину. Например, рассмотрим случайные величины X и Y, соответственно, распределенные по закону:

X	$-0{,}01$	$0{,}02$
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

и

Y	-40	40
P	$0{,}5$	$0{,}5$

Математическое ожидание этих случайных величин таково:

$$M(X) = -0{,}01 \cdot \frac{2}{3} + 0{,}02 \cdot \frac{1}{3} = 0 \text{ и } M(Y) = -40 \cdot 0{,}5 + 40 \cdot 0{,}5 = 0.$$

Однако X и Y – совершенно различные случайные величины. Значения X сосредоточены около $M(X)$, а значения Y далеки от своего математического ожидания. Поэтому, чтобы оценить, как рассеяны возможные значения случайной величины вокруг ее математического ожидания, вводят другие числовые характеристики.

Случайную величину $\overset{\circ}{X} = X - M(X)$ называют отклонением случайной величины от ее математического ожидания. Теперь можно определить число

$$D(X) = M\left[\left(X - M(X)\right)^2\right] = M\left[\left(\overset{\circ}{X}\right)^2\right], \tag{3}$$

которое называется ***дисперсией*** случайной величины X, т.е. дисперсия равна математическому ожиданию квадрата отклонения, а число

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \tag{4}$$

называется ***средним квадратическим отклонением*** случайной величины X. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение оценивают степень рассеянности значений случайной величины около математического ожидания. На практике дисперсию вычисляют по формуле

$$D(M) = M(X^2) - (M(X))^2. \tag{5}$$

Если дана случайная величина X, распределенная по закону

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$,

то справедлива формула

$$D(M) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_n^2 p_n - (x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n)^2. \tag{6}$$

Формула (6) следует из формулы (5), которую примем без доказательства.

Пример 2. Дана случайная величина X, распределенная по закону

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найдем: а) математическое ожидание; б) дисперсию; в) среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

▲ а) По формуле (2)

$$M(X) = (-2) \cdot 0{,}1 + (-1) \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}1.$$

б) Сначала нужно найти значение $M(X^2)$:

$$M(X^2) = (-2)^2 \cdot 0{,}1 + (-1)^2 \cdot 0{,}2 + 0^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}3.$$

Теперь по формуле (5) получим:

$$D(X) = 1{,}3 - (0{,}1)^2 = 1{,}29.$$

в) $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1{,}29} = 1{,}136$.

Ответ: $M(X) = 0{,}1$, $D(X) = 1{,}29$, $\sigma(X) \approx 1{,}136$. ■

Дополнительно этим числовым характеристикам, а именно математическому ожиданию, дисперсии и среднему квадратическому отклонению следует добавить моду и медиану, рассмотренные вами в младших классах.

Например, модой (M_0) случайной величины называют ее значение с наибольшей вероятностью, а медиана M_e вычисляется по формуле

$$P(X < M_e) = P(X > M_e) = \frac{1}{2}.$$

Например, для случайной величины X, распределенной по закону

X	2	3	6	7	8	10
P_i	0,1	0,2	0,25	0,2	0,15	0,1
$\sum P_i$	0,10	0,30	0,55	0,75	0,90	1,0

Мода $M_0 = 6$, ибо значение 6 случайной величины X имеет наибольшую вероятность, а медиана $M_e = 6$, т.е. это значение случайной величины, при которой сумма вероятностей впервые становится больше 0,5.

Вообще, имеются и другие числовые характеристики случайных величин, которые мы здесь не можем рассматривать, т.к. они выходят за рамки школьной программы.

1. Что такое случайная величина? Приведите пример.
2. Какие случайные величины называются дискретными?
3. Что такое закон распределения дискретной случайной величины? Как он составляется?
4. Какому условию должны удовлетворять вероятности в законе распределения? Почему?
5. Что называется математическим ожиданием случайной величины? Каков его смысл?
6. Что такое дисперсия и среднее квадратическое отклонение? Каков их смысл?

Упражнения

А

8.1. Случайная величина равна числу выпадания «герба» при однократном бросании монеты. Напишите закон распределения этой случайной величины.

8.2. В мешочке имеются 4 красных и 6 неокрашенных альчиков. Из мешочка наудачу извлекли один альчик. При этом случайная величина X равна числу извлеченных альчиков красного цвета. Напишите закон распределения X.

8.3. Найдите математическое ожидание случайной величины, заданной в задаче **8.1**.

8.4. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной в задаче **8.2**.

8.5. Случайная величина X распределена по закону

X	-1	1	2
P	0,3	0,5	0,2

Найдите $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.6. Найдите среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределенной по закону

X	3	5	7	9
P	0,4	0,4	0,2	0,1

8.7. Случайная величина распределена по закону

X	-2	1	0	2
P	0,2	0,3	P_3	0,1

Найдите P_3 и $D(X)$.

8.8. Случайная величина распределена по закону

X	1	x_2	5
P	0,4	0,1	0,5

Найдите x_2, если $M(X) = 3,2$.

B

8.9. Монета подбрасывается дважды. Напишите закон распределения случайной величины X, равной количеству выпадения гербовой стороны монеты.

8.10. Игральная кость бросается дважды. Напишите закон распределения случайной величины X, равной числу выпадения «шестерки».

8.11. Найдите математическое ожидание случайной величины в упражнении **8.9.**

8.12. Найдите дисперсию случайной величины в упражнении **8.10.**

8.13. Стрелок при одном выстреле может поразить мишень с вероятностью, равной 0,6. Имея при себе 5 патронов, он стреляет по мишени до первого попадания или до полного расходования патронов. Случайная величина равна числу израсходованных патронов. Найдите: а) закон распределения X; б) $M(X)$; в) $D(X)$; г) $\sigma(X)$.

8.14. Из 25 контрольных работ 5 оценены на «отлично». Из этих контрольных работ наудачу отобраны три работы. Случайная величина X равна числу оцененных на «отлично» работ среди отобранных. Напишите закон распределения X.

8.15. В условиях предыдущей задачи найдите дисперсию случайной величины X.

8.16. Найдите q, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной по закону:

а)

X	-2	-3	1	2
P	0,1	q	0,4	0,2

;

б)

X	1	2	5	7
P	q	0,2	0,3	0,3

.

8.17. При каком значении y для случайной величины X, распределенной по закону

X	0	y	4	6
P	0,2	0,1	0,3	0,4

,

выполнено равенство: а) $M(X) = 9,8$; б) $D(X) = 5,16$?

C

8.18. Дана случайная величина X, распределенная по закону

X	0	1	2	...	n
P	p_0	p_1	p_2	...	p_n

,

где $P_m = C_n^m p^m q^{n-m}$, $m = 0,1,2..., n$, $q = 1 - p$, $0 < p < 1$. Случайная величина X называется распределенной по ***биномиальному закону***. Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

8.19. Случайную величину X, распределенную по закону

X	1	2	...	n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

называют распределенной по геометрическому закону, если $P_n = q^{n-1} \cdot p$, $q = 1 - p$, $0 < p < 1$. Найдите $M(X)$.

8.20. Монета подброшена 5 раз. Пользуясь упражнением **8.18**, найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, равной числу выпадения гербовой стороны монеты.

8.21. Стрелок при одном выстреле поражает мишень с вероятностью, равной 0,6. Он стреляет до первого попадания в мишень. Случайная величина X равна числу израсходованных патронов. Найдите $M(X)$ и $D(X)$ (см. упражнение **8.19**).

Упражнения для повторения

8.22. Сколькими способами можно: а) распределить; б) поделить поровну 6 учебников между двумя учениками?

8.23. К 4 л 10%-й кислоты добавили воду и получили 4%-ю кислоту. Сколько литров воды добавили?

8.24. Напишите уравнение касательной к кривой $y = \sqrt{2}\sin x$ в точке $x = \dfrac{\pi}{4}$.

8.2. Виды некоторых дискретных случайных величин (СВ)

Случайные величины, принимающие не более, чем счетное множество (т.е. эквивалентное множеству натуральных чисел), значений, называются ***дискретными случайными величинами***. Итак, дискретная случайная величина – это случайная величина, принимающая отдельные, изолированные значения. А если множество значений случайной величины есть некоторый числовой промежуток, то ее называют ***непрерывной случайной величиной***. Например, жирность молока коров некоего крестьянского хозяйства может принимать любое значение из промежутка от 3% до 5%.

1. ***Биноминальный закон распределения дискретной СВ.***

Если возможные значения СВ X являются 0, 1, 2, ..., n, а соответствующие им вероятности вычисляются по формуле Бернулли:

$$p_k = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad q = 1 - p, \qquad (1)$$

то говорят, что СВ X имеет ***биноминальный закон распределения***. СВ X, рассмотренная в примере 1, имеет биноминальный закон распределения, в котором $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$ и $n = 4$. Закон назван «биноминальным» потому, что правую часть (1) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + \ldots$$

$$\ldots + C_n^0 p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n.$$

Таким образом, биноминальный закон распределения записывается в таком в виде:

X	0	1	...	k	...	n
p_i	$C_n^0 q^n = q^n$	$C_n^1 pq^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n = p^n$

Пример 1. По мишени производится 4 независимых выстрела вероятностью попадания при каждом выстреле $p = 0{,}8$. Найдем: а) закон распределения случайной величины (СВ) X, равной числу попаданий в мишень; б) вероятность событий: $1 \leqslant X \leqslant 3$ и $X > 3$.

▲ а) Возможные значения СВ X: 0, 1, 2, 3, 4. Соответствующие значения вероятности вычисляем по формуле Бернулли:

$$p_0 = P_4(0) = C_4^0 \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^4 = 0,0016,$$

$$p_1 = P_4(1) = C_4^1 \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^3 = 0,0256,$$

$$p_2 = P_4(2) = C_4^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1536,$$

$$p_3 = P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^1 = 0,4096,$$

$$p_4 = P_4(4) = C_4^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^0 = 0,4096.$$

Итак, закон распределения СВ X имеет такой вид:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

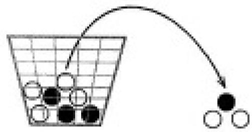
б) $P(1 \leqslant X \leqslant 3) = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}4096 = 0{,}5888$.
$P(X > 3) = p_4 = 0{,}4096$. ■

2. ***Гипергеометрический закон распределения дискретной СВ.***
Заданы натуральные числа m, n, s, k, причем $k \leqslant m \leqslant s \leqslant n$. Если возможными значениями СВ X являются 0, 1, 2, ..., m, а соответствующие им вероятности определяются по формуле

$$p_k = P(X = k) = \frac{C_m^k \cdot C_{n-m}^{s-k}}{C_n^s}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

то говорят, что СВ X имеет ***гипергеометрический закон распределения.***

Пример 2. В урне 4 белых и 3 красных шара. Из этой урны наудачу извлекают 3 шара: X – число извлеченных белых шаров. Нужно найти закон распределения дискретной СВ X и вероятность события $X \geqslant 2$.



▲ Возможные значения СВ X : 0, 1, 2, 3. Соответствующие им вероятности p_0, p_1, p_2, p_3 подсчитываем классическим способом:

$$p_0 = \frac{C_4^0 C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}, \qquad p_1 = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35},$$

$$p_2 = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}, \qquad p_3 = \frac{C_4^3 C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35}.$$

Тогда закон распределения СВ X имеет такой вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	1/35	12/35	18/35	4/35

$$P(X \geqslant 2) = p_2 + p_3 = \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35}.$$

Очевидно, что данная СВ имеет гипергеометрическое распределение. ■

3. ***Геометрический закон распределения дискретной СВ.***

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p, и, следовательно, оно не появляется с вероятностью $q = 1 - p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A. Таким образом, если событие появилось на k-м испытании, то в предшествующих $k - 1$ испытаниях оно не появилось. Обозначим через X дискретную СВ – число испытаний, которые нужно произвести до первого появления события A. При этом возможные значения СВ X: 1, 2, 3, ..., k, ... – есть множество натуральных чисел и соответствующие вероятности определяются по теореме умножения вероятностей:

$$p_1 = p,\ p_2 = qp,\ p_3 = q^2p,\ \ldots,\ p_k = q^{k-1}p,\ \ldots \qquad (2)$$

Следовательно, закон распределения данной СВ X имеет такой вид:

x_i	1	2	3	...	k	...
p_i	p	qp	q^2p	...	$q^{k-1}p$	...

Поскольку последовательность (2) составляет бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, то говорят, что рассмотренная СВ распределена по **геометрическому закону.**

Пример 3. Кидаем игральную кость до первого выпадения «шестерки». Случайная величина X равна количеству бросания кости. Найдите закон распределения величины X и вероятность события $X \leqslant 5$.

▲ Если «шестерка» впервые выпадает при n-м броске игральной кости, то соответствующая вероятность по теореме умножений вероятностей равна: $p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$. Тогда закон распределения данной СВ имеет такой вид:

x_i	1	2	3	...	n	...
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$	...	$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$	...

Отсюда

$$P(X \leqslant 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$

$$= 1/6(1 + (5/6) + (5/6)^2 + (5/6)^3 + (5/6)^4) = 0{,}596. \blacksquare$$

1. Что называется дискретной СВ? Приведите пример.
2. Что вы понимаете под непрерывной СВ? Поясните на примере.
3. Какая дискретная СВ называется распределенной по биномиальному закону?
4. Какая дискретная СВ называется распределенной по гипергеометрическому закону?
5. Какая дискретная СВ называется распределенной по геометрическому закону?

Упражнения

А

8.25. Каким законом распределена дискретная СВ, заданная в упражнениях: 1) 8.1; 2) 8.2; 3) 8,9?

8.26. Определите закон распределения дискретной СВ, заданной в упражнениях: 1) 8.13; 2) 8.14; 3) 8.20; 4) 8.21.

8.27. Дана дискретная СВ, заданная законом рапределения:

X	-2	0	2	4
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Может ли эта СВ быть распределенной геометрическим законом? Обоснуйте ответ.

8.28. Дан закон распределения СВ X:

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Найдите среднеквадратическое (стандартное) отклонение этой СВ.

8.29. Найдите дискретную СВ, распределенную по закону

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

B

В задачах **8.30–8.33** дискретная СВ X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Через P_1 и P_2 обозначены вероятности $P(X = x_1) = p_1$, $P(X = x_2) = p_2$. Найдите закон распределения этой СВ X:

8.30. $x_1 = 1$, $p_2 = 0{,}3$, $M(X) = 1{,}3$.

8.31. $x_2 = 2{,}5$, $p_2 = 0{,}4$, $M(X) = 2{,}2$.

8.32. $x_1 = 3$, $p_1 = 0{,}5$, $M(X) = 4$.

8.33. $x_2 = 2$, $p_1 = 0{,}6$, $M(X) = 1{,}4$.

8.34. 4 альчика из 7 альчиков, имеющихся в мешочке, окрашены. Из мешочка случайно вынимается 2 альчика. СВ X равна количеству окрашенных альчиков среди вынутых альчиков. Требуется найти: 1) закон распределения СВ X; 2) $M(X)$ и $D(X)$; 3) $P(X > 1)$; 4) определить вид распределения.

8.35. По мишени производится 4 независимых выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле $p = 0{,}8$. Найдите: 1) закон распределения СВ X, равный числу попаданий в мишень; 2) $P(1 < X < 3)$; 3) $M(X)$ и $D[X]$; 4) определить вид распределения.

8.36. Бросают три монеты. Найдите: 1) закон распределения СВ X, равный числу выпавших гербовых сторон; 2) $P(X > 1)$; 3) $M[X]$ и $D[X]$; 4) определить вид распределения.

8.37. Вероятность попадания мячом в корзину при одном броске равна 0,4. Найдите: 1) закон распределения СВ X, равный числу попадания мячом в корзину при трех бросках; 2) $P(1 < X < 2)$; 3) $M[X]$ и $D[X]$; 4) определите вид распределения.

C

8.38. В партии из 10 деталей имеются 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 2 детали. Найдите: а) закон распределения

СВ X, равной числу стандартных деталей в выборке; б) $P(X < 1)$; в) $M[X]$ и $D[X]$.

8.39. Имеются 5 ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите: а) закон распределения СВ X, равной числу проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих испытаниях не участвует; б) $P(2 < X < 4)$; в) $M[X]$ и $D[X]$.

8.40. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на «отлично», наугад извлекают 3 работы. Найдите: а) закон распределения СВ X, равный числу оцененных на «отлично» работ среди извлеченных; б) $P(X > 0)$; в) $M[X]$ и $D[X]$.

8.41. Дискретная СВ X принимает только два значения x_1 и x_2, $(x_1 < x_2)$, $P(X = x_1) = p_1$, $P(X = x_2) = p_2$. Требуется найти закон распределения СВ X: 1) $p_1 = 0{,}3$, $M(X) = 3{,}7$, $D(X) = 0{,}21$; 2) $p_2 = 0{,}4$, $M(X) = 3{,}4$, $D(X) = 0{,}24$.

8.42. 2 стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при выстреле – 0,5, для второго – 0,4. Дискретная СВ X – равна числу попадания в мишень. Найдите: 1) закон распределения X; 2) $P(X > 1)$; 3) $M[X]$ и $D[X]$.

8.43. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать только 2 выстрела. Дискретная СВ X – равна числу выстрелов. Найдите: 1) закон распределения X; 2) $P(X < 2)$; 3) $M[X]$ и $D[X]$.

8.44. Дискретная СВ X равна числу мальчиков в семье с пятью детьми. Предполагается равновероятным рождение мальчика и девочки. Найдите: а) закон распределения X; б) $\mathrm{P}(2 \leqslant X \leqslant 3)$; в) $M[X]$ и $D[X]$.

Упражнения для повторения

8.45. Найдите производную функции:

1) $y = 1 - \dfrac{3}{2 - x}$; 2) $y = x - \dfrac{4}{x^2}$;

3) $y = \arcsin(2x - 3)$; 4) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.

8.46. Разложите на множители:

1) $1 - \cos\varphi - \sin\dfrac{\varphi}{2}$; 2) $\sin\varphi - \sin 2\varphi$.

8.47. Найдите сумму:

1) $512 + 128 + \ldots + 2$; 2) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{8\cdot 9}$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебра событий 114
Асимптоты функции 163
Вертикальная асимптота 164
Выпуклая кверху (книзу) функция 228
Горизонтальная асимптота 164
График функции 11
Дифференциал функции 199
Доказательство тригонометрических неравенств 99
Достаточное условие точки перегиба 230
Достаточные условия экстремума функции 218
Достоверное событие 114
Зависимая переменная 11
Закон больших чисел 128
Касательная к графику функции 196
Классическое определение вероятности 116
Критические точки 219
Левый предел функции 164
Мгновенная скорость 195
Многочлены 132
Монотонные числовые последовательности 175
Наивероятнейшее число 126
Наклонная асимптота 165
Невозможное событие 114
Независимая переменная 11
Независимые испытания 125
Независимые события 115
Необходимое условие точки перегиба 229
Необходимое условие экстремума функции 218
Несовместные события 115
Непрерывность функции 184
Нечетная функция 26
Область определения функции 11, 12
Обратные тригонометрические уравнения 92
Обратные тригонометрические функции 63
Односторонние пределы 164
Первый замечательный предел 166
Перестановки 106
Периодическая функция 33
Полная вероятность события 121
Правила нахождения производной 203
Правило произведения (Раздел 4. Вероятность.) 104
Правило суммы 104
Правый предел функции 164
Предел числовой последовательности 173
Предел функции в точке 158
Приращение аргумента 184
Приращение функции 184
Произведение событий 115
Производная высшего порядка 212

Производная обратной функции 211
Производная сложной функции 209
Производная функции 197
Производные элементарных функций 204
Промежутки возрастания функции 217
Промежутки убывания функции 217
Пространство элементарных событий 114
Противоположное событие 115
Размещения без повторений 106
Размещения заданного состава 108
Размещения с повторениями 105
Разность событий 116
Следствия данного события 116
Случайное событие 114
Совместные события 115
Сочетания без повторений 106
Сочетания с повторениями 109
Способы задания функции:
Аналитический 13
Графический 13
Табличный 14
Сумма событий 115
Схема Горнера 145
Теорема Безу 145
Точка максимума функции 35
Точка минимума функции 35
Точка перегиба функции 229
Точки разрыва функции I рода 189
Точки разрыва функции II рода 189
Тригонометрические неравенства 96
Тригонометрические уравнения 70
Условная вероятность 116
Формула Байеса 122
Формула Бернулли 125
Формула Виета 147
Функция 10, 16
Функция общего вида 33
Функция $y = \arccos x$ 64
Функция $y = \text{arcctg}\, x$ 65
Функция $y = \arcsin x$ 63
Функция $y = \text{arctg}\, x$ 64
Функция $y = \cos x$ 52
Функция $y = \text{ctg}\, x$ 56
Функция $y = \sin x$ 50
Функция $y = \text{tg}\, x$ 54
Четная функция 33
Числовая последовательность 172
Числовая функция 11
Элементарные события 114
Элементы комбинаторики 104

ОТВЕТЫ

Раздел 0. Повторение пройденного в 9 классе

0.4. 1) (1; 2); 3) (2; 0); (0; −2). **0.5.** 36. **0.6.** 2) (0; 1). **0.11.** 1) 5; 2) 2; 3) 2; 4) −1,5. **0.15.** 1) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$; 2) 1; 3) 0; 4) $\cos\alpha$. **0.19.** 2) (4,5; 0), $R=4{,}5$. **0.21.** 1) (1; 2), (2; 1); 2) (2; 2); 3) (±3; ∓1). **0.22.** 6 гусей и 3 козы. **0.23.** 2) (−0,5; 4]. **0.26.** 3) 2. **0.30.** −10. **0.34.** 1617. **0.36.** $p=2$, $q=-1$. **0.37.** 1) (2; −1), (−1; 2), (−1; −1). **0.38.** 4. **0.40.** 2) $\{3\}\cup(5;\ 7]$. **0.41.** 1) $-1\leqslant 1+2\cos x\leqslant 3$. **0.43.** 1) 2; 2) 2π. **0.44.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\dfrac{1}{2}\sin 2\varphi$. **0.45.** 2) 2,5. **0.49.** $\dfrac{1}{3}$. **0.50.** 2) $2\sqrt{3}+3$.

Раздел 1

П.1.1. **1.1.** $y=5x$. $D=(0;+\infty)$, $R=(0;+\infty)$. **1.5.** 1) и 3) являются функциями, а 2) не является функцией. **1.9.** 1) $[-3;+\infty)$; 4) $[-3;2)\cup(2;+\infty)$; 5) $(-3;+\infty)$. **1.10.** 1) $[2;\ +\infty)$; 2) $[2;\ +\infty)$. **1.13.** 2) $(-\infty;\ -1]\cup[1;\ 3)$. 5) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. **1.21.** 1) Не равны; 2) равны; 3) не равны; 4) равны. **1.23.** $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$. **1.27.** 1) $1\leqslant 4+3\cos\alpha\leqslant 7$; 2) $2\leqslant 3-\sin\alpha\leqslant 4$.

П.1.2. **1.29.** 1) 1,5; 2) ±3; 3) 1; −3,5; 4) 1; $-\dfrac{4}{3}$; 5) −1; 0; 6) −1; 2; 8) −6; 9) −6; 1. **1.30.** 1) Непрерывна; 3) $x=\dfrac{1}{3}$ – точка разрыва; 7) $x=-1$, $x=-2$ – точки разрыва; 8) $x=-2$, $x=4$ – точки разрыва. **1.31.** 1) На $(-\infty;\ +\infty)$ возрастает; 5) на $(-\infty;\ 0)$ убывает; на $(0;\ +\infty)$ возрастает. **1.32.** 3) На $(-\infty;\ 1)$ убывает; на $(1;\ +\infty)$ возрастает; 6) на $(-\infty;\ 1{,}5)$ возрастает; на $(1{,}5;\ +\infty)$ убывает; **1.33.** 2) $y=ax^2$. **1.34.** 1) $x=1$ – точка минимума; $\min y=5$; 3) $x=-2$ – точка максимума; $\max y=3$. **1.35.** $f(4)=-1$, $f(2)=3$, $f(3)=0$, $f(5)=0$. 1) $f(2)=3$ – наибольшее значение, $f(3)=0$ – наименьшее значение; 3) $f(5)=0$ – наибольшее значение, $f(4)=-1$ – наименьшее значение; 4) $f(2)=3$ – наибольшее значение, $f(4)=-1$ – наименьшее значение. **1.36.** 1) Четная; 2) четная; 4) нечетная. **1.37.** 3) На $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$ – принимает положительные значения, а на $(1;2)$ – отрицательные; 6) на $(0;\ 6)$ принимает положительные значения, а на $(-\infty;\ 0)\cup(6;\ +\infty)$ – отрицательные. **1.39.** 1) На $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$ возрастает; 3) на $[0;\ +\infty)$ возрастает; 4) на $[0;\ +\infty)$ убывает; 6) на $(0;\ +\infty)$ возрастает, на $(-\infty;\ 0)$ – убывает. **1.41.** 5) $D=(-\infty;\ -5)\cup(-5;\ +\infty)$ – область определения; $R=(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$ – область значений; $x=-2$ – нуль; $x=-5$ – точка разрыва; на $(-\infty;\ -5)\cup(-2;\ +\infty)$ принимает положительные значения, на $(-5;\ -2)$ принимает отрицательные значения. **1.43.** 1) Убывающая; 2) возрастающая; 3) убывающая; 4) возрас-

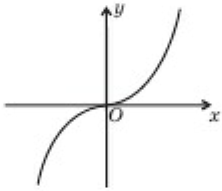


Рис. 1

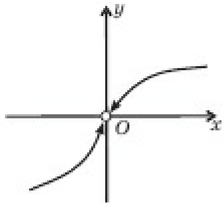


Рис. 2

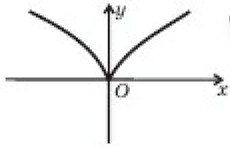


Рис. 3

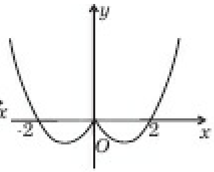


Рис. 4

тающая. **1.44.** 1) 0; 3; 2) $\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}$; 3) 11; 4) 12; 5) 2; 6; 6) 0; −3; 7) 1; 8) −2; 0. **1.45.** $f(-2)=-1$, $f(0)=-1$, $f(0{,}5)=0{,}5$, $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$, $f(1)=1$, $f(4)=1$. **1.48.** 2) $[-3;\ +\infty)$; 4) $[-4;\ 4]$; 8) $(-\infty;\ +\infty)$; 9) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. **1.49.** 1) Четная; 5) нечетная. **1.50.** 2) Четная; 6) нечетная. **1.56***. 1) $f(x)=x\cdot|x|$, (рис. 1); 4) $f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}$ (рис. 2). **1.57***. 1) $f(x)=\sqrt{|x|}$ (рис. 3); 3) $f(x)=x^2-2|x|$ (рис. 4). **1.58***. Рис. 5. **1.59***. Рис 6. **1.60***. Рис. 7.

П.1.3. **1.65.** 2) См. рис. 8. **1.66.** 2) Рис. 9; 4) рис. 10. **1.67.** 1) Рис. 11. **1.68.** 3) Рис. 12. **1.69.** 3) Рис. 13; 4) рис. 14. **1.71.** 1) $a_n=\frac{1}{n^2}$; 2) $a_n=3\cdot 2^{n-1}$.

П.1.5. **1.88.** 3) $f(u(x))=\sqrt{x-4}$; 4) $f(u(x))=\sqrt{x}-4$. **1.92.** 2) $f^{-1}(x)=\frac{x+8}{2}$; 4) $f^{-1}(x)=2{,}5x+7$. **1.93.** $f(\varphi(x))=\frac{1}{x}+5$, $\varphi(f(x))=\frac{1}{x+5}$. **1.95.** 4) $f(g(x))=\frac{2}{x^2-3x+2}$, $g(f(x))=\frac{4}{x^2}-\frac{6}{x}+2$. **1.96.** 1) $f^{-1}(x)=\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}$. **1.102.** $V=S\sqrt{\frac{S}{216}}$. **1.103.** $(-2;\ -7)$ – точка касания. **1.104.** 1) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$; 2) 1; 2,5.

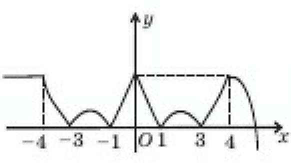


Рис. 5

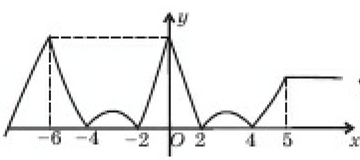


Рис. 6

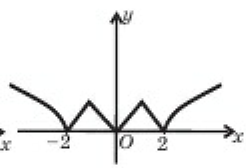


Рис. 7

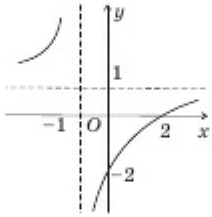


Рис. 8

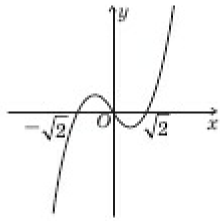


Рис. 9

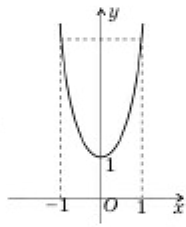


Рис. 10

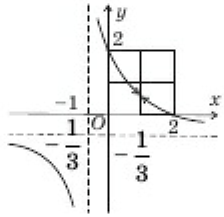


Рис. 11

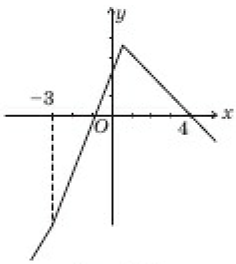


Рис. 12

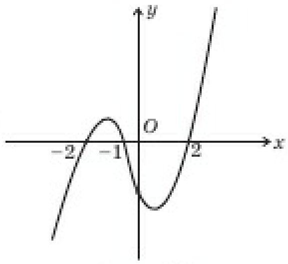


Рис. 13

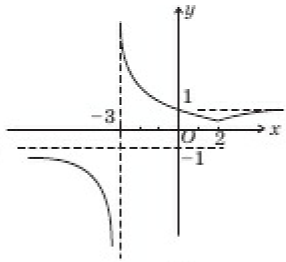


Рис. 14

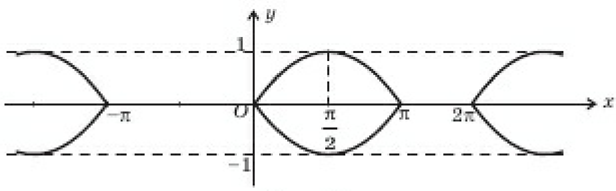


Рис. 15

Раздел 2

П.2.1. **2.3.** 1) $\sin 1^{\circ} < \sin 1$; 2) $\cos 2^{\circ} > \cos 2$; 3) $\sin 3^{\circ} < \sin 3$; 4) $\cos\ 3{,}5 < \cos 6{,}5$. **2.4.** 2) Равны; 4) $\operatorname{tg} 3{,}14 < \operatorname{tg}\pi$; 6) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} < \operatorname{ctg} 1{,}5$. **2.7.** 1) $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$. **2.9.** 1) $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$ – точки максимума, $x = \frac{\pi}{2}$ – точка минимума. **2.10.** $x \in \left(\frac{7}{3}; 3\right) \Rightarrow f(x) > 0$, $x \in \left(1; \frac{7}{3}\right) \Rightarrow f(x) < 0$, $f\left(\frac{7}{3}\right) = 0$. **2.12.** 1) 3 корня; 2) один корень; 3) два корня; 4) бесчисленное множество корней. **2.16.** Докажем методом от противного. Пусть функция $f(x) = \sin x + \{x\}$ периодическая, с периодом Т. Тогда число Т, кратное 2π, является натуральным числом (период функции $\{x\}$ кратен 1). Но нет числа вида $2m\pi$, являющегося натуральным (целым) числом, т.е.

функция $\sin x+\{x\}$ непериодическая. Это не противоречит задаче 2.15. **2.19.** 10. **2.20.** 6 литров.

П.2.2. **2.24.** 1) $y=4(\cos^4\frac{x}{2}+\sin^4\frac{x}{2})=3+\cos 2x$; 4) $y=\sin x+\cos x=$ $=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. **2.25.** 2) $y=\begin{cases}1, \text{ если } x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k\in Z,\\ -1, \text{ если } x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right), k\in Z,\end{cases}$

4) $y=\sin x$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$. **2.26.** 4) $\pm y=\sin x$, если $\sin x\geqslant 0$, а при $\sin x<0$ данное равенство не имеет смысла (см. рис. 15). **2.27.** -1. **2.28.** 1) $\varnothing$; 2) $\varnothing$. **2.29.** 61376.

п.2.4. **2.30.** 1) $\frac{3\sqrt{7}}{8}$; 3) $\pi-2$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.31.** 2) $\frac{10\pi}{11}$; 4) $-\sqrt{3}$. **2.39.** $\operatorname{tg}x=-\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}x=-\frac{12}{5}$. **2.40.** 1) [1; 1,5]; 2) $(-\infty;+\infty)$. **2.41.** Не проходит.

Раздел 3

П.3.1. **3.1.** 1) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; 3) $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. **3.2.** 2) $\pm\frac{4\pi}{3}+$ $+4\pi k$, $k\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. **3.3.** 1) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. **3.4.** 3) $\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. **3.5.** 4) $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{5}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. **3.6.** 2) $-\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{12}+\pi k$, $k\in Z$. **3.7.** 1) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{11\pi}{24}$; 4) $\varnothing$. **3.8.** 2) $\pm(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$; 4) $2\pi k$; $(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. **3.9.** 1) $4\pi k$; $\pi+2\pi k$, $k\in Z$; 3) $\frac{\pi k}{3}$, $(k\neq 3m)$, k, $m\in Z$. **3.10.** 2) πk, $k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$. **3.11.** $\left[\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2}\right]$, $k\in Z$. **3.12.** 2) $\varnothing$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $(2k+1)\pi$, $k\in Z$; **3.13.** 3) $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 4) $\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. **3.14.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k, k\in Z$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k, k\in Z$. **3.15.** Если $a\in(-\infty;0,5)\cup(1;+\infty)$, $x\in\varnothing$; если $a\in[0,5;\ 1]$, $x=\pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{a-1}}{2a-3}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$. **3.16.** 1) $\varnothing$.

3.17. 4) $\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}$; $\frac{3\pi}{100}+\frac{2\pi k}{25}, k\in Z$. **3.18.** $\frac{11\pi}{8}; \frac{17\pi}{16}; \frac{21\pi}{16}$. **3.19.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; 3) πk; $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi k$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$. **3.20.** 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $2\pi k$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$. **3.21.** Если $a\in(-\infty;2-2\sqrt{2}]\cup[2+2\sqrt{2};+\infty)$, $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin\frac{a+2}{\sqrt{2a}}+\pi k, k\in Z$, если $a\in(2-2\sqrt{2};2+2\sqrt{2})$, $x\in\varnothing$. **3.22.** Если $b\in[0;\ 1]$, $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin(2b-1)+\pi k,\ k\in Z$; если $b\notin[0;\ 1]$, $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$. **3.23.** Если $a\in\left[-\frac{3}{4};-\frac{1}{4}\right]$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos(-4a-2)+\pi k$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos(2a+1)+\pi k,\ k\in Z$; если $a\in\left[-1;-\frac{3}{4}\right]\cup\left(-\frac{1}{4};0\right]$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos(2a+1)+k\pi$; если $a\in(-\infty;\ -1)\cup(0;\ +\infty)$, $x\in\varnothing$.

3.24. Если $a\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$, $x=-\frac{\pi}{4}-(-1)^k\arcsin a+k\pi$, $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin 3a+k\pi$, $k\in Z$; если $a\in\left[-1;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right]$, $x=-\frac{\pi}{4}-(-1)^k\arcsin a+k\pi,\ k\in Z$; если $a\notin(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$, то $x\in\varnothing$. **3.25.** 1) $\frac{\pi k}{3}, k\in Z$; 3) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}, k\in Z$.

3.26. 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi k}{7}$; $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}, k\in Z$. 4) $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi k$; $\operatorname{arctg}3+\pi k,\ k\in Z$.

3.27. 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{4}, k\in Z$; 4) $\frac{\pi k}{8}, k\in Z$. **3.28.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$; 2) $\varnothing$.

3.31. Если $a\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, то $x=\pm\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$. **3.32.** 4) $\frac{\pi k}{3}, k\in Z$.

3.33. 2) $\frac{\pi k}{4}, k\in Z$; 4) $\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi k}{3}, k\in Z$. **3.34.** 3) $\frac{\pi k}{8}$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}, k\in Z$. **3.35.** 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k, (-1)^k\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}, k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$. **3.36.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$; 3) πk; $-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$. **3.37.** $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$. **3.38.** $\frac{3\pi}{2}$. **3.39.** $\pm\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{11}+\frac{2\pi m}{11}$, где $k=-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$. **3.40.** 3) $\pm\frac{\pi}{4}-(-1)^k\arcsin\frac{5\sqrt{2}}{8}+\pi k,\ k\in Z$.

П.3.2. **3.42.** 1) $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(k+2m)$, k, $y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(k-2m)$, $k,\ m\in Z$. 3) $x=\pm\frac{\pi}{3}+(k+m)\pi$, $y=\pm\frac{\pi}{3}+(k-m)\pi,\ k\in Z$. **3.43.** 3) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(m+4k)$; $y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$, $k,\ m\in Z$.

3.44. 2) $x=2\pi k$, $y=\pi+2\pi m$, k, $m\in Z$; 4) $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $y=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. **3.45.** 1) $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi m$, $y=\dfrac{\pi}{6}-2\pi m$, $m\in Z$; 3) $\varnothing$. **3.46.** 2) $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi m$, $y=\mp\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. **3.47.** 1) $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}$, $y=-(-1)^{p+m}\dfrac{\pi}{4}+\pi m$, $p=\left[\dfrac{k}{2}\right]$, k, $m\in Z$; 4) $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $y=m\pi$, k, $m\in Z$. **3.48.** 1) $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k$; $y=\pm\mathrm{arctg}2+\pi m$, $z=\pi\pm\dfrac{\pi}{4}\pm\mathrm{arctg}2(m+k)\pi$, m, $k\in Z$. **3.49.** $K(1;\ 7)$. **3.50.** $\dfrac{1023}{8}$. **3.51.** 2.

П.3.3. **3.52.** 1) 0,5. **3.53.** 2) $\dfrac{1}{2}$; 4) $-\dfrac{1}{3}$. **3.54.** 1) $-3\mathrm{tg}1$; 3) $\varnothing$; 4) $\varnothing$. **3.55.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $-\dfrac{3}{5}$; 3) 1; $-\dfrac{1}{6}$; 4) 0; 1. **3.56.** 2) 0; 3) 0; $\pm\dfrac{1}{2}$; 4) $\dfrac{2}{3}$. **3.57.** 1) $[0;\ 1]$; 2) $[-1;\ 0]$; 3) $[0;\ 1]$; 4) $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$. **3.58.** 1) $[0;\ 1]$; 2) $[-1;\ 1]$; 3) $[-1;\ 1]$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **3.59.** Если $a\in[-2\pi;\ 0)$, $x=\cos\dfrac{a}{2}$; если $a\in(0;\ \pi]$, $x=\cos a$; если $a\notin[-2\pi;\ 0)\cup(0;\ \pi]$, $x\in\varnothing$. **3.61.** $(-\infty;\ 3]$. **3.62.** $a=1$. **3.63.** $a_1=16$.

П.3.4. **3.64.** 1) $\left[\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; 3) $(-\dfrac{\pi}{6}+\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k)$, $k\in Z$. **3.65.** 2) $\left[-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\ \dfrac{5\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; 4) $(-\dfrac{\pi}{6}+\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k)$, $k\in Z$. **3.66.** 1) $\left(-\dfrac{7\pi}{12}+\pi k;\ \dfrac{\pi}{12}+\pi k\right), k\in Z$; 3) $\left(-\dfrac{4\pi}{3}+4\pi k;\ -\dfrac{2\pi}{3}+4\pi k\right), k\in Z$; 5) $(-3\pi+4\pi k;\ 4\pi k)$, $k\in Z$. **3.67.** 2) $\left(-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi k}{2};\ \dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2}\right), k\in Z$; 4) $\left(-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\right), k\in Z$. **3.68.** 1) $\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{7\pi}{6}\right)$; 3) $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$. **3.69.** 2) $\left[\pi k;\ \dfrac{\pi}{4}+\pi k\right]$, $k\in Z$; 4) $\left[-\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ \dfrac{5\pi}{12}+\pi k\right], k\in Z$. **3.70.** 1) $(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}-\pi+2\pi k;\ \arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}+2\pi k)$, $k\in Z$; 3) $(-\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ \dfrac{\pi}{4}+\pi k)\cup(-\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ -\mathrm{arctg}2+\pi k)$, $k\in Z$. **3.71.** 2) $[\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k)$, $k\in Z$; 4) $[2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, $k\in Z$. **3.72.** 1) $[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k]$,

$k\in Z$; 3) $[-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi k]$, $k\in Z$. **3.73.** 2) $(\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k)$, $k\in Z$; 4) $(-\frac{\pi}{3}+\pi k; \frac{\pi}{3}+\pi k)$, $k\in Z$. **3.74.** 1) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $x\in(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k)$, $k\in Z$; 3) $x\in[\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k]$, $k\in Z$. **3.75.** 2) $x\in(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k; -\frac{\pi}{4}+2\pi k)\cup(-\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k)\cup\frac{3\pi}{4}+2\pi k; \frac{7\pi}{6}+2\pi k)$, $k\in Z$; 4) $x\neq-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. **3.77.** Если обозначить $1-\cos\alpha=a$, $1-\cos\beta=b$, $1-\cos\gamma=c$, то произведение выражений $(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)\times(1-\cos\gamma)=abc$, т.е. равно объему прямого параллелепипеда с ребрами, равными a, b и c. Этот объем является наибольшим при $a=b=c$ (т.е. при $\alpha=\beta=\gamma=60^{\circ}$). Тогда $a\leqslant 1-\cos60^{\circ}=\frac{1}{2}$, $b\leqslant\frac{1}{2}$, $c\leqslant\frac{1}{2}$. Тогда $(1-\cos\alpha)\times(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)=\frac{1}{8}$. **3.80.** 2) $\frac{9\pi}{7}=\pi+\frac{2\pi}{7}$, $\frac{6\pi}{5}=\pi+\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{7}>\frac{\pi}{5}\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{9\pi}{5}>\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$. **3.81.** 1) 2; 2) $[-3; -2]\cup[2; 3]$. **382.** $m\in(-\infty; -12)\cup(12; +\infty)$.

Раздел 4

П.4.1. **4.1.** 2) 28. **4.2.** 1) $A_4^2=12$. **4.3.** 1) $A_4^2=16$. **4.4.** 1) $5!=120$. **4.5.** 2) $C_{30}^2\ \frac{30\cdot29}{2}=435$. **4.6.** $5!=120$. **4.7.** 6. **4.8.** 2) $4!=24$. **4.9.** $\tilde{C}_3^3=10$. **4.10.** 1) $4!=24$. **4.13.** 2) $C_{12}^3=\frac{12\cdot11\cdot10}{6}=220$. **4.14.** $1120x^7\sqrt[3]{x}$. **4.15.** $252x^5\cdot y^5$. **4.16.** 8. **4.17.** $n=8$. **4.18.** $C_{32}^6=\frac{32!}{6!26!}=906192$. **4.19.** $A_{15}^3=15\cdot14\cdot13=2730$. **4.20.** $C_{12}^3=220$. **4.21.** $C_n^2\ C_m^2$. **4.22.** $C_8^3\cdot C_5^2=560$. **4.23.** 252. **4.24.** 30. **4.25.** 8!. **4.26.** $\frac{10+1}{2}\cdot10=55$. **4.27.** $\frac{(3n)!}{(n!)^3}$. **4.28.** $\tilde{A}_{11}^6=11^6$. **4.29.** $P_9(4, 3, 2)=1260$. **4.30.** 2) $\bar{C}_3^4=15$. **4.31.** $P_{12}(3, 3, 3, 3)=123200$. **4.33.** 84. **4.34.** Если $n=2m$, то C_{2m}^m, если $n=2m-1$, то C_{2m-1}^m и C_{2m-1}^{m+1}. **4.35.** C_{2n}^n. **4.36.** $C_{30}^{10}\cdot C_{20}^{10}$. **4.37.** 7. Покажите, что выбывшие из турнира участники не играли между собой. **4.38.** 1) $2^n\cdot\cos^n\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{n\varphi}{2}$; 2) $2^n\cdot\cos^n\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{n\varphi}{2}$. **4.39.** $P_9(3, 2, 1, 1, 1, 1)-P_7(2, 1, 1, 1, 1, 1)=27720$. **4.41.** $\bar{C}_2^4+\bar{C}_2^3+\bar{C}_2^2+\bar{C}_2^1=14$. **4.42.** $\bar{C}_n^k=\bar{C}_{n+k-1}^k$. **4.46.** $\tilde{A}_{10}^3(\tilde{A}_{26}^3+\tilde{A}_{26}^4)$.

П.4.2. **4.50.** 2) Извлеченный шар белого или красного цвета. **4.51.** 1) A. **4.53.** В коробке нет альчика красного цвета. **4.55.** 3) $B\cdot D=\{A_4, A_6\}$. **4.56.** 2) 0,3. **4.57.** 0,4. **4.58.** $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$. **4.59.** 10. **4.60.** $\frac{1}{18}$. **4.61.** 1) 0,38; 2) 0,94; 3) 0,56;4) 0,44. **4.63.** 1) 0,9801; 2) 0,018; 3) 0,0001. **4.65.** 1) B и C являются следствиями A. **4.66.** 5) $AB+AC+BC$. **4.68.** $\frac{5}{9}$. **4.69.** $\frac{5}{9}$. **4.70.** $\frac{1}{2}$. **4.71.** 1) $\frac{5}{9}$; 2) $\frac{11}{36}$. **4.72.** $\frac{8}{65}$. **4.73.** 0,8. **4.74.** 1) $(A-B)+(B-A)+A\cdot B$. **4.75.** 1) $m=8$, $n=\tilde{A}_8^5=8^5 \Rightarrow P=\frac{1}{8^4}$. **4.76.** $\frac{2}{5}$. **4.77.** $\frac{7}{9}$. **4.78.** 0,936. **4.79.** $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$. **4.80.** $\frac{4}{7}, \frac{2}{7}$ и $\frac{1}{7}$. **4.81.** $P_n=\left(\left[\frac{n-r}{q}\right]+1\right):n$; $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=\frac{1}{q}$. **4.82.** $P(12)=\frac{26}{216}<\frac{27}{216}=P(11)$.

П.4.3. **4.85.** $\frac{1}{2}$. **4.86.** $\frac{5}{16}$. **4.87.** $\frac{2}{3}$. **4.88.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$. **4.89.** $\frac{11}{20}$. **4.90.** 1) $\frac{21}{25}$; 2) $\frac{9}{21}$. **4.91.** 0,612. **4.92.** 0,4. **4.95.** 0,13. **4.96.** $\frac{3}{1100}$. **4.97.** $\approx 0{,}9913$. **4.98.** $\frac{2}{3}$. **4.99.** 1) $P_4(2)>P_6(3)$; 2) $P_4(m\geqslant 2)<P_6(m\geqslant 3)$. **4.101.** 1) $k\pi; \pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}+k\pi$; $k\in Z$. **4.102.** 1) $3\sin^2 x\cdot\cos x$; 2) $\frac{x+1}{|x+1|}$; 3) $\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$. **4.103.** 1) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ – возрастает, $(-1;0)\cup(0;1)$ – убывает; 2) $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ +\infty)$ – возрастает, $(0;\ 2)$ – убывает.

П.4.4. **4.104.** 1) $P_5(2)=C_5^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$. **4.107.** $\frac{671}{1296}$. **4.108.** $m_0=8$. **4.109.** 6. **4.110.** 1) 0,4096. **4.111.** $\frac{\pi^3(4-\pi)}{64}$. **4.112.** $\frac{3\sqrt{3}\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)^3}{64\pi^4}$. **4.113.** $\frac{45}{512}$. **4.115.** $P\geqslant 0{,}9608$. **4.116.** 25. **4.117.** 60. **4.119.** 36. **4.120.** Счет 1 : 1 более вероятнее. **4.122.** Нет, нельзя. **4.123.** 1) $\tilde{A}_{10}^8=10^8$; 2) $\tilde{A}_{10}^8=90$. **4.124.** 1) 165; 2) 40; 3) 111. **4.125.** 72. **4.126.** $5!C_4^3\cdot C_4^2=1440$. **4.127.** $\frac{(a-r)^2}{a^2}$. **4.132.** $\frac{1}{20}$. **4.133.** $\frac{1}{216}$. **4.134.** $\frac{3}{8}$. **4.135.** $\frac{11}{15}$.

Раздел 5

П.5.1. **5.1.** а) $x=4y$, $x=2y$; г) $x=-2y$, $x=-7y$. **5.2.** а) $a=-b$, $a=4b$; б) $b=-7a$, $b=3a$. **5.4.** а) $4\sigma_1^2-13\sigma_2$; в) $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2-2\sigma_2^2$. **5.5.** а) $x=3y$, $y=3x$; б) $x=-2y$, $y=-2x$; г) $u=2v$, $v=2u$. **5.8.** а) $(x^2+xy+y^2)(2x^2-3xy+2y^2)$; в) $3(x+y)(x+z)\times$ $\times(y+z)$; г) $5(x+y)(x+z)(y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)$. **5.10.** x^2+9x-9. **5.11.** а) x^2- $-133c+1000=0$; г) $21x^2-23x+6=0$. **5.12.** а) $\frac{a+b+c}{2}$; б) $\frac{1}{a+b+c}$.

П.5.2. **5.17.** 3) $x^7-1=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2-x)+x-1$; $r(x)=x-1$. **5.19.** 1) 3; 1; 2) 1; -4; 3) 2; -5; 4) -6; 1; 5) 3; 6) 3. **5.20.** 2) $(x+2)(x+10)$; 4) $(x+1)(x+3)$. **5.21.** 1) $(x-2)\times$ $\times(x+2)(x^2+4)$; 3) $(x-1)(x^3+x^2+x+2)$; **5.24.** 2) $(x-1)(x+3)(x+7)$; 4) $(x+1)\times$ $\times(x+3)(x+5)$; 6) $(x+1)(x^3-7x^2-7x-4)$. **5.25.** 1) 2; 2) ±1; 2; -3; 3) -4; -1; 4) -1. **5.26.** 2) $(x+2)(x-3)(x-5)$. **5.27.** 1) $(x+1)(x+3)(x+5)$. **5.28.** 1) 1; -2; 3; 2) 2; 2; -3.

П.5.3, 5.4. **5.36.** 2) $q(x)=x$, $r(x)=-x^2+x-1$. **5.37.** 1) $A=1$, $B=-17$, $C=15$; 2) $A=-1$, $B=-3$, $C=1$. **5.40.** 2) x^3-x; 4) x^3-4x^2+x+6. **5.41.** $x_2=3$. **5.42.** $a=5$, $b=-2$, $x_3=1$. **5.43.** $a=-5$, $x_{2/3}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$. **5.44.** 1) $x^4-8x^3+17x^2+2x-24$. **5.45.** 1) $(x-1)(x+1)(x-4)$; 2) $(x-1)(x-2)(x+1)(x+3)$. **5.49.** $x_1=-2$, $x_2=3$. **5.50.** -1. **5.52.** Не делится. **5.53.** $r(x)=x+2$. **5.55.** -1. **5.60.** Существует: $f(x)=\frac{(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n)}{(c_{n+1}-c_1)(c_{n+1}-c_2)\dots(c_{n+1}-c_n)}$. **5.63.** $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2p$. **5.64.** $p_1=-12$, $q_1=-2$; $p_2=-7$, $q_2=-1$. **5.65.** $a\in(-4;-3]$.

П.5.5. **5.68.** 2) -3; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 2; 4) -1; $\frac{1}{3}$; 3; 6) $1\pm\sqrt{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$. **5.69.** 1) $\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$; 3) $3\pm2\sqrt{2}$; $2\pm\sqrt{3}$. **5.70.** 2) -3; -2; 5; 4) 1. **5.71.** 1) -1; ±2; 3) 1; ±9. **5.72.** 2) -1; 3; 4) $-\frac{2}{3}$; 0,5. **5.73.** 1) -4; -1; 2; 3) 0,5. **5.74.** 2) $\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$; 1; 4) -2; 1; 4. **5.75.** 2) $2\pm\sqrt{5}$; $\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$. **5.76.** 2) 1; $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{5}$. **5.77.** 1) 2; 1; $\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$. **5.79.** 1) $-0{,}25$; 4) ±5; -4; 0; 7. **5.80.** 2) $a=-2$; 3; 1; -2; 4) $a=6$; $-0{,}5$; -2; -3. **5.81.** 1) $-a$; $\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$, $|a|\geqslant2$; если $a\in(-2;2)$, то единственный корень $x=-a$. 2) $\frac{a+b}{2}$; a; b.

Раздел 6

П.6.1. **6.2.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{3}{5}$; 4) 3. **6.3.** 1) 6; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-1{,}5$; 4) 1. **6.4.** 1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 3. **6.5.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **6.6.** 1) $f(1-0)=f(1+0)=f(1)=-1$; 2) $f(-3-0)=-6$; $f(-3+0)=-6$, $f(-3)$ не определена. **6.8.** 1) $x=-1$, $y=1$; 2) $x=4$, $y=2$;

3) $x=-2$; $y=-3$. **6.9.** 1) $y=x$, $x=0$; 2) $y=x-2$. **6.11.** 1) 4; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{7}{8}$; 4) $-\frac{1}{2}$.

6.12. 1) 0; 2) $-\frac{1}{9}$; 3) 0. **6.13.** 1) 3; 2) 12; 3) 0; 4) 3. **6.14.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 2; 3) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 4) $\frac{1}{4}$.

6.15. 1) $\frac{2}{3}$; 2) 1; 3) 15; 4) 3. **6.16.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $-\frac{2}{3}$. **6.17.** 1) 2; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $\frac{4}{5}$; 4) $\frac{m}{n}$.

6.18. 1) 2; 2) $\frac{b}{a}$; 3) -3; 4) $-0{,}3$. **6.19.** 1) 1; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{2}{\pi}$; 4) $\frac{3}{3}$. **6.22.** 1) $y=x+1$, $x=1$; 2) $x=-1$, $y=2$; 3) $x=-2$, $y=2x-3$; 4) $x=3$, $y=2$; 5) $x=0$, $y=3x$; 6) $y=x$.

6.25. 1) 1; 2) 3; 3) $\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$; 4) $\frac{1}{2}$. **6.26.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{8}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0.

6.27. 1) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 2) $[-3; 11]$. **6.28.** 1) $8\sin^4\varphi$; 2) 1.

П.6.2. **6.33.** 1) $a_n=4n^2$; 3) $a_n = \frac{n+1}{2n}$; 4) $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}$; 6) $a_n=2-(-1)^n$.

6.36. 3) $a_n=5n+3$; 4) $a_n=15n$. **6.37.** 4) $C_n = \frac{n}{n^2+1}$, $C_{n+1} = \frac{n+1}{(n^2+1)^2+1} = \frac{n+1}{n^2+2n+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_{n+1} - C_n = \frac{n+1}{n^2+2n+1} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^3+n^2+n+1-n^3-2n^2-2n}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} =$$

$$= \frac{-n^2-n+1-n^3-2n^2-2n}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0 \quad \Rightarrow$$ последовательность убывающая.

6.41. $[3; 4]$. **6.42.** Воспользуйтесь тем, что для арифметической прогрессии выполняется соотношение $a_{n+1}-a_n = d$ – const, а для геометрической прогрессии – $a_{n+1}:a_n = q$ – const. **6.43.** 1) При $a>2b$; 2) $a<2b$; 4) $a=2b$ последовательность стационарная. **6.44.** 1) $n>30$; 2) $n>300$.

6.45. 2) $n>174$. **6.46.** $n=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. **6.47.** $n=3$. **6.50.** 1) 5; 2) $-2{,}5$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{4}$; 5) -4; 6) $\frac{6}{7}$. **6.51.** 1) 1; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) 1; 6) -3.

6.52. 1) 0; 2) -1; 3) 0; 4) $\frac{4}{5}$. **6.53.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{3}{4}$; 4) 1. **6.54.** 1) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3}$; 4) 3. **6.57.** $|b|<1$. **6.58.** 1) 1,5; 2) $\frac{1}{7}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{4}$.

П.6.3. **6.66.** 2) $f(1-0)=3$, $f(1+0)=1$, $x=1$ – точка разрыва I-го рода. **6.68.** 1) $\Delta x=2{,}5-2=0{,}5$; $\Delta y=f(2{,}5)-f(2)=10{,}25-8=2{,}25$. **6.69.** 4) $\Delta y=\Delta x(2-2x_0-\Delta x)$.

6.71. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}, & \text{если } x \neq 81, \\ \dfrac{1}{6}, & \text{если } x = 81. \end{cases}$ **6.72.** 1) $m = \frac{2}{3}$; 2) $m = \frac{1}{2}$. **6.75.** 1) $b = \frac{a\pi}{2}$;

2) $b=2a$. **6.76.** $p=\frac{3}{4}$. **6.77.** 1) 1; 2) 5; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{3}$; 6) 1. **6.81.** 1) $\frac{1}{12}$; 2) 3; 3) $\frac{1}{192}$; 4) $-\frac{1}{56}$. **6.82.** 1) 3; 2) 1,5; 3) $\frac{1}{6}$;; 4) 1. **6.83.** 1) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{4}$. **6.84.** 1) 0; 4) $\frac{4}{5}$. **6.85.** 1) $-\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) $\frac{n^2-m^2}{2}$. **6.86.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Раздел 7

П.7.1. **7.1.** 2) $\Delta y=0$; 4) $\Delta y=0{,}5$. **7.2.** 3) $\Delta y=0{,}79$; $\frac{\Delta y}{\Delta x}=7{,}9$. **7.4.** 1) $k=1$; 3) $k=-1$. **7.5.** 1) $v(0)=3$ м/с; 2) $v(2)=11$ м/с; 3) $v(t_0)=4t_0+3$ м/с. **7.9.** 1) $f'(x)=a$; $f'(2)=a$; 2) $f'(4)=a$. **7.12.** $u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$;; 2) $\frac{1}{4}$. **7.14.** 2) $f'(x)=2ax+b$. **7.15.** 1) $v(t_0)=6t_0^2-6t_0$. **7.17.** 1) $y=2x-1$; 2) $y=-2x-1$; 3) $y=4x-4$. **7.18.** 1) $y=3x$; 4) $y=4x-5$. **7.19.** $\cos\alpha=\frac{7\sqrt{85}}{85}$. **7.20.** 3) $du=2x_0dx$. **7.22.** 1) $(-\infty;\ +\infty)$; $[2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ +\infty)$; $[1;2]$; 3) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$. **7.24.** 4) $-\frac{\pi}{6}+(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

П.7.2. **7.25.** 2) $-3x^2$; 4) $12x^2-5x^4$. **7.26.** 2) $12x^5-9x^2$; 3) $12x^3+6x^2$. **7.27.** 2) $\frac{26}{(x+8)^2}$; 4) $\frac{2}{(x+1)^2}$. **7.28.** 1) $9x^2-4x$; 3) $6-12x^3$. **7.29.** 2) $13x^{12}+30x^9-3x^2$; 4) $(2x+1)\cos x-(x^2+x+1)\sin x$; 6) $3x^2\operatorname{ctg}x-\frac{x^3+1}{\sin^2 x}$. **7.30.** 1) $9x^8+12x^5-\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 3) $25x^4-\cos x$. **7.31.** 1) $y'(1)=3$; $y'(0{,}5)=-1{,}5$; 3) $y'(-2)=-1\frac{3}{4}$; $y'\left(\frac{1}{3}\right)=-28$. **7.32.** 2) $\{-1;\ 3\}$; 4) ±1. **7.33.** 1) $3\sqrt{x}$; 3) $-\frac{3}{x^2}$. **7.34.** 2) $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$; 4) $-\frac{3}{2\sqrt{2}\sqrt{x^5}}$; 6) $2{,}5\cdot\sqrt{x^3}$. **7.35.** 2) $\frac{3\cos x+(3x-2)\sin x}{\cos^2 x}$; 3) $\frac{x+1-\sin x\cos x}{(x+1)^2\cos^2 x}$. **7.36.** 1) $\operatorname{arctg}x+\frac{x}{1+x^2}$; 3) $\frac{3\sqrt{x-x^3}\arcsin x-2\sqrt{x^3}}{2\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2}$. **7.38.** 2) -1; ±2. **7.39.** 2) $y'(1)=2$; $y'(4)=2$. **7.41.** 1) $20(2x+3)^9$; 3) $3\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$; 5) $\frac{4}{\cos^2 4x}$. **7.42.** 30. **7.46.** 1) $-\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{3}$. **7.47.** 1) (1;0), $\left(-\frac{5}{3};0\right)$, (0; −5). **7.48.** 2, 4, 8, 16, 32, 64.

П.7.3. **7.49.** 1) $10(2x-3)^4$; 3) $-24(2-3x)^7$. **7.50.** 2) $126x^2(4+7x^3)^5$; 4) $-125x^4(1-5x^5)4$. **7.52.** 4) $-\dfrac{2x-3}{2\sqrt{(x^2-3x+2)^3}}$. **7.53.** 2) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=7$; $f'\left(\dfrac{\pi}{18}\right)=13$. **7.54.** 3) $\dfrac{2}{x^2+4x+8}$. **7.55.** 3) $16(6x^2-10x)\ (2x^3-5x^2)^{15}$.

7.56. 2) $-\dfrac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}-\dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$. **7.57.** 3) $(6x-2)\mathrm{tg}\sqrt{x}+\dfrac{3x^2-2x-5}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$. **7.59.** 1) $2\arcsin\sqrt{x}+\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$; 3) $\dfrac{1}{2(x-3)\sqrt{x-4}}$. **7.60.** 1) $f'(4)=7{,}5$; $f'(16)=31{,}75$.

7.61. 2) $\varnothing$; 4) $x=\pm\dfrac{\pi}{12}+\pi k$. **7.62.** 3) $F(x)=(3-2x)^2$, $F'(x)=8x-12$; 5) $F(x)=3-2\sin^2x$; $F'(x)=-2\sin2x$. **7.64.** 2) $\sin2x+\dfrac{2\sin x}{\cos^3x\sqrt{1+2\mathrm{tg}^2x}}$.

7.66. 2) $\dfrac{2x\mathrm{arctg}x-1}{\mathrm{arctg}^2x}$. **7.67.** 1) $-\dfrac{1}{4\sqrt{x-x\sqrt{x}}}$. **7.68.** 2) -16; 4) 5. **7.69.** 1) 0; 2) 0; 3) $3^{300}\cos3x$. **7.70.** 1) $-\dfrac{6}{(x-1)^4}$; 4) $a^2\sin(ax+b)$. **7.71.** 150 раз. **7.72.** 2) $-\dfrac{1}{5}\cos5x+c$, c–const. **7.73.** 1) $x\in\left(-\dfrac{5\pi}{8}+\pi k;\dfrac{\pi}{8}+\pi k\right)$, $k\in Z$; 2) $x\in\left(-\dfrac{\pi}{12}+\pi k;\dfrac{\pi}{12}+\pi k\right)$, $k\in Z$.

7.74. 1) $a_n=\dfrac{y^{III}(0)}{3!}\Rightarrow y^{III}(0)=-810\cdot24\cdot5^7\Rightarrow a_3=-3240\cdot5^7$.

П.7.4. **7.77.** 2) $(-\infty;+\infty)$ – функция убывает; 6) $(-\infty;-\dfrac{1}{2})$ – убывает; $(-\dfrac{1}{2};+\infty)$ – возрастает. **7.78.** 1) $(-\infty;1)\cup(7;+\infty)$ – возрастает; $(1;7)$ – убывает; 3) $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$ – убывает. **7.79.** 2) $(k\pi;\dfrac{\pi}{2}+\pi k)$ – убывает; $(\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\pi+k\pi)$ – возрастает, $k\in Z$. **7.80.** 3) $(-\infty;0)\cup(\dfrac{2}{3};+\infty)$ – убывает, $(0;\dfrac{2}{3})$ – возрастает. **7.81.** 2) $x=4$ – точка минимума, $f(4)=-104$. **7.82.** 3) $x\pm1$– точка минимума, $f(\pm1)=-1$, $x=0$–точка максимума, $f(0)=0$. **7.84.** 1) Экстремума нет, возрастающая; 3) $(-\infty;\dfrac{1}{2})$ – убывает; $(\dfrac{1}{2};+\infty)$ – возрастает. **7.86.** 2) $x_1=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$ – точка максимума, $f(x_1)=\sqrt{2}$; $x_2=\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k$ – точка минимума, $f(x_2)=-\sqrt{2}$. **7.87.** 1) $(-\infty;-1)$ – убывает; $(1;+\infty)$ – возрастает. **7.88.** 2) Нет экстремума; 3) $x=1$ точка максимума, $f(1)=3$. **7.89.** 4) Нет экстремума. **7.90.** 1) $x=0$ – точка максимума, $f(0)=0$; $x=1$ – точка минимума, $f(1)=-\frac{2}{3}$. **7.91.** 3) Нет экстремума, возрастающая. **7.93.** 2) Три корня; 4) 2 корня. **7.94** $y=\sqrt{2}-\frac{5\sqrt{2}}{4}x$. **7.95.** $y=6x$, $y=6x-1$. **7.98.** 1) 518; 2) 1024. **7.99.** $\operatorname{tg}x=\frac{2}{3}$. **7.100.** 1) -1; 2) $\{-5; 2\}$.

П.7.5. **7.101.** 2) $f(3)=3$ – наиб., $f(2)=-1$ – наим. **7.103.** 1) $f(0)=-9$ – наиб., $f(\pm1)=-16$ – наим. **7.105.** 2) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ – наим., $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ – наиб. **7.110.** Квадрат $\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}$. **7.111.** $12=6+6$. **7.112.** $10=5+5$. **7.113.** $36=6\cdot6$. **7.115.** $\sqrt{\frac{2}{3}}R$. **7.116.** $\frac{h}{2}$; $\frac{a}{2}$. **7.120.** $\frac{6\pi-2\sqrt{6}\pi}{3}$. **7.121.** $x=\frac{1}{2}$. **7.122.** $t=1$ с. **7.124.** По трассе 11 км до населенного пункта. **7.126.** 1) $(-\infty; -\frac{1}{6};)\cup[\frac{1}{2}; 3)$; 2) $(-8; 1]$. **7.127.** $-9{,}5$.

П.7.6. **7.128** 3) $(-\infty; +\infty)$ – выпуклая книзу. 4) $(-\infty; -3)\cup(1; +\infty)$ – выпуклая книзу, $(-3; 1)$ – выпуклая кверху, $x=1$ и $x=-3$ – точки перегиба. **7.130.** 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$ – выпуклая кверху, $(\frac{3\pi}{4}+2\pi k; \frac{7\pi}{4}+2\pi k)$ – выпуклая книзу, $x=\frac{3\pi}{4}+\pi k$ – точки перегиба, $k\in Z$. **7.140.** $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{n}$. **7.142.** 1) 3; 2) -2. **7.143.** 1) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

Раздел 8

П.8.1. **8.1.**

X	0	1
P	0,5	0,5

8.2.

X	0	1
P	0,6	0,4

8.3 0,5; **8.4.** $D[X]=0{,}24$; $\sigma(X)\approx0{,}4899$. **8.5.** $M[X]=0{,}6$; $D[x]=1{,}24$; $\sigma(X)\approx1{,}1136$. **8.6.** $D[X]=4$; $\sigma(X)=2$. **8.7.** $P_3=0{,}4$; $D[X]=1{,}49$; **8.8.** $x_2=3$. **8.9.**

X	0	1	2
D	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

8.10.

X	0	1	2
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

8.11. $M(X)=1$; **8.12.** $D(X)=\frac{5}{18}$. **8.13.** а)

X	1	2	3	4	5
P	0,6	0,24	0,096	0,0384	0,0256

б) $M(X)=1{,}6496$. **8.14.**

X	0	1	2	3
P	$\frac{57}{115}$	$\frac{19}{46}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{230}$

8.16. б) $q=0{,}2$, $M(X)=4{,}2$,

$D(X)=5{,}56$, $\sigma(X)=2{,}358$. **8.17.** а) $y=2$; б) $y=2$. **8.18.** $M(x)=np$; $D(x)=npq$.

Указание: $x_i = \begin{cases} 1, \text{ если событие выполняется при } i \text{ испытании}, \\ 0, \text{ если при } i \text{ испытании событие не выполняется}. \end{cases}$

($i=1,2, \ldots, n$). Если рассмотреть случайное событие, тогда необходимо случайную величину x записать в виде суммы $X=x_1+x_2+...+x_x$. Здесь при $M(x_i)=P$, $D(x_i)=pq$, $M(X) = M(x_1) + M(x_2) + \ldots M(x_n) = np$, $D(X) = D(x_1) + D(x_2) + \ldots + D(x_n) = npq$. **8.19.** Этот закон распределения записывается в виде:

X	1	2	3	...	n	...
P	p	pq	pq^2	...	pq^{n-1}	...

. Тогда $M(X)=p(1+2q+3q^2+\ldots+n \cdot q_{n-1}+\ldots) =$

$= p\dfrac{d}{dq}\left(q+q^2+q^3+\ldots q^n+\ldots\right) = p\dfrac{d}{dq}\left(\dfrac{q}{1-q}\right) = \dfrac{p}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{p}$. **8.20.** $M(X)=5\cdot\dfrac{1}{2} =$

$= 2{,}5$; $D(X)=5\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=1{,}5$. **8.21.** $M(X)=\dfrac{5}{3}$; $D(X)=\dfrac{10}{9}$. **8.22.** а) $2^6=64$;

б) $C_6^3 = 20$. **8.23.** 6 л. **8.24.** $y=x-\dfrac{\pi}{4}+1$.

П.8.2. **8.25.** 3) Биномиальный закон. **8.26.** 1) Геометрический закон. **8.27.** $M[X]=0$; $D[X]=4$. **8.28.** $\sigma(X)\approx0{,}5532$. **8.29.** $D(X)=0{,}23$. **8.30.**

X	1	2
P	0,7	0,3

8.33.

X	1	2
P	0,6	0,4

8.34.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

8.36.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

8.38. а)

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

8.43. 1)

X	1	2
P	0,7	0,3

; 2) $P(x<2)=0{,}7$; 3) $M(X)=1{,}3$; $D(X)=0{,}2$. **8.46.** 1) $\sin\dfrac{\varphi}{2}\left(2\sin\dfrac{\varphi}{2}-1\right)$. **8.47.** 2) $\dfrac{8}{9}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . 3
Раздел 0. Повторение материала, пройденного в 7–9 классах . . . 4

Раздел 1. Функция, ее свойства и график . . . 10
1.1. Понятие функции и способы ее задания . . . 10
1.1.1. Понятие функции . . . 10
1.1.2. Способы задания функции . . . 13
1.2. Некоторые свойства функции . . . 20
1.2.1. Нули функции и понятие непрерывности функции . . . 20
1.2.2. Промежутки знакопостоянства функции . . . 22
1.2.3. Промежутки возрастания и убывания функции. Экстремум функции . . . 24
1.2.4. Четная и нечетная функции . . . 26
1.3. Простейшая схема исследования функции . . . 32
1.4. Простейшие преобразования графиков функций . . . 36
1.4.1. Параллельный перенос . . . 37
1.4.2. Растяжение и сжатие . . . 37
1.5. Сложные и обратные функции . . . 44
1.5.1. Сложные функции . . . 44

Раздел 2. Тригонометрические функции . . . 50
2.1. Исследование свойств основных тригонометрических функций . . . 50
2.1.1. Функция $y = \sin x$ . . . 50
2.1.2. Функция $y = \cos x$ . . . 52
2.1.3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ . . . 54
2.1.4. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ . . . 56
2.2. Примеры построения графиков некоторых тригонометрических функций . . . 60
2.3. Обратные тригонометрические функции . . . 63
2.3.1. Функция $y = \arcsin x$ . . . 63
2.3.2. Функция $y = \arccos x$ . . . 64
2.3.3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ . . . 64
2.3.4. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ . . . 65

Раздел 3. Тригонометрические уравнения и их системы . . . 70
3.1. Тригонометрические уравнения . . . 70
3.1.1. Решение простейших тригонометрических уравнений. . . . 70
3.1.2. Методы решения тригонометрических уравнений . . . 72
3.2. Решение систем тригонометрических уравнений . . . 83

3.2.1. Системы уравнений вида $\begin{cases}\sin x \cdot \sin y = a, \\ \cos x \cdot \cos y = b;\end{cases}$ $\begin{cases}\sin x \cdot \cos y = a, \\ \cos x \cdot \sin y = b.\end{cases}$ . . .84

3.2.2. Системы уравнений вида $\begin{cases}\sin x + \sin y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = b.\end{cases}$ . . . 85

3.2.3. Системы уравнений вида $\begin{cases}\sin x + \sin y = a, \\ x + y = \alpha.\end{cases}$ . .87

3.2.4. Системы уравнений вида

$\begin{cases}a\sin x + b\sin y = c, \quad a, b, c \in R, \\ p\cos x + q\cos y = r, \quad p, q, r \in R.\end{cases}$ 89

3.3. Обратные тригонометрические уравнения 92

3.3.1. Решение простейших обратных тригонометрических уравнений. 92

3.3.2. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции 92

3.4. Тригонометрические неравенства 96

3.4.1. Решение простейших тригонометрических неравенств 96

3.4.2. Доказательство тригонометрических неравенств 99

Раздел 4. Вероятность 104

4.1. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона 104

4.1.1. Элементы комбинаторики. 104

4.1.2. Бином Ньютона 107

4.1.3.* Размещения заданного состава. 108

4.1.4.* Сочетания с повторениями 109

4.2. Алгебра событий и классическое определение вероятности 114

4.2.1. Алгебра событий. 114

4.2.2. Классическое определение вероятности. Свойства вероятностей 116

4.3. Полная вероятность события. Формула Байеса. . . .121

4.3.1. Полная вероятность события. 121

4.3.2. Формула Байеса 122

4.4. Формула Бернулли. Понятие закона больших чисел 125

4.4.1. Формула Бернулли. .125

4.4.2. Вероятностные модели реальных явлений и процессов окружающей среды, науки и техники. . . 127

Раздел 5. Многочлены 132
5.1. Многочлены с несколькими переменными 132
5.1.1. Стандартный вид многочленов с несколькими переменными 132
5.1.2. Симметрические многочлены 134
5.2. Общий вид многочлена с одной переменной и нахождение его корней 139
5.2.1. Общий вид многочлена с одной переменной . 139
5.2.2. Понятие корня многочлена. 139
5.2.3. Деление многочлена на многочлен. Нахождение целых корней многочлена с целыми коэффициентами 140
5.3. Корни многочлена. Теорема Безу. Схема Горнера . . 145
5.4. Формула Виета. 147
5.5. Решение уравнений высшего порядка 151
5.5.1. Теорема о рациональном корне многочлена с целыми коэффициентами 151
5.5.2. Симметричные уравнения. 153
5.5.3. Решение уравнений высшего порядка методом разложения на множители 154

Раздел 6. Предел и непрерывность 158
6.1. Предел функции в точке 158
6.1.1. Предел функции в точке 158
6.1.2. Основные свойства предела функции 160
6.1.3. Предел функции на бесконечности 162
6.1.4. Асимптоты функции 163
6.1.5. Первый замечательный предел 166
6.2. Предел числовой последовательности 172
6.2.1. Понятие числовой последовательности. 172
6.2.2. Предел числовой последовательности 173
6.2.3. Основные теоремы о пределах последовательности 177
6.3. Непрерывность функции 184
6.3.1. Непрерывность функции в точке и ее свойства . 184
6.3.2. Свойства функций, непрерывных на отрезке. . . 186

Раздел 7. Производная и ее применение 194
7.1. Производная и дифференциал функции 194
7.1.1. Задачи, приводимые к понятию производной функции. 194
7.1.2. Производная функции 197

7.1.3. Дифференциал функции и его геометрический смысл 199
7.2. Правила дифференцирования. 203
7.2.1. Правила нахождения производной 203
7.2.2. Производные элементарных функций 204
7.3. Производные сложной и обратной функций. 209
7.3.1. Производная сложной функции 209
7.3.2. Производная обратной функции 211
7.3.3. Понятие производной высшего порядка. Механический смысл производной второго порядка . . 212
7.4. Применение производной в исследовании функции 217
7.4.1. Промежутки возрастания и убывания функции 217
7.4.2. Необходимые и достаточные условия экстремума функции. 218
7.5. Упрощенная схема исследования и построения графика функции 223
7.5.1. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке 223
7.5.2. Упрощенная схема исследования и построения графика функции 224
7.6. Полная схема исследования функции и построения ее графика 228
7.6.1. Промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции 228
7.6.2. Полная схема исследования и построения графика функции 230

Раздел 8. Случайные величины 240
8.1. Случайные величины и их числовые характеристики 240
8.1.1. Случайные величины. 240
8.1.2. Числовые характеристики случайной величины 241
8.2. Виды некоторых дискретных случайных величин (СВ) . . 246

Предметный указатель 252
Ответы 254

Учебное издание

Шыныбеков Абдухали Насырулы
Шыныбеков Данияр Абдухалиулы
Жумабаев Ринат Нурланович

АЛГЕБРА

Учебник для 10 класса общеобразовательной школы
естественно-математического направления

Зав. редакцией *Н. Жиенгалиев*
Редактор *А. Изтлеуова*
Художественный редактор *В. Пак*
Технический редактор *О. Рысалиева*
Корректор *Ю. Гюльоглу*
Методист *З. Курмангалиева*
Компьютерная верстка *Е. Огурцовой*

ИБ №038

Сдано в набор 14.02.2019. Подписано в печать 01.07.2019. Формат $60\text{x}90^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Школьная». Усл. печ.л. 17,0.
Учет.-изд. л. 12,46. Тираж 9000 экз. Заказ № 4416.

ТОО «Корпорация «Атамұра», 050000, г. Алматы, пр. Абылай хана, 75.

Полиграфкомбинат ТОО «Корпорация «Атамұра», Республика Казахстан,
050002, г. Алматы, ул. М. Макатаева, 41.