А. Н. Шыныбеков, Д. А. Шыныбеков, Р. Н. Жумабаев

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 10 класса общеобразовательной школы
естественно-математического направления

10

Рекомендовано Министерством образования
и науки Республики Казахстан

Алматы «Атамұра» 2019

1–4417

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72
Ш 98

Учебник подготовлен в соответствии с Типовой учебной программой обновленного содержания по предмету «Геометрия» для 10 класса уровня основного среднего образования, утвержденной Министерством образования и науки РК.

Под редакцией М. Отелбаева — доктора физико-математических наук, профессора, академика НАН Республики Казахстан.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Вопросы по основным материалам темы

Практические и творческие работы

Материалы из истории

A Задачи первого уровня сложности
B Задачи второго уровня сложности
C Задачи третьего уровня сложности
✻ Задачи повышенной трудности
▲ Начало решения (доказательства) задачи
■ Конец решения (доказательства) задачи

Шыныбеков А.Н. и. др.

Ш 98 Геометрия. Учебник для 10 класса общеобразоват. шк. / А. Н. Шыныбеков, Д. А. Шыныбеков, Р. Н. Жумабаев. – Алматы: Атамұра, 2019.– 112 стр.

ISBN 978-601-331-519-5

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72

ISBN 978-601-331-519-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный учебник предназначен для 10-х классов общеобразовательных школ естественно-математического направления и для классов с углубленным изучением математики. В этом смысле этот учебник так же, как и предыдущие учебники авторов «Геометрия – 7, 8, 9», является универсальным.

В целом курс стереометрии имеет ряд специфических особенностей. В отличие от планиметрии здесь рассматриваются пространственные фигуры и их свойства. Поэтому от учащихся дополнительно потребуются их способности пространственного воображения. Для развития этих способностей рекомендуем чаще обращаться к различным моделям пространственных тел и практиковаться в правильном изображении этих фигур в тетради.

Помните! В стереометрии правильно построенный рисунок – это залог успеха. Поэтому следует выполнять все практические задания, приведенные в конце каждого пункта, и другие индивидуальные практические задания, заданные учителем. Также должно войти в привычку умение отвечать на теоретические вопросы, приведенные в конце каждой темы.

При изучении курса геометрии по данному учебнику, независимо от профиля класса, рекомендуется придерживаться следующих правил: при закреплении новой темы необходимо, чтобы каждый ученик полностью выполнил практические задания и в полном объеме усвоил задания группы **А**. Иначе будет невозможным в полной мере усвоить задания групп **В**, **С** и последующие новые темы. Поэтому необходимо следить за тем, чтобы учащиеся, которые не в полном объеме усвоили задания группы **А**, не переходили поспешно к выполнению заданий следующих уровней сложности. Как бы ни было сложно, переход к выполнению таких заданий должен осуществляться индивидуально по мере усвоения учеником заданий группы **А** и практических заданий.

Отметим, что неустанный поиск, неутомимый труд и высокое стремление, несомненно, принесут свои плоды в освоении данного предмета!

Раздел 0. ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ

Изучив материалы данного раздела, вы:

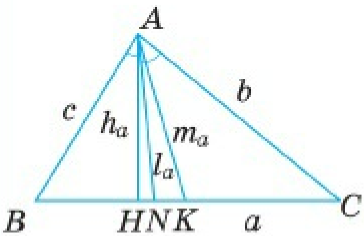
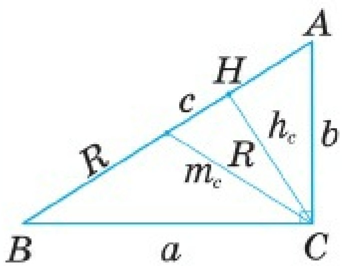
- повторите материалы, пройденные в 7–9 классах;
- подготовитесь к освоению новых материалов за 10 класс.

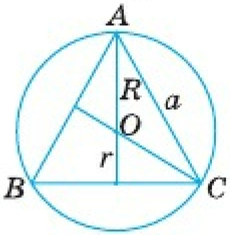
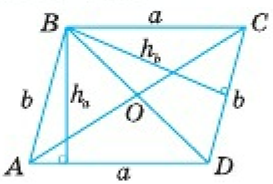
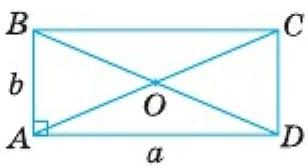
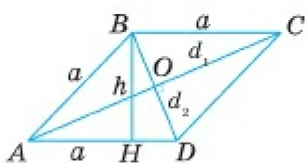
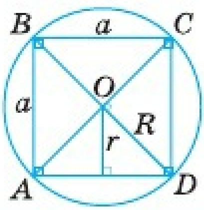
Чтобы лучше усвоить материалы, изучаемые в курсе геометрии за 10 класс, вам необходимо вспомнить и повторить темы, пройденные в курсе планиметрии в 7–9 классах. Особо следует обратить внимание на следующие вопросы.

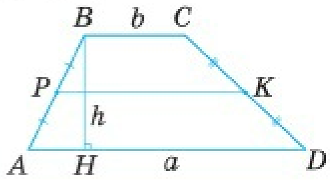
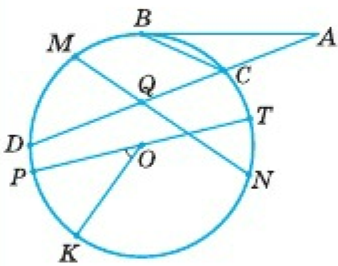
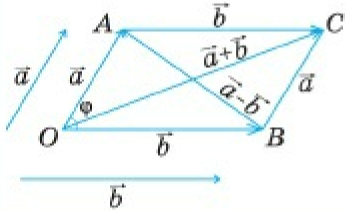
1. Какие углы называются смежными, а какие – вертикальными? Выполните чертеж. Какими свойствами они обладают?
2. На рисунке, построенном вами, назовите углы, образованные при пересечении двух прямых третьей.
3. Какие две прямые называются параллельными, а какие – перпендикулярными? От руки постройте перпендикулярные прямые и проверьте транспортиром их перпендикулярность.
4. Сформулируйте признаки параллельности прямых. Постройте на глаз параллельные прямые (наклонно к линиям тетради) и проверьте их параллельность, применяя все три признака параллельности.
5. Какая фигура называется треугольником? Какие виды треугольников вы знаете? На рисунке, построенном вами, назовите все элементы каждого названного вами треугольника.
6. Сформулируйте признаки равенства треугольников. Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.
7. Какой четырехугольник называется параллелограммом? Сформулируйте признаки параллелограмма и разъясните их смысл на рисунке, построенном вами. Постройте от руки параллелограмм и проверьте выполнение признаков параллелограмма.
8. Какая фигура называется прямоугольником, ромбом, квадратом? Какие их свойства вы знаете? Постройте от руки эти фигуры и проверьте правильность рисунка с применением свойств каждой из фигур.
9. Какой четырехугольник называется трапецией? Какие ее виды и свойства вы знаете?
10. Что такое средняя линия треугольника (трапеции)? Какие ее свойства вы знаете?
11. Сформулируйте теорему Пифагора. Постройте треугольник, соответствующий этой теореме. Укажите его элементы.

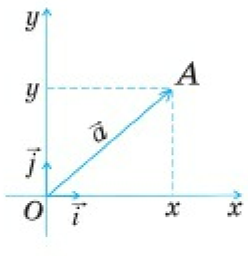
12. Укажите связь между тригонометрическими функциями острого угла и сторонами прямоугольного треугольника. Напишите значения тригонометрических функций угла, равного 30°, 45°, 60°.
13. Запишите формулы нахождения площадей прямоугольника, треугольника, параллелограмма и трапеции. Назовите и укажите на рисунках, построенных вами, элементы, применяемые в этих формулах.
14. Что такое скалярная величина, векторная величина? Какие векторы называются коллинеарными? Какая связь между вектором и преобразованием параллельного переноса?
15. Что такое модуль вектора? Какие векторы называют равными? Как найти сумму и разность векторов? На рисунке покажите, как можно разложить вектор на составляющие, расположенные на пересекающихся прямых.
16. Что такое угол между векторами, скалярное произведение векторов?
17. Что такое координаты вектора? Напишите скалярное произведение векторов в координатной форме, условия коллинеарности и ортогональности векторов. Напишите формулу нахождения угла между векторами.
18. Что такое направляющий вектор, вектор нормали прямой? Напишите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Напишите формулу деления отрезка в данном отношении.
19. Что означают слова «решение треугольника»? Сформулируйте теоремы косинусов и синусов.
20. Что называется осевой симметрией, центральной симметрией, поворотом и параллельным переносом? Какими общими свойствами обладают эти преобразования?
21. Что такое преобразование подобия, гомотетия? Сформулируйте признаки подобия треугольников.
22. Что называется окружностью? Назовите ее основные элементы. Как найти длину окружности, длину ее дуги?
23. Что называется кругом? Запишите формулы площадей круга, сегмента?
24. Назовите свойства пропорциональных отрезков круга. Каким свойством обладают вписанные в окружность углы?
25. Чему равна сумма внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника?
26. Каким свойством обладает биссектриса треугольника?

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ПЛАНИМЕТРИИ

№	Фигура	Основные формулы
1	2	3
1.	**Произвольный треугольник**  m_a – медиана l_a – биссектриса h_a – высота	$P=a+b+c;\ p=\frac{1}{2}(a+b+c);$ $m_a=\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}};$ $l_a=\frac{2bc\cdot\cos\frac{A}{2}}{b+c};\ h_a=\frac{2S}{a};$ $\frac{BN}{CN}=\frac{c}{b};\ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A;$ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R;$ $R=\frac{abc}{4S};\ r=\frac{S}{p};$ $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a;\ S=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin A;$ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$
2.	**Прямоугольный треугольник** 	$c^2=a^2+b^2,\ \angle C=90^\circ;$ $h_c=\sqrt{AH\cdot BH};\ a^2=c\cdot BH;$ $b^2=c\cdot AH;\ a=c\cdot\sin A=c\cdot\cos B;$ $c=\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\cos B};$ $a=b\cdot\operatorname{tg}A=b\cdot\operatorname{ctg}B;$ $S=\frac{1}{2}a\cdot b;$ $R=\frac{c}{2};\ r=\frac{a+b-c}{2}.$

1	2	3
3.	**Правильный треугольник** 	$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$; $AB = AC = BC = a$; $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$; $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$; $R = 2r$; $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. $h = m = l = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
4.	**Параллелограмм** 	$AO = OC$; $BO = OD$; $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$; $AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$; $S = a \cdot h_a$; $S = b \cdot h_b$; $S = a \cdot b \cdot \sin A$.
5.	**Прямоугольник** 	$AC = BD$; $AO = OC$; $BO = OD$; $S = a \cdot b$.
6.	**Ромб** 	$AC \perp BD$; $AO = OC$; $BO = OD$; $AB = BC = CD = AD = a$; $S = a \cdot h$; $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$.
7.	**Квадрат** 	$AC \perp BD$; $AC = BD$; $AO = OC = BO = OD = R$; $AC = \sqrt{2}\,a$; $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$; $r = \frac{a}{2}$; $S = a^2$.

1	2	3
8.	**Трапеция**  	$PK = \dfrac{a+b}{2}$; $S = \dfrac{h}{2}(a+b)$; $AD \parallel BC$.
9.	**Окружность и круг**  	$\angle BCD = \dfrac{1}{2}\overset{\smile}{BD}$; $\angle POK = \overset{\smile}{PK}$; $\angle CBA = \dfrac{1}{2}\overset{\smile}{BC}$; $\angle BAD = \dfrac{1}{2}(\overset{\smile}{BD} - \overset{\smile}{BC})$; $\angle MQD = \angle CQN = \dfrac{1}{2}(\overset{\smile}{DM} + \overset{\smile}{CN})$; $AB^2 = AC \cdot AD$; AB – касательная; $MQ \cdot QN = DQ \cdot QC$; $C_{\text{окр.}} = 2\pi R$ – длина окружности; $C_{PK} = \dfrac{\pi R \cdot \alpha}{180^\circ}$ – длина дуги $\overset{\smile}{PK}$; $S = \pi R^2$ – площадь круга; $S_{OPK} = \dfrac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$ – площадь сектора OPK.
10.	**Векторы на плоскости**  	$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$ – «правило треугольника»; $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$ – «правило параллелограмма»; $\overline{BA} = \overline{OA} - \overline{OB}$;

1	2	3
		$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos\varphi$, $\vec{i} = (1;0)$, $\vec{j} = (0;1)$ – единичные векторы; $\forall\,\vec{a}\ \exists\, x,\ y \in (-\infty;+\infty)$ такие, что $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$; числа x и y называются координатами вектора $\vec{a}$: $\vec{a} = (x;\ y)$. $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + x^2}$ – модуль вектора. Если $\vec{a} = (x_1;y_1)$, $\vec{b} = (x_2;y_2)$, то $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2)$; $\lambda\vec{a} = (\lambda x_1;\lambda y_1)$, $\lambda \in (-\infty;+\infty)$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$; $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

Упражнения для повторения курса планиметрии

А

0.1. Периметр равнобедренного треугольника равен 48 см, основание – 18 см. Найдите боковую сторону треугольника.

0.2. Найдите углы, которые получаются при пересечении двух прямых, если сумма трех из этих углов равна 300°.

0.3. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите, что $\Delta AOD = \Delta BOC$.

0.4. Какую фигуру можно построить, последовательно соединяя середины сторон: 1) треугольника; 2) прямоугольника; 3) ромба; 4) квадрата? Обоснуйте ответ.

0.5. Периметр параллелограмма $PQRT$ равен 24 см, а периметр треугольника PQT – 18 см. Найдите длину диагонали QT (рис.0.1)

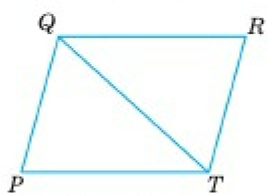


Рис. 0.1

0.6. В прямоугольном треугольнике a и b – катеты, c – гипотенуза, а α – угол, противолежащий катету a. Найдите неизвестные элементы треугольника, если:

1) $a = 4$ м, $b = 3$ м; 2) $a = 12$ см, $c = 13$ см;
3) $\alpha = 30°$, $c = 12$ см; 4) $\alpha = 60°$, $b = 7$ дм.

0.7. По двум сторонам и углу между ними найдите площадь: а) параллелограмма; б) треугольника, если: 1) $a = 2$ м, $b = 3$ м, $\alpha = 30°$; 2) $a = 4$ см, $b = 2\sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$; 3) $a = 2$ м, $b = \sqrt{2}$ м, $\alpha = 45°$.

0.8. Найдите площадь ромба, сторона и одна из диагоналей которого равны 6 см.

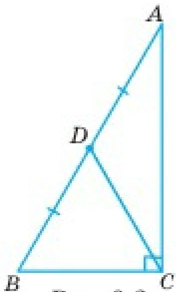


Рис. 0.2

0.9. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки E и N – середины сторон BC и CD соответственно. Выразите векторы $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{AN}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

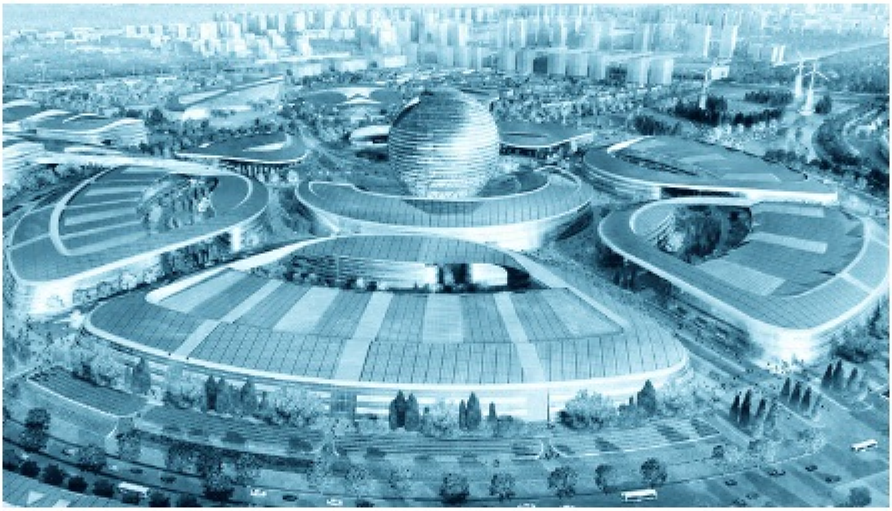
0.10. В треугольнике ABC угол C прямой, $\angle A = 30°$, $AB = 2\sqrt{2}$ см, CD — медиана. Вычислите скалярное произведение векторов:

1) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (рис. 0.2).

0.11. Один из катетов прямоугольного треугольника, вписанного в окружность радиусом 50 м, равен 60 м. Найдите второй катет треугольника.

Геометрия и архитектура

Экспо – 2017. Международная специализированная выставка под эгидой Международного бюро выставок. Главным объектом выставки стало сферическое здание «Нұрлы Әлем».



Решив задачу **0.11**, узнаете диаметр сферы.

0.12. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой в равных отношениях: $AO : OB = CO : OD = 1 : 2$. Найдите BD, если $AC = 2$ см.

0.13. Используя условие предыдущей задачи, докажите, что $AC \parallel BD$.

0.14. Площадь круга равна 36π м^2. Найдите длину окружности, соответствующей этому кругу.

B

0.15. α и β – два угла треугольника. Под каким углом пересекаются биссектрисы этих углов?

0.16. Острый угол прямоугольного треугольника равен $30°$, а его гипотенуза равна 24 см. Найдите длины отрезков гипотенузы, на которые ее делит высота, проведенная из вершины прямого угла.

0.17. Прямые касаются окружности в концах хорды, равной радиусу. Найдите получившиеся углы.

0.18. Основания равнобокой трапеции равны 10 см и 15 см, а острый угол равен $60°$. Найдите ее периметр.

0.19. Докажите, что параллелограмм, в который вписана окружность, является ромбом.

0.20. Докажите, что среди всех прямоугольников с одинаковыми периметрами наибольшую площадь имеет квадрат.

0.21. Одна окружность описана около прямоугольного треугольника, а другая вписана в него. Докажите, что сумма диаметров этих окружностей равна сумме катетов этого треугольника.

0.22. Площадь трапеции равна 594 см^2, высота – 22 см, а разность оснований – 6 см. Найдите основания трапеции.

0.23. В задаче **0.5** найдите площадь треугольника PQT, если $PQ = PT$.

0.24. В окружности длиной 12π см проведена хорда, равная 6 см. Найдите градусную меру меньшей дуги, стягиваемой хордой.

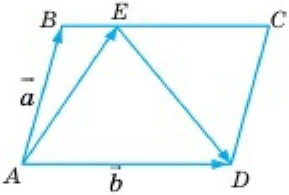


Рис. 0.3

0.25. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взята точка E так, что $BE : EC = 1 : 4$. Выразите векторы $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{ED}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, равные $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно (рис. 0.3).

0.26. Через вершину C параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, которая пересекается с продолжениями сторон AB и AD в точках E и K соответственно. Докажите, что $BE \cdot DK = BC \cdot DC$.

0.27. Найдите третью сторону треугольника, если две стороны его равны a и b, а площадь $0{,}5ab$.

0.28. Угол колебания маятника настенных часов равен 36°, а длина дуги, которую проделывает конец маятника, равна 24 см. Найдите длину маятника.

C

0.29. Постройте треугольник, зная его угол, биссектрису и высоту, опущенную из вершины этого угла.

0.30. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них.

0.31. Диагональ трапеции делит трапецию на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, основаниями которых являются ее боковые стороны, равновелики.

0.32. Как построить треугольник, если заданы середины его сторон?

0.33. В прямоугольном треугольнике один из углов равен среднему арифметическому двух других углов. Найдите катеты этого треугольника, если его гипотенуза равна c.

0.34. Докажите формулу Герона, используя теорему Пифагора.

0.35. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его основание равно a, а высота, проведенная к боковой стороне, равна h.

0.36. Вершины треугольника находятся в точках $A(-7; 5)$, $B(3; -1)$, $C(5; 3)$. Напишите уравнения серединных перпендикуляров этого треугольника.

0.37. Докажите, что если $ABCD$ – прямоугольник, то для любой точки O плоскости выполняется равенство $AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2$ (рис. 0.4).

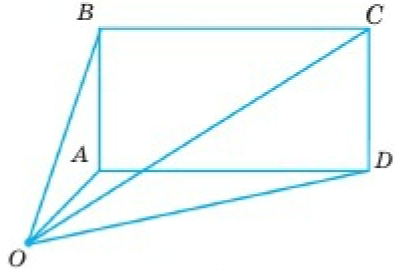


Рис. 0.4

0.38. Найдите длину общей касательной окружностей радиусами R и r, касающихся друг друга внешним образом.

0.39. Какова связь между преобразованиями поворота и центральной симметрии?

0.40. Внутренняя точка P треугольника ABC удовлетворяет равенству $\angle ABP = \angle BCP = \angle CAP = \varphi$. Выразите $\operatorname{tg}\varphi$ через площадь треугольника и его стороны.

Используя сайт https: // www. geogebra. org/? lang=ru, вы можете выполнить необходимые вам пространственные рисунки и чертежи.

Раздел 1. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

1.1. Аксиомы стереометрии и их следствия

Изучив материалы данной темы, вы будете;

- знать аксиомы стереометрии, их следствия;
- иллюстрировать и записывать их с помощью математических символов;
- применять аксиомы и их следствия при решении задач.

1.1.1. Введение

Подумайте

На рис. 1.1 изображены здания, а на рис 1.2 – знаменитая картина Малевича «Черный квадрат». Как расположены точки одного из зданий и точки «черного квадрата» по отношению к плоскости? Лежат ли все точки этих фигур на одной плоскости? Обоснуйте ответ.

Рис. 1.1

Рис. 1.2

До сих пор в курсе планиметрии мы изучали свойства фигур, лежащих на одной плоскости. Однако не все точки фигур (тел), встречающихся на практике, лежат в одной плоскости. Например, точки куба, пирамиды, цилиндра, шара, конуса и др. тел, изображенных на рис. 1.3, не лежат в одной плоскости. Эти фигуры являются пространственными. Геометрическая фигура называется пространственной, если не все ее точки лежат в одной плоскости. Примером пространственной фигуры может служить геометрическое тело–часть пространства, занимаемая предметом. Изучение пространственных фигур играет важную роль в повседневной жизни человечества. Например, строители, архитекторы, конструкторы, токари и другие специалисты, часто сталкивающиеся в повседневной практике с пространственными фигурами, умеют широко пользоваться их свойствами. Не зная свойств геометрических фигур, невозможно построить дом, собрать машину, правильно произвести взлет и посадку самолета и космических кораблей, исследовать структуру предметов и т.п. Кроме того, эти сведения являются фундаментом предметов черчения и начертательной геометрии, изучаемых во всех технических вузах.

Стереометрия – раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве (пространственных фигур). Слово «стереометрия» состоит из греческих слов «стерео» (телесный, пространственный) и «метрео» (измеряю).

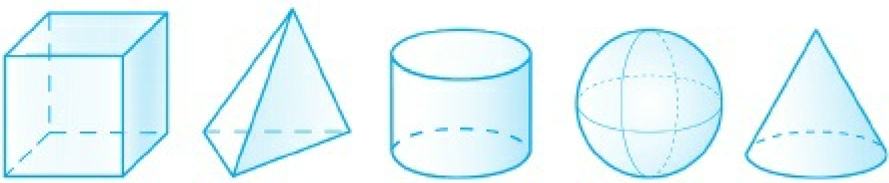


Рис. 1.3

В стереометрии справедливы все аксиомы и теоремы, изученные в курсе планиметрии. Поэтому для учащихся, хорошо усвоивших планиметрию, курс стереометрии не представляет особой трудности.

1.1.2. Аксиомы стереометрии

В планиметрии в качестве основных понятий мы брали точку и прямую.

Подумайте

Будут ли достаточны эти понятия для построения системы аксиом стереометрии? Каким понятием нужно дополнить эти основные понятия?

Например, чтобы изобразить здание, данное на рис. 1.1, только прямой и точки недостаточно. Наряду с точкой и прямой нужно пользоваться понятием *плоскость*, т.к. этажи здания находятся в разных плоскостях. Поэтому основными понятиями стереометрии являются точка, прямая и плоскость. Как и раньше, точки обозначаем прописными латинскими буквами, прямые – строчными латинскими буквами или двумя прописными буквами:

A, B, C, ... – точки, a, b, c,... или AB, CD, AC,... – прямые. Плоскости обозначаем строчными греческими буквами: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

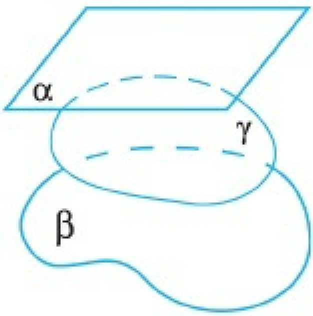


Рис. 1.4

Плоскости изображают на чертеже в виде параллелограмма или его ограниченной части (рис. 1.4). Если точка A лежит в плоскости α, то это записывают так: $A \in \alpha$. Это значит, что плоскость α проходит через точку A. Запись $B \notin \alpha$ означает, что точка B не лежит в плоскости α или плоскость α не проходит через точку B (рис. 1.5).

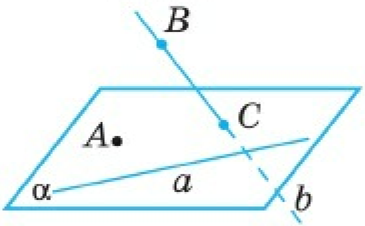


Рис. 1.5

Если каждая точка прямой a лежит в плоскости α, то говорят, что прямая a лежит в плоскости α или плоскость α проходит через прямую a. Это записывают так: $a \subset \alpha$ Например, на рис. 1.5 прямая a лежит в плоскости α, а прямая b имеет с плоскостью α единственную общую точку C. При этом прямая b пересекается с плоскостью α в точке C. Это записывают так: $b \cap \alpha = C$.

Если прямая a лежит и в плоскости α, и в плоскости β, то говорят, что плоскости α и β пересекаются по прямой a: $\alpha \cap \beta = a$ (рис. 1.6).

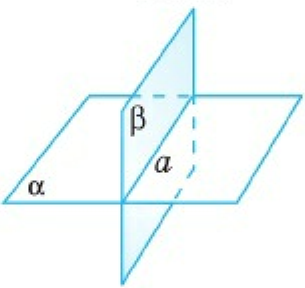


Рис. 1.6

Аксиомы стереометрии

CI. *Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие и не принадлежащие этой плоскости.*

CII. *Если две различные плоскости имеют общую точку, то эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через данную общую точку.*

CIII. *Если две различные прямые имеют общую точку, то через эти две прямые можно провести плоскость, и притом только одну.*

Например, если $a \cap b = A$, то по аксиоме CIII существует единственная плоскость α такая, что $a \subset \alpha$ и $b \subset \alpha$. Эту плоскость иногда обозначают так: (aAb) (рис. 1.7).

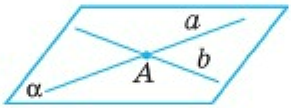


Рис. 1.7

1.1.3. Некоторые простейшие следствия аксиом

Теперь остановимся на некоторых простейших следствиях аксиом **CI–CIII**.

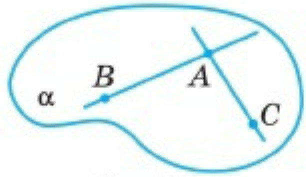


Рис. 1.8

Теорема 1. *Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, притом только одну.*

▲ Пусть даны точки A, B, C, не лежащие на одной прямой (рис. 1.8). По аксиоме I планиметрии (геометрия за 7 класс, раздел 1, п. 1.1) через любые две точки можно провести прямую, т.е. проводим прямые AB и AC. Эти прямые не совпадают, потому что по условию теоремы точки A, B и C не лежат на одной прямой. Тогда по аксиоме CIII через прямые AB и AC проходит плоскость, и притом единственная. ■

Из доказанной теоремы видно, что через точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, проходит только одна плоскость. Эту плоскость иногда обозначают так: (ABC).

Теорема 2. *Через прямую и точку, не лежащую на ней, можно провести плоскость, притом только одну.*

▲ Пусть даны прямая a и точка A, $A \notin a$ (рис. 1.9). По аксиоме I планиметрии существует точка B, лежащая на прямой a. Проведем прямую AB. При этом a и AB – разные прямые, имеющие общую точку B. Поэтому, согласно аксиоме CIII, через эти две прямые, т.е. через прямую a и точку A, проходит единственная плоскость. ■

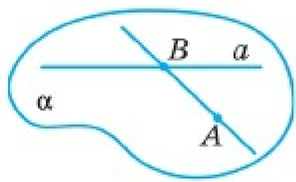


Рис. 1.9

Теорема 3. *Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.*

▲ Пусть точки A и B, лежащие на прямой a, лежат также в плоскости α (рис. 1.10). Показать, что выполняется условие $a \subset \alpha$.

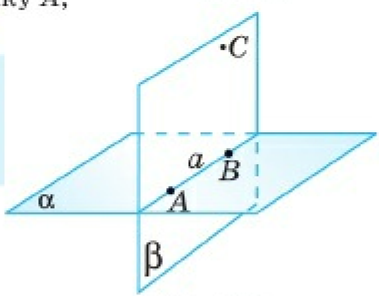


Рис. 1.10

Действительно, возьмем точку C, не лежащую в плоскости α (такая точка существует, аксиома СI). Согласно теореме 2 через точку C и прямую a можно провести плоскость β. Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой b. Т.к. $A \in a$, $B \in a$, то $A \in \beta$ и $B \in \beta$. Также по условию $A \in \alpha$ и $B \in \alpha$, т.е $A \in \alpha \cap \beta$ и $B \in \alpha \cap \beta$. Тогда по аксиоме СII $A \in b$ и $B \in b$. Это значит, что прямые a и b имеют две общие точки, т.е. они совпадают ($a = b$). Т.к. $b \subset \alpha$, то и $a \subset \alpha$, что и требовалось доказать. ■

Итак, на основе аксиом и доказанных теорем можно сделать следующий вывод. Плоскость однозначно определяется: 1) *через две пересекающиеся прямые;* 2) *через три точки, не лежащие на одной прямой;* 3) *через прямую и точку, не лежащую на ней.*

1. Какой раздел геометрии называется стереометрией?
2. Назовите основные понятия стереометрии. Какие основные взаимосвязи определены между ними?
3. Сформулируйте аксиомы СI, СII, СIII и поясните их смысл.
4. Сформулируйте следствия аксиом и докажите их.
5. Как обозначаются точки, прямые и плоскости?
6. Две прямые (две плоскости) пересекаются в точке (по прямой). Как это записывают?

Практическая работа

Из твердой бумаги вырежьте и сделайте макет пересекающихся между собой плоскостей и покажите: 1) прямую, по которой они пересекаются; 2) общую точку двух плоскостей; 3) точку одной плоскости, не лежащую в другой.

Упражнения

А

1.1. Можно ли провести плоскость через: 1) три точки; 2) четыре точки, лежащие на одной прямой? Будет ли эта плоскость единственной?

1.2. Запишите и выполните чертеж:

1) $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $C \notin AB$;
2) $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \cap b = A$;
3) $a \subset \alpha$, $a \subset \beta$;
4) $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$.

1.3. Запишите предложения с помощью знаков: 1) точка A лежит на прямой a; 2) прямая a проходит через точки A и B; 3) прямые a и b пересекаются в точке O; 4) плоскости α и β пересекаются по прямой a; 5) плоскость α проходит через прямую a и точку A, не лежащую на этой прямой; 6) точка C не лежит в плоскости γ;

7) прямая l пересекает плоскость β в точке B; 8) плоскость α проходит через точки A, B и C, не лежащие на одной прямой.

1.4. Точка A является общей точкой плоскостей α и β. Имеются ли другие общие точки у этих плоскостей? Если есть, то как они располагаются?

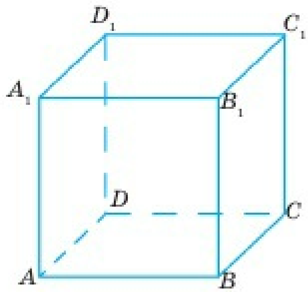


Рис. 1.11

1.5. На рис. 1.11 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите прямую, по которой плоскость AA_1C_1C пересекается с плоскостью: 1) $ABCD$; 2) $A_1B_1C_1D_1$; 3) AA_1D_1D; 4) BB_1C_1C.

1.6. Из одного аэропорта в 12 ч вылетели три самолета в разных направлениях с интервалом в 10 мин. В какое время все три самолета будут находиться в одной плоскости? Обоснуйте ответ.

1.7. Даны точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, и плоскость α. Докажите, что плоскости ABC и α совпадают, если $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ и $C \in \alpha$.

1.8. Плоскости α, β и γ попарно пересекаются по прямым a, b и c, причем $a \parallel b \parallel c$. Постройте соответствующий рисунок.

B

1.9. Необходимо ли, чтобы три прямые, проходящие через одну точку, лежали в одной плоскости?

1.10. Докажите, что три прямые, попарно пересекающиеся между собой и не проходящие через одну точку, лежат в одной плоскости.

1.11. Докажите, что если $A \in m$, $m \subset \alpha$, то $A \in \alpha$. Сформулируйте это утверждение.

1.12. Сколько плоскостей можно провести в пространстве через точку и одну из двух пересекающихся прямых? Рассмотрите все возможные варианты.

1.13. Если точки $A, B \in \alpha$, то отрезок $AB \subset \alpha$. Докажите и сформулируйте данное утверждение.

1.14. Даны плоскость α и точки A, B такие, что $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$. Лежит ли в плоскости α: 1) середина отрезка AB; 2) отрезок AB; 3) прямая AB? Обоснуйте ответ.

1.15. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что любые три из них не лежат на одной прямой.

1.16. Даны плоскости α, β, γ и точки A, B, C такие, что $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $B \in \beta$, $C \in \beta$, $A \in \gamma$, $C \in \gamma$. Постройте чертеж, укажите данные плоскости и точки.

C

1.17. Докажите или опровергните следующие утверждения:

1) $A, B \in a$, $A, B \in \alpha \Rightarrow a \subset \alpha$;
2) $A, B \in m$, $m \cap \alpha \neq \varnothing \Rightarrow A, B \in \alpha$;
3) $a \subset \alpha$, $P \notin a \Rightarrow P \notin \alpha$;
4) $\alpha \cap \beta = b$, $A \in \alpha$, $A \in \beta \Rightarrow A \in b$.

1.18. Сформулируйте утверждения из предыдущей задачи.

1.19. Покажите, что через любую точку в пространстве можно провести плоскость.

1.20. Докажите, что через любые две точки можно провести прямую, притом единственную.

1.21. Даны точка A и прямая a, не проходящая через эту точку. Докажите, что все прямые, проходящие через точку A и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.

1.22. Необходимо ли пересечение прямых a и c, если $a \cap b = A$, $b \cap c = B$?

1.23. Прямые a и b не имеют общих точек. Необходимо ли, чтобы эти прямые лежали в одной плоскости?

1.2. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать признак и свойства параллельности прямой и плоскости;
- знать свойства параллельных и скрещивающихся прямых;
- применять эти свойства при решении задач.

1.2.1. Параллельность прямых

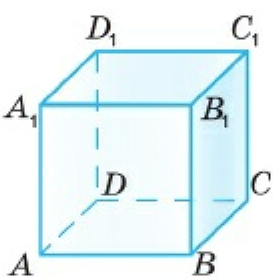


Рис. 1.12

Прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости и не пересекаются. Например, прямые AB и A_1B_1 (рис. 1.12) параллельны между собой, а прямые AB и B_1C_1, AB и A_1D_1 являются скрещивающимися.

Теорема 1. *Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой.*

Заметим, что эта теорема не является эквивалентной аксиоме параллельных прямых, изученной нами в 7 классе (раздел 1, пункт 1.3, аксиома IX), так как в этой аксиоме утверждается единственность прямой, параллельной данной прямой в заданной плоскости, а не в пространстве. Следовательно, утверждение требует доказательства.

▲ Пусть даны прямая a и точка A, причем $A \notin a$ (рис. 1.13).

Через прямую a и точку A проведем плоскость α. В этой плоскости через точку A можно провести единственную прямую b, параллельную прямой a. Теперь покажем, что и в пространстве прямая b является единственной, параллельной прямой a.

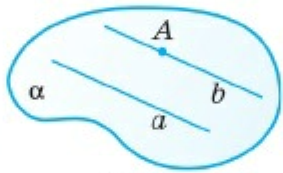


Рис. 1.13

Допустим, что существует другая прямая c, проходящая через точку A и параллельная прямой a. Тогда через прямые a и c можно провести плоскость β. Плоскость β проходит через точку A и прямую a. Следовательно, по теореме 2 (п.1.1) она совпадает с плоскостью α. Тогда по аксиоме IX прямые b и c также совпадают. ■

Теорема 2. *Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой.*

▲ Пусть $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Докажем, что $a \parallel b$.

Через α обозначим плоскость, в которой лежат прямые a и c, а через β – плоскость, в которой лежат прямые b и c (случай, когда прямые a, b и c лежат на одной плоскости, рассмотрен в планиметрии). Здесь α и β – различные плоскости. Отметим точку $B \in b$ и через точку B и прямую a проведем плоскость γ. Пусть эта плоскость пересекается с плоскостью β по прямой b_1 (рис. 1.14). Так как $B \in b$ и $B \in b_1$, то $b \neq b_1$ или $b = b_1$.

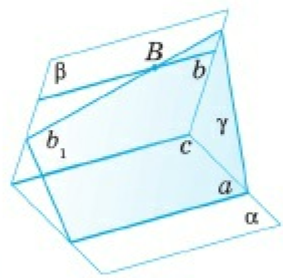


Рис. 1.14

Пусть $b \neq b_1$ и $b_1 \nparallel c$. Так как прямые b_1 и c лежат в одной плоскости β, то они пересекаются, т.е. $K = b_1 \cap c$. Отсюда $K \in c = \beta \cap \alpha$, $K \in b_1 = \beta \cap \gamma$, т.е. точка K принадлежит всем трем плоскостям: α, β и γ. Следовательно, K принадлежит и прямым $a = \alpha \cap \gamma$, $b_1 = \beta \cap \gamma$ и $c = \alpha \cap \beta$, т.е. $K = a \cap c$. Это противоречит тому, что $a \parallel c$.

Поэтому необходимо, чтобы $b_1 = b$ и b не пересекалась с прямой a (т.к. точка пересечения a и b лежала бы на прямой c).

Таким образом, прямые a и b лежат в одной плоскости γ и не пересекаются. Следовательно, $a \parallel b$. ■

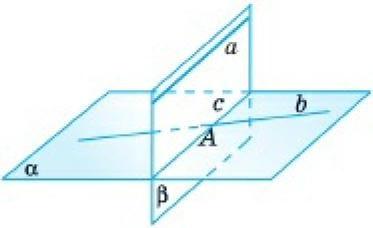


Рис. 1.15

Итак, две прямые могут располагаться в пространстве следующим образом (рис. 1.15):

- *пересекаются* ($b \cap c = A$);
- *параллельны* ($a \parallel c$);
- *прямые скрещиваются* (a и b – *скрещивающиеся прямые*).

1.2.2 Параллельность прямой и плоскости в пространстве

Прямая и плоскость называются параллельными между собой, если они не имеют общих точек. Если прямая a параллельна плоскости α, то это записывают так: $a \parallel \alpha$. Говорят, что прямая a и плоскость α не пересекаются.

Теорема 3. *Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.*

▲ Пусть даны прямые a, b и плоскость α такие, что $a \parallel b$, $a \not\subset \alpha$, $b \subset \alpha$. Нужно доказать, что $a \parallel \alpha$. Для этого достаточно показать, что $a \cap \alpha = \varnothing$.

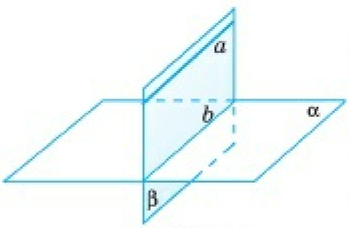


Рис. 1.16

Через прямые a и b проведем плоскость β (рис. 1.16). Плоскости α и β пересекаются по прямой b. Если прямая a и плоскость α имели бы общую точку, то эта точка принадлежала бы также и прямой b. Но это невозможно, т.к. $a \parallel b$. Следовательно, $a \cap \alpha = \varnothing$. ■

Теорема 4. *Через одну из двух скрещивающихся прямых можно провести только одну плоскость, параллельную другой прямой.*

▲ Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b. Покажем, что существует единственная плоскость α такая, что $b \subset \alpha$ и $a \parallel \alpha$.

Возьмем точку $A \in b$ и через эту точку и прямую a проведем плоскость β. В плоскости β через точку A проведем прямую c, параллельную прямой a. Итак, мы имеем прямые b и c: $A = b \cap c$. Тогда по аксиоме CIII через пересекающиеся прямые b и c проведем плоскость α. Так как $c \subset \alpha$ и $a \parallel c$, то по теореме 3 $a \parallel \alpha$, причем плоскость α определяется однозначно.■

Итак, прямая и плоскость могут располагаться в пространстве следующим образом (рис. 1.17):

- *прямая пересекает плоскость, т.е.* $a \cap \alpha = A$;
- *прямая параллельна плоскости, т.е.* $c \parallel \alpha$;
- *прямая лежит в плоскости, т.е.* $b \subset \alpha$.

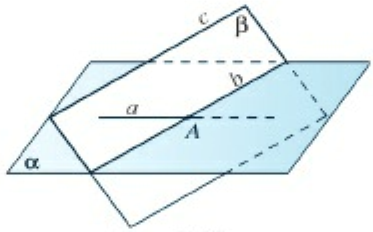


Рис. 1.17

1.3. Тетраэдр и параллелепипед

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать определения тетраэдра и параллелепипеда, изображать тетраэдр, параллелепипед и их элементы на плоскости;
- по рисунку называть параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые, проходящие через ребра тетраэдра и параллелепипеда.

1.3.1. Тетраэдр

Подумайте

Что вы думаете о фигуре, изображенной на рис. 1.18? Лежат ли в одной плоскости все точки, указанные на рисунке?

Эта фигура называется ***тетраэдром***.

Работа в группе

Объединитесь в группы по четыре ученика и попробуйте дать определение тетраэдра, свои предложения обсудите со всем классом. По рекомендации учителя законспектируйте самое удачное определение.

Здесь точки A, B, C и D называются ***вершинами*** тетраэдра, отрезки AB, AC, AD, BC, BD и CD – ***ребрами*** тетраэдра, треугольник ABC называется его ***основанием***, а треугольники ABD, ACD и BCD называются ***боковыми гранями*** тетраэдра. Ребра AB, AC и BC называются ***сторонами основания***, а отрезки AD, BD и CD – ***боковыми ребрами***. Если $DO \perp AF$ и $DO \perp CE$, то отрезок DO называется высотой тетраэдра, а точка O – основанием высоты.

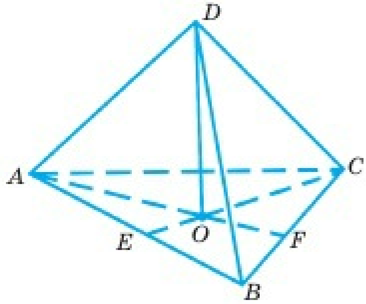


Рис. 1.18

Работа в группе

1) Назовите все пары скрещивающихся прямых, проходящих через ребра тетраэдра (рис. 1.18). 2) Тетраэдр имеет 4 вершины, 6 ребер и 4 грани. Назовите все эти элементы (рис. 1.18).

Основанием тетраэдра является треугольник. Если вместо треугольника взять четырехугольник, то соответствующая фигура называется ***четырехугольной пирамидой***. Тетраэдр – треугольная пирамида. На рис. 1.19 изображена четырехугольная пирамида. Она имеет 5 вершин, 8 ребер и 5 граней.

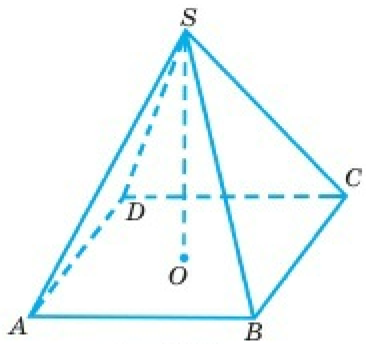


Рис. 1.19

Название пирамиды зависит от того, какой многоугольник расположен в ее основании.

На рис. 1.20 дана шестиугольная пирамида.

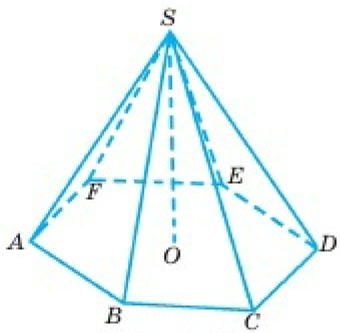


Рис. 1.20

При изображении пространственных фигур на плоскости некоторые ребра (видимые ребра) иллюстрируются сплошными линиями, а другие (невидимые ребра) – пунктирными линиями. При этом, изображая пространственные тела на плоскости, целесообразно придерживаться следующих правил.

- *Количество невидимых (пунктирных) линий на рисунке должно быть по возможности минимальным.*
- *Ни одно из ребер (вершин, точек) не должно остаться в тени других ребер.*
- *По возможности нужно указывать основание высоты.*

Например, на рис. 1.21– 1.25 изображена одна и та же фигура – тетраэдр $ABCD$.

Работа в группе

Какой из рисунков соответствует указанным правилам?

Обоснуйте ответ. От расположения какой точки зависит вид этих тетраэдров?

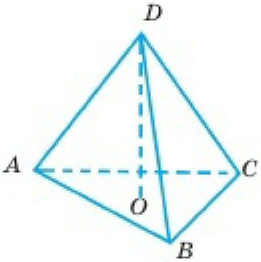


Рис. 1.21

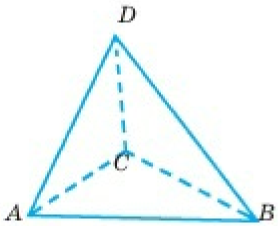


Рис. 1.22

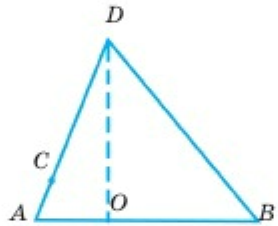


Рис. 1.23

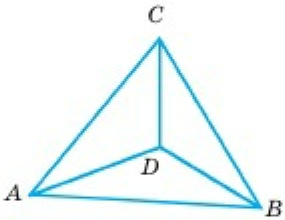


Рис. 1.24

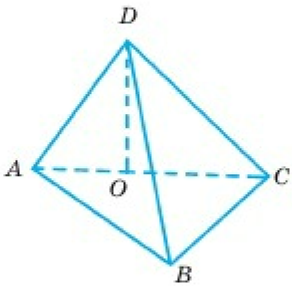


Рис. 1.25

1.3.2. Параллелепипед

Докажите самостоятельно

Пусть равные параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ лежат в разных плоскостях и соответствующие стороны параллельны между собой: $AB \| A_1B_1$, $AD \| A_1D_1$, $BC \| B_1C_1$, $CD \| C_1D_1$ (рис.1.26). Тогда четырехугольники AA_1B_1B, AA_1D_1D, BB_1C_1C, CC_1D_1D являются параллелограммами, т.е. через них проходит четыре плоскости.

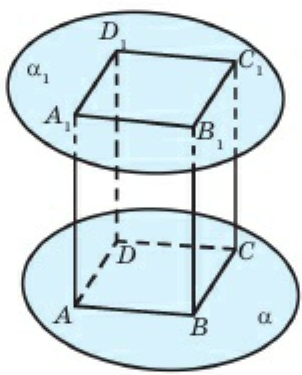


Рис. 1.26

Параллелепипед – это многогранник с шестью гранями, все эти грани являются параллелограммами (рис. 1.26).

Точки A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 называются ***вершинами*** параллелепипеда, параллелограммы $ABCD$ и $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$ – ***нижним*** и ***верхним основаниями*** соответственно, а параллелограммы AA_1B_1B, $AA_1\ D_1\ D$, BB_1C_1C, $CC_1D_1\ D$ – боковыми гранями. Стороны указанных параллелограммов называются ***ребрами***. Итак, параллелепипед имеет 8 вершин, 12 ребер и 6 граней. Отрезки, соединяющие противоположные вершины параллелепипеда, называются его диагоналями. Параллелепипед имеет 4 диагонали.

Работа в группе

Покажите параллельные прямые, проходящие через ребра параллелепипеда, пары скрещивающихся прямых, диагонали параллелепипеда. Имеются ли в параллелепипеде скрещивающиеся диагонали? Есть ли скрещивающиеся прямые среди диагоналей граней параллелепипеда и его диагоналями?

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны к плоскостям оснований, называется прямым. Прямой параллелепипед, основаниями которого являются прямоугольники, называется ***прямоугольным***.

В повседневной жизни мы часто сталкиваемся с моделями прямоугольного параллелепипеда. Например, классная комната, различные коробки и т.п.

1. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
2. Какие прямые называются скрещивающимися? Всегда ли параллельны непересекающиеся прямые?
3. Какие свойства параллельных прямых вы знаете?
4. Какую прямую называют параллельной данной плоскости?
5. Как в пространстве могут располагаться прямая и плоскость?
6. Какая фигура называется тетраэдром? Назовите его элементы.
7. Какая фигура называется параллелепипедом? Назовите его элементы.
8. Какие правила применяют при изображении пространственных тел на плоскости? Приведите пример.

Практическая работа

1. Принимая в качестве моделей плоскости стены, пол и потолок классной комнаты, укажите: а) параллельные прямые; б) пару пересекающихся прямых; в) пару скрещивающихся прямых; г) прямую и параллельную ей плоскость.
2. Покажите взаимное расположение скрещивающихся прямых с помощью двух карандашей.

Упражнения

А

1.24. На рис. 1.27 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Определите расположение прямых относительно друг друга: 1) AA_1 и BB_1; 2) A_1B_1 и D_1C_1; 3) AD и BB_1; 4) AB и DD_1; 5) A_1D и B_1C; 6) BD_1 и B_1C.

1.25. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Можно ли провести плоскость через прямые: 1) AB и BD_1; 2) BB_1 и DD_1; 3) AA_1 и BD_1; 4) A_1D и B_1C; 5) AD и B_1C? Проходит ли плоскость BDD_1 через точку B_1?

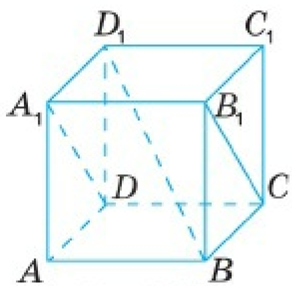


Рис. 1.27

1.26. Прямая a и плоскость β пересекаются. Можно ли провести плоскость, проходящую через прямую a параллельно прямой b ($b \subset \beta$)? Здесь $a \cap b = \varnothing$. Как называются прямые a и b?

1.27. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Покажите среди прямых AB, AC, AD, BC, BD, CD скрещивающиеся пары прямых. Сколько таких пар? Сделайте чертеж.

1.28. Являются ли прямые AB и CD параллельными, если AD и BC – скрещивающиеся прямые?

1.29. Плоскость α проходит через точки A и B, являющиеся серединами отрезков OP и OQ соответственно. Найдите AB, если PQ = 8 см (рис. 1.28).

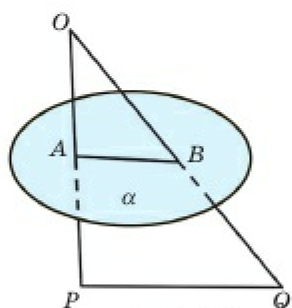


Рис. 1.28

1.30. Точка C – середина отрезка AB. Параллельные прямые, проходящие через точки A, B и C, пересекают плоскость α в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, причем отрезок AB не имеет общих точек с плоскостью α. Найдите CC_1, если: 1) $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 5$ см; 2) $AA_1 = 2{,}3$ м, $BB_1 = 3{,}7$ м; 3) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$.

1.31. Если: 1) $a \parallel \alpha$, $b \parallel \alpha$, то необходимо ли, чтобы $a \parallel b$; 2) $a \parallel b$, $b \parallel \alpha$, то как могут располагаться между собой прямая a и плоскость α; 3) $a \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$, возможно ли пересечение плоскостей α и β?

Здесь a и b – прямые, а α и β – плоскости. Обоснуйте ответ, выполните соответствующие чертежи.

1.32. Имеет ли тетраэдр параллельные ребра? Обоснуйте ответ.

1.33. Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат с диагональю $6\sqrt{2}$ см, а диагональ боковой грани равна 10 см. Найдите сторону основания и боковое ребро тетраэдра.

B

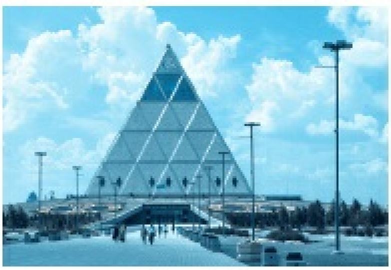


Рис. 1.29

1.34. Дворец Мира и Согласия в городе Нур-Султан имеет форму четырехугольной пирамиды, основанием которой является квадрат. Сторона основания равна высоте пирамиды и основание высоты совпадает с точкой пересечения диагоналей квадрата (рис. 1.29). Диагональ основания равна 87,4 м с точностью до 0,01 м. Найдите высоту пирамиды с точностью до 0,01 м.

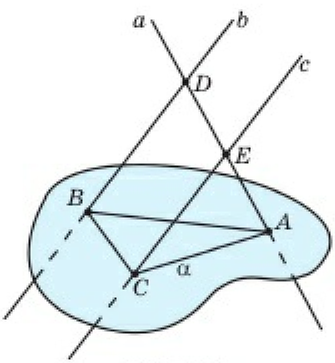


Рис. 1.30

1.35. На рис. 1.30 прямые a, b и c пересекают плоскость α в точках A, B и C соответственно. Можно ли считать, что $b \parallel c$, если $D = a \cap b$, $E = a \cap c$?

1.36. Даны точки A, B, C, D и $AB \parallel CD$. Плоскость, проходящая через точки B и C, пересекает отрезок AD в точке E. Найдите BC и AD, если $AB = 8$ см, $CD = 6$ см, $DE = 3$ см и $BE = 6$ см.

1.37. Докажите, что основания трапеции параллельны плоскости, пересекающей ее по средней линии.

1.38. Через сторону AB параллелограмма $ABCD$ проведена плоскость α. Покажите, что $DC \parallel \alpha$, если $C \notin \alpha$.

1.39. Плоскость, параллельная стороне BC треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке P, а AC – в точке Q. Сторона AB равна 16 см, а BC – 10 см. Найдите: 1) PQ при условии, что $AP : PB = 3 : 2$; 2) AP при условии, что $PQ : BC = 1 : 4$.

1.40. Докажите, что $a \parallel b$, если $b = \alpha \cap \beta$, $a \subset \alpha$ и $a \parallel \beta$.

1.41. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Плоскость, проходящая через точку D параллельно прямой AB, делит отрезок BC в точке K в отношении $BK : KC = 2 : 3$. Найдите точку E – точку пересечения этой плоскости и отрезка AC и отношение $AE : EC$.

1.42. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Докажите, что середины отрезков AB, AD, BC и CD являются вершинами параллелограмма.

1.43. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, диагонали которого равны 8 см и 6 см. Найдите боковое ребро параллелепипеда, если площадь боковой грани равна 35 см^2.

C

1.44. Докажите, что прямая, пересекающая две параллельные прямые, лежит в одной плоскости с этими прямыми.

1.45. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Покажите, что плоскость, проходящая через середины отрезков AD, AC, BC, проходит и через середину отрезка BD.

1.46. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости и $AB = AC = AD = BC = BD = CD = 9$ см. Плоскость, параллельная отрезкам BD и CD, пересекает AD в точке E. Как найти точки пересечения F и K этой плоскости с отрезками AB и AC соответственно? Найдите периметр треугольника EFK, если $AE : ED = 1 : 2$.

1.47. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и вторую прямую.

1.48. Найдите геометрическое место (множество) всех прямых, параллельных прямой a и пересекающих прямую b, причем $b \nparallel a$.

1.49. Точка E не лежит в плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что каждая сторона прямоугольника параллельна плоскости, проходящей через противоположную сторону прямоугольника и точку E.

1.4. Расположение двух плоскостей относительно друг друга

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать признак и свойства параллельности плоскостей, применять их при решении задач.

1.4.1. Расположение двух плоскостей относительно друг друга

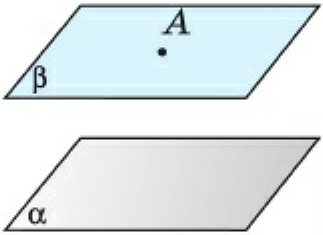


Рис. 1.31

Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек, т.е., если $\alpha \cap \beta = \varnothing$, то $\alpha \parallel \beta$ (рис. 1.31).

Теорема 1. *Через точку, не лежащую в плоскости, можно провести только одну плоскость, параллельную данной плоскости.*

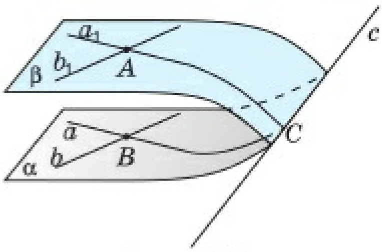


Рис. 1.32

▲ Пусть даны плоскость α и точка A, $A \notin \alpha$. В плоскости α возьмем две пересекающиеся прямые a и b: $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \cap b = B$ (рис. 1.32.). Тогда по теореме 1 (п.1.2) через точку A можно провести прямые a_1 и b_1 такие, что $a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$. Отсюда по аксиоме СIII существует единственная плоскость β, проходящая через пересекающиеся прямые a_1 и b_1. Теперь нужно показать, что $\alpha \parallel \beta$, т.е. $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

Предположим, что плоскости пересекаются по прямой c. Тогда по меньшей мере одна из прямых a или b не параллельна прямой c. Предположим, что $a \nparallel c$ и $a \cap c = C$.

Следовательно, $a_1 \nparallel c$ и также, как при доказательстве теоремы 2 из п. 1.2, имеем $a_1 \cap c = C$, т.е. $a_1 \cap a = C$.

Это противоречит тому, что $a_1 \parallel a$. Поэтому $\alpha \cap \beta = \varnothing$, т.е. $\alpha \parallel \beta$. ■

Теорема 2. *Если две параллельные плоскости пересечь третьей плоскостью, то прямые пересечения этих плоскостей параллельны, т.е.* $\alpha \parallel \beta$, $a = \alpha \cap \gamma$, $b = \beta \cap \gamma \Rightarrow a \parallel b$ (рис. 1.33).

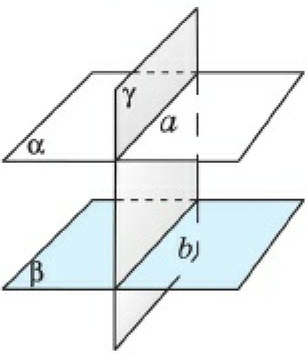


Рис. 1.33

▲ Пусть $a = \alpha \cap \gamma$, $b = \beta \cap \gamma$, $\alpha \parallel \beta$. Докажем, что $a \parallel b$.

Допустим, что $a \nparallel b$. Так как $a, b \subset \gamma$, то прямые a и b пересекаются, т.е. существует точка $A = a \cap b$. Поскольку $a \subset \alpha$ и $b \subset \beta$, то $A \in \alpha \cap \beta$.

Это противоречит тому, что $\alpha \parallel \beta$. Следовательно, $a \parallel b$. ■

Итак, две плоскости могут располагаться в пространстве следующим образом:

- *плоскости пересекаются по прямой;*
- *плоскости параллельны.*

1.4.2. Признак параллельности плоскостей

Теорема 3. *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

▲ Пусть a, $b \subset \alpha$, $a \cap b = O$, a', $b' \subset \beta$, $a' \cap b' = O'$, $a \parallel a'$, $b \parallel b'$. Докажем, что $\alpha \parallel \beta$ (рис. 1.34).

Допустим, что $\alpha \nparallel \beta$ и $\alpha \cap \beta = c$. Аналогично доказательству теоремы 2 получим, что либо $a \cap a' \neq \varnothing$, либо $b \cap b' \neq \varnothing$. Это противоречит тому, что $a \parallel a'$ или $b \parallel b'$ соответственно. Следовательно, $\alpha \parallel \beta$. ■

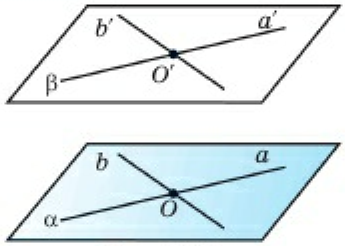


Рис. 1.34

Теорема 4. *Отрезки параллельных прямых, заключенные параллельными плоскостями, равны между собой.*

▲ Пусть $a \parallel b$, $\alpha \parallel \beta$, $a \cap \alpha = A$, $a \cap \beta = C$, $b \cap \alpha = B$, $b \cap \beta = D$. Доказать, что $AC = BD$ (рис. 1.35). Действительно, так как $a \parallel b$, то через эти прямые проходит только одна плоскость γ, причем $\alpha \cap \gamma = AB$, $\beta \cap \gamma = CD$. По теореме 2 $AB \parallel CD$, а $AC \parallel BD$ по условию теоремы. Следовательно, $ABCD$ – параллелограмм, т.е. $AC = BD$. ■

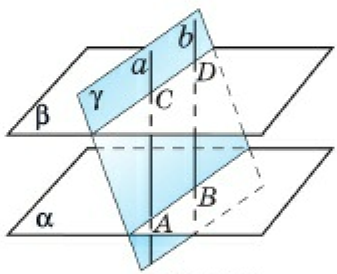


Рис. 1.35

1. Какие плоскости называются параллельными?
2. Какими свойствами обладают параллельные плоскости?
3. Как могут располагаться две плоскости в пространстве?
4. Сформулируйте признак параллельности двух плоскостей и докажите его.
5. Какими свойствами обладают отрезки параллельных прямых, заключенные параллельными плоскостями?

Практическая работа

1. Принимая в качестве модели плоскости стены, пол и потолок классной комнаты, укажите: 1) все пары параллельных плоскостей; 2) все пары пересекающихся плоскостей и прямые их пересечения.

2. Покажите взаимное расположение параллельных плоскостей с помощью двух книг.

Упражнения

А

1.50. Прямая a и плоскость α пересекаются. Можно ли провести плоскость, проходящую через прямую a параллельно α?

1.51. Необходимо ли, чтобы плоскости α и β были параллельны между собой, если две прямые, лежащие в плоскости α, параллельны плоскости β? Почему? Обоснуйте ответ.

1.52. Через середины отрезков AB, AC и AD, не лежащих в одной плоскости, проведена плоскость α. Докажите, что плоскость α параллельна плоскости BCD.

1.53. Параллельные плоскости пересекают сторону OA угла AOB в точках C и C_1, а сторону OB – в точках D и D_1 соответственно. При этом $OC = 6$ см, $OC_1 = 10$ см. Найдите: 1) CD, если $C_1D_1 = 15$см; 2) DD_1, если $OD = 9$ см.

1.54. Квадрат $ABCD$ со стороной, равной 10 см, и точка O не лежат в одной плоскости. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 являются серединами отрезков OA, OB, OC, OD соответственно.

1) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат в плоскости, параллельной плоскости квадрата $ABCD$. 2) Найдите периметр четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

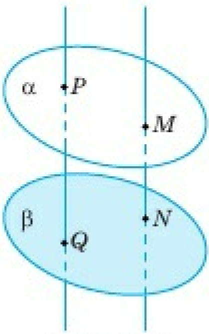


Рис. 1.36

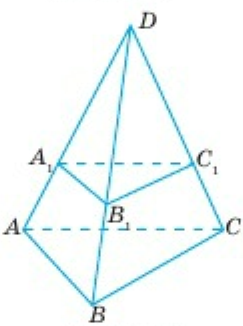


Рис. 1.37

1.55. На рис. 1.36 $PQ \neq MN$, $\alpha \parallel \beta$. Верно ли, что $PQ \parallel MN$? Почему?

1.56. Известно, что $\angle BAD = \angle B_1A_1D$, а $\angle CBD = \angle C_1B_1D$ (рис. 1.37).

1) Докажите, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны;

2) Найдите AB, если $AA_1 : A_1D = 2:3$ и $A_1B_1 = 2$ см.

1.57. Плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны и $DA_1 : A_1A = 1 : 1$ (рис. 1.37).

1) Докажите, что $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$, $BC \parallel B_1C_1$.

2) Найдите AD, если $AA_1 = 2$ см.

В

1.58. Прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей. Покажите, что эта прямая пересекает и вторую плоскость.

1.59. Докажите, что если $\alpha \parallel \beta$ и $\beta \parallel \gamma$, то $\alpha \parallel \gamma$, где α, β, γ – плоскости.

1.60. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O, в которой каждый из них делится пополам. Покажите, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны.

1.61. Плоскость γ пересекает плоскости α и β : $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$, $a \parallel b$. Можно ли утверждать, что $\alpha \parallel \beta$? Почему? Обоснуйте ответ.

1.62. Дано: прямая a и плоскость α, $a \parallel \alpha$. Как построить плоскость, проходящую через прямую a параллельно плоскости α?

1.63. Через точку O, лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые a и b: $a \cap \alpha = A$, $a \cap \beta = C$, $b \cap \alpha = B$, $b \cap \beta = D$ и $AO : AC = 1 : 3$. Найдите: 1) OD, если $BO = 4$ см; 2) AC, если $OC = 6$ см.

1.64. Верно ли утверждение: «Если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны другой плоскости, то эти плоскости параллельны»?

1.65. Верно ли утверждение: «Если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны»?

C

1.66. Покажите, что найдется только одна пара плоскостей α и β, которые параллельны между собой и каждая из которых проходит через одну из скрещивающихся прямых a и b.

1.67. Треугольники ABC и BCD лежат в разных плоскостях. Точки P, Q, R и T – середины отрезков AB, AC, CD и BD соответственно. Докажите, что четырехугольник $PQRT$ – параллелограмм.

1.68. Прямые a, b, c и d, проходящие через точку O, пересекают плоскость α в точках, которые являются вершинами параллелограмма. Докажите, что эти прямые пересекают любую другую плоскость, параллельную α, в вершинах некоторого параллелограмма.

1.69. Прямая a пересекает параллельные между собой плоскости α, β и γ в точках A, B и C соответственно. Покажите, что отношение $AB : BC$ не зависит от выбора прямой a.

1.70. Покажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и вторую плоскость.

1.71. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, причем $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. Можно ли утверждать, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны?

1.72. Даны плоскости α, β и прямые a, b такие, что $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap a = A$, $\beta \cap a = B$, $\alpha \cap b = C$, $\beta \cap b = D$. Точки K и N принадлежат прямым a и b соответственно, причем $AK : KB = CN : ND$. Докажите, что $KN \parallel \beta$.

Раздел 2. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Перпендикулярность прямой и плоскости.
2.2. Теорема о трех перпендикулярах.
2.3. Угол между прямой и плоскостью. Двугранные углы.
2.4. Изображение пространственных фигур на плоскости.

2.1. Перпендикулярность прямой и плоскости

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать определение и свойства перпендикулярных прямых и применять их при решении задач;
- знать определение и свойства перпендикулярности прямой и плоскости и применять их при решении задач.

2.1.1. Угол между прямыми. Перпендикулярность прямых

Известно, что непараллельные прямые a и b, лежащие в одной плоскости, образуют две пары вертикальных углов. Один из этих углов, не являющийся тупым, называется углом между прямыми a и b. На рис. 2.1 $\varphi = \angle AOB < \angle AOC$. По определению $\angle(a, b) = \varphi$. Итак, будем считать, что угол между двумя прямыми всегда удовлетворяет неравенству $0° < \varphi \leqslant 90°$.

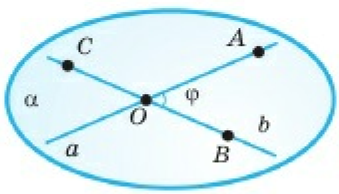


Рис. 2.1

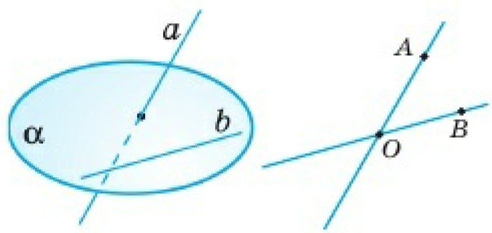


Рис. 2.2

Теперь определим понятие угла между скрещивающимися прямыми a и b. Для этого возьмем точку O пространства и проведем прямые OA и OB, параллельные данным прямым. Если угол AOB не тупой, то в качестве угла между скрещивающимися прямыми a и b возьмем величину угла AOB. На рис. 2.2 a и b – скрещивающиеся прямые, $a \parallel OA$, $b \parallel OB$, $\angle AOB \leqslant 90°$. По определению $\angle(a, b) = \angle AOB$.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым.

Прямые a и b называются перпендикулярными, если угол между ними равен $90°$. Перпендикулярность прямых a и b записывают так: $a \perp b$. Как сказано выше, перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут не пересекаться, т.е. могут быть скрещивающимися. Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отрезки AD, BC, A_1D_1, B_1C_1, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны отрезку AB (рис. 2.3).

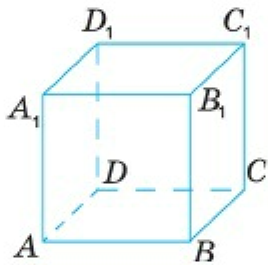


Рис. 2.3

При этом отрезки (лучи), лежащие на перпендикулярных прямых, ***перпендикулярны*** между собой.

Теорема 1. *Прямая, перпендикулярная одной из параллельных прямых, также перпендикулярна и второй прямой.*

▲ Пусть $a \parallel b$ и $c \perp a$. Докажем, что $c \perp b$ (рис. 2.4).

Действительно, через некоторую точку O пространства проведем прямые OA, OB и OC параллельно прямым a, b и c соответственно. Так как $a \parallel b$, то прямые OA и OB совпадают. Учитывая, что $\angle AOC = 90°$, имеем: $\angle BOC = 90°$, т.е. $c \perp b$. ■

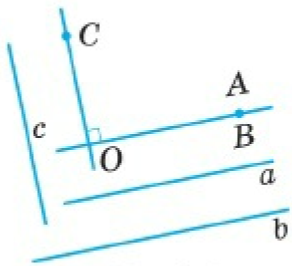


Рис. 2.4

2.1.2. Перпендикулярность прямой и плоскости

Если прямая a перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости α, ***то прямая a перпендикулярна плоскости*** α.

Это записывают так: $a \perp \alpha$. Также определим, когда отрезок (луч) перпендикулярен данной плоскости. *Если отрезок (луч) лежит на прямой, перпендикулярной плоскости, то отрезок (луч) перпендикулярен* этой плоскости.

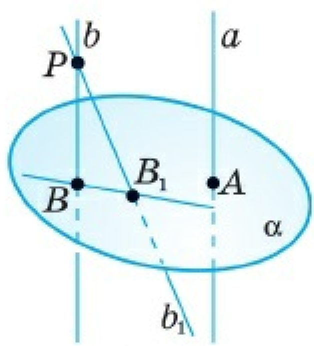


Рис. 2.5

Теорема 2. *Прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны между собой, т.е.* $a \perp \alpha,\ b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$.

▲ Пусть $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$. Докажем, что $a \parallel b$. Предположим, что $a \nparallel b$. Через произвольную точку $P \in b$ проведем прямую b_1, параллельную a, т.е. $b_1 \parallel a$. Введен обозначения: $B = b \cap \alpha$, $B_1 = b_1 \cap \alpha$ (рис. 2.5). Так как $b \perp \alpha$ и $a \perp \alpha$, то $a \perp BB_1$ и $b \perp BB_1$. С другой стороны, так как $a \perp BB_1$ и $a \parallel b_1$, то по теореме 1 $b_1 \perp BB_1$. Тогда треугольник BPB_1 имеет два прямых угла ($\angle PBB_1 = 90°$ и $\angle PB_1B = 90°$). Это невозможно. Следовательно, $a \parallel b$. ■

Теорема 3. *Если плоскость перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой, т.е.* $a \parallel b$, $\alpha \perp a \Rightarrow \alpha \perp b$ (рис. 2.6).

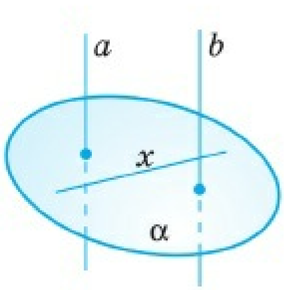


Рис. 2.6

▲ Пусть $a \parallel b$, $\alpha \perp a$. Докажем, что $\alpha \perp b$.

Действительно, так как $a \perp \alpha$, то прямая a перпендикулярна любой прямой x плоскости $\alpha : a \perp x,\ \forall x \subset \alpha$. Тогда по теореме 1 $b \perp x,\ \forall x \subset \alpha$. Следовательно, по определению перпендикулярности прямой и плоскости $b \perp \alpha$. ■

Теперь докажем теорему, которую принято называть ***признаком перпендикулярности прямой и плоскости***.

Теорема 4. *Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости, т. е.* $a \perp b$, $a \perp c$, $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$ *и* $b \cap c = A \Rightarrow a \perp \alpha$.

▲ Пусть $a \perp b$, $a \perp c$, $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$ *и* $a \cap b \cap c = A$. Докажем, что $a \perp \alpha$.

Будем считать, что прямая a проходит через точку A. В противном случае, согласно теореме 3 мы рассмотрим прямую a_1, проходящую через точку A параллельно a.

Пусть x – произвольная прямая плоскости α. Возможны два случая: 1) $A \in x$, 2) $A \notin x$.

1) Пусть $A \in x$. Отложим на прямой a равные отрезки AA_1, AA_2 и проведем прямую m, пересекающую b, c, x в точках B, C, X соответственно (рис. 2.7).

Прямая b является осью симметрии отрезка A_1A_2 и поэтому $A_1B = A_2B$. Аналогично $A_1C = A_2C$. Следовательно, $\Delta A_1BC = \Delta A_2BC$ по трем сторонам. Значит, $\Delta A_1BC = \Delta A_2BC$. Тогда $\Delta A_1BX = \Delta A_2BX$ по двум сторонам и углу между ними.

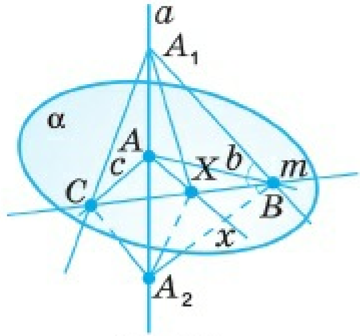


Рис. 2.7

Отсюда $A_1X = A_2X$. Поэтому ΔA_1XA_2 – равнобедренный и AX есть медиана, проведенная к его основанию. Значит, AX является высотой треугольника A_1XA_2, т.е. $AX \perp A_1A_2$ и тем самым $x \perp a$.

2) В случае, когда $A \notin x$, рассмотрим $x_1 \parallel x$ и $x_1 \subset \alpha$. По доказанному и теореме 1 $a \perp x_1$, $a \perp x$ соответственно (рис. 2.8). ■

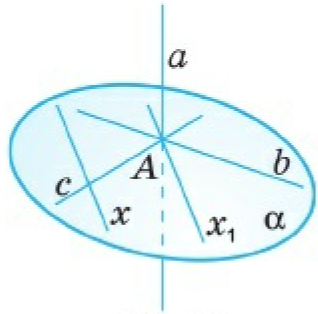


Рис. 2.8

Пример 1. Докажем, что из любой точки пространства к данной плоскости можно провести только одну перпендикулярную прямую.

▲ Пусть даны точка A и плоскость α. Возможны два случая: 1) $A \notin \alpha$; 2) $A \in \alpha$.

1) Пусть $A \notin \alpha$. Возьмем произвольную прямую $a \subset \alpha$ и проведем через точку A и прямую a плоскость β. В плоскости β через точку A проведем прямую b, перпендикулярную прямой a: $b \perp a$, $a \cap b = B$. Теперь в плоскости α через точку B проведем прямую c, перпендикулярную a. Через пересекающиеся прямые b и c проведем плоскость γ. В плоскости γ через точку A проведем прямую m, перпендикулярную прямой c: $m \perp c$, $m \cap c = C$ (рис. 2.9). Тогда $m \perp \alpha$. В самом деле, так как $a \perp b$ и $a \perp c \Rightarrow a \perp \gamma \Rightarrow a \perp m$. По построению $m \perp c$. Следовательно, прямая m перпендикулярна двум пересекающимся прямым a и c. По теореме 4 $m \perp \alpha$.

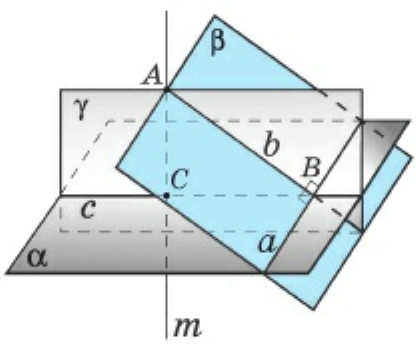


Рис. 2.9

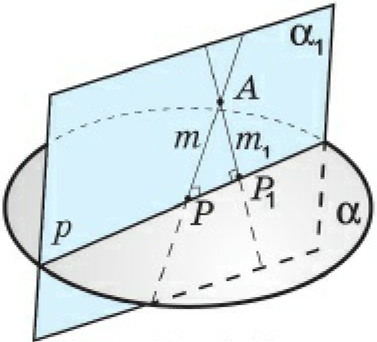


Рис. 2.10

Теперь докажем единственность прямой m. Методом доказательства от противного предположим, что через точку A можно провести еще одну прямую m_1, перпендикулярную плоскости α. Так как $m_1 \neq m$, то через пересекающиеся прямые m_1 и m можно провести плоскость α_1, которая пересекается с плоскостью α по прямой p. Введем обозначения: $P = m \cap p$ и $P_1 = m_1 \cap p$ (рис. 2.10). Так как $m \perp p$, $m_1 \perp p$, то треугольник APP_1 имеет два прямых угла, чего быть не может. Значит, $m = m_1$, т.е. прямая m единственная ($A \in m$, $m \perp \alpha$).

2) Пусть $A \in \alpha$. Возьмем произвольную прямую $a \subset \alpha$ и через точку A проведем прямую c, перпендикулярную прямой a: $A \in c$, $c \perp a$.

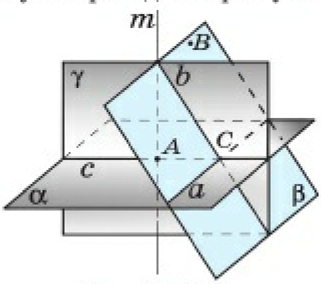


Рис. 2.11

Теперь возьмем некоторую точку B пространства ($B \notin \alpha$) и проведем плоскость β, проходящую через точку B и прямую a. В плоскости β через точку $C = c \cap a$ проведем прямую b, перпендикулярную a. Через пересекающиеся прямые c и b проведем плоскость γ, в которой через точку A проведем прямую m, перпендикулярную прямой c (рис. 2.11).

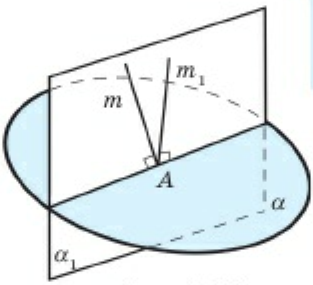


Рис. 2.12

Докажите самостоятельно

Используя рис. 2.12, докажите что $m \perp \alpha$ и эта прямая единственная.

Замечание. Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки A на прямую a называется расстоянием от точки A до прямой a. Указанный перпендикуляр всегда определяется однозначно, т.к. прямая a и точка $A \notin a$ лежат на одной плоскости.

1. Сформулируйте определение угла между прямыми? Рассмотрите пересекающиеся и скрещивающиеся прямые.
2. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
3. Каким свойством обладает прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых? Докажите сформулированное вами утверждение.
4. Дайте определение перпендикулярности прямой и плоскости?

5. Каким свойством обладают прямые, перпендикулярные одной плоскости?
6. Докажите признак перпендикулярности прямой и плоскости.
7. Сколько перпендикуляров можно провести к плоскости из данной точки? Обоснуйте ответ.

Практическая работа

1. На примере классной комнаты покажите взаимное расположение прямой и перпендикулярной ей плоскости.

2. С помощью карандаша и поверхности стола покажите взаимное расположение прямой, перпендикулярной данной плоскости.

3. Постройте плоскость α и прямоугольный треугольник ABC ($\angle C=90^\circ$) так, чтобы $BC \subset \alpha$ и $AC \perp \alpha$.

Упражнения

А

2.1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. 1) Покажите все прямые, являющиеся ребрами куба, перпендикулярными прямой AA_1; 2) Покажите все плоскости, являющиеся гранями куба, перпендикулярными прямой AB; 3) Какие прямые, проходящие через вершины куба, перпендикулярны плоскости AA_1C_1C?

2.2. Даны взаимно перпендикулярные прямая a и плоскость α. Сколько прямых можно провести из данной точки плоскости α так, чтобы они были перпендикулярны прямой a и лежали в плоскости α?

2.3. Отрезки AO, BO и CO попарно перпендикулярны между собой. Найдите угол ABC, если $AO = BO = CO$.

2.4. Найдите высоту дерева, если: 1) $a=3$ м, $\alpha = 60^\circ$; 2) $a=5{,}7$ м, $\alpha=45^\circ$; 3) $a=8$ м, $\alpha=30^\circ$ (рис. 2.13).

2.5. Отрезки AO, BO и CO попарно перпендикулярны между собой. Найдите AB, AC и BC, если: 1) $AO=4$ см, $BO=3$ см, $CO=3$ см; 2) $AO=5$ см, $BO=12$ см, $CO=16$ см.

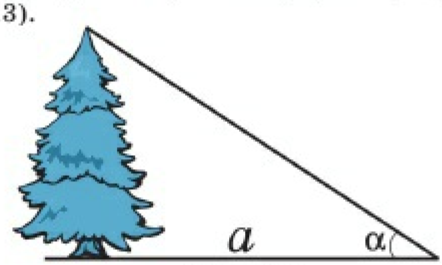


Рис. 2.13

2.6. Отрезок AK перпендикулярен плоскости прямоугольника $ABCD$. Найдите KC, если $AK = 2\sqrt{14}$ м, $AB = 5$ м, $AD = 12$ м.

2.7. Известно, что $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$, $B \in \alpha$, $D \in \alpha$. Сколько плоскостей можно провести через данные четыре точки? Почему?

2.8. Прямая a, проходящая через вершину A треугольника ABC, перпендикулярна его сторонам AB и AC. Выясните взаимное расположение прямых a и BC?

2.9. Сколько прямых, перпендикулярных данной прямой, можно провести через точку, лежащую на этой прямой? А через точку, не лежащую на данной прямой?

2.10. Даны прямые a, b и c такие, что $a \perp b$ и $c \perp b$. Можно ли утверждать, что $a \parallel c$? Почему? Не противоречит ли это следующему утверждению из планиметрии: «Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой»?

B

2.11. Могут ли прямые b и c быть перпендикулярными, если $a \perp b$ и $\angle(a, c) = 60°$? Обоснуйте ответ.

2.12. Покажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB_1 \perp CD_1$.

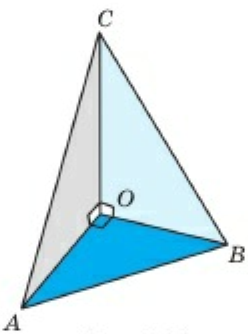


Рис. 2.14

2.13. Отрезки OA, OB и OC попарно перпендикулярны между собой. Найдите углы треугольника ABC, если $OA = OB = 6$ см, $OC = 8$ см (рис. 2.14).

2.14. Даны прямая a и плоскость α, $a \perp \alpha$, $A = a \cap \alpha$. Прямая b проходит через точку A и $b \perp a$. Докажите, что $b \subset \alpha$.

2.15. Вне плоскости ABC дана точка P такая, что $PC \perp BC$, $AC \perp BC$, $\Delta PBC = \Delta ABC$.
1) Можно ли утверждать, что $PC \perp (ABC)$?
2) Можно ли среди указанных отрезков найти отрезок, перпендикулярный плоскости ABC?

2.16. Верно ли утверждение: «Если $c \perp a$, $c \perp b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, то $c \perp \alpha$»? Дополните это утверждение так, чтобы оно было верным при любых условиях.

2.17. Какая фигура образуется из множества точек пространства, равноудаленных от концов отрезка AB?

2.18. Отрезок AD перпендикулярен плоскости равностороннего треугольника ABC. Найдите периметр треугольника BCD, если: 1) $AB = 3$ см, $AD = 4$ см; 2) $AB = AD = a$.

2.19. Даны прямые a, b, m и n такие, что $a \parallel m$, $b \parallel n$, $a \perp b$. Докажите, что $m \perp n$.

2.20. Прямые AB и CD перпендикулярны плоскости α и $B, D \in \alpha$, $AC \cap \alpha = P$. Найдите CD, если $AB = 12$ см, $BD = PD = 3$ см (рис.2.15).

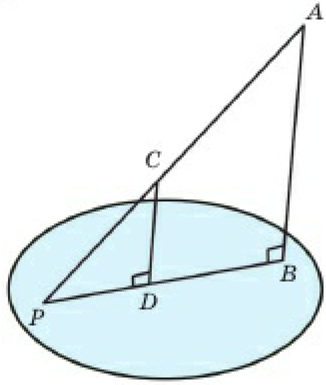


Рис. 2.15

2.21. Точки A и B лежат в плоскости α. Отрезки AC и BD, расположенные по одну сторону плоскости α, перпендикулярны ей. Найдите: 1) углы четырехугольника $ABCD$, если $AB = BD = 3$ см, $AC = 6$ см; 2) периметр четырехугольника $ABCD$, если $AB = 8$ см, $AC = 21$ см, $BD = 6$ см.

C

2.22. Периметр равностороннего треугольника ABC равен $2p$, отрезки AD и BK перпендикулярны плоскости этого треугольника. Найдите периметр треугольника CDK, если $ABKD$ – квадрат.

2.23. Какой пространственной фигурой будет геометрическое место точек, расположенных на одинаковом расстоянии от всех вершин: 1) равносторонним треугольником; 2) квадратом?

2.24. Определите множество точек, расположенных в пространстве на одинаковом расстоянии от трех данных точек, не лежащих на одной прямой.

2.25. Покажите, что отрезок AC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярен плоскости, проходящей через точки B, B_1 и D_1.

2.26. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC равны 3 см, 4 см соответственно, а длина перпендикуляра CD, опущенного на плоскость треугольника, равна 5 см. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы AB.

2.27. Даны треугольник ABC, точки D и K, лежащие вне плоскости этого треугольника, такие, что $AD \perp AB$, $KC \perp BC$, $AD \parallel KC$. Докажите, что прямые AD и KC перпендикулярны плоскости треугольника ABC.

2.28. Докажите, что если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.

2.29. Даны прямые a, b и плоскость α такие, что $a \perp b$, $a \perp \alpha$, $b \not\subset \alpha$. Докажите, что $b \parallel \alpha$.

2.30. Точки пространства A, B, C и D таковы, что $AB = AC = AD = BC = BD = CD = a$. Точки P и Q являются серединами отрезков AB и CD соответственно. Докажите, что $PQ \perp AB$ и $PQ \perp CD$, и найдите длину PQ.

2.2. Теорема о трех перпендикулярах

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать определения перпендикуляра, наклонной и проекции наклонной в пространстве;
- знать теорему о трех перпендикулярах и применять ее при решении задач;
- уметь находить расстояние от точки до плоскости и между скрещивающимися прямыми.

2.2.1. Перпендикуляр и наклонная к плоскости

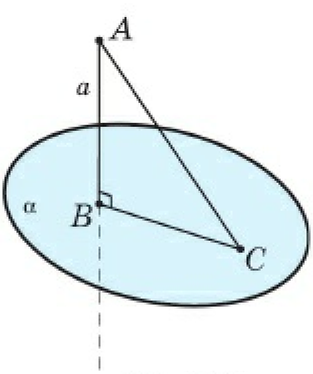


Рис. 2.16

Пусть даны точка A и плоскость α, не проходящая через эту точку.

Проведем из точки A прямую a, перпендикулярную плоскости α. Пусть $a \cap \alpha = B$. Тогда отрезок AB называется ***перпендикуляром***, проведенным из точки A к плоскости α, точка B – ***основанием перпендикуляра*** AB (рис. 2.16).

Расстоянием от точки A до плоскости α называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости α. На рис. 2.16 расстояние от точки A до плоскости α равно длине отрезка AB.

Если AB – перпендикуляр, проведенный к плоскости α (точка B – его основание), то отрезок, соединяющий любую точку C в плоскости α и точку A, называется ***наклонной***, проведенной из точки A к плоскости α. Точка C называется ***основанием наклонной*** AC. При этом отрезок BC называют ***проекцией наклонной*** AC на плоскость α. Например, на рис. 2.16 отрезок AB – перпендикуляр, AC – наклонная, а BC – проекция.

2.2.2. Теорема о трех перпендикулярах

Теорема 1. *Если прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна и наклонной. Обратно, если прямая в плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.*

▲ Пусть из точки A проведены перпендикуляр AB и наклонная AC к плоскости α (рис. 2.17). Если прямая a проходит через точку C и лежит в плоскости α, то $a \perp AB$, так как $AB \perp \alpha$. С другой стороны, если $a \perp BC$ или $a \perp AC$, то прямая a перпендикулярна плоскости ABC, т.к. a перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и BC (или прямым AB и AC) плоскости ABC. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая a перпендикулярна AC или BC. ■

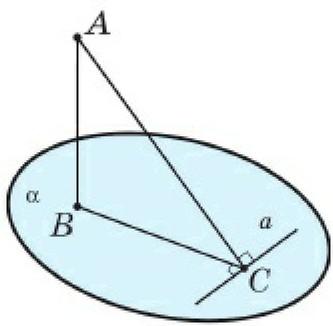


Рис. 2.17

Итак, для того чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной.

Название этой теоремы исходит из того, что $AB \perp a$, $AC \perp a$, $BC \perp a$. Теперь приведем еще одно важное свойство перпендикуляра, наклонной и ее проекции.

Теорема 2. *Если из точки вне плоскости проведены к этой плоскости перпендикуляр и наклонные, то:* 1) *две наклонные, имеющие равные проекции, равны*; 2) *из двух наклонных та больше, проекция которой больше*; 3) *перпендикуляр короче любой наклонной.*

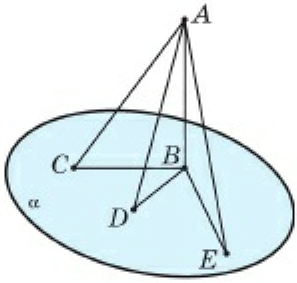


Рис. 2.18

▲ Пусть AB – перпендикуляр, а AC, AD и AE – наклонные (рис. 2.18).

1) Если $CB = EB$, то $\Delta ABC = \Delta ABE$ (по двум катетам). Следовательно, $AC = AE$.

2) Пусть $CB > DB$, тогда из прямоугольных треугольников ABC и ABD имеем:

$$AD = \sqrt{AB^2 + DB^2} < \sqrt{AB^2 + CB^2} = AC,$$

т.е. $AD < AC$.

3) Перпендикуляр AB является катетом, а наклонная AC – гипотенузой прямоугольного треугольника ABC. Значит, $AB < AC$. ■

2.2.3. Понятие расстояния в пространстве

Под расстоянием между точками A и B в пространстве нужно понимать длину отрезка AB. Вообще под ***расстоянием*** между двумя геометрическими фигурами понимают расстояние между их ближайшими точками (если такие существуют). В этой связи длина перпендикуляра, проведенного из точки к плоскости, есть ***расстояние от точки до плоскости***.

Также за ***расстояние между параллельными плоскостями*** принимают длину перпендикуляра, проведенного из любой точки плоскости к другой. ***За расстояние между скрещивающимися прямыми принимают длину перпендикуляра, проведенного из любой точки одной из прямых к плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой.*** Если расстояние между фигурами F_1 и F_2 обозначить через $d(F_1;\ F_2)$, то на рисунках 2.19–2.21 расстояние между соответствующими фигурами определяется так: на рис. 2.19 $a \parallel \alpha$, $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha \Rightarrow d(A;\ \alpha) = AB$,

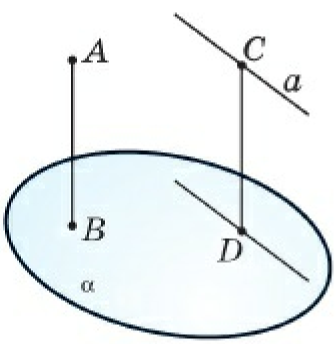


Рис. 2.19

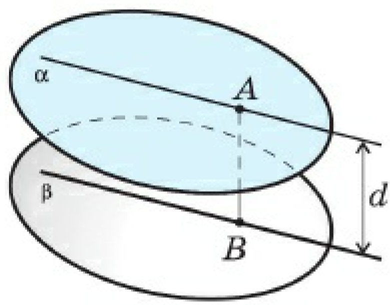


Рис. 2.20

$d(a;\alpha) = CD$; на рис. 2.20 $\alpha \parallel \beta$, $AB \perp \beta \Rightarrow d(\alpha;\beta) = AB$; на рис. 2.21 a и b – скрещивающиеся прямые и $a \subset \alpha$, $b \parallel \alpha \Rightarrow d(a;\ b) = d(\alpha;\ b) = AB$, где $AB \perp \alpha$, $B \in b$.

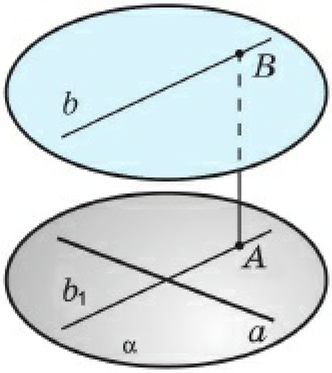


Рис. 2.21

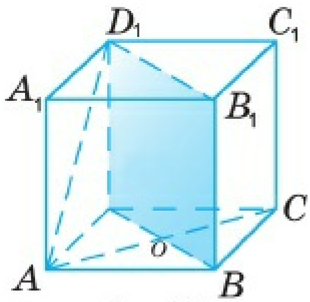


Рис. 2.22

Пример 1. На рис. 2.22 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $AB = 2$ см. Найти:

1) $d(B;\ D_1)$; 2) $d(AB;\ D_1C_1)$; 3) $d(AB;\ B_1C_1)$; 4) $d(A;\ BB_1D_1)$.

▲ 1) $d(B;\ D_1) = BD_1$. Чтобы найти BD_1, дважды применим теорему Пифагора. Из прямоугольного равнобедренного треугольника ABD имеем: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ см.

А из прямоугольного треугольника BDD_1 получим:

$BD_1 = \sqrt{BD^2 + DD_1^2} = \sqrt{8+4} = 2\sqrt{3}$ см.

2) Так как $AB \parallel D_1C_1$ и $AB \perp (BB_1C_1C)$, $D_1C_1 \perp (BB_1C_1C)$, то $d(AB;\ D_1C_1) = AD_1$. Из прямоугольного треугольника ADD_1 имеем:

$AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = 2\sqrt{2}$ см.

3) Так как грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны, то $d(AB;\ B_1C_1) = BB_1 = 2$ см.

4) Так как $BB_1 \perp (ABC)$, $AC \perp BD$, то $AO \perp (BB_1D_1)$. Поэтому

$d(A; BB_1D_1) = AO = \dfrac{1}{2} AC = \sqrt{2}$ см. ■

1. Что такое перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость? Какую точку называют основанием перпендикуляра?
2. Укажите на рисунке наклонную, основание перпендикуляра и основание наклонной.
3. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах и докажите ее.
4. Сформулируйте свойство перпендикуляра, наклонной и ее проекции и докажите его.
5. Что нужно понимать под расстоянием между: 1) точкой и прямой; 2) фигурами; 3) параллельными плоскостями; 4) скрещивающимися прямыми; 5) прямой и плоскостью?

Практическая работа

1. Возьмите пустую спичечную коробку. Измерьте длину всех ее ребер. Найдите расстояние между противоположными гранями. Обоснуйте ответ.
2. С помощью твердой бумаги, четырех стержней (палочек) и скотча изготовьте модель, иллюстрирующую теорему о трех перпендикулярах.

Упражнения

А

2.31. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $O = AC \cap BD$, $AB = 8$ см. 1) Найдите расстояние между прямыми AC и B_1D_1. 2) Найдите длину наклонных A_1B и A_1C. 3) Покажите, что $A_1O \perp BD$, и найдите длину A_1O.

2.32. Найдите расстояние от плоскости α до середины отрезка, один конец которого расположен в плоскости α, а второй – на расстоянии 4 см от этой плоскости.

2.33. Концы отрезка расположены от плоскости α на расстоянии 3 см и 7 см. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости α, если отрезок и плоскость α не имеют общих точек.

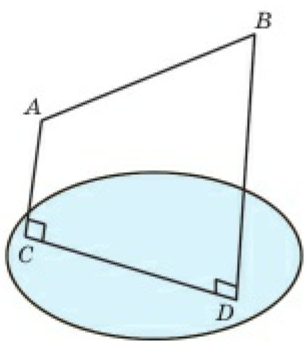


Рис. 2.23

2.34. Расстояния от концов отрезка AB до плоскости равны соответственно: 1) 1 см и 5 см; 2) 3,1 мм и 6,9 мм; 3) 3,2 м и 7,4 м; 4) a и b. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости α, если отрезок AB не пересекается с плоскостью α (рис. 2.23).

2.35. Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AB и наклонная AC. Найдите: 1) проекцию BC, если $AB = 4$ см, $AC = 5$ см; 2) AC и BC, если $AB = 2{,}5$ м, $\angle ACB = 30°$; 3) AB, если $AC = 13$ см, $BC = 12$ см.

2.36. Даны плоскости α и β, $\alpha \parallel \beta$. Из точки $A \in \alpha$ проведены к плоскости β перпендикуляр AB и наклонная AC. Найдите расстояние между плоскостями α и β, если $AC = 10$ см, $BC = 6$ см.

2.37. Дано: $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$, $B \in \alpha$, $D \in \alpha$, $AC \cap \alpha = E$ и $AB = CD = 4$ см. 1) Докажите, что $BE = DE$, $AE = CE$. 2) Найдите AC и BD, если $\angle BAE = 60°$.

2.38. К плоскости равностороннего треугольника ABC проведен перпендикуляр AD, точка E – середина стороны BC. 1) Докажите, что $DE \perp BC$. 2) Найдите DE, если $AB = 4$ см, $AD = 3$ см.

2.39. К плоскости квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр AK. Найдите расстояние от точки K до прямых AB, BC и BD, если $AB = 3$ см, $AK = 4$ см (рис. 2.24).

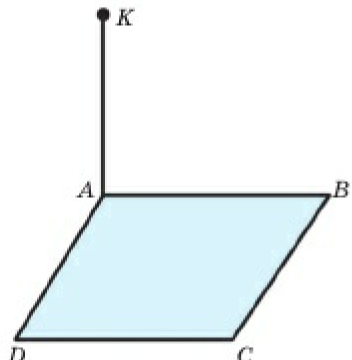


Рис. 2.24

2.40. Концы отрезка AB удалены от плоскости α на расстояния, равные 1 см и 5 см соответственно. Найдите расстояние от середины отрезка AB до плоскости α, если: 1) отрезок AB не пересекается с плоскостью α; 2) отрезок AB пересекает плоскость α.

B

2.41. Расстояние от вершин равностороннего треугольника ABC до точки D равно 5 см. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC, если $AB = 8$ см.

2.42. Какую фигуру образует множество всех наклонных одинаковой длины, проведенных из одной и той же точки к данной плоскости?

2.43. Плоскость α, перпендикулярная катету AC прямоугольного треугольника ABC, делит его в отношении $m : n$. В каком отношении плоскость α делит гипотенузу AB?

2.44. Покажите, что две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны между собой.

2.45. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, а отрезок OK перпендикулярен его диагоналям. Докажите, что расстояния от точки K до прямых, проходящих через стороны ромба, равны между собой.

2.46. Определите указанное расстояние из предыдущей задачи, если $OK = 4$ см, $AB = 5$ см, $AC = 6$ см.

2.47. Отрезок AK перпендикулярен плоскости квадрата $ABCD$. Найдите расстояние от точки K до прямой BD, если $AB = 3$ м, $BK = 5$ м.

2.48. Из точки A к плоскости α проведена наклонная AB, равная 6 см. Найдите длину проекции AB на плоскость α, если угол между прямой AB и ее проекцией равен: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

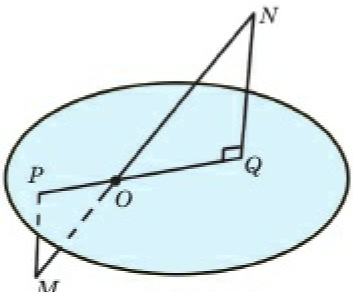


Рис. 2.25

2.49. Из концов отрезка длиной 62,5 см к плоскости проведены перпендикуляры, длины которых равны 50 см и 28 см. Найдите расстояние между основаниями этих перпендикуляров.

2.50. Отрезок MN, равный 12 см, пересекает плоскость в точке O. Концы этого отрезка удалены от плоскости на расстояния 1 см и 3 см. Найдите MO и NO (рис. 2.25).

2.51. Отрезок $AB = a$ параллелен плоскости α и $BB_1 \perp \alpha$, $B_1 \in \alpha$. Найдите $d(AB; \alpha)$, если $\angle BAB_1 = 60°$.

2.52. Точка K равноудалена от всех вершин ΔABC и $OK \perp (ABC)$, $O \in ABC$. Найдите AK, если: 1) $AB = BC$, $AC = 4$ см, $BD = 4$ см, $BD \perp AC$, $D \in AC$, $OK = 6$ см; 2) $AB = BC = a$, $\angle ABC = 120°$, $OK = \dfrac{3a}{4}$; 3) $AB = BC$, $BD = h$, $BD \perp AC$, $\angle ABC = 120°$, $KO = a$; 4) $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см, $OK = 19{,}5$ см.

2.53. Провод прикрепили к столбу на высоте 5 м, к стене дома – на высоте 3 м. Расстояние между столбом и домом равно 11 м. Какова длина провода?

C

2.54. Два отрезка, длины которых составляют 13 см и 37 см, упираются концами в две параллельные плоскости. Проекция меньшего из них на плоскость равна 5 см. Найдите длину проекции большего отрезка.

2.55. Из точки P, находящейся на расстоянии m от плоскости α, проведены две наклонные PQ и PR, которые составляют со своими проекциями угол, равный 30°. Точка O является основанием перпендикуляра, опущенного из точки P на плоскость α, а $\angle QOR = 120°$. Найдите QR.

2.56. Из точки к плоскости проведены две наклонные длиной 17 см и 10 см. Разность их проекций равна 9 см. Найдите расстояние от этой точки до данной плоскости.

2.57. Расстояние от точки D до каждой вершины треугольника ABC равно 5 см и $AC = BC = 6$ см, а $AB = 4$ см. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC.

2.58. Трос подвесной дороги, перекинутый через реку, укреплен на одном берегу на высоте 40 м, а на другом – на высоте 35,6 м от уровня реки. Расстояние между проекциями точек подвеса на горизонтальную плоскость равно 48,3 м. Найдите длину троса между креплениями, если на провисание троса нужно добавить 10% от его общей длины.

2.59. Через одну из сторон ромба проведена плоскость, расстояние от которой до противолежащей стороны равно 4 см. Проекции диагоналей ромба на эту плоскость равны 8 см и 2 см. Найдите проекции сторон.

2.60. Из отрезков равной длины сооружена конструкция $KABCDP$, как показано на рис. 2.26. Здесь $AC = BD = KP = 2$ см. Можно ли эту конструкцию протащить через круглое отверстие диаметром 1,8 см? (Фигуру $KABCDP$ называют октаэдром.)

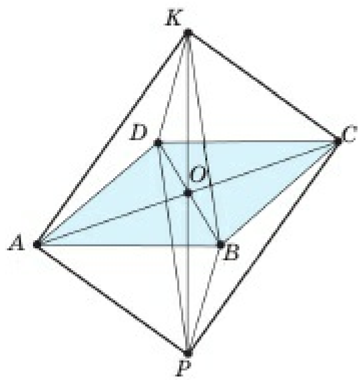


Рис. 2.26

2.3. Угол между прямой и плоскостью. Двугранные углы

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать определение угла между скрещивающимися прямыми и изображать этот угол и их общий перпендикуляр;
- знать определение угла между прямой и плоскостью, уметь изображать и находить его величину;
- знать определение угла между плоскостями (двугранный угол), уметь изображать и находить его величину.

2.3.1. Угол между скрещивающимися прямыми и их общий перпендикуляр

В п. 2.1 угол между прямыми a и b мы определили как угол между пересекающимися прямыми a_1 и b_1, параллельными данным прямым (рис. 2.27, $\angle AOB$). Теперь рассмотрим изображение этого угла в пространстве. Пусть a и b скрещивающиеся прямые. Возьмем какую-либо точку $B \in b$ и через прямую a и точку b проведем плоскость α. Теперь на плоскости α через точку B проведем прямую a_1, параллельную прямой a (рис.2.28). Тогда по определению угол $(\widehat{a_1, b})$ равен углу между скрещивающимися прямыми a и b. На рис.2.29 изображены скрещивающиеся прямые a и b, и их общий перпендикуляр OB ($OB \perp a$, $OB \perp b$).

Работа в группе

По рис. 2.29: 1) опишите метод построения общего перпендикуляра OB; 2) по этому образцу на листе бумаги А4 постройте две скрещивающиеся прямые и их общий перпендикуляр.

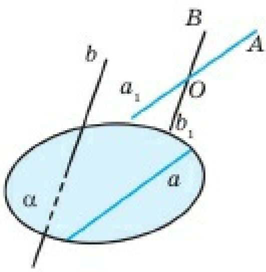


Рис. 2.27

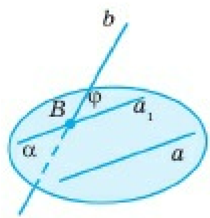


Рис. 2.28

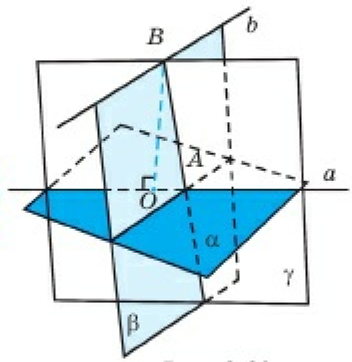


Рис. 2.29

2.3.2. Угол между прямой и плоскостью

Пусть прямая a, пересекающая плоскость α в точке A, не перпендикулярна ей. Возьмем произвольную точку $B \in \alpha$ и из нее проведем перпендикуляр BC к плоскости α ($C \in \alpha$). Тогда прямая AC называется ***проекцией*** прямой a на плоскость α (рис. 2.30). При этом прямая a называется ***наклонной к плоскости*** α, а точка A – ее основанием. Через точку A в плоскости α можно провести множество других, отличных от AC, прямых, каждая из которых с прямой a обра-

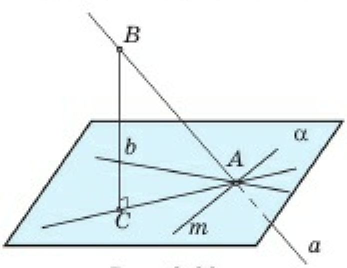


Рис. 2.30

зует определенный угол. Что же следует понимать под углом между прямой a и плоскостью α? Естественно, что в качестве угла между прямой a и плоскостью α нужно брать наименьший из указанных углов. На вопрос «какой же из указанных углов наименьший?» отвечает следующая теорема.

Теорема 1. *Угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость является наименьшим из всех углов, которые образует эта наклонная с прямыми, проведенными в этой плоскости через основание наклонной.*

▲ Пусть прямая AB – наклонная, BC – перпендикуляр к плоскости α, а b – любая, отличная от AC, прямая, проходящая через точку A (рис. 2.31). При этом, если прямую AB обозначить через a, то $A=a\cap\alpha$. Докажем, что $\angle BAC < \angle(a, b)$.

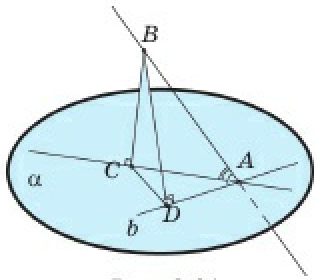


Рис. 2.31

Пусть $D \in b$, $CD \perp b$ и $b \perp a$. По теореме о трех перпендикулярах $BD \perp b$. Следовательно, $\sin \angle BAC = \dfrac{BC}{AB}$, $\sin \angle BAD = \dfrac{BD}{AB}$. Так как $BD > BC$, то $\sin \angle BAD > \sin\angle BAC$, т.е. $\angle BAD > \angle BAC$, т.к. рассматриваемые углы не превышают $90°$. Если $b \perp a$, то $\angle(b,a) = 90° > \angle BAC$. ■

Теперь мы можем дать определение понятия угла между прямой и плоскостью.

Углом между прямой и плоскостью называют угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость. Например, на рис. 2.31 $\angle(a; \alpha) = \angle BAC$.

2.3.3. Двугранные углы

Известно, что любая прямая в плоскости разбивает ее на две полуплоскости. Если эти полуплоскости «согнуть» вдоль линии их разбиения, то образуется двугранный угол (рис. 2.32).

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой. Полуплоскости, образующие двугранный угол, назы-

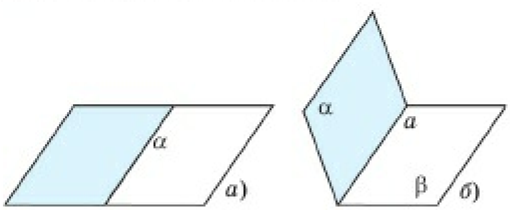


Рис. 2.32

вают его гранями, а ограничивающую их прямую – ребром двугранного угла.

Например, на рис. 2.32 б) полуплоскости α и β являются гранями, а прямая a – ребром двугранного угла.

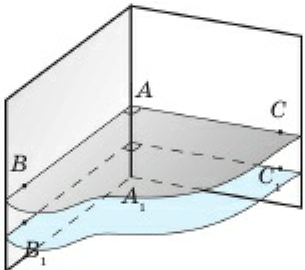


Рис. 2.33

Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум лучам, перпендикулярным его ребру. Угол, образованный этими полупрямыми, называется ***линейным углом*** двугранного угла (рис. 2.33). Мера линейного угла принимается за меру двугранного угла, и эта мера не зависит от выбора плоскости, перпендикулярной ребру двугранного угла, т.е. от выбора перпендикулярных ребру лучей AB и AC (рис. 2.33). Действительно, если $\angle B_1A_1C_1$ – другой линейный угол этого двугранного угла и так как $B_1A_1 \perp a$, $C_1A_1 \perp a$, то $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$. Следовательно, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

2.3.4. Перпендикулярность плоскостей

Сначала введем понятие угла между плоскостями. Пусть даны плоскости α и β, пересекающиеся по прямой a. Через некоторую точку $A \in a$ проведем перпендикулярно прямой a плоскость γ (рис. 2.34).

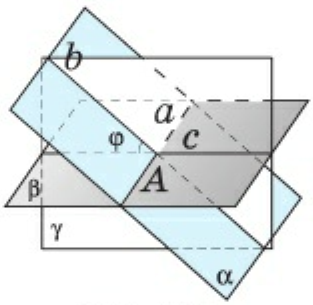


Рис. 2.34

Тогда $b = \alpha \cap \gamma$ и $c = \beta \cap \gamma$, причем $b \perp a$ и $c \perp a$. Угол $\varphi = \angle(b, c)$ называется углом между плоскостями α и β, т.е. ***углом между пересекающимися плоскостями называется угол между прямыми, проведенными в этих плоскостях перпендикулярно прямой их пересечения.***

Если плоскости параллельны, то угол между ними считается равным 0°. Аналогично п.2.3.2 можно показать, что угол между плоскостями не зависит от выбора прямых b и c. Угол между плоскостями α и β обозначается так: $\angle(\alpha; \beta)$. Очевидно, что $0° \leqslant \angle(\alpha; \beta) \leqslant 90°$. Поэтому не следует путать понятие угла между плоскостями с понятием двугранного угла. Для двугранных углов $0° < \varphi \leqslant 180°$. Например, при пересечении двух плоскостей образуются четыре двугранных угла (рис. 2.34).

Две плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° (рис. 2.35).

Докажем признак перпендикулярности плоскостей.

Теорема 2. *Если одна из плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны, т. е., если* $b \perp \alpha$ *и* $b \subset \beta$, *то* $\alpha \perp \beta$.

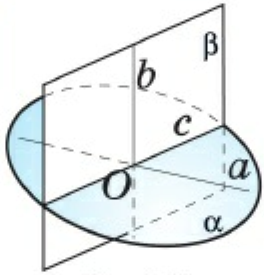


Рис. 2.35

▲ Пусть $b \perp \alpha$, $b \subset \beta$. Докажем, что $\beta \perp \alpha$ (рис. 2.35). Пусть $O = b \cap \alpha$. Так как O – общая точка для плоскостей α и β, то эти плоскости пересекаются вдоль некоторой прямой c, проходящей через точку O. Проведем через точку O в плоскости α прямую a, перпендикулярную c. Так как $a \subset \alpha$, $c \subset \alpha$ и $b \perp \alpha$, то $b \perp a$, $b \perp c$; так как $a \perp c$, то $\angle(\alpha; \beta) = \angle(a; b) = 90°$, т.е. $\alpha \perp \beta$. ■

Следствие. *Плоскость, перпендикулярная прямой, лежащей на пересечении двух плоскостей, перпендикулярна каждой из этих плоскостей* (рис. 2.36).

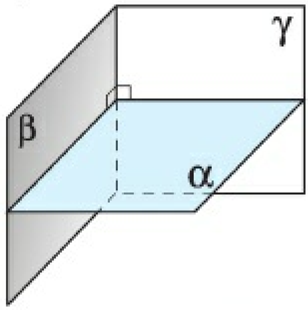


Рис. 2.36

1. Какой угол называется углом между прямой и плоскостью?
2. Что такое двугранный угол? Назовите его элементы и покажите на рисунке.
3. Что такое линейный угол двугранного угла?
4. Как определяется угол между плоскостями?
5. Какова разница между понятиями двугранного угла и угла между плоскостями?
6. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей и докажите его.

Практическая работа

1. Из листа бумаги сделайте модель двугранного угла и покажите его линейный угол. Сделайте так, чтобы линейный угол был равен: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°; 5) 150°.
2. Из двух листов плотной бумаги изготовьте модель взаимно перпендикулярных плоскостей.

Упражнения

А

2.61. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. 1) Покажите все пары взаимно перпендикулярных граней. 2) Найдите угол между прямой AB и плоскостью ACC_1A_1. 3) Найдите угол между плоскостями ACC_1A_1 и

ABB_1A_1. 4) Покажите, что плоскости ACC_1A_1 и BDD_1B_1 взаимно перпендикулярны.

2.62. Величина линейного угла двугранного угла равна: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°. Найдите расстояние от точки A до второй грани, если расстояние от точки A, расположенной в одной грани, до ребра двугранного угла 10 см.

2.63. Покажите, что плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, перпендикулярна и его граням.

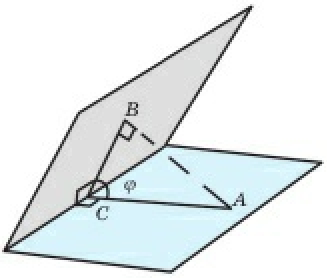


Рис. 2.37

2.64. Величина двугранного угла равна φ. Из точки A, лежащей в одной из граней, опущен перпендикуляр AB на другую грань этого двугранного угла. Найдите расстояние от точки A до ребра двугранного угла, если: 1) $\varphi = 30°$, $AB = 5$ см; 2) $\varphi = 45°$, $AB = 3\sqrt{2}$ дм; 3) $\varphi = 60°$, $AB = 2\sqrt{3}$ м (рис. 2.37).

2.65. Сколько прямых, пересекающих данную плоскость под углом 64°, можно провести через данную точку?

2.66. Наклонная AB образует с плоскостью угол φ, отрезок AC – проекция этой наклонной к данной плоскости. Найдите:

а) длину проекции, если: 1) $AB = 48$ см, $\varphi = 60°$; 2) $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\varphi = 45°$;

б) длину наклонной, если: 1) $AC = 4\sqrt{3}$ см, $\varphi = 30°$; 2) $AC = 5$ дм, $\varphi = 60°$;

в) угол φ, если: 1) $AB = 24$ см, $AC = 12$ см; 2) $AB = 8$ м, $AC = 4\sqrt{2}$ м.

2.67. Концы отрезка AB длиной 6 см удалены от плоскости на расстоянии 5 см и 3 см. Найдите:

1) проекцию отрезка AB на плоскость;
2) угол между прямой AB и плоскостью.

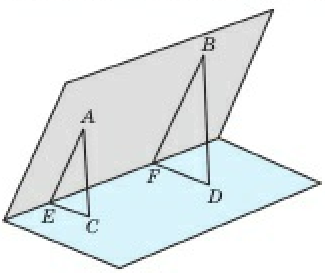


Рис. 2.38

2.68. Точки A и B принадлежат одной грани двугранного угла. Из этих точек опущены перпендикуляры $AC = 10$ см и $BD = 20$ см на другую грань и перпендикуляры $AE = 30$ см и BF на ребро двугранного угла. Найдите BF (рис. 2.38).

B

2.69. Через катет AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена плоскость α, которая с плоскостью ABC составляет угол, равный $30°$. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если $AC = 6$ см, $AB = 10$ см.

2.70. Верно ли утверждение: «Две плоскости, перпендикулярные одной плоскости, параллельны между собой»?

2.71. Даны плоскости α, β, γ, $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$ и $\alpha \perp \beta$. Покажите, что прямая $a = \alpha \cap \beta$ перпендикулярна плоскости γ.

2.72. Ребро куба равно 8 см. Найдите длину отрезка, соединяющего середины двух скрещивающихся ребер.

2.73. Найдите двугранные углы треугольной пирамиды, все ребра которой равны между собой.

2.74. Точка A расположена на расстоянии 3 см и 4 см от граней прямого двугранного угла. Найдите расстояние от точки A до ребра двугранного угла.

2.75. Дана треугольная пирамида $SABC$, все ребра которой равны между собой. Точка D является серединой ребра AB. Покажите, что угол CDS является линейным углом соответствующего двугранного угла.

2.76. Один катет равнобедренного прямоугольного треугольника принадлежит плоскости α, а другой катет образует с ней угол, равный $45°$. Найдите угол между гипотенузой треугольника и плоскостью α.

2.77. Наклонная AB составляет с плоскостью α угол в $45°$, а прямая BD, лежащая в плоскости α, составляет угол в $45°$ с проекцией BC наклонной AB. Найдите угол ABD (рис. 2.39).

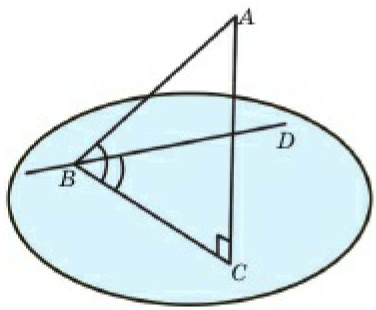


Рис. 2.39

2.78. Из точки, отстоящей от плоскости на расстоянии 6 см, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы, равные $45°$ и $30°$, а между собой прямой угол. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

2.79. Докажите, что параллельные наклонные образуют с плоскостью равные углы.

2.80. Из точки A, удаленной от плоскости на расстоянии 10 см, проведены наклонные AB и AC под углом 45° к плоскости. Найдите BC, если угол между проекциями наклонных равен 120°.

C

2.81. Линейный угол двугранного угла равен φ. На ребре этого угла взяты точки A и B, к которым проведены перпендикуляры AC и BD, лежащие в разных гранях. Найдите CD, если $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$.

2.82. Концы отрезка AB расположены в разных гранях двугранного угла, к ребру которого проведены перпендикуляры AC и BD. Докажите, что $\angle ABC = \angle BAD$, если $AC = BD$.

2.83. Три луча, исходящие из одной точки, образуют между собой три острых угла, равных φ, ψ и ω. Докажите, что выполняется равенство $\cos\varphi \cdot \cos\psi = \cos\omega$, если плоскости углов φ и ψ перпендикулярны между собой.

2.84. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AC_1 и BD.

2.85. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, угол между прямыми B_1C и DC_1 равен 60°, $B_1C = DC_1$. Определите вид четырехугольника BB_1C_1C.

2.86. Плоскости α, β и γ попарно перпендикулярны. Докажите, что прямые, по которым они пересекаются, также попарно перпендикулярны.

2.87. Через точку A плоскости α проведены наклонная a и прямая b, лежащая в этой плоскости. Найдите $\angle(a; c)$, если c является проекцией прямой a на плоскость α и $\angle(a; b) = \varphi$, $\angle(c; b) = \psi$.

2.88. Через точки A и B плоскости α проведены две параллельные наклонные, которые с плоскостью α образуют угол φ. Найдите расстояние между этими наклонными, если расстояние между проекциями данных наклонных равно b и $AB = a$.

2.4. Изображение пространственных фигур на плоскости

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать определения и свойства параллельного проектирования;
- изображать ортогональные проекции фигур на плоскости;

- знать определение и свойства прямоугольного параллелепипеда;
- выводить свойства прямоугольного параллелепипеда и применять их при решении задач.

2.4.1. Параллельное проектирование и его свойства

В курсе стереометрии очень важно уметь строить изображение пространственных фигур на бумаге. Правильно построенное изображение объемных фигур является основным «орудием» решения задач. Обычно при изображении пространственных фигур используется метод проектирования, рассматриваемый в курсе черчения.

Пусть даны плоскость α, прямая a, пересекающая ее, и фигура F. Тогда множество точек F_1 плоскости α, которые являются точками пересечения прямых, проведенных через каждую точку фигуры F параллельно прямой a, с плоскостью α, называется ***параллельной проекцией*** фигуры F на плоскость α. Например, на рис. 2.40 изображена параллельная проекция куба параллельно прямой a. При этом прямая a называется направлением проектирования, а плоскость α – плоскостью проектирования.

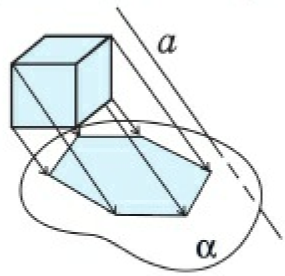


Рис. 2.40

Рассмотрим некоторые простые свойства параллельной проекции.

Теорема 1. *При параллельном проектировании проекцией прямой, не параллельной направлению проектирования, на плоскость является прямая.*

▲ Пусть дана прямая a, не параллельная направлению проектирования p, и плоскость проектирования α (рис. 2.41). Возьмем точку $A \in a$ и ее проекцию $A_1 \in \alpha$, $AA_1 \parallel p$. Через пересекающиеся прямые a и AA_1 проведем плоскость β, которая пересечет плоскость α по прямой a_1, проходящей через точку A_1. Пусть B – произвольная точка прямой a. Через точку B в плоскости β проведем прямую, параллельную AA_1. Пусть эта прямая пересекает прямую a_1 в точке B_1. Так как по построению $BB_1 \parallel AA_1$ и $AA_1 \parallel p$, то $BB_1 \parallel p$. Следовательно, $B_1 \in \alpha$ является образом

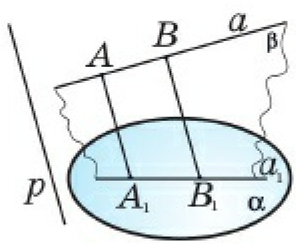


Рис. 2.41

точки B при параллельном проектировании в направлении прямой p, т.е. при параллельном проектировании образ любой точки прямой a принадлежит прямой a_1, что и требовалось доказать. ■

Следствие. *Все проектирующие лучи точек прямой принадлежат одной плоскости.*

Например, на рис. 2.41 луч AA_1 принято называть ***проектирующим лучом***, а плоскость β – ***проектирующей плоскостью***.

Теорема 2. *При параллельном проектировании проекции параллельных прямых (не параллельных направлению проектирования) являются параллельными прямыми (или одной прямой).*

▲ Рассмотрим параллельное проектирование в направлении прямой p на плоскость α. Пусть даны прямые a и b такие, что $a \parallel b$ и $a \nparallel p$. Возьмем точки $A \in a$, $B \in b$ и их проекции на плоскость обозначим через A_1 и B_1 соответственно (рис. 2.42). Проведем плоскость β через точку A_1 и прямую a, плоскость γ – через B_1 и прямую b. По теореме 1 прямая $a_1 = \beta \cap \alpha$ является образом прямой a и $b_1 = \gamma \cap \alpha$ является образом прямой b. Так как $a \parallel b$ и $AA_1 \parallel BB_1$, ($AA_1 \parallel p$, $BB_1 \parallel p$), то $\beta \parallel \gamma$. Поэтому $a_1 \parallel b_1$.

Если плоскости β и γ совпадают, то образы параллельных прямых a и b при параллельном проектировании совпадают (рис. 2.43). ■

В случае, когда $a \parallel p$ (p – проектирующая прямая) образ прямой a является точкой ($A = a \cap \alpha$) (рис. 2.44).

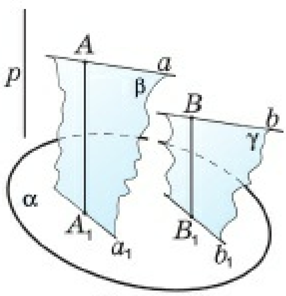


Рис. 2.42

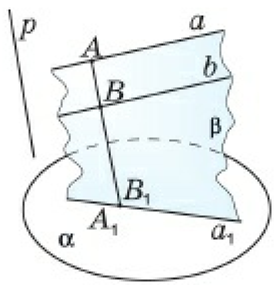


Рис. 2.43

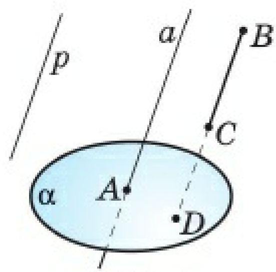


Рис. 2.44

Из доказанных теорем вытекает следующее важное следствие.

Следствие. *При параллельном проектировании, не параллельном направлению проектирования:* 1) *отрезок (луч) отображается в отрезок (луч);* 2) *параллельные отрезки (лучи) отображаются в параллельные отрезки (лучи), причем проекции параллельных отрезков относятся как данные отрезки.*

Из всех параллельных проектирований можно выделить ***ортогональное*** проектирование, т.е. случай, когда направление проектирования перпендикулярно плоскости проектирования.

Например, ортогональное проектирование применяется на уроках черчения, инженеры его используют в своих чертежах и т.п. Деталь, изображенная на рис. 2.45, дана в трех ортогональных проекциях (рис. 2.46).

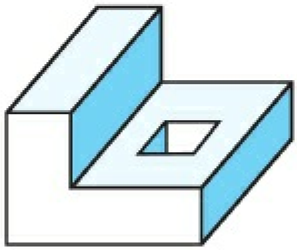


Рис. 2.45

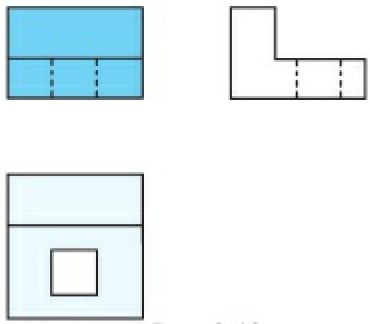


Рис. 2.46

2.4.2. Прямоугольный параллелепипед

Прямой параллелепипед, основаниями которого являются прямоугольники, называется ***прямоугольным параллелепипедом.***

Докажите самостоятельно

Докажите следующие три свойства прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.47).

1. Грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

2. Боковые ребра прямоугольного параллелепипеда перпендикулярны его основанию.

3. Все двугранные углы – прямые.

Длина и ширина прямоугольника, являющегося основанием данной фигуры, и высота (боковое ребро) называются ***тремя измерениями*** прямоугольного параллелепипеда. Например, на рис. 2.47 отрезок AB – длина, AD – ширина и AA_1 – высота прямоугольного параллелепипеда.

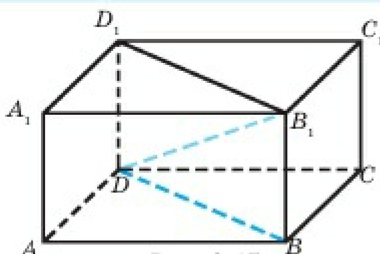


Рис. 2.47

Теорема. *Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.*

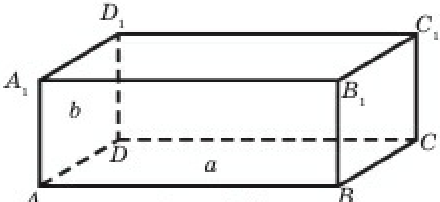


Рис. 2.48

▲ Покажем, что выполняется равенство $DB_1^2 = DA^2 + DC^2 + DD_1^2$ (рис. 2.48). Здесь в качестве трех измерений прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты отрезки DA, DC и DD_1. В прямоугольнике $ABCD$ квадрат диагонали BD равен сумме квадратов его длины и ширины:
$BD^2 = DA^2 + DC^2$. Четырехугольник BB_1D_1D является прямоугольником (обоснуйте это самостоятельно). Поэтому

$$DB_1^2 = DB^2 + DD_1^2 = \left(DA^2 + DC^2\right) + DD_1^2 = DA^2 + DC^2 + DD_1^2. \blacksquare$$

Следствие. *Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны между собой.*

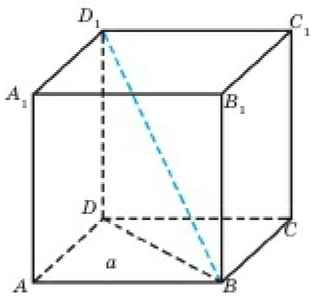


Рис. 2.49

▲ Введем обозначения: $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. По доказанной теореме $AC_1 = CA_1 = BD_1 = DB_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. ■

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны между собой, называется кубом (рис. 2.49). Все ребра куба равны между собой.

Пример 1. Найдем диагональ куба с ребром, равным a.

▲ Пусть в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.49) $AB = a$. Найдем BD_1. Так как $AB = BC = BB_1 = a$, то по следствию имеем:

$$BD_1 = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3} \cdot a$$

Ответ: $BD_1 = \sqrt{3} \cdot a$. ■

2.4.3. Площадь ортогональной проекции многоугольника

Теорема 3. *Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью его проекции.*

▲ Утверждение теоремы достаточно доказать для треугольника, т.к. любой многоугольник можно разбить на несколько треугольников.

Сначала рассмотрим треугольник, одна из сторон которого параллельна плоскости проектирования. Пусть плоскость проектирования α проходит через сторону AB треугольника ABC. Если α

не проходит через AB, то мы можем рассмотреть плоскость α_1, проходящую через AB, и $\alpha_1 \parallel \alpha$. Итак, пусть $AB \subset \alpha$ и $C \notin \alpha$.

Через C_1 обозначим основание перпендикуляра, опущенного из точки C на плоскость α, $CD \perp AB$ (рис. 2.50). Тогда по теореме о трех перпендикулярах C_1D также является высотой треугольника ABC_1. Если

$\angle CDC_1 = \varphi, C_1D = CD \cdot \cos\varphi, S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot CD,$

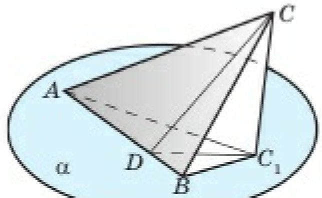


Рис. 2.50

$S_{ABC_1} = \dfrac{1}{2} AB \cdot C_1D$, то $S_{ABC_1} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$.

Пусть теперь треугольник ABC не имеет сторон, параллельных плоскости проектирования α. Тогда, как показано на рис. 2.51, ΔABC можно разбить на два треугольника плоскостью, проходящей через одну из вершин ΔABC параллельно плоскости проектирования. Аналогично доказанному имеем равенства:

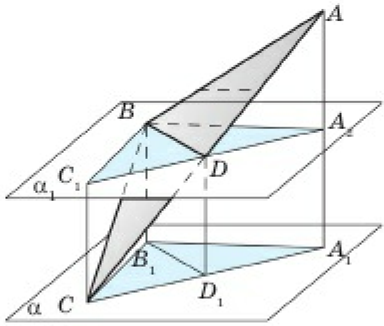


Рис. 2.51

$S_{BDC_1} = S_{BDC} \cdot \cos\varphi, S_{BDA_2} = S_{BDA} \cdot \cos\varphi.$

Так как $\Delta A_2BC_1 = \Delta A_1B_1C$, то $S_{A_1B_1C} = S_{B_1D_1A_1} + S_{B_1D_1C} = S_{BDA_2} + S_{BDC_1} = S_{BDA} \cdot \cos\varphi + S_{BDC} \cdot \cos\varphi = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$. ■

2.4.4. Изображение пространственных фигур на плоскости

При изображении пространственных фигур на плоскости широко пользуются свойствами параллельного проектирования. При этом важно правильно выбрать направление проектирования. Например, если спроектировать куб в направлении, перпендикулярном одной из граней, то получится параллелограмм (рис. 2.52). При проектировании треугольной пирамиды в направлении, перпендикулярном основанию, получится треугольник, изображенный на рис. 2.53.

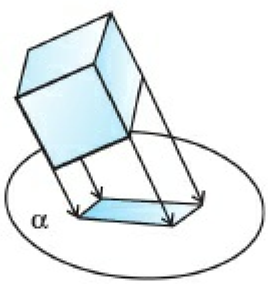


Рис. 2.52

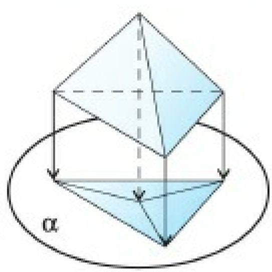


Рис. 2.53

Разумеется, эти изображения не могут быть приняты в качестве образа куба или, соответственно, образа треугольной пирамиды.

Итак, при изображении пространственных фигур многогранников необходимо придерживаться следующих правил.

1. *При проектировании многогранников некоторые его ребра остаются в тени других граней многогранника и фактически становятся невидимыми.*

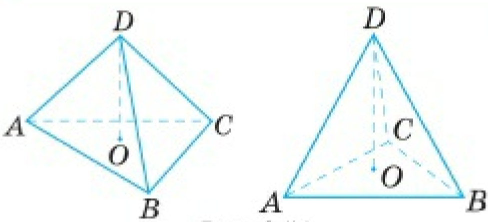


Рис. 2.54

Изображение невидимых ребер производится пунктирной линией. При этом *изображение многогранников необходимо осуществлять так, чтобы количество его невидимых линий было по возможности наименьшим.*

Например, сравните два изображения одной и той же треугольной пирамиды на рис. 2.54.

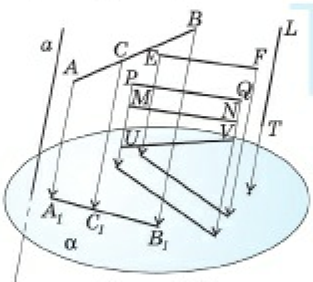


Рис. 2.55

2. *Образы разных отрезков фигуры не должны располагаться на одной прямой.*

Например, на рис. 2.55 образы отрезков PQ, MN и UV на плоскости α совпадают, т.е. из этого образа нельзя различить образы отдельных отрезков. Аналогично этому на рис. 2.52 и 2.56 неправильно изображен образ куба.

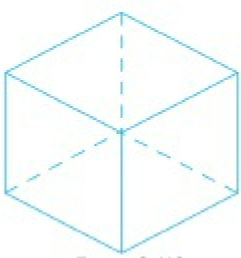


Рис. 2.56

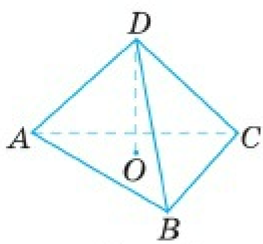


Рис. 2.57

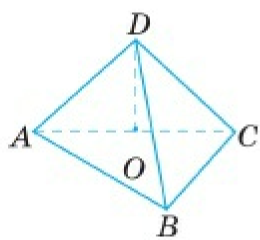


Рис. 2.58

3. *При изображении пирамиды необходимо точно определить основание перпендикуляра, проведенного из вершины к плоскости основания.*

Например, если на рис. 2.57 изображена пирамида, все ребра которой равны между собой (правильный тетраэдр), то у пирамиды на рис. 2.58 все ребра не будут восприниматься равными, т.е. эта пирамида не воспринимается как правильный тетраэдр. Грани ACD и ABC взаимно перпендикулярны.

1. Что такое параллельное проектирование?
2. Какими свойствами обладает параллельное проектирование?
3. Какое параллельное проектирование называется ортогональным проектированием?
4. Какой формулой определяется площадь ортогональной проекции многоугольника?
5. Сформулируйте основные правила изображения пространственных фигур на плоскости.

Практическая работа

1. Изобразите треугольную пирамиду так, чтобы основание высоты: 1) совпало с точкой пересечения медиан треугольника при основании; 2) совпало с одной из вершин основания; 3) находилось на середине одной из сторон основания; 4) находилось вне треугольника при основании.
2. Выполните задание 1 для четырехугольной пирамиды, основанием которой служит квадрат.
3. Постройте изображение знакомых вам многогранников: 1) куба; 2) параллелепипеда.

Упражнения

А

2.89. Постройте прямой параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (многогранник, у которого все грани – прямоугольники), если: 1) $AB = 2$ см, $AD = 4$ см, $AA_1 = 3$ см; 2) $AB = 5$ см, $AD = 3$ см, $AA_1 = 6$ см.

2.90. Проекция каких фигур может быть точкой?

2.91. Проекции прямых a и b параллельны. Всегда ли верно утверждение, что $a \parallel b$? Обоснуйте ответ на рисунке.

2.92. В каких случаях проекция отрезка на плоскость α: 1) равна самому отрезку; 2) есть точка?

2.93. Может ли проекция отрезка быть больше проектируемого отрезка? Обоснуйте ответ на рисунке.

2.94. Могут ли непараллельные прямые проектироваться на плоскости в виде параллельных прямых? Приведите пример.

2.95. Плоскость многоугольника не параллельна направлению проектирования. В какую фигуру проектируется: 1) треугольник; 2) квадрат; 3) прямоугольник; 4) параллелограмм; 5) трапеция?

2.96. Дан равносторонний треугольник со стороной 6 см. Найдите площадь его ортогональной проекции на плоскость, которая образует с плоскостью треугольника угол, равный: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

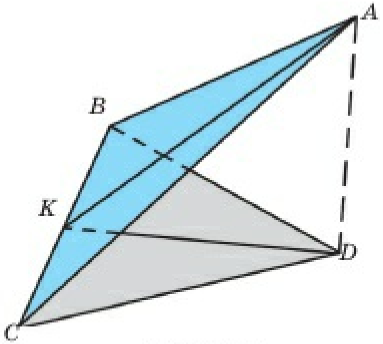


Рис. 2.59

2.97. Ортогональная проекция равнобедренного треугольника есть равносторонний треугольник со стороной 6 см, одна сторона которого является основанием данного равнобедренного треугольника. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его плоскость образует с плоскостью проектирования угол, равный: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° (рис. 2.59).

2.98. С помощью теоремы Пифагора покажите, что диагональ d прямого параллелепипеда с измерениями a, b и c (длина, ширина и высота) определяется по формуле $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

2.99. Найдите длину диагонали прямого параллелепипеда, если: 1) $a = 4$ м, $b = 3$ м, $c = 12$ м; 2) $a = 1$ см, $b = 1$ см, $c = \sqrt{2}$ см; 3) $a = 9$ см, $b = 8$ см, $c = 5$ см; 4) $a = 9$ дм, $b = 7$ дм, $c = \sqrt{39}$ дм.

2.100. В тетраэдре (все ребра равны между собой) ребро равно 8 см. Найдите площадь ортогональной проекции боковой грани на плоскость основания.

B

2.101. Может ли проекция кривой линии быть прямой? Ответ поясните на чертеже.

2.102. Может ли неравнобедренная трапеция быть проекцией равнобедренной трапеции? А наоборот?

2.103. Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ – проекция трапеции $ABCD$. Постройте проекцию средней линии трапеции.

2.104. $\Delta A_1B_1C_1$ является проекцией ΔABC и плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

2.105. Сумма длин всех ребер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 72 см. Найдите длину каждого ребра, если $AB : BC = 2 : 3$, $BC : B_1B = 3 : 4$.

2.106. Ребро куба равно a. Найдите длину отрезка, соединяющего середины двух скрещивающихся ребер.

2.107. Отметьте на ребрах SB, SC и BC тетраэдра $SABC$ точки P, Q, R соответственно. Найдите точку пересечения: 1) прямой PQ и плоскости ABC; 2) прямой QR и плоскости ABS.

2.108. Параллелограмм со сторонами a и b и острым углом между ними в $45°$ является ортогональной проекцией ромба, один из углов которого равен $120°$. Найдите сторону ромба, если угол между плоскостями ромба и параллелограмма равен $60°$.

2.109. Найдите высоту правильной четырехугольной пирамиды (основание пирамиды есть квадрат, а центр квадрата является основанием высоты пирамиды), сторона основания которой равна a, а боковое ребро равно b.

2.110. Найдите длину основания правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно b, а плоский угол при вершине равен φ.

C

2.111. Дан параллелограмм, который является проекцией ромба, с острым углом в $60°$. Постройте проекцию высоты ромба, проведенной из вершины тупого угла.

2.112. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 8 см. Найдите площадь ортогональной проекции треугольника AB_1C на: 1) плоскость $ABCD$; 2) плоскость AA_1C_1C.

2.113. Как можно разрезать куб, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник?

2.114. Постройте сечение, проходящее через середины двух соседних боковых ребер правильной четырехугольной пирамиды и перпендикулярное плоскости основания.

2.115. Сторона основания пирамиды из предыдущей задачи равна a, а высота – h. Найдите площадь построенного сечения.

5–4417

Раздел 3. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ И ВЕКТОРЫ

3.1. Понятие вектора в пространстве, действия над векторами

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать определения вектора в пространстве, длины вектора, равных векторов;
- выполнять сложение векторов и умножение вектора на число;
- знать определение коллинеарных и компланарных векторов в пространстве.

3.1.1. Понятие вектора в пространстве. Коллинеарные векторы

Подумай

На рис. 3.1 изображена иллюстрация на знаменитую басню И. А. Крылова «Лебедь, щука и рак». Как вы понимаете фразу: «...а воз и ныне там»? В конце темы вы узнаете математическое объяснение этой фразы.

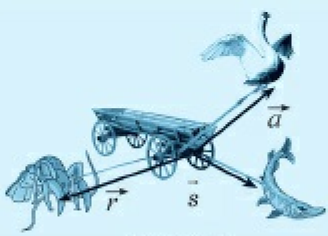


Рис. 3.1

В стереометрии так же, как и в курсе планиметрии, определяется понятие вектора, действия над векторами и их свойства.

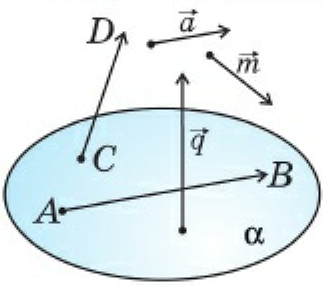


Рис. 3.2

В пространстве любой направленный отрезок называется ***вектором***, т.е. всякий отрезок, у которого указаны его начало и конец, называется ***вектором в пространстве***. Конец вектора изображается стрелкой. Итак, если на отрезке AB точку A принять за начало, а точку B – за конец, то получится вектор, который обозначается $\overrightarrow{AB}$. Векторы также обозначаются строчными буквами латинского алфавита со стрелкой сверху. На рис. 3.2 изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\vec{a}$, $\vec{q}$, $\vec{m}$. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется ***нулевым вектором***. Следовательно, каждую точку пространства можно рассматривать как нулевой вектор. Нулевой вектор, обозначаемый символом $\vec{0}$, является единственным вектором с неопределенным направлением.

Векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой, называются ***коллинеарными***. Например, на рис. 3.3 векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно коллинеарны, т.к. $m \parallel n$. Вектор $\vec{d}$ не коллинеарен ни одному из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, так как $p \nparallel n$, $p \nparallel m$.

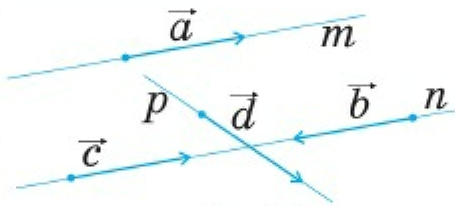


Рис. 3.3

Коллинеарность векторов обозначают символом параллельности: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$, $\vec{a} \nparallel \vec{d}$. Если коллинеарные векторы имеют одинаковые направления, то их называют ***сонаправленными*** и обозначают так: $\uparrow\uparrow$. Если коллинеарные векторы имеют разные направления, то их называют ***противоположно направленными*** и обозначают так: $\uparrow\downarrow$. Например, на рис. 3.3 $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Длину отрезка AB называют ***модулем*** вектора $\overrightarrow{AB}$ и обозначают так: $|\overrightarrow{AB}|$. Аналогично модуль вектора $\vec{a}$ записывают так: $|\vec{a}|$.

Векторы называются ***равными***, если они сонаправлены и их модули равны. Другими словами, если:

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; 2) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, т.е. $\vec{a} = \vec{b}$. Например, на рис. 3.4 для векторов, определенных ребрами прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, выполняются равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$. А векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$ не равны $(\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{C_1D_1})$, т.к, несмотря на то, что $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{C_1D_1}|$, эти векторы противоположно направлены.

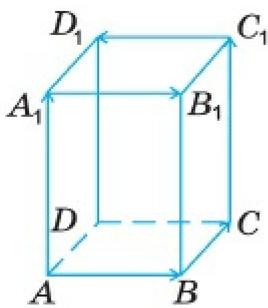


Рис. 3.4

Если точка A является началом вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ отложен от точки A. Можно доказать, что ***от любой точки A пространства можно отложить единственный вектор, равный данному вектору*** $\vec{a}$ (рис. 3.5).

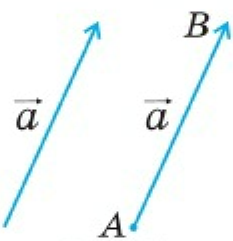


Рис. 3.5

Пусть даны пространственные фигуры F, F_1 и вектор $\vec{a}$. Если соответственные точки $A \in F$ и $A_1 \in F_1$ при преобразовании фигуры F в фигуру F_1 удовлетворяют равенству $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, то говорят, что фигура F_1 получена ***параллельным переносом*** фигуры F на вектор $\vec{a}$ (рис. 3.6). Можно показать, что при параллельном переносе:

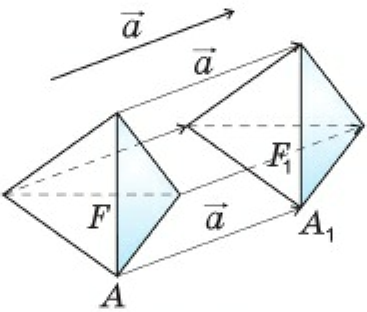


Рис. 3.6

1) прямая переходит в параллельную ей прямую (или в себя) (рис. 3.7, 3.8);

2) плоскость переходит в параллельную ей плоскость (или в себя) (рис. 3.7, 3.8);

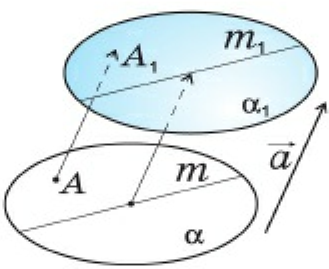


Рис. 3.7

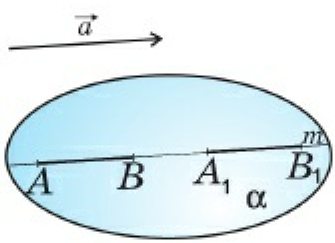


Рис. 3.8

3) отрезок переходит в параллельный ему отрезок (или отрезок, лежащий с данным отрезком на одной прямой). Также несложно убедиться в том, что каждый ненулевой вектор вполне определяет некоторый параллельный перенос и, обратно, любой параллельный перенос однозначно определяет некоторый вектор.

3.1.2. Действия над векторами. Компланарные векторы

К пространственным векторам так же, как и к векторам плоскости, применяются такие же действия, как сумма, разность и умножение (сумма и разность векторов, умножение вектора на число). А именно: даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложим эти векторы от некоторой точки A: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. На плоскости ABD возьмем точку C такую, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ называется ***суммой*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, а вектор $\overrightarrow{DB}$ называется ***разностью*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$, а $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$ (рис. 3.9). Как известно, использование указанного способа сложения векторов называется *правилом параллелограмма*. При нахождении суммы векторов можно использовать *правило треугольника*. Например, на рис. 3.9 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, и мы имеем $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$. Этим же способом можно найти сумму нескольких векторов, т.е. сумма нескольких векторов находится последовательным откладыванием следующего слагаемого от конца предыдущего слагаемого. Например, на рис. 3.10 указан способ нахождения суммы векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Этот способ называется ***правилом многоугольника***.

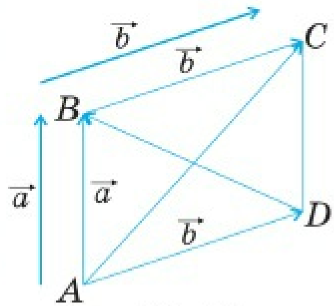


Рис. 3.9

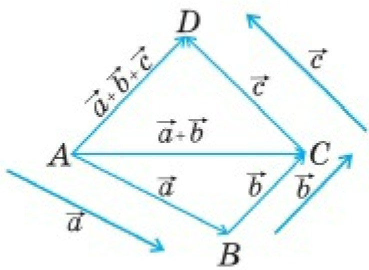


Рис. 3.10

При этом необязательно, чтобы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ были параллельны одной плоскости, т.е. точки A,B,C и D могут быть вершинами некоторой треугольной пирамиды.

При умножении вектора $\vec{a}$ на число k получим коллинеарный ему вектор $k\vec{a}$, модуль которого равен $|k|\cdot|\vec{a}|$. Если $k>0$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow k\cdot\vec{a}$; если $k<0$, то $\vec{a}\uparrow\downarrow k\cdot\vec{a}$ (рис. 3.11); если $k=0$, то $k\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

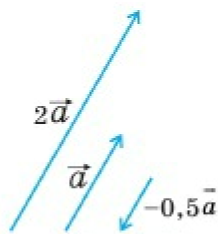


Рис. 3.11

Итак, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то найдется такое число k, что

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b}. \quad (1)$$

Векторы, параллельные одной плоскости или лежащие в этой плоскости, называются ***компланарными***. Например, на рис. 3.12 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$ компланарны, т.к. они лежат в плоскости основания $ABCD$ или параллельны ей. А векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ не компланарны.

Три вектора называются некомпланарными, если они не лежат в одной плоскости или не параллельны одной плоскости.

Так как $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$, то

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}. \quad (2)$$

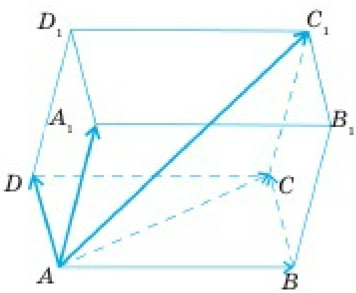


Рис. 3.12

Следовательно, сумма трех некомпланарных векторов равна вектору, определяемому диагональю параллелепипеда, построенного на данных некомпланарных векторах (рис. 3.12). Этот способ нахождения суммы трех некомпланарных векторов называется «правилом параллелепипеда». Если выполняется равенство (2), то также говорят, что вектор $\overrightarrow{AC_1}$ разложен на сумму трех некомпланарных векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

3.1.3. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Если для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ выполняется равенство

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, \quad (3)$$

то говорят, что дано разложение вектора $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Здесь x, y, z заданные числа, которые называются *коэффициентами разложения*.

Теперь покажем, что любой вектор можно однозначно разложить по трем некомпланарным векторам.

Теорема. *Любой вектор можно разложить по трем некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются однозначно.*

▲ Пусть даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$, причем векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарные. Покажем, что выполняется разложение (3).

Для этого из некоторой точки O пространства отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Пусть $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ (рис.3.13). Через точку D проведем прямую, параллельную прямой OC, и пусть эта прямая пересекает плоскость (AOB) в точке D_1. Далее через точку D_1 проведем прямую, параллельную прямой OB, и буквой A_1 обозначим точку пересечения этой прямой с прямой OA. Тогда по *правилу многоугольника*

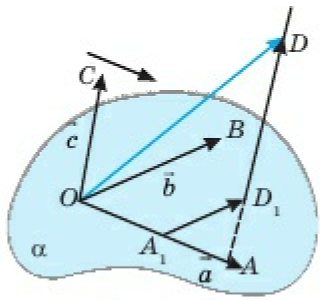


Рис. 3.13

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{D_1D}. \tag{4}$$

Так как $\overrightarrow{OA_1} \parallel \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1D_1} \parallel \vec{b}$ и $\overrightarrow{D_1D} \parallel \vec{c}$, то найдутся числа x, y, z такие, что $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1D_1} = y\vec{b}$, $\overrightarrow{D_1D} = z\vec{c}$. Тогда из равенства (4) получим равенство (3).

Теперь покажем, что в разложении (3) числа x, y, z определяются однозначно.

Методом доказательства от противного предположим, что существуют числа x_1, y_1, z_1 такие, что верно равенство

$$\vec{d} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}.$$

Тогда, почленно вычитая из (3) это равенство, получим

$$\vec{O} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}. \tag{5}$$

Т.к. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны, то необходимо, чтобы $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, $z - z_1 = 0$.

Если это не так, т.е. хотя бы одна из этих разностей не равна нулю, скажем, если $x - x_1 \neq 0$, то из равенства (5) получили бы равенство

$$-(x-x_1)\vec{a}=(y-y_1)\vec{b}+(z-z_1)\vec{c} \text{ или}$$

$$\vec{a}=-\frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\vec{b}-\frac{z-z_1}{x-x_1}\cdot\vec{c},$$

т.е. вектор $\vec{a}$ линейно выразили через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Это противоречит тому, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарные. Это показывает что коэффициенты разложения (3) определяются однозначно. ■

Самостоятельно рассмотрите и докажите частные случаи теоремы: 1) вектор $\overline{OD}$ лежит на одной из плоскостей (AOB), (AOC), (BOC); 2) вектор $\vec{d}$ коллинеарен одному из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

1. Что такое вектор и как его обозначают?
2. Какие векторы называются коллинеарными? Приведите примеры сонаправленных и противоположно направленных векторов.
3. Какие векторы называются равными?
4. Какое преобразование называется параллельным переносом и как оно связано с вектором? Какими свойствами обладает параллельный перенос?
5. Сформулируйте «правило треугольника» и «правило параллелограмма». Приведите примеры.
6. Как определить разность векторов?
7. Как умножить вектор на число?
8. Какие векторы называются компланарными?
9. Сформулируйте «правило параллелепипеда» для трех некомпланарных векторов.

Практическая работа

1. Постройте два вектора:
   а) равные по длине, но неколлинеарные;
   б) равные по длине и сонаправленные;
   в) равные по длине и противоположно направленные;
   В каком из случаев (а), б) или в)) построенные векторы являются: 1) коллинеарными; 2) равными? Обоснуйте ответ.
2. Постройте векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\left(\vec{a}\nparallel\vec{b}\right)$. Отметьте точку O и постройте: а) параллелограмм $OABC$ так, чтобы $\overline{OA}=\vec{a}$ и $\overline{OB}=\vec{b}$;

б) куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, чтобы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. В построенном кубе укажите: 1) компланарные векторы, параллельные плоскости (ABA_1B_1); 2) три некомпланарных вектора; 3) сумму векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$; 4) сумму векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$; 5) разность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1D_1}$. Обоснуйте ответ.

Упражнения

A

3.1. Дан прямоугольник $ABCD$, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Выразите векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.12) укажите все векторы, равные вектору:

1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$; 2) $\overrightarrow{A_1B}$.

3.3. В предыдущей задаче найдите: 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$;

3) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}$.

3.4. Дана треугольная пирамида $ABCD$ и точки P, Q, R, T, являющиеся серединами сторон AB, BC, CD, AD соответственно. Найдите модули векторов $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RT}$ и $\overrightarrow{TP}$, если $AC = 8$ см, $BD = 6$ см (рис. 3.14).

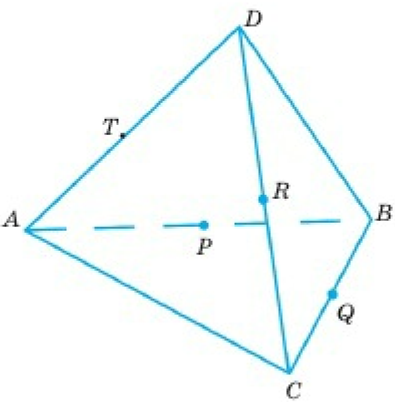


Рис. 3.14

3.5. Даны единичный вектор $\vec{e}$, $(|\vec{e}|=1)$ и вектор $\vec{a}$. Выразите вектор $\vec{a}$ через $\vec{e}$, если: 1) $|\vec{a}|=3$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{e}$; 2) $|\vec{a}|=\frac{1}{2}$, $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{e}$; 3) $|\vec{a}|=1{,}4$, $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{e}$; 4) $|\vec{a}|=0{,}6$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{e}$.

3.6. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите: 1) сонаправленные векторы; 2) векторы, противоположно направленные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ (рис. 3.12).

3.7. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите: 1) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}|$; 2) $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}|$; 3) $|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}|$; 4) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}|$, если ребро куба равно 4 см.

3.8. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Найдите: 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$.

3.9. В задаче 3.4 покажите, что: 1) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{TR}$; 2) $\overrightarrow{PT}=\overrightarrow{QR}$.

3.10. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.12). Существует ли параллельный перенос, отображающий параллелограмм $ABCD$ в параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$? Если существует, то укажите вектор параллельного переноса.

3.11. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны и лежат в параллельных плоскостях. Существует ли параллельный перенос, отображающий треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$? Обоснуйте ответ.

B

3.12. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.12). Укажите вектор, начало и конец которого находятся в вершинах данного параллелепипеда и равный выражению: 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{B_1C_1}$; 3) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}$; 4) $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{A_1C_1}$; 5) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD_1}$; 6) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}$; 7) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{BB_1}$; 8) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}-\overrightarrow{AC_1}$.

3.13. Пусть $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, O – его центр. Полагая $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, выразите $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.14. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. При каких условиях векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны?

3.15. Изображая векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ с помощью диагоналей параллелограмма, найдите условия, при которых $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$.

3.16. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Найдите сумму:

1) $\overrightarrow{AB}++\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AB}$.

3.17. Пусть $\vec{a} = k\vec{b}$ $(\vec{a} \neq 0)$. При каких значениях k верно: 1) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}| > |\vec{b}|$; 3) $|\vec{a}| < |\vec{b}|$?

3.18. Пусть $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ и $|\vec{a}| = 2$. Найдите k, если: 1) $|\vec{b}| = 5$ и $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$;
2) $|\vec{b}| = 1$ и $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

3.19. Дана правильная четырехугольная пирамида $ABCDE$ (рис. 3.15). Покажите, что $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$.

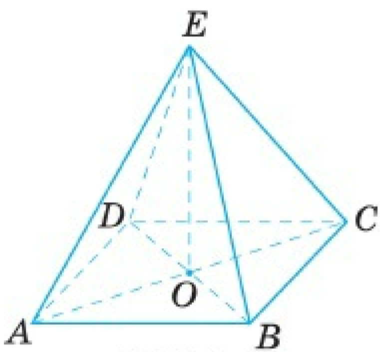


Рис. 3.15

3.20. В треугольной пирамиде $ABCD$ точка E лежит на ребре AB и делит его в отношении $AE : EB = 3 : 1$. Выразите векторы $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$ и $\overrightarrow{EC}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

3.21. Пусть $\vec{x}$, $\vec{y}$, и $\vec{z}$ – некомпланарные векторы. Выясните, коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1) $\vec{a} = \vec{x} - 2\sqrt{3}\,\vec{y}$, $\vec{b}\ \sqrt{3}\,\vec{x} - 6\vec{y}$;

2) $\vec{a} = 2\vec{x} + \vec{y}$, $\vec{b} = \vec{x} + 6\vec{y}$;

3) $\vec{a} = \vec{x} - 2\sqrt{2}\,\vec{y} + \sqrt{6}\,\vec{z}$, $\vec{b} = \sqrt{2}\,\vec{x} - 4\vec{y} + 2\sqrt{3}\,\vec{z}$;

4) $\vec{a} = \sqrt{5} \cdot \vec{y}$, $\vec{b} = \sqrt{5}\,\vec{z}$.

C

3.22. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельным переносом на $\overrightarrow{AC_1}$ отображается в другой куб. Найдите наибольшее расстояние между точками кубов, если $AB = a$.

3.23. В треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан, отрезок CE – медиана. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$.

3.24. Дан параллелограмм $ABCD$ и O – произвольная точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

3.25. Дан четырехугольник $ABCD$ и произвольная точка O пространства. Если выполняется равенство $\overline{OA}+\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{OD}$, то $ABCD$ – параллелограмм (утверждение, обратное утверждению из задачи **3.24**). Докажите.

3.26. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки P и Q являются серединами сторон AB и BC соответственно. Докажите, что $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{BC}\right)$.

3.27. В пространстве даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 являются вершинами параллелограмма.

3.28. Докажите, что для двух неколлинеарных векторов $\overline{m}$ и $\overline{n}$, исходящих из одной точки, вектор $|\overline{m}|\,\overline{n}+|\overline{n}|\,\overline{m}$ коллинеарен биссектрисе угла $\left(\widehat{\overline{m},\overline{n}}\right)$, а вектор $|\overline{n}|\,\overline{m}-|\overline{m}|\cdot\overline{n}$ коллинеарен биссектрисе смежного с ним угла.

3.29. В пространстве даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Покажите, что $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=3\cdot\overline{OO_1}$, где O и O_1 – точки пересечения медиан данных треугольников.

3.30. Дан треугольник ABC и O – произвольная точка пространства. Пусть A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно. Докажите, что равнодействующая сил $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ равна равнодействующей сил $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$ и $\overline{OC_1}$.

3.2. Координаты точки и вектора в пространстве

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- знать определение прямоугольной системы координат в пространстве и уметь изображать ее;
- изображать точку в пространстве по ее координатам;
- знать понятие координаты вектора, уметь находить координаты вектора, раскладывать его по единичным векторам;
- выполнять сложение векторов и умножение вектора на число;
- определять коллинеарные векторы по координатам.

3.2.1. Прямоугольная декартова система координат в пространстве

Прямоугольная декартова система координат в пространстве вводится аналогично прямоугольной системе координат на плоскости.

Проведем в пространстве через точку O три попарно перпендикулярные прямые Ox, Oy, Oz. Зададим на них единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (рис. 3.16). Полученные оси называются осями координат: Ox – ***ось абсцисс***, Oy – ***ось ординат***, Oz – ***ось аппликат***, а точка O – ***начало координат***. Плоскости Oxy, Oxz и Oyz называются ***координатными плоскостями***. Таким образом, построенная система $Oxyz$ называется ***прямоугольной декартовой системой координат*** в пространстве.

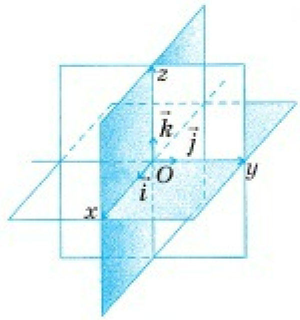


Рис. 3.16

Возьмем произвольную точку M пространства и проведем вектор $\overline{OM}$. Вектор $\overline{OM}$ называется ***радиус вектором*** точки M (рис. 3.16). Через точку M проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям. Ясно, что каждая из этих трех плоскостей пересекается только с одной из осей координат. Обозначим через M_x, M_y и M_z точки пересечения данных плоскостей с координатными осями Ox, Oy и Oz соответственно (рис. 3.17). Также пусть точки M_1, M_2 и M_3 являются основаниями перпендикуляров, проведенных из точки M к координатным плоскостям Oxy, Oxz и Oyz соответственно. Тогда получим прямой параллелепипед $OM_xM_1M_yM_zM_2MM_3$. По *правилу параллелепипеда*

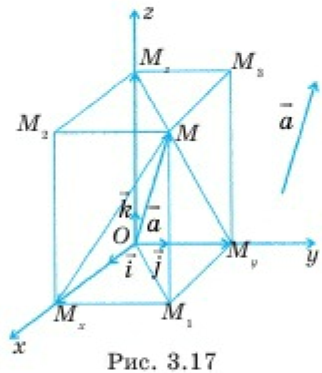


Рис. 3.17

$$\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} + \overline{OM_z}. \qquad (1)$$

Так как векторы $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$ и $\overline{OM_z}$ коллинеарны единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ соответственно, то найдутся числа x, y и z такие, что $\overline{OM_x} = x \cdot \vec{i}$, $\overline{OM_y} = y \cdot \vec{j}$ и $\overline{OM_z} = z \cdot \vec{k}$. Следовательно, согласно (1)

$$\overline{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}. \qquad (2)$$

Числа x, y, z называются ***координатами радиус-вектора*** $\overline{OM}$ обозначаемого $\overline{OM} = (x;\ y;\ z)$. Так как для данной точки M точки M_x, M_y и M_z определены однозначно, то и координаты радиус-вектора $\overline{OM}$ определены однозначно. Если $\vec{a} = \overline{OM}$, то $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$, т.е, чтобы найти координаты произвольного вектора $\vec{a}$ пространства, нужно отложить его от начала координат O и достаточно найти координаты полученного радиус-вектора $\overline{OM} = \vec{a}$.

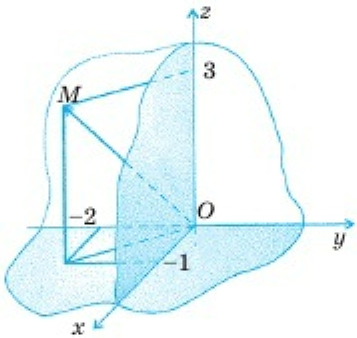


Рис. 3.18

Так как $MM_x \perp Ox$, $MM_y \perp Oy$ и $MM_z \perp Oz$ (по теореме о трех перпендикулярах), то числа x, y, z называются ***координатами точки*** M: $M(x;\ y;\ z)$. Например, на рис. 3.18 изображены точка $M(1;\ -2;\ 3)$ и радиус-вектор $\overline{OM} = (1;\ -2;\ 3)$.

Так же, как и на плоскости, если заданы $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, можно показать, что координаты вектора $\overline{AB}$ определяются по формуле

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1). \qquad (3)$$

3.2.2. Действия над векторами

Пусть даны два векторы $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$. Тогда в силу (2) их можно представить в виде $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Отсюда $\vec{a} + \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$.

Аналогично

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}.$$

Следовательно,

$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$ и $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2; z_1 - z_2)$, т.е. ***при сложении векторов их соответственные координаты складывают, при вычитании – из координаты одного вектора вычитают координаты другого.***

Теперь умножим вектор $\vec{m} = (x;\ y;\ z)$ на число λ: $\lambda \cdot \vec{m} = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (\lambda x)\vec{i} + (\lambda y)\vec{j} + (\lambda z)\vec{k}$, т.е. $\lambda\vec{m} = (\lambda x;\ \lambda y;\ \lambda z)$.

Итак, ***при умножении вектора на число его координаты умножают на это число.***

Так как радиус-векторы, соответствующие равным векторам, совпадают, то $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2$, где $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$, т.е. ***соответствующие координаты равных векторов равны между собой.***

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$, то найдется число λ такое, что $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$, т.е. $x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$, $z_1 = \lambda z_2$, или

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}, \qquad (4)$$

т.е. координаты коллинеарных векторов пропорциональны. Равенства (4) называются ***условием коллинеарности векторов.***

Пусть вектору $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$ соответствует радиус-вектор $\overline{OM}$ (рис. 3.17). Так как $OM_x = |x|$, $OM_y = M_xM_1 = |y|$, $OM_z = M_1M = |z|$, то из прямоугольных треугольников OM_xM_1 и OM_1M имеем:

$$\begin{cases} OM_1^2 = OM_x^2 + M_xM_1^2, \\ OM^2 = OM_1^2 + M_1M^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM_1^2 = x^2 + y^2, \\ OM^2 = OM_1^2 + z^2 \end{cases} \Rightarrow OM^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Поэтому

$$\left|\overline{OM}\right| = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ т.е. } \left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (5)$$

В частности, если $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то по формулам (3) и (5)

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

т.е. расстояние между точками A и B определяется так:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пример. Даны точки $A(1;\ -2;\ 3)$, $B(-3;\ 2;\ -1)$ и $C(5;\ 0;\ -3)$. Найдем: 1) координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$; 2) сумму $\overline{AB} + \overline{AC}$; 3) координаты вектора $2{,}5 \cdot \overline{AB}$; 4) модули векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$. 5) Проверим, что $\overline{AC}$ коллинеарен вектору $\vec{a} = (-2;\ -1;\ 3)$.

▲ 1) $\overline{AB} = (-3 - 1;\ 2 - (-2);\ -1 - 3) = (-4;\ 4;\ -4)$. Аналогично $\overline{AC} = (4;\ 2;\ -6)$, $\overline{BC} = (8;\ -2;\ -2)$;

2) $\overline{AB} + \overline{AC} = (-4 + 4;\ 4 + 2;\ -4 - 6) = (0;\ 6;\ -10)$;

3) $2{,}5 \cdot \overrightarrow{AB}(2{,}5 \cdot (-4);\ 2{,}5 \cdot 4;\ \ 2{,}5 \cdot (-4)) = (-10;\ 10;\ -10)$;

4) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{3}$;

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{8^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$;

5) Так как $\frac{4}{-2} = \frac{2}{-1} = \frac{-6}{3}$, то $\overrightarrow{AC} \parallel \vec{a}$. ■

1. Как строится прямоугольная декартова система координат в пространстве?
2. Что такое радиус-вектор точки? Как определить координаты радиус-вектора, произвольного вектора?
3. Как найти координаты вектора по координатам его концов?
4. Как найти координаты суммы и разности векторов?
5. Как умножить число на вектор?
6. Каким свойством обладают координаты равных коллинеарных векторов?
7. Как найти модуль вектора по его координатам?
8. Как найти расстояние между точками в пространстве?

Практическая работа

1. Постройте прямоугольную систему координат и отметьте на ней точки $A(-2; -3; 2)$ и $B(4; -2; 3)$.
2. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и постройте соответствующий ему радиус-вектор.

Упражнения

А

3.31. Отметьте в прямоугольной системе координат точки $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ -3;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 4)$, $D(1;\ 2;\ 3)$.

3.32. Постройте треугольник ABC по координатам вершин:

1) $A(0;\ 3;\ 0)$, $B(1;\ 3;\ 5)$, $C(3;\ 2;\ 5)$;

2) $A(3;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 5)$.

3.33. Выразите векторы $\vec{a} = (2; -3; 4)$, $\vec{b} = (-1; 1; 1)$, $\vec{c} = (0; 2; -3)$, $\vec{d} = (3;\ 0;\ 0)$, $\vec{p} = (0;\ -2;\ 0)$ и $\vec{q} = (0;\ 0;\ 2)$ через векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3.34. Найдите координаты вектора:

1) $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$; 2) $\vec{b} = 0{,}5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; 3) $\vec{c} = -3\vec{i} + 3\vec{k}$; 4) $\vec{d} = \vec{j}$.

3.35. Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}+7\vec{k}$ и $\vec{b}=5\vec{a}$. Найдите $|\vec{b}|$.

3.36. Даны векторы $\vec{a}=(1;\ 0;\ 1)$, $\vec{b}=(3;\ -2;\ 1)$, $\vec{c}=(2;\ -1;\ -2)$. Найдите:

1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{c}-\vec{b}$; 3) $2\vec{a}-\vec{b}$; 4) $3\vec{b}-2\vec{c}$;

5) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 6) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$; 7) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 8) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

3.37. По данным задачи 3.33 найдите модули указанных векторов.

3.38. Даны точки $A(-1;\ 1;\ 1)$, $B(3;\ 0;\ 3)$, $C(0;\ 0;\ 2)$. Найдите координаты и модули векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

3.39. Какие из векторов $\vec{a}=(3;\ -2;\ 1)$, $\vec{b}=(6;\ -8;\ 4)$, $\vec{c}=(6;\ -4;\ 2)$, $\vec{p}=(1{,}5;\ -1;\ 0{,}5)$, $\vec{q}=(-3;\ 4;\ -2)$ коллинеарны?

3.40. Укажите все пары коллинеарных векторов:

$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=6\vec{i}-10\vec{j}+8\vec{k}$, $\vec{p}=-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{q}=5\vec{j}-4\vec{k}-3\vec{i}$, $\vec{m}=12\vec{i}-20\vec{j}+16\vec{k}$.

3.41. Даны точки $A(2;\ -3;\ 4)$, $B(0;\ 2;\ -3)$ и вектор $\overrightarrow{OC}=(0;\ -2;\ 0)$. Найдите: 1) $|\overrightarrow{AB}|$; 2) $|\overrightarrow{BC}|$; 3) $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|$; 4) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|$, где $O(0;\ 0;\ 0)$.

B

3.42. По данным задачи 3.33 найдите: 1) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 2) $\vec{b}+2\vec{p}-2\vec{q}$; 3) $2\vec{b}-3\vec{c}+0{,}5\vec{q}$; 4) $3\vec{a}-2\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{p}$.

3.43. Покажите, что $\vec{i}=(1;\ 0;\ 0)$, $\vec{j}=(0;\ 1;\ 0)$, $\vec{k}=(0;\ 0;\ 1)$.

3.44. Среди векторов $\overrightarrow{m_1}=(1;\ -6;\ 3)$, $\overrightarrow{m_2}=(0;\ -4;\ 5)$, $\overrightarrow{m_3}=(5;0;0)$, $\overrightarrow{m_4}=(0;\ 2;\ 0)$, $\overrightarrow{m_5}=(-2;\ 0;\ 3)$, $\overrightarrow{m_6}=(2;\ -3;\ 6)$, $\overrightarrow{m_7}=(0;0;-1)$, $\overrightarrow{m_8}=(3;\ -1;\ 0)$, $\overrightarrow{m_9}=(3;\ 0;\ -1)$, $\overrightarrow{m_{10}}=(0;-2;0)$ укажите векторы: 1) коллинеарные вектору $\vec{i}$; 2) коллинеарные вектору $\vec{j}$; 3) коллинеарные вектору $\vec{k}$; 4) компланарные векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$; 5) компланарные векторам $\vec{i}$ и $\vec{k}$; 6) компланарные векторам $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

3.45. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны координаты четырех вершин: $A(2; -1; 1)$, $B(1; 3; 4)$, $A_1(4; 2; 0)$, $D(6; 0; 1)$. Найдите координаты остальных вершин.

3.46. Дана трапеция $ABCD$ и три его вершины $A(-2; -3; 1)$, $B(1; 4; 3)$, $C(3; 1; -2)$. Найдите координаты вершины D при условии, что основание AD в пять раз больше основания BC.

3.47. Известны координаты вершин A, B и C параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты вершины D, если: 1) $A(2; -1; 1)$, $B(3; -1; 1)$, $C(0; 2; -3)$; 2) $A(3; 1; -1)$, $B(2; -1; 1)$, $C(-2; 0; 3)$; 3) $A(2; -1; 0)$, $B(-1; 3; 1)$, $C(0; 1; -1)$.

3.48. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если $A(1; 3; 2)$, $B(0; 2; 4)$, $C(1; 1; 4)$, $D(2; 2; 2)$.

3.49. Найдите m и n, если векторы $\vec{a} = (m; 3; 2)$ и $\vec{b} = (4; n; 1)$ коллинеарны.

3.50. При каких значениях x и y векторы $\vec{p} = (x; y; 4)$ и $\vec{q} = (1; 3; 2)$ коллинеарны?

3.51. Покажите, что параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a} = (1; 2; 3)$ и $\vec{b} = (3; 2; 1)$, является ромбом.

3.52. По данным задачи 3.51 найдите длины диагоналей ромба.

3.53. Покажите, что параллелограмм, построенный на векторах $\vec{p} = (1; 2; -3)$ и $\vec{q} = (3; 3; 3)$, является прямоугольником.

3.54. Даны векторы $\vec{a} = (5; -2; -3)$, $\vec{b} = (2; 3; -5)$. Покажите, что параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, является прямоугольником.

3.55. Даны векторы $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (0; 3; 1)$, $\vec{c} = (2; 5; 2)$ и $\vec{d} = (4; 0; -7)$. Найдите числа x, y, z, чтобы $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

3.56. Даны векторы $\vec{p} = (1;\ 2;\ 3)$ и $\vec{q} = (-1;\ x;\ 2)$. Найдите значение x, если: 1) $|\vec{p}| = |\vec{q}|$; 2) $|\vec{p}| = 0{,}5\ |\vec{q}|$.

3.57. Дан вектор $\vec{a} = (n; 2n; -n)$. Найдите значение n, если $|\vec{a}| = \sqrt{54}$.

3.58. Даны векторы $\vec{a} = (x;\ 2;\ 3)$ и $\vec{b} = (4;\ y;\ 6)$. При каких значениях x и y векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны?

3.59. Являются ли компланарными векторы $\vec{a} = (1;\ 0;\ 2)$, $\vec{b} = (1;\ 1;\ -1)$, $\vec{c} = (-1;\ 2;\ 4)$?

C

3.60. Дан треугольник ABC, где $A(1;3;2)$, $B(0;2;4)$, $C(1;1;4)$. Найдите длину высоты AH.

3.61. Лежат ли точки $A(-2;\ 4;\ 3)$, $B(4;\ -2;\ 3)$, $C(0;\ 6;\ 7)$ и $O(0;0;0)$ в одной плоскости?

3.62. Вектор $\vec{d}$ выразите через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

1) $\vec{a} = (1;\ 3;\ 5)$, $\vec{b} = (0;\ 4;\ 5)$, $\vec{c} = (7;\ -8;\ 4)$, $\vec{d} = (2;\ -1;\ 3)$;

2) $\vec{a} = (1;\ 2;\ 5)$, $\vec{b} = (-1;\ 6;\ 3)$, $\vec{c} = (0;\ 0;\ 2)$, $\vec{d} = (1;\ 0;\ 4)$.

3.63. Даны точки $A(1;\ -2;\ 3)$, $B(2;\ 0;\ -2)$, $C(0;\ k;\ 4)$. При каких значениях k треугольник ABC является равнобедренным?

3.64. При параллельном переносе вектора $\vec{a} = (a;\ b;\ c)$ на радиус-вектор точка $A(x;\ y;\ z)$ переходит в точку $A'(x';\ y';\ z')$. Установите зависимость между координатами точек A и A'.

3.65. Найдите образ данной точки при параллельном переносе на вектор $\vec{a} = (1;\ 2;\ 3)$: 1) $O(0;\ 0;\ 0)$; 2) $A(1;\ 2;\ 3)$; 3) $B(-2;\ 0;\ -1)$.

3.66. Даны точки $A(1;\ -2;\ 3)$ и $B(2;\ 0;\ -2)$. Найдите координаты единичного вектора, коллинеарного биссектрисе угла AOB.

3.3. Скалярное произведение векторов. Деление отрезка в данном отношении

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- по координатам находить скалярное произведение векторов, определять угол между ними;
- знать формулу деления отрезка в заданном отношении и применять ее при решении задач;
- знать метод разложения вектора по трем некомпланарным векторам.

3.3.1. Скалярное произведение векторов

Углом между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ называется угол BAC. Углом между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол, образованный при откладывании этих векторов от одной точки. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ (рис. 3.19).

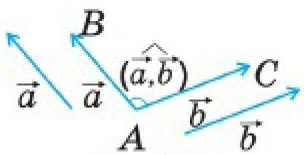


Рис. 3.19

Определение. *Скалярным произведением векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:*

$$\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right).$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Если $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \varphi$, то по определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi. \qquad (1)$$

Скалярное произведение равных векторов называется ***скалярным квадратом*** и обозначается через $\vec{a}^{\,2}$. По формуле (1)

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos 0^\circ = \left|\vec{a}\right|^2, \text{ т.е. } \vec{a}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2.$$

Если $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 90^\circ$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***ортогональными*** (перпендикулярными). Так как $\cos 90^\circ = 0$, то скалярное произведение ортогональных векторов равно нулю: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $(\vec{a} \perp \vec{b})$.

Если $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$, то буквально так же, как и в курсе геометрии за 9 класс (раздел 1, п.1.6), можно показать, что скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ определяется по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2. \qquad (2)$$

Условие ортогональности векторов в координатах записывается так:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0, \qquad (3)$$

т.к. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ при $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Из равенства (1) $\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Учитывая, что $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ и из формулы (2) получим:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (4)$$

3.3.2. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны точки $A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B)$. Предположим, что точка $C(x_C; y_C; z_C)$ делит отрезок AB в отношении λ, т.е. $\dfrac{AC}{CB} = \lambda$, или $AC = \lambda \cdot CB$. Выразим координаты точки C через координаты точек A и B.

Так как точка C лежит между точками A и B, то векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ сонаправлены. Поэтому имеет место равенство $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$. Поскольку $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A)$ и $\overrightarrow{CB} = (x_B - x_C; y_B - y_C; z_B - z_C)$, то из последнего равенства получим систему равенств:

$$\begin{cases} x_C - x_A = \lambda(x_B - x_C), \\ y_C - y_A = \lambda(y_B - y_C), \\ z_C - z_A = \lambda(z_B - z_C) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (1+\lambda)x_C = x_A + \lambda x_B, \\ (1+\lambda)y_C = y_A + \lambda y_B, \\ (1+\lambda)z_C = z_A + \lambda z_B. \end{cases}$$

Следовательно,

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, \quad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}, \qquad (5)$$

т.е. формулами (5) определяются координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении λ. Если точка C является серединой отрезка AB, то $\lambda = 1$, из формул (5) получим координаты точки, делящей отрезок пополам:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2} \qquad (6)$$

Пример 1. Даны точки $A(0;\ 2;\ -3)$, $B(-1;\ 1;\ 1)$ и $C(3;\ -1;\ -5)$, являющиеся вершинами ΔABC. Найдем: 1) $\cos\angle A$; 2) координаты точки пересечения медиан ΔABC.

▲ 1) Достаточно найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Так как $\overrightarrow{AB} = (-1;-1;4)$, $\overrightarrow{AC} = (3;\ -3;-2)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{22}$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-1)\cdot 3 + (-1)\cdot(-3) + 4\cdot(-2) = -8$, то по формуле (4)

$$\cos\angle A = \frac{-8}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{22}} = -\frac{4\sqrt{11}}{33}.$$

2) Сначала найдем координаты точки D – середины отрезка BC. По формуле (6)

$$x_D = \frac{-1+3}{2} = 1,\ y_D = \frac{1-1}{2} = 0,\ z_D = \frac{1-5}{2} = -2,$$

т.е. $D(1;\ 0;\ -2)$. Если E является точкой пересечения медиан ΔABC, то эта точка делит отрезок AD в отношении $\lambda = 2$, т.е. $AE : ED = 2 : 1$. Тогда по формулам (5)

$$x_E = \frac{0+2\cdot 1}{1+2} = \frac{2}{3},\ y_E = \frac{2+2\cdot 0}{1+2} = \frac{2}{3};$$

$$z_E = \frac{-3+2\cdot(-2)}{1+2} = -\frac{7}{3}, \text{ т.е } E\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{7}{3}\right).$$

Пример 2. Даны векторы $\vec{a} = (1;\ 2;\ 1)$, $\vec{b} = (2;\ -1;\ 1)$, $\vec{c} = (-1;\ 1;\ 1)$, и $\vec{d} = (8;\ -3;\ 0)$. Покажем, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ –некомпланарные векторы, и разложим вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

▲ Если бы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ были компланарными, то были бы параллельными одной плоскости, то один из них линейно выражался бы через два другие, т.е. нашлись бы числа u и v такие, что $\vec{c} = u\vec{a} + v\vec{b}$, в координатной форме имеем равенство

$(u + 2v;\ 2u - v;\ u + v) = (-1;\ 1;\ 1)$.

Отсюда получим систему уравнений $\begin{cases} u + 2v = -1, \\ 2u - v = 1, \\ u + v = 1 \end{cases}$

Однако эта система не совместна, т.е. не имеет решения. Это значит, что вектор $\vec{c}$ нельзя линейно выразить через векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$. Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не параллельны одной плоскости, т.е. некомпланарные.

Пусть существуют числа x, y, z такие, что $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Записав это равенство в координатной форме, мы также получим систему уравнений $\begin{cases} x + 2y - z = 8, \\ 2x - y + z = -3, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

С помощью 3-го уравнения в первых двух исключим z.

$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ x - 2y = -3 \end{cases} \Rightarrow x=1,\ y=2$, тогда $z = -3$, поэтому $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{z}$. ■

1. Как определяется угол между векторами?
2. Что такое скалярное произведение векторов?
3. Напишите формулу скалярного произведения в координатах.
4. Напишите условие ортогональности векторов.
5. Напишите формулу косинуса угла между векторами.
6. Напишите формулу деления отрезка в данном отношении.
7. Как найти координаты середины отрезка?

Упражнения

А

3.67. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \varphi$, если:

1) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\varphi = 45°$; 2) $|\vec{a}| = 0,5$, $|\vec{b}| = 16$, $\varphi = 60°$;

3) $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = 30°$; 4) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = 120°$.

3.68. Даны векторы $\vec{a} = (2; -1; 0)$, $\vec{b} = (1; \sqrt{2}; -5)$, $\vec{c} = (1; 2; 5)$, $\vec{d} = (1; 0; 2)$. Вычислите: 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $\vec{a} \cdot \vec{c}$; 3) $\sqrt{\vec{b}^2}$; 4) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{c})$; 5) $(\vec{a} - \vec{d})^2$; 6) $\vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{a}$; 7) $(\vec{a} + \vec{d})(\vec{b} - \vec{c})$; 8) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{c} - \vec{d})$.

3.69. Какие из векторов $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (5; 9; 2)$, $\vec{c} = (-3; 1; 3)$ попарно перпендикулярны?

3.70. Даны точки $A(5;2;1), B(-3;4;0), C(3;0;4), D(1;-4;3)$. Вычислите скалярное произведение: 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

3.71. По данным задачи 3.70 найдите: 1) $\cos(\angle BAC)$; 2)$\cos(\angle CAD)$; 3) $\cos(\angle ABC)$; 4) $\cos(\angle ADC)$.

3.72. По данным задачи 3.70 найдите координаты середины отрезка: 1)AB; 2) AD; 3) BC; 4) CD.

3.73. Даны точки $A(2; 3; -2)$, $B(4; -5; 6)$. Определите координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении: 1) $\lambda = 1$; 2) $\lambda = \frac{2}{3}$; 3) $\lambda = 2$; 4) $\lambda = \frac{1}{2}$.

3.74. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a} = (\sqrt{2}; 2; -\sqrt{2})$, $\vec{b} = (-3; 0; 3)$;

2) $\vec{a} = (0; -5; 0)$, $\vec{b} = (0; -\sqrt{3}; -1)$.

3.75. Даны точки $A(0; 2; -1)$, $B(1; 0; 1)$ и $C(-1; 4; 3)$. В треугольнике ABC найдите: 1) длину медианы AA_1; 2) $\cos\angle C$.

B

3.76. Дан треугольник ABC, где $A(2; 1; 3)$, $B(2; 1; 4)$, $C(0; 4; 3)$. Найдите: 1) $\angle B$; 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; 3) длину медианы AA_1.

3.77. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно образуют углы, равные 60°, и $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$. Найдите скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{c})$.

3.78. Найдите длины диагоналей параллелограмма $ABCD$, если известно, что $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ и $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 60°$.

3.79. Угол между единичными векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ равен α. Найдите угол между векторами: 1) $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$; 2) $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$; 3) $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

3.80. При каком значении β векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны:

1) $\vec{a} = (\beta; -7; 5)$, $\vec{b} = (2; 3; \beta)$; 2) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \beta\vec{k}$, $\vec{b} = \beta\vec{i} - 3\vec{j} - 8\vec{k}$?

3.81. Даны точки $A(0; -3; 1)$, $B(0; 3; -1)$, $C(-5; 0; 0)$ и $D(-6; -6; 2)$. Покажите, что прямые AC и BD перпендикулярны.

3.82. Дан треугольник ABC с вершинами $A(2; 1; -4)$, $B(4; 0; -2)$, $C(0; -3; 0)$.

Найдите: 1) $\cos\angle A$; 2) угол между медианой AA_1 и стороной AC; 3) длину медианы AA_1; 4) координаты точки пересечения медиан данного треугольника.

3.83. Известно, что $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$. Покажите, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

3.84. Найдите значение выражения $(2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120°$.

3.85. Даны векторы $\vec{a} = (2; 1; -4)$ и $\vec{b} = (4; 0; -3)$. Найдите значение m, при котором $(\vec{a} + m\vec{b}) \perp \vec{b}$.

3.86. Вычислите значение выражения $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, если известно, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$.

C

3.87. Дан треугольник ABC с вершинами $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ Докажите, что координаты точки пересечения медиан ΔABC определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Пользуясь этой формулой, найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC, если: 1) $A(3; 1; 0)$, $B(-1; 4; 4)$, $C(1; 1; -2)$; 2) $A(7; 9; 1)$, $B(-2; -3; 2)$, $C(1; 5; 5)$.

3.88. Радиус-вектор $\overline{OM}$ с осями координат составляет углы, равные α, β, γ. Докажите, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\overline{OM}$.

3.89. Для векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ верна формула $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Докажите эту формулу, пользуясь разложением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3.90. Даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Точками C_1, C_2, ..., C_{n-1} отрезок AB разделен на n равных частей. Выразите координаты точки C_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ через координаты точек A, B и числа k, n.

3.91. Докажите, что если в треугольнике две медианы равны между собой, то этот треугольник – равнобедренный.

3.92. Если вектор $\vec{a}$ образует с положительными направлениями координатных осей Ox, Oy и Oz углы, равные α, β и γ, то $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами данного вектора. Докажите, что направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$ определяются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3.4. Уравнение плоскости. Задание пространственных фигур уравнениями и неравенствами

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- записывать общее уравнение плоскости и выводить это уравнение с помощью вектора нормали $\vec{n} = (a;b;c)$;
- знать уравнение сферы и применять его при решении задач.

3.4.1. Уравнение плоскости

Пусть плоскость α, заданная в системе координат $Oxyz$, проходит через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (a;b;c)$.

Здесь вектор $\vec{n}$ называется ***вектором нормали*** плоскости α.

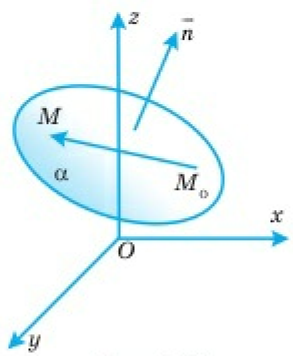


Рис. 3.20

Точкой и вектором нормали плоскость определяется однозначно, т.е. через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$ проходит одна и только одна плоскость (рис. 3.20).

Если $M(x;\ y;\ z)$ – произвольная точка плоскости α, то вектор $\overline{M_0M} = (x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$: $\overline{M_0M} \perp \vec{n}$.

Тогда скалярное произведение этих векторов равно нулю: $\vec{n}\cdot\overline{M_0M} = 0$.

Это равенство на основании формулы (2) из предыдущего параграфа записывается так:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (1)$$

Его называют ***уравнением плоскости, заданной вектором нормали***.

Здесь x_0, y_0, z_0 – координаты начальной точки, а коэффициенты a, b, c – координаты вектора нормали.

Раскрыв скобки в уравнении (1), получим:

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$$

Если ввести обозначение $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, то последнее уравнение имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (2)$$

Итак, всякое уравнение плоскости, заданной вектором нормали, можно записать в виде линейного уравнения (2). Теперь покажем, что всякое линейное уравнение вида (2) в пространстве определяет некоторую плоскость. Действительно, пусть задано уравнение (2) и пусть (x_0, y_0, z_0) – какое-либо его решение (заметим, что уравнение (2) имеет бесконечно много решений). Тогда верно тождество

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0. \qquad (3)$$

Отсюда, вычитая из уравнения (2) тождество (3), получим:

$$ax + by + cz + d - (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0,$$

или

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Это уравнение является уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (a; b; c)$.

Таким образом, мы показали, что любую плоскость можно задать линейным уравнением вида (2). Уравнение (2) называется ***общим уравнением плоскости***.

Пример 1. Напишем уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -2; 2)$, с вектором нормали $\vec{n} = (3; -1; 4)$.

▲ Так как $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $z_0 = 2$ и $a = 3$, $b = -1$, $c = 4$, то по формуле (1)

$$3(x - 1) - (y + 2) + 4(z - 2) = 0.$$

Здесь, раскрывая скобки, получим уравнение плоскости в общем виде:

$$3x - y + 4z - 13 = 0. \ ■$$

Пример 2. Плоскость задана общим уравнением $2x+5y-3z+$ $+7=0$. Найдем вектор нормали и координаты какой-либо точки, лежащей в этой плоскости.

▲ Из уравнений (1) и (2) следует, что координаты вектора нормали данной плоскости являются коэффициентами переменных x, y, z соответственно. Поэтому $\vec{n}=(2;\ 5;\ -3)$.

Данное уравнение содержит три переменные. Одну из них выразим через две другие переменные: $2x=-5y+3z-7$ или $x=\frac{1}{2}\times$ $\times(-5y+3z-7)$. Здесь значения переменных y и z можно подбирать произвольным образом. Пусть $y=0$, $z=1$, тогда $x=\frac{1}{2}(3-7)=$ $=-2$. Поэтому точка $M_0(-2;\ 0;\ 1)$ принадлежит данной плоскости, и подобных точек бесконечно много. ■

3.4.2. Задание пространственных фигур уравнениями и неравенствами

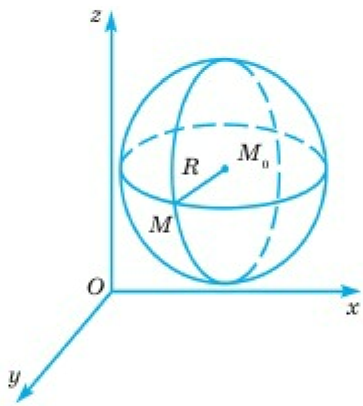


Рис. 3.21

Множество точек пространства $M(x,\ y,\ z)$, расположенных на одинаковом расстоянии R от заданной точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, называют ***сферой***. Здесь M_0 – центр, а R – радиус сферы (рис. 3.21).

По определению для произвольной точки $M(x,\ y,\ z)$ на сфере с центром в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и радиусом R верно равенство $MM_0=R$. Отсюда по формуле расстояния между точками (п. 3.2) имеем:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R.$$

Возведя левую и правую части уравнения в квадрат, получим:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \qquad (4)$$

Это и есть уравнение сферы радиусом R с центром в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$. Если центр сферы совпадает с началом координат, то соответствующее уравнение сферы записывается так:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \qquad (5)$$

Пример 3. Напишем уравнение сферы радиусом $R = 4$ с центром в точке $C(1; -2; 3)$.

▲ По формуле (4)

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16. \blacksquare$$

Пример 4. Покажем, что уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 10z + 23 = 0$ определяется сфера и найдем ее центр и радиус.

▲ В данном уравнении сгруппируем одинаковые переменные и дополним их до полного квадрата:

$(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) + (z^2 - 10z) + 23 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 + 10z + 25) = -23 + 1 + 1 + 25 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 = 4.$

Этим уравнением определяется сфера радиусом $R = 2$ с центром в точке $C(1; -1; 5)$.

Каждая сфера делит пространство на две части (внутреннюю и внешнюю). Часть пространства, ограниченная сферой, называется ***шаром***. Если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – центр, а R – радиус сферы, то они также называются центром и радиусом шара соответственно. Если $M(x, y, z)$ – точка шара, расположенная во внутренней части сферы, то верно неравенство $M_0M < R$, а для внешней точки N верно неравенство $M_0N > R$. Поэтому шар задается неравенством $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < R^2$, а внешняя часть сферы задается неравенством $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 > R^2$.

Здесь, если точки сферы рассматриваются вместе с внутренней частью (или внешней частью), то знак неравенства берется нестрогим ($\leqslant$ или $\geqslant$).

Аналогично, если уравнением $ax + by + cz + d = 0$ определяется какая-либо плоскость α, то одно из полупространств задается неравенством $ax + by + cz + d < 0$, а другое – неравенством $ax + by + cz + d > 0$. ■

Способы выбора знака неравенства в том или ином полупространстве рассмотрим на примере.

Пример 5. Определим знаки неравенства в разных полупространствах, ограниченных плоскостью $2x + 3y + 3z - 6 = 0$.

▲ Для этого в одном из полупространств выбираем точку, координаты которой подставляем в данное уравнение. Для удобства выберем точку $O(0; 0; 0)$. Как правило, в качестве подобных точек выбирают те, координаты которых в наибольшей степени облегчают вычислительные работы.

Координаты выбранной точки подставим в данное уравнение:

$2\cdot 0+3\cdot 0+3\cdot 0-6<0$. Тогда в полупространстве, где расположена точка $O(0;\ 0;\ 0)$, выполняется неравенство $2x+3y+3z-6<0$, а во втором полупространстве выполняется неравенство $2x+3y+3z-6>0$.

Если полупространства рассматриваются вместе с точками плоскости, то берутся нестрогие неравенства:

$2x+3y+3z-6\leqslant 0$ или $2x+3y+3z-6\geqslant 0$ соответственно. ■

Пример 6. Плоскость, заданная в примере 5, отсекает от координатного угла пирамиду (рис. 3.22). Зададим эту пирамиду системой неравенств.

▲ Плоскость $2x+3y+3z-6=0$ пересекается с осями координат в точках $A(3;0;0)$, $B(0;\ 2;\ 0)$, $C(0;\ 0;2)$ соответственно. Тогда пирамида $OABC$ ограничена плоскостями Oxy, Oxz, Oyz и $2x+3y+3z-6=0$. Пирамида расположена в той части плоскости $2x+3y+3z-6=0$, где расположена точка $O(0;\ 0;\ 0)$. Следовательно, на основании выводов примера 5 выполняется неравенство $2x+3y+3z-6\leqslant 0$. С другой стороны, координаты любой точки пирамиды удовлетворяют неравенствам $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ (неотрицательные). Поэтому точки пирамиды $OABC$ удовлетворяют системе неравенств:

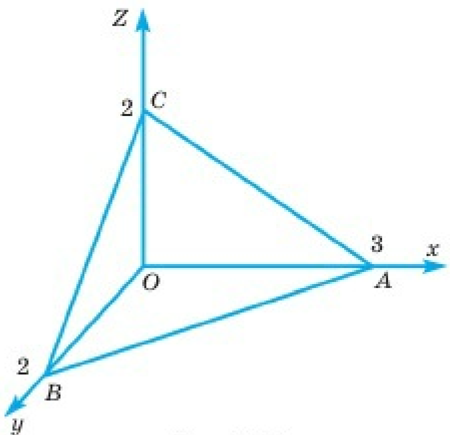


Рис. 3.22

$$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \\ z\geqslant 0, \\ 2x+3y+3z-6\leqslant 0. \end{cases}$$

Таким образом, если известны уравнения поверхностей, ограничивающих данное тело, то его можно задать системой неравенств. ■

1. Какие данные достаточно задать, чтобы определить плоскость?
2. Какой вектор называется вектором нормали плоскости?
3. Что такое начальная точка плоскости? Какой может быть эта точка?

4. Напишите уравнение плоскости, заданной вектором нормали. Напишите общее уравнение плоскости.
5. Что такое сфера? Запишите уравнение сферы?
6. Какое тело называется шаром? Каким неравенством он определяется?
7. Какое неравенства (строгое или нестрогое) определяет полупространства, если задано уравнение плоскости, ограничивающей эти полупространства?

Упражнения

A

3.93. Напишите уравнение плоскости по начальной точке M_0 и вектору нормали $\vec{n}$:

1) $M_0(1; 2; 3)$, $\vec{n} = (2; 1; 4)$;
2) $M_0(-2; 0; 2)$, $\vec{n} = (0; 3; -2)$;
3) $M_0(-3; 1; -2)$, $\vec{n} = (-2; 0; 3)$;
4) $M_0(1; 1; -1)$, $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

3.94. Найдите координаты нескольких точек, принадлежащих и не принадлежащих данной плоскости:

1) $2x - 3y + z - 2 = 0$;
2) $x - z + 5 = 0$;
3) $2y - 3z + 5 = 0$;
4) $x + 7 = 0$.

3.95. Какая из точек $A(2; -1; 3)$, $B(0; 1; 4)$, $C(-2; 2; 0)$, $D(1; 1; -1)$ принадлежит плоскости $3x - y + z - 1 = 0$?

3.96. Определите координаты вектора нормали плоскости, заданной в задаче 3.94.

3.97. Напишите уравнение сферы по координатам центра C и радиусу R:

1) $C(0; 0; 0)$, $R = 5$;
2) $C(1; -2; -3)$, $R = 9$;
3) $C(-2; 1; 4)$, $R = 3$;
4) $C(2; -2; 0)$, $R = 2$;

3.98. Напишите неравенство, определяющее шар, ограниченный сферой, заданной в 3.97.

3.99. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{AB}$:

1) $A(1; 2; -2)$, $B(3; 0; 4)$;
2) $A(0; 3; -4)$, $B(2; 5; 4)$.

B

3.100. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно вектору $\overline{OM}$:

1) $M(-1; 2; 0)$; 2) $M(3; -4; 0)$; 3) $M(0; 1; -2)$; 4) $M(2; -5; 3)$.

3.101. Напишите уравнения плоскостей, проходящих через точку $M(2; -3; 4)$ перпендикулярно каждой координатной оси.

3.102. В прямоугольной системе координат плоскость задана уравнением $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Покажите, что эта плоскость проходит через точки $A(a; 0; 0)$ $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$. Данное уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках*.

3.103. Для данных плоскостей напишите их уравнения в отрезках и постройте эти плоскости:

1) $2x + y + z - 4 = 0$; 2) $3x - 2y - z - 6 = 0$.

3.104. Напишите уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка MN перпендикулярно ему:

1) $M(1; -2; 2)$, $N(3; 0; 4)$; 2) $M(2; 5; 4)$, $N(0; 3; -4)$.

3.105. Напишите уравнение сферы, проходящей через точку M, с центром в точке C.

1) $M(4; 2; 2)$, $C(1; 2; -2)$; 2) $M(1; -2; 3)$, $C(-2; 1; 4)$.

3.106. Покажите, что данным уравнением определяется сфера, и найдите ее центр и радиус:

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z + 5 = 0$;
2) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 2z + 10 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 6y - 19 = 0$;
4) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$.

3.107. Задайте системой неравенств часть шара, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ и координатными плоскостями.

C

3.108. Даны точки $A(3; 4; -1)$ и $B(0; -2; 5)$. Напишите уравнение плоскости, перпендикулярной отрезку AB и делящей его в отношении 1:2.

3.109. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; -2; 5)$, $B(-3; 0; 0)$ и $C(0; 0; 1)$.

3.110. Напишите уравнение касательной плоскости к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ в точке $M(2; 3; 6)$.

3.111. Плоскость, проходящая через центр C сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y = 0$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OC}$, делит соответствующий шар на две части. Задайте каждую из частей системой неравенств и постройте их.

3.112. Напишите уравнение сферы, пересекающей плоскость Oxy по окружности $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 23 = 0$ и проходящей через точку $M(1; 5; 1)$.

3.5. Уравнение прямой в пространстве

Изучив материалы данной темы, вы будете:

- составлять каноническое уравнение прямой;
- уметь переходить от канонического вида уравнения прямой к параметрическому виду;
- составлять уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

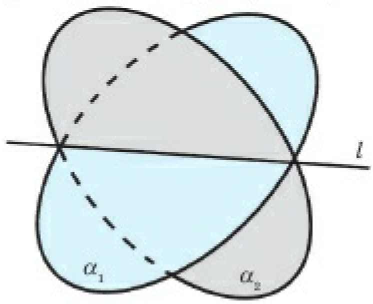


Рис. 3.23

В пространстве любую прямую l можно рассматривать как пересечение двух плоскостей α_1 и α_2 (рис. 3.23). Если $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ являются уравнениями этих плоскостей, тогда прямую l можно задавать следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Система уравнений (1) называется общим уравнением прямой l.

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\bar{p} = (m; n; k)$, т.е. $\bar{p}$ – ее направляющий вектор (рис. 3.24).

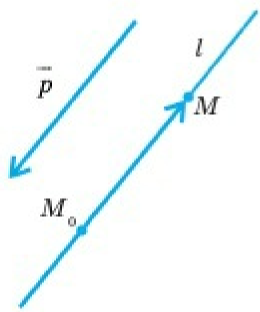


Рис. 3.24

Тогда для любой точки $M(x, y, z)$ прямой l векторы $\overline{p}$ и $\overline{M_0M}$ коллинеарны: $\overline{M_0M} = \overline{p}\,t$, где t – некоторое действительное число (параметр). Последнее уравнение в координатной форме записывается так:

$$\begin{cases} x - x_0 = mt, \\ y - y_0 = nt, \\ z - z_0 = kt \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + kt. \end{cases} \qquad (2)$$

Уравнения (2) называются ***параметрическими уравнениями прямой***. Отсюда

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = t, \\ \dfrac{y - y_0}{n} = t, \\ \dfrac{z - z_0}{k} = t. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}. \qquad (3)$$

Это уравнение является уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ с направляющим вектором $\overline{p} = (m; n; k)$.

Уравнение прямой в виде (3) называется ***каноническим уравнением прямой*** и является частным случаем общего уравнения прямой (1), так как допускает эквивалентную запись в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}, \\ \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{k}. \end{cases}$$

Каждое уравнение этой системы определяет некоторую плоскость в пространстве.

Пример. Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Напишем уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2.

▲ Так как вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ является направляющим вектором прямой M_1M_2, проходящей через точку M_1, то ее уравнение по формуле (3) записывается следующим образом:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (4)$$ ■

1. Как можно задать прямую в пространстве?
2. Напишите общее уравнение прямой.
3. Напишите параметрическое уравнение прямой.
4. Напишите каноническое уравнение прямой.
5. Как нужно понимать эти уравнения?
6. Напишите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Упражнения

А

3.113. Определите координаты трех точек, лежащих на прямой:

1) $\begin{cases} 5x - y + 4z + 3 = 0, \\ x + 2y - z - 2 = 0; \end{cases}$

2) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{5}$;

3) $\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 3 + t, \\ z = 5t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x - 3y + 2z = 0, \\ 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$

3.114. Напишите каноническое уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

1) $A(0;\ -3;\ -2)$, $B(2;\ -1;\ 1)$;
2) $A(-1;\ 1;\ 1)$, $B(1;\ 2;\ 3)$;
3) $A(1;\ 0;\ -1)$, $B(2;\ 1;\ 0)$;
4) $A(-2;\ -3;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 1)$.

3.115. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно вектору $\overline{p}$:

1) $A(3;\ -3;\ 1)$, $\overline{p} = (3;\ 1;\ -2)$;
2) $A(1;\ 3;\ -5)$, $\overline{p} = (6;\ 1;\ 3)$;
3) $A(1;\ 2;\ 6)$, $\overline{p} = (7;\ 2;\ -3)$;
4) $A(-3;\ 4;\ 4)$, $\overline{p} = (2;\ -1;\ 3)$.

3.116. Определите координаты точки, лежащей на прямой $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{5}$ и имеющей: 1) абсциссу, равную 3; 2) ординату, равную -2.

B

3.117. Через точку $A(3;\ -3;\ 1)$ проведена прямая, параллельная прямой

$$\begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0, \\ 2x - y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

Напишите уравнение этой прямой.

3.118. Дана пирамида $ABCD$ с вершинами в точках $A(2;\ -2;5)$, $B(0;\ 7;\ 2)$, $C(7;\ 0;\ 2)$, $D(1;\ 5;\ 0)$. Напишите: 1) каноническое уравнение каждого ребра пирамиды; 2) уравнение плоскости каждой грани; 3) канонические уравнения прямых, проходящих через точку A параллельно каждому ребру грани BCD.

3.119. Напишите каноническое уравнение прямой, содержащей медиану AA_1 треугольника ABC, вершины которого имеют координаты:

1) $A(-2;\ 3;\ 5)$, $B(4;\ -3;\ 0)$, $C(0;\ 6;\ -5)$;

2) $A(2;\ 0;\ 4)$, $B(3;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ -3;\ -1)$.

C

3.120. Докажите, что прямые

$$\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -1 + t, \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -4 + 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

являются скрещивающимися.

3.121. Докажите, что прямые

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

пересекаются. Найдите точку пересечения и напишите уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

3.6. Применение векторов при решении задач

Решение задач с применением векторов называют векторным методом. В предыдущих параграфах мы рассмотрели некоторые задания на применение векторов. Например, деление отрезка в данном отношении, нахождение угла между отрезками (векторами), при написании уравнения плоскости и т.п. Также часто применяется следующее утверждение.

Пример 1. Если E является точкой пересечения медиан треугольника ABC, то для любой точки O пространства (рис. 3.25) верно равенство

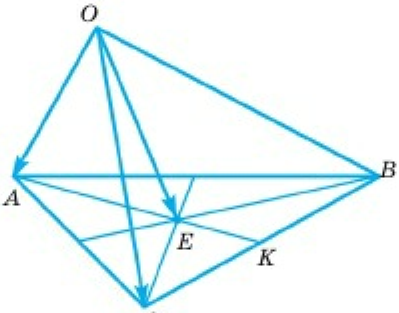


Рис. 3.25

$$3 \cdot \overline{OE} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$$

▲ Сначала покажем справедливость тождества

$$\overline{EA} + \overline{EB} + \overline{EC} = \overline{0}.$$

Действительно, из равенств $\overline{EB} + \overline{EC} = 2\,\overline{EK}$ и $\overline{EK} = -\frac{1}{2}\,\overline{EA}$ (рис. 3.26) имеем:

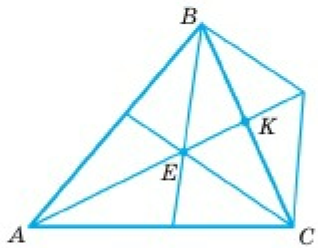


Рис. 3.26

$$\overline{EA} + \overline{EB} + \overline{EC} = -2\,\overline{EK} + 2\,\overline{EK} = 0.$$

По правилу треугольника для суммы векторов имеем:

$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OE} + \overline{EA}, \\ \overline{OB} = \overline{OE} + \overline{EB}, \\ \overline{OC} = \overline{OE} + \overline{EC}. \end{cases}$$

Сложив эти равенства почленно, получим:

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 3 \cdot \overline{OE} + \left(\overline{EA} + \overline{EB} + \overline{EC}\right) = 3 \cdot \overline{OE},$$

что и требовалось доказать. ■

Векторы часто применяются при решении математических и физических задач, т.к. многие геометрические и физические задачи векторным методом решаются проще. В силу того, что в формулировках подобных задач явно не указывается на возможность применения векторов, эти задачи кажутся сложными. В этом и заключается одна из «преград» для обнаружения возможности применения векторного метода. Поэтому процесс решения задач с применением векторов следует разделить на следующие три этапа.

I. Вводя векторы в удобной для нас форме, нужно переписать условие задачи с помощью векторов.

II. Преобразовывая данные в условиях задачи, получаем решение в векторной форме.

III. Ответы, полученные в векторной форме, нужно перевести на «исходный язык», на котором была сформулирована данная задача и записать ответ.

Для успешного применения данного правила при решении задач нужно помнить, что многие свойства фигур можно записать в виде векторного тождества. Например:

из равенства $\overline{AB} = \overline{AC}$ следует, что точки B и C совпадают;

из равенства $\overline{AB} = \alpha \cdot \overline{CD}$ следует, что прямые AB и CD параллельны или совпадают;

из равенства $\overline{AB} = \alpha \cdot \overline{AC}$ следует, что точки A, B и C лежат на одной прямой;

из равенства $\overline{OA} = \alpha \cdot \overline{OB} + \beta \cdot \overline{OC}$ следует, что точки O, A, B и C лежат на одной плоскости;

из равенства $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$ следует, что прямые AB и CD перпендикулярны между собой и т.п.

Принимая во внимание эти и другие соотношения, легко можно решить многие геометрические задачи.

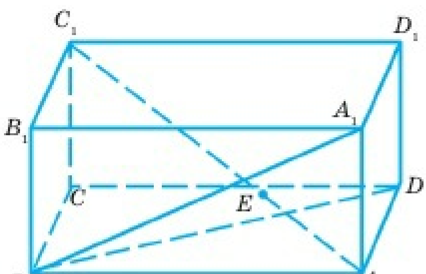


Рис. 3.27

Пример 2. Дан прямой параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка E – точка пересечения медиан треугольника A_1BD (рис. 3.27). Покажем, что точка E лежит на диагонали AC_1, и определим, в каком отношении эта точка делит эту диагональ.

▲ Т.к. E является точкой пересечения медиан треугольника A_1BD, то согласно примеру 1

$$\overline{AE} = \frac{1}{3}\left(\overline{AA_1} + \overline{AB} + \overline{AD}\right).$$

Т.к. $\overline{AB} = \overline{D_1C_1}$, $\overline{AD} = \overline{A_1D_1}$, то

$$\overline{AA_1} + \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AA_1} + \overline{D_1C_1} + \overline{A_1D_1} = \overline{AC_1}. \blacksquare$$

Следовательно, точки A, C_1 и E лежат на одной прямой. Поскольку $\overline{AC_1} = 3 \cdot \overline{AE}$, то $AE : EC_1 = 1 : 2$.

1. Как вы понимаете смысл термина «векторный метод решения задачи»?
2. Каково взаимное расположение точек A, B, C и D, если векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ компланарны?
3. Что можно сказать о векторах $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, если прямые AB и CD перпендикулярны?
4. Как определить косинус угла между прямыми AB и CD с помощью векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$?

Упражнения

А

3.122. Принадлежат ли данные точки одной прямой?

1) $A(1; -2; 3)$, $B(-2; -1; 4)$, $C(7; -4; 1)$;

2) $M(2; -3; 1)$, $N(-1; 1; 1)$, $P(0; -1; 3)$.

3.123. Найдите координаты точки C, если она является серединой отрезка AB.

1) $A(2; 1; -4)$, $B(-4; 5; 2)$;

1) $A(0; -2; 3)$, $B(4; 2; -3)$.

3.124. Найдите координаты четвертой вершины D параллелограмма $ABCD$:

1) $A(2; -3; 1)$, $B(-1; 1; 1)$, $C(-4; 5; 6)$;

2) $A(2; -3; 6)$, $B(1; -2; 3)$, $C(-4; 4; 6)$.

3.125. Определите углы треугольника ABC, если известны координаты вершин: $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$, $C(0; 0; 5)$.

3.126. Даны точки $A(2; 1; -4)$, $B(0; -3; 2)$ и $C(2; 13; 4)$. Покажите, что угол A треугольника ABC прямой.

В

3.127. Даны точки $A(3; 3; -2)$, $B(0; -3; 4)$, $C(-2; -1; 5)$. Покажите, что треугольник ABC – прямоугольный.

3.128. Даны последовательные вершины параллелограмма: $A(-3; -2; 0)$, $B(3; -3; 1)$, $C(5; 0; 2)$. Определите его четвертую вершину и угол между диагоналями.

3.129. Стороны параллелограмма с острым углом $60°$ равны 3 см и 4 см. Найдите длину его диагоналей.

3.130. Покажите, что точки $A(2; -1; -2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(2; 3; 0)$ и $D(5; 0; -6)$ лежат в одной плоскости.

3.131. Даны точки $A(0; 2; -1)$, $B(1; 0; 1)$ и $C(-1; 1; 2)$. Найдите координаты точки D, лежащей на оси Oz так, чтобы $AD \perp BC$.

3.132. Даны координаты трех нижних вершин $O(0;0;0)$, $A(2;-3;0)$, $C(3; 2; 0)$ и одной верхней вершины $B_1(3; 0; 4)$ параллелепипеда $OABC\ O_1A_1B_1C_1$. Найдите координаты его других вершин.

C

3.133. На ребре AB треугольной пирамиды $ABCD$ взята точка K. Покажите, что середины отрезков AD, BC, KD и KC лежат в одной плоскости.

3.134. Докажите, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и в точке пересечения делятся пополам.

3.135. В треугольной пирамиде $ABCD$ $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$. Докажите, что $AD \perp BC$.

3.136. Противоположные стороны неплоского (вершины не лежат на одной плоскости) шестиугольника $ABCDEF$ параллельны. Покажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке и в точке пересечения делятся пополам.

3.137. Медианы грани ABC пирамиды $ABCD$ пересекаются в точке E и $DA = 3$, $DB = 6$, $DC = 9$ и $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 60°$. Найдите DE.

3.138. Точка K расположена на расстоянии d от плоскости правильного треугольника ABC. Точка E является точкой пересечения медиан треугольника ABC и $AB = a$. Найдите значение суммы $KA^2 + KB^2 + KC^2$.

ОТВЕТЫ

Раздел 0

0.1. 15 см. **0.2.** 60° и 120°. **0.5.** 6 см. **0.6.** 1) $c = 5$ м, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\beta = 90° - \alpha$. 3) $a = 6$ см, $\beta = 60°$, $b = 6\sqrt{3}$ см. **0.7.** 2) а) 12 см²; б) 6 см². **0.8.** $18\sqrt{3}$ см². **0.9.** $\overline{AE} = \vec{a} + 0{,}5\vec{b}$, $\overline{AN} = 0{,}5\vec{a} + \vec{b}$. **0.10.** 3) 6. **0.11.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ м². **0.12.** 4 см. **0.14.** 12πм. **0.15.** $\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $180° - \frac{\alpha+\beta}{2}$. **0.16.** 6 см и 18 см. **0.17.** 120°. **0.18.** 35 см. **0.22.** $a = 30$ см, $b = 24$ см. **0.23.** $9\sqrt{3}$ см². **0.24.** 60°. **0.25.** $\overline{AE} = \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$, $\overline{ED} = \frac{4}{5}\vec{b} - \vec{a}$. **0.27.** $\sqrt{a^2 + b^2}$. **0.28.** $\frac{120}{\pi}$ см. **0.31.** $S_{ABD} = S_{ACD} \Rightarrow S_{ABD} - S_{AOD} = S_{ACD} - S_{AOD} \Rightarrow S_{ABO} = S_{COD}$, точка O – точка пересечения диагоналей. **0.33.** $a = \frac{c}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{3}c$. **0.35.** $S = \frac{ha^2}{4\sqrt{a^2 - h^2}}$. **0.36.** $5x - 3y + 16 = 0$, $6x - y + 10 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$. **0.38.** $2\sqrt{Rr}$. **0.40.** $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Раздел 1

П.1.1. **1.3.** 4) $a = \alpha \cap \beta$; 7) $B = l \cap \beta$; 8) $\alpha = (ABC)$. **1.10.** Пусть $a \cap b = A$, $a \cap c = B$, $b \cap c = C$, тогда через точки A, B и C проходит единственная плоскость α, в которой и лежат прямые a, b и c. **1.22.** Не обязательно, например, может быть $a \parallel c$.

П.1.2, 1.3. **1.29.** 4 см. **1.30.** 1) 4 см; 2) 3 м; 3) $\frac{a+b}{2}$. **1.36.** $BC = 10{,}5$ см, $AD = 7$ см. **1.39.** 1) 6 см; 2) 4 см. **1.41.** $E \in AC$ и $AE : EC = 2 : 3$. **1.44.** $a \parallel b$, $c \cap a = A$, $c \cap b = B \Rightarrow$ через прямые a и b проходит только одна плоскость $\alpha \Rightarrow A \in \alpha$, $B \in \alpha \Rightarrow c = AB \subset \alpha$. **1.46.** $P_{EFK} = 9$ см.

П.1.4. **1.53.** 1) 9 см; 2) 6 см. **1.54.** 2) 20 см. **1.63.** 1) 8 см; 2) 9 см. **1.64.** Нет. **1.65.** Нет.

Раздел 2

П.2.1. **2.2.** Бесконечно много. **2.3.** 60°. **2.5.** 1) $AB = AC = 5$ см, $BC = 3\sqrt{2}$ см; 2) $AB = 13$ см, $AC = \sqrt{281}$ см, $BC = 20$ см. **2.6.** 15 м.

2.8. $a \perp BC$. **2.13.** $\cos A = \cos B = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\cos B = \frac{7}{16}$. **2.18.** 1) 13 см; 2) $(2\sqrt{2}+1)a$. **2.21.** 1) $90°, 90°, 45°, 135°$; 2) 52 см. **2.22.** $\frac{2p}{3}(2\sqrt{2}+1)$. **2.26.** $\frac{\sqrt{769}}{5}$ см.

П.2.2. **2.31.** 1) 8 см; 2) $A_1B = 8\sqrt{2}$ см и $A_1B = 8\sqrt{3}$ см; 3) $4\sqrt{6}$ см. **2.32.** 2 см. **2.33.** 5 см. **2.34.** 1) 3 см; 2) 5 см; 3) 5,3 м; 4) $\frac{a+b}{2}$. **2.35.** 1) 3 см; 2) 5 м; $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ м; 3) 5 м. **2.36.** 8 см. **2.38.** 2) $\sqrt{21}$ см. **2.39.** 4 см, 5 см, $\sqrt{20{,}5}$ см. **2.40.** 1) 3 см; 2) 2 см. **2.41.** $\sqrt{\frac{11}{3}}$. **2.42.** Конус. **2.43.** $m:n$. **2.46.** $\frac{4}{5}\sqrt{34}$ см. **2.47.** $\sqrt{20{,}5}$ м. **2.48.** 1) $3\sqrt{3}$ см; 2) $3\sqrt{2}$ см; 3) 3 см. **2.49.** 58,5 см. **2.50.** 3 см, 9 см. **2.51.** $a\sqrt{3}$. **2.53.** $5\sqrt{5} \approx 11{,}2$ м. **2.54.** 35 м. **2.55.** 3 m. **2.56.** 8 см. **2.57.** $\frac{1}{4}\sqrt{238}$ см. **2.58.** 53,35 м. **2.59.** 3 см и 5 см.

П.2.3. **2.62.** 1) 5 см; 2) $5\sqrt{2}$ см; 3) $5\sqrt{3}$ см. **2.64.** 1) 10 см; 2) 6 см; 3) 4 см. **2.66.** а) 1) 24 см; 2) 4 см; б) 1) 8 см; 2) 10 дм; в) 1) 60°; 2) 45°. **2.67.** 1) $4\sqrt{2}$ см; 2) $\sin\varphi = \frac{1}{3}$. **2.68.** 60 см. **2.69.** 4 см. **2.72.** $4\sqrt{6}$ см. **2.73.** $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. **2.74.** 5 см. **2.76.** 30°. **2.77.** 60°. **2.78.** $6\sqrt{6}$ см. **2.80.** $10\sqrt{3}$ см. **2.81.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2-2bc\cdot\cos\varphi}$. **2.84.** 90°. **2.87.** $\cos(\angle(a;\,c)) = \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}$. **2.88.** $\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$.

П.2.4. **2.96.** 1) 13,5 см²; 2) $4{,}5\sqrt{6}$ см²; 3) $4{,}5\sqrt{3}$ см². **2.97.** 1) 18 см²; 2) $9\sqrt{6}$ см²; 3) $18\sqrt{3}$ см². **2.99.** 1) 13 м; 2) 2 см; 3) $\sqrt{170}$ см; 4) 13 дм.

2.100. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см². **2.105.** 4 см, 6 см, 8 см. **2.106.** $\sqrt{1,5}\cdot a$. **2.108.** $\sqrt{\frac{2ab\sqrt{6}}{3}}$. **2.109.** $\sqrt{\frac{2b^2-a^2}{2}}$. **2.110.** $2b\sin\frac{\varphi}{2}$. **2.112.** 1) 32 см²; 2) 32 $\sqrt{2}$ см². **2.115.** $\frac{3ah}{8}$.

Раздел 3

П.3.1. **3.1.** $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=-\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$ **3.3.** 1) $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AC_1}$. **3.4.** $|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{RT}|=$ 4 см, $|\overrightarrow{PT}|=|\overrightarrow{QR}|=$ 3 см. **3.5.** 2) $-\frac{1}{2}\vec{e}$; 4) $0,6\vec{e}$. **3.7.** 1) $4\sqrt{2}$ см. 3) $4\sqrt{2}$ см. **3.12.** 2) $\overrightarrow{DB}$; 4) $\overrightarrow{CA_1}$; 8) $\overrightarrow{C_1C}$. **3.13.** $\overrightarrow{EC}=2\vec{b}-\vec{a}$. **3.16.** 1) $\overrightarrow{AD}$. **3.17.** 1) ±1; 2) $|k|>1$; 3) $|k|<1$. **3.18.** 1) 2,5; 2) −0,5. **3.20.** $\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\frac{4}{3}\vec{a}$. **3.22.** $2\sqrt{3}\,a$. **3.28.** Параллелограмм, построенный на векторах $|\vec{m}|\,\vec{n}$ и $|\vec{n}|\,\vec{m}$, является ромбом, т.е. $\left||\vec{m}|\cdot\vec{n}\right|=|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|=\left||\vec{n}|\cdot\vec{m}\right|$. Поэтому вектор $|\vec{m}|\cdot\vec{n}+|\vec{n}|\cdot\vec{m}$ коллинеарен биссектрисе угла $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})$.

П.3.2. **3.34.** 3) $\vec{c}=(-3;\ 0;\ 3)$; 4) $\vec{d}=(0;\ 1;\ 0)$. **3.36.** 7) (2; −1; 4); 8) (4; −3; −2). **3.37.** $|\vec{a}|=\sqrt{29}$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $|\vec{c}|=\sqrt{13}$, $|\vec{d}|=3$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=2$. **3.38.** $\overrightarrow{AC}=(1;\ -1;\ 1)$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$. **3.41.** 3) $\sqrt{14}$; 4) $\sqrt{185}$. **3.42.** 2) (−1; −3; −3); 4) (9; −12; 10). **3.45.** $C(5;\ 4;\ 4)$, $B_1(3;\ 6;\ 3)$, $C_1(7;\ 7;\ 3)$, $D_1(8;\ 3;\ 0)$. **3.46.** $D(8;\ -18;\ -24)$. **3.47.** 2) $D(-1;\ 2;\ 1)$. **3.49.** $m=8$, $n=1,5$. **3.50.** $x=2$, $y=6$. **3.52.** $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$. **3.55.** $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$. **3.56.** 1) $x=\pm3$; 2) $x=\pm\sqrt{51}$. **3.57.** $n=\pm3$; **3.58.** $x=2$, $y=4$. **3.60.** $AH=\sqrt{6}$. **3.62.** 2) $\vec{d}=\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **3.63.** $k=8,5$ или $k=-2\pm2\sqrt{7}$. **3.65.** 1) $O'(1;\ -2;\ 3)$; 2) $A'(2;\ 4;\ 6)$; 3) $B'(-1;\ 2;\ 2)$.

П.3.3. **3.67.** 1) 3; 3) 4,5. **3.68.** 2) 0; 4) $27-\sqrt{2}$. **3.70.** 1) 9; 3) 8. **3.71.** 2) $\frac{13\sqrt{238}}{238}$; 4) $\frac{5\sqrt{6}}{14}$. **3.72.** 1) (1; 3; 0,5); 3) (0; 2; 2).

3.73. 2) $\left(\frac{14}{5};-\frac{1}{5};\frac{6}{5}\right)$; 4) $\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **3.74.** 1) $\varphi=135°$; 2) $\varphi=30°$. **3.75.** 1) 3; 2) $\frac{3\sqrt{14}}{14}$. **3.76.** 1) $\cos(\angle B)=\frac{\sqrt{14}}{14}$; 2) 0; 3) $\frac{\sqrt{14}}{2}$. **3.77.** −2,5. **3.78.** $\sqrt{133}$ и 7. **3.80.** 1) 3; 2) 0,5. **3.82.** 1) $\frac{4}{9}$; 3) $\sqrt{15,25}$. **3.84.** 26. **3.85.** $m=-0,8$. **3.86.** $-1,5a^2$. **3.87.** 1) $\left(1;2;\frac{2}{3}\right)$; 2) $\left(2;\frac{11}{3};\frac{8}{3}\right)$.

3.90. $x_k=\frac{(n-k)x_1+kx_2}{n}$, $y_k=\frac{(n-k)y_1+ky_2}{n}$, $z_k=\frac{(n-k)z_1+kz_2}{n}$.

П.3.4. **3.93.** 2) $3y-2z+4=0$; 3) $2x-3z=0$. **3.95.** D. **3.96.** 1) $\vec{n}=(2;-3;1)$; 4) $\vec{n}=(1;0;0)$. **3.97.** 4) $(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=4$. **3.98.** 2) $(x-2)^2+(y+2)^2+(z+3)^2\leqslant 81$. **3.99.** 1) $2x-2y+3z+8=0$. **3.100.** 2) $3x-47y-25=0$; 4) $2x-5y+3z-38=0$. **3.101.** $x=2, y=-3, z=4$. **3.103.** 1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$. **3.104.** 2) $x+y+4z-5=0$. **3.105.** 1) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$. **3.106.** 1) $C(1;-2;-4)$, $R=4$; 4) $C(0;0;0)$, $R=a$. **3.107.** $x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0, x^2+y^2+z^2\leqslant 4z$. **3.108.** $2x+3y-3z=0$. **3.109.** $2x+11y-6z+6=0$. **3.110.** $2x+3y+6z=49$. **3.111.** $(x-3)^2+(y-4)^2+z^2\leqslant 25, 3x+4y\geqslant 25$ и $(x-3)^2+(y-4)^2+z^2\leqslant 25, 3x+4y\leqslant 0$. **3.112.** $(x-1)^2+(y-5)^2+(z+1)^2=4$.

П.3.5. **3.114.** 2) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$; 4) $\frac{x+2}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z}{1}$.

3.115. 1) $\frac{x-3}{3}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{-2}$; 3) $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-6}{-3}$.

3.116. 1) $M(3;-1;1)$; 2) $M\left(\frac{7}{3};-2;-\frac{2}{3}\right)$. **3.117.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-1}{-5}$.

3.119. 1) Уравнение медианы AA_1 имеет вид $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{-1,5}=\frac{z-5}{-7,5}$.

П.3.6. **3.122.** 1) $\overrightarrow{AB}=(-3;1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(6;-2;-2)\Rightarrow\overrightarrow{AC}=-2\cdot\overrightarrow{AB}\Rightarrow$ три точки лежат на одной прямой. **3.123.** 2) $C(2;0;0)$. **3.124.** 1) $D(-1;1;6)$. **3.125.** $\angle A=90°, \angle B=\angle C=45°$. **3.128.** $D(-1;1;1)$, $\cos\varphi=\frac{5\sqrt{19}}{38}$.

3.129. $\sqrt{37}$, $\sqrt{13}$. **3.130.** Покажите выполнимость равенства $\overrightarrow{AD}=-3-\overrightarrow{AB}+2,5-\overrightarrow{AC}$. **3.132.** $D(0;0;1)$. **3.137.** 5.

Содержание

Учебное издание

Шыныбеков Абдухали Насырулы
Шыныбеков Данияр Абдухалиулы
Жумабаев Ринат Нурланович

Геометрия

Учебник для 10 класса общеобразовательной школы
естественно-математического направления

Зав. редакцией *Н. Жиенгалиев*
Редактор *А. Изтлеуова*
Художественный редактор *В. Пак*
Технический редактор *О. Рысалиева*
Корректор *Ю. Гюльогглу*
Компьютерная верстка *А. Куватовой*

ИБ №035

Сдано в набор 25.02.2019. Подписано в печать 08.07.2019.
Формат 60х90$^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Школьная».
Усл. печ.л. 7. Учет.-изд. л. 6,48. Тираж 13 000 экз. Заказ № 4417.

ТОО «Корпорация «Атамұра», 050000, г. Алматы, пр. Абылай хана, 75.

Полиграфкомбинат ТОО «Корпорация «Атамұра», Республика Казахстан, 050002,
г. Алматы, ул. М. Макатаева, 41.