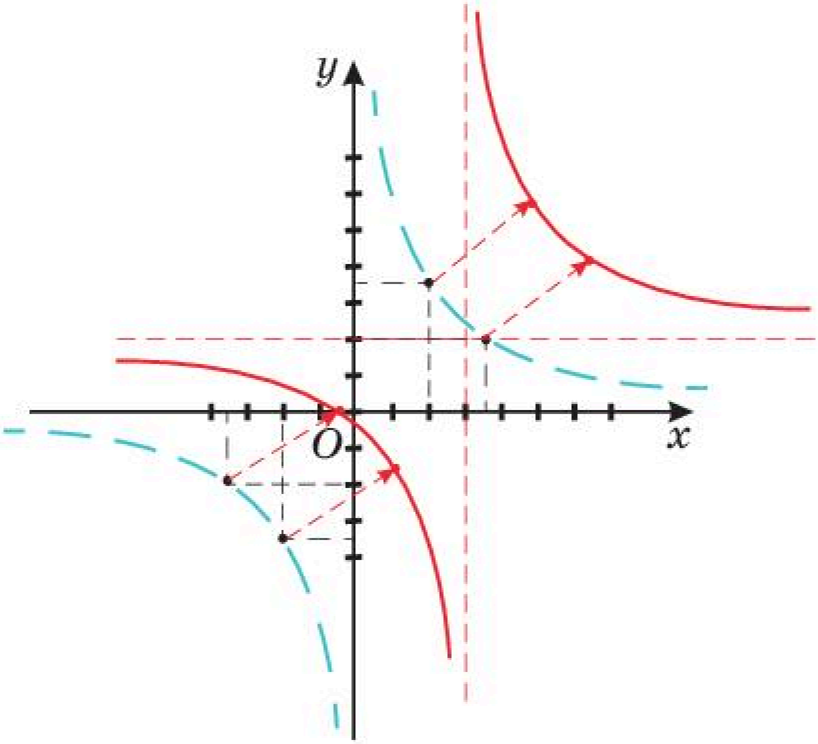


АЛГЕБРА

және анализ бастамалары

1-бөлім

Қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы жалпы білім беретін мектептің 10-сынып оқушыларына арналған оқулық

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі ұсынған

О. В. Пак
Д. Ардақұлы
Е. В. Ескендирова

АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ
2019

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72
П 13

Оқулықпен қалай жұмыс істеу керек?

Бұл оқулық сыныпта жұмыс істеу және материалды өз бетінше зерттеу үшін жасалған. Оқулықтың теориялық материалдары мысалдар мен жаттығулардан тұрады. Мысалдардың шешімін бірінші оқылымда бірден қарастыруға болады. Жаттығулар өздігімен шешуге арналған. Жаттығулардың мақсаты – оқушыларды жаңа тақырыпты неғұрлым тиімді қабылдауға дайындау және олардың алған дағдыларын бекіту. Алдымен өз күшіңмен жаттығуларды шешуге тырысып көргеннен соң мәтіннің төменгі жағындағы шешімдеріне қарау керек. Негізгі мәтінді түсіндіретін авторлық ескертулер курсивпен берілген.

Дағдыларды бекітуге арналған есептер әрбір теориялық бөлімнің соңында орналасады және екі бөлікке бөлінеді. 1-бөлім сыныпта жұмыс істеуге арналған. 2-бөлім 1-бөлімнің идеялық мазмұнына ұқсас жаттығулардан тұрады және үй тапсырмасына арналған. Бұдан басқа, 2-бөлімде сыни және логикалық ойлауды дамыту (күлгін түспен бөлінген), функционалдық сауаттылықты дамыту бойынша тапсырмалар (сары) және қайталауға арналған мысалдар бар (жасыл). Оқулықтағы барлық тапсырмалар 1-ден 6-ға дейінгі қиындық деңгейіне қарай жіктеледі. Қиындық деңгейі тапсырма нөмірінен кейін бірден жақшада беріледі.

Пак О. В.
П 13 **Алгебра және анализ бастамалары:** Қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы жалпы білім беретін мектептің 10-сынып оқушыларына арналған оқулық. 1-бөлім. / О. В. Пак, Д. Ардақұлы, Е. В. Ескендирова, – Алматы: АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ, 2019. – 240 бет; суретті.

ISBN 978-601-01-3806-3 (жалпы)
1-бөлім – 240 бет
ISBN 978-601-01-3808-7

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72

ISBN 978-601-01-3808-7 (1-бөлім)
ISBN 978-601-01-3806-3 (жалпы)

ҚҰРМЕТТІ ОҚУШЫЛАР!

Ағылшынның ұлы ойшылы және математигі Бертран Рассел: «Математика тек шындықтан ғана құралмайды, сонымен қатар айрықша сұлулыққа – ұлы өнер туындыларына ғана тән шыңдалған әрі айқын, шынайы мүлтіксіз әрі асқақ таза сұлулыққа да ие», – деген екен.

Қазір қолдарыңа ұстап отырған оқулықпен бірге сендер ежелгі және ұлы ғылымды түсінуге тағы бір қадам жасайсыңдар. Бұл жаңа курс «Алгебра және анализ бастамалары» деп аталады. Онда функция түсінігі және оның қасиеттері, функция туындысы, сонымен қатар ықтималдықтар теориясының кейбір мәселелері де жан-жақты қарастырылады. Біз сендермен бірге қоршаған өмірді функцияның қалай сипаттайтынын білетін боламыз.

Математика не үшін қажет? Біз пайдаланатын тұрмыстық техника, қуатты агрегаттар, біз тұратын үйлер, аспанда қалықтаған ұшақтар, теңіздегі кемелер, қолыңдағы ұялы телефон, сенің анаң пісіретін тоқаш – адам қолымен жасалатын құралдардың бір де бірі математикалық есептеулерсіз жүзеге аспайды. Қазіргі заманғы ғылымның барлығы өздерінің теориялық және тәжірибелік зерттеу жұмыстарында математиканы қолданады.

Математика не үшін қажет? Мектеп немесе жоғары оқу орнын бітіргеннен кейін көпшілігіңе, мысалы тригонометриялық өрнектерді ықшамдау қажет болмай қалады. Бірақ ойлау, пайымдау, деректерді бір-бірімен салыстыра білу және шынымен де пайдалы болатын логикалық қорытынды жасау сияқты тіршілікте қажетті қасиеттердің тәжірибелік маңызының зор екенін жоққа шығара алмайсың. Ұғымталдық, тапқырлық, өнертапқыштық кез келген мәселелерді жеңіп шығуға және табысты жеке тұлға болуға көмектеседі. Басқа адамдарды түсіне білу, өз ойыңды дұрыс жеткізе білу адамдардың бір-бірімен тиімді қарым-қатынас жасауы үшін қажет. Математикамен айналысу ғана адамның осындай жақсы қасиеттерін дамытады.

Сонымен қатар, өмірде қандай мамандықты таңдасаң да, бәрібір сандарды қолдануға тура келеді. Ал, біз сендердің араларыңнан математикамен кәсіби түрде айналысатын мамандар шығады деп үміттенеміз.

Оқулық үнемі үйренуге, білуге ұмтылатын оқушыларға арналған. Әр параграфтың теориялық бөлімі мысалдардан ғана емес, сонымен бірге жаттығулардан тұрады. Жаттығуларды өз бетімен орындау жаңа материалды терең түсіну үшін қажет.

Жұмыстарыңа сәттілік тілейміз!

Құрметпен, авторлар.

МАЗМҰНЫ

3-ТАРАУ
ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ТЕҢСІЗДІКТЕР

4-ТАРАУ
ЫҚТИМАЛДЫҚ

ҚАЙТАЛАУ

«Математиканы білмей, өзге ғылымдарды да, әлемдегі болып жатқан жағдайларды да білу мүмкін емес. Одан хабары жоқ адамдардың, өздерінің білімсіздіктерін байқамауы тіптен жаман, өйткені олар одан құтылудың жолын да іздемейді. Кейде, осыған керісінше, математика ғылымын түйсіну өзіңді іштей дайындап, санаңды жақсы білім алуға жетелейді. Олай болса, егер кімде-кім математикаға қатысты даналықтың бастауын танып білсе және оны басқа ғылымдар мен оқиғаларды, істерді тануда дұрыс қолданса, онда ол еш қатесіз және күмәнсіз, оңай әрі өз шамасына қарай басқа ғылымдарды зерттеп, танып біле алады».

Роджер Бэкон

1 топтама

1. Түрлендіруді орындаңдар: $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$.

2. Бөлшек-рационал теңдеулерді шешіңдер: $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{10}{3}$.

3. Сызықтық теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} 3x+5y=8, \\ -3x+y=-2. \end{cases}$

4. Өрнекті ықшамдаңдар: $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(\pi+\alpha)\cdot\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{tg}(2\pi-\alpha)}$.

5. Функцияның графигін салыңдар: $y=x^2+4x-20$.

6. Теңсіздікті шешіңдер: $x^3-25x\le 0$.

7. Теңдеуді шешіңдер: $x^2+\frac{16}{x^2}-5x+\frac{20}{x}=2$.

8. Айдар банк депозитіне ақша салды. Егер салымшы бір жыл көлемінде депозиттен ақша алмайтын болса, банк өзінің салымшыларына жылына 10%-дық өсім қосады. Төрт жыл бойы Айдар алғашқы салынған сомаға қосымша ақша салмады және ешқандай ақша алмады. Оның депозиті төрт жылда k есе өсті. Осы k санына жақын санды табыңдар:

A) $1{,}4641$; B) $1{,}331$; C) $0{,}14641$; D) $4{,}4$.

2 топтама

1. Амалдарды орындаңдар: $\left(\dfrac{b}{a^2-ab}-\dfrac{1}{a-b}\right):\left(\dfrac{a+b}{a^2-ab}-\dfrac{b}{ab-b^2}\right)$.

2. Теңдеуді шешіңдер: $x^6-9x^3+8=0$.

3. Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7. \end{cases}$

4. Функцияның анықталу облысын табыңдар: $y=\sqrt{x^2-x-72}$.

5. Функцияның графигін салыңдар: $y=2x^3-5$.

6. Бөлшек-рационал теңсіздікті интервалдар әдісімен шешіңдер:
$\dfrac{x^2-7x+12}{2x^2+4x+5}>0$.

7. Егер $\sin(\alpha+\beta)=9\sin(\alpha-\beta)$ екені белгілі болса, $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}$-ны ықшамдаңдар.

8. Электр энергиясының құны 25%-ға өсті. Бұрынғы төлейтін соманы төлеу үшін, электр энергиясын пайдалануды қанша пайызға қысқарту керек?

3 топтама

1. Иррационал теңдеуді шешіңдер: $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+1}$.

2. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} 6x^2-29x+30\le 0, \\ 5x+2>3x^2. \end{cases}$

3. Арифметикалық прогрессия берілген: $\begin{cases} S_2-S_4+a_2=14, \\ S_3+a_3=17. \end{cases}$
a_1, d-ны табыңдар.

4. Геометриялық прогрессияның бесінші мүшесін табыңдар, егер:
$\begin{cases} b_3+b_4=36, \\ b_2+b_3=18. \end{cases}$

5. Жүк пойызы жолда 6 минутқа тоқтады да, өзінің кешігуін 36 км-лік жол аралығында жойды. Ол үшін бастапқы жылдамдықтан 4 км/сағ артық жылдамдықпен жүрді. Пойыздың алғашқы жылдамдығын табыңдар.

6. Есептеңдер: $\frac{3}{7}+1+\frac{9}{49}+\frac{1}{3}+\frac{27}{343}+\frac{1}{9}+\ldots$.

7. Егер $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{3}$ екені белгілі болса, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$-ны есептеңдер.

8. Данияр «K» фирмасына жұмысқа тұрды, фирма алғашқы айда 1000 шартты бірлік төлеуге және әрбір келесі айларда жалақысын 50 шартты бірлікке арттырып отыруға уәде береді. Бірінші жылы Данияр қанша (шартты бірлік) ақша табады?

4 топтама

1. Сызықтық теңсіздіктер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases}3x-15<18,\\4x-10>5.\end{cases}$

2. Функцияның анықталу облысын табыңдар: $y=\frac{1}{|x|-3}$.

3. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер: $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

4. Моторлы қайық өзен ағысымен 3 сағ және кері қайту үшін өзен ағысына қарсы 4,5 сағ жүзеді. Қайықтың суға қатысты меншікті жылдамдығы 25 км/сағ болса, өзен ағысының жылдамдығы неге тең?

5. $3x^2+8x-1=0$ теңдеуінің түбірлерін анықтамай-ақ, төмендегі өрнектердің мәндерін табыңдар:

а) $x_1^2+x_2^2$; ә) $x_1x_2^3+x_1^3x_2$; б) $\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}$.

6. Үш сан геометриялық прогрессия құрайды. Олардың көбейтіндісі 64-ке тең, ал олардың арифметикалық ортасы $\frac{14}{3}$ санына тең. Осы сандарды табыңдар.

7. Есептеңдер: $\sin 70^0\cdot\sin 50^0\cdot\sin 10^0$.

8. Егер координаталық жазықтықта бір қозғалғанда (1;0) векторына немесе (0;1) векторына ғана орын ауыстыруға болса, онда (0;0) нүктесінен (5;2) нүктесіне қанша тәсілмен жетуге болады?

5 топтама

1. Бөлшек-рационал теңсіздікті шешіңдер: $\frac{x-2}{(x+2)(x-5)}\geq 0$.

2. Функцияның анықталу облысын табыңдар: $y=\frac{x+7}{\sqrt{5x^2-x-4}}$.

3. Теңдеуді шешіңдер: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

4. Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} 3x^2+2xy-2y^2=3, \\ 2x^2+3xy-y^2=4. \end{cases}$

5. Егер $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=3$ болса, $\sin\alpha+\cos\alpha$ -ны есептеңдер.

6. Ағаш отырғызуға студенттердің екі бригадасы қатысты. Бірінші бригада екінші бригадаға қарағанда күніне 40 ағаштан артық отырғызып, барлығы 270 ағаш отырғызды. Екінші бригада бірінші бригададан 2 күн артық жұмыс істеп, барлығы 250 ағаш отырғызды. Әр бригада қанша күннен жұмыс істеді?

7. Есептеңдер: $\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\ldots}}}}}$.

8. Мектепте би кешін ұйымдастыру үшін ескі глобусты безендіруге бірдей 1000 кішкентай айна сынықтарын жабыстырды. Егер глобустың диаметрі 2 есе үлкен болса, осындай қанша айна сынықтары (жуықтап алғанда) қажет болар еді?

Жауаптары:

1-топтама

1. $\dfrac{13-\sqrt{5}}{2}$. **2.** ± 6. **3.** $(1;1)$. **4.** $\cos^2\alpha$. **6.** $(-\infty;-5]\cup[0;5]$. **7.** $-1;4;1\pm\sqrt{5}$. **8.** A.

2-топтама

1. $\dfrac{b-a}{b}$. **2.** $x\in\{1;2\}$. **3.** $(-1;-2),(2;1)$. **4.** $(-\infty;-8]\cup[9;+\infty)$.
6. $(-\infty;3)\cup(4;+\infty)$. **7.** $\dfrac{4}{5}$. **8.** 20%.

3-топтама

1. 2. **2.** $[1,5;2)$. **3.** $-\dfrac{32}{3};\dfrac{37}{3}$. **4.** 48. **5.** 36 км/сағ. **6.** 2,25. **7.** $\sqrt{3}$. **8.** 15300 ш.б.

4-топтама

1. $(3,75;11)$. **2.** $x\neq\pm 3$. **4.** 5 км/сағ. **5.** а) $7\dfrac{7}{9}$; ә) $-2\dfrac{16}{27}$; б) $-194\dfrac{2}{3}$. **6.** 2;4;8 н/е 8;4;2.
7. $\dfrac{1}{8}$. **8.** 21.

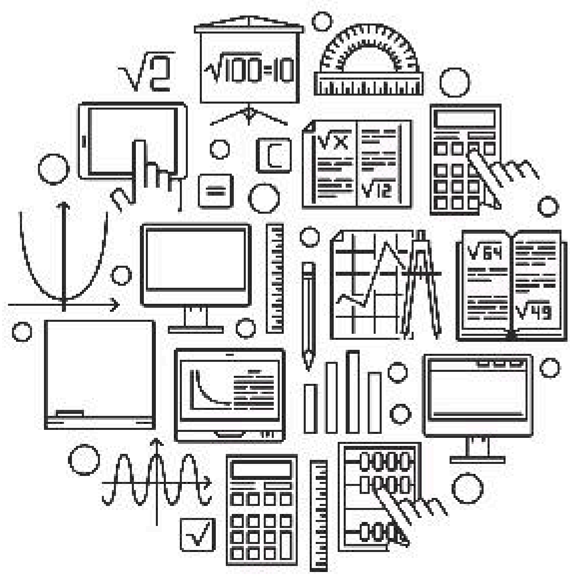
5-топтама

1. $x\in(-2;2]\cup(5;+\infty)$. **2.** $x\in\left(-\infty;-\dfrac{4}{5}\right)\cup(1;+\infty)$. **3.** -6; 1. **4.** $(\pm 1;\pm 1)$. **5.** $-\dfrac{1}{5}$.

6. 3 және 5 күн. **7.** 7. **8.** 4000.

1-ТАРАУ

ФУНКЦИЯ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ МЕН ГРАФИГІ



§1 ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫҢ БЕРІЛУ ТӘСІЛДЕРІ

«Математика – адамзаттың әлемді барлық мүмкін болатын тәсілдермен зерттеуді ұсынған ғылымы».
Иммануил Кант

1 жаттығу

Қоршаған ортаның температурасы тәуліктегі уақытқа тәуелді, екі дененің арасындағы гравитациялық тартылыс күші олардың арақашықтығына тәуелді, сендердің тоқсандық қорытынды бағаларың компьютер алдында қанша сағат отырғандарыңа байланысты (қалай?). Осы сияқты өзара тәуелділікті анықтайтын (физика, химия немесе ғылымның басқа бөлімдерінен, өмірде кездесетін жағдайлардан) бірнеше мысал келтіріңдер. Бір шаманың екіншісінен тәуелді болу себебін түсіндіріп көріңдер. Сонымен қатар басқа жағдайларға да болжам жасап көруге тырысыңдар. Мысалы, егер екі нүктелік массаның ара қашықтығын 2 есе арттырса, онда олардың арасындағы гравитациялық тартылыс күші қанша есе кемиді?

1-АНЫҚТАМА.

D жиыны – қандай да бір бос емес сандар жиыны болсын. D жиынында анықталған f функциясы деп, D жиынындағы кез келген x-ке y-тің жалғыз ғана мәнін сәйкестендіретін ережені айтады, y-тің бұл мәні f функциясының x нүктесіндегі мәні деп аталады және $\boldsymbol{f(x)}$ деп белгіленеді.

y санын, сондай-ақ x элементінің бейнесі деп атайды және $y=f(x)$ түрінде жазады. Айнымалы x шамасы f **функциясының аргументі** немесе f функциясының **тәуелсіз айнымалысы** деп аталады.

2-АНЫҚТАМА.

1-анықтамадағы D жиыны f функциясының анықталу облысы деп аталады және $\boldsymbol{D(f)}$ деп белгіленеді.

3-АНЫҚТАМА.

$D(f)$ анықталу облысынан алынған барлық элементтер бейнесінің жиыны f функциясының мәндер жиыны деп аталады және $\boldsymbol{E(f)}$ деп белгіленеді.

Функцияны анықтауда төмендегі бірнеше кезең маңызды болып табылады:

- D жиынынан алынған **әрбір** x элементіне қандай да бір y саны сәйкес қойылады ;
- D жиынынан алынған **әрбір** x элементіне y-тің тек бір ғана мәні сәйкес қойылады;
- x айнымалысы $D(f)$-тен алынған барлық мәндерді «қабылдағанда», $f(x)$-тің соған сәйкес қабылайтын мәндері $E(f)$ – мәндер жиыны болып табылады;
- $E(f)$ – бұл f функциясы тең болуы мүмкін барлық сандар жиыны;
- $E(f)$ мәндер жиыны, ол $f(x)=y$ болатын ең болмағанда бір $x \in D(f)$ саны табылатындай y сандарынан тұрады.

2 жаттығу

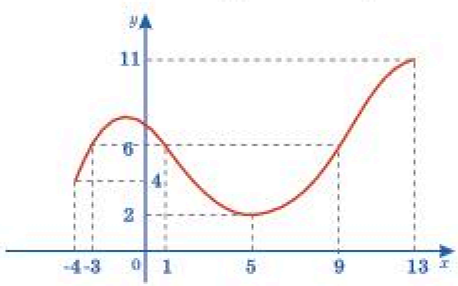
Кестенің бірінші жолына 10 «А» сынып оқушыларының сынып журналындағы тізімге сәйкес нөмірлері қойылған, екінші жолына – «Функция» тақырыбы бойынша жазған бақылау жұмыстарының бағалары қойылған.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
4	3	5	2	5	4	3	4	3	5	4	5	4	5	2	5	4	5	4	2	5	4	3

а) Берілген кесте не себепті функция құрайды (функцияны f деп белгілейміз)?
ә) $D(f)$ және $E(f)$ табыңдар.
б) $f(5)$, $f(16)$, $f(23)$ табыңдар.
в) $f(x) = 2$ теңдеуін шешіңдер.
г) $f(x) > 4$ теңсіздігін шешіңдер.

3 жаттығу

Координаталық жазықтықта қисық сызық түрінде қандай да бір нүктелер жиыны кескінделген. $[-4;13]$ кесіндісіндегі әрбір x санына, сол нүкте бейнеленген жиындағы абсциссасы x болатын y айнымалысын сәйкестендіреміз (1-сурет).



1-сурет

а) Осы тәсілмен анықталған ереже неліктен функция құрайды (оны f деп белгілейміз)?
ә) Анықтаңдар: $f(-4)$, $f(9)$, $f(13)$?
б) Теңдеуді шешіңдер: $f(x)=6$.
в) Теңсіздікті шешіңдер: $f(x)<6$.
г) f функциясының мәндер жиынын табыңдар.

4 жаттығу

$[-1;1]$ кесіндісіндегі әрбір x санына $x^2+y^2=1$ теңдігін қанағаттандыратын y мәнін сәйкестендіреміз. Мұндай ереже функция құрай ма?

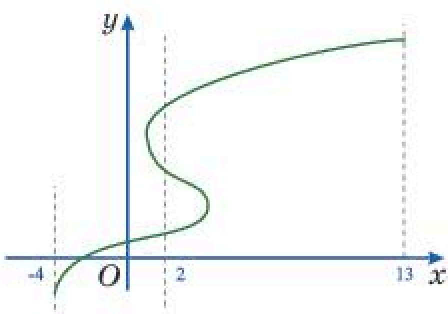
5 жаттығу

$[-1;1]$ аралығындағы әрбір x санына $y=\sqrt{1-x^2}$ мәнін сәйкестендіреміз. Мұндай ереже функция бола ала ма?

1 мысал

1-жаттығудағы функция кесте түрінде немесе реттелген $(x;y)$ сандар жұбы тәсілімен берілген деп те атауға болады. $f(5)=f(16)=5$, $f(23)=3$ болатыны түсінікті. $f(x)=2$ теңдеуінің шешімі $\{4;15;20\}$ сандары болады. $f(x)>4$ теңсіздігінің шешімдері кестенің екінші жолындағы 4 санынан үлкен сандарға қарама-қарсы орналасқан кестенің бірінші жолындағы сандар болып табылады. Сондықтан $f(x)>4$ теңсіздігінің шешімдері $\{3;5;10;12;14;16;18;21\}$ сандар жиыны. Берілген функцияның анықталу облысы 1-ден бастап 23-ті қоса алғанға дейінгі барлық бүтін сандар жиыны болады, $E(f)$ мәндер жиыны $\{2;3;4;5\}$ сандарынан тұрады.

2 мысал



2-сурет

3-жаттығудағы көрсетілген нүктелер жиыны функция құрайды, себебі әрбір $x\in[-4;13]$ мәніне белгілі себептермен y-тің тек қана бір мәні сәйкес келеді. Бұл қасиет 2-суретте көрсетілген нүктелер жиынына тән емес. Мысалы, $x=2$ санына y-тің үш мәні сәйкес келеді. 3-жаттығудағы нүктелер жиыны f функциясының графигі деп аталады, сәйкесінше, функцияның мұндай түрде берілуі графиктік тәсіл деп аталады. x абсциссасы -4-ке тең болғанда, y ординатасы төртке тең болатындықтан, $f(-4)=4$ екені анық. Осыған ұқсас, $f(9)=6$, $f(13)=11$. $f(x)=6$ теңдеуінің шешімі y-тің алтыға тең болатын мәндеріне сәйкес келетін x-тің мәндері болып табылады. Графиктен осы сандардың $x=-3$, $x=1$, $x=9$ екенін көруге болады. «$f(x)<6$ теңсіздігін шеш»

деген тапсырманы «графиктен y ординатасы 6-дан кіші болатын нүктелердің x абсциссасын табыңдар» деп өзгертуге болады.
Суреттен $[-4;-3)$ немесе $(1;9)$ аралықтарында жатқан x-тің мәндері осы шартты қанағаттандыратынын көру қиын емес.
Графикпен берілген f функциясының мәндері график нүктелерінің ординаталары болып табылады. **Сондықтан графиктің барлық ординаталарының бірігуі f функциясының мәндер жиыны болып табылады:**
$E(f)=[2;11]$.

Бұл жерде ескеретін нәрсе – «функцияның графигі» ретінде координаталар жазықтығындағы нүктелер жиынын аламыз. Функцияның графигі – сенің қаламың сызып қалдыратын жуан сызық емес, ол қандай да қалыңдығы болмайтын геометриялық фигура (кейбір жағдайда – абстрактілі). Біздің қағаз бетіне сызатынымыз – бар болғаны сәйкес нүктелер жиынының бейнесі ғана. Айтпақшы, көп жағдайда ол бейне толық емес. $y=x^2$ функциясының графигі болатын параболаны салып көріңдер.

4-АНЫҚТАМА.

Координаталық жазықтықта координаталары $(x;f(x))$ болатын нүктелер жиыны $y=f(x)$ функциясының графигі деп аталады, мұндағы $x\in D(f)$.

3 мысал

4-жаттығуды қарастырайық. 4-ші жатттығудағы сәйкестік функция бола алмайды. Шынында да функция аргументтің әрбір мәніне тек бір санды сәйкес қояды. Мәселен, егер $x=0$ болса, онда $0^2+y^2=1$, яғни. Бұл дегеніміз, $x=0$ санына y-тің екі мәні сәйкес келетінін көрсетеді. Олай болса, 4-жаттығудағы ереже функцияны бере алмайды.

4 мысал

5-жаттығудағы сәйкестік функция анықтамасының барлық шарттарын қанағаттандырады. Функцияның мәні $y=\sqrt{1-x^2}$ формуласымен есептеледі.

Егер функцияның мәні қандай да бір формуланың көмегімен берілсе, онда функция **аналитикалық** түрде берілген деп аталады. Егер есептің шартында аналитикалық түрде берілген f функциясының анықталу облысы жайында арнайы ешнәрсе айтылмаса, онда $f(x)$ функцияның аналитикалық формуласының ММО (айнымалының мүмкін мәндер облысымен) беттеседі деп түсінуге болады.

Сонымен біз функцияның үш түрлі тәсілмен: кестелік, графиктік, аналитикалық түрде берілуін қарастырдық. Функцияны берудің басқа да тәсілдері бар. Мысал, «сөзбен» беру.

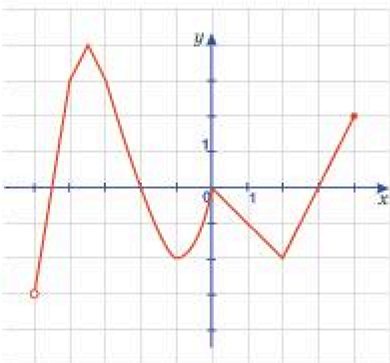
5 мысал

Функцияның «сөзбен» берілуіне мысал келтірейік. Тиын n рет лақтырылған. Егер «елтаңба» жағы түссе, әр жолы 0 санын, «цифр» жағы түссе 1 санын жазайық. Нәтижесінде 0 мен 1-лерден тұратын тізбектің мүшелерін аламыз. Әрбір n санына 0 мен 1-лерден тұратын тізбектер санын сәйкестендіреміз.

Шын мәнінде функцияның берілу тәсілдерінің айырмашылығы шартты түрде болады. Мысал $y=\sqrt{1-x^2}$ жазуын , сөзбен «игрек тең бір мен икс квадраттың айырмасының квадрат түбірі» деп айтуымызға болады. 5-мысалды соңына дейін талдасақ әрбір n санына, $f(n)=2^n$ санын сәйкес қоюға болады. Ал бұл аналитикалық тәсіл болып табылады.

Есептер

1-бөлім



3-сурет

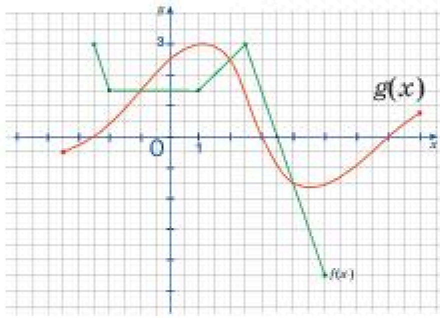
1. (1) Функцияның графигі берілген (3-сурет). Графикке қарап анықтаңдар:
   а) аргументтің берілген мәндеріндегі функцияның мәнін табыңдар: $x=2$, $x=-4$;
   ә) функция мәніне сәйкес аргументтің мәнін табыңдар: $y=3$, $y=-3$.
   б) Теңсіздікті шешіңдер: $y(x)\geq 0$, $y(x)\leq 3$.
2. (2) Кестемен берілген функцияға күнделікті өмірден мысал келтіріңдер.
3. (1) Сөзбен берілген функцияға мысал келтіріңдер.
4. (2) Кемінде төрт арифметикалық амалдан тұратын аналитикалық түрде берілген сандық функцияға сөзбен мысал келтіріңдер.
5. (3) Функция болмайтын, қандай да бір екі жиынның элементтерінің арасындағы сәйкестікке мысал келтіріңдер.
6. (2) 4-суретте $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының графиктері кескінделген. $D(f):\left[-2\frac{1}{2};5\right]$, $D(g):\left[-3\frac{1}{2};8\right]$
   а) $f(x)=g(x)$ теңдеуінің неше шешімі бар? $f(x)=g(x)$ болатын x-тің мәндерін табыңдар.

ә) $g(x)=0$ болатындай x-тің мәндерін табыңдар, яғни $g(x)=0$ теңдеуін шешіңдер.

б) $g(x)\le 0$ болатындай x-тің мәндерін табыңдар, яғни $g(x)\le 0$ теңсіздігін шешіңдер.

в) $g(x)=\dfrac{3}{2}$ теңдеуінің неше шешімі бар?

г) Теңдеуді шешіңдер: $f(x)=\dfrac{3}{2}$.



4-сурет

ғ) Теңсіздіктерді шешіңдер: $f(x)\ge g(x)$, $f(x)<g(x)$.

д) Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} g(x)\le 2\dfrac{1}{2}, \\ g(x)\ge f(x). \end{cases}$

7. (1) $f(x)=x^2-3x+2$ функциясы берілген.
а) $f(0)$, $f(3)$, $f(-3)$ табыңдар.
ә) $f(x)$ функциясының мәндерін нөлге теңестіретін x-тің мәндерін табыңдар.

8. (3) Келесі функциялардың анықталу облыстарын табыңдар:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; ә) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$; б) $f(x)=\sqrt{-x}$; в) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; ғ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; д) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$; ж) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x}}$.

2-бөлім

9. (2) Екі физикалық шаманың арасындағы функционалдық тәуелділікке мысал келтіріңдер. Бұл тәуелділіктің себебі қандай? Келтірілген мысалдан аргумент қайсысы, функция қайсысы екенін анықтаңдар. Анықталу облысы мен мәндер жиыны қандай болатынын түсінуге тырысыңдар. Аргументтің өзгеруіне сәйкес функцияның мәні қалай өзгеретінін анықтаңдар. Алынған нәтижелерді дәптерлеріңе жазыңдар.

10. (2) 5-суретте $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының графиктері кескінделген, $D(f)$:$[-2;6]$, $D(g)$:$[-1;7]$.
а) Теңдеуді шешіңдер: $f(x)=g(x)$.

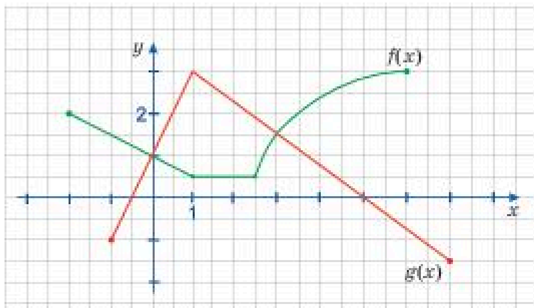
ә) Теңдеуді шешіңдер: $f(x)=1\dfrac{1}{2}$, $g(x)=0$, $f(x)=\dfrac{1}{2}$.

б) Теңсіздіктерді шешіңдер: $f(x)>1\dfrac{1}{2}$, $g(x)\le 0$

в) Теңсіздіктерді шешіңдер: $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$.

г) Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} f(x) \geq \frac{3}{2}, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

ғ) Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \leq \frac{3}{2}. \end{cases}$



5-сурет

11. (2) Функцияның анықталу облысын табыңдар:

а) $f(x) = \sqrt{2+x}$; ә) $f(x) = \sqrt{3x+9}$; б) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+9}}{\sqrt{2+x}}$;

в) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+9}{2+x}}$; г) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}} - \sqrt{-x}$;

ғ) $f(x) = \sqrt{|x|}$; д) $f(x) = \sqrt{-x^2+6x-9}$;

12. (3) Функцияның анықталу облысын және мәндерінің жиынын табыңдар:

а) $y = \sqrt{x^2+2x+3}$ ә) $y = -x^2+4x+5$ б) $y = \left(-x^2+4x+5\right)^{-2}$.

13. (4) Өздерің пайдаланатын ұялы байланыс операторының сайтына кіріңдер:

а) Ұсынылатын қызмет түрлері: ғаламтор, sms, сол ұялы байланыс абоненттерінің, басқа ұялы байланыс абоненттерімен сөйлесуге жұмсалатын бір айлық шығынның жуықтап алған мөлшеріне сәйкес келетін кесте құрыңдар.

ә) Ұялы байланысты пайдалану режимін есепке алғанда, сен қолданатын тарифтік жоспар тиімді ме?

14. (2) Кішкентай коала бір эвкалипт ағашының жапырақтарын 10 сағатта жеп тауысады, ал оның ата-анасының әрқайсысы одан екі есе жылдам жейді. Бір эвкалипт ағашының барлық жапырақтарын жеуге үшеуі бірге қанша уақыт жұмсайды?

15. (3) 20 мүшесі бар арифметикалық прогрессия берілген. Жұп орында тұрған мүшелерінің қосындысы 250-ге тең, ал тақ орында тұрған мүшелерінің қосындысы 220-ға тең. Прогрессияның оныншы мүшесін табыңдар.

16. (3) Отбасы бюджетін саралау барысында, шығынның 40%-ы азық-түлікке жұмсалатыны анықталды. Егер азық-түлікке жұмсалатын шығын 20%-ға кемісе, онда осы отбасының жалпы шығыны қанша пайызға қысқарады?

A) 12%; B) 10%; C) 8%; D) 6%; E) 4%.

17. Теңсіздікті шешіңдер:

а) (1) $|4x+1|<3$; ә) (3) $|x^2+2x-3|<|6x-6|$; б) (3) $\dfrac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|}\le 0$.

Жауаптары:

1. а) $y(2)=-2$, $y(-4)=3$; ә) $3=y(-4)=y(-3)$;

б) $[-4,5;-2]\cup\{0\}\cup[3;4]$, $(-\infty;-4]\cup[-3;+\infty)$.

6. а) 3 түбірі бар: $x\in\{-1;2;4\}$; ә) $x\in\left\{-2\frac{1}{2};3;7\right\}$; б) $\left[-3\frac{1}{2};-2\frac{1}{2}\right]\cup[3;7]$;

в) 2; г) $[-2;1]\cup\{3\}$; ғ) $\left[-2\frac{1}{2};-1\right]\cup[2;4]$, $(-1;2)\cup(4;5]$; д) $[-1;0]\cup\{2\}\cup[4;5]$.

7. а) 2, $2,20$; ә) $\{1,\ 2\}$.

8. а) $(-\infty;0)\cup(0:+\infty)$; ә) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$; б) $(-\infty;0]$;

в) $[-1;1]$; г) $(-1;1)$; ғ) $[-1;0)\cup(0;1]$; д) $(-\infty;-1]\cup(0;1]$; е) $(0;1]$.

10. а) $x\in\{0;3\}$; ә) $\{-1;3\}$, $\{-0,5;5\}$, $x\in\left[1;2\frac{1}{2}\right]$;

б) $x\in[-2;-1)\cup(3;6]$, $x\in[-1;-0,5]\cup[5;7]$;

в) $x\in(0;3)$, $x\in[-2;0)\cup(3;6)$; г) $x\in[3;5)$; ғ) $x\in(0;3)$.

11. а) $(-\infty;2]$; ә) $[-3;+\infty)$; б) $[-3;2)$; в) $(-\infty;-3]\cup(-2;+\infty)$; г) $(-\infty;-3)$;

ғ) $(-\infty;+\infty)$; д) $\{3\}$.

12. а) $D(y)=\mathbb{R}$, $E(y)=[\sqrt{2};+\infty)$; ә) $D(y)=\mathbb{R}$, $E(y)=(-\infty;9]$;

б) $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;5)\cup(5;+\infty)$, $E(y)=(0;+\infty)$.

14. Екі сағатта. **15.** 22. **16.** C.

17. а) $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$; ә) $(-9;1)\cup(1;3)$; б) $x<\frac{1}{3}$.

§2 ФУНКЦИЯНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

«Математиканың маңыздылығы қазір үздіксіз артып отыр. Математикада жаңа идеялар мен тәсілдер пайда болуда. Осының барлығы оның қолданылу аясын кеңейтеді. Қазіргі таңда математика маңызды рөл атқармайтын қызмет саласын атау мүмкін емес. Ол табиғат туралы ғылымның барлық салаларында, қоғамтануда, техникада баға жетпес құралға айналды. Тіпті зангерлер мен тарихшылар да өздерінің саласында математикалық әдістерді қолданады».

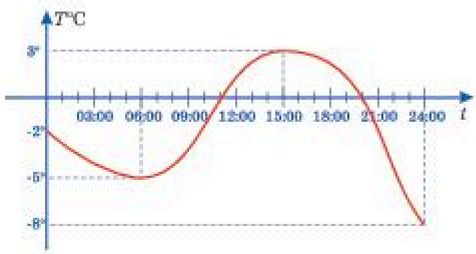
А.Д. Александров

1 жаттығу

1-суретте 2010 жылдың 3-наурызындағы Алматы қаласының күн райы T температурасының Цельсий шкаласы бойынша тәуліктегі уақытқа тәуелділігі графикпен берілген.

а) Қай уақыттан қай уақыт сәтіне дейін күн райының температурасы жоғарылағанын көрсетіңдер. Күн райы температурасының төмендеген уақыт аралығын көрсетіңдер.

ә) Күн райы T температурасының ең төменгі мәнге ие болу уақытын; ең жоғары мәнге ие болу уақытын көрсетіңдер.



1-сурет

б) $00{:}00$-ден бастап $08{:}00$-ге дейінгі уақыт аралығындағы температураның ең төменгі мәнін көрсетіңдер. $00{:}00$-ден $03{:}00$ аралығындағы T температураның ең жоғары мәні қандай?

в) Қай кезде Цельсий шкаласы бойынша температура 0^0-қа тең болды? Қай уақытта T температура теріс, қай уақытта оң мәндерді қабылдады?

Бұл тапсырманы орындау сендерге қиындық тудырмады деп ойлаймыз. Себебі, барлығы көз алдымызда тұр. Бірақ біз математикалық тұжырымдамалардың бізді қоршаған ортаның шынайы құбылыстарды туындайтынын (немесе, біз шынайы өмірді қалай қабылдайтынымыздан, бірақ бұл – мүлдем басқа тақырып) көрсеткіміз келеді. Егер табиғаттағы t және T шамаларын абстрактілі десек (олардың нені білдіретіндігі маңызды емес деп санасақ), онда шын мәнісінде біз қандай да бір $T=f(t)$ функциясының графигін аламыз. Графикке қарап, біз төмендегілерді айта аламыз:

1) $t\in[0;6]$ жиынында $f(t)$ функциясы **кемиді**, $(0;\ 6)$ **кему аралығы**;

$t\in[6;15]$ жиынында $f(t)$ функциясы **өседі**; $(6;\ 15)$ **өсу аралығы**.

$t \in [15;24]$ жиынында $f(t)$ функциясы **кемиді**, $(15;\ 24)$ **кему аралығы**;

2) $t=24$ нүктесінде $f(t)$ функциясы өзінің **ең кіші** -8 **мәніне** ие болады, сәйкесінше жазба: $\min\limits_{t\in[0;24]} f(t)=f(24)=-8$.

f функциясы **ең үлкен мәнге** $t=15$ нүктесінде ие болады және ол мән 3-ке тең: $\max\limits_{t\in[0;24]} f(t)=f(15)=3$.

3) $t=6$ болғанда функцияның мәні (-5)-ке тең. Бұл мән $t\in[0;24]$ аралығындағы ең кіші мәні болып есептелмейді, бірақ t-ның кез келген 6-ға жақын мәнін алатын болсақ, $f(t)>6$ болады. Бұдан 6 нүктесінде $f(t)$ функциясы өзінің локальді минимум нүктесіне ие болатыны шығады (*local* (ағылшынша) – жергілікті). $t=6$ – **локальді минимум нүктесі**, $f(6)=-5$ – локальді минимумның мәні. $t=0$ нүктесінде $f(t)$ функциясының мәні -2-ге тең, бірақ $t=0$-дің сол жағындағы нүктелер анықталу облысына кірмейді, сонда $t=0$ локальді максимум нүктесі болып табылмайды.

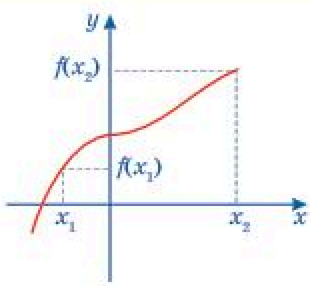
4) $f(11)=0$ және $f(20)=0$ екенін байқаймыз, $t=11$ және $t=20$ нүктелері $f(t)$ функциясының «**нөлдері**» деп аталады. $[0;11)$ және $(20;24]$ аралықтарында функция теріс мән қабылдайды. $(11;20)$ аралығында функция оң мән қабылдайды. $[0;11)$, $(20;24]$ және $(11;20)$ аралықтары функцияның **таңба тұрақтылығы аралықтары** деп аталады.

2 жаттығу

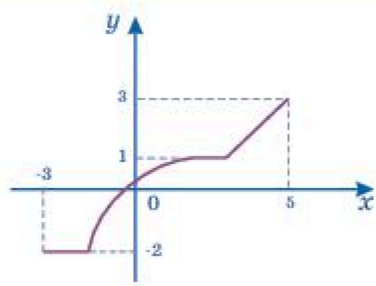
Тағы да $f(t)$ функциясы жайында жазылған 1–4 пункттерді оқыңдар және математикалық терминдердің атауы 1-жаттығудың осы пункттеріндегі сенің қол жеткізген нәтижелеріңмен қалай үйлесетінін бақылаңдар.

1-АНЫҚТАМА.

Қандай да бір аралықтан алынған кез-келген x_1 және x_2 сандары үшін, $x_2>x_1$ болғанда, $f(x_2)>f(x_1)$ теңсіздігі орындалса, онда осы аралықта $y=f(x)$ функциясы өспелі функция деп аталады.



2-сурет



3-сурет

Ықшамдалған 1-анықтаманы келесі тәсілдердің бірімен түсіндіруге болады (2-сурет):

- аргументтің үлкен мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келеді;
- егер x өссе, онда y те өседі;
- x артқан сайын, $f(x)$ те артады.

2-АНЫҚТАМА.

Қандай да бір аралықтан алынған кез келген x_1 және x_2 сандары үшін, $x_2>x_1$ болғанда, $f(x_2)\geq f(x_1)$ теңсіздігі орындалса, онда осы аралықта $y=f(x)$ функциясы кемімейтін функция деп аталады.

Кемімейтін функцияның графигінің мысалы 3-суретте көрсетілген.

3-АНЫҚТАМА.

Қандай да бір аралықтан алынған кез келген x_2 және x_1 сандары үшін, $x_1<x_2$ болғанда, $f(x_1)>f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, онда осы аралықта $y=f(x)$ функциясы кемімелі функция деп аталады.

Кемімелі функция анықтамасының ықшамдалған түрі:

– аргументтің үлкен мәніне функцияның кіші мәні сәйкес келеді (4-сурет);

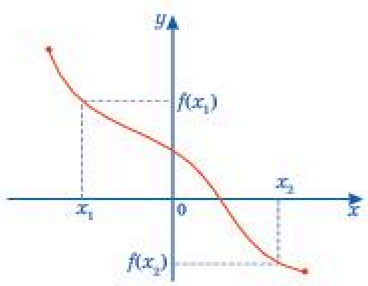
– егер x өссе, онда y кемиді.

– x артқан сайын, $f(x)$ кемиді.

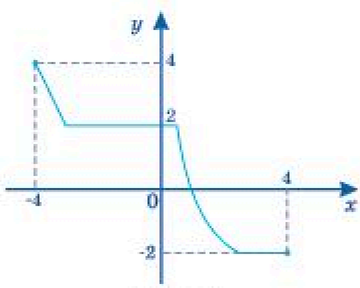
1-ші және 3-ші анықтамалардың шарттарын қанағаттандыратын функциялар монотонды (қатаң монотонды) деп аталады.

4-АНЫҚТАМА.

Қандай да бір аралықтан алынған кез келген x_1 және x_2 сандары үшін, $x_2>x_1$ болғанда, $f(x_1)\geq f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, онда осы аралықта $y=f(x)$ функциясы өспейтін функция деп аталады.



4-сурет



5-сурет

4-ші және 5-ші суреттерде тек қана кемімелі және өспелі функцияларға сәйкес мысалдар келтірілген.

Біз ары қарай анықталу облысы сан түзуі немесе олардың бірігуі болатын функцияларды қарастырамыз (кесінділер жайлы дәлірек оқулықтың соңында «Сан түзуінің жиындары» жайлы берілген қосымшадан қарай аласыздар).Сондықтан, бізге алдағы уақытта төмендегі анықтама өте қажет болады.

5-АНЫҚТАМА.

Функцияның анықталу облысы кесінді немесе кесінділердің бірігуі болсын. Егер p саны анықталу облысындағы кесіндіге немесе кесінділердің бірігуіне тиісті болып, бірақ осы кесінділердің ешқайсыларының ұштары болмаса, онда ол анықталу облысының **ішкі нүктесі** деп аталады.

1 мысал

5-суреттегі функцияның анықталу облысы $[-4;4]$ кесіндісі. -4 және 4 сандары кесіндінің ұштары, олар анықталу облысының ішкі нүктелері бола алмайды. $[-4;4]$ қалған барлық нүктелері анықталу облысының **ішкі нүктелері** болып табылады.

Бізге берілген функциялардың өсу аралықтары, кему аралықтары табылды делік.

6-АНЫҚТАМА.

Егер анықталу облысының ішкі нүктесі кему аралығының оң жақ ұшы және өсу аралығының сол жақ ұшы болса, онда ол нүктені функцияның **локальді минимум нүктесі** деп атайды.

7-АНЫҚТАМА.

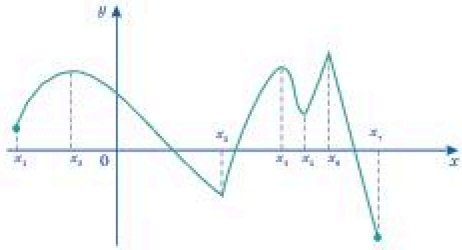
Егер анықталу облысының ішкі нүктесі өсу аралығының оң жақ ұшы және кему аралығының сол жақ ұшы болса, онда ол нүктені функцияның **локальді максимум нүктесі** деп атайды.

Локальді минимум және локальді максимум нүктелерді локальді экстремум нүктелер деп аталады.

«Локальді минимум», «локальді максимум», «локальді экстремум» сөздерінің орнына тек қана «минимум», «максимум», «экстремум» сөздерін пайдалануға болады.

2 мысал

$[x_1;x_7]$ кесіндісінде анықталған қандай да бір $f(x)$ функциясының графигін қарастырамыз (6-сурет). x_1, x_7 нүктелері экстремум нүктелері болмайды өйткені олар $[x_1;x_7]$ жиынының ішкі нүктелері емес. x_2, x_4, x_6 – нүктелері локальді максимум нүктелері, ал x_3, x_5 – локальді минимум нүктелері болады.



6-сурет

8-АНЫҚТАМА.

Локальді максимум және локальді минимум нүктелеріндегі функцияның мәндері сәйкесінше **локальді максимум** және **локальді минимум** деп аталады.

3 жаттығу

Қандай да бір функцияның локальді минимум нүктесі қандай да бір локальді максимумнан үлкен болуы мүмкін бе? Локальді максимум нүктесі функцияның ең үлкен мәні болуы міндетті ме?

9-АНЫҚТАМА.

Функцияның мәнін нөлге айналдыратын x айнымалының мәндері функцияның «нөлдері» деп аталады.

Басқа сөзбен айтқанда, функцияның «нөлдері»:
– функция графигінің Ox өсімен қиылысу нүктелерінің абсциссалары;
– $f(x)=0$ теңдеуінің түбірлері.

10-АНЫҚТАМА.

Функция оң болатын аралықтар, функцияның оң мән қабылдайтын аралықтары деп, функция теріс болатын аралықтары – функцияның теріс мән қабылдайтын аралықтары деп аталады. Функцияның оң мән қабылдайтын аралықтары мен теріс мән қабылдайтын аралықтары функцияның таңба тұрақтылығы аралықтары деп аталады.

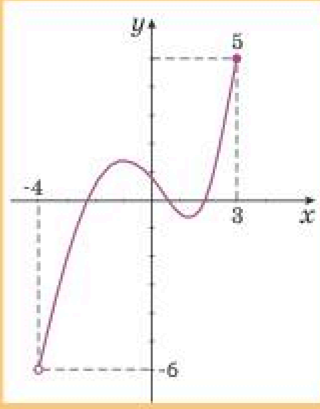
$f(x)$ функциясының оң мән қабылдайтын аралықтары $f(x)>0$ теңсіздігінің шешімімен парапар; $f(x)$ функциясының теріс мән қабылдайтын аралықтары $f(x)<0$ теңсіздігінің шешімімен сәйкес келеді.

11-АНЫҚТАМА.

Егер кез келген $x \in D(f)$ үшін $f(x) \leq f(p)$ теңсіздігі орындалса, онда p нүктесін $f(x)$ функциясының ең үлкен мән қабылдайтын нүктесі деп атайды. $f(p)$ санын функцияның ең үлкен мәні деп атайды.

12-АНЫҚТАМА.

Егер кез келген $x \in D(f)$ үшін $f(x) \geq f(p)$ теңсіздігі орындалса, онда p нүктесін $f(x)$ функциясының ең кіші мән қабылдайтын нүктесі деп атайды. $f(p)$ санын функцияның ең кіші мәні деп атайды.



7-сурет

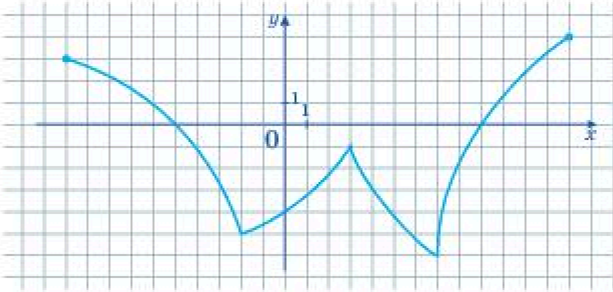
7-суретте анықталу облысы $(-4;3]$ кесіндісі болатын $g(x)$ функциясының графигі кескінделген. -4 саны функцияның анықталу облысына тиісті емес, сол себепті -6 саны осы функцияның ең кіші мәні болмайды. Функцияның ең үлкен мәні 5 саны.

Есептер

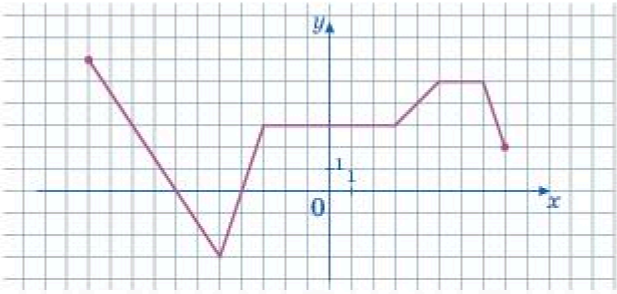
1-бөлім

Графигі бойынша функцияны зерттеу дегеніміз:
а) функцияның анықталу облысы;
ә) берілген функцияның мәндер жиыны;
б) функцияның өсу аралықтарын анықтау;
в) функцияның кему аралықтарын анықтау;
г) локальді экстремум нүктелері мен мәндерін көрсету;
ғ) функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтау;
д) функцияның «нөлдерін» көрсету;
е) функцияның оң мәндер және теріс мәндер қабылдайтын аралықтарын анықтау.

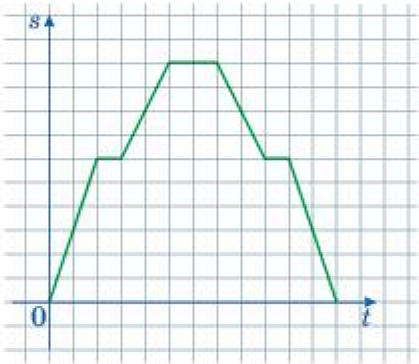
1. (2) Төмендегі суретте $y = f(x)$ функциясының графигі кескінделген. $f(x)$ функциясын зерттеңдер.



2. (2) Суретте $y{=}h(x)$ функциясының графигі кескінделген. $h(x)$ функциясын зерттеңдер. Функцияның кемімейтін, өспейтін аралықтарын табыңдар.



3. (2) Төмендегі суретте $y{=}S(t)$ функциясының графигі кескінделген, мұндағы $S(t)$ – саяхатқа арналған автобустан A пунктіне дейінгі арақашықтық. Ot өсі бойынша бір бөлік $0{,}5$ сағатқа сәйкес келеді, OS өсі бойынша бір бөлік 10 км-ді құрайды.



Мына сұрақтарға жауап беріңдер:

а) A пункттен автобус қандай ең үлкен қашықтыққа ұзап кетті?

ә) саяхат кезінде неше рет аялдама жасалды? Әр аялдама қанша уақытқа созылды?
б) саяхатқа барлығы қанша уақыт жұмсалды?
в) егер бірінші B пунктінде, екінші C пунктінде аялдаған болса, онда автобустың AB және BC бөліктеріндегі жылдамдығы қандай?

4. (1) Параллель жалғанған R_1 және R_2 кедергілерден құралған жүйенің жалпы кедергісі $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ формуласы арқылы берілген, мұндағы R_1-const, R_2 айнымалы шама.
а) Егер R_2 кедергісі артса, онда R шамасы арта ма әлде кеми ме?
ә) R шамасын $R_2=x$ айнымалысынан тәуелді функция түрінде көрсетіңдер.
б) $R(x)$ функциясы өспелі ме әлде кемімелі ме?
в) R_2 шексіз өседі деп алайық, сонда R шамасы қалай өзгереді?

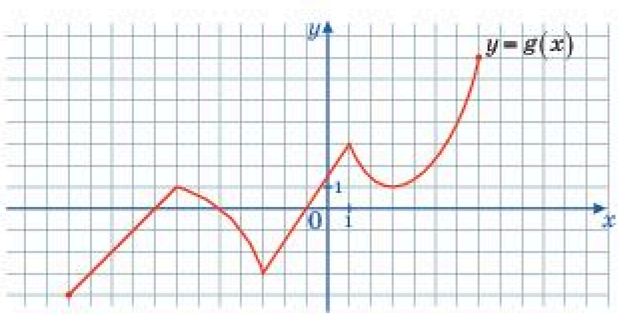
5. (3) $f(x)$ функциясы келесі түрде анықталады:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x, \text{ егер } x\le 0;\\ \dfrac{4}{x}, \text{ егер } 0<x\le 2;\\ x, \text{ егер } x\ge 2.\end{cases}$$

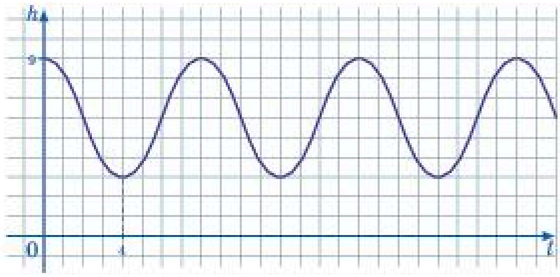
$y=f(x)$ функциясының графигін салыңдар және оны зерттеңдер.

2-бөлім

6. (2) Төменде көрсетілген график бойынша $y=g(x)$ функциясын зерттеңдер.



7. Материалдық нүкте N тепе-теңдік жағдайдан ауытқыды. Төмендегі суретте h шамасының t уақыттан тәуелділігінің графигі берілген, мұндағы h – N нүктесінен тыныштық күйге сәйкес келетін A нүктесіне дейінгі қашықтық.



Тербеліске энергия шығындалмайды деп ұйғарып, төмендегі тапсырмаларды орындаңдар.

а) AN арақашықтығының ең үлкен мәнін анықтаңдар және сол мәнге ие болатын уақыт мезетін сипаттаңдар.

ә) AN арақашықтығының ең кіші мәнін анықтаңдар және сол мәнге ие болатын уақыт мезетін сипаттаңдар.

б) AN арақашықтығының кему периодын және өсу периодын сипаттаңдар.

8. (1) Радиусы r шар бетінің ауданы мына формуламен анықталады: $S=4\pi r^2$. Радиоактивті сәулелену көзінің бастапқы орнынан 2 есе қашықтыққа алшақтағанда, бастапқыда алатын радиация мөлшері неше есеге кемиді?

9. (2) Массалары m_1 және m_2 екі дененің бір-біріне тартылу күші мына формуламен анықталады: $F=k\dfrac{m_1m_2}{r^2}$, мұндағы k – қандай да бір коэффициент, r – екі дененің арақашықтығы.

а) егер r арақашықтық кемісе, онда F күш арта ма әлде кеми ме?

ә) егер r арақашықтық 100 есе артса, онда екі дененің арасындағы тартылу күші F қалай және қаншаға өзгереді?

10. (3) $f(x)$ функциясы келесі түрде анықталады:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3, & \text{егер } x<-1; \\ |x|-1, & \text{егер } -1\le x\le 2; \\ -x^2+8x-18, & \text{егер } x>2. \end{cases}$$

$y=f(x)$ функциясының графигін салыңдар және оны зерттеңдер.

Жауаптары:

1. а) $D(f):[-10;13]$; ә) $E(f):[-6;4]$; б) $[-2;3]$, $[7;13]$; в) $[-10;-2]$, $[3;7]$; г) $x=-2$ локальді минимум нүктесі, $f(-2)=-5$; $x=7$ локальді минимум нүктесі, $f(7)=-6$; $x=3$ локальді максимум нүктесі, $f(3)=-1$; ғ) $\max\limits_{x\in[-10;13]} f(x)=f(13)=4$, $\min\limits_{x\in[-10;13]} f(x)=f(7)=-6$; д) $f(x)=0$ $x\in\{-5;9\}$ болғанда; е) $f(x)>0$ болғанда, $x\in[-10;-5)\cup(9;13]$, $f(x)<0$ болғанда $x\in(-5;9)$.

2. а) $D(h):[-11;8]$; ә) $E(h):[-3;6]$; б) $[-5;-3]$, $[3;5]$; в) $[-11;-5]$, $[7;8]$; г) $x=-5$ минимум нүктесі, $h(-5)=-3$; локальді максимум нүктесі жоқ; ғ) функцияның ең үлкен мәні болмайды, $\min\limits_{x\in[-11;8]} h(x)=h(-5)=-3$; д) $h(x)=0$, $x\in\{-7;-4\}$; е) $f(x)>0$ $x\in[-11;-7)\cup(-4;8]$ болғанда, $f(x)<0$ егер $x\in(-7;-4)$ болғанда; ж) функция $x\in[-11;-5]$, $x\in[-3;3]$ және $x\in[5;8]$ аралықтарында өспейтін, $x\in[-5;7]$ аралығында кемімейтін функциясы.

3. а) 100 км; ә) 1-аялдама ұзақтығы 30 мин, 2-аялдама – 1 сағ, 3-аялдама – 30 мин; б) 6 сағ; в) 60 км/сағ және 40 км/сағ.

4. а) артады; ә) $R=\dfrac{R_1x}{R_1+x}$; б) өспелі; в) R шамасы мәні бойынша R_1 шамасына жақындайды.

5. а) $D(f):(-\infty;+\infty)$; ә) $E(f):(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$; б) $(-\infty;-1]$, $[2;+\infty)$; в) $[-1;0]$, $(0;\ 2]$; г) $x=2$ локальді минимум нүктесі, $f(2)=2$; $x=-1$ локальді максимум нүктесі, $f(-1)=1$; ғ) ең үлкен және ең кіші мәні болмайды. д) $f(x)=0$ $x\in\{-2;0\}$ болғанда; е) $f(x)>0$ $x\in(-2;0)\cup(0;+\infty)$ болғанда, $f(x)<0$ $x\in(-\infty;-2)$ болғанда.

6. а) $D(f):[-12;7]$; ә) $E(f):[-4;7]$; б) $[-12;-7]$, $[-3;1]$, $[3;7]$; в) $[-7;-3]$, $[1;3]$; г) $x=-3$ локальді минимум нүктесі; $f(-3)=3$; $x=-3$ локальді минимум нүктесі $f(3)=1$; $x=-7$ локальді максимум нүктесі, $f(-7)=1$; $x=1$ локальді максимум нүктесі, $f(1)=3$; ғ) $\max\limits_{x\in[-12;7]} f(x)=f(7)=7$, $\min\limits_{x\in[-12;7]} f(x)=f(-12)=-4$; д) $f(x)=0$ $x\in\{-5;-8;-1\}$ болғанда; е) $f(x)>0$ $x\in(-8;-5)\cup(-1;7]$ болғанда, $f(x)<0$ $x\in[-12;-8)\cup(-5;-1)$ болғанда.

7. а) $t_n=8n$ уақыт мезетінде ең үлкен мәні 9-ға жетеді, мұндағы $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, яғни n–теріс емес бүтін сан; ә) $t_n=4+8n$ уақыт мезетінде ең кіші мәні 3-ке жетеді, яғни n – теріс емес бүтін сан; б) AN қашықтығының кему периоды $t_n=4+8n$; AN қашықтығының өсу периоды $t\in[4+8n;8+8n]$.

8. 4 есе.

9. а) артады; ә) 10000 есе кемиді.

10. а) $D(f):(-\infty;+\infty)$; ә) $E(f):(-\infty;-2]\cup[-1;2]\cup(4;+\infty)$; б) $(2;4]$, $(2;4]$; в) $(-\infty;-1)$, $[-1;0]$, $[4;+\infty)$; г) $x=0$ минимум нүктесі, $f(0)=-1$; $x=4$ локальді максимум нүктесі, $f(4)=-2$; ғ) ең үлкен және ең кіші мәндері жоқ; д) $x\in\{-1;1\}$ болғанда $f(x)=0$; е) $x\in(-\infty;-1)\cup(1;2]$ болғанда $f(x)>0$, $x\in(-1;1)\cup(2;+\infty)$ болғанда $f(x)<0$.

§3 ЖҰП ЖӘНЕ ТАҚ ФУНКЦИЯЛАР

«Симметрия – адамзаттың ғасырлар бойы әдемілікті, реттілік және жетілуді түйсінуге және оған қол жеткізуге тырысқанда пайдаланған идеясы болып табылады».

Г.Вейль

1 жаттығу

$(4;-3)$ және $(-4;-3)$ нүктелерінің абсциссалары қарама-қарсы және ординаталары бірдей. Осыларды координаталық жазықтықта белгілеңдер. Осындай тағы да бірнеше нүктелер жұбын белгілеңдер. Мұндай нүктелердің бір жұбының өзара орналасуы туралы не айтуға болады?

2 жаттығу

$(-5;2)$ және $(5;-2)$ абсциссалары да, ординаталары да қарама-қарсы болатын нүктелер. Оларды координаталық жазықтықта белгілеңдер. Осындай тағы да бірнеше нүктелер жұбын белгілеңдер. Мұндай нүктелердің бір жұбының өзара орналасуы туралы не айтуға болады?

3 жаттығу

$g(x)=x^2+4x^6$, $h(x)=|x|$ функцияларын нақты анықталу облыстарында қарастырайық. $g(x)$ және $g(-x)$, $h(x)$ және $h(-x)$ функцияларын өзара салыстырыңдар. Қарама-қарсы нүктелердегі осы функциялардың мәндері туралы не айтуға болады? Осы функциялардың графиктерінің геометриялық қасиеттері туралы не айтуға болады?

4 жаттығу

$f(x)=-x^3$, $g(x)=x^3-5x^7$, $h(x)=x(|x|-x^2)$ функцияларын өздерінің нақты анықталу облысында қарастырайық. $f(x)$ және $f(-x)$, $g(x)$ және $g(-x)$, $h(x)$ және $h(-x)$ мәндерін өзара салыстырыңдар. Қарама-қарсы нүктелердегі осы функциялардың мәндері туралы не айтуға болады? Бұл функциялардың графиктерінің геометриялық қасиеттері туралы не айтуға болады?

Егер барлық тапсырмаларды дұрыс орындаған болсаңдар, онда 3-жаттығудағы функциялардың қарама-қарсы нүктелерді қойғандағы мәндері бірдей болатынын түсінген боларсыңдар. Мысалы, $g(-x)=(-x)^2+4(-x)^6=$ $=x^2+4x^6=g(x)$. Бұл дегеніміз, осы функциялардың графиктерінің кез келген абсциссалары қарама-қарсы нүктелер жұбының ординаталары бірдей екенін білдіреді (1-жаттығу). Бұдан шығатын қорытынды, функцияның графигінде жатқан кез келген $(x_0;y_0)$ нүктесіне Oy өсіне қатысты симметриялы $(-x_0;y_0)$ нүктесі де осы функцияның графигінде жатады. Демек, функцияның графигі Oy өсіне қатысты симметриялы (1-жаттығу). Мұндай функциялар – **жұп функциялар** деп аталады.

4-жаттығуда $g(-x)=(-x)^3-5(-x)^7=-x^3+5x^7=-(x^3-5x^7)=-g(x)$. Бұл дегеніміз, осы функциялардың графиктерінің кез келген абциссалары қарама-қарсы нүктелердің ординаталары да қарама-қарсы дегенді білдіреді (2-жаттығу).Бұдан шығатын қорытынды, функцияның графигінде жатқан кез келген $(x_0;y_0)$ нүктесіне $(0;0)$-ге қатысты симметриялы координаталары $(-x_0;-y_0)$ нүктесі де осы функцияның графигінде жатады. Демек, функцияның графигі $(0;0)$ нүктесіне қатысты симметриялы. Мұндай функциялар – **тақ функциялар** деп аталады.

1-АНЫҚТАМА.

Егер төмендегі екі шарт орындалатын болса, $f(x)$ функциясы жұп деп аталады:
1) $D(f)$ анықталу облысындағы кез келген x саны үшін осы $D(f)$ анықталу облысында жататын $(-x)$ саны табылады;
2) $D(f)$ анықталу облысындағы кез келген x саны үшін $f(-x)=f(x)$ теңдігі орындалады.

Бұл анықтамадағы 1) шарт $D(f)$ жиынының Ox өсінде координаталар басына қатысты симметриялы болатынын білдіреді. Басқаша айтқанда, Ox өсіндегі координаттары қарама-қарсы кез-келген нүктелер жұбының екеуі де $D(f)$ анықталу облысында жатады немесе екеуі де $D(f)$ анықталу облысында жатпайды. Екінші жағдайда, осы нүктелердегі функцияның мәндері өзара тең. Бұл, жұп функцияның графигінде қандай да бір $(x_0;\ y_0)$ нүктесі жатса, онда $(-x_0;\ y_0)$ нүктесі де осы функцияның графигінде жатады деген-ді білдіреді. Мұндай нүктелер жұбы Oy өсіне қатысты өзара симметриялы (3-жаттығу) болады. Демек, **Oy өсі** кез келген **жұп функция графигінің симметрия өсі болып табылады.**

Әрі қарай тақ функцияның анықтамасы мен графигінің сәйкесінше қасиеттері қорытындыланады. Бірақ сендерге келесі жаттығуларды орындаған әлдеқайда қызықтырақ және пайдалырақ болады.

5 жаттығу

Тақ функцияның толық (дұрыс) анықтамасын өздерің беріп көріңдер және неге кез келген тақ функцияның графигі симметрия центрі $O(0;0)$ нүктесі болатын центрлік-симметриялы фигура болатынын түсіндіріңдер.

1 мысал

$f(x)=x^2-|x|$ функциясы жұп болып табыла ма?

Талдау. Есептің шартында анықталу облысы жайында ешнәрсе айтылмағандықтан, нақты анықталу облысы, яғни $x^2-|x|$ өрнегінің ММО алынады. Берілген өрнекте x-тің мүмкін мәндер облысына ешқандай шектеу қойылмаған, сондықтан $D(f)=(-\infty;+\infty)$, яғни $f(x)$ функциясының анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны болып табылады. Нөл нүктесі симметрия центрі болады. Жұп функция анықтамасының 1) шарты орындалады. Енді 2) шартты тексеру қалды. Кез келген x үшін мына шарт орындалады: $f(-x)=(-x)^2-|-x|=x^2-|x|=f(x)$. «–» таңбаны дұрыс жазу керек.

Шешуі. $D(f)=(-\infty;+\infty)$ жиыны нөлге қатысты симметриялы. Кез келген x үшін $f(-x)=f(x)$ теңдігі орындалады. Шынында да, $f(-x)=(-x)^2-|-x|=x^2-|x|=f(x)$.

Жауабы: $f(x)=x^2-|x|$ жұп функция болады.

2 мысал

$y(x)$ функциясы $(-2;1)$ аралығында $y(x)=x^2$ түрінде берілген. $y(x)$ жұп функция бола ма?

Шешуі. $D(f)=(-2;1)$, бұл жиын Ox өсінде нөлге қатысты симметриялы емес.

Жауабы: $y(x)$ жұп функция болмайды.

Бұл өте қарапайым мысал, бірақ бұл функцияның қарастырылып отырған анықталу облысы, функцияның қасиеттеріне айтарлықтай әсер ететінін көрсететін көрнекі иллюстрация болып табылады. Бірдей аналитикалық формуламен берілген, бірақ әртүрлі анықталу облыстарында қарастырылатын функциялардың әртүрлі функциялар болатынын ескерген жөн. Егерде мысалдағы $(-2;1)$ жиынын кез келген $(-a;a)$, $a>0$ жиынына өзгертсек, онда функция жұп болар еді.

Енді тақ функцияларға тоқталайық.

2-АНЫҚТАМА.

Егер төменгі екі шарт орындалса, $f(x)$ функциясы тақ функция деп аталады:

1) $D(f)$ анықталу облысынан алынған кез келген x саны үшін $-x$ саны да $D(f)$-ке тиісті болады.

2) кез келген $x\in D(f)$ саны үшін $f(-x)=-f(x)$ теңдігі орындалады.

1) шарт $D(f)$ жиынының координаттар басына қатысты симметриялы екенін білдіреді. Басқаша айтқанда, Ox өсіндегі қарама-қарсы нүктелер жұбының екеуі де $D(f)$ анықталу облысында жатады немесе екеуі де $D(f)$ анықталу облысында жатпайды. Екінші жағдайда, осы нүктелердегі функцияның мәндері қарама-қарсы сандар болады. Бұл, егер қандай да бір

$(x_0;y_0)$ нүктесі координаттар жазықтығындағы тақ функцияның графигіне тиесілі болса, онда $(-x_0;-y_0)$ нүктесі де осы функцияның графигіне тиесілі болады дегенді білдіреді. Мұндай нүктелер жұбы бір-біріне $O(0;0)$ нүктесіне қатысты симметриялы. **Демек, координаттар басы кез келген тақ функция графигінің симметрия центрі болады.**

3 мысал

Келесі функциялардың жұптылығын анықтаңдар.

а) $g(x)=(x+1)|x-2|+(x-1)|x+2|$; ә) $h(x)=(x+1)|x-2|+(x+2)|x-1|$.

Шешуі. а) $f(x)$ функциясының анықталу облысы бүкіл сан өсі болады. Бұдан шығатын қорытынды, $x\in D(f)$ болса, онда $-x\in D(f)$. $|-a-b|=|a+b|$ және $|-a+b|=|b-a|=|a-b|$ теңдіктері кез келген a және b сандары үшін орындалатынын ескеріп, $f(-x)$ үшін төмендегі өрнекті қарастырамыз:

$$f(-x)=(-x+1)|-x-2|-(-x-1)|-x+2|=-(x-1)|x+2|+(x+1)|x-2|=$$

$$=(x+1)|x-2|-(x-1)|x+2|=f(x).$$ Демек, $f(x)$ жұп функция.

ә) Осыған ұқсас пайымдаулар $g(x)$ функциясының тақ функция екендігін көрсетеді:

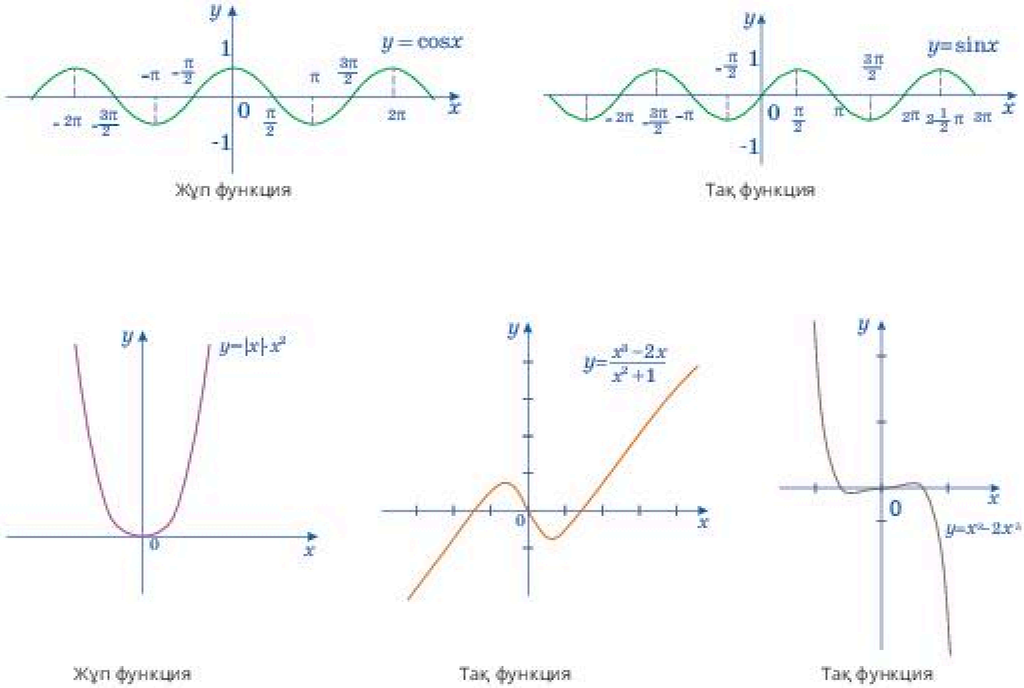
$$g(-x)=(-x+1)|-x-2|+(-x-1)|-x+2|=-(x-1)|x+2|-(x+1)|x-2|=$$

$$=-((x-1)|x+2|+(x+1)|x-2|)=-g(x).$$

Демек, $g(x)$ тақ функция. б) *барлық x үшін $h(-x)=h(x)$ немесе $h(-x)=-h(x)$ теңдіктері үнемі орындалатынын дәлелдеу мүмкін емес. Бұл берілген функцияның жұп болу қасиеті жоқ дегенді білдіре ме? Мүмкін біз түрлендіру барысында қате жіберген шығармыз. Әдетте, $h(-x)=h(x)$ немесе $h(-x)=-h(x)$ теңдіктерінің ешқайсысы да орындалмайтын x нақты мәніне мысал келтіруге ұмтылу, өте қызықты нәтижелерге алып келеді. Мысалы, $h(-1)=2=h(1)$, $h(-2)=-4=-h(2)$ (өз беттеріңше тексеріңдер).* Егер $h(x)$ функциясы жұп болса, онда $h(-2)=-4=-h(2)$ теңдігіне қайшы келеді. Егер $h(x)$ функциясы тақ болса онда $h(-1)=2=h(1)$ теңдігіне қайшы келеді. Демек, $h(x)$ функциясы жұп болмайды.

Мысал ретінде бірнеше функцияның графигін көрсетейік (1–сурет).

Егер қандай бір функцияның жұптылық қасиеті болса, онда барлық $x\in D(f)$ үшін $f(-x)=f(x)$ теңдігі немесе барлық $x\in D(f)$ үшін $f(-x)=-f(x)$ теңдігі орындалады. Сондықтан $f(x)$ функциясын жұптылық қасиеттеріне ие болмайтындығын дәлелдеу үшін x айнымалысының ең болмағанда қандай да бір мәні үшін $f(-x)=f(x)$ немесе $f(-x)=-f(x)$ теңдіктері орындалмайтындығын көрсету жеткілікті. Мысалы $f(x)=x^3-x+3$ функциясы жалпы түрдегі функция болып табылады, себебі $f(-2)=-3$, $f(2)=9$ (егер $f(x)$ жұп немесе тақ болса, онда $f(-2)=f(2)$ немесе $f(-2)=-f(2)$ теңдіктерінің біреуі орындалар еді).



1-сурет

4 мысал

Егер $f(x)$ – жұп функция, $g(x)$ – тақ функция болса, онда $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ – тақ функция болатынын дәлелдеңіз.

Шешуі. 1) Анықталу облысы Ox өсіндегі координата басына қатысты өз-өзіне симметриялы болса, олардың ортақ нүктелерінің жиыны Ox өсіндегі координата басына қатысты өз-өзіне симметриялы болады.

2) Айнымалының кез келген мәні үшін

$h(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot(-g(x))=-f(x)\cdot g(x)=-h(x)$ теңдігі орындалады.

6 жаттығу

Анықталу облысы бірдей болатын $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының екеуі де тақ функциялар болсын, $h(x)=f(x)-g(x)$, $u(x)=f(x)\cdot g(x)$. $h(x)$ және $u(x)$ функциялары қандай функциялар?

7 жаттығу

Бір мезгілде жұп та, тақ та болатын функция бар ма?

Есептер

1-бөлім

Функцияны жұптылыққа зерттеңдер (1-8):

1. (1) а) $f(x)=x$; ә) $f(x)=x^2$; б) $f(x)=|x|$;

в) $f(x)=x|x|$; г) $f(x)=x+|x|$.

2. (1) а) $f(x)=x^4$; ә) $f(x)=x^3$;

б) $f(x)=x^3-x^4$; в) $f(x)=\dfrac{x-2}{|x|+1}$.

3. (2) $f(x)=(x+4)|x-3|+(x-4)|x+3|$.

4. (2) $g(x)=\dfrac{|x-9|}{(x+2)}+\dfrac{|x+9|}{(x-2)}$.

5. (2) $f(x)=(x+3)(x+4)(x+5)-(x-3)(x-4)(x-5)$.

6. (2) $g(x)=(x-5)^9(x+2)^5+(x+5)^9(x-2)^5$.

7. (3) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{x+3}-\dfrac{x^3+3x^2}{x-3}$.

8. (3) $g(x)=\dfrac{(x-2)^5}{(3x+4)^3}+\dfrac{(x+2)^5}{(3x-4)^3}$.

9. (2) $f(x)$ функциясы $(-3;-1)$ аралығында өспелі жұп функция, $D(f)=\mathbb{R}$. $f(x)$ функциясының төмендегі берілген аралықтағы бірсарындылығы туралы не айтуға болады?
а) $(0;6)$; ә) $(-4;0)$; б) $(1;3)$?

10. (1) $f(x)$ жұп функция екені белгілі, $D(f)=\mathbb{R}$, $f(150)=-4$. $x=-150$ нүктесіндегі функцияның мәні неге тең?

11. (2) $f(x)$ жұп функциясы $[-6;6]$ жиынында берілген. $f(x)=7$ теңдеуінің $x\in(0;6]$ аралығында 3 түбірі бар. $f(x)=7$ теңдеуінің $x\in[-6;0)$ аралығында неше түбірі бар болады?

12. (3) $f(x)$ функциясы жұп, $x\geq 0$ болғанда $f(x)=x^2-2x$ екені белгілі. $y=f(x)$ функциясының графигін салыңдар. Функцияны зерттеңдер (Функцияны зерттеу, яғни ол функцияның нөлдерін табу, таңба тұрақтылығы аралығын анықтау, экстремумдерін, ең үлкен, ең кіші мәндерін, функцияның мәндер жиынын табу).

13. (3) $x<0$ болғанда $f(x)=-\dfrac{3}{x}$ түрінде берілген $f(x)$ функциясының жұп екені белгілі. $y=f(x)$ функциясының графигін салыңдар, функцияны зерттеңдер.

14. (2) b параметрінің қандай мәндерінде $f(x)=ax^2+b$ функциясы жұп болады?

15. (4) a параметрінің қандай мәндерінде $f(x)=x^2-(2a+1)x+a^2$ функциясы жұп болады?

16. (2) a параметрінің қандай мәндерінде $f(x)=ax^2+b$ функциясы жұп болады?

17. (4) a параметрінің қандай мәндерінде $f(x)=\sin(x-a)$ функциясы тақ болады?

2-бөлім

Функцияны жұптылыққа зерттеңдер (18–26):

18. (1) а) $f(x)=-x$; ә) $f(x)=|x-2|+|x+2|$; б) $f(x)=4x^5-\frac{1}{x^2}$.

19. (1) $f(x)=0$.

20. (1) $g(x)=(6x-1)^4+(6x+1)^4$.

21. (2) $f(x)=(x+7)|x-4|+(x-7)|x+4|$.

22. (2) $g(x)=\frac{|x-5|}{(x+3)}-\frac{|x+5|}{(x-3)}$.

23. (2) $f(x)=(x-6)^5(x+7)^{12}+(x+6)^5(x-7)^{12}$.

24. (2) $g(x)=(x^2-4x+7)(x^3-7x^2+3x-2)-(x^2+4x+7)(x^3+7x^2+3x+2)$.

25. (3) $f(x)=\frac{x^6-3x^3}{x-5}+\frac{x^6+3x^3}{x+5}$.

26. (3) $g(x)=\frac{(x-3)^3(x+2)^5(x-8)^7}{3x+2}+\frac{(x+3)^3(x-2)^5(x+8)^7}{3x-2}$.

27. (2) $f(x)$ функциясы $(-3;-1)$ аралығында өспелі тақ функция екені белгілі, $D(f)=\mathbb{R}$. Берілген аралықтарда $f(x)$ функциясының бірсарындылығы туралы не айтуға болады: а) $(0;6)$; ә) $(-4;0)$; б) $(1;3)$?

28. (1) $f(x)$ тақ функция екені белгілі, $D(f)=\mathbb{R}$, $f(-5)=20$. $x=5$ нүктесіндегі функцияның мәні неге тең?

29. (2) $[-6;6]$ жиынында $f(x)$ тақ функциясы берілген. $f(x)=7$ теңдеуінің $x\in[0;6]$ аралығында 3 шешімі бар. $x\in[0;6]$ аралығында $f(x)=-7$ теңдеуінің қанша түбірі болады?

30. (3) $f(x)$ функциясы тақ; $x \geqslant 0$ болғанда $f(x)=x^2-2x$ екені белгілі. $y=f(x)$ функциясын зерттеп, графигін салыңдар.

31. (3) $f(x)$ функциясы тақ, $x<0$ болғанда, $f(x)=-x+5$-ке тең. $y=f(x)$ функциясын зерттеп, графигін салыңдар.

32. (2) a параметрінің қандай мәндерінде $f(x)=ax+b$ функциясы жұп болады?

33. (4) $g(x)=f(x)+x^2$ функциясы тақ және $f(3)=2$ екені белгілі болса, $f(-3)$ мәнін табыңдар?

34. (3) a параметрінің қандай мәнінде $f(x)=x\sqrt{a-1}+\sqrt{a+4}$ функциясы жұп болады?

35. (4) Егер $g(x)=f(x)(x+1)$ функциясы жұп және $f(-4)=9$ екені белгілі болса, $f(4)$ мәнін есептеңдер.

36. (2) Түзуде бірнеше нүктелер белгіленген. Жүсіп олардың біреуін таңдады және келесі ұшы белгіленген нүктелерде жататын кесінділерді санады. Сонда кесінділер саны 80 болып шықты. Дәл осылайша ол басқа бір белгіленген нүктені таңдап, кесінділерді санағанда 90 кесінді болды. Түзудің бойындағы белгіленген нүктелер саны қанша екенін табыңдар.

37. (2) Қаңтар, ақпан, наурыз айларында жалақы көлемі 477000 теңгені, ал сәуір, мамыр, маусым айларында 558000 теңгені құрады. Сонымен қатар ағымдағы жыл ішінде жалақы көлемі ай сайын бірдей шамаға өсіп тұрды. Қыркүйек айына түсетін жалақы көлемі қанша болатынын анықтаңдар.

38. (2) Ықшамдаңдар: $\operatorname{tg}^2(270^\circ+\alpha)\cdot\sin^2(180^\circ+\alpha)$.

39. Теңсіздікті шешіңдер:

а) (1) $\dfrac{-4}{3x-7}>0$; ә)(2) $\dfrac{5x+4}{5x^2-6x+1}<\dfrac{1}{x-2}$;

б)(3) $\dfrac{5(x^3+6x^2+12x+8)}{(x-1)^2(x+8)} \geq \dfrac{x(x+2)^3}{(x^2-2x+1)(x+8)}$. Жауабына $[-10;12]$ аралығында жататын бүтін шешімдерінің санын көрсетіңдер.

Жауаптары:

1. а) тақ; ә) жұп; б) жұп; в) тақ; г) жалпылама түрдегі функция.
2. а) жұп; ә) тақ; б) жалпылама түрдегі функция; в) жалпылама түрдегі функция. **3.** Тақ. **4.** Тақ. **5.** Жұп. **6.** Жұп. **7.** Тақ. **8.** Жұп. **9.** а) ештеңе айтуға болмайды, ә) ештеңе айтуға болмайды, б) кемиді. **10.** -4. **11.** 3. **14.** $b\in(-\infty;\infty)$. **15.** $a=-\frac{1}{2}$. **16.** $a\in(-\infty;\infty)$. **17.** $a=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **18.** а) тақ; ә) жұп; б) жалпылама түрдегі функция; **19.** Жұп және тақ. **20.** Жұп. **21.** Тақ. **22.** Жұп. **23.** Тақ. **24.** Жұп. **25.** Тақ. **26.** Жұп. **27.** а) ештеңе айтуға болмайды, ә) ештеңе айтуға болмайды, б) өседі. **28.** -20. **29.** 3 немесе 4. **32.** $a=0$. **33.** -20. **34.** $a=1$. **35.** $-5{,}4$. **36.** 22. **37.** 222000. **38.** $\cos^2 a$. **39.** а) $x<\frac{7}{3}$; ә) $\left(\frac{1}{5};1\right)\cup(2;+\infty)$; б) 9.

§4 ПЕРИОДТЫ ФУНКЦИЯЛАР

«Табиғаттың ұлы кітабы математикалық таңбалармен жазылған».
Г.Галилей

Периодты функцияларды қарастыруға көшейік. Алдымен, әрине, әдеттегідей жаттығу орындаймыз.

1 жаттығу

«Батарейканың өмірі». Көлемі 2500 мАсағ (миллиампер сағат) батарейканы тәулігіне бір рет 4 сағатқа қуат көзіне қосады. Содан соң оны 20 сағат бойы үздіксіз, біткенше қолданады. Сосын оны қайтадан 4 сағатқа қуат көзіне қосады және қайтадан 20 сағат бойы үздіксіз пайдаланады. Қуаты нөлге тең жаңа батарейканы қуат көзіне 2019 жылы 27 ақпанда сағат $20{:}00$-де қосты. Батарейканың қуат алу және электр қуатын шығындау жылдамдығы біркелкі деп есептеп:
а) жуық арадағы 5 тәулік ішінде батарейканың қуат деңгейінің уақытқа тәуелділігінің графигін кескіндеңдер;
ә) 2019 жылдың 2 наурызындағы таңғы сағат $10{:}00$-дегі батарейканың қуат көлемін анықтаңдар.

2 жаттығу

Табиғаттағы немесе күнделікті өмірдегі сипаттамасы қандай да бір уақыт аралығында қайталанып отыратын үдерістерге мысал келтіріңдер.

Қабырға сағаты, планеталардың қозғалысы, тамырдың соғысы, ауладағы әткеншек... Біздің айналамызда периодты түрде қайталанатын құбылыстар толып жатыр. Адамдардың бір жағынан қарағанда танымдық қызығушылығы, екінші жағынан практикалық қажеттілігі осындай құбылыстар мен үрдістердің сандық сипаттамаларының қажеттілігін туындатты. Осы арада, аргумент қандай да бір белгілі шамаға өзгерген кезде мәндері қайталанып отыратын осындай функцияларды қарастыру қажеттігі туындады. Мұндай функциялар ***периодты функциялар*** *деп аталады.*

1-АНЫҚТАМА.

Егер анықталу облысындағы кез келген x үшін $x \pm T$ нүктесі де осы $D(f)$-ке тиесілі және $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$ орындалатындай T оң саны бар болса, онда f функциясы периодты деп аталады. T саны f функциясының периоды делінеді.

$f(x)$ – периоды T болатын периодты функция болсын. Анықтама бойынша, егер анықталу облысында жатқан кез келген x-ті T-ға өзгертсек (T-ны қосып немесе азайтып), онда аргументтің жаңа мәні де сол анықталу облысында жататын болады, ал одан функцияның мәні өзгермейді.

Бұдан шығатыны, егер анықталу облысында жататын кез келген x-ке T санын бірнеше рет қоссақ немесе T санын бірнеше рет азайтсақ, шыққан нәтиже тағы да осы анықталу облысында жатады. Айтылғандарды былай жазуға болады: k – бүтін сан болсын, онда кез келген $x \in D(f)$ үшін $x+kT \in D(f)$ қатынасы орындалады және $f(x+kT)=f(x+kT-T)=f\left(x+kT\underbrace{-T-T-\ldots-T}_{k\ \text{рет}}\right)=f(x)$; k оң саны T санының $|k|$ рет қосылғанын білдіреді, $|k|$ теріс саны T санының $|k|$ рет азайтылғанын білдіреді.

Келтірілген талдаулардан көретініміз, егер k – қандай да бір натурал сан болса, онда $f(x)$ функциясының анықталу облысында жататын кез келген x үшін $x \pm kT$ сандары да осы анықталу облысында жатады және $f(x \pm kT)=f(x)$ теңдігі орындалады. Периодты функцияның анықтамасы түп-тура қайталанғандай болды, тек ондағы T-ның орнына kT алынған. Бұдан шығатыны, kT – саны да функцияның периоды деген сөз.

Қорытындылайық. Егер T саны $f(x)$ функциясының периоды болса, онда:

1) кез келген $x \in D(f)$ және $k \in \mathbb{Z}$ үшін $f(x+kT)=f(x)$ теңдігі орындалады;

2) кез келген $k \in \mathbb{N}$ үшін kT саныда $f(x)$ функциясының периоды болады.

Екінші пункт егер T период болса, онда $2T$, $3T$, $4T$ т.с.с. сандар да $f(x)$ функциясының периоды болатынын білдіреді. Яғни, егер $f(x)$ функциясының периоды бар болса, онда ол функцияның шексіз көп периоды бар.

1986 жылдың 9 ақпанында Галлей кометасы өзінің перигелийінен өтті (перигелий – ғаламшар немесе комета орбитасының Күнге ең жақын нүктесі). Адамдар ешқандай құралдарсыз-ақ түнгі аспанда осы құбылысты көре алды. Әрбір кометаның белгілі бір уақыт мерзімі өткенде қайталанып Күн жүйесінде көрінетінін білесіңдер. Әрине, сендерді қызықтыратыны: «Галлей кометасының перигелийден келесі өтуін көре аламыз ба?» деген сұрақ.

Бұл сұрақтың жауабы кометаның ең кіші айналым периодына тәуелді болады, ол период жуық шамамен 75 жылға тең.

Дәл осылайша, периодты функцияны қарастырғанда бізді периодтардың ішіндегі ең кіші период қызықтырады.

2-АНЫҚТАМА.

Барлық периодтардың ішіндегі ең кіші период (егер ол бар болса) берілген периодты функцияның негізгі периоды деп аталады.

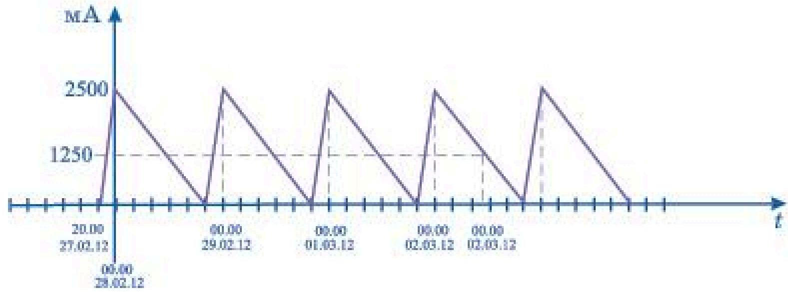
«Егер ол бар болса деген не сөз?» деген сұраққа жауап іздеп көрейік. Егер функцияның оң периодтары бар болса, онда олардың ішіндегі ең кішісі табылатыны түсінікті ғой. Бірақ бәрі оңай бола бермейді. Сандық түзуде келесі түрде анықталатын Дирихле функциясын қарастырайық:

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{ егер } x-\text{иррационал сан,}\\ 0, \text{ егер } x-\text{рационал сан.}\end{cases}$$

Кез келген екі рационал санның қосындысы – рационал сан, ал егер рационал санға иррационал санды қосса – иррационал сан алынатынын көреміз. Сондықтан, кез келген рационал сан Дирихле функциясының периоды болады. Бірақ рационал оң сандардың жиынынан ең кіші элементті таба алмаймыз. Сондықтан Дирихле функциясында негізгі период жоқ.

Айтпақшы, Дирихле функциясының координаталық жазықтықтың көптеген нүктелерінің жиыны ретінде графигінің бар екені анық, бірақ оны айқын бейнелеу мүмкін болмайтынына тағы бір мысал бола алады.

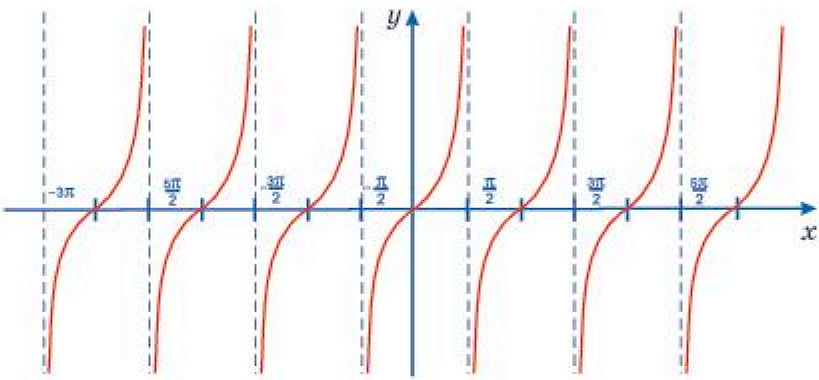
Енді 1-жаттығуда «Батарейканың өмірі» жайлы есепке келсек, бұл нағыз «жүз рет естігенше, бір рет көр» дегенге келеді. Келесі графиктің қалай салынатынын көріңдер (1-сурет).



1-сурет

Тек, егер бұл графиктің қайдан пайда болғанын «ұмытсақ», оны оңға және солға, дәл осылай шексіздікке дейін созсақ, онда біз негізгі периоды $T=24$ сағат болатын периодты функция аламыз.

1 мысал Тағы да бір периодты функцияның графигіне мысал келтірейік (2-сурет).



2-сурет

Сендер негізгі периоды $T=\pi$ болатын, $f(x)=\mathrm{tg}\,x$ функциясы графигінің үзіндісін көріп отырсыңдар. Графиктің шексіз тармағының біреуі $x=-\frac{\pi}{2}$ және $x=\frac{\pi}{2}$ түзулерінің аралығында жатыр, бұл тармақ осы түзулерге сәйкесінше оң және сол жағынан асимптотикалық (шексіз жақын) жақындайды. Бүкіл график Ox өсі бойымен оңға және солға $\pi, 2\pi, 3\pi$-ге және т.с.с. параллель жылжыған шексіз осындай тармақтардан тұрады. Осы конструкцияның барлығын көз алдарыңа елестетіп көріңдер. $y=\mathrm{tg}\,x$ функцияның графигі неліктен дәл осындай болатынын алдағы уақытта талдайтын боламыз.

3 жаттығу

Осы параграфта қарастырған периодты функциялардың қасиеттері мен анықтамасы бұл графикте қалай көрініс тапқанын анықтауға тырысыңдар.

4 жаттығу

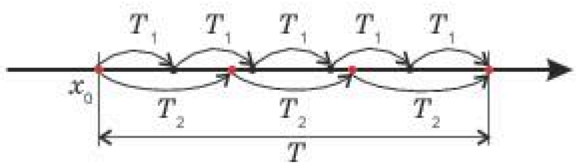
Ox өсінің 0 нүктесінен бастап оң жағына қарай Гүлжайна әрбір 3 бірлік сайын, ал Бақытжан әрбір 5 бірлік сайын нүктелерді белгілейді. Екі рет белгіленген (екеуінің түйіскен) көршілес нүктелердің ара қашықтығын табу керек.

1-ТЕОРЕМА

Егер T_1 және T_2 сәйкесінше $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының периодтары болса, онда $\frac{T}{T_1}$ және $\frac{T}{T_2}$ бүтін оң сан болатындай ең кіші $T>0$ саны $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ функцияларының периоды болады.

Теорема шартындағы T саны бар болуы міндетті емес. Егер T саны бар болса,онда оның негізгі период болуы міндетті емес.

Бұл теореманың қолданылуы туралы тригонометриялық функциялар тарауында толығырақ қарастыратын боламыз. Дәлелдеу орнына 3-суретті келтіреміз.



3-сурет

x_0 нүктесі – Ox өсінде жатқан, $D(f)$ және $D(g)$ тиесілі қандай да бір нүкте болсын. $h(x)=f(x)\cdot g(x)$. f функциясының мәндері барлық қара нүктелерде бір-бірімен беттеседі, ал g функциясының мәндері барлық қызыл нүктелерде бір-бірімен беттеседі. Егер қандай да бір нүкте әрі қызыл, әрі қара болса, онда осы нүктедегі және x_0 нүктесіндегі $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ мәні бірдей болады.

2 мысал

$f(x)$ функциясының периоды $T_1=3$, ал $g(x)$ функциясының периоды $T_2=5$ болсын. Онда $f(x)-g(x)$ функциясының периодын табыңдар.

Шешуі. Айталық, T саны $f(x)$ $g(x)$ функциясының периоды болсын. 1-теорема бойынша T саны үшін келесі қатынастар орындалады: $\frac{T}{T_1}=\frac{T}{3}=k$, $\frac{T}{T_2}=\frac{T}{5}=n$, мұндағы k және n – натурал сандар. Онда $T=3k=5n$, $\frac{k}{n}=\frac{5}{3}$. k және n, сандарының мүмкін болатын ең кіші мәндері сәйкесінше 5 және 3 болады. Сондықтан, $T=15$.

Жауабы: $T=15$.

3 мысал

$f(x)$ – периоды $T=10$ болатын периодты және тақ функция болсын, $f(7)=8$ екені белгілі. Табу керек: $f(113)$.

Шешуі. $T=10$ функция периоды болғандықтан,

$$f(113)=f(113-11\cdot 10)=f(3)=f(3-10)=f(-7).$$

$f(x)$ функциясы тақ, сондықтан $f(-7)=-f(7)=-8$.

Жауабы: -8.

Есептер

1-бөлім

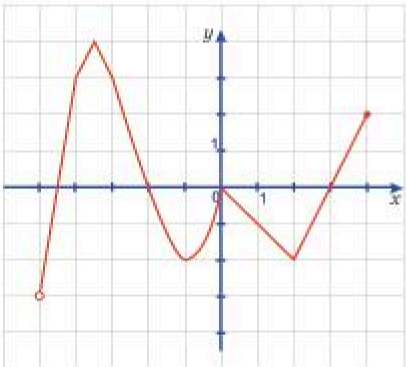
1. (1) $f(1)=-3$ болатын $f(x)$ периодты функциясы берілген. Функция периоды $T=4$. Табу керек: $f(5)$, $f(81)$, $f(-7)$.
2. (2) $g(x)$ жұп функция және периоды $T=6$, $x\in[-2;0)$ жиынында $g(x)=-2x+1$ теңдігі орындалады. Табу керек: $g(100)$, $g(98)$, $g(103)$.
3. (1) Егер $f(x)$ жұп функциясының периоды $T=4$. $[-2;0]$ жиынында $f(x)$ функцияны $f(x)=x+2$ формуласымен берілген. $y=f(x)$ функциясының графигін салыңдар.
4. (2) $f(x)$ функциясының периоды $T=2$ және $(0;2]$ жиынында $f(x)$-тің мәні $f(x)=\frac{4}{x}$ формуласымен беріледі. $y=f(x)$ функциясының графигін салыңдар.
5. (2) $f(x)$ тақ функциясының периоды $T=4$ және $[-2;0]$ жиынында $f(x)=x^2+2x$ формуласымен беріледі. $y=f(x)$ функциясының графигін салыңдар.
6. (2) $f(x)$ жұп функциясының периоды $T=4$ және $[-2;0]$ жиынында $f(x)=x^2+2x$ формуласымен беріледі. $y=f(x)$ функциясының графигін салыңдар.
7. (4) $f(x+2)=-f(x)$ теңдігі $x\in(-\infty;+\infty)$ жиынында орындалатыны белгілі. $f(x)$ периоды $T=4$ болатын периодты функция екенін дәлелдеңдер.

8. (1) $f(x)$ периодты функция екені белгілі. $y=f^2(x)$, $y=f(x^2)$, $y=|f(x)|$, $y=g(f(x))$ функциялары міндетті түрде периодты бола ма? Мұндағы $g(x)$ қандай да бір функция.

9. (3) Егер $y=f(x)$ функциясы тақ және периоды 10-ға тең периодты және $[0;5]$ кесіндісінде $f(x)=10x-2x^2$ формуласымен анықталатын функция екені белгілі болса, онда $f(1)+2f(-2)+4f(16)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

10. (3) $y=f(x)$ функциясы барлық сан өсінде анықталған және периоды 6-ға тең болатын функция. $(-2;4]$ аралығындағы әрбір x үшін $f(x)$ функциясының мәні $g(x)=\begin{cases} x^2-1, -2<x\le 2 \\ 3, \ 2<x\le 4 \end{cases}$ түрінде анықталған $g(x)$ функциясының мәніне сәйкес келеді. $f(6)+f(10)-2f(8)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

11. (3) $y=f(x)$ барлық сан өсінде анықталған және периоды 9-ға тең болатын функция. 4-суретте осы функцияның – $x\in(-5;4]$ аралығындағы графигі кескінделген. $f(-10)-f(-1)\cdot f(8)$ өрнегінің мәнін табыңдар.



4-сурет

2-бөлім

12. (2) $f(-1)=5$, $f(5)=-6$ болатындай $f(x)$ периодты функциясы берілген. Функцияның периоды 10-ға тең. Табу керек: $f(99)-f(-105)$.

13. (3) $g(x)$ функциясының периоды $T=7$-ге тең. $x\in(-1;6]$ жиынында $g(x)=-3x+7$ теңдігі орындалады. Табу керек: $g(2013)$.

14. (2) $y=f(x)$ функциясының периоды $T=4$ және $[6;10)$ жиынында $f(x)=-x+8$ формуласымен берілген. $y=f(x)$ функциясының графигін салыңдар.

15. (2) $f(x)$ функциясының периоды $T=2$ және $[0;2]$ жиынында $f(x)=x^2-2x$ формуласымен берілген. $y=f(x)$ функцияның графигін салыңдар.

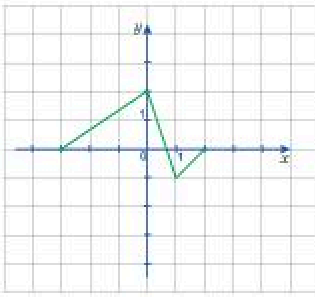
16. (2) $f(x)$ жұп функциясының периоды $T=4$ және $[-2;0)$ аралығында $f(x)=\dfrac{4}{x}$ формуласымен берілген. Функция 0 нүктесінде анықталмаған. $y=f(x)$ функциясының графигін салыңдар.

17. (3) $f(x)$ тақ функциясының периоды $T=12$ және $(0;6)$ аралығында $f(x)=\frac{1}{3}(x-3)^2$ формуласымен берілген $x=0$ және $x=6$ нүктелерінде анықталмаған. $y=f(x)$ функциясының графигін салыңдар.

18. (4) $f(x)$ функциясы x-тің барлық мәнінде $f(x)=f(2-|x|)$ теңдігін қанағаттандыратын функция. $f(x)$ периодты, жұп функция екенін дәлелдеңдер.

19. (3) $y=f(x)$ функциясы барлық сан өсінде анықталған және периоды 6-ға тең болатын жұп функция. $[-3;0]$ аралығында $f(x)=x^2+x+2$ формуласымен беріледі. $f(10)-f(5)+f(-4)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

20. (3) $y=f(x)$ функциясы барлық сан өсінде анықталған және периоды 5-ке тең болатын функция. 5-суретте осы функцияның $-3\le x\le 2$ аралығындағы графигі кескінделген. Мына өрнектің мәнін табыңдар: $\frac{f(11)}{f(0)\cdot f(-9)}$.



5-сурет

21. (3) Әлішердің отбасы саяжайға 16:00-де келді. Егер олар жылдамдықтарын 25%-ға арттырса, онда 14:30-да келер еді. Олар үйден қай уақытта шықты?

22. (1) Ықшамдаңдар: $\frac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha}-\mathrm{tg}(45°+\alpha)$.

23. (3) Балжан жаңа үйден пәтер сатып алғысы келіп жүр. Сату бөлімінің менеджері оған пәтерімен бірге 1 095 000 теңгеге жерасты автотұрағынан орынды қоса сатып алуды ұсынды. Егер Балжан автотұрақтан орын сатып алса, онда ай сайын оның техникалық қызметіне 3000 теңге төлейді. Егер орын сатып алмаса, онда сол орын үшін тәулігіне 400 теңге төлеуге тура келеді. Төмендегі сандардың қайсысы автотұрақтағы орынның құны өтелетін жыл санын көрсетеді?

A) 4; B) 6; C) 8; D) 10; E) 12.

24. (2) Жүйені шешіңдер: $\begin{cases}\frac{x+y}{x-y}=5,\\ x^2+y^2=13.\end{cases}$

Жауаптары:

1. −3; −3; −3. **2.** 5, 5, 3. **8.** Иә, жоқ, иә, иә. **9.** −48. **10.** −4. **11.** −6. **12.** 11. **13.** −5. **19.** 6. **20.** 0,5. **21.** уақыт 08:30. **22.** 0. **23.** D. **24.** (−3; −2), (3;2).

§5 ФУНКЦИЯНЫҢ КОМПОЗИЦИЯСЫ ЖӘНЕ КЕРІ ФУНКЦИЯ

«Мен адамдарға қажетті болатын арифметиканың жай және күрделі сұрақтарын қамтитын есептеулер жайлы алгебра және әлмукабала атты шағын кітаптар құрастырдым».

Әл-Хорезми

5.1 Күрделі функциялар

1 жаттығу

Кейбір оқу орындарында шәкіртақы келесі кесте бойынша тағайындалады делік:

(0;3,5]	(3,5;4]	(4;4,5]	(4,5;5]
0	10000	20000	40000

Жоғарғы қатарда студенттің соңғы семестрдегі тапсырған емтихандарының нәтижесі бойынша орташа балы, төменгі қатарда оған сәйкес шәкіртақы мөлшері теңгемен берілген. Келесі кестенің жоғарғы қатарында осы оқу орнындағы бір топтағы студенттердің тізім бойынша рет саны, ал төмендегіде соңғы сессия қорытындысының орташа балы көрсетілген.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3,5	4	3,7	3,2	4,1	5	4,9	3	3,3	4,75	4,5	3,6	4,5	4,9	3,1	5

Неше студент 40000 теңге мөлшерінде шәкіртақы алады?
Неше студент 10000 теңгеден 20000 теңгеге дейін шәкіртақы алады?

$f(x)=\sqrt{x}$ және $g(x)=3x+1$ функцияларын олардың нақты анықталу облыстарында қарастырамыз. $g(x)$ функциясы 5 санына 16 санын сәйкестендіреді, өйткені $g(5)=3\cdot 5+1$. $f(x)$ функциясы 16 санына 4 санын сәйкестендіреді: $f(16)=\sqrt{16}=4$. Нәтижесінде 5 санына 4 саны сәйкестендірілген болып шығады.

$$5 \xrightarrow{g(x)} 16 \xrightarrow{f(x)} 4$$

$16=g(5)$ болғандықтан, $f(16)=f(g(5))=4$ түрінде жазуға болады. $f(g(5))=4$ түрінде жазылуы, 5 санына әуелі $g(x)$ функциясымен «әсер еткенін», сосын шыққан санға $f(x)$ функциясымен «әсер еткенін» айқын көрсетеді. Осыған ұқсас, $f(g(10))=f(31)=\sqrt{31}$. Бірақ, мысалы, $f(x)$ функциясы (-3) санына (-8) санын сәйкестендіреді, ал $f(x)$ функциясының қандай санды болмасын (-8) санына сәйкестендіруге мүмкіндігі жоқ, өйткені (-8) саны оның анықталу облысына кірмейді. Қандай сандарға әуелі $g(x)$ функциясымен, одан соң $f(x)$ функциясымен «әсер етуге» болатынын және қандай сандарға «әсер етуге» болмайтынын біліп алайық. $g(x)$ функциясы x санын $3x+1$ санына «айналдырып», ал $f(x)$ функциясы одан түбір табады, $3x+1\geq 0$ шартын аламыз (түбір тек теріс емес сандардан алынады). Бұдан біз $x<-\dfrac{1}{3}$ шарты орындалғанда $g(x)$ мәнін есептеп шығара аламыз, бірақ $f(g(x))$ мәнін есептей алмайтынымызды түсінеміз. Кез келген $x\geq-\dfrac{1}{3}$ үшін, алдымен $g(x)$ санын есептеп, содан кейін осы санды $f(x)$-ке қоя аламыз. Осы айтылғанды $f(g(x))=\sqrt{g(x)}$ түрінде жазуға болады.

Сонымен жаңа функция пайда болды. Бұл функция $\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$ жиынындағы әрбір санға оған екі функцияны кезекпен, алдымен $g(x)$, одан соң $h(x)$ «қолданғанда» шығатын нәтижені сәйкестендіріп қояды. Егер жаңа функцияны қандай да бір таңбамен белгілесек, мысалы $h(x)$, онда $h(x)=f(g(x))$ және $D(h)=\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. Сонымен қатар, біздің аналитикалық формуланы жазуға мүмкіндігіміз бар: $h(x)=\sqrt{3x+1}$.

$h(x)$ функциясы **функцияның композициясы** немесе **функцияның суперпозициясы** немесе **күрделі функция** деп аталады.

1-АНЫҚТАМА.

$f(x)$ және $g(x)$ екі функциясы берілсін. Егер $g(x)\in D(f)$ болатындай, g функциясының анықталу облысынан алынған x бар болса, онда мұндай x үшін $g(x)$ нүктесінде f функциясының мәні бар болады да, оны $f(g(x))$ деп белгілейді. Әрбір осындай x-ке $f(g(x))$ санын сәйкестендіретін функцияны функциялар композициясы деп атайды және $y=f(g(x))$ деп белгілейді. $g(x)\in D(f)$ орындалатындай $x\in D(g)$ мәндер жиыны композицияның анықталу облысы болып табылады.

Аналитикалық түрде берілген функциялар үшін композиция тұрғызу оңай: бір функцияның формуласын екіншісінің аргументінің орнына қою жеткілікті.

1 мысал

$f(x)=x^3,\ g(x)=|x+4|\ ,h(x)=\dfrac{1}{2x^2}$ болсын. Онда

$$f(g(x))=g^3(x)=|x+4|^3;\ g(h(x))=|h(x)+4|=\left|\frac{1}{2x^2}+4\right|=\frac{1}{2x^2}+4;$$

$$h(g(x))=\frac{1}{2g^2(x)}=\frac{1}{2|x+4|^2}=\frac{1}{2(x+4)^2};$$

$$f(h(x))=h^3(x)=\left(\frac{1}{2x^2}\right)^3=\frac{1}{8x^6};$$

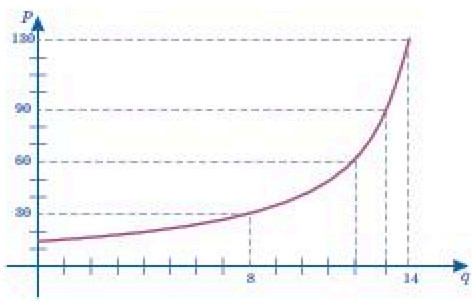
$$h(f(x))=\frac{1}{2f^2(x)}=\frac{1}{2(x^3)^2}=\frac{1}{2x^6};\ h(h(x))=\frac{1}{2h^2(x)}=\frac{1}{2\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2}=2x^4.$$

2 мысал

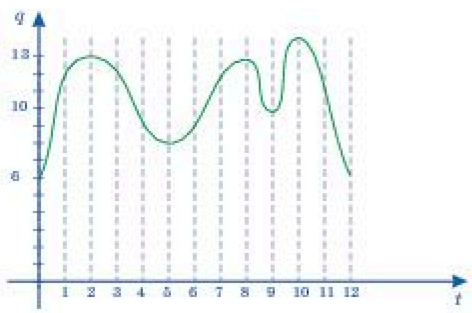
Егер $f(x)=x^2-2x$ болса, онда $f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)$.

2 жаттығу

1-график B зауыты шығарған A өнім бірлігінің p өзіндік құнының әлемдік нарықтағы C шикізатының q бағасына тәуелділігін көрсетеді (1-сурет). 2-график C шикізаттың 2010 жылғы ішіндегі бағасын көрсетеді (Ox өсі бойымен айлардың реті берілген, 2-сурет). Әр айдың соңындағы A өнімнің өзіндік құнын анықтаңдар.



1-сурет

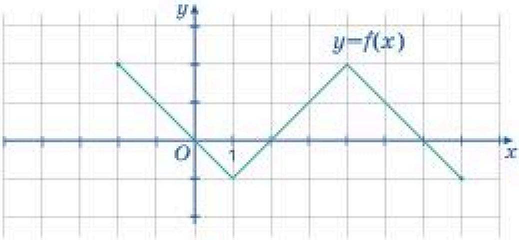


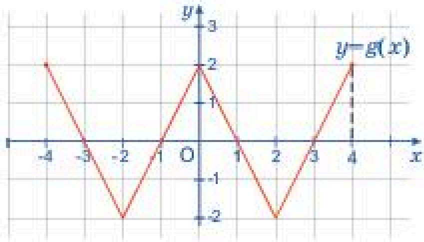
2-сурет

Есептер

1-бөлім

1. Төмендегі суретте $y=f(x)$ және $y=g(x)$ функцияларының графиктері бейнеленген. $D(f):[-2;7], D(g):[-4;4]$.





а) Табу керек: $f(g(2))$, $g(f(3))$, $f\left(g\left(-2\frac{1}{2}\right)\right)$.

ә) $f(g(x))=2$ теңдеуін шешіңдер.

б) $g(f(x))=-1$ теңдеуін шешіңдер.

2. (1) $f(x)=3x+2$ және $g(x)=-2x+1$ функциялары берілген. Табу керек: $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(g(f(x)))$, $g(f(f(x)))$

3. (2) $(a;b)$ аралығында $f(x)$ өспелі, $g(x)$ кемімелі функциялар болсын. Берілген аралықта $h(x)=f(g(x))$ функциясының бірсарындылық (монотондылық) сипаты туралы не айтуға болады?

4. а) (1) $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ болсын. Табу керек: $\varphi(\varphi(x))$.

ә) (2) $\alpha(x)=\frac{xa+1-a^2}{x-a}$, мұндағы a – қандайда бір сан. $\alpha(\alpha(x))=x$ болатынын дәлелдеу керек.

5. $f(x)=-x+4$, $g(x)=2x+2$ болса, онда:

а) (1) $g(f(x))=f(x)$ теңдеуін шешіңдер.

ә) (3) x-тің қандай мәндерінде $g(x)$ функциясының мәні $f(g(x))$ функциясының мәнінен артық болмайды?

6. (2) $h(x)=x$ және $f(x)=\frac{2x-1}{x}$ функциялары берілген. Келесі композицияларды табыңдар:

а) $h(f(x))$; ә) $f(h(x))$.

7. (3) $g(x)=\frac{2x+3}{x-4}$ және $f(x)=\frac{x}{x+1}$ функциялары берілген. Келесі теңсіздіктерді шешіңдер:

а) $g(f(x))<1$; ә) $f(g(x))>0$; б) $f(g(x))>-1$.

8. (2) $y=kx+m$ түріндегі функция сызықтық функция деп аталады, мұнда k және m – қандай да бір сандар. Кез келген екі сызықтық функцияның композициясы да сызықтық функция болатынын дәлелдеңдер.

9. (4) Барлық x үшін $f(x+3)=2f(x)-5$ екені белгілі. а) $f(x+6)$ және ә) $f(x+9)$ функцияларын $f(x)$ арқылы өрнектеңдер.

10. (3) $h(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2$ болсын. $f_1(x)=h(g(x))$ және $f_2(x)=g(h(x))$ функцияларының әрқайсысының анықталу облысын табыңдар. $x<0$ болғанда $f_1(x)$–тің формуласы қандай болады?

11. (2) $g(x)=\dfrac{1}{x}$ және $f(x)=x^2-4x+3$ функциялары берілген. x-тің қандай мәндерінде $f(g(x))$ функциясының мәні нөлден кіші болады?

12. (3) $f(x)$ функциясының «нөлдері», яғни $f(x)=0$ болатындай, функцияны 0-ге айналдыратын x аргументінің мәндері $\{-4;\ 2;\ 0\}$ жиынын құрайды. $h(x)=f(2x)$ функциясының «нөлдерін» табыңдар.

13. (3) $f(x)$ функциясының $D(f)$ нақты анықталу облысы $(-\infty;5)\cup(5;9)$ жиынын құрайтыны белгілі. $h(x)=f(2x+3)$ функциясының анықталу облысын табыңдар.

14. (3) $f(x)$ функциясының $D(f)$ нақты анықталу облысы $[7;+\infty)$ жиынын құрайтыны белгілі. $h(x)=f(-2x+1)$ функциясының анықталу облысын табыңдар.

15. (3) $f(x)$ функциясының $D(f)$ нақты анықталу облысы $[17;26)$ жиынын құрайтыны белгілі. $h(x)=f(3x+2)$ функциясының анықталу облысын табыңдар.

2-бөлім

16. (2) 1-бөлімдегі №1 есептің суретін және шартын пайдаланып, мына тапсырмаларды орындаңдар:

а) Табу керек: $g(f(2))$, $f\left(g\left(2\frac{1}{2}\right)\right)$, $g(f(7))$;

ә) $g(f(x))=2$ теңдеуін шешіңдер;

б) $f(g(x))=-2$ теңдеуін шешіңдер.

17. (1) $g(x)=2x-3, h(x)=\cos x$ және $f(x)=x^3$ функциялары берілген. Табу керек: $h(f(x)), f(h(x)), f(g(x)), g(f(x)), g(h(x)), h(g(x))$.

18. (1) $f(x)=2x-3$ функциясы үшін $f(f(x)), f(f(f(x)))$ -ті табыңдар.

19. (2) $(a;b)$ аралығында $f(x)$ өспелі, $g(x)$ кемімелі функциялар болсын. Берілген аралықта $g(f(x))$ функциясының бірсарындылық сипаты туралы не айтуға болады? $g(g(x))$ функциясы туралы не айтуға болады?

20. (2) $\varphi(x)=\dfrac{x-1}{x}$ деп белгілейік. $\varphi(\varphi(\varphi(x)))=x$ екенін дәлелдеу керек.

21. (2) $h(x)=-2x+1,\ g(x)=3x+3$ болсын.

а) $h(g(x))\geq h(x)$ теңсіздікті шешіңдер.

ә) $g(h(x))$ және $4h(g(x))$ функцияларының мәндері өзара тең болатындай x-тің мәндерін табу керек.

22. (3) $g(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$ және $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ функциялары берілген. Келесі теңсіздіктерді шешіңдер:

а) $g(f(x))<0$; ә) $f(g(x))>\dfrac{1}{2}$; б) $f(f(x))>f(3)$.

23. (3) Теңсіздікті шешіңдер: $g(g(x))\geq 2$, егер $g(x)=\dfrac{3x-8}{x-3}$ болса.

24. (2) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},\ c\neq 0$ түріндегі функция бөлшек-сызықтық функция деп аталады. Екі сызықтық-бөлшек функцияның композициясы да сызықтық-бөлшек функция болатынын дәлелдеу керек.

25. (2) $g(x)=\dfrac{1}{x}$ және $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$ функциялары берілген. x-тің қандай мәндерінде $f(g(x))$ функциясының мәні нөлден кіші болады?

26. (2) $f(x)=7$ теңдеуінің шешімдері $\{-9;\ 6;\ 5;\ 8\}$ сандары екені белгілі. $f(3x)=7$ теңдеуінің түбірлерін табыңдар.

27. (3) $f(x)$ функциясының $D(f)$ нақты анықталу облысы $(-4;4)\cup[9;16]$ жиыны екені белгілі. $h(x)=f(x^2)$ функциясының анықталу облысын табыңдар.

28. (3) $g(x)=\dfrac{3x+1}{x}$ және $f(x)=x^2-5x+6$ функциялары берілген. $f(g(x))>0$ теңсіздігін шешіңдер.

29 (3) Сағат дұрыс жүріп тұр. 5 минут өткенде сағаттық және минуттық тілдер беттеседі. Ең аз дегенде қанша уақыт өткеннен кейін сағаттық және минуттық тілдер арасындағы бұрыш осыдан 10 минут бұрынғыдай болады?

30 (2) Арифметикалық прогрессияның төртінші және алтыншы мүшелерінің қосындысы 14-ке тең. Прогрессияның алғашқы тоғыз мүшесінің қосындысын табыңдар.

31 (2) Ықшамдаңдар: $\left(\dfrac{3-\sqrt{a}}{9-a}+\dfrac{1}{3-\sqrt{a}}-6\dfrac{a^2+162}{729-a^3}\right)^{-1}+\dfrac{a(a+9)}{54}$.

32. (3) Теңдеулерді шешіңдер: а) $\left|-x^2-16\right|=8x$; ә) $x^2-4|x|+3=0$.

Жауаптары:

1. а) $2;0;1$; ә) $x=-2;2$; б) $x=-1\frac{1}{2},3\frac{1}{2},4\frac{1}{2}$. **2.** $f(g(x))=-6x+5$; $g(f(x))=-6x-3$, $f(g(f(x)))=-18x-7$, $g(f(f(x)))=-18x-15$.

3. $h(x)$ – кемімелі.

4. а) $\varphi(\varphi(x))=x$.

5. а) 6; ә) $x\le 0$.

6. $h(f(x))=f(h(x))=f(x)$.

7. а) $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{7}{8};+\infty\right)$; ә) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{3};4\right)\cup(4;+\infty)$;

б) $\left(-\infty;-\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{3};4\right)\cup(4;+\infty)$.

9. а) $4f(x)-15$; ә) $8f(x)-35$.

10. Егер $x<0$ болса, онда $D(f_1)=\mathbb{R}$, $D(f_2): x\ge 0$, $f_1(x)=-x$.

11. $x\in\left(\frac{1}{3};1\right)$.

12. $\{-2;1;0\}$.

13. $(-\infty;1)\cup(1;3)$.

14. $(-\infty;-3]$.

15. $[5;8)$.

16. а) $2,\ 1,\ 0$; ә) $x\in\{0;2;6\}$; б) $x\in\varnothing$.

17. $h(f(x))=\cos x^3$; $f(h)=\cos^3 x$; $f(g(x))=(2x-3)^3$; $g(h(x))=2\cos x-3$; $g(h(x))=2\cos x-3$; $h(g(x))=\cos(2x-3)$.

18. $f(f(x))=4x-9$; $f(f(f(x)))=8x-21$.

19. $g(f(x))$ кемиді, $g(g(x))$ өседі.

21. а) $\left(-\infty;-1\frac{1}{2}\right]$; ә) $-1\frac{4}{9}$.

22. а) $x\in\left(-\frac{5}{3};-\frac{3}{2}\right)$;

ә) $x\in(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{4}{3};-1\right)\cup(-1;+\infty)$;

б) $x\in(-2{,}5;-2)\cup\left(-2;-\frac{5}{3}\right)$.

23. $x\in[2;3)\cup(3;+\infty)$.

25. $x\in(-1;0)$.

26. $\left\{-3;2;\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right\}$.

27. $[-4;-3]\cup(-2;2)\cup[3;4]$.

28. $(-1;0)\cup(0;+\infty)$.

29. 20 минут.

30. 63.

31. $-\frac{3}{2}$.

32. а) $x=4$, ә) $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=3$.

5.2 Өзара кері функциялар

1 жаттығу

Координаталық жазықтықта $y=x$ түзуін салыңдар. $(4;3)$ және $(3;4)$, $(-2;5)$ және $(5;-2)$, $(-3;-6)$ және $(-6;-3)$, $(5;0)$ және $(0;5)$ нүктелер жұбын белгілеңдер. $y=x$ түзуі мен осы нүктелер жұбы туралы не айтар едіңдер?

Қазақстан Республикасының жасы он жетіден кем емес әр азаматына оның жеке куәлігінің нөмірін сәйкестендірейік.

Әр адам куәліктің жеке нөміріне ие болады. Сол себепті куәліктің нөмірін біле отырып, оны иесіне бір мәнді сәйкестікті қоюға болады.

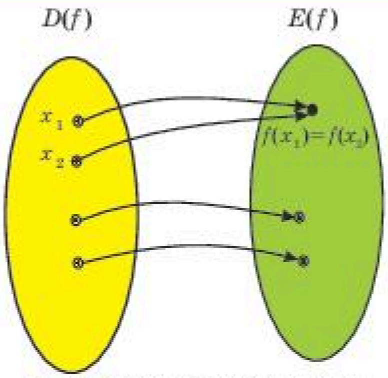
Қазақстан Республикасының әрбір азаматына оның аты мен фамилиясының әріптерінен құралған тізбектерді сәйкестендірейік. Екі адамның аты мен фамилиясы бірдей болуы мүмкін. Бұл жағдайда адамның аты мен фамилиясы бойынша оның жеке басын анықтай алмаймыз.

Шын мәнінде бірінші және екінші жағдайдың екеуі де функцияны сипаттайды. Бірақ бірінші жағдайда функция өзара бір мәнді сәйкестікті берсе, екінші жағдайдағы сәйкестік өз ара бір мәнді емес.

$f(x)=x^2$ функциясын қарастырайық, $D(f)=(-\infty;+\infty)$. Егер $f(x)=4$ болса, онда біз x-тің, мәні неге тең болатыны жайлы бір мәнді айта алмаймыз, өйткені $f(-2)=4$ және $f(2)=4$. $g(x)=x^2, D(g)=(-\infty;0]$ функциясын қарастырайық. Егер $g(x)=a\geq 0$ болса, онда $x=-\sqrt{a}$ деп айта алмыз. $g(x)$ функциясы өзара бірмәнді сәйкестікті береді, ал $f(x)$ функциясы олай болмайды.

2-АНЫҚТАМА.

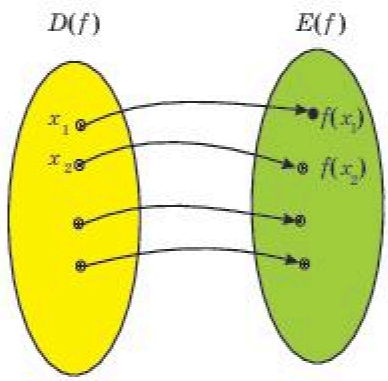
$x_1 \neq x_2$ болатындай $D(f)$-те жататын, кез келген x_1 және x_2 мәндері үшін $f(x_1) \neq f(x_2)$ орындалса, онда $f(x)$ функциясы **өзара бірмәнді** деп аталады.



өзара бірмәнді емес функция

3-сурет

Басқаша айтқанда, **егер аргументтің әртүрлі екі мәніне функцияның әртүрлі мәндері сәйкес келетін болса, онда функция өзара бірмәнді болады.** (3, 4-сурет). Бұл $f(x_1)=f(x_2)$ теңдігінен $x_1=x_2$ теңдігі шығады дегенге пара-пар (бір игрек әр түрлі екі икстен алынуы мүмкін емес). Демек, $E(f)$-нің әрбір y саны үшін $D(f)$-алынған x аргументтің $y=f(x)$ болатындай тек бір ғана мәні сәйкес келеді. $E(f)$-тің әрбір y санын $y=f(x)$ орындалатындай $D(f)$-тің x санымен сәйкестендіріп қоямыз. Функцияның жаңа анықтамасы шықты! Ол тек $E(f)$-тен $D(f)$-ке әсер етеді, яғни $E(f)$ – анықталу облысы, $D(f)$ – жаңа функцияның мәндер жиыны болады, оны $f(x)$-ке **кері** функция деп атайды және $f^{-1}(x)$ деп белгілейді (5-сурет).



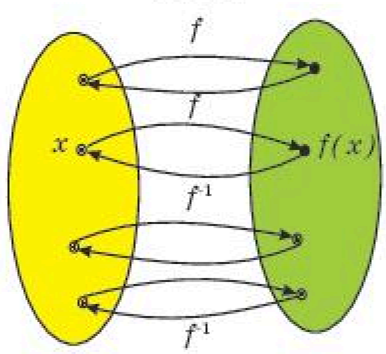
өзара бірмәнді функция

4-сурет

Неліктен $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(y)$ емес? Өйткені f функциясының y мәндері f^{-1} функциясының x аргументі болады.

Егер $f^{-1}(f(x))$ функциясының композициясын қарастырсақ, онда кез келген $x \in D(f)$ үшін $f^{-1}(f(x))=x$ теңдігі орындалады (суретті қара). Сол сияқты кез келген $x \in E(f)=D(f^{-1})$ үшін $f(f^{-1}(x))=x$ теңдігі орындалатыны түсінікті. Осыдан $f(x)$ функциясы $f^{-1}(x)$ функциясына кері екендігі шығады, f және f^{-1} **өзара кері** функциялар деп аталады.

Енді нақты жөнделген анықтамасын құрастырайық.



5-сурет

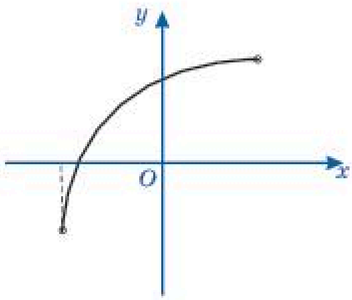
3-АНЫҚТАМА.

Анықталу облысы – $D(f)$ және мәндерінің жиыны – $E(f)$ болатын f функциясы берілсін. Кез келген $x \in D(f)$ үшін $g(f(x))=x$ теңдігі орындалып және $g(x)$-тің $D(g)$ анықталу облысы $E(f)$ мәндер жиынымен сәйкес келсе, онда $g(x)$ функциясы $f(x)$ функциясына кері функция деп аталады. f функциясына қатысты осындай қасиетке ие $g(x)$ функциясы $f^{-1}(x)$ деп белгіленеді.

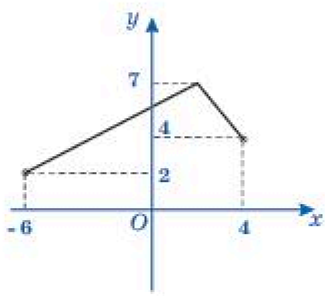
Егер f өзара бірмәнді болса ғана және тек сонда ғана f функциясына кері функция бар болады.

2 жаттығу

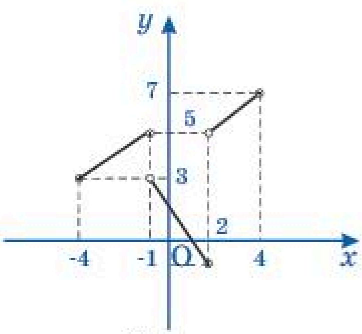
Графиктері суретте көрсетілген функциялар өзара бірмәнді бола ма?



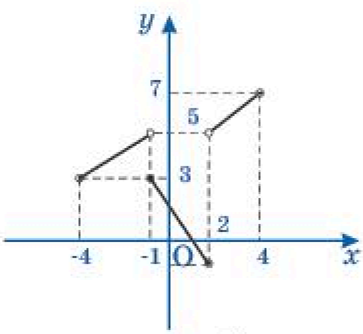
а)



ә)

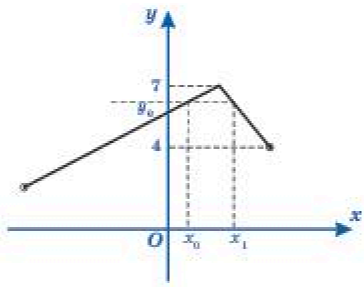


б)



в)

Егер кез келген $y_0 \in E(f)$ үшін $y_0 = f(x_0)$ болатындай тек бір ғана $x_0 \in D(f)$ бар болса, онда $y=f(x)$ функциясы өзара өзара бірмәнді болады. ә) суретте кез келген $y_0 \in [4;7)$ үшін $f(x_0)=y_0$ x_0-дің екі мәні бар.



Сондықтан, ә) суреттегі функция өзара бірмәнді бола алмайды, демек кері функциясы болмайды. Сол сияқты в) суреттегі функция да екі нүктеде 3 мәнін қабылдайды ($x=-4$ және $x=-1$), сол себепті өзара бірмәнді бола алмайды.

Сонымен, **егер жоқ дегенде бір горизонталь түзудің графикпен екі немесе одан да көп ортақ нүктелері бар болса, онда функция өзара бірмәнді болмайды. Керісінше, егер әрбір горизонталь түзудің $y=f(x)$ графигімен ортақ нүктесі тек біреу ғана болса, онда $f(x)$ функциясы өзара бірмәнді бола алады.** Осындай қасиет кез келген монотонды (бірсарынды) функциялар үшін де орындалатындығы түсінікті (а,б-суреттер).

Енді кері функцияларды табудың практикалық тәсілін қарастырайық. $y=f(x)$ – қандай да бір аналитикалық функция болсын. Егер f^{-1} функциясының формуласы берілген болса, онда анықтама бойынша x-ті y арқылы өрнектеуі тиіс. Бірақ x-ті y арқылы өрнектеу, ол $y=f(x)$ функциясын шешу болып табылады, мұнда y параметр ретінде қарастырылады. Егер барлық y үшін $y=f(x)$ теңдеуінің бір ғана түбірі бар болса, онда жауабы бірден табылады. Егер бірнеше түбірі бар болса, онда $D(f)$-те жататын түбірді таңдау керек.

1 мысал

$y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ функциясына кері функцияны табыңдар.

Шешуі. x-ті y арқылы өрнектейміз:

$y(x-2)=3x+1,\qquad yx-2y=3x+1,\qquad x(y-3)=2y+1,\qquad x=\dfrac{2y+1}{y-3}.$

Енді y-тің мәні f^{-1} кері функциясының x аргументі екенін еске түсіру керек: $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$.

Жауабы: $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$.

2 мысал

$f(x)=x^2, x\in(-\infty;0]$. Табу керек $f^{-1}(x)$.
Шешуі. $y=x^2$ теңдеуін шешеміз, мұндағы x – айнымалы, y – параметр. $x=\pm\sqrt{y}$ аламыз. Екі түбірдің қайсысы $D(f)=(-\infty;0]$ жатса, соны таңдаймыз: $x=-\sqrt{y}$. f функциясының y мәні кері функцияның аргументі болады: $y=-\sqrt{x}$.
Жауабы: $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$, мұндағы $x\in[0:+\infty)$.

3 мысал

$f(x)=x^2+2x,\ x\in[-1;+\infty)$. Табу керек $f^{-1}(x)$.
Шешуі. Теңдеуді шешеміз: $y=x^2+2x$.

$x^2+2x+1=y+1$, $(x+1)^2=y+1$, $x+1=\pm\sqrt{y+1}$, $x=-1\pm\sqrt{y+1}$.

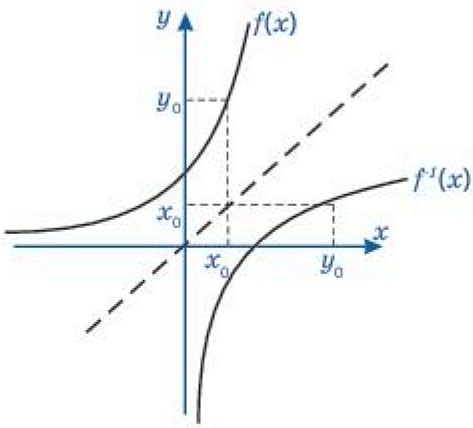
$x=-1+\sqrt{y+1}\in[-1;+\infty)$, $x=-1-\sqrt{y+1}\notin[-1;+\infty)$ екенін байқаймыз. Енді $x=-1+\sqrt{y+1}$ формуласындағы x және y-тің орындарын формальды ауыстыру қалды:

Жауабы: $y=-1+\sqrt{x+1}$, мұндағы $x\in[-1;+\infty)$.

Өзара кері функциялардың тағы екі қасиетін тұжырымдап дәлелдейік.

1) Екі өзара кері функциялардың графиктері $y=x$ түзуіне қатысты бір-біріне симметриялы.

2) Егер екі өзара кері функциялардың біреуі өспелі болса, онда екіншісі де өспелі болады. Егер өзара кері функциялардың біреуі кемімелі болса, онда екіншісі де кемімелі болады.



6-сурет

Дәлелдеу: 1) Егер $(x_0;y_0)$ нүктесі $y=f(x)$ графигінде жатса, онда ол $y_0=f(x_0)$. Кері функцияның анықтамасы бойынша $x_0=f^{-1}(y_0)$, яғни $(y_0;x_0)$ нүктесі $y=f^{-1}(x)$ графигінде жатады. Кез келген $(x_0;y_0)$ және $(y_0;x_0)$ нүктелері $y=x$ түзуіне қатысты бір-біріне симметриялы екенін байқауға болады (1-жаттығу).

2) $y=f(x)$ өспелі және $f^{-1}(x)$ оған кері функция болсын. Өспелі функция үшін $x_1>x_2$ және $y_1>y_2$ шарттары мәндес, мұндағы $y_1=f(x_1)$ және $y_2=f(x_2)$. Бірақ $x_1=f^{-1}(y_1)$ және $x_2=f^{-1}(y_2)$. Осыдан $y_1>y_2$ және $f^{-1}(y_1)>f^{-1}(y_2)$ шарттарының ұқсас екендігі шығады, яғни $f^{-1}(x)$ функциясының үлкен аргументіне үлкен мән сәйкес келеді. Демек, $f^{-1}(x)$ – өспелі.

3 жаттығу

Кемімелі функция үшін 2-қасиетті дәлелдеңдер.

Есептер

1-бөлім

1. (1) Төмендегі функциялардың қайсысының кері функциялары бар екенін анықтаңдар. Кері функцияның формуласын жазыңдар:

а) $f(x)=3x-5$; ә) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$;

б) $f(x)=x^2+2x$, $x\geq -1$; в) $f(x)=x^2+x$, $x\geq 0$.

2. (2) a, b, c, d сандарының қандай қатынасында $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ функциясы өзіне кері болады?

3. (3) f функциясы A жиынын қандай жиынға бейнелейді, егер:

а) $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$, $A=(3;5]$;

ә) $f(x)=4-\dfrac{x}{2}$, $A=[-4;6)$;

б) $f(x)=x^2-x-2$, $A=[0;3]$?

4. (3) Берілген функцияға кері функцияны табыңдар. Кері функцияның анықталу облысы мен мәндер облысын көрсетіңдер. Координаттар жүйесінде берілген функция мен оған кері функцияның графиктерін салыңдар:

а) $y=2x$; ә) $y=-3x$; б) $y=5x-1$; в) $y=3-4x$;

г) $y=\dfrac{3}{x-1}$; ғ) $y=\dfrac{2}{2-x}$; д) $y=\dfrac{3x}{2x-1}$; е) $y=\dfrac{1-x}{x+2}$.

5. (2) $f(x)$ – функциясы және оның кері функциясы $f^{-1}(x)$ бар болсын. $f^{-1}(x)$ функциясы туралы не айтуға болады, егер:

а) $f(x)$ – тақ функция; ә) $f(x)$ – өспелі функция; б) $f(x)$ – кемімелі функция болса?

6. (2) Төмендегі функциялардың қайсысының кері функциялары бар?

а) $f(x)=x+x^3$; ә) $f(x)=x-x^3$; б) $f(x)=x|x|$?

2-бөлім

7. (2) Төмендегі $f(x)$ функцияларының $f^{-1}(x)$ кері функцияларының формуласын жазып, олардың анықталу облысын көрсетіңдер:

а) $f(x)=2x+7$; ә) $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+5}$; б) $f(x)=\sqrt{3-2x}+1$.

8. (2) $f(x)=x+x^5$ функциясына кері функция $g(x)$ болсын. $g(34)$-ті есептеңдер.

9. (3) $f(x)$ функциясына кері функция $g(x)$ болсын. $f(ax+b)$, $(a\neq 0)$ функциясына кері функцияны $g(x)$ арқылы өрнектеңдер.

10. (5) $f(x)=2x-|x+1|$ функциясы үшін кері $f^{-1}(x)$ функциясының формуласын жазыңдар.

11. Берілген функцияға кері функцияны табыңдар. Кері функцияның анықталу облысы мен мәндер облысын көрсетіңдер. Бір координаттар жүйесінде берілген функция мен оған кері функцияның графиктерін салыңдар:

а) (2) $y=(x+3)^2$, $x\le -3$; ә) (2) $y=(x-4)^2$, $x\ge 4$;

б) (3) $y=x^2+8x-4, x\ge -4$; в) $y=x^2-2x+5$, $x\le 1$;

г) (2) $y=\sqrt{x-2}$; ғ) (2) $y=\sqrt{3-x}$;

д) (3) $y=4-\sqrt{x-1}$; е) (3) $y=5+\sqrt{4-x}$.

12. (2) Мадина, Айгүл, Жанар және Индира шеңбер жасап тұрып, көшеде әңгімелесіп тұр. Жасыл көйлекті қыз (Мадина мен Айгүл емес) Индира мен көкшіл көйлекті қыздың ортасында тұр. Ақ көйлекті қыз Айгүл мен алқызыл көйлекті қыздың ортасында тұр. Қыздардың көйлектерінің түсі қандай?

13. (2) Жаңа конвейерде шығарылған өнімнің өзіндік құны алғашқы жарты жылдықта ай сайын бірдей санға еселей кеміп отырды. Егер өнімнің өзіндік құны төртінші айда 512 мың теңге, ал соңғы айда – 327,68 мың теңге болса, онда екінші айда қанша болғанын табыңдар.

14. (3) Алынған төрт санның алдыңғы үшеуінің өзара қатынасы $\frac{1}{5}:\frac{1}{3}:\frac{1}{20}$ қатынасындай, ал төртінші сан екіншінің 15%-ындай болады. Екінші сан қалған сандардың қосындысынан 8 бірлік артық екені белгілі, сол сандарды табыңдар.

15. (2) Бастапқы дөңгелектен оның ауданының 81%-ын құрайтын және онымен концентрлі болатын дөңгелек қиылып алынды. Пайда болған сақинаның қалыңдығы бастапқы дөңгелек радиусының неше пайызын құрайды?

16. (2) Пойыз 54 км жол жүруі тиіс. 14 км жүріп өткен соң, бағдаршамда 10 мин аялдады. Бастапқы жылдамдығын 10 км/сағ-қа арттырып, межелі орынға 2 мин кешігіп жетті. Бастапқы жылдамдығын анықтаңдар.

Жауаптары:

1. а) $f^{-1}(x)=\dfrac{x+5}{3}$; ә) $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$; б) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-1$; в) $f^{-1}(x)=\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{2}$.

2. $a=-d$ немесе $b=c=0$, $a=d$. **3.** а) $[2,5;+\infty)$; ә) 1; 6; б) $[-2;4]$.

5. а) $f^{-1}(x)$ тақ; ә) $f^{-1}(x)$ – өспелі; б) $f^{-1}(x)$ – кемімелі.

6. а) және б) мысалдарындағы функциялардың кері функциялары бар, өйткені олар өспелі.
ә) $f(x)=x-x^3$ функциясына кері функция жоқ, өйткені $(f(0)=f(1))$ өзара бірмәнді емес.

7. а) $f^{-1}(x)=\dfrac{x-7}{2}$, $-\infty<x<+\infty$; ә) $f^{-1}(x)=\dfrac{5x+2}{1-3x}$, $x\neq\dfrac{1}{3}$;

б) $f^{-1}(x)=\dfrac{3-(x-1)^2}{2}$, $x\geq1$. **8.** 2. **9.** $\dfrac{g(x)-b}{a}$. **10.** $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1+|x+2|}{3}$.

Ескерту: алдымен $x\geq-2$ және $x\leq-2$ болғанда $f^{-1}(x)$ функциясының формуласын алу керек, сосын $f^{-1}(x)=\alpha x+\beta+\gamma|x+2|$ болатындай α, β, γ таңдау керек. **12.** Мадинаның көйлегі ақ, Айгүлдікі – көкшіл, Жанардікі – жасыл, Индиранікі – алқызыл. **13.** 800 мың теңге. **14.** 48; 80; 12; 12. **15.** 10%. **16.** 50 км/сағ.

§6 ГРАФИКТЕРДІ САЛУ ЖӘНЕ ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУ

«Есеп шығару кезінде құрылған нашар жоспар көбінесе пайдалы болады: ол тамаша жоспарға жетелеуі мүмкін».
Д. Пойа

1 жаттығу

Ғаламтордан геометриялық түрлендірулердің анықтамасы мен мысалдарын табыңдар: параллель көшіру, өстік симметрия, центрлік симметрия.

2 жаттығу

Бір координаталық жазықтықта $y=x^2$, $y=x^2+2$, $y=(x+3)^2$, $y=-x^2$ функцияларының графиктерін салу керек. Қандай геометриялық түрлендірулердің көмегімен бірінші параболадан соңғы үш парабола алынады?

3а жаттығу

Бір координаталық жазықтықта бірнеше жұп нүктені белгілеңдер. Әрбір жұп нүктенің абсциссалары бірдей, ал ординаталары қарама-қарсы болуы керек. Әр жұптағы нүктелер бір-бірімен қандай геометриялық түрлендірулермен байланысқан?

3ә жаттығу

Бір координаталар жазықтығында бірнеше жұп нүктені белгілеңдер. Әрбір жұп нүктенің ординаталары бірдей, ал абциссалары қарама-қарсы болуы керек. Әр жұптағы нүктелер бір-бірімен қандай геометриялық түрлендіру-лермен байланысқан?

4 жаттығу

Координаталар жазықтығында $A(4;6)$ нүктесін белгілеңдер. Осы нүктені Oy өсіне қазіргі орнынан 2 есе жақын болатындай ең аз қашықтыққа жылжыту керек. Нүктенің координаталары қалай өзгерді? $B(-4;2)$, $C(-1;3)$, $D(5; -1{,}5)$, $E(-3; 0)$ нүктелерінеде осы әрекетті қолданып көріңдер.

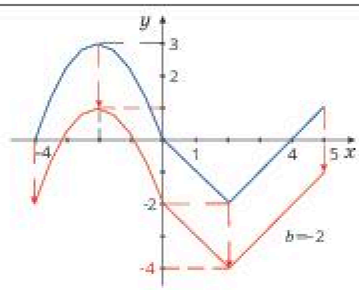
5 жаттығу

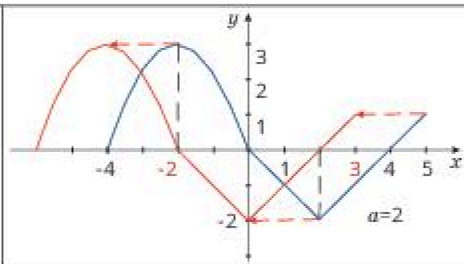
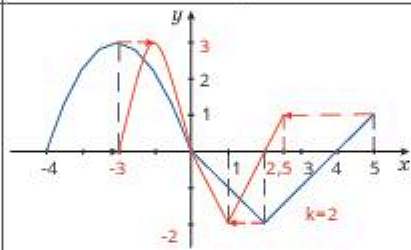
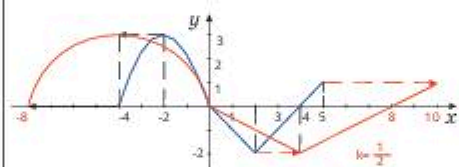
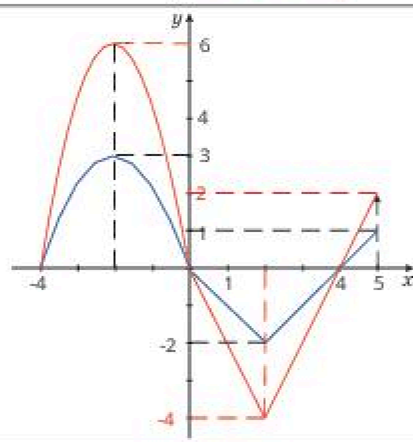
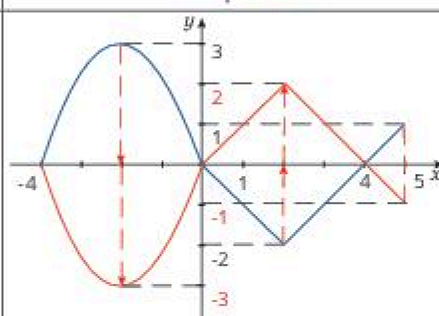
Координаталар жазықтығында $A(4; 2)$ нүктесін белгілеңдер. Осы нүктені Ox өсінен қазіргі орнынан 3 есе алыс болатындай ең аз қашықтыққа жылжыту керек. Нүктенің координаталары қалай өзгерді? $B(-4; 2)$, $C(-1; 3)$, $D(5; -8)$, $E(0; 4)$ нүктелеріне де осы әрекетті қолданыңдар.

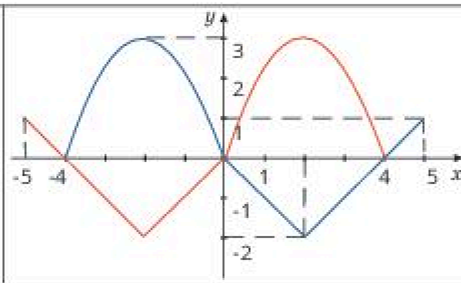
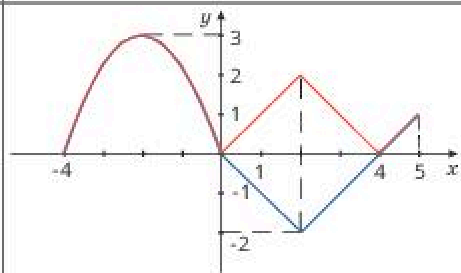
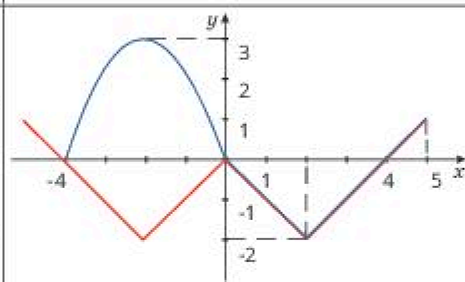
4-жаттығуда сипатталған түрлендіру Oy өсіне қатысты Ox өсі бойымен 2 есе **сығу** деп аталады. 5-жаттығуда сипатталған түрлендіру Ox өсіне қатысты Oy өсі бойымен 3 есе **созу** деп аталады.

Біз қарастыратын негізгі сұрақ: функцияны беретін аналитикалық фор-мулалардағы қарапайым алгебралық түрлендірулер графикті түрлендір-генде қандай көрініс табады? Біз $y=f(x)$ функциясының графигі салынған деп есептейміз.

Келесі кестеде $y=f(x)$ функциясының алгебралық түрлендірулерін, оларға сәйкес келетін графиктердің геометриялық түрлендірулерін және мысалдарды көрсетеміз. Барлық мысалдарда $y=f(x)$ функциясының гра-фигі қара көк түспен, ал түрлендіру нәтижесінде алынған график қызыл түспен кескінделген.

Функция	Графикті түрлендіру және белгілеу	Мысал
$y=f(x)+b$	Oy өсі бойымен b бірлікке параллель көшіру ($P1$). Ескерту. Егер, мыса-лы, $b=-2$ болса, онда «-2 бірлікке Oy өсі бойымен төмен қарай жылжитынын» білдіреді.	

$y=f(x+a)$	Ox осі бойымен a бірлікке параллель көшіру ($P2$).	
$y=f(kx), k>0$	$k>1$ болғанда Ox осі бойымен Oy осіне қатысты k есе сығу; $0<k<1$ болғанда Ox бойымен Oy осіне қатысты $\frac{1}{k}$ есе созу ($P3$).	 
$y=kf(x), k>0$	$k>1$ болғанда Oy осі бойымен Ox осіне қатысты k есе созу; $0<k<1$ болғанда Oy бойымен Ox осіне қатысты $\frac{1}{k}$ есе сығу ($P4$).	
$y=-f(x)$	Ox осіне қатысты симметрия ($P5$).	

$y=f(-x)$	Oy өсіне қатысты симметрия ($P6$).	
$y=\lvert f(x)\rvert$	Ox өсіне қатысты жоғарғы жарты жазықтықта жатқан графиктің бөлігі өзгермейді. Төменгі жарты жазықтықта жатқан графиктің бөлігі Ox өсіне қатысты симметриялы кескінделеді ($P7$).	
$y=f(\lvert x\rvert)$	Oy өсіне қатысты оң жартыжазықтықта жатқан графиктің бөлігі өзгермейді. Oy өсіне қатысты сол жартыжазықтықта жатқан графиктің бөлігін Oy өсіне қатысты оң жақтағы симметриялық кескініне алмастырамыз ($P8$).	

Сипатталған түрлендірулердің дұрыс екенін дәлелдейміз.

1) $P1$ түрлендіруі: $y=f(x)+b$. x_0, y_0 нүктесі $y=f(x)$ графигіне тиісті, яғни $y_0=f(x_0)$. (x_0, y_0) нүктесі Oy өсі бойымен b бірлікке жылжыту нәтижесінде (x_0, y_0+b) нүктесіне көшеді. Осы координаталарды $y=f(x)+b$ теңдеуіне қойып, $y_0+b=f(x_0)+b$ теңдеуін аламыз. Алынған теңдеу $y_0=f(x_0)$ теңдеуі дұрыс болса ғана орындалады.

2) $P8$ түрлендіруі: $y=f(|x|)$. Егер $x\geq 0$ болса, онда $|-x|=|x|$ және $f(|-x|)=f(|x|)$. Демек, $x\geq 0$ жиынында, яғни Oy өсіне қатысты оң жарты жазықтықта, $y=f(|x|)$ және $y=f(x)$ графиктері беттеседі. $|-x|=|x|$ болғандықтан, $f(|-x|)=f(|x|)$ екенін байқаймыз. Демек, $y=f(|x|)$ – функциясы жұп және Oy өсі оның графигінің симметрия өсі болып табылады. $y=f(x)$ графигінің сол жағын оң жағының симметриялы кескініне ауыстыруға тура келеді.

3) $P3$ түрлендіруі: $y=f(kx)$, $0<k<1$. $y=f(x)$ графигінің нүктесі (x_0,y_0) болсын. Oy өсіне қатысты Ox өсі бойымен $\frac{1}{k}$ есе созу дегеніміз (x_0,y_0) нүктесі $\left(\frac{1}{k};y_0\right)$ нүктесіне көшетінін білдіреді. Бұл жаңа нүкте $y=f(kx)$ графигінде жататындығын дәлелдеу үшін оның координаталары $y=f(kx)$ теңдеуін қанағаттандыратынын көрсету қажет. Шындығында y-тің орнына y_0 санын, x-тің орнына $\frac{1}{k}x_0$ санын қоямыз. Сонда $y_0=f\left(k\cdot\frac{1}{k}x_0\right)\Leftrightarrow y_0=f(x_0)$ шығады.

Соңғы теңдік дұрыс, өйткені ұйғарым бойынша (x_0,y_0) нүктесі $y=f(x)$ графигіне тиісті.
Қалған түрлендірулердің дұрыстығы осы сияқты дәлелденеді.

7 жаттығу

7-жаттығуға нұсқау. Егер $y=f(x)$ графигінің нүктесі (x_0,y_0) болса, онда $y_0=f(x_0)$. Ең басты білетіндерің: берілген түрлендіруде (x_0,y_0) нүктесі қай нүктеге көшетінін түсіну. Осыдан кейін жаңа координаталарды жаңа функцияға қойып, теңдіктің орындалатынын дәлелдеу керек.

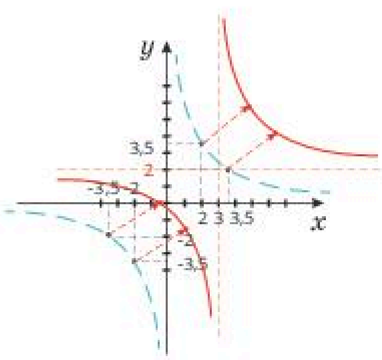
Келесі мысалдар бүкіл тақырыпты түсіну үшін өте маңызды.

1 мысал

$y=\frac{2x+1}{x-3}$ функциясының графигін салыңдар.

Шешуі. Түрлендіреміз:

$\frac{2x-6+6+1}{x-3}=\frac{2(x-3)+7}{x-3}=\frac{2(x-3)}{x-3}+\frac{7}{x-3}=2+\frac{7}{x-3}$. Шын мәнінде, біз $y=\frac{7}{x-3}+2$ функциясының графигін саламыз. Бұл графикті $y=\frac{7}{x-3}$ графигін Oy өсі бойымен 2 бірлікке параллель көшіру арқылы алуға болады. Өз кезегінде $y=\frac{7}{x-3}$ графигі $y=\frac{7}{x}$ графигін Ox өсі бойымен 3 бірлікке ығыстыру арқылы алынады. Міне осыдан салу жоспары шығады: $y=\frac{7}{x}$ графигін саламыз, сосын оны 3 бірлік оңға және 2 бірлік жоғары жылжытамыз. Өте маңызды кеңес: $x=0$ (Oy өсі) және $y=0$ (Ox өсі) түзулері $y=\frac{7}{x}$



1-сурет

функцияның графигінің асимптоталары болып табылады. $y=\frac{7}{x}$ функцияның графигі кейбір тірек нүктелері арқылы тұрғызылады (п.4, $y=\frac{k}{x}$ қараңдар). Алдымен асимптоталар 3 бірлік оңға және 2 бірлік жоғары ығысады, содан кейін тірек нүктелер ығысады. Сосын жаңа асимптоталардың көмегімен ығысқан нүктелерде гиперболаны саламыз.

АНЫҚТАМА.

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ функциясы **бөлшек-сызықтық** функция деп аталады мұндағы a, b, c, d – қандайда бір сандар және $c \neq 0$.

8 жаттығу

$c \neq 0$ шарты не үшін керек? Ойланыңдар.

Бөлшек-сызықтық функцияның графигін салу біз 1-мысалда көрсеткен «бүтін бөлікті бөліп алу әдісі» деп аталатын алгебралық тәсіл көмегімен іске асады. Бірінші мысалдағы негізгі кезең бөлшекті $(x-3)$-ке қысқарту үшін, бөлшектің алымынан 6 санын алу және қосу. Бұл кезде бүтін бөлік 2 саны болды.

2 мысал

$y=x^2-2x-3$ функциясының графигін салыңдар.

Шешуі. Мұндай түрдегі функцияның графигін салу тәсілдерімен сіздер 8-9 сыныптарда танысқан болатынсыңдар, енді «толық квадратты бөліп алу» тәсіліне тоқталайық. Түрлендірулер жасайық: $x^2-2x-3=x^2-2x+1-1-3=(x^2-2x+1)-4=(x-1)^2-4$.

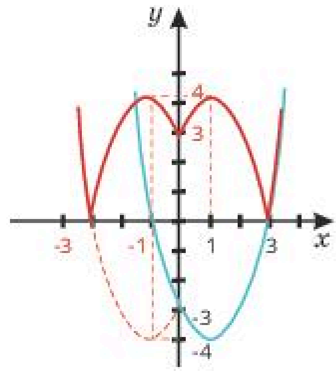
$y=(x-1)^2-4$ функциясының графигі $y=(x-1)^2$ функциясының графигін Oy өсінің бойымен 4 бірлікке төмен жылжыту арқылы салынады. Ал $y=(x-1)^2$ функциясының графигі $y=x^2$ функциясының графигін Ox өсінің бойымен 1 бірлікке оңға қарай жылжыту арқылы салынады. Бұдан төмендегідей салу жоспары шығады: $y=x^2$ функциясының графигін «нүктелері» бойынша саламыз, сонан соң нүктелерді 1 бірлікке оңға және 4 бірлікке төмен қарай жылжытамыз. Жаңа пайда болған нүктелерді қою арқылы ізделінді параболаны саламыз.

3 мысал

$y=\left|x^2-2|x|-3\right|$ функциясының графигін салыңдар.

Пайымдау. **Қандай түрлендірудің көмегімен** және **қай функ-**

цияның графигін пайдаланып оңай салуға болады? Әрине, $y=x^2-2|x|-3$ графигінен $y=|f(x)|$ жағдайына арналған түрлендіру көмегімен (кестедегі $P7$ түрлендіруі).



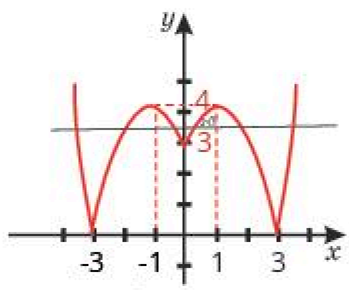
2-сурет

Енді осы сұрақты $y=x^2-2|x|-3$ функциясына қатысты қоямыз: қай функцияның графигіне қандай түрлендіру арқылы? $x^2=|x|^2$ болғандықтан, x-ті $|x|$-пен формальды ауыстырсақ, $y=x^2-2x-3$ жазбасынан $y=|x|^2-2|x|-3$ түрінде келтіреміз. Демек, $y=f(|x|)$ жағдайына сай түрлендіру сай келеді (кестедегі $P8$ түрлендіруі).

Шешуі. $y=x^2-2x-3$ графигін саламыз. $y=f(|x|)$ функциясына арналған түрлендіруді қолданамыз, ол үшін $y=x^2-2x-3$ графигінің сол жағын, Oy өсіне қатысты оң жағының симметриялы кескініне алмастырамыз. Сонда $y=x^2-2|x|-3$ графигі алынады (2-сурет).

4 мысал

$|x^2-2|x|-3|=2\sqrt{3}$ теңдеуінің қанша түбірі бар?



3-сурет

Шешуі. Бұл тапсырманы $f(x)=|x^2-2|x|-3|$ функциясының мәні $2\sqrt{3}$-ке тең болатындай нүктелер санын табу керектігі жайлы сұраққа ауыстыруға болады. Ал $f(x)=|x^2-2|x|-3|$ функциясының $2\sqrt{3}$-ке тең болатын x нүктелерінің саны, ол $f(x)=|x^2-2|x|-3|$ функциясы мен $y=2\sqrt{3}$ түзуінің қиылысу нүктелерінің санына тең болады. Жуықтап алғанда $2\sqrt{3}\approx 3,4$ деп алып, түзудің графигін салу арқылы, екеуінің қиылысу нүктелерінің саны (3-сурет) тура 4 екеніне көз жеткізуге болады. Олай болса, теңдеудің 4 түбірі бар.

Графиктерді салудың біз үйренген әдісі функцияның қасиеттерін зерттеуде тамаша мүмкіндіктерге қол жеткізеді. $f(x)=|x^2-2|x|-3|$ функциясының графигін салып болған соң, бұл функция жайлы оның графигін салғанға дейінгі айта алмаған, көптеген жайттардан хабардар боламыз.

1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$;

2) $E(f)=[0;+\infty)$

3) $f(x)$ – жұп функция;

4) $(-3;-1)$, $(0;1)$, $(3;\infty)$ – өсу аралықтары;

$(-\infty;-3)$, $(-1;0)$, $(1;3)$ – кему аралықтары (3-сурет).

5) $x=-1$ және $x=1$ локальді максимум нүктелері, $f(-1)=f(1)=4$; $x=-3$, $x=3$, $x=0$ локальді минимум нүктелері, $f(0)=3$, $f(-3)=f(3)=0$.

Осы параграфта графиктік жолмен алынған $f(x)=\left|x^2-2|x|-3\right|$ функциясы туралы барлық нәтижені аналитикалық тәсілмен де алуға болады, бірақ оған көп күш жұмсалған болар еді.

Есептер

1-бөлім

1. (1) $f(x)=x^2-6x$ функциясы берілген.Төмендегі функциялардың графиктерін салыңдар:

а) $y=f(x)-2$; ә) $y=f(x-2)$; б) $y=2f(x)$;

в) $y=f(2x)$; г) $y=-f(x)$; ғ) $y=f(-x)$;

д) $y=f(|x|)$; е) $y=|f(x)|$; ж) $y=|f(|x|)|$.

2. (1) Функциялардың графиктерін бір координаталық жазықтықта салыңдар:

а) $y=x$; ә) $y=x-2$; б) $y=|x-2|$;

в) $y=|x-2|-1$; г) $y=\left||x-2|-1\right|$.

г) пунктіндегі функцияны салынған графигі бойынша зерттеңдер. *Сендерге $y=\left||x-2|-1\right|$ функциясының графигін салу тапсырмасы берілді делік. г)-в)-б)-ә)-а) тізбегі салу жоспарын құруда қалай көрініс табатынын қадағалаңдар.*

3. (2) $f(x)=\left||x-2|-1\right|$ және $g(x)=\dfrac{1}{2}x$ функцияларының графиктерін бір координаталық жазықтықта салыңдар. Салынған графиктерді пайдаланып:

а) $f(x)=g(x)$ теңдеуін шешіңдер;

ә) $f(x)\geq g(x)$ теңсіздігін шешіңдер;

б) сұраққа жауап беріңдер: «$f(x)=a$ теңдеуінің a-ға тәуелді неше түбірі бар?»

4. (2) Функциялардың графиктерін бір координаталық жазықтықта салыңдар:

а) $y=\frac{3}{x}$; ә) $y=\frac{3}{x-2}$ б) $y=\frac{3}{x-2}+3=\frac{3x-3}{x-2}$; в) $y=\frac{3|x|-3}{|x|-2}$; г) $y=\left|\frac{3x-3}{x-2}\right|$.

5. (2) $y=f(x)$ графигін алгоритм бойынша салыңдар, мұндағы $f(x)=x^2+2x-3,\ x\in[-4;2]$.

6. $y=f(x)$ графигі негізінде жоспар құрып, келесі функциялардың графиктерін салыңдар, мұндағы: $f(x)=x^2+2x-3$, $D(f)$: $[-4;2]$.

а) $y=\frac{1}{3}f(x)$; ә) $y=f(2x)$; б) $y=-f(x)$; в) $y=f(-x)$;

г) $y=f(|x|)$; ғ) $y=|f(x)|$; д) $y=f(x)-3$; е) (2) $y=f(2x-4)$;

ж) (3) $y=\left|\frac{1}{2}f(-x)-3\right|$; з) (3) $y=|f(|x|)|$.

Жоспар құрып, функцияның графигін салыңдар. График бойынша функцияны зерттеңдер (7–10):

7. (2) $f(x)=|x^2-4|x|+3|$;

8. (1) а) $y=x^2-|x|-6$; ә) $y=|x^2-x-6|$;

9. (3) а) $y=2-\sqrt{|x-3|}$; ә) $y=|2-\sqrt{|x-3|}|$;

10. (3) $y=||x|-2|-3|$.

2-бөлім

11. (3) $f(x)=||3-|x||-5|$ және $g(x)=x+2$ функцияларының графиктерін бір координаталық жазықтықта салыңдар.

а) теңдеуді шешіңдер: $f(x)=g(x)$.

ә) теңсіздікті шешіңдер: $f(x)\geqslant g(x)$.

б) теңсіздікті шешіңдер: $f(x)>g(x)$.

12. (1) Функциялардың графиктерін бір координаталық жазықтықта салыңдар:

а) $y=-x$; ә) $y=-x-3$; б) $y=|-x-3|$;

в) $y=|x+3|-5$; г) $y=||x+3|-5|$; ғ) $y=||-x+3|-5|$;

д) $y=||3-|x||-5|$. е) д пунктінің графигі бойынша функцияны зерттеңдер.

13. (2) Келесі функциялардың графиктерін салыңдар:

а) $y=-\dfrac{2}{x+3}$, $y=-\dfrac{2}{|x|+3}$;

ә) $y=-\dfrac{3-2x}{x-4}$, $y=\left|\dfrac{3-2x}{x-4}\right|$;

б) $y=\dfrac{6-2x}{x}$, $y=\left|\dfrac{6-2|x|}{|x|}\right|$.

14. (2) $y=\sqrt{x}$ функциясының графигін «нүктелер» бойынша салыңдар. Алынған эскизді пайдаланып, жоспар құрып, келесі функциялардың графиктерін салыңдар:

а) $y=2\sqrt{x}$, $y=-3\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x}$;

ә) $y=\sqrt{x-4}$, $y=\sqrt{2x-4}$, $y=\sqrt{-x-4}$, $y=\sqrt{4-x}$.

15. (2) Алдыңғы 13–есептегі $f(x)=\left|\dfrac{6-2|x|}{|x|}\right|$ функциясының графигін пайдаланып, $f(x)=p$ теңдеуінің p-ға тәуелді неше түбірі бар екенін табыңдар.

16. (3) Жоспар құрып, $f(x)=\left|\dfrac{4|x|+4}{|x|+2}\right|$ функциясының графигін салыңдар.

17. Алгоритм бойынша $y=f(x)$ графигін салыңдар, мұндағы $f(x)=-x^2+2x+8$ $x\in[-3;5]$. Жоспар құрыңдар және $y=f(x)$ графигі негізінде төмендегі функциялардың графиктерін салыңдар:

а) (1) $y=\dfrac{1}{3}f(x)$; ә) (1) $y=f(2x)$; б) (1) $y=-f(x)$;

в) (1) $y=f(-x)$; г) (1) $y=f(|x|)$; ғ) (1) $y=|f(x)|$;

е) (1) $y=f(x)-3$; д) (2) $y=f(2x-4)$; ж) (3) $y=\left|\dfrac{1}{2}f(-x)-3\right|$;

з) $y=|f(|x|)|$.

Жоспар құрып, функцияның графигін салыңдар. График бойынша функцияны зерттеңдер (18-20):

18. (2) а) $y=|-x^2+6x-8|$; ә) $y=-x^2+6|x|-8$.

19. (3) а) $y=2-\sqrt{3-|x|}$; ә) $y=\left|2-\sqrt{3-|x|}\right|$.

20. (2) $y=\big|2-|1-|x||\big|$.

21. (4) Оқушылар секіруден жарысқа қатысты. Олардың әрқайсысы 5 рет секіреді. Әділ қазылар әрбір секіргендегі тамаша көріністі 1-ден 20-ға дейінгі бүтін ұпаймен бағалайды. Бірақ жарыс қорытындысы әр қатысушының ең үздік 4 секіруінің нәтижесімен шығарылады. Жәнібек 5 рет секіруден 72 ұпай жинады. Қорытынды есептеуде оның ең төмен ұпайы қанша болуы мүмкін?

22. (3) Өрнекті ықшамдаңдар: $\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)\cdot\frac{1}{a-b}$

23. (2) Теңдеуді шешіңдер: а) $\frac{4x^2-7x-2}{x^2-5x+6}=0$; ә) $\frac{x-2}{x+1}+\frac{4(x+1)}{x-2}=5$.

24. (3) Компания қызметкерлерінің 20%-ын әйелдер құрайды. Компания басшылығы әйелдер санын 80%-ға арттыруды, ал ерлер санын 20%-ға кемітуді жоспарлады. Келесі тұжырымдардың қайсысы дұрыс?
А) Компания қызметкерлерінің саны артады.
В) Компания қызметкерлерінің саны өзгермейді.
С) Компания қызметкерлерінің саны 10%-ға кемиді.
D) Компания қызметкерлерінің саны 15%-ға кемиді.
Е) Нақты жауап беру үшін деректер жеткіліксіз.

Жауаптары:

3. а) $x=\frac{2}{3}$; 2; 6. ә) $x\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]\cup\{2\}\cup[6;+\infty)$; б) $a<0\Rightarrow 0$ түбірі жоқ; немесе $a>1\Rightarrow$ 2 түбір; $a=1\Rightarrow 3$ түбір; $a\in(0;1)\Rightarrow 4$ түбір.

11. а) $x\in[0;3]$; ә) $x\in[-\infty;3]$; б) $x\in(-\infty;0)$.

15. $p<0\Rightarrow 0$ түбірі жоқ; $p\in\{0\}\cup[2;+\infty)\Rightarrow$ 2 түбір; $p\in(0;2)\Rightarrow 4$ түбір.

21. 58.

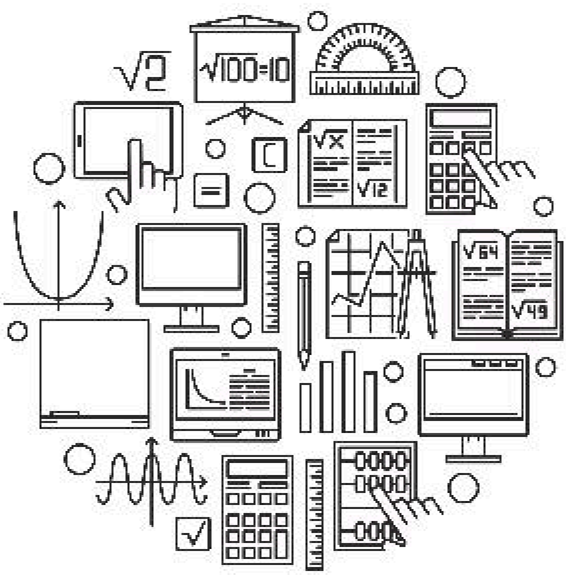
22. $-\frac{a}{a+b}$.

23. а) $x=-0.25$; ә) $x=-2$.

24. В.

2-тарау

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР



ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР

«Математика ойдың дәлдігіне, дәлелдеу логикасына бағынуға, қатаң түрде негізделген ақиқатты түсінуге үйретеді, ал мұның барлығы жеке тұлғаны қалыптастырады, сірә музыкадан да артық болар».
А.Д. Александров.

Тригонометрия үшбұрыш қабырғаларының ұзындықтарының қатынастары, үшбұрыштың бұрыштарының шамасының жиынтығымен берілген үшбұрыштың пішініне тәуелді болатынына және олардың өлшеміне тәуелді емес екеніне жүргізілген бақылаулардан басталған. Әрине ежелгі ойшылдар да мұндай тамаша деректерді көре білген, сондықтан ежелгі Қытай, Вавилон және ежелгі Мысырдың (б.з.д. ІІ-ші мыңжылдық) математикалық қолжазбаларында тригонометриялық қатынастардың элементтері кездеседі. Бұрыштарды градуспен, минутпен және секундпен өлшеу вавилондық математикадан бастау алады. Пифагорға дейін де вавилондықтар мен қытайлықтар бір-біріне тәуелсіз ашқан Пифагор теоремасы қолданыстағы $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ негізгі тригонометриялық тепе-теңдігіне пара-пар (неге екенін ойланыңдар).

Алайда, нағыз маңызды жаңалықтарды ежелгі грек ғалымдары ашқан болатын (б.з.д. V ғ. - IV ғ.). Ол кезде тригонометрия өз алдына жеке ғылым саласы ретінде қарастырылмаған еді. Гректер үшін ол геометрия және астрономияның бір бөлімі болатын. Архимедтің еңбектерінде (б.з.д. ІІІ ғ.) хордаларды бөлу теоремасы бар, ал бұл шын мәнінде жарты бұрыш синусының формуласына пара-пар: $\sin\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$.

Алғашқы тригонометриялық кестелерді Никейлік Гиппарх (б.з.д. ІІ ғ-дың ортасы) құрастырды деген болжам бар. Кейінірек ІІ-ғасырда астроном Клавдий Птолемей «Альмагест» еңбегінде Гиппархтың алған нәтижелерін толықтырды. «Альмагесттің» 30 кітабы – ежелгі дәуірдің ең маңызды тригонометриялық еңбегі. "Альмагест" 30 бұрыштық минут қадаммен жасалған сүйір және доғал бұрыштарға арналған хордалардың бес таңбалы кестесін қамтиды. Птолемей хордаларды есептеу үшін Птолемей теоремасын (Архимедке де белгілі болған) пайдаланды. Бұл теорема бойынша, шеңберге іштей сызылған дөңес төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары ұзындықтарының көбейтінділерінің қосындысы оның диагональдарының ұзындықтарының көбейтіндісіне тең болады.

IV ғасырда ежелгі ғылым дәуірі аяқталып, математиканың даму орталығы Үндістанға орын ауыстырды. Үнді математиктерінің шығармалары олардың авторларының грек астрономдары мен геометриктерінің еңбектерімен жақсы таныс болғанын көрсетеді. Үндістер таза геометрияға аса қызығушылық танытпады, бірақ олардың қолданбалы астрономия және тригонометрияның есептеу аспектілеріне қосқан үлесі зор. Үндістер ең бірінші болып косинусты қолданысқа енгізді. Олар еселік бұрыштар үшін $\sin nx$ және $\cos nx$ формулаларын ашты $(n = 2, 3, 4, 5)$.

VIII ғасырда Таяу Шығыс және Орталық Шығыс елдерінің ғалымдары ежелгі грек және үнді математиктері мен астрономдарының еңбектерімен танысты. Олардың еңбектерін араб тіліне аударумен айналысқан VIII ғасырдың ірі ғалымдары Ибрахим әл-Фазари және Жақып ибн-Тарик болды. Олар және олардың ізбасарлары осы теорияларды әрі қарай дамытты. Ислам елдері ғалымдарының ерекше ықыласына ие болған – сфералық тригонометрия болды. Олардың әдістері астрономия және геодезия есептерін шығаруда қолданылды. Негізгі шешімін тапқан мәселелердің арасында мыналар болды:

– тәулік уақытын дәл анықтау;

– аспан денелерінің болашақтағы орнын, олардың шығуы мен батуын, Күн мен Айдың тұтылуын есептеу;

– ағымдағы орынның географиялық координатасын анықтау;

– белгілі географиялық координаталармен қалалардың арақашықтығын есептеу;

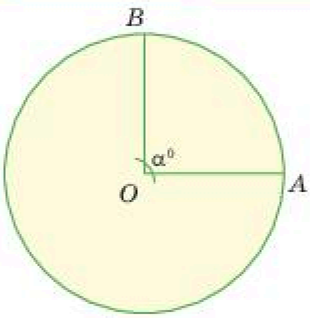
– берілген орыннан Меккеге қарай бағытты анықтау.

Сақталған еңбектердің ішіндегі ең ежелгісі Әл-Хорезми және Хаббаш әл-Хасибке (IX ғасыр) тиесілі. Олар үндістерге белгілі болған синус және косинуспен қоса, жаңа тригонометриялық функцияларды: тангенс, котангенс, секанс және косеканс функцияларын қарастырды. Сол ғасырда әл-Баттани барлық алты функцияның арасындағы негізгі қатынастарды ашты. X ғасырдың екінші жартысында Әбу-л-Вафа соңғы үйлестіруге қол жеткізді. Ол қазіргі математикада қолданылып жүрген тригонометриялық функцияларды анықтау үшін пайдаланылатын бірлік радиусты дөңгелекті ең алғаш қолданды.

§1 ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИКТЕРІ

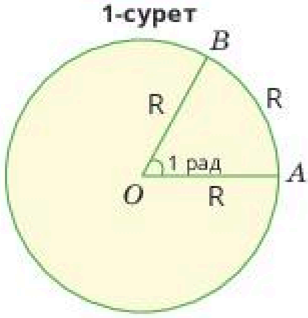
«Кез келген дұрыс шығарылған математикалық есеп ой-санаңды рахатқа бөлейді».
Г. Гессе

1.1 Бұрыштың радиандық өлшемі және алгебралық бұрыш



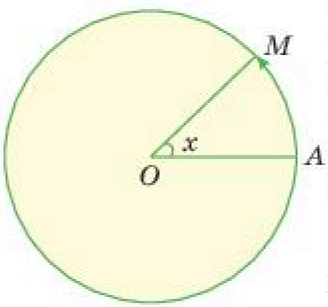
1-сурет

Сіздерге 9-сыныптың геометрия курсынан шеңбердегі әрбір доғаның екі сандық сипаттамасы: ұзындығы және бұрыштық өлшемі болатыны белгілі. $\overset{\frown}{AB}$ доғасының градустық өлшемі оған сәйкес $\widehat{AOB}$ бұрышының градустық өлшеміне тең. O нүктесі – шеңбердің центрі (1-сурет). Кейбір жағдайларда бұрышты және доғаны градуспен емес, радианмен өлшеген әлдеқайда тиімді.



2-сурет

Егер $\overset{\frown}{AB}$ доғасының ұзындығы шеңбердің R радиусына тең болса, онда OA және OB радиустарының арасындағы бұрыш 1 радианға тең болады, сәйкесінше $\overset{\frown}{AB}$ доғасының радиандық өлшемі 1 радианға тең болады, егер $\overset{\frown}{AB}$ доғасының ұзындығы шеңбердің R радиусына тең болса (2-сурет).



3-сурет

Центрі O болатын шеңберді қарастырамыз. Шеңбер бойынан A нүктесін белгілейміз. M нүктесін алдымен A нүктесімен беттестіріп, сосын оны шеңбер бойымен жылжытамыз. Егер $\widehat{AOM}$ бұрышы x-ке тең болса, онда $\overset{\frown}{MA}$ доғасының радиандық өлшемі x-ке тең, ал M нүктесінің жүрген жолының ұзындығы $x \cdot R$-ге тең (3-сурет).

M нүктесінің жүрген жолы $\widehat{AOM}$ бұрышынан R есе үлкен болатынын білген өте тиімді. Ал егер

$R=1$ болса, онда AOM бұрышы да, $\overset{\frown}{MA}$ доғасының радиандық өлшемі де және жүрілген жолдың ұзындығы да x-ке тең. Екеуі бірдей болады.

Енді келесі анықтаманы енгіземіз.

1-АНЫҚТАМА.

Центрі O нүктесі болатын және радиусы 1-ге тең бірлік шеңбердің бойынан A нүктесі берілсін. M нүктесі осы шеңбер бойымен $M=A$ орнынан бастап қозғалатын нүкте. OA және OM радиустары арасындағы x алгебралық бұрыш деп M нүктесінің жүрген жолының ұзындығын айтамыз. Егер нүкте сағат тіліне қарсы бағытта қозғалса, таңба «+» оң, ал егер сағат тілімен бағыттас қозғалса, таңба «–» теріс болады (3-сурет).

*Сендер радиусы **R** болатын шеңбердің ұзындығы $2\pi R$ екенін білесіңдер.*

Шеңбердің ұзындығының оның диаметріне қатынасын білдіретін санды, алымы да, бөлімі де бүтін сан болатын бөлшек түрінде жаза алмаймыз (яғни, бұл – иррационал сан). Бірақ осы сан математикада үлкен рөл атқарады. Сол себепті бұл санды арнайы белгі π арқылы белгілейміз.

$$\pi \approx \frac{22}{7}, \ \pi \approx 3{,}1416.$$

1 жаттығу

Егер $R=1$ болса, онда шеңбер ұзындығы 2π-ге тең. Бұл жарты шеңбердің ұзындығы мен доғасы π–ге тең екенін білдіреді. Бірақ жарты шеңбердің доғасы $180°$-қа тең. Осыдан:

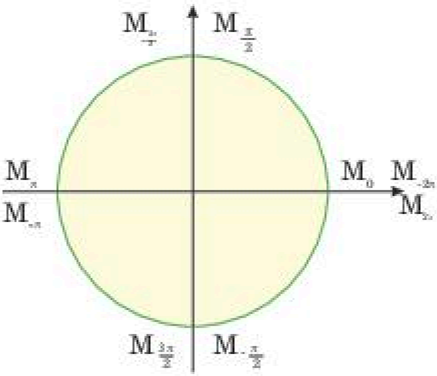
$$\pi \ радиан = 180° \text{ теңдігі шығады.}$$

M нүктесінің шеңбер бойымен сағат тіліне қарсы бағыттағы қозғалысын қарастырайық.

M нүктесі толық бір айналым жасағаннан кейін, ол A нүктесімен беттеседі, оның жүрген жолы 2π-ге тең. Бұл осы сәтте OA және OM радиустарының арасындағы алгебралық бұрыш 2π немесе $360°$ -қа тең деген сөз. Бірақ M нүктесінің одан кейін де өз қозғалысын жалғастыруына кедергі келтіруге негіз жоқ. $2, 3, 4,$ т.с.с. толық айналымдар жасағаннан кейін бұрыш (бұдан кейін біз «алгебралық» деген термин енгіземіз) 4π-ге, 6π-ге, 8π-ге, т.с.с. тең болады (сәйкесінше $720°$, $1080°$, $1440°$ және т.с.с.).

Дәл осылай M нүктесінің шеңбер бойымен сағат тілімен бағыттас шексіз қозғалысын қарастыруға болады, бұл жағдайда теріс бұрыштар алынады.

1.2 Тригонометриялық функциялардың анықтамалары



4-сурет

Алдыңғы пунктте қарастырған әрекеттерді координаталық жазықтықта, O нүктесі координаталар басымен беттесетіндей, A нүктесінің координатасы $(1; 0)$ болатындай етіп орналастырайық. Әрбір $x \in (-\infty; +\infty)$ бұрышқа М нүктесінің А нүктесінен бастап, егер $x > 0$ болса сағат тіліне қарсы, егер $x < 0$ болса сағат тілімен бағыттас жүрген жолының ұзындығы $|x|$ сәйкес келеді. M нүктесінің соңғы орнын M_x деп белгілейміз (4-сурет).

Шындығында, біз әрбір x санына шеңбер бойынан M_x нүктесін сәйкестендіретіндей $f : x \to M_x$ функциясын құрдық. Әрбір x, $x + 2\pi$, $x + 4\pi$ т.с.с. сандарына M_x, $M_{x+2\pi}$, $M_{x+4\pi}$ т.с.с. нүктелері беттесетіндіктен, функция өзара бірмәнді болмайды.

1 жаттығу

Шеңбер бойынан $M_{\frac{\pi}{2}}, M_{\frac{2\pi}{3}}, M_{2\frac{1}{3}\pi}, M_{2\frac{1}{6}\pi}, M_{\frac{\pi}{6}}, M_{\frac{\pi}{3}}, M_{\frac{2\pi}{3}}, M_{-\frac{2\pi}{3}}, M_{-2\frac{1}{3}\pi}, M_{-21\frac{1}{2}\pi}$ нүктелерін белгілейік. (Көз мөлшерімізбен белгілеуге болады. Мысалы, $\frac{\pi}{3}$ жолы ұзындығының π жолы ұзындығының жолынан 3 есе кіші етіп белгілеу керек).

2 жаттығу

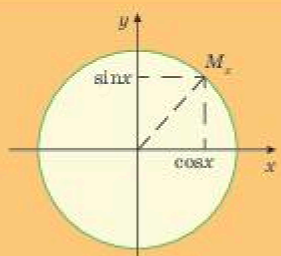
xOy координаталық жазықтығынан M_0, $M_{\frac{\pi}{2}}$, M_{π}, $M_{\frac{3\pi}{2}}$, $M_{4\pi}$ нүктелерінің координатасын табыңдар. Шеңбердің радиусы 1-ге тең екенін ұмытпаңдар.

Біз қарастырып отырған шеңбер тригонометриялық шеңбер деп аталады. Осы шеңбердің негізінде барлық тригонометриялық функциялар анықталады. Бұл шеңберді ω деп белгілейміз.

$M_{\frac{\pi}{2}}$, $M_{\frac{3\pi}{2}}$, M_x... белгілеулерін қолдану міндетті емес болғанда, шеңбер бойынан $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, x... белгілеулерін пайдаланамыз.

2-АНЫҚТАМА.

Кез келген $x\in(-\infty;+\infty)$ бұрышы үшін x бұрышының косинусы деп M_x нүктесінің абсциссасын ($\cos x$ деп белгіленеді), x бұрышының синусы деп M_x нүктесінің ординатасын айтады ($\sin x$ деп белгіленеді).



5-сурет

3 жаттығу

2-жаттығудың нәтижелерін пайдаланып, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 4π бұрыштарының косинусы мен синусын табыңдар.

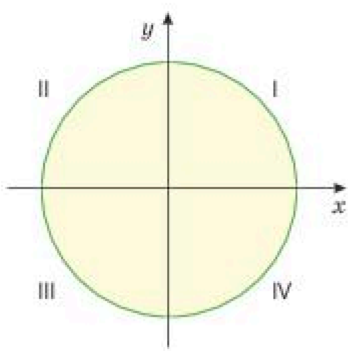
Ox және Oy өстері координаталық жазықтықты ширек немесе квадрант деп аталатын 4 бөлікке бөледі. Әрбір ширектің өзінің нөмірі бар (6-суретке қараңдар).

Егер M_x нүктесі I ширектің ішкі нүктесі болса, онда x бұрышы I ширектің бұрышы болады. Дәл осылай II, III және IV ширектердің бұрыштары анықталады.

4 жаттығу

Тригонометриялық шеңберді пайдаланып, қай ширектің бұрышы болып табылатындығына байланысты, бұрыштардың синустары мен косинустарының таңбаларын анықтау керек.

Осы және келесі параграфта берілген материалдар тригонометрияны жақсы түсіну үшін аса қажет. Нақтырақ айтсақ, тригонометриялық функциялардың барлық қасиеттері «алақандағыдай көрініп тұр», тек тригонометриялық шеңберді түсінсек болды. Естеріңде болсын: ***шеңбер – біздің досымыз.***



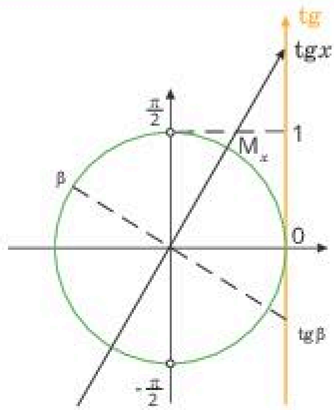
6-сурет

Тригонометриялық шеңбері бар координаталық жазықтықта Oy өсіне параллель болатын қосымша сандық өсті қарастырайық. Бұл өстің өлшем бірлігі координаталық жазықтықтың өлшем бірлігіне тең. Бұл өс – тангенстер өсі деп аталады. 7-сурет тангенстер өсінің қалай «жұмыс істейтінін» көрсетеді. M_x нүктесі және координаталар басы арқылы тангенстер өсімен қиылысатындай түзу жүргізілген. Тангенстер өсі – сандық өс, сондықтан қиылысу нүктесі x бұрышының тангенсі деп аталатын қандай да бір санға сәйкес келеді және $\operatorname{tg} x$ деп белгіленеді.

3-АНЫҚТАМА.

x санының тангенсі деп, OM_x түзуі мен тангенстер өсінің қиылысу нүктесіне сәйкес келетін тангенстер өсіндегі санды айтады. x санының тангенсін $\operatorname{tg}x$ деп белгілейді.

Мысалы, егер β бұрышы 2-ші немесе 4-ші ширектің бұрышы болса, онда $\operatorname{tg}\beta < 0$ екені анық.

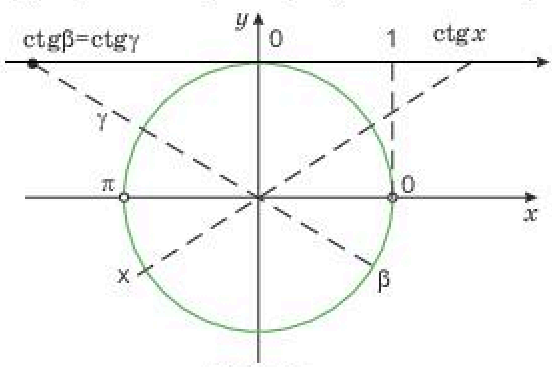


7-сурет

5 жаттығу

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ мәні неге тең?

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ мәнін табуға тырысайық. Анықтама бойынша $M_{\frac{\pi}{2}}$ және координаталар басы арқылы түзу жүргіземіз, бұл түзу – Oy өсі. Бірақ, Oy өсі мен тангенстер өсі өзара параллель болғандықтан, бұл түзулердің ортақ қиылысу нүктелері жоқ. *«Жоққа – тангенс те жоқ».* Басқаша айтқанда, $\frac{\pi}{2}$ бұрышы $y = \operatorname{tg}x$ функциясының анықталу облысына кірмейді.



8-сурет

Енді, котангенс дегеніміз не екенін еске түсіру ғана қалды. Ежелгі математиктер дәлелдеудің орнына көбінесе өздерінің «Қараңдар» деген жазуы бар суреттерін бірге берген. Енді біз де: «Қараңдар!» дейміз.

Ox өсіне параллель және тригонометриялық шеңбермен $(0;1)$ нүктесінде жанасатын сандық түзу котангенстер өсі деп аталады (8-сурет).

4-АНЫҚТАМА.

x санының котангенсі деп, OM_x түзуі мен котангенстер өсінің қиылысу нүктесіне сәйкес келетін котангенстер өсіндегі санды айтады. x санының котангенсін $\operatorname{ctg}x$ деп белгілейді.

6 жаттығу

$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ сүйір бұрышы үшін тригонометриялық функцияларға берілген алгебралық анықтама $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ және $\operatorname{ctg} x$-тің тікбұрышты үшбұрыштағы геометриялық анықтамасындағыдай мәндерді беретінін дәлелдеу керек. Нұсқау: тригонометриялық шеңбердің радиусы 1-ге тең екендігін пайдаланыңдар.

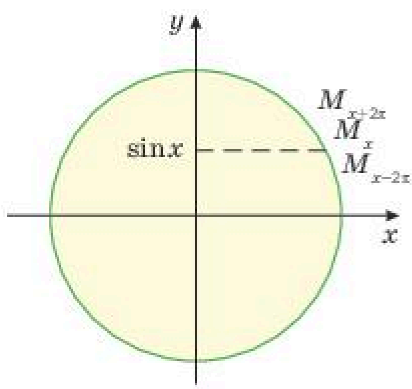
§2 ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ГРАФИКТЕРІ

«Архимедтің ойында Гомердікіне қарағанда болжамдар әлдеқайда көп болған».

Вольтер

2.1 $y=\sin x$ функциясы

2π алгебралық бұрышы M нүктесінің сағат тіліне қарсы толық бір айналымына тең. Демек, M_x және $M_{x+2\pi}$ нүктелері беттеседі. Дәл осылай, $M_{x-2\pi}$ және M_x нүктелері де беттеседі (1-сурет). Бұдан шығатын қорытынды: $\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x-2\pi)$, яғни $T=2\pi$ саны $y=\sin x$ функциясының периоды. 2π – негізгі период, яғни бұдан кіші период жоқ екендігін дәлелдейік. $\sin 0=0$ екенін көреміз. x бұрышын 0-ден 2π-ге дейін өзгерткенде тек үш нүктеде ғана синус нөлге тең болады: $\sin 0=0$, $\sin\pi=0$ және $\sin 2\pi=0$. Сондықтан, егер функцияның 2π-ден де кіші периоды бар болса, онда ол π саны болады. Онда кез келген x үшін $\sin x=\sin(x+\pi)$ теңдігі орындалуы тиіс. Бірақ, $-1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\neq\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$.



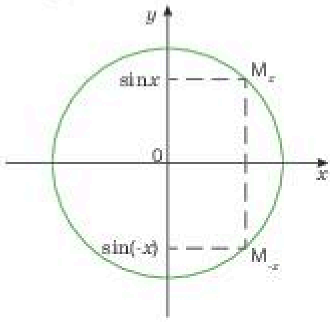
1-сурет

Сонымен, **$y=\sin x$ функциясының негізгі приоды $T=2\pi$.**

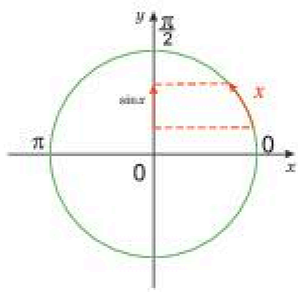
Енді біз функцияның графигін зерттеп және оны кез келген ұзындығы 2π болатын кесіндіде салып, Ox осі бойымен оңға және солға көшіріп жылжытуымызға болады. Әрине, бастапқы кесінді ретінде санақ басына жақын кесіндіні аламыз.

$y=\sin x$ функциясын $[-\pi;\pi]$ кесіндісінде қарастырайық. M_x және M_{-x} нүктелері Ox осіне қатысты өзара симметриялы, олардың абсциссалары тең, ал ординаталары қарама-қарсы. Осыны тригонометрия тіліне аударсақ: x және $-x$ бұрыштарының косинустары тең, ал синустары қарама-қарсы, $\sin(-x)=-\sin x$ (2-сурет). Бірақ соңғы теңдік барлық $x\in(-\infty;+\infty)$ үшін орындалады, бұл $y=\sin x$ функциясының тақ екендігін білдіреді.

$y=\sin x$ – тақ функция.

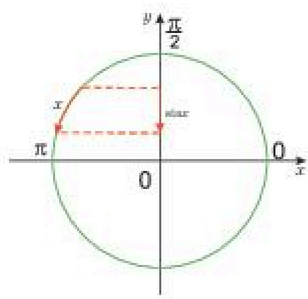


2-сурет



x-тің мәні 0-ден $\frac{\pi}{2}$-ге дейін өссе, $\sin x$ функциясы өседі.

3-сурет



x-тің мәні $\frac{\pi}{2}$-ден π-ге дейін өссе, $\sin x$ функциясы кемиді.

4-сурет

$[-\pi;\pi]$ кесіндісінен $[0;\pi]$ аралығын бөліп алып, осы бөлікте функцияның графигін тұрғыза аламыз, содан соң алынған графикті санақ басына қатысты симметриялы түрде көшіре аламыз. x 0-ден π-ге дейін өзгергенде M_x нүктесі шеңбердің жоғарғы жартысында қозғалады. Егер, M_x (x бұрышының синусы) нүктесінің ординатасы қалай өзгеретінін бақылайтын болсақ, онда мынаны байқауға болады:

1) x-тің мәні 0-ден $\frac{\pi}{2}$-ге дейін өскенде, $\sin x$-тің мәні артады, $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ аралығы $y=\sin x$ функциясының өсу аралығы (3-сурет);

2) x-тің мәні $\frac{\pi}{2}$-ден π-ге дейінгі өскенде, $\sin x$-тің мәні кемиді, $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ аралығы – $y=\sin x$ функциясының кему аралығы (4-сурет);

3) $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $x_0=\frac{\pi}{2}$ нүктесі $y=\sin x$ функциясының $x\in[0;\pi]$ аралығындағы ең үлкен мәнге ие болатын нүктесі.

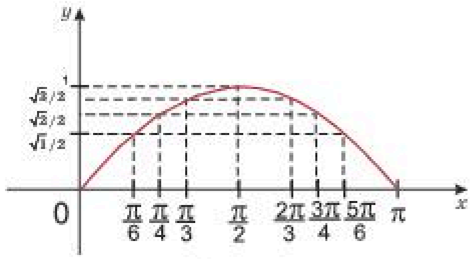
График салғанда нақтырақ болу үшін кесте толтырайық, кестенің жоғарғы жағына синустарының мәні белгілі бұрыштарды жазамыз (5-сурет).

$\sqrt{2}\approx 1,4; \sqrt{3}\approx 1,73$ екенін ескереміз.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0,7$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,86$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,86$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0,7$	$\frac{1}{2}$	0

Алынған фрагментті координаттар басына қатысты симметриялы көшіреміз (6-сурет).

$T=2\pi$–$y=\sin x$ функциясының периоды (7-сурет).



5-сурет

Салынған графикті пайдаланып, $y=\sin x$ функциясының қасиеттерін жазайық:

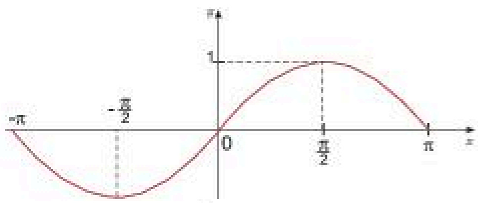
1) Анықталу облысы: $D(f):(-\infty;+\infty)$.

2) Мәндер жиыны: $E(f):[-1;1]$.

3) Тақ функция.

4) Периодты, негізгі периоды $T=2\pi$.

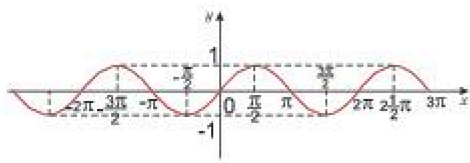
5) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ – өсу аралығы,



6-сурет

$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ – кему аралығы

(мұндағы k – бүтін сан),



7-сурет

6) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ –локальді максимум нүктесі, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ – локальді минимум нүктесі.

7) $x=\pi k$ – функцияның нөлдері,

$(0+2\pi k;\pi+2\pi k)$ – оң мән қабылдайтын аралықтары,

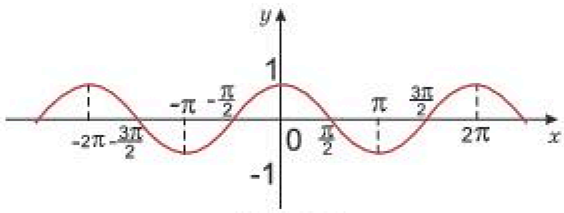
$(-\pi+2\pi k;0+2\pi k)$ – теріс мән қабылдайтын аралықтары.

1 жаттығу

$y=\cos x$ функциясының графигін салайық.

2.2 $y=\cos x$ функциясы

$y=\cos x$ функциясының графигін салайық. Келтіру формуласы арқылы кез-келген α бұрышы үшін $\cos\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ теңдігі орындалады. $y=\cos x$ теңдігі $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ теңдігіне пара-пар. Бізге белгілі болғандай, $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ функциясының графигі $y=\sin x$ функциясының графигін Ox өсінің бойымен $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$-ге орын ауыстыру арқылы алынады (8-сурет).



8-сурет

$y=\cos x$ функциясының қасиеттері:

1) $D(f)$: $x\in(-\infty;+\infty)$.
2) $E(f)$:$[-1;1]$.
3) Жұп функция.
4) Периодты, негізгі периоды $T=2\pi$.
5) $(-\pi+2\pi k;0+2\pi k)$ – өсу аралықтары, $(0+2\pi k;\pi+2\pi k)$ – кему аралықтары $k\in Z$.
6) $x=2\pi k$ – локальді максимум нүктелері, $x=\pi+2\pi k$ – локальді минимум нүктелері $k\in Z$.
7) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ – функцияның нөлдері, $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ – оң мән қабылдайтын аралықтары, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ – теріс мән қабылдайтын аралықтары, $k\in Z$.

2.3 Графиктерді салуға және зерттеуге мысалдар

Күрделі тригонометриялық функциялардың графиктерін салу алдыңғы тараудың §4-те келтірілген $P1$-$P8$ қарапайым түрлендірулері арқылы жүргізіледі. Алдымен графикті салу жоспарын құру керек (1 тарау, 4.2 бөлімі, 4, 5-мысалдарды қара), содан соң түрлендірулерді жүргіземіз. Синусы және косинусы бар функцияларды түрлендіру үшін алғашында $[-\pi;\pi]$ немесе $[0;\pi]$ не $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ аралықтарында берілген графиктің қандайда бір бөлігінде түрлендіру жүргіземіз. Түрлендіру нәтижесінде алынған график үзіндісін периодты түрде қайталап көшіреміз. Дәл осылай тангенсі мен котангенсі бар функциялар үшін түрлендіруді алдымен **вертикаль асимптоталарымен бірге** графиктің бір тармағы үшін орындаған дұрыс. Мысал келтірейік.

1 мысал

$y=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$ функциясының графигін салыңдар.

Жоспар: $\left(3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1\right)\overset{P1}{\leftarrow}\left(3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right)\overset{P4}{\leftarrow}$

$\left(\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)\cdot$

$\left(\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)\overset{P2}{\leftarrow}(\cos(2x))\overset{P3}{\leftarrow}\cos x\cdot$

Барлық $P3$, $P2$, $P4$ және $P1$ түрлендірулері ретімен, $y=\cos x$ функциясы графигінің ұзындығы 2π болатын аралықта берілген бөлігінен бастап орындалады: $x\in[-\pi;\pi]$ (9-сурет).

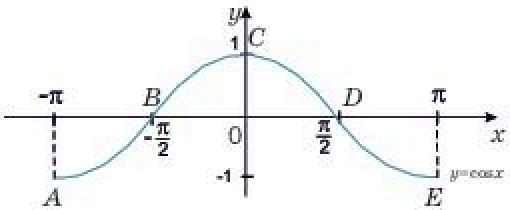
Түрлендіру $P3$: Ox өсі бойымен 2 есе «сығу» (10-сурет). Алдымен «сығуды» белгілі бір «айрықша» нүктелер үшін, содан соң барлық аралық үшін орындаймыз.

Түрлендіруден кейінгі "айрықша" нүктелердің координаталарын жазу үшін қосымша кесте сызамыз.

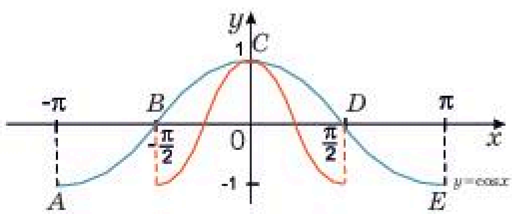
Түрлендіру $P2$: графикті Ox өсі бойымен $\frac{\pi}{6}$-ға «жылжыту» (11–сурет).

Алдымен айрықша нүктелерді, сосын бүкіл графикті «жылжытамыз».

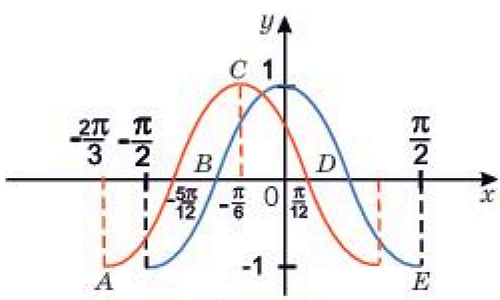
Енді график нүктелерін $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$-ға «орын ауыстырудың» орнына Oy өсімен $+\frac{\pi}{6}$-ға орын ауыстыруға болады.



9-сурет

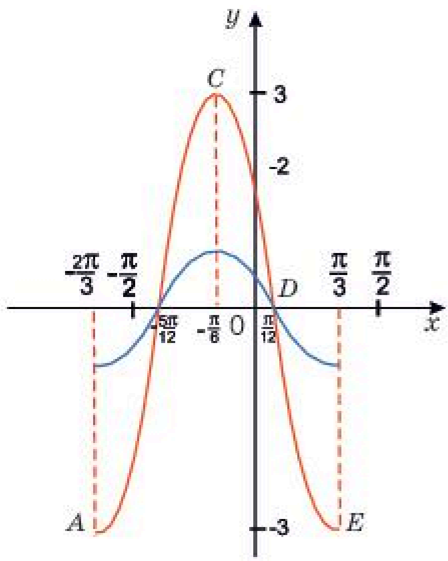


10-сурет

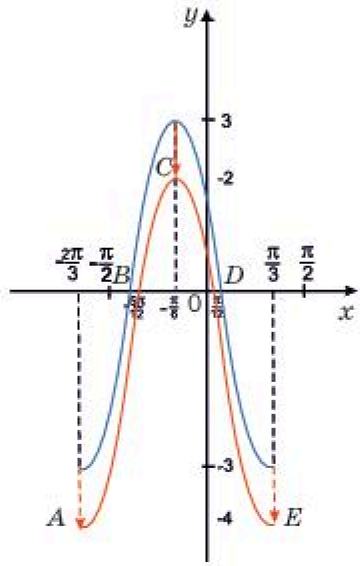


11-сурет

Түрлендіру $P4$: Oy өсі бойымен 3 есе созу. B және D нүктелері орындарында қалады, ал A, C, E нүктелерін Ox өсінен 3 есе алшақтатамыз (12-сурет).



12-сурет



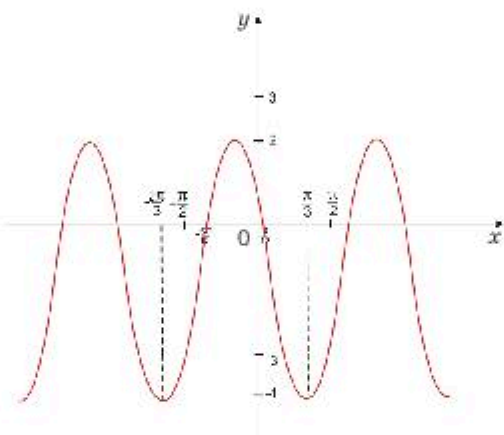
13-сурет

Түрлендіру $P1$: *«Оу өсі бойымен – 1-ге «жылжыту»* (13-сурет).

Графикті 1 бірлікке төмен жылжытқаннан, Ox өсін 1 бірлікке жоғары жылжытқан оңай.

Пайда болған кескінді оңға және солға қарай периодты түрде көшіреміз (шексіздікке дейін).

$y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ функциясының графигі 14-суретте көрсетілген:



14-сурет

Маңызды ескертулер.

1) *Әрбір салу барысы мейлінше түсінікті болуы үшін, біз әр түрлендіруді жеке координаталық жазықтықта орындадық. Сендер барлық түрлендірулерді бір координаталық жазықтықта орындауларыңа болады. Яғни, барлық түрлендірулер бір суретте болады.*

2) *Кестенің әр бағанын қай кезеңде толтыру керектігін көрсету үшін біз бір кестені 4 рет қайталап бердік. Сендер бір ғана кесте сызып, оны әрбір түрлендіру орындалған*

сайын толтырып отыруларың қажет. Жеткілікті тәжірибелерің бар болса, кесте толтырмауға да болады. Ол үшін әрбір түрлендіруден кейін «айрықша» нүктелердің координаталарын жазықтықтың өзіне жазып отыру керек.

3) *Алынған графиктің көмегімен берілген функцияның нөлдерін табу кейде мүмкін болмай жатады. Мұндай жағдайда, графикті пайдаланып, нөлдерін жуықтап табамыз.*

Енді салынған график бойынша функцияны зерттейміз (14-сурет).

1) $D(f):(-\infty;+\infty)$ – функцияның анықталу облысы.

2) Периодты, периоды π-ге тең.

Функцияның периодтылығынан, егер $x=x_0$ айнымалының кейбір мәні үшін функцияның кейбір қасиеттері орындалатын болса, онда дәл сол қасиет кез келген $x=x_0+Tk$ үшін де орындалатындығы шығады. Мұндағы T – период, k – кез келген бүтін сан.

3) Функцияның нөлдерін (x-тің функцияның мәнін нөлге айналдыратын мәндері, $f(x)=0$ теңдеуінің түбірлері; функция графигінің Ox өсімен қиылысу нүктелері) қазіргі жағдайда жуықтап табамыз. Графиктің CD бөлігінің Ox өсімен қиылысу нүктесі шамамен $\left[0;\frac{\pi}{12}\right]$ кесіндісінің ортасы болады, $x_1\approx\frac{\pi}{24}$. Графиктің CB бөлігінің Ox өсімен қиылысу нүктесі шамамен $x_2\approx\frac{3\pi}{8}$ нүктесі болады. Осылайша, барлық «нөлдері» қазір ғана жасалған ескертпеге сәйкес екі топтамамен жазылады: $x_1\approx\frac{\pi}{24}+\pi k,\ x_2\approx-\frac{3\pi}{8}+\pi k$, мұндағы k – кез келген бүтін сан.

4) Таңба тұрақтылық аралықтары: $f(x)>0$ болады, егер $x\in(x_2+\pi k, x_1+\pi k)$, мұндағы $x_2\approx-\frac{3\pi}{8}$, $x_1\approx\frac{\pi}{24}$; $f(x)<0$ болады, егер $x\in(x_1+\pi k; x_2+\pi+\pi k), k\in Z$.

5) Бірсарындылық (монотондылық) аралықтары: $f(x)$ функциясы $x\in\left(-\frac{2\pi}{3}+\pi k;-\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$ болғанда өседі; $f(x)$ функциясы $x\in\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$ болғанда кемиді, $k\in Z$.

6) Экстремумдары: $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$ – локальді максимум нүктелері, локальді максимумы 2-ге тең; $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$ – локальді минимум нүктелері, локальді минимум нүктесі (-4)-ке тең.

7) Мәндер жиыны: $E(f)=[-4;2]$.

Есептер

1-бөлім

1. (2) 2.1 пункттегі $y=\sin x$ функциясының графигін қайта сызыңдар. Координаталық жазықтықта төмендегі функциялардың графиктерін ретімен сызыңдар:

а) $y=\sin 2x$; ә) $y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$; в) $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+3$.

2. (1) 2.2 пункттегі $y=\cos x$ функциясының графигін қайта сызыңдар. $y=\cos x$ функциясының графигін негізгі деп алып, келесі функциялардың графиктерін тұрғызыңдар:

а) $y=-\cos x$; ә) $y=\cos x-2$; б) $y=|\cos x|$; в) $y=2\cos x$; г) $y=\cos\frac{1}{2}x$.

Функцияның графигін салыңдар (3–4):

3. (3) $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+3$. **4.** (1) $y=\sin\pi x$.

Функцияның графигін салып, сол бойынша функцияның қасиеттерін зерттеңдер (5–6):

5. (3) а) $y=2-\sin\frac{x}{2}$; ә) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$; б) $y=-2\sin\left|x+\frac{\pi}{3}\right|$.

6. (3) а) $y=1+\cos 1{,}5x$; ә) $y=1{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+2$; б) $y=3\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)-1$.

Функциялардың графиктерін салыңдар (7–8):

7. (3) а) $y=\cos x+|\cos x|$; ә) $y=\cos x-|\cos x|$; б) $y=\frac{\cos x}{|\cos x|}$.

8. (2) а) $y=\sin^2 x$; ә) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$.

9. (2) 1–8 тапсырмалардағы графигі сызылған әрбір функция үшін мәндер жиынын және мүмкіндігінше негізгі периодын анықтаңдар.

2-бөлім

10. (1) 2.1 пункттегі $y=\sin x$ функциясының графигін қайта салыңдар. $y=\sin x$ функциясының графигін негізгі деп алып, мына функциялардың графиктерін салыңдар:

а) $y=\sin(-x)$; ә) $y=|\sin x|$; б) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; в) $y=\sin|x|$; г) $y=-1{,}5\sin x$.

11. (2) 2.2 пункттегі $y=\cos x$ функциясының графигін қайта салыңдар. Координаталық жазықтықта мына функциялардың графиктерін ретімен салыңдар:

а) $y=\frac{3}{2}\cos x$; ә) $y=\frac{3}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $y=\frac{3}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$; в) $y=\left|\frac{3}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right|$.

Функцияның графигін салыңдар (12–13):

12. $y=\left|\frac{3}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right|$ **13.** (1) $y=\cos \pi x$.

Функцияның графигін салып, сол график бойынша функцияның қасиеттерін зерттеңдер (14–15):

14. (3) а) $y=2\sin 2x+1$; ә) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $y=\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

15. (3) а) $y=-1+\cos\frac{x}{2}$; ә) $y=-3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+3$; б) $y=|\cos 2x|$.

Функциялардың графиктерін салыңдар (16–17):

16. (3) а) $y=2\sin x+|\sin x|$; ә) $y=2\sin x+|\sin x|$; б) $y=\frac{2|\sin x|}{\sin x}$.

17. (2) а) $y=\cos^2 x$; ә) $y=-2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)-2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)$.

18. (2) 10–17 тапсырмалардағы графигін салыңдар, әрбір функцияның мәндер жиынын және мүмкіндігінше негізгі периодын анықтаңдар.

19. (4) Бұзылған кемеден бортқа 30 адамды көшіргеннен кейін кемедегі ауызсу қоры бұрынғыдай 60 күнге емес, 50 күнге жететін болады. Кемеде бастапқыда қанша адам болған?

20. (3) Теңдеуді шешіңдер:

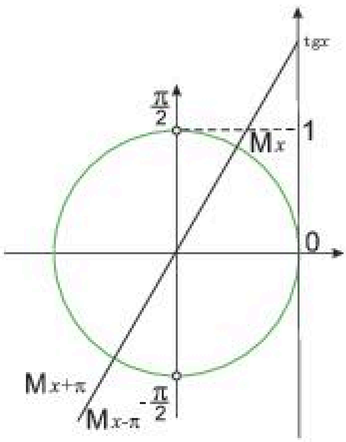
а) $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$; ә) $||3-x|-x+1|+x=6$.

21. (2) Үш жұмысшы үш күнде 3 сағаттан жұмыс істеп, 3 га жерге ауылшаруашылық дақылдарын егеді. 6 жұмысшы 6 жұмыс күнінде 6 сағаттан жұмыс істесе, қанша га жерге дақыл егеді? Барлық жұмысшылардың өнімділігі бірдей деп алынады.

Жауаптары:

19. 150 адам. **20.** а) $x\in[1;2]\cup\{5\}$; ә) $x\in\{-2;4\}$. **21.** 24 га.

2.4 $y=\operatorname{tg}x$ функциясы

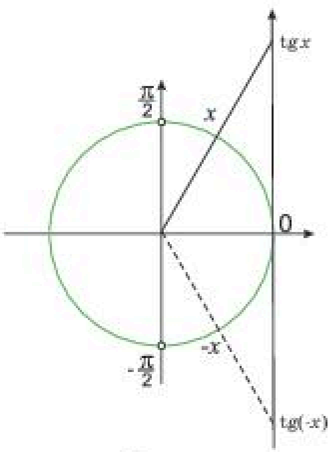


15-сурет

Радиусы 1-ге тең шеңбердің жарты доғасының ұзындығы π-ге тең, сондықтан $M_{x+\pi}$ және $M_{x-\pi}$ нүктелері M_x нүктесіне диаметральді қарама-қарсы нүктелер (15-сурет). Бұдан, $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}(x-\pi)=\operatorname{tg}x$ шығады. Демек, $T=\pi$ функцияның негізгі периоды болатынын көру қиын емес.

M_x және M_{-x} нүктелері Ox өсіне қатысты бір-біріне симметриялы, тангенстер өсінің оң және теріс жарты өстері де Ox өсіне қатысты бір-біріне симметриялы. Бұдан $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$ екендігі шығады (16-сурет).

$y=\operatorname{tg}x$ – **функциясы тақ және оның графигі координаталар басына қатысты өзіне симметриялы.**



16-сурет

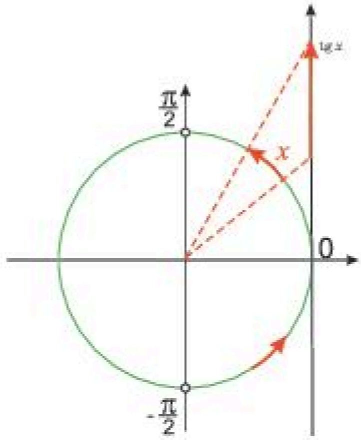
Сонымен, $y=\operatorname{tg}x$ функциясының периоды π және оның графигі өзіне-өзі координаттар басына қатысты симметриялы болғандықтан, графикті $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ аралығында салуға кірісейік. x 0-ден $\frac{\pi}{2}$-ге дейін өзгергенде $\operatorname{tg}x$-тің мәні өседі; $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ – өсу аралығы (17-сурет).

Егер x-тің мәні $\frac{\pi}{2}$-ге жақындаса, онда $\operatorname{tg}x$-тің мәні шексіз өседі.

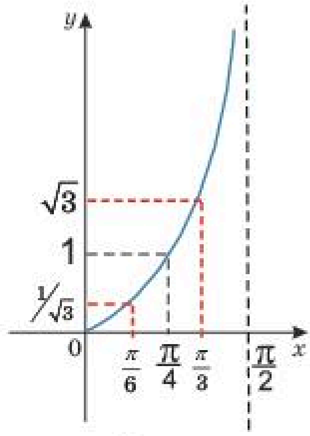
Бұл, $x=\frac{\pi}{2}$ түзуі – графиктің вертикаль асимптотасы деген сөз (18-сурет).

Тангенстердің белгілі мәндерін пайдаланып, кейбір бұрыштардың кестесін жасайық:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg}x$	0	$\approx 0{,}58$	1	$\approx 1{,}73$	∞

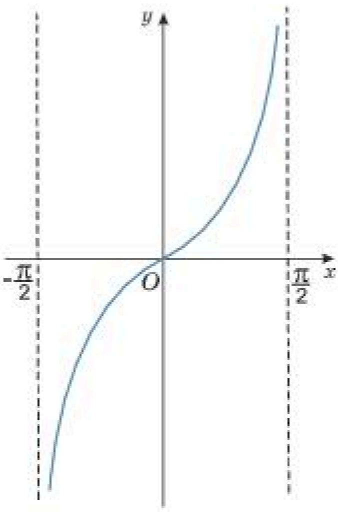


17-сурет

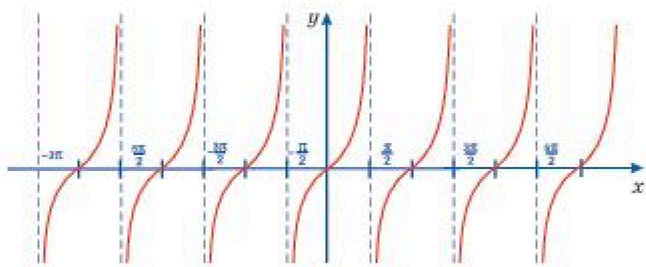


18-сурет

$y=\operatorname{tg}x$ тақ функция болғандықтан, келесі 19-суреттегі графикті алуға мүмкіндік береді.



19-сурет



20-сурет

Функцияның периодтылығы 20-суреттегі графикті алуға мүмкіндік береді.

$y=\operatorname{tg}x$ функциясының қасиеттері:

1) Анықталу облысы: $D(f): x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k,$ мұндағы $k \in \mathbb{Z}$.

2) Мәндер жиыны: $E(f):(-\infty;+\infty)$.

3) Тақ функция.

4) Периодты, негізгі периоды $T=\pi$.

5) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ – өсу аралығы.

6) Локальді экстремум нүктелері жоқ.

7) $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ – функцияның нөлдері.

8) $\left(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ – оң мәндер қабылдайтын аралығы,

$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi k\right)$, $k\in Z$ – теріс мәндер аралығы.

9) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ – вертикаль асимптоталары.

2 жаттығу

$y=\mathrm{ctg}x$ графигін салып, функцияны зерттеңдер.

2.5 $y=\mathrm{ctg}x$ функциясы

2-жаттығуды $y=\mathrm{tg}x$ функциясының графигін салғанымыздай орындауға болады. Егер келтіру формуласы $\mathrm{ctg}x=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ екенін ескерсек, онда $y=\mathrm{ctg}x$ функциясының графигін қарапайым түрлендірулер жүргізу арқылы салуға болады.

График салуды үш кезеңге бөлейік:

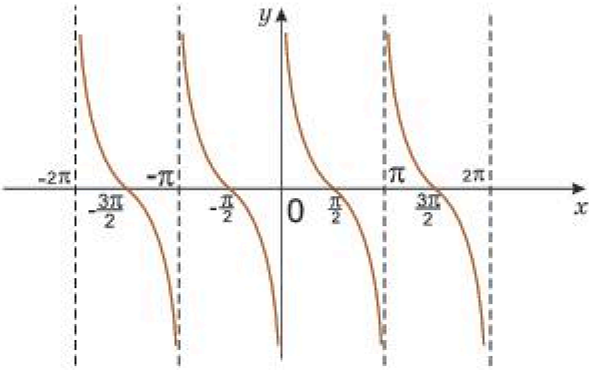
– $y=\mathrm{tg}x$ функциясының графигін саламыз;

– $y=\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ функциясының графигін $y=\mathrm{tg}x$ функциясының графигін Ox өсі бойымен $-\frac{\pi}{2}$-ге жылжыту арқылы саламыз.

$-\mathrm{ctg}x=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ екенін ескеріп, $y=\mathrm{ctg}x$ функциясының графигін алдыңғысын Oy өсіне қатысты толық симметриялап саламыз ($P6$ түрлендіруі, 1-тарау §4, п.2).

Ең алдымен нүктелерді және асимптоталарды түрлендіру қажеттігін ұмытпаған жөн. Өз беттеріңше орындаңдар.

Мұнда біз тек соңғы нәтижелерді көрсетеміз (21-сурет).



21-сурет

$y=\mathrm{ctg}x$ функциясының қасиеттері:

1) Анықталу облысы $D(f)$: $x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

2) мәндер жиыны $E(f):(-\infty;+\infty)$;

3) тақ функция;

4) периодты, негізгі периоды $T=\pi$;

5) $(\pi k; \pi+\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ – кему аралықтары;

6) локальді экстремум нүктелері жоқ;

7) $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ – функцияның нөлдері;

8) $\left(\pi k; \dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ – оң мән қабылдайтын аралықтары;

$\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k; \pi+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ – теріс мән қабылдайтын аралықтары;

9) $x=\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ – вертикаль асимптоталары.

2.6 Мысалдар

$f(2x)$ функциясының графигі Ox өсінің бойымен $f(x)$ функциясының графигін 2 есе сығу арқылы алынады. Егер $f(x)$ функциясының T периоды бар болса, онда $f(2x)$ функциясының периоды $\frac{T}{2}$ болады. Осыған ұқсас, **егер $f(x)$ функциясының периоды T болса, онда $f(kx)$ функциясының периоды $\frac{T}{|k|}$ болады,** өйткені $f(kx)$ функциясының графигі $f(x)$ функциясының графигін Ox өсі бойымен k есе сығу арқылы алынады.

2 мысал $f(x)=6\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)-2$ функциясының периодын және мәндер жиынын табыңдар.

Шешуі. $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$ дәрежені төмендету формуласын пайдаланып, $f(x)$ функциясын $f(x)=-3\cos^2\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ түріне келтіреміз. $y=-3\cos x+1$ функциясының периоды 2π-ге тең. Соңғы ескертуге сәйкес $f(x)=-3\cos\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ функциясының периоды $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

Мәндер жиынын табайық:

$$-1\le\cos(6x+\frac{\pi}{4})\le 1,\ -3\le -3\cos(6x+\frac{\pi}{4})\le 3,\ -2\le -3\cos(6x+\frac{\pi}{4})+1\le 4.$$

Демек, мәндер жиыны: $E(f):[-2;4]$.

3 мысал a параметрінің қандай мәндерінде $6\sin^2(3x+\frac{\pi}{8})-2=a$ теңдеуінің түбірлері болады?

Шешуі. a саны $y=f(x)$ функциясының мәндер жиынында жатса, сонда және тек сонда ғана $f(x)=a$ теңдеуінің түбірлері болады. Алдыңғы мысалдың нәтижесін ескере отырып, жауабын аламыз.

Жауабы: $a\in[-2;4]$.

4 мысал

$y=\sin 1,5x-\operatorname{ctg}\frac{5}{3}x$ функциясы үшін периодтарының біреуін, мүмкіндігінше, ең кіші периодын анықтаңдар.

Шешуі. 1-тараудағы 4-параграфтың теоремасы берілген функцияның периодтарының біреуін табу тәсілін береді. $f(x)=\sin\frac{3}{2}x$ функциясының T_1 периоды $\frac{2\pi}{1,5}=\frac{4\pi}{3}$-ке тең, $g(x)=\operatorname{ctg}\frac{5}{3}x$ функциясының T_2 периоды $\frac{\pi\cdot 3}{5}=\frac{3\pi}{5}$-ке тең. Ары қарай $T_1m=T_2k$ болатындай ең кіші натурал сандар m және k-ны іздейміз. Ол үшін пропорция құрамыз: $\frac{T_1}{T_2}=\frac{k}{m}$. $T_1=\frac{4\pi}{3}$ және $T_2=\frac{3\pi}{5}$ мәндерін қойып, мүмкіндігінше ең кіші мәндерді табамыз, $k=20$ және $m=9$. 1-тараудағы 4-параграфтың теоремасы бойынша $f(x)-g(x)$ функциясының периодтарының бірі мына түрде болады: $T=T_1m=T_2k$. Мұндай жағдайда период: $T=T_1m=\frac{4\pi}{3}\cdot 9=12\pi$.

5 мысал

x_1, x_2 және x_3 үш сан берілген, олар $[3\pi;4\pi]$ кесіндісіне тиісті, мұндағы $x_1>x_2>x_3$. $\operatorname{ctg}x_1$, $\operatorname{ctg}x_2$ және $\operatorname{ctg}x_3$ сандарын өзара салыстырыңдар.

Шешуі. $[3\pi;4\pi]$ аралығында $y=\operatorname{ctg}x$ функциясы кемімелі: аргументтің кіші мәні функцияның үлкен мәніне сәйкес келеді. Демек, $\operatorname{ctg}x_1<\operatorname{ctg}x_2<\operatorname{ctg}x_3$.

Есептер

1-бөлім

Функциялардың графиктерін салыңдар (1-2):

1. а) $y=\operatorname{tg}x$; ә) $y=\operatorname{tg}2x$; б) $y=-\operatorname{tg}2x$; в) $y=1-\operatorname{tg}2x$.

2. а) $y=\operatorname{ctg}x$; ә) $y=\operatorname{ctg}|x|$; б) $y=\operatorname{ctg}|x|-1$; в) $y=|\operatorname{ctg}|x|-1|$.

3. $y=\operatorname{tg}x\cdot\cos x$ функциясының графигін салыңдар.

4. $y=-\mathrm{tg}\,x$ функциясының графигі $y=\mathrm{tg}\,x$ функциясының графигін $P5$ түрлендіруден шығады (1-тарау, §6). Екінші жағынан, $y=\mathrm{tg}(-x)$ функциясының графигі $y=\mathrm{tg}\,x$ функциясының графигін $P6$ түрлендіруден шығады. Неліктен екі жағдайда да бірдей график шығатынын түсіндіріңдер.

5. а) x_1, x_2, x_3, ... , x_n сандарының өспелі тізбегі берілген, олардың әр қайсысы $[8\pi;9\pi]$ кесіндісінде жатады. $\cos x_1$, $\cos x_2$, $\cos x_3$, ... , $\cos x_n$ сандар тізбегі өспелі ме әлде кемімелі ме?

ә) x_1, x_2, x_3, ... , x_n сандарының өспелі тізбегі берілген, олардың әрқайсысы $[-9\pi;-8\pi]$ кесіндісінде жатады. $\sin x_2$, $\sin x_2$, $\sin x_3$, ... , $\sin x_n$ тізбегінің монотондылығы туралы не айтуға болады?

б) x_1, x_2, x_3, ... , x_n сандарының кемімелі тізбегі берілген, олардың әрқайсысы $[-9\pi;-8\pi]$ кесіндісінде жатады. $\mathrm{ctg}\,x_1$, $\mathrm{ctg}\,x_2$, $\mathrm{ctg}\,x_3$, ... , $\mathrm{ctg}\,x_n$ тізбегінің монотондылығы туралы не айтуға болады?

6. Функциялардың ішінен периодты функцияны анықтап, негізгі периодын табыңдар:

а) $f_0(x)=\sin 4x$, $f_1(x)=x+\sin 4x$, $f_2(x)=\dfrac{23}{\cos 4x\sin 4x}$, $f_3(x)=|\sin x|$;

ә) $g_0(x)=45\cos\left(0,5x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $g_1(x)=-5\cos\left(0,5\pi x+\dfrac{\pi}{5}\right)$,

$g_2(x)=\cos^2 x$, $g_3(x)=x\cos 5x$;

б) $h_0(x)=\dfrac{2}{3}\mathrm{tg}\dfrac{2}{3}x$, $h_1(x)=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,2x}{1-\mathrm{tg}^2 2x}$, $h_2(x)=\dfrac{4}{x}-\mathrm{tg}\,3x$.

7. (3) Функцияның периодтарының біреуін, мүмкіндігінше, ең кіші периодын табыңдар:

а) $f(x)=\cos 7x+\sin 2x-4$;

ә) $g(x)=12\,\mathrm{tg}\dfrac{3}{4}x-15\,\mathrm{ctg}\dfrac{12}{5}x$;

б) $h(x)=\mathrm{tg}\,1,2x\cdot\sin 1,4x$.

8. (2) Функцияларды жұптылыққа зерттеңдер:

а) $f_1(x)=\cos 3x$, $f_2(x)=x^3\cos 3x$, $f_3(x)=x^3-\cos 3x$, $f_4(x)=\dfrac{x^3}{\sin 3x}$,

$f_5(x)=\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)$;

ә) $g_1(x)=5x^3-\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x^3$, $g_2(x)=\sin^2 5x$, $g_3(x)=\dfrac{3}{2+\sin^2 5x}$,
$g_4(x)=\sin\sqrt{x}$.

$y=f(x)$ функциясының мәндер жиынын табыңдар, егер (9-10):

9. (2) а) $y=\cos 2x$; ә) $y=2\cos 2x-1$; б) $y=|\cos 3x|+4$; в) $y=5\cos^2 x-3$.

10. (2) а) $y=2\sin 100x\cos 100x$; ә) $y=(\sin 2x+\cos 2x)^2$; б) $y=\cos^4\dfrac{x}{2}-\sin^4\dfrac{x}{2}$.

11. (3) a параметрінің қай мәндерінде теңдеудің түбірі болады?
а) $\sin 3x=a$; ә) $\sin x+|\sin x|=a$; б) $\cos^2 x=a-3$; в) $\sin 10x=a^2-2$.

12. Шарт бойынша $f(x)$ функциясының түрі және мәндерінің жиыны берілген. A параметрлерінің мәндерін табыңдар, егер:
а) $f(x)=A\cos x$, $E(f):[-2;2]$; ә) $f(x)=A\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{7}\right)+6$, $E(f):[1;11]$.

13. (3) Шарт бойынша $f(x)$ функциясының түрі және мәндерінің жиыны, периоды берілген. p, q, r параметрлерінің мәндерін табыңдар, егер:
а) $f(x)=p\sin rx+q$, $E(f):[-2;4]$, $T=\dfrac{\pi}{2}$;

ә) $f(x)=(p-2)\cos\left(\left(2r+\dfrac{1}{3}\right)x\right)+|q+1|$, $E(f):[6;10]$, $T=6\pi$.

14. (4) Қапшағай су қоймасының деңгейі $h(t)=475-3\cos\dfrac{\pi}{6}t$ функциясымен сипатталады, мұндағы $h(t)$ – теңіз деңгейінен биіктігі (метрмен), t – ай нөмірі.
а) Су қоймасындағы су деңгейінің ең үлкен мәні неге тең? Қай айда осы деңгейге жетеді?
ә) Су қоймасындағы су деңгейінің ең кіші мәні неге тең? Қай айда осы деңгейге жетеді?

2-бөлім

Функциялардың графиктерін салыңдар (15-16):

15. (1) а) $y=\operatorname{ctg}x$; ә) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{2}x$; б) $y=2\operatorname{ctg}\dfrac{1}{2}x$; в) $y=2\operatorname{ctg}\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

16. (1) а) $y=\operatorname{tg}x$; ә) $y=|\operatorname{tg}x|$; б) $y=\left|\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$; в) $y=\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right|$.

17. (2) $y=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x$ функциясының графигін салыңдар.

18. (3) Периодты функцияларды анықтаңдар және олардың негізгі периодын табыңдар:

а) $f_0(x)=\cos\frac{2\pi}{7}\sin 57x+\sin\frac{2\pi}{7}\cos 57x$, $f_1(x)=\cos\frac{2}{3}x+\sin\frac{2}{3}x$,

$f_2(x)=\left(\cos\frac{2}{3}x+\sin\frac{2}{3}x\right)^2$, $f_3(x)=x^2|\sin x|$;

б) $g_0(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\sqrt{7}x-\frac{\pi}{7}\right)$, $g_1(x)=\cos^2\frac{\pi}{5}x-\sin^2\frac{\pi}{5}x$, $g_2(x)=x^3-\cos^4 x$,

$g_3(x)=\cos^4 x$; в) $h_0(x)=\frac{1}{2-\operatorname{ctg}3\pi x}$; $h_1(x)=\frac{x}{2-\operatorname{ctg}3\pi x}$, $h_2(x)=1+\operatorname{ctg}^2 x$.

19. Функцияның периодтарының біреуін, мүмкіндігінше, ең кішісін табыңдар:

а) (2) $f(x)=\sin x+\sin 2x$;

ә) (2) $g(x)=\sin\frac{2}{3}x-\cos 3x$;

б) (3) $h(x)=\operatorname{tg}1,5x\cdot\cos 2x$.

20. (2) Функцияны жұптылыққа зерттеңдер:

а) $f_1(x)=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x$, $f_2(x)=1+\operatorname{ctg}^3 x$, $f_3(x)=x^{55}\operatorname{ctg}3x$, $f_4(x)=\frac{|x^3|}{\operatorname{ctg}37x}$;

ә) $g_1(x)=\sin x+\cos x$, $g_2(x)=(\sin x-\cos x)^2-1$,

$g_3(x)=\sin(12x-\pi)$, $g_4(x)=\operatorname{tg}(-4x)+2015x^{2015}$.

21. а). x_1, x_2, x_3, … , x_n сандарының кемімелі тізбегі берілген, олардың әрқайсысы $[-8\pi;-6\pi]$ кесіндісіне тиісті. $\cos x_1$, $\cos x_2$, $\cos x_3$, … , $\cos x_n$ тізбегінің монотондылығы туралы не айтуға болады?

ә) x_1, x_2, x_3, … , x_n сандарының өспелі тізбегі берілген, олардың әрқайсысы $[80,5\pi;81\pi]$ кесіндісінде жатады. $\sin x_1$, $\sin x_2$, $\sin x_3$, … , $\sin x_n$ тізбегінің монотондылығы туралы не айтуға болады?

б) x_1, x_2, x_3, … , x_n сандарының кемімелі тізбегі берілген, олардың әрқайсысы $[80,5\pi;81\pi]$ кесіндісінде жатады. $\operatorname{tg}x_1$, $\operatorname{tg}x_2$, $\operatorname{tg}x_3$, … , $\operatorname{tg}x_n$ тізбегінің монотондылығы туралы не айтуға болады?

$y=f(x)$ функциясының мәндер жиынын табыңдар, егер (22-23):

22. (3) а) $y=\sin\frac{x}{2}$; ә) $y=-3\sin 2x+1$; б) $y=-|\sin 4x|-10$; в) $y=\pi\sin^2 4x+6$.

23. (3) а) $y=3\cos^2 x-3\sin^2 x$; ә) $y=(2\cos 3x-2\sin 3x)^2$; б) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

24. (3) a параметрінің қандай мәндерінде теңдеудің түбірі болады?

а) $\cos\frac{x}{2}=\frac{a}{2}$; ә) $|\cos x|-\cos x=a$; б) $\sin 3x=\cos a$; в) $|\sin x|=3a^2+2a$.

25. $f(x)$ функциясының түрі және мәндер жиыны берілген. p және q параметрлерінің мәнін табыңдар, егер:

а) $f(x)=p\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+q$, $E(f):[-10;20]$; ә) $f(x)=p|\cos x|+q$.

26. (3) $f(x)$ функциясының түрі және мәндер жиыны берілген. p және q параметрлерінің мәнін табыңдар, егер:

а) $f(x)=p\sin rx+q$, $E(f):[-10;0]$, $T=4$;

ә) $f(x)=(p+2)\sin((6-2r)x)+2q$, $E(f):[-6;8]$, $T=\frac{\pi}{5}$.

27. (5) 4 қыз бірін-бірі кезектесе сүйемелдеп, ән айтады. Біреуі сүйемелдегенде, қалған үшеуі ән салады. Айдана барлығынан көп – 11 рет ән айтты, Айжан ең аз – 8 рет ән айтты. Қыздар барлығы қанша ән айтты?

28. (2) Теңдеуді шешіңдер:

а) $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$; ә) $(x^2+5x)\sqrt{x-3}=0$.

29. (5) Ерасыл пәтердегі 10 қарапайым электр шамын энергияны үнемдеуші 10 шамға алмастырды. Қарапайым шамның тұтыну қуаты 100 Вт, энергияны үнемдеуші шамның қуаты 10 Вт, энергияны үнемдеуші шамның құны 1440 теңге, 1 кВт/сағ электроэнергия құны 16 теңге. Егер шам тәулігіне 4 сағат жанатын болса, онда энергияны үнемдеуші шам қанша уақыт ішінде өзін-өзі өтейді? (Энергияны үнемдеуші шамдар істен шықпайды деп есептеңдер).

А) 250 күн; B) 300 күн; C) 320 күн; D) 1 жыл; E) 440 күн.

30. (2) Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} x+4y=18, \\ x^2+y^2=20. \end{cases}$

Жауаптары:

5. а) кемімелі; ә) ешнәрсе айтуға болмайды; б) өспелі.

6. а) $T_0=\frac{\pi}{2}$, f_1 периодты емес, $T_2=\frac{\pi}{4}$, $T_3=\pi$; ә) $T_0=4\pi$, $T_1=4$, $T_2=\pi$, g_3 периодты емес; б) $T_0=1{,}5\pi$, $T_1=\frac{\pi}{4}$, h_2 периодты емес. **7.** а) 2π; ә) $\frac{20\pi}{3}$; б) 10π.

8. а) f_1 – жұп, f_2 – тақ, f_3 – жалпы түрі, f_4 – жұп, f_5 – тақ; ә) g_1 – тақ, g_2 – жұп, g_3 – жалпы түрі, g_4 – жалпы түрі.

9. а) $[-1;1]$; ә) $[-3;1]$; б) $[4;5]$; в) $[-3;2]$. **10.** а) $[-1;1]$; ә) $[0;2]$; б) $[-1;1]$.

11. а) $[-1;1]$; ә) $[0;2]$; б) $[3;4]$; в) $\left[-\sqrt{3};-1\right]\cup\left[1;\sqrt{3}\right]$. **12.** а) ± 2; ә) ± 5.

13. а) $(p;q;r)\in\{(3;1;4);(-3;1;4);(3;1;-4);(-3;1;-4)\}$;

ә) $(p;q;r)\in\left\{(0;0;7);(0;0;-9);\left(0;-\frac{1}{3};7\right);\left(0;-\frac{1}{3};-9\right);(4;0;7);(4;0;-9);\left(4;-\frac{1}{3};7\right);\left(4;-\frac{1}{3};-9\right)\right\}$

14. а) Теңіз деңгейінен жоғары су деңгейінің ең үлкен мәні $475+3=478$ м, ол $t=6$ болғанда, яғни маусым айында орын алады;

ә) ең кіші мәні $475-3=472$ м, $t=0$ немесе $t=12$ болғанда, яғни желтоқсан айында орын алады.

18. а) $T_0=\frac{2\pi}{57}$, $T_1=3\pi$, $T_2=\frac{3\pi}{2}$, f_3 – периодты емес;

ә) $T_0=\frac{2\pi}{\sqrt{7}}$, $T_1=5$, g_2 – периодты емес, $T_3=\pi$;

б) $T_0=\frac{1}{3}$, h_1 периодты емес, $T_2=\pi$.

19. а) 2π; ә) 6π; б) 2π. **20.** а) f_1 – тақ, f_2 – жалпы түрі, f_3 – жұп, f_4 – тақ; ә) g_1 – жалпы түрі, g_2 – тақ, g_3 – тақ, g_4 – тақ. **21.** а) ешнәрсе айтуға болмайды; ә) кемімелі; б) кемімелі. **22.** а) $[-1;1]$; ә) $[-2;4]$; б) $[-11;10]$; в) $[6;6+\pi]$.

23. а) $[-3;3]$; ә) $[0;8]$; б) $\left[\frac{1}{2};1\right]$. **24.** а) $[-2;2]$; ә) $[0;2]$; б) $(-\infty;+\infty)$; в) $\left[-1;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[0;\frac{1}{3}\right]$. **25.** а) $(p;q)\in\{(15;5);(-15;5)\}$; ә) $(p;q)\in\{(8;4);(-8;12)\}$

26. а) $(p;q;r)\in\left\{\left(5;-5;\frac{\pi}{2}\right);\left(-5;-5;-\frac{\pi}{2}\right);\left(5;-5;-\frac{\pi}{2}\right);\left(-5;-5;\frac{\pi}{2}\right)\right\}$;

ә) $(p;q;r)\in\left\{\left(5;\frac{1}{2};-2\right);\left(5;\frac{1}{2};8\right);\left(-9;\frac{1}{2};-2\right);\left(-9;\frac{1}{2};8\right)\right\}$.

27. 13 ән. **28.** а) $x_1=-1$, $x_2=2$ ә) $x=3$.

29. А. **30.** $\left(\frac{2}{17};\frac{76}{17}\right)$, $(2;4)$.

§3 КЕРІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР

«Математикадан еш хабары жоқ адам менің еңбектерімді оқуға тырыспай-ақ қойсын».

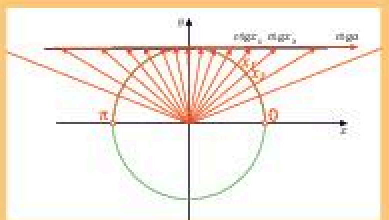
Леонардо да Винчи

3.1 Арккотангенс

Тригонометриялық шеңбердегі $(0;\pi)$ доғасын және котангенстер өсін қарастырайық. Котангенстер өсіндегі әрбір a саны үшін $\mathrm{tg}\,\varphi = a$ болатындай $(0;\pi)$ доғасынан бір ғана φ бұрышы табылады. Ол бұрышты a санының арккотангенсі деп атайды. Белгіленуі: $\varphi = \mathrm{arcctg}\,a$.

1-АНЫҚТАМА.

Кез келген a санының арккотангенсі деп $(0;\pi)$ аралығында котангенсі a-ға тең болатын φ бұрышын айтады. $\mathrm{arcctg}a = \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \varphi < \pi, \\ \mathrm{ctg}\varphi = a. \end{cases}$



1-сурет

- Кез-келген a саны үшін $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\,a) = a$ тепе-теңдігі орындалады.
- $(0;\pi)$ интервалындағы кез-келген φ бұрышы үшін $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\,\varphi) = \varphi$ тепе-теңдігі орындалады.

Төмендегі екі тепе-теңдік анықтамадан тікелей шығады:

1 мысал

$2\frac{1}{4}\pi$, $1\frac{1}{4}\pi$, $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$ бұрыштары берілген. $y = \mathrm{ctg}x$ функциясы, периоды $T = \pi$ болатын периодты функция болғандықтан, бұл бұрыштардың котангенстері өзара тең және 1 санына тең болады. Берілген бұрыштардың қайсылары 1 санының арккотангенсі болатынын анықтаңыз.

Шешуі. Шарт бойынша $\mathrm{tg}\,2\frac{1}{4}\pi = \mathrm{tg}\,1\frac{1}{4}\pi = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = \mathrm{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$,

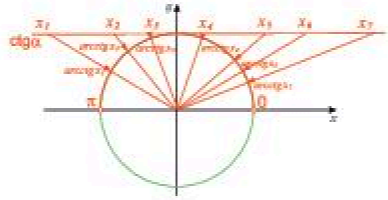
бірақ осы бұрыштардың арасынан тек $\frac{\pi}{4}$ бұрышы ғана $(0;\pi)$ аралығына ғана тиісті болады.

Жауабы. $\frac{\pi}{4}$.

2 мысал

$\sqrt{3}$ саны мен $-\sqrt{3}$ санның арккотангенстерін табыңдар.

Шешуі. $\sqrt{3}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$ екені белгілі. Сондай-ақ $\frac{\pi}{6}\in(0;\pi)$. Бұдан $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$ екені шығады. $\sqrt{3}$



2-сурет

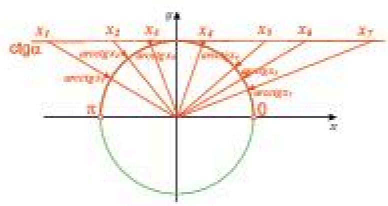
және $-\sqrt{3}$ сандарын котангенстер өсінде белгілейік (3-сурет). $\sqrt{3}$ саны мен $-\sqrt{3}$ саны котангенстер өсінде Oy өсіне қатысты симметриялы. $(0;\pi)$ доғасында $\frac{\pi}{6}$ мен $\pi-\frac{\pi}{6}$ нүктелері Oy өсіне қатысты симметриялы. Геометриялық түрде $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\pi-\frac{\pi}{6}$ теңдігі орындалатынына көз жеткізуге болады.

Жауабы. $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6}$.

2-мысалдағы сияқты, жалпы жағдайда арккотангенстің қасиеті дәлелденеді: **кез келген** a саны үшін $\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg}a$ теңдігі орындалады.

Аркотангенстің анықтамасынан әрбір нақты x санына, анықтамасына сәйкес $(0;\pi)$ аралығынан алынған $\operatorname{arcctg}x$ бұрышы сәйкес келетіні шығады (3-сурет). Осылайша, $y=\operatorname{arcctg}x$ функциясы пайда болады. Бұл функцияның анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны $(-\infty;+\infty)$, ал мәндер облысы $(0;\pi)$ аралығындағы анықталған, $y=\operatorname{ctg}x$ **функциясына кері функция екенін байқау қиын емес**. $y=\operatorname{arcctg}x$ функциясының графигін салайық. Ол $(0;\pi)$ аралығындағы $y=\operatorname{ctg}x$ функциясына кері функция болғандықтан, олардың графиктері $y=x$ түзуіне қарағанда симметриялы болады.

Симметриялауды орындағанда алдымен асимптоталардың кескіндерін саламыз: Oy өсі Ox өсіне, ал $x=\pi$ түзуі $y=\pi$ түзуіне көшеді. Осыдан кейін бірнеше ерекше нүктелерді кескіндейміз. Мысалы координатасы $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ нүктесі $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ нүктесіне көшеді.



3-сурет

Ары қарай графикті саламыз. 4-суретті қарап, зерттеңдер.

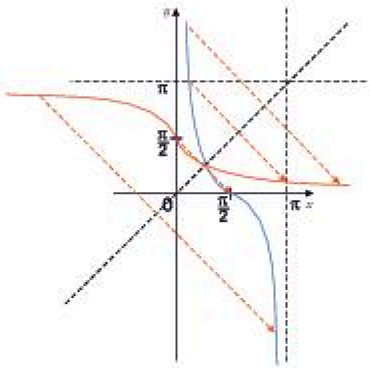
$y = \operatorname{arcctg} x$ функциясының қасиеттері:

1) $D(f):(-\infty;+\infty)$;

2) $E(f):(0;\pi)$;

3) функция барлық анықталу облысында кемиді;

4) $y=0$ және $y=\pi$ – горизонталь асимптоталары.



4-сурет

Аркфункциялармен жұмыс істеу үшін келесі кесте пайдалы болады. Бірінші және екінші қатардағы бөлшектердің алымындағы сандардың жазылу формасына назар аударыңдар. Үшінші қатар бірінші қатардағы сәйкес бағандағы санды екінші қатардағы санға бөлу арқылы алынады. Төртінші қатардағы сан қалай алынғанын анықтаңдар.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

3.2 Арктангенс

2-АНЫҚТАМА.

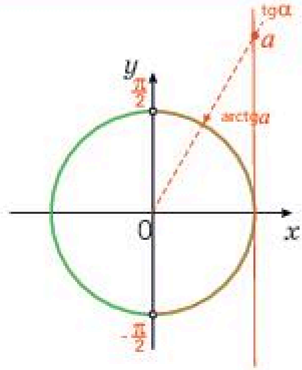
Кез келген $a \in (-\infty;+\infty)$ саны үшін a санының арктангенсі деп $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ аралығындағы тангенсі a-ға тең болатын φ бұрышын айтады. $\operatorname{arctg} a = \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = a. \end{cases}$

Анықтамадан келесі екі тепе-теңдік орындалады:

- Кез келген a саны үшін $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)=a$ тепе-теңдігі орындалады.
- $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ интервалындағы кез келген φ бұрышы үшін $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)=\varphi$ тепе-теңдігі орындалады.

3 мысал

$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{22\pi}{3}\right)$ мәнін табыңдар.



5-сурет

Шешуі. $\frac{22\pi}{3}$ бұрышы $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ аралығына тиісті емес болғандықтан, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{22\pi}{3}\right)=\frac{22\pi}{3}$ деу дұрыс емес. Анықтамаға сәйкес $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{22\pi}{3}\right)$ бұрышы – ол $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ аралығында жататын, тангенсі $\frac{22\pi}{3}$ бұрышының тангенсіне тең болатын бұрыш. Тангенс функциясының периодтылығын пайдаланамыз: $\operatorname{tg}\frac{22\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(7\frac{1}{3}\pi\right)=\operatorname{tg}\left(7\frac{1}{3}\pi-7\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, мұндағы $\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, олай болса $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{22\pi}{3}\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Жауабы: $\frac{\pi}{3}$

4 мысал

1 және –1 сандарының арктангенстерін табыңдар.

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ және $\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ екені белгілі. Олай болса, $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$

1 мен -1 сандары тангенстер өсінде Ox өсіне қатысты бір-біріне симметриялы, $\frac{\pi}{4}$ және $-\frac{\pi}{4}$ нүктелері де Ox өсіне қатысты бір-біріне симметриялы. Олай болса, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$, $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

4-мысалдан $\mathrm{arctg}(-1)=-\mathrm{arctg}\,1$ екені белгілі. Осындай талдаулар кез келген a саны үшін $\mathrm{arctg}(-a)=-\mathrm{arctg}\,a$ теңдігі орындалатынын көрсетеді.

Жоғарыдағы анықтамаға сәйкес әрбір $x\in(-\infty;+\infty)$ санына, $\mathrm{arctg}\,x$-ті сәйкестендіруге болады.

3-АНЫҚТАМА.

$y=\mathrm{arctg}x$ функциясы ол әрбір $x\in(-\infty;+\infty)$ санына санын $\mathrm{tg}y=x$ болатындай $y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ санын сәйкестендіреді.

$y=\mathrm{arctg}x$ функциясының $y=\mathrm{tg}x$ функциясына $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ аралығында анықталған кері функция екенін көру қиын емес. Демек, $y=\mathrm{arctg}x$ функциясының графигі $y=\mathrm{tg}x$ функциясы графигінің сәйкесінше тармағының $y=x$ түзуіне қатысты симметриялы кескіні түрінде салынады (6-сурет).

$y=\mathrm{arctg}\,x$ функциясының қасиеттері:

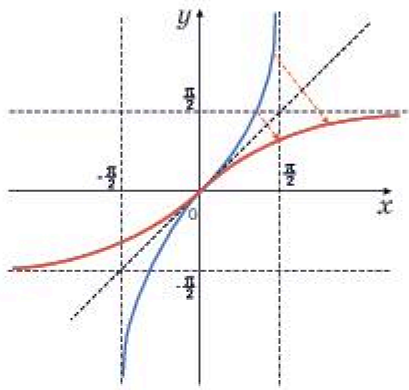
1) $D(f):(-\infty;+\infty)$;

2) $E(f):\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

3) тақ функция;

4) барлық анықталу облысында өспелі;

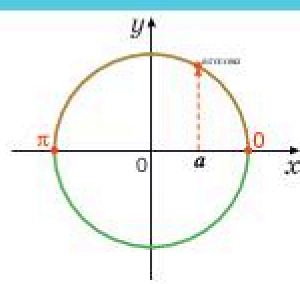
5) $y=\pm\frac{\pi}{2}$ – горизонталь асимптоталары.



6-сурет

3.3 Арккосинус

$y=\cos x$ функциясы $[0;\pi]$ жины мен $[-1;1]$ жиынын өзара бір мәнді сәйкестендіреді. Ол дегеніміз $[-1;1]$ кесіндісінен алынған кез келген a саны үшін, $[0;\pi]$ доғасынан $\cos\varphi=a$ орындалатындай бір ғана φ бұрышы табылады дегенді білдіреді (7-сурет).



7-сурет

4-АНЫҚТАМА.

$[-1;1]$ аралығындағы a санының арккосинусы деп $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде жататын, косинусы a-ға тең φ бұрышын айтады.

$$\arccos a=\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le\varphi\le\pi, \\ \cos\varphi=a. \end{cases}$$

Анықтамадан келесі екі тепе-теңдік шығады:

- Кез келген $a\in[-1;1]$ саны үшін $\cos(\arccos a)=a$ тепе-теңдігі орындалады.
- $[0;\pi]$ интервалындағы кез келген φ бұрышы үшін $\arccos(\cos\varphi)=\varphi$ тепе-теңдігі орындалады.

Кез келген $a\in[-1;1]$ саны үшін келесі тепе-теңдік орындалады: $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$

5 мысал

Ықшамдаңдар: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Шешуі. $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$ қасиеті бойынша $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$. Кесте бойынша $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$.

Олай болса $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

Жауабы: $\frac{5\pi}{6}$

жаттығу

Табу керек: $\arccos\frac{1}{2}$, $\arccos 0$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos 1$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5-АНЫҚТАМА.

$y=\arccos x$ функциясы – ол әрбір $x\in[-1;1]$ санына $\cos y=x$ болатындай $y\in[0;\pi]$ санын сәйкестендіреді.

6 мысал

$\arccos(\cos 2015{,}3\pi)$ мәнін анықтаңдар.

Шешуі. $\arccos(\cos 2015{,}3\pi)=\alpha$ болсын. Біздің мақсатымыз – α бұрышын $[0;\pi]$ доғасында анықтау, бұл бұрыштың косинусы $2015{,}3\pi$ бұрышының косинусына тең. $\cos x$ функциясының периоды 2π болса, онда $\cos 2015{,}3\pi=\cos(2015{,}3\pi-2\cdot 1008\pi)=\cos(-0{,}7\pi)=\cos 0{,}7\pi$, ал $0{,}7\pi\in[0;\pi]$.

Жауабы: $0{,}7\pi$.

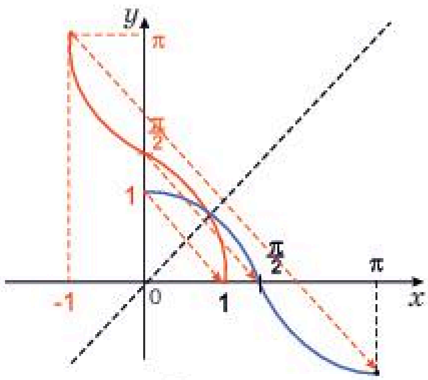
$y=\arccos x$ функциясы $[0;\pi]$ аралығында анықталған $y=\cos x$ функциясына кері функция болып табылады (8-сурет).

$y=\arccos x$ функциясының қасиеттері:

1) $D(f):[-1;1]$;

2) $E(f):[0;\pi]$;

3) барлық анықталу облысында кемімелі.



8-сурет

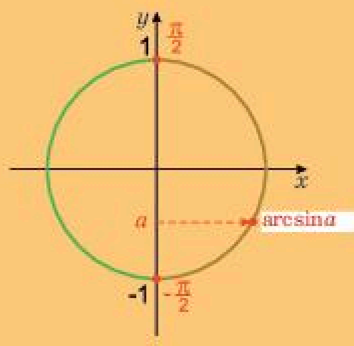
3.4 Арксинус

$y=\sin x$ функциясы $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісін $[-1;1]$ кесіндісіне өзара бір мәнді сәйкестендіреді.

6-АНЫҚТАМА.

$[-1;1]$ аралығындағы a санының арксинусы деп $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде жататын, синусы a-ға тең φ бұрышын айтады.

$$\arcsin a=\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, \\ \sin\varphi=a. \end{cases}$$



9-сурет

Арксинустың анықтамасынан төмендегі формулаларды тікелей шығарып алуға болады:

- Кез келген $a \in [-1;1]$ саны үшін $\sin(\arcsin a) = a$ тепе-теңдігі орындалады.
- Кез келген $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ бұрышы үшін $\arcsin \sin \varphi = \varphi$ тепе-теңдігі орындалады.

$(-a)$ саны мен a саны Oy өсінде Ox өсіне қатысты симметриялы. $\arcsin(-a)$ және $\arcsin a$ бұрыштары тригонометриялық шеңберде Ox өсіне қатысты симметриялы. Олай болса $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ **тепе-теңдігі орындалады**.

2 жаттығу

-1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1 сандарының арксинустарын табыңдар.

7-АНЫҚТАМА.

$y = \arcsin x$ функциясы – ол әрбір $x \in [-1;1]$ санына $\sin y = x$ болатындай $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ санын сәйкестендіреді.

$y = \arcsin x$ функциясы $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ жиынында анықталған $y = \sin x$ функциясына кері функция болып табылады.

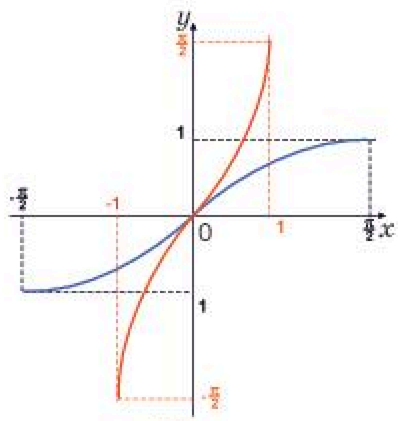
$y = \arcsin x$ функциясының қасиеттері:

1) $D(f): [-1;1]$;

2) $E(f): \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

3) тақ;

4) барлық анықталу облысында өспелі.



10-сурет

7 мысал

$\arcsin(\sin 5)$ мәнін табыңдар.

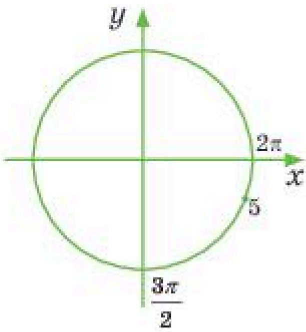
Шешуі. $\arcsin(\sin 5) = \alpha$ болсын. Арксинус анықтамасы бойынша $\sin \alpha = \sin 5$ және $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Мұндай есептерде периодтылық пен келтіру формулаларын қолданамыз. Мұндағы $\pi \approx 3{,}14$

болғандықтан, $\frac{3\pi}{2}<5<2\pi$ (1-сурет).

Демек, $\frac{3\pi}{2}-2\pi<5-2\pi<0$, $-\frac{\pi}{2}<5-2\pi<0$.

$\sin 5=\sin(5-2\pi)$ және $5-2\pi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Жауабы: $5-2\pi$.



11-сурет

Есептер

1-бөлім

1. Қарапайым $P1-P8$ түрлендірулерін (1-тарау, §6) пайдаланып, бір координаталық жазықтықта $f(x)=\arcsin x$, $g(x)=\arcsin\frac{1}{2}x$,

$$h(x)=3\arcsin\frac{1}{2}x,\quad u(x)=3\arcsin\frac{1}{2}(x+4),\quad v(x)=3\arcsin\left(\frac{x}{2}+2\right)-\pi$$

функцияларының графигін салыңдар. Әрбір функция үшін анықталу облысын және мәндер жиынын табыңдар.

2. (1) Келесі өрнектерді ықшамдаңдар:

а) $\arcsin 0$, $\arcsin 1$, $\arcsin(-1)$, $\arcsin\frac{1}{2}$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

ә) $\arccos\left(\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-2\right)$, $\arccos\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)$, $\arccos(-1)^{105}$,

$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}120^\circ\right)$;

б) $\operatorname{arctg}\left(\cos\frac{53}{2}\pi\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{53}{2}\pi\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{55}{2}\pi\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\frac{4\cos 15^\circ}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}\right)$,

$\operatorname{arctg}\left(\frac{4\sin 15^\circ}{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}\right)$;

в) $\operatorname{arcctg}\left(\cos\beta+\cos\left(180^\circ-\beta\right)\right)$, $\operatorname{arcctg}\frac{\sin\left(180^\circ-\gamma\right)}{\sin\gamma}$ мұндағы $\sin\gamma\neq 0$,

$\operatorname{arcctg}\frac{\cos 93^\circ}{\sin 3^\circ}$, $\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{3\left(1-\cos 14^\circ\right)}{2\sin^2 7^\circ}}$, $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

3.(1) Есептеңдер:

а) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1-\operatorname{arctg} 0-\arcsin(-1)$;

ә) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})+\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Келесі өрнектерді ықшамдаңдар (4–6):

4.(3) а) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)$, $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$, $\arccos\left(\cos\frac{15\pi}{7}\right)$, $\arccos\left(\cos 99\frac{6}{7}\pi\right)$;

ә) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$, $\arcsin(\sin 5{,}2\pi)$, $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)$;

б) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{9\pi}{5}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{5}+2015\pi\right)\right)$;

в) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 0{,}3\pi)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 0{,}7\pi)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-0{,}3\pi))$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-0{,}7\pi))$.

5.(4) а) $\arcsin(\sin(-1))$, $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{8}\right)$, $\arcsin(\sin 3)$;

ә) $\arcsin\left(\sin\frac{15}{8}\pi\right)$, $\arcsin(\sin 6)$.

6.(4) а) $\arccos(\cos 2)$, $\arccos(\cos(-2))$; ә) $\arccos(\cos 1{,}3\pi)$, $\arccos(\cos 4)$;

б) $\arccos(\cos 2{,}3\pi)$, $\arccos(\cos 7)$.

2-бөлім

7. Қарапайым $P1-P8$ түрлендірулерін (1-тарау, §6) пайдаланып, бір координаталық жазықтықта $f(x)=\arccos x$, $g(x)=\arccos 2x$, $h(x)=\frac{1}{2}\arccos 2x$, $u(x)=-\frac{1}{2}\arccos 2x$, $v(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos 2x$ функцияларының графигін ретімен салыңдар. Әрбір функция үшін анықталу облысын және мәндер жиынын табыңдар.

8.(1) Келесі өрнектерді ықшамдаңдар:

а) $\arccos\frac{1}{2}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

ә) $\arcsin\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{21}}{\sqrt{20}+\sqrt{28}}$, $\arcsin\left(\sqrt{3}\sin\dfrac{19\pi}{6}\right)$, $\arcsin\left(\dfrac{\cos 2014\pi}{2}\right)$,

$\arcsin\left(\dfrac{2-3\sqrt{2}}{6-2\sqrt{2}}\right)$;

б) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 15}{2\operatorname{tg}15^\circ}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{8}}{1-\operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi}{8}}\right)$;

в) $\operatorname{arcctg}\dfrac{3^{-2}\cdot\sqrt{3}}{27\cdot 3^{-4}}$, $\operatorname{arcctg}\dfrac{\arccos(-1)}{-\pi\sqrt{3}}$.

9.(1) Есептеңдер:

а) $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\operatorname{arctg}(-1)$;

ә) $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\arccos 0+\operatorname{arctg}1-\arcsin 1-\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$.

Келесі өрнектерді ықшамдаңдар (10–12):

10.(3) а) $\arccos(\cos 0{,}9\pi)$, $\arccos(\cos 0{,}1\pi)$, $\arccos(\cos(-0{,}9\pi))$,

$\arccos(\cos 2016{,}1\pi)$;

ә) $\arcsin\left(\sin\dfrac{3\pi}{7}\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(-\dfrac{4\pi}{7}\right)\right)$,

$\arcsin\left(\sin\left(-\dfrac{32\pi}{7}\right)\right)$;

б) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{11}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\dfrac{40\pi}{11}\right)\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{40\pi}{11}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{73\pi}{11}\right)$;

в) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}1{,}2\pi)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-1{,}2\pi))$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-2015{,}2\pi))$,

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}777{,}7\pi)$.

11.(3) а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}1)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{5}{7}\pi\right)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}2)$; б) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{15}{8}\pi\right)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}6)$.

12. а) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}3)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-3))$;

ә) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}1{,}3\pi)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}4)$;

б) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}2{,}3\pi)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}7)$.

13.(3) Электронды оятқыш сағатты (екі цифр, 00-ден 23-ке дейін) және минутты (екі цифр) көрсетеді. 00:01 және 23:59 аралығында қанша рет сағаттың көрсетуі оңнан солға қарай және солдан оңға қарай бірдей бола алады?

14.(3) Кейбір өнімдерді дайындау барысында, өнімнің өзіндік құнының 60%-ы шикізат сатып алуға жұмсалады. Егер шикізат құны 25%-ға өссе, өнімнің өзіндік құны қанша пайызға өседі?

A) 20%; B) 15%; C) 10%; D) 5%; E) 12%.

Жауаптары:

1. $D(f):[-1;1]$, $E(f):\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $D(g):[-2;2]$, $E(g):\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $D(h):[-2;2]$, $E(h):\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$; $D(u):[-6;-2]$, $E(u):\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$; $D(v):[-6;-2]$, $E(v):\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. **2.** а) 0, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$; ә) $\frac{\pi}{2}$, 0, π, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; б) 0, $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$. **3.** а) $1{,}5\pi$; ә) $\frac{13\pi}{12}$. **4.** а) $\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{7}$; ә) $\frac{\pi}{5}$, $-\frac{\pi}{5}$, $-\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$; б) $-\frac{\pi}{9}$, $-\frac{\pi}{9}$, $-\frac{\pi}{5}$, $-\frac{\pi}{5}$; в) $0{,}3\pi$, $0{,}7\pi$, $0{,}7\pi$, $0{,}3\pi$. **5.** а) -1, $\frac{\pi}{8}$, $\pi-3$; ә) $-\frac{\pi}{8}$, $6-2\pi$. **6.** а) 2, 2; ә) $0{,}7\pi$, $2\pi-4$; б) $0{,}3\pi$, $7-2\pi$. **7.** $D(f):[-1;1]$, $E(f):[0;\pi]$; $D(g):\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $E(g):[0;\pi]$; $D(h):\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $E(h):\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $D(u):\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $E(u):\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$; $D(v):\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $E(v):\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. **8.** а) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$; ә) $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$. **9.** а) $\frac{\pi}{12}$; ә) $\frac{\pi}{12}$. **10.** а) $0{,}9\pi$, $0{,}1\pi$, $0{,}1\pi$, $0{,}1\pi$; ә) $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$, $-\frac{3\pi}{7}$, $-\frac{3\pi}{7}$; б) $\frac{4\pi}{11}$, $\frac{4\pi}{11}$, $-\frac{4\pi}{11}$, $-\frac{4\pi}{11}$; в) $0{,}2\pi$, $0{,}8\pi$, $0{,}8\pi$, $0{,}7\pi$. **11.** а) 1, $-\frac{2\pi}{7}$, $2-\pi$; ә) $-\frac{\pi}{8}$, $6-2\pi$. **12.** а) 3, $\pi-3$; ә) $0{,}3\pi$, $4-\pi$; б) $0{,}3\pi$, $7-2\pi$. **13.** 15. **14.** B.

§4 КЕРІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРЫ БАР ӨРНЕКТЕРДІ ТҮРЛЕНДІРУ

«Математиканың көркеюі және кемелденуі мемлекеттің әл-ауқатымен тығыз байланысты».

Б. Наполеон

1-ТЕОРЕМА.

Кез келген $a\in[-1;1]$ саны үшін $\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}$ теңдігі орындалады.

Дәлелдеу. Алдымен, $a\in(0;1)$ жағдайды қарастыралық. ABC – тікбұрышты үшбұрыш, $\angle B=90°$, $AB=a$, $AC=1$. Сонда, $\sin C=\frac{AB}{AC}=\frac{a}{1}=a$, $\angle C=\arcsin a$. Осыған ұқсас, $\angle A=\arccos a$. Демек, $\arcsin a+\arccos a=\angle A+\angle C=\pi-\angle B=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

Енді $a\in(-1;0)$ болсын $a<0$ болғандықтан, $-a>0$, және де $-a$ оң саны үшін $\arcsin(-a)+\arccos(-a)=\frac{\pi}{2}$ болатыны дәлелденді. Бір жағынан,1-жаттығудың формулалары бойынша $\arcsin(-a)+\arccos(-a)=-\arcsin a+\pi-\arccos a=\pi-(\arcsin a+\arccos a)$. Бұдан $\pi-(\arcsin a+\arccos a)=\frac{\pi}{2}$, яғни $\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}$ теңдігі шығады.

Осылайша, 1-теорема барлық $a\in(-1;0)\cup(0;1)$ мәндері үшін дәлелденді. Қалған $a=-1, 0, 1$ дербес жағдайлары мәндерінде орындалады. Теорема дәлелденді.

2-ТЕОРЕМА.

Кез келген a саны үшін $\operatorname{arctg} a+\operatorname{arcctg} a=\frac{\pi}{2}$ теңдігі орындалады.

2 жаттығу

2-теореманы жоғарыдағы 1-теореманы дәлелдегендей дәлелдейміз.

1 мысал

Есептеңдер: $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$.

Шешуі: $\arccos\frac{2}{3}=\alpha$ болсын. Сонда арккосинустың анықтамасы бойынша $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ және $0\le\alpha\le\pi$. $\sin\alpha$ -ны табу керек. Егер $\alpha\in[0,\pi]$ болса, онда $\sin\alpha\ge0$,

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

2 мысал

$\cos(\operatorname{arcctg}(-2))$ өрнегін есептеңдер.

Шешуі: $\operatorname{arcctg}(-2)=\alpha$ деп белгілейміз. Сонда арктангенстің анықтамасы бойынша, $\operatorname{ctg}\alpha=-2$ және $0<\alpha<\pi$. $\cos\alpha$-ны табу керек. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ және $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ екені белгілі. Демек, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$, $1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\cos^2\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Енді $\cos\alpha$ -ның таңбасын анықтау қалды. Бізге тек қана $\alpha\in(0,\pi)$ екені белгілі. Бұл аралықта косинустың мәндер жиыны оң мәннен де, теріс мәннен де құралады.

Не істеу керек?

Тригонометриялық шеңбер сызып, бірінші ширектегі бұрыштардың котангенстерінің мәні оң, екінші ширектегі бұрыштың котангенстерінің мәні теріс болатынын анықтаймыз. Біздің жағдайда $\operatorname{ctg}\alpha=-2<0$. Демек, α– екінші ширектегі бұрыш және $\cos\alpha<0$.

Жауабы: $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

3 мысал

Ықшамдаңдар: $\sin(\operatorname{arcctg}x)$.

Шешуі: $\operatorname{arcctg}x=a$ деп белгілейміз. Онда арктангенстің анықтамасы бойынша $\operatorname{ctg}a=x$ және $a\in(0,\pi)$. $\sin\alpha$ -ны табу керек. $1+\operatorname{ctg}^2a=\frac{1}{\sin^2a}$ екені белгілі, онда

$1+x^2=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. $\alpha\in(0,\pi)$ болғандықтан, $\sin\alpha>0$.

Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

4 мысал

Есептеңдер: $\mathrm{tg}(\arccos 0,6-\mathrm{arctg}\,2)$.

Шешуі: $\arccos 0,6=\alpha$ және $\mathrm{arctg}\,2=\beta$ деп белгілейміз.

Сонда $\mathrm{tg}(\arccos 0,6-\mathrm{arctg}\,2)=\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$.

Арктангенс анықтамасы бойынша $\mathrm{tg}\,\beta=2$. Бізге $\cos\alpha=0,6$ және $\alpha\in[0;\pi]$ шартына сәйкес $\mathrm{tg}\,\alpha$-ның мәнін табу керек.

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ формуласы $\mathrm{tg}\,\alpha=\pm\frac{4}{3}$ екенін анықтауға мүмкіндік береді. $\alpha\in[0;\pi]$ аралығында бірінші ширектегі бұрыштың косинусы оң және екінші ширектегі бұрыштың косинусы теріс шама болады. Берілген жағдайда $\cos\alpha=0,6>0$. Демек, α бірінші ширектегі бұрыш болады және $\mathrm{tg}\,\alpha>0$. Бұдан $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{4}{3}$. Демек:

$$\mathrm{tg}(\arccos 0,6-\mathrm{arctg}\,2)=\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}=\frac{\frac{4}{3}-2}{1+\frac{4}{3}\cdot 2}=-\frac{2}{11}.$$

Жауабы: $-\frac{2}{11}$.

5 мысал

$\arccos(\sin 5)$ мәнін табыңдар.

Шешуі. 1-теорема бойынша $\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}$, онда

$$\arccos(\sin 5)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sin 5)=\frac{\pi}{2}-(5-2\pi)=2,5\pi-5.$$

Жауабы: $2,5\pi-5$.

Есептер

1-бөлім

1. (2) Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$, $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$, $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

ә) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$, $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$, $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

б) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}5)$, $\sin(\operatorname{arcctg}5)$, $\cos(\operatorname{arcctg}5)$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}5)$.

2. (3) Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$, $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$, $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}+\operatorname{arcctg}5\right)$;

ә) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{1}{3}\right)$, $\sin(\operatorname{arcctg}5-\operatorname{arctg}2)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\operatorname{arctg}5\right)$, $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)-\operatorname{arctg}5\right)$, $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

3. (3) а) $\cos\left(2\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

ә) егер $|a|\le 1$ болса, онда $\cos(2\arccos a)=2a^2-1$ болатынын дәлелдеңдер.

б) жоғарыда ә) пунктте дәлелденген формуланы пайдаланып, $\cos\left(2\arccos\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right)$ мәнін табыңдар.

4. (3) а) $\sin\left(2\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

ә) Егер $|a|\le 1$ болса, онда $\sin(2\arccos a)=2a\sqrt{1-a^2}$ болатынын дәлелдеңдер.

б) жоғарыда дәлелденген формуланы пайдаланып, $\sin\left(2\arccos\frac{21}{29}\right)$ мәнін табыңдар.

5. (3) x айнымалысының мүмкін мәндерінде мына теңбе-теңдіктердің орынды екенін дәлелдеңдер:

а) $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$; ә) $\operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\sin(\operatorname{arctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Теңдікті дәлелдеңдер (6–7):

6. (4) $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\pi}{4}$. **7.** (4) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{7}{5}$.

8. (5) Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\arcsin(\cos 0,3\pi)$, $\arccos(\sin 0,2\pi)$, $\arccos(\sin 1,8\pi)$, $\arcsin(\cos 4)$;

ә) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}1,8\pi)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}1,8\pi)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}3)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}7)$.

2-бөлім

9. (2) Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\cos\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$, $\sin\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$, $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$;

ә) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$, $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$, $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$;

б) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-2))$, $\cos(\operatorname{arctg}(-2))$, $\sin(\operatorname{arctg}(-2))$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-2))$.

10. (3) Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$, $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)-\arccos\frac{5}{13}\right)$,

$\cos(\operatorname{arctg}(-2)+\operatorname{arcctg}5)$;

ә) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{5}{13}\right)$, $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)-\arccos\frac{5}{13}\right)$,

$\sin\left(\arccos\frac{3}{4}+\operatorname{arctg}(-2)\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{arcctg}5\right)$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}5-\operatorname{arctg}3)$, $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}(-2)+\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

11. (3) а) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

ә) Егер $|a|\le 1$ болса, онда $\cos(2\arcsin a)=1-2a^2$ болатынын дәлелдеңдер.

б) жоғарыда дәлелденген формуланы пайдаланып, $\cos\left(2\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}\right)$ мәнін табыңдар.

12. (3) а) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}3)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

ә) a айнымалысының кез келген мәндерінде $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}a)=\dfrac{2a}{1-a^2}$ теңбе-теңдігінің орынды екенін дәлелдеңдер.

б) жоғарыда дәлелденген формуланы пайдаланып, $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)$ мәнін табыңдар.

13. (3) x айнымалысының мүмкін мәндерінде теңбе-теңдіктердің орынды екенін дәлелдеңдер:

а) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$; ә) $\operatorname{tg}(\arccos x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; б) $\cos(\operatorname{arctg}x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Теңдікті дәлелдеңдер (14–15):

14. (4) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\dfrac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\dfrac{12}{13}\right)=-\dfrac{119}{120}$.

15. (4) $\arccos\left(\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

16. (5) Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\arcsin\left(\cos\dfrac{\pi}{7}\right)$, $\arccos\left(\sin\left(-\dfrac{12\pi}{7}\right)\right)$, $\arccos\left(\sin\dfrac{15}{7}\pi\right)$; $\arcsin(\cos(-5))$;

ә) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{5}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{27\pi}{8}\right)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}(-4))$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(-6))$.

17. (4) Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} x=y+6, \\ y=\dfrac{4x^2-x^4}{x^2-4}. \end{cases}$

18. (3) Қосындысы 65-ке тең үш сан геометриялық прогрессияны құрайды. Егер бірінші саннан 25-ті азайтса, екіншісін өзгертпесе, ал үшіншісіне 5-ті қосса, онда олар арифметикалық прогрессияны құрайды. Бастапқы сандарды табыңдар.

Жауаптары:

1. а) $\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{3}$; ә) $-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}, -2\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; б) $5, \dfrac{1}{\sqrt{26}}, \dfrac{5}{\sqrt{26}}, \dfrac{1}{5}$. **2.** а) $\dfrac{2\sqrt{6}-1}{6}$,

$\frac{6\sqrt{2}-4}{15}$, $\frac{17}{5\sqrt{26}}$; ә) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\frac{8\sqrt{2}+3}{15}$, $-\frac{9}{\sqrt{130}}$; б) $\frac{10-13\sqrt{3}}{11}$, $\frac{45+52\sqrt{2}}{199}$, $\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{3}$. **3.** а) $-\frac{1}{3}$; ә) $9-4\sqrt{6}$. **4.** а) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$; ә) $\frac{840}{841}$. **8.** а) $0{,}2\pi$, $0{,}3\pi$, $0{,}7\pi$, $\frac{5\pi}{2}-4$; ә) $0{,}7\pi$, $0{,}8\pi$, $\frac{3\pi}{2}-3$, $7-2\pi$. **9.** а) $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$, $2\frac{2}{5}$, $\frac{5}{12}$; ә) $-\frac{2}{3}$, $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $-\frac{\sqrt{5}}{2}$; б) -2, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $-\frac{1}{2}$. **10.** а) $\frac{\sqrt{15}+2}{6}$, $\frac{5\sqrt{5}-24}{39}$, $\frac{7\sqrt{130}}{130}$; ә) $\frac{5\sqrt{3}-12}{26}$, $-\frac{12\sqrt{5}+10}{39}$, $\frac{\sqrt{7}-6}{4\sqrt{5}}$; б) $\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{7}$, $\frac{1-4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$. **11.** а) $\frac{2}{7}$; ә) $4\sqrt{35}-23$.
12. а) $-\frac{3}{4}$; ә) 1. **16.** а) $\frac{5\pi}{14}$, $\frac{3\pi}{14}$, $\frac{5\pi}{14}$, $5-1{,}5\pi$; ә) $\frac{9\pi}{10}$, $\frac{\pi}{8}$, $4-\frac{\pi}{2}$, $6-\frac{3\pi}{2}$. **17.** $(-3;-9)$.
18. 5; 15; 45 немесе 45; 15; 5.

§5 АРКФУНКЦИЯЛАРЫ БАР ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ТЕҢСІЗДІКТЕР

«Математика – ғылымдарының патшасы, арифметика – математиканың патшасы».
Карл Фридрих Гаусс

1 мысал

Теңдеуді шешіңдер: $6\arccos^2 x+11\pi\arccos x-2\pi^2=0$

Шешуі. $\arccos x=\alpha$, мұндағы $\alpha\in[0;\pi]$ айнымалы енгіземіз.

$6\alpha^2+11\pi\alpha-2\pi^2=0$, $\alpha=\frac{\pi}{6}$ немесе $\alpha=-2\pi$, $\frac{\pi}{6}\in[0;\pi]$, $-2\pi\notin[0;\pi]$.

$\arccos x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Жауабы: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2 Мысал

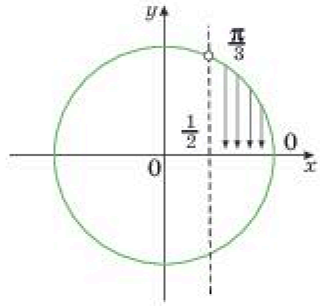
Теңсіздікті шешіңдер:

$9\arccos^2(2x-1)<\pi^2$.

Шешуі. ММЖ:

$-1\le 2x-1\le 1$, $0\le 2x\le 2$, $0\le x\le 1$.

$9\arccos^2(2x-1)<\pi^2$ теңсіздігі $-\frac{\pi}{3}<\arccos(2x-1)<\frac{\pi}{3}$ қос теңсіздігіне мәндес. $-\frac{\pi}{3}<\arccos(2x-1)$ теңсіздігі анықталу облысындағы барлық x үшін орындалады, арккосинустың анықтамасынан кез келген a үшін $\arccos a\in[0;\pi]$ шарты орындалады. $\arccos(2x-1)<\frac{\pi}{3}$ теңсіздігін тригонометриялық дөңгелекті пайдаланып шешеміз (1-сурет):



1-сурет

$\frac{1}{2}<2x-1\le 1$, $1<4x-2\le 2$, $3<4x\le 4$, $\frac{3}{4}<x\le 1$.

$x\in\left(\frac{3}{4};1\right]$ аралығы анықталу облысының ішкі жиыны болып табылады.

Жауабы: $\left(\frac{3}{4};1\right]$.

Есептер

1-бөлім

1. (2) Теңдеуді шешіңдер:

а) $\arccos x=\frac{2\pi}{3}$; ә) $2\arcsin x=\pi$; б) $3\operatorname{arctg} x=2\pi$; в) $6\operatorname{arcctg} 2x-\pi=0$.

2. Теңсіздікті шешіңдер:

а) (2) $\arccos x>\frac{2\pi}{3}$, $\arccos x\le\frac{2\pi}{3}$;

ә) (2) $2\arcsin x\le\pi$, $2\arcsin x\ge\pi$;

б) (3) $3\operatorname{arctg} x<2\pi$, $3\operatorname{arctg} x>2\pi$;

в) (3) $6\operatorname{arcctg} 2x-\pi\ge 0$, $6\operatorname{arcctg} 2x-\pi<0$.

3. а) (1) $\arccos\left(x^2-\frac{5}{2}x+2\right)=\frac{\pi}{3}$ теңдеуін шешіңдер;

ә) (2) $\arccos\left(x^2-\frac{5}{2}x+2\right)<\frac{\pi}{3}$ теңсіздігін шешіңдер;

б) (3) $\arccos\left(x^2-\frac{5}{2}x+2\right)>\frac{\pi}{3}$ теңсіздігін шешіңдер.

4. (3) Теңдеуді шешіңдер:

а) $3\arcsin^2 x+5\pi\arcsin x-2\pi^2=0$; ә) $3\arcsin^2 x+5\pi\arcsin x+2\pi^2=0$.

5. (4) Теңсіздікті шешіңдер:

а) $3\arcsin^2 x+5\pi\arcsin x-2\pi^2\le 0$; ә) $3\arcsin^2 x+5\pi\arcsin x-2\pi^2>0$.

6. а) (2) $\mathrm{arctg}\left(4x^2-3x-1\right)=-\frac{\pi}{4}$ теңдеуін шешіңдер;

ә) (2) $\mathrm{arctg}\left(4x^2-3x-1\right)>-\frac{\pi}{4}$ теңсіздігін шешіңдер;

б) (3) $\mathrm{arctg}\left(4x^2-3x-1\right)\le-\frac{\pi}{4}$ теңсіздігін шешіңдер.

7. Теңдеуді шешіңдер:

а) (2) $18\mathrm{arctg}^2 x-3\pi\,\mathrm{arctg}x=\pi^2$; ә) (3) $18\mathrm{arcctg}^2 x-3\pi\,\mathrm{arcctg}x=\pi^2$.

8. Теңсіздікті шешіңдер:

а) (4) $18\mathrm{arctg}^2 x-3\pi\,\mathrm{arctg}x<\pi^2$; ә) (5) $18\mathrm{arcctg}^2 x-3\pi\,\mathrm{arcctg}x\ge\pi^2$

2-бөлім

9. Теңдеуді шешіңдер:

а) (1) $4\arccos x-3\pi=0$; ә) (1) $-6\arcsin 7x-\pi=0$;

б) (1) $4\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+\pi=0$; в) (1) $4\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+3\pi=0$.

10. Теңсіздікті шешіңдер:

а) (2) $4\arccos x-3\pi<0$, $4\arccos x-3\pi>0$;

ә) (2) $-6\arcsin 7x-\pi\ge 0$, $-6\arcsin 7x-\pi\le 0$;

б) (2) $4\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+\pi<0$, $4\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+\pi>0$;

в) (3) $4\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+3\pi\le 0$, $4\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+3\pi>0$.

11. а) (1) $\arcsin\left(2{,}5x^2-4x+0{,}5\right)=\frac{\pi}{6}$ теңдеуін шешіңдер;

ә) (2) $\arcsin\left(2,5x^2-4x+0,5\right)\le\frac{\pi}{6}$ теңсіздікті шешіңдер;

б) (3) $\arcsin\left(2,5x^2-4x+0,5\right)\ge\frac{\pi}{6}$ теңсіздікті шешіңдер.

12. (3) Теңдеу шешіңдер:

а) $9\arccos^2 x=9\pi\arccos x-2\pi^2$; ә) $9\arcsin^2 x=9\pi\arcsin x-2\pi^2$.

13. (4) Теңдеуді шешіңдер:

а) $9\arccos^2 x<9\pi\arccos x-2\pi^2$; ә) $9\arccos^2 x>9\pi\arccos x-2\pi^2$.

14. а) (3) $\operatorname{arcctg}\left(-x^2+5x-4\right)=\frac{\pi}{2}$ теңдеуін шешіңдер;

ә) (4) $\operatorname{arcctg}\left(-x^2+5x-4\right)\ge\frac{\pi}{2}$ теңсіздігін шешіңдер;

б) (5) $\operatorname{arcctg}\left(-x^2+5x-4\right)\le\frac{\pi}{2}$ теңсіздігін шешіңдер.

15. Теңдеуді шешіңдер:

а) (2) $4\operatorname{arcctg}^2 x+\pi^2=5\pi\operatorname{arcctg} x$; ә) (3) $4\operatorname{arctg}^2 x+\pi^2=5\pi\operatorname{arctg} x$.

16. (4) Теңсіздікті шешіңдер:

а) $4\operatorname{arcctg}^2 x+\pi^2\ge5\pi\operatorname{arcctg} x$; ә) $4\operatorname{arctg}^2 x+\pi^2\ge5\pi\operatorname{arctg} x$.

17. (3) $\otimes$ амалы келесі түрде анықталады: $a\otimes b=a^2-ab+b^2$, мұндағы a және b кез келген сандар. Есептеңдер: $2\otimes(1\otimes0)$.

18. (2) a және b сандары берілген. Егер $0<a<1$ және $b>1$ шарттары орындалса, онда келесі бес санның арасынан ең кішісін көрсетіңдер: ab, a, $a:b$, b, $a+b$.

19. (4) Асан мотоциклмен және Үсен есекпен бір мезгілде, бір нүктеден, тұрақты жылдамдықпен айналмалы жол бойымен қозғала бастады. 2 сағат өткен соң олар алғаш старт берілген нүктеде кездесті және осы аралықта Асан Үсенді 99 рет басып озды. Егер Үсеннің 2 сағат ішінде толық бір айналым жасағаны белгілі болса, онда мотоциклдың жылдамдығы есектің жылдамдығынан неше есе артық екенін табыңдар.

Жауаптары:

1. а) $x=-\frac{1}{2}$; ә) $x=1$; б) $x\in\varnothing$; в) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. а) $x\in\left[-1;-\frac{1}{2}\right)$, $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$; ә) $x\in[-1;1]$, $x=1$;

б) $x\in(-\infty;+\infty)$, $x\in\varnothing$; в) $x\in\left(-\infty;\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $x\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$.

3. а) $x\in\{1;\ 1,5\}$; ә) $x\in\left[\frac{1}{2};1\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right]$; б) $x\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

4. а) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $x\in\varnothing$.

5. а) $-1\le x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{3}}{2}<x\le 1$.

6. а) $x\in\left\{0;\frac{3}{4}\right\}$; ә) $x\in(-\infty;0)\cup(0,75;+\infty)$; б) $x\in[0;0,75]$.

7. а) $x\in\left\{\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$; ә) $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. а) $x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\sqrt{3}\right)$; ә) $x\in\left(-\infty;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

9. а) $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ә) $x=-\frac{1}{14}$; б) $x=-2$; в) $x\in\varnothing$.

10. а) $x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$, $x\in\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; ә) $x\in\left[-\frac{1}{7};-\frac{1}{14}\right]$, $x\in\left[-\frac{1}{14};\frac{1}{7}\right]$;

б) $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; в) $x\in\varnothing$, $x\in(-\infty;+\infty)$.

11. а) $x\in\left\{0;\frac{8}{5}\right\}$; ә) $x\in\left[0;\frac{3}{5}\right]\cup\left[1;\frac{8}{5}\right]$; б) $x\in\left[\frac{4-\sqrt{21}}{5};0\right]\cup\left[\frac{8}{5};\frac{4+\sqrt{21}}{5}\right]$.

12. а) $x=\pm\frac{1}{2}$; ә) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. а) $x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; ә) $x\in\left[-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right]$.

14. а) $x\in\{1;4\}$; ә) $x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$; б) $x\in[1;4]$.

15. а) $x=1$; ә) $x=1$.

16. а) $x\in[1;+\infty)$; ә) $x\in(-\infty;1]$.

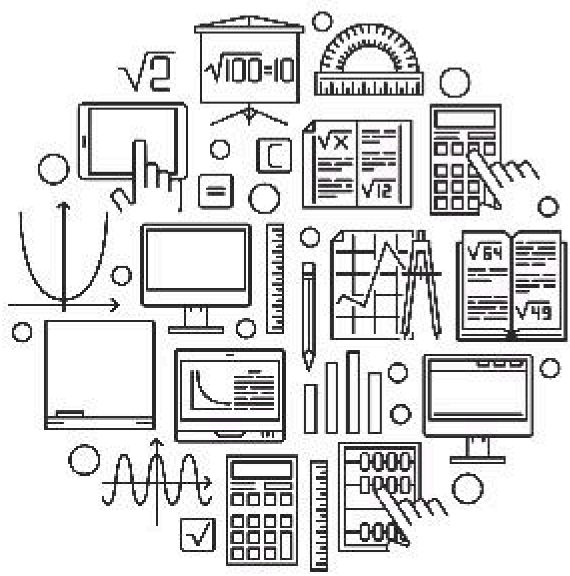
17. 3.

18. $a:b$.

19. 100 есе.

3-ТАРАУ

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ТЕҢСІЗДІКТЕР



ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ТЕҢСІЗДІКТЕР

«Алгебра – ғылыми өнер, оның нысаны белгісіз абсолюттік сандармен өлшеуге болатын шамалардан тұрады. Бірақ олар қандай да бір затқа тиесілі, сол арқылы оларды анықтап алуға болады. Ол – не сан, не қатынас».

Омар Хайям

Тригонометрия жайындағы алғашқы кәсіби трактат Орта Азия ғалымы әл-Бирунидің (X–XI ғғ) «Астрономия ғылымының кілті» (995–996 жж) кітабы болды.

Тригонометрияның дербес ғылым ретінде толық анықтамасын парсы математигі және астрономы Нәсір ад-Дин ат-Туси 1260 жылы берген. Осылайша, XIII ғасырдың соңына қарай, тригонометрияның мазмұнын ашатын негізгі теоремалар ашылды:

– кез келген тригонометриялық функцияның басқа кез келген функциялар арқылы өрнектелуі;

– еселік және жарты бұрыштың синустары мен косинустарын есептеу формулалары, бұрыштардың қосындысы мен айырмасының формулалары;

– синустар және косинустар теоремасы;

– жазық және сфералық үшбұрыштарды шешу.

XII–XIII ғасырларда араб ғалымдарының трактаттары латын тіліне аударылғаннан кейін үнді және ислам математиктерінің көптеген идеялары Еуропа ғылымына қосылған үлкен үлес болды. Регимонтананың сол кездері белгілі болған жазық және сфералық тригонометрия жөніндегі барлық мәліметтер, жеті өлшемді синустар (1° қадаммен) және тангенстер (1° қадаммен) кестесі берілген «Үшбұрыштың барлық түрлері туралы бес кітап» монографиясы (1462–1464 жылдары жарық көрген) үлкен жетістік болды. ат-Тусидің трактатына қарағанда Регимонтананың еңбегі анағұрлым толығырақ, тиімді тәсілдермен шығарылған көптеген жаңа есептерге толы болды. Тригонометрияның Жаңа дәуірде (XVI–XVII ғғ) дамуы тек астрономия және астрология үшін ғана емес, басқа да бөлімдер, оның ішінде артиллерия, оптика және ұзаққа созылатын теңіз сапарларындағы навигация үшін де маңызы өте зор болды. Сондықтан, XVI ғасырдан кейін бұл тақырыппен ең үздік ғалымдар айналысты, олардың ішінде Николай Коперник, Иоганн Кеплер, Франсуа Виет бар.

Тригонометрияның қазіргі түрін Леонард Эйлер (1707–1783 жж) берді. Ол өзінің «Шексіздіктің талдауына кіріспе» трактатында қазіргі тригонометриялық функциялардың қазіргі анықтамасына баламалы анықтама берді. Кері тригонометриялық функцияларды arc жалғауының көмегімен белгілеуді (латын тілінен аударғанда arcus – доға) австриялық математик Карл Шерфер (Karl Scherffer, 1716–1783 жж) бастады және Лагранждың арқасында бекітілді. Бұл жерде, мысалы, қарапайым синус шеңбердің доғасы арқылы оны көріп тұратын хорданы табуға мүмкіндік береді, ал кері функция арқылы оған қарама-қарсы есептің шешімі болып табылады.

XIX–XX ғғ тригонометриялық қатарлар теориясы және математиканың онымен байланысты бөлімдері: гармониялық талдау, кездейсоқ үрдістер теориясы және т.б қарқынды дамыды. Аудио және бейнеақпараттарды (мысалы, .jpg ұлғайтуымен) беру кезінде қолданылған математикалық қағидаларды Фурьенің (1768–1830 жж) тригонометриялық қатарын негізге ала отырып заманауи математиктердің жасауы, тригонометрияның қазіргі таңдағы өзектілігін растайды.

§1 ҚАРАПАЙЫМ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

1.1 $\sin x=a$ түріндегі теңдеулер

Бұл тақырыпты оқып-үйрену барысында біз $\sin x=a$ түріндегі теңдеулерді шешуді үйренеміз. Алдымен тригонометриялық шеңберді қолдану арқылы орындалатын жаттығуларды қарастырайық. Егер тригонометриялық шеңберде x бұрышы белгіленсе, онда x бұрышының синусы белгіленген нүктенің екінші координатасы болатынын ұмытпаңдар.

1 жаттығу

$\frac{\pi}{6}$ бұрышының синусы $0{,}5$ екені белгілі. Ол дегеніміз, $\frac{\pi}{6}$ бұрышы $\sin x=0{,}5$ теңдеуінің шешімі бола алатынын білдіреді. Теңдеудің басқа шешімдері бар ма екенін анықтап көріңіз. Егер бар болса, онда оның бірнешеуін атаңдар.

2 жаттығу

Егер $x=0$ болса, онда $\sin x=0$. Кері ұйғарым $\sin x=0$ болса, онда $x=0$ болуы дұрыс па? Жауапты негіздеңдер.

3 жаттығу

Oy өсінен $\sqrt{2}$ санын белгілеңіз. Синусы $\sqrt{2}$-ге тең болатын бұрыш тригонометриялық шеңберде бар ма екенін анықтаңдар.
$\sin x=0$ теңдеуінен бастайық.

1 Мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\sin x = 0$.

Талдау. Oy өсінен 0-ді белгілейік. Бірлік шеңберден ординатасы 0 болатын нүктені табамыз (1-сурет). Ол, нүкте бірлік шеңбердің Ox өсінен қиылысу нүктесі екен. Нөлден бастап оң бағытта (сағат тіліне қарсы) қозғала отырып, $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ және т.с.с тізбектерін аламыз. Теріс бағытта қозғала отырып, $0, -\pi, -2\pi, -3\pi, -4\pi$ және т.с.с бұрыштар тізбегін аламыз. Нәтижесінде $\sin x = 0$ теңдеуінің барлық шешімдерін аламыз.

Шешуі: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k$, мұндағы $k \in \mathbb{Z}$.

2 Мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\sin x = 1$.

Талдау. Oy өсінен 1-ді белгілейміз, тригонометриялық шеңберде бір ғана нүктенің екінші координатасы 1-ге тең болады. Ол координатасы $(0;1)$ болатын ең жоғарғы нүкте. Оны H деп белгілейік. M_x нүктесін $x = 0$ қалпынан бастап, сағат тіліне қарсы бағытта шеңбер бойымен, яғни оң бағытта қозғалтайық. Бірінші рет M_x нүктесі H нүктесімен $x = \frac{\pi}{2}$ болғанда беттеседі. Яғни $x = \frac{\pi}{2}$ – бұл $\sin x = 1$ теңдеуінің шешімдерінің бірі. $y = \sin x$ функциясының негізгі периоды 2π болғандықтан, $\frac{\pi}{2}$ санына 2π қосқаннан немесе алғаннан синустың мәні өзгермейді. Мысалы, $\frac{\pi}{2}+2\pi$, $\frac{\pi}{2}+4\pi$, $\frac{\pi}{2}+6\pi$ т.с.с, сондай-ақ $\frac{\pi}{2}-2\pi$, $\frac{\pi}{2}-4\pi$, $\frac{\pi}{2}-6\pi$ т.с.с сандары $\sin x=1$ теңдеуінің түбірлері бола алады. Осылайша $\sin x=1$ теңдеуінің шешімі $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ түріндегі сандар топтамасы болып табылады.

Шешуі: $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Келтірілген мысалдар $\sin x = a$ түріндегі теңдеулерді тригонометриялық шеңбердің көмегімен шешуге арнаған жалпы тәсілді табуға түрткі болады. Кішігірім алгоритмін құрайық.

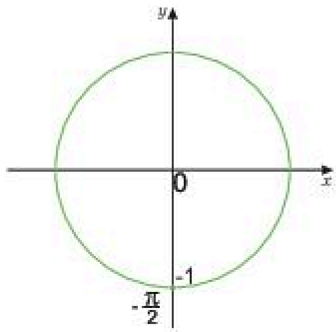
- Oy өсінен a санын белгілейміз. Белгіленген нүкте арқылы горизонталь түзу жүргіземіз және оның тригонометриялық шеңбермен қиылысуын белгілейміз.

• Теориялық білімімізге, кесте және т.б. пайдалана отырып, белгіленген нүктеге сәйкес келетін, нөлге жақын бұрышты табамыз.
• $y = \sin x$ функциясының периодты екенін ескеріп, жауапты жазамыз.

3 Мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\sin x = -1$.

Алгоритм бойынша талдау. Oy өсіндегі -1 саны тригонометриялық шеңбердегі ең төменгі нүктеге сәйкес. Ол нүктеге сәйкес нөлге ең жақын бұрыш $-\frac{\pi}{2}$. $y = \sin x$ функциясының негізгі периоды 2π. Олай болса $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



1-сурет

Шешуі: $\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\sin x = -1$, $\sin x = 1$, $\sin x = 0$ теңдеулері $\sin x = a$ теңдеуінің дербес жағдайлары.

Жалпы жағдайда, егер $a > 1$ немесе $a < -1$ болса, онда $\sin x = a$ теңдігі орындалмайды. Бұл дегеніміз $a > 1$ немесе $a < -1$ болғанда $\sin x = a$ теңдеуінің шешімі бос жиын, $x \in \varnothing$.

Егер $-1 < a < 1$, $a \neq 0$ болса, онда алгоритмге және 1-суретке сүйенеміз. Егер Oy өсіндегі a нүктесі арқылы горизонталь түзу жүргізсек, ол түзудің шеңбермен қиылысу нүктелеріне $\arcsin a$ және $\pi - \arcsin a$ бұрыштары сәйкес келеді. $\sin x = a$ теңдеуінің барлық шешімдерін екі топтама арқылы жазуға болады: $x = \arcsin a + 2\pi k$ немесе $x = \pi - \arcsin a + 2\pi k$, мұндағы $k \in \mathbb{Z}$. Осы жазылған екі топтаманы біріктіріп жазуға болады. Шынында да, түбірлерге сәйкес өрнектерді басқа түрде жазайық: $x = \arcsin a + \pi(2k)$, $x = -\arcsin a + \pi(2k+1)$. Жаңа n параметрін енгізейік. Егер $n = 2k$ –жұп болса, онда $(-1)^n = 1$, ал егер $n = 2k+1$ –тақ сан бола, онда $(-1)^n = -1$. Сол себепті екі топтаманы біріктіріп $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ түрінде жазуға болады.

Барлық нәтижелерді кестеге орналастырайық. k және n параметрлерінің бүтін мәндерді қабылдайтыны түсінікті.

$\sin x = a$, $a < -1$ *немесе* $a > 1$	$x \in \varnothing$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, мұндағы $k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, мұндағы $k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 0$	$x = \pi k$, мұндағы $k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = a$, $-1 < a < 1$, $a \neq 0$	$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, мұндағы $k, n \in \mathbb{Z}$

Алғашқы төрт жолдағы формулаларды соншалықты жаттамай-ақ әрбір жолы жоғарыда келтірілген мысалдардағыдай талдап, «еске түсіруге» болады. Бесінші жолдағы формула «синустың түбірлерін табудың жалпы формуласы» деп аталады.

$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{array}\right.$ немесе $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ формулаларының қайсыларын қолдану керек? Нақты ереже айтылмайды. Біздің ұсынысымыз, егер теңдеудің түбірлерінің жалпы формулаларын «таза» күйінде қолдансақ, тағы да қосымша түрлендірулер қажет болады, топтамаларды біріктіру ретінде қолданған дұрыс болады. Егер түрлендірулер қажет етілмесе, онда бір топтама түрінде қолданған тиімді. Осы айтылғандарды төмендегі екі мысал арқылы көрсетейік.

4 Мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\sin\frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Шешуі. Түбірлерді табудың жалпы формуласы бойынша:

$\frac{x}{3} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ болса, онда

$$\frac{x}{3} = (-1)^n(-1)\frac{\pi}{4} + \pi n = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{4} + 3\pi n.$$

Жауабы: $(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{4} + 3\pi n$, $n \in Z$.

5 Мысал

Теңдеуді шешіңдер: $2\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-1=0$.

Шешуі. Теңдеуге түрлендірулер жасау арқылы $\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ түріне келтіреміз. $\left[\begin{array}{l} x=\arcsin a+2\pi k, \\ x=\pi-\arcsin a+2\pi k, \end{array}\right.$ формуласын қолданып, алынған жиынтықты шешеміз:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\pi k, \\ \frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3x}{2}=2\pi k, \\ \frac{3x}{2}=\frac{2\pi}{3}+2\pi k, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=4\pi k, \\ 3x=\frac{4\pi}{3}+4\pi k, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{4}{3}\pi k, \\ x=\frac{4\pi}{9}+\frac{4}{3}\pi k, \end{array}\right.$$

Жауабы: $x=\frac{4\pi}{3}k$, $x=\frac{4\pi}{9}+\frac{4}{3}\pi k$, мұндағы $k\in\mathbb{Z}$.

6 Мысал

Теңдеуді шешіңдер: $7\sin 5x-1=0$.

Шешуі. Теңдеуді түрлендіру арқылы $\sin 5x=\frac{1}{7}$ түріне келтіреміз. $\frac{1}{7}$ саны синустар кестесінде жоқ, бірақ $\frac{1}{7}$ саны $[-1;1]$ кесіндісіне тиісті. «Синустың түбірлерінің жалпы формуласын» қолданамыз: $x=(-1)^n\arcsin\left(\frac{1}{7}\right)+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Жауабы. $x=(-1)^n\arcsin\left(\frac{1}{7}\right)+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Есептер

1-бөлім

Теңдеуді шешіңдер (1–5):

1.(1) а) $\sin x=-1$; ә) $\sin 2x=-1$; б) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=-1$.

2.(1) а) $\sin x=\frac{1}{2}$; ә) $\sin(-2x)=-\frac{1}{2}$; б) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=1$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

3.(1) а) $2\sin\pi x=-\sqrt{3}$; ә) $2\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$;

б) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}$; в) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-4x\right)=-\sqrt{3}$.

4.(1) а) $2\sin x+\sqrt{2}=0$; ә) $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$;

б) $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}=0$; в) $2\sin\left(\frac{\pi x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{2}$.

5.(1) а) $2\sin\frac{2x}{3}-2\sqrt{2}=0$; ә) $\sin 3x=\sqrt{5}-2$;

б) $\sin 5x-\sqrt{5}=2$; в) $8\sin\left(x+\frac{\pi}{13}\right)=-3\pi$.

6.(2) Келтіру формулаларын қолданып, теңдеудің шешімдерін табыңдар:

а) $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1=0$; ә) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi x\right)=1$;

б) $\sin(\pi-3x)=\frac{2}{7}$; в) $14\cos\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)=-\sqrt{98}$.

7.(2) Теңдеуді $\sin x=p$ жаңа айнымалысын енгізу арқылы шешіңдер:

а) $2\sin^2 x-5\sin x+2=0$; б) $3\sin^2 x+11\sin x-4=0$; в) $2\sin^2 x-\sin x=0$.

2-бөлім

Теңдеуді шешіңдер (8–12):

8.(1) а) $\sin x=1$; ә) $\sin\frac{x}{2}=1$; б) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=1$.

9.(1) а) $\sin x=-\frac{1}{2}$; ә) $2\sin(-3x)=1$; б) $2\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+1=0$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=-\frac{1}{2}$.

10.(1) а) $2\sin x=\sqrt{3}$; ә) $2\sin\left(\frac{2\pi x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$;

б) $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{3}=0$; в) $2\sin\left(\frac{\pi}{5}-2x\right)=-\sqrt{3}$.

11.(1) а) $2\sin x-\sqrt{2}=0$; ә) $-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\pi x\right)+1=0$;

б) $2\sin\left(\frac{2x}{7}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$; в) $2\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$.

12.(1) а) $2\sin\frac{2x}{3}+3\sqrt{2}=0$; ә) $\sin\frac{x}{2}=\sqrt{17}-3$;

б) $\sin 2x-\sqrt{15}=-3$; в) $8\sin\left(x+\frac{\pi}{13}\right)=-2\pi$.

13. (2) Келтіру формулаларын пайдаланып, теңдеудің шешімдерін табыңдар:

а) $2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sqrt{3}=0$; ә) $2\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=1$;

б) $\sin(7\pi+2x)=-1$; в) $18\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)=\sqrt{243}$.

14. (2) Теңдеуді $\sin x=p$ жаңа айнымалысын енгізу арқылы шешіңдер:

а) $\sin^2 x-5\sin x+4=0$; ә) $\sin^2 x+5\sin x+6=0$; б) $\sin^2 x+5\sin x=0$.

15. (2) Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases}\frac{5}{x+2y}+\frac{8}{y}=5,\\ \frac{10}{x+2y}-\frac{2}{y}=1.\end{cases}$

16. (2) Екі қапта барлығы 140 кг ұн бар. Бірінші қаптағы ұнның 12,5%-ін екінші қапқа салса, онда екі қаптағы ұнның мөлшері бірдей болады. Әр қапта қанша кг ұн бар?

Жауаптары: *(барлық жауаптарда $n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}$ болып табылады).*

1. а) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; ә) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; б) $x=-\frac{\pi}{12}+\pi k$; в) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}$.

2. а) $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; ә) $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$;

б) $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}$; в) $-\frac{4\pi}{3}+4\pi k$, $4\pi k$.

3. а) $x=(-1)^{k+1}\frac{1}{3}+k;$ ә) $\frac{7\pi}{18}+\frac{4\pi k}{3}, \frac{11\pi}{18}+\frac{4\pi n}{3};$

б) $\frac{8\pi}{45}+\frac{2\pi k}{3}, \frac{13\pi}{45}+\frac{2\pi n}{3};$ в) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, \frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}.$

4. а) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k;$ ә) $\frac{7\pi}{12}+2\pi k, \frac{13\pi}{12}+2\pi n;$

б) $\frac{\pi}{4}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi n;$ в) $-\frac{7}{4}+6k, \frac{11}{4}+6n.$

5. а) $x\in\varnothing;$ ә) $x=\frac{1}{3}(-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)+\frac{\pi k}{3};$ б) $x\in\varnothing;$ в) $x\in\varnothing.$

6. а) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k;$ ә) $x=\frac{1}{4}+k;$

б) $x=\frac{1}{3}(-1)^k \arcsin\left(\frac{2}{7}\right)+\frac{\pi k}{3};$ в) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k.$

7. а) $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k;$

ә) $x=(-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+\pi k;$

б) $x=\pi k, x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k.$

8. а) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k;$ ә) $x=\pi+4\pi k;$ б) $x=\frac{\pi}{12}+\pi k;$ в) $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}.$

9. а) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k;$ ә) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3};$

б) $-\pi+6\pi k, 3\pi+6\pi n;$ в) $\frac{\pi}{6}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k.$

10. а) $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k;$ ә) $-\frac{7}{8}+3k, \frac{13}{8}+3n;$

б) $-\frac{\pi}{15}+\pi k, \frac{23\pi}{30}+\pi n;$ в) $\frac{4\pi}{15}+\pi k, \frac{13\pi}{30}+\pi n.$

11. а) $x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k;$ ә) $\frac{1}{12}+2k, -\frac{5}{12}+2k;$

б) $-\frac{7\pi}{4}+7\pi k, \frac{7\pi}{2}+7\pi n;$ в) $\frac{\pi}{60}+\frac{2\pi k}{5}, \frac{7\pi}{60}+\frac{2\pi k}{5}.$

12. а) $x \in \varnothing$; ә) $x \in \varnothing$;

б) $x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\left(\sqrt{15}-3\right) + \frac{\pi k}{2}$; в) $x = -\frac{\pi}{13} + (-1)^{k+1} \arcsin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \pi k$.

13. а) $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$; ә) $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$;

б) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$; в) $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$.

14. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; ә) $x \in \varnothing$; б) πk. **15.** $(1;2)$. **16.** 80 кг және 60 кг.

1.2 $\cos x = a$ түріндегі теңдеулер

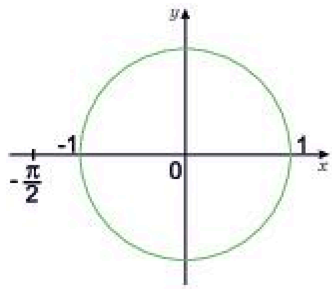
4 жаттығу

Біз алдыңғы пунктте $\sin x = a$ түріндегі теңдеуді толығымен және нақтылап талдадық. Нәтижесінде a-ның барлық мүмкін мәндері қарастырылған формулалар жазылған кесте алдық. Өз беттеріңмен $\cos x = a$ түріндегі теңдеуге сәйкес сол сияқты кесте жасап көріңдер.

7 Мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\cos x = -\frac{\pi}{2}$.

Талдау. $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3{,}14}{2} \approx 1{,}57 > 1$, $\cos x$ – бұл тригонометриялық шеңбердегі M_x нүктесінің сәйкес абсциссасы. Абциссасы $-\frac{\pi}{2}$-ге тең болатын нүкте шеңберде жоқ екеніне көз жеткізу оңай (2-сурет).



2-сурет

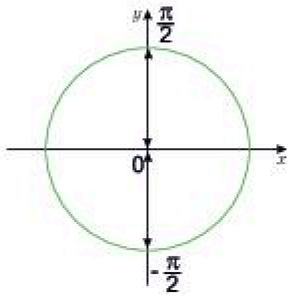
Шешуі. $\cos x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x \in \varnothing$, себебі $-\frac{\pi}{2} < -1$.

Осындай талдаулар, егер a саны $[-1;1]$ кесіндісіне тиісті болмаса, онда $\cos x = a$ теңдеуінің түбірі жоқ екенін көрсетеді.

8 Мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\cos x = 0$.

Талдау. M_x нүктесінің абциссасы 0-ге тең болғанда, тек сонда ғана $\cos x = 0$ болады. M_x нүктесі тригонометриялық шеңбер мен Oy өсінің қиылысу нүктесімен беттескенде, M_x нүктесін шеңбер бойымен жолыққанда, әрбір жарты айналым сайын (3-сурет) бұл нүктелер дәл «беттеседі». Ол жағдай x бұрышының $+\pi$-ден $-\pi$-ге өзгеруіне сәйкес келеді. $\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$ болғандықтан $x=\dfrac{\pi}{2}$ – теңдеудің шешімдерінің біреуі. Қалғандары осыдан π бұрышының бүтін санын қосу немесе азайту арқылы $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ табылады.



3-сурет

Жауабы: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$.

9 Мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\cos x=1$.

Талдау. 1 – саны Ox өсіндегі $[-1;1]$ кесіндісінің оң жақ шеткі нүктесі болғандықтан шеңберде абциссасы 1-ге тең тек бір ғана нүкте болады. 3-суретте B нүктесі $\arccos 1=0$ радиан бұрышына сәйке нүкте. M_x нүктесін тригонометриялық шеңбер бойымен жылжытса, тура бір айналымнан соң B нүктесімен беттеседі, яғни барлық 2π шеңбер доғасы шешімі болып табылады. Ал бұл дегеніміз $y=\cos x$ функциясының басты периоды 2π саны деген фактіге сәйкес келеді; егер біз 0 санына 2π санын бірнеше рет қоссақ немесе азайтсақ, одан косинустың мән өзгермейді. Осылайша $x=2\pi$, 4π, 6π т.с.с оң жақтағы, $x=-2\pi$, -4π, -6π және т.с.с теріс бағыттағы $\cos x=1$ теңдеуінің түбірлері болады.

Шешуі. $\cos x=1$ теңдеуінің шешімі $x=2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

10 Мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\cos x=-1$.

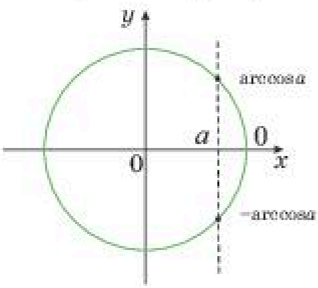
Талдау. -1 – бұл Ox өсіндегі $[-1;1]$ кесіндісінің сол жақ шеткі нүктесі болғандықтан, шеңберде абциссасы -1-ге тең бір ғана нүкте бар. Ол нүктеге $\arccos(-1)=\pi$ бұрышы сәйкес келеді. $y=\cos x$ функциясының периодтылығын ескеріп, берілген теңдеудің барлық шешімдерін $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ түрінде жазуға болады.

Шешуі. $\cos x=-1$ теңдеуінің шешімі: $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Біз қарастырған $\cos x=-1$, $\cos x=1$ және $\cos x=0$ теңдеулері $\cos x=a$ теңдеуінің дербес жағдайлары. Сондай-ақ $a<-1$ немесе $a>1$ болғанда $\cos x=a$ теңдеуінің түбірлері болмайды. Барлық қалған басқа жағдайлар $-1<a<1$ және $a\neq 0$ түрінде болады.

Келтірілген мысалдар $\cos x = a$ түріндегі теңдеулердің жалпы шешімін тригонометриялық шеңбер көмегімен іздеуге мүмкіндіктер береді. Оны төмендегідей алгоритм түрінде қысқаша беруге болады:

- Ox өсінің a санын белгілейміз. Белгілеген нүкте арқылы вертикаль түзу жүргіземіз және ол түзудің тригонометриялық шеңбермен қиылысу нүктелерін белгілейміз.
- Теориялық білімімізге сүйеніп, кестеге қарап және т.с.с белгіленген нүктеге сәйкес, нөлге ең жақын бұрышты табамыз.
- $y=\cos x$ функциясының периодтылығын ескеріп, жауапты жазамыз.



4-сурет

$a \neq 0$ және $-1 < a < 1$ болған жағдайдағы $\cos x = a$ теңдеуін шешейік. Ox өсіндегі a арқылы жүргізілген вертикаль түзу тригонометриялық шеңберді $x = \arccos a$ және $x = -\arccos a$ бұрыштарына сәйкес келетін нүктелерде қияды (4-сурет). $y = \cos x$ функциясының периодтылығын ескеріп, теңдеудің барлық шешімдерін $x = -\arccos a + 2\pi k$ және $x = \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ түрінде жазамыз.
Алынған мәліметтерді кесте арқылы көрсетейік.

$\cos x = a$, $a > 1$ немесе $a < -1$	$x \in \varnothing$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi k$, мұндағы $k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi k$, мұндағы $k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0$	$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, мұндағы $k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$, $-1 < a < 1$, $a \neq 0$	$x = \pm\arccos a + 2\pi k$, мұндағы $k \in \mathbb{Z}$

Алғашқы төрт жолдағы формулаларды соншалықты «жаттамай-ақ», әрбір жолы жоғарыда келтірілген мысалдардағыдай талдап, «еске түсіруге» болады. Бесінші жолдағы формула «косинустың түбірлерінің жалпы формуласы» деп аталады.

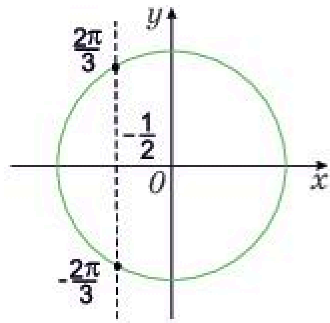
11 Мысал

Теңдеуді шешіңдер: $2\cos x = -1$.

Шешуі: Теңдеуді $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ түріне келтіріп жазамыз. Келтірілген алгоритмді қолданып, x-ті табамыз: $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Сондай-ақ,

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

Жауабы: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.



5-сурет

12 Мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\cos x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Шешуі: $0<\sqrt{3}-\sqrt{2}<\sqrt{4}-1=1$. Олай болса бұл теңдеудің шешімі бар: $x=\pm\arccos\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

Жауабы: $x=\pm\arccos\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

Есептер

1-бөлім

Теңдеуді шешіңдер (1–5):

1. (1) а) $\cos x=1$; ә) $\cos\frac{x}{2}=1$; б) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-3\pi x\right)=1$.

2. (1) а) $\cos x=-\frac{1}{2}$; ә) $2\cos(-3x)=1$; б) $2\cos\left(\frac{\pi x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+1=0$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=-\frac{1}{2}$.

3. (1) а) $2\cos x=\sqrt{3}$; ә) $2\cos\left(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$;

б) $2\cos\left(2\pi x-\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{3}=0$; в) $2\cos\left(\frac{\pi}{5}-2x\right)=\sqrt{2}$.

4. (1) а) $3\cos x-1=0$; ә) $-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+2=0$;

б) $10\cos\left(\frac{2x}{7}+\frac{\pi}{4}\right)+7=0$; в) $2\cos\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=7$.

5. (1) а) $4\cos\frac{2x}{3}-3\sqrt{2}=0$; ә) $\cos\frac{x}{2}=5-\sqrt{27}$;

б) $\cos 2x-\sqrt{15}=\frac{\pi}{3}$; в) $5\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=-\pi$.

6. (2) Келтіру формуласын қолданып, теңдеудің шешімдерін табыңдар:

а) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sqrt{3}=0$; ә) $2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=1$;

б) $\cos(7\pi+2x)=-1$; б) $-28\sin\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)=\sqrt{392}$.

7. (2) Теңдеуді $\cos x=p$ айнымалысын енгізу арқылы шешіңдер:

а) $\cos^2 x-3\cos x+2=0$; ә) $\cos^2 x-5\cos x+26=0$; б) $5\cos^2 x-\cos x=0$.

2-бөлім

Теңдеуді шешіңдер (8–12):

8.(1) а) $\cos x=-1$; ә) $\cos 2x=0$; б) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=-1$.

9.(1) а) $\cos\pi x=\frac{1}{2}$; ә) $\cos(-2x)=-\frac{1}{2}$; б) $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=1$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=-1$.

10.(1) а) $2\cos x=-\sqrt{3}$; ә) $2\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$;

б) $2\cos\left(3\pi x-\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}$; в) $2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{6}\right)=-\sqrt{3}$.

11.(1) а) $2\cos x+\sqrt{2}=0$; ә) $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$;

б) $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$; в) $2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{2}$.

12.(1) а) $2\cos\frac{2x}{3}-2\sqrt{2}=0$; ә) $\cos 3x=\sqrt{5}-2$;

б) $\cos 5x-\sqrt{5}=-4$; в) $11\cos\left(x+\frac{\pi}{13}\right)=-3\pi$.

13. (2) Келтіру формуласын қолданып, теңдеудің шешімдерін табыңдар:

а) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1=0$; ә) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi x\right)=1$;

б) $\cos(\pi-3x)=\frac{2}{7}$; в) $14\sin\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)=-\sqrt{98}$.

14. (2) $\cos x = p$ айнымалысын енгізу арқылы теңдеуді шешіңдер:

а) $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$; ә) $3\cos^2 x + 11\cos x - 4 = 0$; б) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

Жауаптары: *(барлық жауаптарда $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ болып табылады).*

1. а) $x = 2\pi k$; ә) $x = 4\pi k$; б) $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$; в) $x = \frac{1}{12} + \frac{2k}{3}$.

2. а) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; ә) $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$; б) $-\frac{5}{2} + 6n$, $\frac{3}{2} + 6k$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\frac{5\pi}{12} + \pi n$.

3. а) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; ә) $-\frac{3\pi}{2} + 3\pi k$, $\frac{3\pi}{4} + 3\pi n$;

б) $\frac{31}{90} + \frac{2}{3}k$, $-\frac{29}{90} + \frac{2}{3}k$. в) $\frac{9\pi}{40} + \pi k$, $-\frac{\pi}{40} + \pi k$;

4. а) $\pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$; ә) $x \in \varnothing$;

б) $-\frac{35\pi}{8} + \frac{7}{2}\arccos\frac{7}{10} + 7\pi k$, $\frac{21\pi}{8} - \frac{7}{2}\arccos\frac{7}{10} + 7\pi k$; в) $x \in \varnothing$;

5. а) $x \in \varnothing$; ә) $x = \pm 2\left(\pi - \arccos\left(\sqrt{27} - 5\right)\right) + 4\pi k$; б) $x \in \varnothing$;

в) $\frac{7\pi}{8} - \arccos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2\pi k$, $-\frac{9\pi}{8} + \arccos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2\pi k$.

6. а) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; ә) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$; б) $x = \pi k$; в) $x = \pm\frac{3\pi}{8} + \pi k$.

7. а) $2\pi k$; ә) $x \in \varnothing$; б) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = \pm\arccos\left(\frac{1}{5}\right) + 2\pi k$.

8. а) $x = \pi + 2\pi k$; ә) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; б) $x = \frac{2\pi}{3} + \pi k$; в) $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$.

9. а) $x = \pm\frac{1}{3} + 2k$; ә) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$; б) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$;

в) $\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$.

10. а) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; ә) $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{4\pi k}{3}$, $x = \frac{\pi}{18} + \frac{4\pi n}{3}$;

б) $x = \frac{11}{90} + \frac{2k}{3}$, $x = \frac{1}{90} + \frac{2n}{3}$; в) $x = 6\pi + 12\pi k$, $x = -4\pi + 12\pi n$.

11. а) $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k;$ ә) $x=\frac{7\pi}{12}+2\pi k$, $x=\frac{\pi}{12}+2\pi n;$

б) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\pi n;$ в) $x=\frac{5\pi}{4}+6\pi k;$ $x=-\frac{13\pi}{4}+6\pi k.$

12. а) $x\in\varnothing;$ ә) $x=\pm\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)+\frac{2\pi k}{3};$

б) $x\in\varnothing;$ в) $x=\frac{12\pi}{13}-\arccos\frac{3\pi}{11}+2\pi k,$ $x=-\frac{14\pi}{13}+\arccos\frac{3\pi}{11}+2\pi n.$

13. а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k;$ ә) $x=\frac{1}{2}+k;$

б) $x=\pm\frac{1}{3}\left(\pi-\arccos\frac{2}{7}\right)+\frac{2\pi k}{3};$ в) $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k;$

14. а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k;$ ә) $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi k;$ б) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k;$ $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k.$

1.3 $\mathrm{tg}x=a$ және $\mathrm{ctg}x=a$ түріндегі теңдеулер

5 жаттығу

Тригонометриялық шеңбер және тангенстер өсін жүргізіңдер.
а) Тангенсі 1-ге тең болатын ең болмағанда бір бұрышты табыңдар.
ә) M_x нүктесінің шеңбер бойымен қозғалысын бақылаңдар. M_x нүктесінің $\mathrm{tg}x=1$ болатын мәндерін және сәйкес бұрыштарды жазып отырыңдар.
б) Осындай бұрыштардың барлығын бір формуламен қалай жазуға болады?

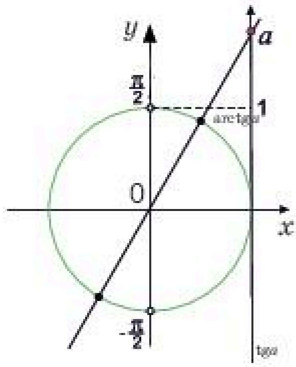
6 жаттығу

Тригонометриялық шеңбер және котангенстер өсін жүргізіңдер.
а) Котангенсі 0-ге тең болатын ең болмағанда бір бұрышты табыңдар.
ә) M_x нүктесінің шеңбер бойымен қозғалысын бақылаңдар. M_x нүктесінің $\mathrm{ctg}x=0$ болатын мәндерін және оған сәйкес бұрыштарды жазып отырыңдар.
б) Осындай бұрыштардың барлығын бір формуламен қалай жазуға болады?

13 мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\operatorname{tg} x = a$.

Талдау. ω тригонометриялық шеңберін және тангенстер өсін сызамыз. Тангенстер өсіндегі a нүктесі және координаталар басы арқылы түзу жүргіземіз. Ол түзудің ω шеңберімен қиылысу нүктесін белгілейміз. Біз M_x-тің белгіленген нүктелердің біреуімен беттесетін барлық бұрыштарының тангенсі a-ға тең екенін білеміз. Біз сондай-ақ $x = \operatorname{arctg} a$ – бұл $\operatorname{tg} x = a$ теңдеуінің шешімі M_x-ті шеңбер бойымен $x = \operatorname{arctg} a$ қалпынан бастап жылжытып, бақылаймыз. M_x-тің белгіленген нүктелермен беттесуі әрбір жарты айналым сайын болады, ол дегеніміз $y = \operatorname{tg} x$ функциясының негізгі периоды π деген фактіге сәйкес келеді.

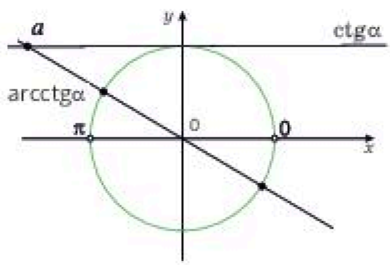


6-сурет

Шешуі: $\operatorname{tg} x = a$ теңдеуінің түбірлері $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

7 жаттығу

$\operatorname{ctg} x = a$ түріндегі теңдеудің шешімін талқылау, $\operatorname{tg} x = a$ (7-сурет) түріндегі теңдеудің жоғарыда келтірілген талдауына ұқсас.Мұнда тангенстер өсінің орнына котангенстер өсі пайдаланылады. Талдауды өз беттеріңмен жүргізіп, $x = \operatorname{arcctg} x + \pi k$, $k \in Z$ жауабын алыңыздар.



7-сурет

$\operatorname{tg} x = a$ және $\operatorname{ctg} x = a$ теңдеуінің түбірлерін табу формуласы төмендегідей кестеде келтірілген:

$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

14 мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

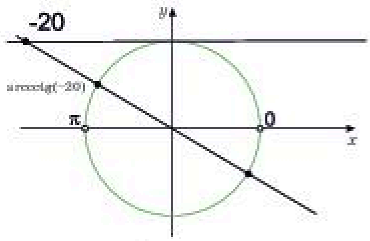
Шешуі. 13-мысалдағы талдауларды қайталай отырып теңдеуді шешеміз: $2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $2x = \pi k$, $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Егер $a < 0$ болса, онда $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$ формуласының орнына $x = -\operatorname{arcctg}(-a) + \pi k$ формуласы да қолданылады. Мысал қарастырайық.

15 мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\operatorname{ctg} x = -20$.

Шешуі. Формулалар кестесі бойынша $x = \operatorname{arcctg}(-20) + \pi k$ (8-сурет). $x = \pi - \operatorname{arcctg} 20 + \pi k = -\operatorname{acctg} 20 + \pi(k+1)$. Егер k саны барлық мүмкін болатын бүтін мәндерді қабылдаса, онда $k+1$ өрнегі де барлық мүмкін болатын бүтін мәндерді қабылдайды. $(k+1)$-ді қандай да бір бүтін параметрге айырбастасақ, онда $x = -\operatorname{arcctg} 20 + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ түрінде жазуға болады.



8-сурет

Жауабы: $x = -\operatorname{arcctg} 20 + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Енді теңдеулерді жалпы түрде шешіп қана қоймай, сондай-ақ қандай да бір қосымша шарттарды қанағаттандыратын, дербес шешімдерді табуға тура келетін мысалдарды қарастырамыз.

16 мысал

$\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ аралығында жататын $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ теңдеуінің шешімдерін табыңдар.

Шешуі. $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \pi k \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{3}$ екенін көреміз. Есептің шарты бойынша x айнымалысының $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ аралығында жататын мәндерін табу керек. Демек, x айнымалының $-\frac{\pi}{2} \le x < 2\pi$ қос теңсіздігін қанағаттандыратын мәндерін табу керек. Осы қос теңсіздікке $x = -\frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{3}$ өрнегін қойып, теңсіздікті k айнымалысына қатысты шешеміз: $-\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{3} < 2\pi$.

Теңсіздіктің үш бөлігін де π-ге бөліп, әрқайсысына $\frac{1}{36}$ санын қосамыз: $-\frac{1}{2} + \frac{1}{36} \le \frac{k}{3} < 2 + \frac{1}{36}$,

$-\frac{17}{36}\le\frac{k}{3}<\frac{73}{36}$. Теңсіздіктің үш бөлігін де 3-ке көбейтеміз: $-\frac{17}{12}\le k<\frac{73}{12}$, $-1\frac{5}{12}\le k<6\frac{1}{12}$. k санының тек бүтін сандарды қабылдайтынын ескереміз. $\left[-1\frac{5}{12};6\frac{1}{12}\right)$ кесіндіде $k=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ сандары болып табылады. k-ның алынған мәндерін $x=-\frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{3}$ теңдеуіне қоя отырып, $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right)$ аралығында жататын x-тің сәйкес мәндерін табамыз.

Жауабы: $x=-\frac{13\pi}{36},\ -\frac{\pi}{36},\ \frac{11\pi}{36},\ \frac{23\pi}{36},\ \frac{35\pi}{36},\ 1\frac{1}{36}\pi,\ 1\frac{23}{36}\pi,\ 1\frac{35}{36}\pi$.

Есептер

1-бөлім

Теңдеуді шешіңдер (1–4):

1.(1) а) $\operatorname{tg}x=0$; ә) $\operatorname{tg}x=1$; б) $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$;

в) $\operatorname{tg}x=-4$; г) $\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.(1) а) $\operatorname{ctg}x=0$; ә) $\operatorname{ctg}x=-1$; б) $\operatorname{ctg}x=\sqrt{3}$;

в) $\operatorname{ctg}x=5$; г) $\operatorname{ctg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.(1) а) $\operatorname{ctg}2x-1=0$; ә) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$;

б) $3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-\pi x\right)+\sqrt{3}=0$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-3\right)=5$.

4.(1) а) $\left(\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\right)(\sin x+1)=0$; ә) $(2\cos x+1)\left(3\operatorname{ctg}x+\sqrt{3}\right)=0$.

5.(2) $\operatorname{tg}x=-1$ теңдеуінің $[-\pi;\pi]$ аралығына тиісті шешімдерін табыңдар.

6.(2) $3\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$ теңдеуін шешіп, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ шартын қанағаттандыратын түбірлерін табыңдар.

7.(3) $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=1$ теңдеуінің $[\pi;4\pi)$ аралығында жататын неше түбірі бар екенін анықтаңдар.

8.(3) $2\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{3}=0$ теңдеуінің $(-1;1)$ аралығындағы түбірлерінің қосындысын табыңдар.

2-бөлім

Теңдеуді шешіңдер (9–12):

9.(1) а) $\operatorname{tg}\pi x=0$; ә) $\operatorname{tg}x=-1$; б) $\operatorname{tg}x-\sqrt{3}=0$; в) $\operatorname{tg}3x=9$; г) $3\operatorname{tg}\frac{x}{3}+\sqrt{3}=0$.

10.(1) а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}=0$; ә) $\operatorname{ctg}\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)-1=0$; б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\sqrt{3}$;

в) $\operatorname{ctg}\frac{x}{3}=\pi$; г) $\operatorname{ctg}4x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11.(1) а) $\operatorname{ctg}\left(2\pi x-\frac{\pi}{4}\right)=1$; ә) $\operatorname{ctg}\left(2\pi x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$;

б) $3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\pi x\right)-\sqrt{3}=0$; в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=50$.

12.(1) а) $\left(\operatorname{ctg}x+\sqrt{3}\right)(\sin x-1)=0$; ә) $\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)\left(\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\right)=0$.

13. (2) $\operatorname{ctg}2x=1$ теңдеуінің шешімдерінің арасынан $[-\pi;\pi]$ аралығына тиісті мәндерін табыңдар.

14. (2) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ теңдеуін шешіп, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ шартын қанағаттандыратын түбірлерін табыңдар.

15. (3) $2\sin\left(\frac{2\pi x}{7}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ теңдеуінің $[1;4)$ аралығында жатқан түбірлерінің санын анықтаңдар.

16. (3) $(-\pi;\ 2\pi)$ аралығындағы $2\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0$ теңдеуінің түбірлерінің қосындысын табыңдар.

Жауаптары: *(барлық жауаптарда $n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}$ болып табылады).*

1. а) $x=\pi k$ ә) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k;$ б) $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k;$ в) $x=-\mathrm{arctg}4+\pi k;$

г) $x=\frac{\pi}{6}+\pi k.$

2. а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k;$ ә) $x=\frac{3\pi}{4}+\pi k;$ б) $x=\frac{\pi}{6}+\pi k;$

в) $x=\mathrm{arcctg}5+\pi k;$ г) $x=\frac{\pi}{3}+\pi k.$

3. а) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2};$ ә) $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};$ б) $x=\frac{2}{3}+k;$ в) $x=6+2\mathrm{arctg}5+2\pi k.$

4. а) $x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k;$ ә) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ x=\frac{2\pi}{3}+\pi k.$

5. $x=-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}.$ **6.** $x=-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}.$ **7.** 9 түбір. **8.** $\frac{7}{5}.$

9. а) $x=k;$ ә) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k;$ б) $x=\frac{\pi}{3}+\pi k;$

в) $x=\frac{1}{3}\mathrm{arctg}9+\frac{\pi k}{3};$ г) $x=-\frac{\pi}{2}+3\pi k.$

10. а) $x=\frac{3}{2}+3k;$ ә) $x=-\frac{\pi}{48}+\frac{\pi k}{4};$ б) $x=\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi k}{2};$

в) $x=3\mathrm{arcctg}\pi+3\pi k;$ г) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{4}.$

11. а) $x=\frac{1}{4}+\frac{k}{2};$ ә) $x=\frac{k}{2};$ б) $x=\frac{1}{6}+k;$ в) $x=\mathrm{arctg}50+\pi k.$

12. а) $x=\frac{5\pi}{6}+\pi k,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k;$ ә) $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k;\ x=\frac{\pi}{3}+\pi k.$

13. $x\in\left\{-\frac{7\pi}{8};-\frac{3\pi}{8};\frac{\pi}{8};\frac{5\pi}{8}\right\}.$ **14.** $x=-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}.$ **15.** 1 түбірі бар. **16.** $16\pi.$

§2 ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ ӘДІСТЕРІ

Давид Гильберттен оның бұрынғы оқушыларының бірі туралы сұрапты. «А, ол ма? Ол ақын болып кетті. Математика үшін оның ойлау, көз алдына елестету қабілеті өте төмен болды»,- деп есіне түсірді Гильберт.

2.1 Алдын ала ескертулер

Алдыңғы параграфта біз қарапайым тригонометриялық теңдеулерді шешу жолдарын қарастырдық. Құрамында тригонометриялық функциялар бар қалған барлық теңдеулер қарапайым теңдеуге түрлендіріледі. Кез-келген тригонометриялық теңдеуді шешетін белгілі бір алгоритм жоқ, бірақ нәтижеге қол жеткізуді айтарлықтай жеңілдететін бірнеше қағидалар мен идеяларды тұжырымдауға болады:

«Жаңа айнымалы енгізу». Егер жаңа айнымалы енгізуге болатынына көз жеткізсең, онда бірден іске кіріс!

«Бұрыштардың азырақ болғаны жақсы». Егер теңдеудегі тригонометриялық функциялардың аргументі x, $2x$, $3x$, т.с.с. бұрыштар болса, онда түрлендірулер жүргізу арқылы осы функциялардың барлығын бір аргументке келтіруге тырысу керек.

«Функциялардың барынша азырақ болғаны жақсы». Теңдеудің құрамындағы әртүрлі тригонометриялық функцияларды формулалардың көмегімен функция саны азырақ болатындай етіп келтіру керек.

«Жікте және басқар!» Егер барлық қосылғыштарды теңдіктің сол жағына шығарып, көбейткіштерге жіктеуге болатын болса, онда берілген теңдеу қарапайым теңдеулердің жиынтығына түрленеді.

«Дәреженің үлкен болғанынан кіші болғаны тиімдірек!» Дәрежені төмендету формулаларын пайдалану көмегімен теңдеулерді көп жағдайда ықшам түрде әкеледі.

«Жатқан тастың астынан су ақпайды». Егер 1-5 тұжырымдар орындалмайтын болса, онда белгілі формулаларды пайдаланып, түрлендіруге тырысу керек. Әрбір түрлендірулерден кейін алынған теңдеуге 1-5 қағидалардың бірін қолдану мүмкіндігін қарастыру керек.

2.2 Квадрат теңдеуге келтірілетін теңдеулер

$a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\cos 2x + d\cos x + e = 0$ түріндегі теңдеулер $\cos x = p$ белгілеуін енгізу арқылы шешіледі. Егер $\cos x = p$ болса, онда $\cos^2 x = p^2$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - p^2$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2p^2 - 1$.

$a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\cos 2x + d\sin x + e = 0$ түріндегі теңдеу $\sin x = p$ белгілеуін (алмастыруын) енгізу арқылы шешіледі. Егер $\sin x = p$ болса, онда $\sin^2 x = p^2$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - p^2$. Екі жағдайда да белгілеу енгізілгеннен кейін квадрат теңдеу алынады.

Келесі мысалда белгілеу енгізу айқын көрінеді.

1 мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0$.

Шешуі. Анықталу облысы: $x \in (-\infty; +\infty)$. Жаңа айнымалы енгіземіз. $\sin x = s$.

Теңдеу $s^2 - 3s - 4 = 0$ түріне келеді. Бұл теңдеуді дискриминант немесе басқа да тәсілді пайдаланып шешсек, түбірлері: $s = -1$ немесе $s = 4$. Қайтадан x айнымалысына оралсақ; $\sin x = -1$ немесе $\sin x = 4$. $\sin x = -1$ теңдеуінің түбірі $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ал $\sin x = 4$ теңдеуінің түбірі жоқ, себебі 4 саны $\sin x$ функциясының мәндер облысына кірмейді, $4 > 1$.

Жауабы: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Келесі қарастырылған мысалда негізгі идея $\sin^2 2x$-ті $(1 - \cos^2 2x)$-ке айырбастау болып табылады.

2 мысал

Теңдеуді шешіңдер: $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$.

Шешуі: Анықталу облысы: $x \in (-\infty; +\infty)$.

$\cos 2x = p$, $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x = 1 - p^2$ жаңа айнымалыларын енгіземіз. Теңдеу $3(1 - p^2) + 7p - 3 = 0$ түріне келеді.

Ары қарай $3 - 3p^2 + 7p - 3 = 0 \Leftrightarrow 3p^2 - 7p = 0 \Leftrightarrow p(3p - 7) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 0 \\ p = \frac{7}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{7}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x \in \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}.$$

Жауабы: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Теңдеулерді квадрат теңдеулер түріне келтіргенде $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ және $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ формулалары тиімді болады.

3 мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\sqrt{3}\cos 2x - \sin x + \sqrt{3} = 0$.

Шешуі. Анықталу облысы: $x \in (-\infty; +\infty)$. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ тепе-теңдіктерін пайдаланып, берілген теңдеудегі өрнектерді бір функцияға келтіреміз: $\sqrt{3}(1 - 2\sin^2 x) - \sin x + \sqrt{3} = 0$. Жақшаны ашып, ұқсас мүшелерді біріктіреміз. $2\sqrt{3}\sin^2 x + \sin x - 2\sqrt{3} = 0$, $\sin x = t$ жаңа айнымалы енгізіп, $2\sqrt{3}t^2 + t - 2\sqrt{3} = 0$ квадрат теңдеуін аламыз, оның түбірлері $t = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ және $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Қайтадан x айнымалысына көшеміз:

$t = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. Бұл теңдеудің түбірі жоқ, себебі $-\frac{2}{\sqrt{3}} < -1$.

$t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Жауабы: $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4 мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\operatorname{ctg} x\left(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}\right) = 1$.

Шешуі. x айнымалысының анықталу облысы $\sin x \neq 0$ шарты арқылы анықталады.

$\frac{\cos x}{\sin x}\left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x}\right) = 1$, $\cos x(\cos x + 1) = \sin^2 x$,

$\cos^2 x + \cos x - \sin^2 x = 0$,

$\cos^2 x + \cos x - (1 - \cos^2 x) = 0$, $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$,

$\cos x = -1$ немесе $\cos x = \frac{1}{2}$.

Егер $\cos x = -1$ болса, онда $\sin x = 0$, яғни анықталу облысын қанағаттандырмайды.

Егер $\cos x=\frac{1}{2}$ болса, онда $\sin x\neq 0$. Сол себепті $\cos x=\frac{1}{2}$ теңдеуінің $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ түбірі берілген теңдеудің түбірі болып табылады.

Жауабы: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Есептер

1-бөлім

Теңдеулерді шешіңдер (1–10):

1. $6\cos^2 x-5\sin x+5=0$.

2. $5\sin x-2\cos^2 x-\sin\frac{\pi}{2}=0$.

3. $1+\cos 2x+\cos 4x=0$.

4. $\cos^2 3x+4\cos 3x=3\sin^2 3x$.

5. $\cos^2 x+5\cos x=2\sin^2 x$.

6. $4\sin^4 x+12\cos^2 x=7$.

7. $\cos x+2\cos 2x=1$.

8. $2-\cos 2x+4\sin^2 x=5\sin x$.

9. $\sqrt{2}\left(1+\cos^2 x\right)=3\cos x$.

10. $\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg} x-\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1}{2}$.

2-бөлім

Теңдеулерді шешіңдер (11–20):

11. $\cos^2 x-2\sin x=-\frac{1}{4}$.

12. $2\sin^2 3x+\cos^2 3x+\sin 3x=1$

13. $\cos 2x+3\sin x=2\cos 0$.

14. $3\sin^2 2x+7\cos 2x-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}=0$.

15. $3\cos 2x-8\cos x=11$.

16. $\cos^4\frac{x}{5}+\sin^2\frac{x}{5}=1$.

17. $\sin x-2\cos 2x=1$.

18. $3\sin x-\cos 2x-\sin^2 100x=\cos^2 100x$.

19. $\sqrt{2}\left(1+\sin^2 x\right)=-3\sin x$.

20. $\operatorname{ctg} x\left(4\operatorname{ctg} x-\frac{4}{\sin x}\right)+\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x=0$.

21. (3) Өткен жылы маусым айында Алматыда ашық күндер саны жауынды күндер санының 25%-ын құрады, жылы күндердің саны салқын күндер санының 20%-ын құрады. Мамыр айында тек 3 күн ғана жылы және ашық болса, жауынды және салқын күндердің саны қанша?

22. (2) 36 және $2\frac{1}{4}$ сандарының арасына, осы сандармен бірге өзара геометриялық прогрессия құрайтындай етіп, үш санды орналастырыңдар.

Жауаптары: *(барлық жауаптарда $n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}$ болып табылады).*

1. $\frac{\pi}{2}+2\pi k$. $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **2.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **3.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$ **4.** $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$. **5.** $\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi k$. **6.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$. **7.** $\pi+2\pi n$, $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k$. **8.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$. **9.** $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$. **10.** $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$. **11.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **12.** $x=\frac{\pi n}{3}$, $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$ **13.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $\frac{\pi}{2}+2\pi k$. **14.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$. **15.** $\pi+2\pi k$. **16.** $\frac{5\pi}{2}+5\pi k$, $5\pi n$. **17.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(-1)^k\arcsin\frac{3}{4}+\pi k$. **18.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. **19.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n$. **20.** $\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi k$. **21.** 22 күн. **22.** 18, 9, 4,5.

2.3 Біртекті тригонометриялық теңдеулер

5 мысал

Теңдеуді шешіңдер: $a\sin x=b\cos x, (a\neq 0, b\neq 0)$.

Шешуі. Егер $\cos x=0$ болса, онда теңдеуден $\sin x=0$ екені шығады, яғни $\cos^2 x+\sin^2 x=0$ – бұл $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ негізгі тригонометриялық тепе-теңдікке қайшы. Олай болса, біз теңдеудің екі жағын да, $\cos x$-ке бөлуге мүмкіндік аламыз. Сонда $\operatorname{tg} x=\frac{b}{a}$, $x=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Жауабы: $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Енді $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ түріндегі теңдеулерді талдаймыз. $\sin x=u$ және $\cos x=v$ жаңа айнымалыларын енгізгеннен кейін $au^2+buv+cv^2=0$ теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудің алгебралық құрылымы бізге белгілі. Бірмүшеліктердің қосындысы 0-ге тең. Мұндай түрдегі теңдеулерді **екінші дәрежелі біртекті теңдеулер** деп атайды. Осы сияқты $au^3+bu^2v+cuv^2+dv^3=0$ түріндегі теңдеуді үшінші дәрежелі біртекті теңдеу деп атайды т.с.с. біртекті теңдеудің екі жағын да айнымалылардың біреуінің ең үлкен дәрежесіне бөлу арқылы, жаңа айнымалыға қатысты қарапайым алгебралық теңдеу аламыз. Бізге, мысалы $au^2+buv+cv^2=0$ түріндегі теңдеу берілсін. Егер $v=0$ болса, онда $u=0$ болады. Егер $v\neq 0$ болса, онда теңдеудің екі жағын да v^2-қа бөлсек, $a\left(\frac{u}{v}\right)^2+b\left(\frac{u}{v}\right)+c=0$ теңдеуі шығады, $\frac{u}{v}=t$ десек, $at^2+bt+c=0$ болады.

$au^3+bu^2v+cuv^2+dv^3=0$ түріндегі теңдеуде, егер $v=0$ болса, онда $u=0$ болады. Егер $v\neq 0$ болса, екі жағын да v^3-ке бөлу арқылы $a\left(\frac{u}{v}\right)^3+b\left(\frac{u}{v}\right)^2+c\left(\frac{u}{v}\right)+d=0$ теңдеуі шығады, $t=\frac{u}{v}$ айнымалысын енгізсек $at^3+bt^2+ct+d=0$ болады.

6 мысал

Теңдеуді шешіңдер: $3\cos^2 x-\sin 2x-\sin^2 x=0$.

Шешуі. *«Бұрыштар неғұрлым аз болса, соғұрлым жақсы»:* $3\cos^2 x-2\sin x\cos x-\sin^2 x=0$. Егер $\cos x=0$ болса, онда теңдеуден $\sin x=0$ екені шығады, бірақ $\sin x$ және $\cos x$ бір мезетте 0-ге тең бола алмайды. Олай болса $\cos x\neq 0$. Теңдеудің екі жағын да $\cos^2 x$-ке бөлейік:

$\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x}-\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=0$, $3-2\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}^2x=0$. $\mathrm{tg}x=t$ жаңа айнымалысын енгізсек, $t^2+2t-3=0$, $t=1$ немесе $t=-3$. Қайтадан x айнымалысынаоралсақ, $\mathrm{tg}x=1$ немесе $\mathrm{tg}x=-3$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ немесе $x=-\mathrm{arctg}3+\pi k$.

Жауабы: $\frac{\pi}{4}+\pi k, -\mathrm{arctg}3+\pi k,\ k\in Z$.

$a\sin^2 x+b\cos^2 x+c\sin x\cos x+d\sin 2x+e\cos 2x=f$ түріндегі барлық теңдеулер, мұндағы a, b, c, d, e, f– қандай да бір сандар, егер біз $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, $f=f\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)$ арқылы ауыстыру жасасақ, біртекті теңдеу пайда болады.

7 мысал

Теңдеуді шешіңдер: $11\sin^2 x+\frac{5}{2}\sin 2x+\cos 2x=3$.

Шешуі. $11\sin^2 x+\frac{5}{2}\cdot 2\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=3\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$,

$10\sin^2 x+5\sin x\cos x+\cos^2 x=3\sin^2 x+3\cos^2 x$,

$7\sin^2 x+5\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.

$\cos x\neq 0$ екенін байқаймыз, олай болмаған жағдайда теңдеуден $\sin x=0$ болады. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ тепе-теңдігінен $\sin x$ және $\cos x$ мәндерінің бір мезетте 0-ге тең болмайтыны шығады. Теңдеудің екі жағын да $\cos^2 x$-ке бөлеміз:

$7\text{tg}^2 x+5\text{tg}x-2=0$. $\text{tg}x=t$ деп белгілейміз.

$7t^2+5t-2=0$, $t=-1$ немесе $t=\frac{2}{7}$.

Кері ауыстыру $\text{tg}\,x=-1$ немесе $\text{tg}x=\frac{2}{7}$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$ немесе $x=\text{arctg}\frac{2}{7}+\pi k$.

Жауабы: $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\text{arctg}\frac{2}{7}+\pi k$, мұндағы $k\in Z$.

8 мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\cos^2 x+\sin x\cos x=0$.

Шешуі. Бұл біртекті теңдеу. Егер $\cos x=0$ болса, сол жағы оң жағына тең болады: $0^2+\sin x\cdot 0=0$, яғни $\cos x=0$ болатын x-тің мәндерінің жиыны теңдеудің шешімі болады; $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Егер $\cos x\neq 0$, онда екі жағын да $\cos^2 x$-қа бөлеміз: $1+\text{tg}x=0$, $\text{tg}x=-1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$.

Жауабы: $\frac{\pi}{2}+\pi k, -\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$.

Бұл келтірілген 8-мысал, біртекті теңдеулерде үнемі $\cos x\neq 0$ деген көзқарас қалмау үшін берілді. Бұл есептің басқа да, қарапайым шешу жолы бар: $\cos^2 x+\sin x\cos x=0$, $\cos x(\cos x+\sin x)=0$, $\cos x=0$ немесе $\cos x+\sin x=0$ және т.с.с. Ал келесі мысал арқылы бір қарағанда біртекті теңдеуге келтірілетін сияқты көрінген теңдеуді біртекті түрге келтіргендегі тиімді әдісті көрсетеміз. Ол әдіс жарты бұрышқа көшу арқылы іске асырылады.

9 мысал

Теңдеуді шешіңдер: $\sin x+\cos x=1$.

Шешуі. $\sin x$, $\cos x$ және 1-ді тригонометриялық функциялардың жарты бұрышы арқылы өрнектейміз: $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$,

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2},\ 1=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}.$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}.$$

Ары қарай $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}=0$ теңдеуін аламыз. Шешуді аяқтауды оқырмандардың өздеріне қалдырамыз.

Жауабы: $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ немесе $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Есептер

1-бөлім

Теңдеулерді шешіңдер (1-12):

1.(2) $2\sin x-3\cos x=0$.

2.(2) $\sin 2x+\cos 2x=0$.

3.(3) $\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$.

4.(3) $\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=0$.

5.(3) $\sin^3 x+\sin^2 x\cos x-3\sin x\cos^2 x-3\cos^3 x=0$.

6.(3) $10\sin^2 x+5\sin x\cos x+\cos^2 x=3$.

7.(3) $1+7\cos^2 x=3\sin 2x$.

8.(3) $2\cos^2 x-7\cos x=2\sin^2 x$.

9.(3) $5\sin^2 x+5\sin x\cos x=3$.

10.(3) $2+\cos^2 3x=2{,}5\sin 6x$.

11.(3) $2\sin 4x-3\sin^2 2x=1$.

12.(3) $6\sin^2 2x+4\cos^2 2x-4\sin 4x=1$.

2-бөлім

Теңдеулерді шешіңдер (13-24):

13.(2) $3\sin x+\cos x=0$.

14.(3) $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0$ теңдеуінің $[-5\pi;5\pi]$ аралығындағы түбірлерінің санын табыңдар.

15.(3) $\sin^4 2x-\sin^2 4x+3\cos^4 2x=0$.

16.(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\cos^2\frac{x}{2}=0$ теңдеуінің $[-2\pi;3\pi]$ аралығындағы түбірлерінің қосындысын табыңдар.

17. (3) $\sin^4 x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos^4 x-2\sin^3 x\cos^3 x=0$.

18. (3) $5\sin^2 x-5\sin x\cos x+8\cos^2 x=4$.

19. (3) $1-\cos 2x = 3\sin 2x - 4\sin^2 x$.

20.(3) $4\cos^2 x = \sin x - \sin^2 x$ теңдеуінің 3π-ден кем болатын ең үлкен түбірін табыңдар.

21.(3) $3\cos^2 x - 3\cos x + \sin^2 x = 0$ теңдеуінің $[4\pi;6\pi]$ аралығындағы ең кіші және ең үлкен түбірлерінің қосындысын табыңдар.

22.(3) $0,5\sin 2\pi x = \cos \pi x - \sin^2 \pi x + 1$.

23.(3) $2\,\mathrm{tg}\,x - 1 = \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ теңдеуінің $\left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ аралығындағы ең кіші түбірін табыңдар.

24.(3) $3\dfrac{(\sin^4 x + \cos^4 x)}{\cos^4 x} = 10\dfrac{(1-\cos 2x)}{(1+\cos 2x)}$.

25.(3) Түлкішек бір құмыра балды 10 минутта, бір табақ таңқурайды 13 минутта жеп, бір банка қоюлатылған сүтті 14 минутта ішеді. Қонжық бір құмыра балды 6 минутта, бір табақ таңқурайды 6 минутта жеп, бір банка қоюлатылған сүтті 7 минутта ішеді. Осылардың бәрін түлкішек пен қонжық бірігіп, қанша уақытта тауысады?

26.(3) Есептеңдер: а) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \cdot (3,375)^{-1}}{(2,25)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}$; ә) $\dfrac{(0,4)^{-2} \cdot (2,5)^{-4}}{(0,16)^{-5} \cdot \left((6,25)^{-3}\right)^{2}}$.

27.(2) Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} (x+y)^2 + (x-3y)^2 = 8, \\ x - 3y + 2 = (x+y)^2. \end{cases}$

28.(2) Алдаркөсе және Шығайбай кілем сатудан түскен пайданы бөліске салды. Алдаркөсе былай деп ойлады: «Егер мен ақшаны 40%-ға артық алсам, онда Шығайбайдың үлесі 60%-ға азаяр еді». Егер Алдаркөсе өзіне 50% артық ақша алса, онда Шығайбайдың үлесі қалай өзгерер еді?

Жауаптары: *(барлық жауаптарда $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ болып табылады).*

1. $x = \mathrm{arctg}\dfrac{3}{2} + \pi n$. **2.** $x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$. **3.** $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = \mathrm{arctg}2 + \pi n$.

4. $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = -\dfrac{\pi}{6} + \pi n$. **5.** $x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$; $x_2 = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n$.

6. $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x_2=\text{arctg}\frac{2}{7}+\pi n$. **7.** $x_1=\text{arctg}2+\pi n$, $x_2=\text{arctg}4+\pi n$.

8. $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi n$. **9.** $x_1=-\text{arctg}3+\pi n$, $x_2=\text{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$.

10. $x_1=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $x_2=\frac{1}{3}\left(\text{arctg}\frac{3}{2}+\pi n\right)$. **11.** $x=\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi n}{2}$.

12. $x_1=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{2}$.

13. $x=-\text{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)+\pi k$. **14.** 5.

15. $x_1=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **16.** 4π.

17. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_3=\text{arctg}3+\pi k$.

18. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\text{arctg}\,4+\pi k$.

19. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\pi k$. **20.** $\frac{5\pi}{2}$. **21.** 10π.

22. $x_1=\frac{1}{2}+k$, $x_2=k$. **23.** $\frac{3\pi}{4}$.

24. $x_1=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{3}+\pi k$. **25.** 12 мин.

26. а) $\frac{8}{27}$; ә) 1. **27.** $(-1;-1),(2;0)$. **28.** 75%-ға кемиді.

2.4 Көбейткіштерге жіктеу тәсілі

Біз кез келген теңдеудің оң жағындағы қосылғыштарды сол жағына көшіріп, оң жағын 0-ге теңестіру мүмкіндігіне ие боламыз. Содан кейін теңдеудің сол жағын көбейткіштерге жіктеу қарапайым теңдеулерде де, күрделі теңдеулерде де маңызды рөл атқарады.

10 мысал Теңдеуді шешіңдер: $\cos x=\sin 2x$.
Шешуі. «Бұрыштар неғұрлым аз болса, соғұрлым жақсы». $\sin 2x=2\sin x\cos x$ формуласын қолданамыз: $\cos x-2\sin x\cos x=0$,

барлығын сол жаққа шығарып, ортақ көбейткішті жақша сыртына шығарсақ: $\cos x-2\sin x\cos x=0$, $\cos x(1-2\sin x)=0$. Бұл теңдеуді екі қарапайым: $\cos x=0$ немесе $1-2\sin x=0$ теңдеулерінің жиынтығына мәндес болады. Бұдан $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ немесе $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Тригонометриялық теңдеулерді шешкенде төмендегі тепе-теңдіктерді қолданған пайдалы: $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$ және $\cos 2x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$. Бұл тепе-теңдіктердің дәлелдеуі жеңіл.

11 мысал

Теңдеуді шешіңдер $\sin 2x+\cos 2x=-1-\sin x-\cos x$.

Шешуі. $\sin 2x+1+\cos 2x+\sin x+\cos x=0$. *Бұрыштардың азырақ болғаны жақсы.*

$(\sin x+\cos x)^2+\cos^2 x-\sin^2 x+\sin x+\cos x=0$.

$\cos^2 x-\sin^2 x$ – *бұл квадраттардың айырымы* (!).

$(\sin x+\cos x)^2+(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)+(\sin x+\cos x)=0$.

Көбейткіштерге жікте және басымдықты иелен.

$(\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x+\cos x-\sin x+1)=0$.

$\sin x+\cos x=0$ және $2\cos x+1=0$.

$\sin x+\cos x=0$, $\sin x=-\cos x$, $\operatorname{tg}x=-1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, мұндағы $k\in\mathbb{Z}$.

$2\cos x+1=0$, $\cos x=-\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, мұндағы $k\in\mathbb{Z}$.

Жауабы: $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, мұндағы $k\in\mathbb{Z}$.

Сіздер жетінші сыныпта көбейткіштерге жіктеуде екі мүшеден топтап жіктеу әдісін өттіңдер. Бұл әдіс тригонометриялық теңдеулерді шешкенде де жиі қолданылады.

12 мысал

Теңдеуді шешіңдер $2\cos x+\sin x=1+\sin 2x$.

Шешуі. Теңдеу келесі теңдеуге мәндес:

$2\cos x-1=2\sin x\cos x-\sin x$. Осы кезде теңдеудің екі жағында да $2\cos x-1$-ге қысқарту үлкен қателік болған болар еді! Мәселе мынада, егер $2\cos x-1=0$ болса, онда теңдеудің екі жағы да 0-ге тең, демек, олар өзара тең. Мұндай қысқарту $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ бүтіндей бір түбірлер топтамасының жоғалуына әкелер еді! $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$! Ары қарай:

$2\cos x-1-\sin x(2\cos x-1)=0$, $(2\cos x-1)(1-\sin x)=0$,

$2\cos x-1=0$ немесе $1-\sin x=0$ және т.с.с.

Сонымен ең соңында біз көбейткіштерге жіктеуде қиындық тудыратын, біршама күрделі мысалдарды қарастырамыз.

13 мысал

Теңдеуді шешіңдер $2\cos 3x = 3\sin x + \cos x$.

Шешуі. *Коэффициенттерді «теңестіруге» тырысамыз.*

Теңдеудің екі жағына $2\cos x$-ті қосамыз:

$2\cos 3x + 2\cos x = 3\sin x + 3\cos x$,

$2(\cos 3x + \cos x) = 3(\sin x + \cos x)$,

$2\cdot 2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 3(\sin x + \cos x)$,

$4\cos 2x\cos x = 3(\sin x + \cos x)$,

$4(\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x = 3(\sin x + \cos x)$,

$4(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)\cos x = 3(\sin x + \cos x)$,

$(\cos x + \sin x)(4\cos^2 x - 4\cos x\sin x - 3) = 0$,

$\cos x + \sin x = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$.

$4\cos^2 x - 4\cos x\sin x - 3\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$.

$\cos^2 x - 4\cos x\sin x - 3\sin^2 x = 0$ – бұл біртекті теңдеу. $\cos x \neq 0$ екені анық. Теңдеуді $\cos^2 x$-ке бөліп, $\operatorname{tg} x = t$ алмастыруын енгізу арқылы квадрат теңдеуге әкелеміз: $3t^2 + 4t - 1 = 0$,

$t_1 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}, t_2 = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$.

$x = \operatorname{arctg}\frac{-2\pm\sqrt{7}}{3} + \pi k$, мұндағы $k \in \mathbb{Z}$.

Шешуі: $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{-2\pm\sqrt{7}}{3} + \pi k$, мұндағы $k \in \mathbb{Z}$.

Есептер

1-бөлім

Теңдеулерді шешіңдер (1-13):

1. $\sin^4 x - \sin^2 x = 0$.

2. $\sin 2x = 3\cos x$.

3. $\cos 2x = \cos x - \sin x$.

4. $1 + \sin 2x = \cos x + \sin x$.

5. $\operatorname{tg} x-\sqrt{3}+\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$.

6. $2\cos x+\operatorname{ctg} x=0$.

7. $\sqrt{3}\operatorname{tg} x-4\sin^2 x=0$.

8. $x^2\sin x-x^2\sqrt{3}\cos x-\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$.

9. $\cos^3 x+\sin^3 x=\cos x+\sin x$.

10. $\sin 6x+\sin 3x=2\cos 3x+1$.

11. $\cos^4 \pi x-\sin^4 \pi x=\cos^2 2\pi x$.

12. $3\operatorname{tg}^3 x-10\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x=0$.

13. $\sin\left(2x+\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)+\sin\left(x+\arcsin\frac{1}{2}\right)=2\cos\left(x+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

2-бөлім

Теңдеулерді шешіңдер (14-26):

14. $\cos^4 x-\cos^2 x=0$.

15. $\sin 2x=\sin x$.

16. $\cos 3x=\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{3x}{2}$.

17. $1-\sin 4x=\cos 2x-\sin 2x$.

18. $\operatorname{ctg} x+1+\cos x+\sin x=0$.

19. $\operatorname{tg} x+2\sin x=0$.

20. $4\cos^2 x-\sqrt{2}\operatorname{ctg} x=0$.

21. $x^3\sqrt{3}\sin x-x^3\cos x-\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$.

22. $\cos^3 x-\sin^3 x=\cos x-\sin x$.

23. $\sin\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}=\sin\pi x+1$.

24. $\cos^4 x-\sin^4 x=\sin 4x$.

25. $3\operatorname{ctg}^3 x+4\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x=0$.

26. $\cos^3\left(\left(\arccos\frac{1}{2}\right)x\right)+\sin^3\left(\pi+\frac{\pi x}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi x}{3}\right)$.

27.(2) Бастапқыда автобусқа 23 адам отырды. Жүргізуші асыққандықтан, жолаушылардың төрттен бірінен кем емес саны түсетін болғанда ғана аялдама жасап, оларды түсіріп отырды. Ешкім мініп үлгерген жоқ. Автобус неше рет тоқтауы мүмкін?

28.(2) Өрнекті ықшамдаңдар: $\frac{\left(pq^{-1}+1\right)^2}{pq^{-1}-p^{-1}q}\cdot\frac{p^3q^{-3}-1}{p^2q^{-2}+pq^{-1}+1}:\frac{p^3q^{-3}+1}{pq^{-1}+p^{-1}q-1}$.

Жауаптары *(барлық жауаптарда $n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}$ болып табылады).*

1. $\frac{\pi k}{2}$.

2. $\frac{\pi}{2}+\pi k$.

3. $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $2\pi k$.

4. $-\frac{\pi}{4}+\pi k, 2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k$.

5. $\frac{\pi}{3}+\pi k$, $\pi+2\pi k$.

6. $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$.

7. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, πn.

8. ± 1, $\frac{\pi}{3}+\pi n$.

9. $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{\pi k}{2}$.

10. $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}, \pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$.

11. $\frac{1}{4}+\frac{k}{2}, k$.

12. πk, $\operatorname{arctg}3+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$.

13. $\frac{\pi}{2}+2\pi k, -\pi+2\pi k, \frac{\pi}{3}+2\pi k$.

14 $\frac{\pi k}{2}$.

15 πk, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

16 $\frac{4\pi k}{3}, \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}, -\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}$.

17. $\pi k, \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$.

18. $-\frac{\pi}{4}+\pi k, -\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

19. $\pi k, \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$.

20. $(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi k$.

21. $\frac{\pi}{6}+\pi k$, 1.

22. $\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{4}+\pi k$.

23. $-\frac{1}{2}+2k$, $4k$, $1+4\pi k$.

24. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, (-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$.

25. $\frac{\pi}{2}+\pi k, -\frac{\pi}{4}+\pi k, -\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}+\pi k$.

26. $\frac{3}{2}+6k$, $6k$, $\frac{3}{4}+3k$.

27. 8. **28.** 1.

§3 ҚАРАПАЙЫМ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢСІЗДІКТЕР

3.1 Құрамында $\sin x$ бар теңсіздіктер.

Егер осы тақырыпты жақсылап түсініп алудың, тест және бақылау жұмыстарында уақытыңды босқа келтірудің керегі жоқ деп ойлап, маған нашар бағалар жарай береді десең, онда жаттығуларды орындап және теорияны оқып ӘУРЕ БОЛМАЙ, бірден тарау соңындағы формулалар кестесіне көш.

1 жаттығу

Тригонометриялық шеңберді сызып, Oy өсінің бойында $\frac{1}{2}$-ді белгіле.

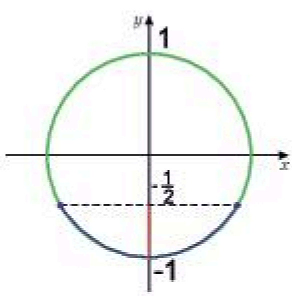
Белгіленген нүкте арқылы шеңбермен қиылысқанға дейін горизонталь түзу жүргіз. Oy өсінің $[-1;1]$ аралығынан $\frac{1}{2}$-ден үлкен болатын сандарды тап. Егер тапсаң, оларды түсті қаламмен немесе қарындашпен боя. Шеңбер бойынан екінші координатасы (ордината) боялған бөлікке түсетін нүктелерді тап. Яғни, бұл нүктелердің ординатасы $\frac{1}{2}$-ден үлкен. Шеңбер бойынан табылған бұл нүктелерді де боя. (Шеңберді дөңгелекпен шатастырма. Шеңбер – бұл дөңгелектің шекарасы). Боядың ба? Міне, керемет. Сен қазір $\sin x > \frac{1}{2}$ теңсіздігін шештің.

Ойлан, қалайша?

1 мысал

Теңсіздікті шешіңдер: $\sin x \le -\frac{1}{2}$.

Талдау. x бұрышының синусы – M_x нүктесінің ординатасы. Oy өсінде $-\frac{1}{2}$ нүктесі арқылы горизонталь түзу жүргіземіз. Біз синусы $-\frac{1}{2}$-ден кіші немесе $-\frac{1}{2}$-ге тең бұрыштарды іздейміз. Олар Oy өсінде $-\frac{1}{2}$-ден жоғары болмауы тиіс. Демек, біз M_x нүктелері шеңбердің төменгі доғасында жататын x бұрыштарын іздейміз.
Енді барлық осындай бұрыштарды аралық түрінде жазу ғана қалды. $\sin x = -\frac{1}{2}$ теңдеуінің шешімі $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, топтамасы болып табылады, мұндағы $k \in \mathbb{Z}$.



1-сурет

$$x_0 = (-1)^{0+1}\frac{\pi}{6} + \pi \cdot 0 = -\frac{\pi}{6},$$

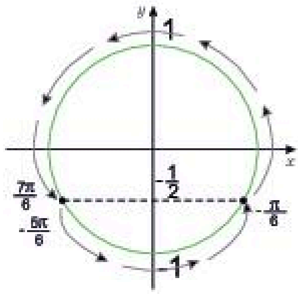
$$x_1 = (-1)^{1+1}\frac{\pi}{6} + \pi \cdot 1 = \frac{7\pi}{6},$$

$$x_{-1} = (-1)^{-1+1}\frac{\pi}{6} + \pi \cdot (-1) = -\frac{5\pi}{6}$$

Осы бұрыштарды шеңберде белгілейміз (ары қарай M_x-тің орнына тек x деп жазамыз). Кез келген доға кіші бұрыштан үлкеніне қарай сағат тіліне қарсы бағытта жазылады (2-сурет). Бізді төменгі доға қызықтырады: $\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$.

Мәндер әрбір толық бір айналым сайын қайталанатын болғандықтан, соңғы аралық түрі $x\in\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi k;-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$ немесе

$-\frac{5\pi}{6}+2\pi k\le x\le-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.



2-сурет

Шешуі: $\sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$.

$x_0=-\frac{\pi}{6}$, $x_{-1}=-\frac{5\pi}{6}$.

Жауабы: $\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi k;-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, мұндағы $k\in\mathbb{Z}$.

Егер біз $\sin x\ge-\frac{1}{2}$ теңсіздігін шешкен болсақ, онда жоғарғы доға қызықтырған болар еді: $\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi k;-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, *мұндағы* $k\in\mathbb{Z}$.

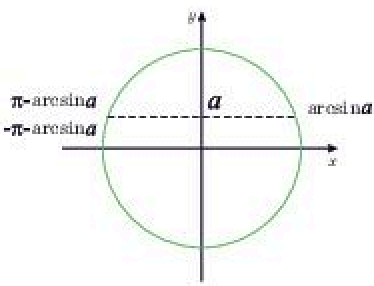
Ортақ жағдайды қарастыра алуымыз үшін барлығы да дайын.

$\sin x$ және a-ны салыстыру қажет делік, мұндағы $a\ne1, a\ne-1$. $\sin x=a$ теңдеуінің шешімі $x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$ топтамасы болады. $n=0$, 1, -1, болған кездегі, x_n бұрышының мәндерін есептейік:

$x_0=\arcsin a$, $x_1=(-1)^1\arcsin a+\pi\cdot1=\pi-\arcsin a$,

$x_{-1}=(-1)^{-1}\arcsin a+\pi(-1)=-\pi-\arcsin a$. $-\pi-\arcsin a<\arcsin a<\pi-\arcsin a$.

Екі доға бар: жоғарғы – $(\arcsin a;\pi-\arcsin a)$ және төменгі $(-\pi-\arcsin a;\arcsin a)$ (3-сурет). Жоғарғы доғадағы нүктелердің ординатасы a-дан үлкен. Төменгі доғадағы нүктелердің ординатасы a-дан кіші. **Сәйкесінше, $\sin x>a$ теңсіздігінің шешімі $x\in(\arcsin a+2\pi k;\pi-\arcsin a+2\pi k)$ аралықтар топтамасы болып табылады; $\sin x<a$ теңсіздігінің шешімі $x\in(-\pi-\arcsin a+2\pi k;\arcsin a+2\pi k)$. аралықтар топтамасы болып табылады.** Осыған ұқсас,

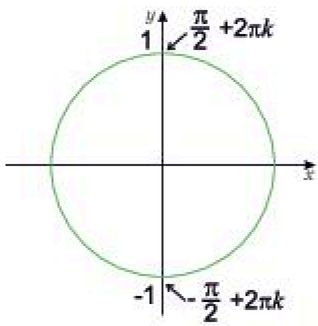


3-сурет

$$\sin x \geq a \Leftrightarrow x \in [\arcsin a + 2\pi k; \pi - \arcsin a + 2\pi k],$$
$$\sin x \leqslant a \Leftrightarrow x \in [-\pi - \arcsin a + 2\pi k; \arcsin a + 2\pi k].$$

$\sin x$-ті 1-мен және −1-мен салыстыру айрықша көңіл бөлуді қажет етеді.

Шеңбердің ең жоғарғы нүктесінен басқаларының барлығының ординатасы 1-ден кіші. Ең жоғарғы нүкте сәйкес келетін барлық бұрыштар $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ формуласымен сипатталады. Демек,



4-сурет

$$\sin x \geq 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$
$$\sin x > 1 \Leftrightarrow x \in \varnothing,$$
$$\sin x < 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$
$$\sin x \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; +\infty).$$

Осы сияқты, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ түріндегі x бұрыштардың синустары ғана (-1)-ге тең (4-сурет). Қалған бұрыштарға ординатасы тек (-1)-ден үлкен болатын шеңбер бойындағы нүктелер сәйкес келеді. Сондықтан,

$$\sin x \geq -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; +\infty),$$
$$\sin x > -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$
$$\sin x < -1 \Leftrightarrow x \in \varnothing,$$
$$\sin x \leq -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \;\; k \in Z.$$

2 мысал

Теңсіздікті шешіңдер: $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Шешуі. Егер $2x - \frac{\pi}{6} = \varphi$ деп белгілесек $\sin\varphi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ теңсіздігін аламыз. Бұл теңсіздіктің шешімі $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ түрінде болады. Қайтадан x айнымалысына көшетін болсақ

$\frac{\pi}{4}+2\pi k\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, x айнымалысының қабылдайтын мәндері – жиынның шеткі нүктелерін анықтау қажет болғандықтан, теңсіздіктің үш бөлігіне де $\frac{\pi}{6}$-ны қосамыз және үш бөлігін де 2-ге бөлеміз:

$$\frac{5\pi}{12}+2\pi k\le 2x\le\frac{11\pi}{12}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{24}+\pi k\le x\le\frac{11\pi}{24}+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

Жауабы: $x\in\left[\frac{5\pi}{24}+\pi k;\frac{11\pi}{24}+\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

Есептер

1-бөлім

Теңсіздіктерді шешіңдер (1-3):

1.(2) а) $\sin x>0$; ә) $\sin 3x\ge 0$; б) $\sin\frac{x}{3}<0$;

в) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\le 0$; г) $\sin\left(\frac{5x}{6}-\frac{5\pi}{6}\right)\le 0$.

2.(2) а) $\sin x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\sin\frac{x}{3}\ge-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\frac{2x}{3}<-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin\left(\frac{5x}{6}+\frac{6\pi}{7}\right)\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.(2) а) $\sin x>\frac{1}{5}$; ә) $\sin 2x\ge-\frac{1}{8}$; б) $\sin\frac{3x}{5}<\frac{6}{7}$;

в) $\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\le-\frac{4}{5}$; г) $\sin\left(\frac{2x}{5}+\frac{8\pi}{5}\right)\le\frac{4}{5}$.

4.(3) Функцияның анықталу облысын табыңдар:

а) $y=\frac{5}{\sqrt{1-2\sin 2x}}$; ә) $y=\sqrt{\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

2-бөлім

Теңсіздіктерді шешіңдер (5-7):

5.(2) а) $\sin x < -\frac{1}{2}$; ә) $\sin 4x \geq \frac{1}{2}$; б) $\sin 5x < -\frac{1}{2}$;

в) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leq \frac{1}{2}$; г) $\sin\left(x - \frac{\pi}{7}\right) \leq -\frac{1}{2}$;

6.(2) а) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; ә) $\sin\frac{x}{4} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin\frac{3x}{5} < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin\left(\frac{6x}{7} + \frac{6\pi}{7}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.(2) Теңсіздікті шешіңдер:

а) $\sin x > 1$; ә) $\sin\frac{1}{4x} \geq -1$; б) $\sin\frac{x}{7} < -1$;

в) $\sin\left(\sqrt{x + \frac{\pi}{17}}\right) \leq 1$; г) $\sin\left(\sqrt{\frac{4\pi}{11} - \frac{4x}{11}}\right) \geq -1$.

8.(3) Функцияның анықталу облысын табыңдар:

а) $y = \sqrt{\sin x + 1}$; ә) $y = \frac{5}{\sqrt{2\sin 3x + \sqrt{3}}}$.

9.(2) Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} xy = 6 \\ yz = 8 \\ zx = 12 \end{cases}$.

Жауаптары: *(барлық жауаптарда $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ болып табылады).*

1. а) $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$; ә) $\left[\frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right]$; б) $(-3\pi + 6\pi k; 6\pi k)$;

в) $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$; г) $\left[-\frac{\pi}{5} + \frac{12\pi k}{5}; \pi + \frac{12\pi k}{5}\right]$.

2. а) $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right)$; ә) $[-\pi + 6\pi k; 4\pi + 6\pi k]$.

б) $\left(-\pi+3\pi k;-\dfrac{\pi}{2}+3\pi k\right)$; в) $\left[-\dfrac{23\pi}{15}+2\pi k;\dfrac{2\pi}{15}+2\pi k\right]$;

г) $\left[-\dfrac{64\pi}{35}+\dfrac{12\pi k}{5};-\dfrac{10\pi}{7}+\dfrac{12\pi k}{5}\right]$.

3. а) $\left(\arcsin\dfrac{1}{5}+2\pi k;\pi-\arcsin\dfrac{1}{5}+2\pi k\right)$;

ә) $\left[-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{8}+\pi k;\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{8}+\pi k\right]$;

б) $\left(-\dfrac{5\pi}{3}-\dfrac{5}{3}\arcsin\dfrac{6}{7}+\dfrac{10\pi k}{3};\dfrac{5}{3}\arcsin\dfrac{6}{7}+\dfrac{10\pi k}{3}\right)$;

в) $\left[-\dfrac{6\pi}{5}+\arcsin\dfrac{4}{5}+2\pi k;-\dfrac{\pi}{5}-\arcsin\dfrac{4}{5}+2\pi k\right]$;

г) $\left[-\dfrac{13\pi}{2}-\dfrac{5}{2}\arcsin\dfrac{4}{5}+5\pi k;-4\pi+\dfrac{5}{2}\arcsin\dfrac{4}{5}+5\pi k\right]$.

4. а) $\left(-\dfrac{7\pi}{12}+\pi k;\dfrac{\pi}{12}+\pi k\right)$; ә) $\left[\dfrac{5\pi}{24}+\pi k;\dfrac{11\pi}{24}+\pi k\right]$.

5. а) $\left(-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k;-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\right)$; ә) $\left[\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi k}{2};\dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{\pi k}{2}\right]$;

б) $\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi k}{5};-\dfrac{\pi}{30}+\dfrac{2\pi k}{5}\right)$; в) $\left[-\dfrac{29\pi}{60}+\pi k;\dfrac{11\pi}{60}+\pi k\right]$;

г) $\left(-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k\right)$.

6. а) $\left(-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k\right)$; ә) $[\pi+8\pi k;3\pi+8\pi k]$;

б) $\left(-\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{10\pi k}{3};-\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{10\pi k}{3}\right)$; в) $\left[-\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k;2\pi k\right]$;

г) $\left[-\dfrac{15\pi}{8}+\dfrac{7\pi k}{3};-\dfrac{31\pi}{24}+\dfrac{7\pi k}{3}\right]$.

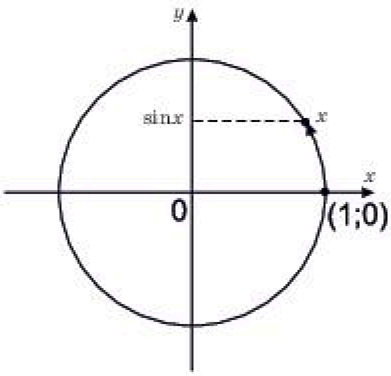
7. а) $x\in\varnothing$; ә) $x\neq 0$; б) $x\in\varnothing$; в) $\left[-\dfrac{\pi}{17};+\infty\right)$; г) $(-\infty;+\infty)$.

8. а) $(-\infty;+\infty)$; ә) $\left(-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2\pi k}{3};\dfrac{4\pi}{9}+\dfrac{2\pi k}{3}\right)$. **9.** $(\pm3;\pm2;\pm4)$.

3.2 Құрамында $\cos x$ бар теңсіздіктер

Енді, құрамында косинусы бар теңсіздіктерді қарастырамыз.

2 жаттығу



5-сурет

$\cos x = \frac{1}{2}$ теңдеуінің шешімі $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ – P_k топтамасы; $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ – Q_k топтамасынан тұрады. Шеңберден P_0, Q_0 және Q_1 нүктелерін белгілейміз. Шеңбердің $\overset{\frown}{Q_0P_0}$ және $\overset{\frown}{P_0Q_1}$ екі доғаны қарастырайық (доғалар бірінші нүктеден екіншісіне қарай сағат тіліне қарсы бағытта белгіленеді). Егер M_x нүктедегі $\overset{\frown}{Q_0P_0}$ доғасына тиісті болса, x бұрышының косинусы мен $\frac{1}{2}$ санын салыстырамыз, қайсысы үлкен екенін анықтаймыз. Егер M_x нүктесі $\overset{\frown}{P_0Q_1}$ доғасына тиісті болса ше? Салыстырыңдар.

$\cos x > a$, $\cos x < a$ түріндегі қатаң және соған сәйкес қатаң емес теңсіздіктерді қарастырамыз. $x = \arccos a + 2\pi k$ және $x = -\arccos a + 2\pi k$ симметриялары $\cos x = a$ теңдеуінің шешімі болып табылады. Шеңбер бойынан келесі бұрыштарды белгілейміз: $\arccos a$, $-\arccos a$ және $2\pi - \arccos a$. $-\arccos a < \arccos a < 2\pi - \arccos a$ екенін байқаймыз. Екі доға бар: оң жағында $(-\arccos a;\ \arccos a)$ және сол жағында $(\arccos a;\ 2\pi - \arccos a)$. Оң жақтағы доға нүктелерінің абсциссасы a-дан үлкен; сол жақтағы доға нүктелерінің абсциссасы a-дан кіші (5-сурет). Демек,

$$\cos x > a \Leftrightarrow x \in (-\arccos a + 2\pi k; \arccos a + 2\pi k);$$

$$\cos x < a \Leftrightarrow x \in (\arccos a + 2\pi k;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi k);$$

$$\cos x \geq a \Leftrightarrow x \in [-\arccos a + 2\pi k;\ \arccos a + 2\pi k];$$

$$\cos x \leq a \Leftrightarrow x \in [\arccos a + 2\pi k;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi k].$$

$\cos x$-ті $+1$ немесе -1-мен салыстырылатын "экстремальды" теңсіздіктер де тригонометриялық дөңгелектің көмегімен шешіледі. «*Дөңгелек – сенің досың*». Мысалы, мынадай теңсіздіктер берілсін:

1) $\cos x > 1$. Шеңберден абсциссасы қатаң түрде 1-ден үлкен болатын нүктелерді іздейміз. Іздейміз, бірақ таппаймыз. Демек, $\cos x > 1 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

2) $\cos x<1$. Шеңберден абсциссасы 1-ден кіші болатын нүктелерді іздейміз. Оң жақтағы ең шеткі нүктеден басқаның бәрі осындай нүктелер екенін түсінеміз. Ең шеткі нүктеге сәйкес келетін бұрыштар $x=2\pi k$ топтамасымен сипатталады. Сондықтан, $x=2\pi k$ -дан басқаның барлығы $\cos x<1$ теңсіздігінің шешімі болады. $\cos x<1 \Leftrightarrow x\neq 2\pi k$.

3) $\cos x\geq 1$. Шеңберден абсциссасы 1-ден үлкен немесе 1-ге тең болатын нүктелерді іздейміз. Абсциссасы 1-ден үлкен нүктелер жоқ, ал 1-ге тең болатын бір ғана нүкте бар. Бұл нүктенің барлық бұрыштары $x=2\pi k$ түрінде болады, $\cos x\geq 1 \Leftrightarrow x=2\pi k$.

3 мысал

Теңсіздікті шешіңдер: $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Шешуі. Айнымалыға алмастыру енгіземіз: $z=3x-\frac{\pi}{4}$.

Теңсіздікті шешеміз: $\cos z<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos z=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ теңдеуінің шешімі: $\left[\begin{array}{l} z=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k \\ z=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k \end{array}\right.$, мұндағы $k\in Z$.

Мына бұрыштарды белгілейміз: $\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}+2\pi=\frac{5\pi}{4}$.

Доғаның сол жағындағы бұрыштар үшін $\cos z<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (6-сурет). Осы доғаның бұрыштарын жазамыз (кіші бұрыштан үлкеніне қарай сағат тіліне қарсы бағытта):

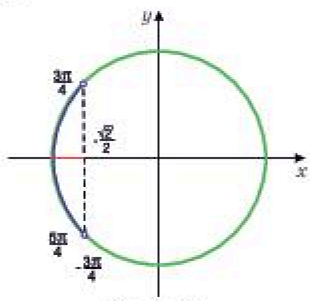
$z\in\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right)$, яғни

$\frac{3\pi}{4}+2\pi k<z<\frac{5\pi}{4}+2\pi k,$

$\frac{3\pi}{4}+2\pi k<3x-\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}+2\pi k,$

$\frac{3\pi}{4}+2\pi k+\frac{\pi}{4}<3x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}+2\pi k+\frac{\pi}{4},$

$\pi+2\pi k<3x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k, \quad \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}<x<\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}.$



6-сурет

Жауабы: $x\in\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3};\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}\right)$, мұндағы $k\in Z$.

Есептер

1-бөлім

Теңсіздіктерді шешіңдер (1-3):

1.(2) а) $\cos x > 0$; ә) $\cos 2x \geq 0$; б) $\cos\frac{x}{2} < 0$;
в) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$; г) $\cos\left(\frac{5x}{4} + \frac{5\pi}{4}\right) \leq 0$.

2. (2) а) $\cos x > \frac{1}{2}$; ә) $2\cos 2x \geq -1$; б) $2\cos 3x - 1 < 0$;
в) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{7}\right) + 1 \leq 0$; г) $2\cos\left(\frac{3x}{7} + \frac{3\pi}{7}\right) \leq 1$.

3.(2) а) $2\cos x \geq \sqrt{3}$; ә) $\cos\frac{x}{2} \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\frac{2x}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \leq 0$; г) $2\cos\left(\frac{2x}{5} + \frac{7\pi}{6}\right) \leq \sqrt{3}$.

2-бөлім

Теңсіздіктерді шешіңдер (4-6):

4.(2) а) $\cos x + 1 > 0$; ә) $\cos 2x \geq 1$; б) $\cos\frac{x}{3 + 2x} \leq 1$;
в) $\cos\left(x + \frac{\pi}{11}\right) \leq -1$; г) $\cos\sqrt{\frac{4x}{5} + \frac{4\pi}{5}} \leq 1$;

5.(2) а) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; ә) $\cos\frac{x}{7} \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $2\cos\frac{3x}{2} < \sqrt{2}$;
в) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) + \sqrt{2} \leq 0$; г) $\sqrt{2} - 2\cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) \geq 0$.

6.(2) а) $\cos x > \frac{1}{7}$; ә) $7\cos 2x \geq -4$; б) $\cos\frac{5x}{8} < \frac{5}{7}$;
в) $10\cos\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) + 1 \leq 0$; г) $10\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$.

7.(2) Теңсіздікті шешіңдер: $\left|2x^2 - 12x + 13\right| \geq 3$.

8.(2) Текшенің толық бетінің ауданы 24 см^2. Текшенің көлемі неге тең? (Куб.см-мен көрсет).

Жауаптары *(барлық жауаптарда $n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}$ болып табылады).*

1. а) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$; ә) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right]$; б) $(\pi+4\pi k;3\pi+4\pi k)$;

в) $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right]$; г) $\left[\frac{7\pi}{5}+\frac{8\pi k}{5};\frac{11\pi}{5}+\frac{8\pi k}{5}\right]$. **2.** а) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$;

ә) $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right]$; б) $\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3};\frac{5\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right)$; в) $\left[\frac{11\pi}{21}+2\pi k;\frac{25\pi}{21}+2\pi k\right]$;

г) $\left[-\frac{2\pi}{9}+\frac{14\pi k}{3};\frac{26\pi}{9}+\frac{14\pi k}{3}\right]$. **3.** а) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$;

ә) $\left[-\frac{5\pi}{3}+4\pi k;\frac{5\pi}{3}+4\pi k\right]$; б) $\left(\frac{\pi}{4}+3\pi k;\frac{11\pi}{4}+3\pi k\right)$; в) $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\pi+2\pi k\right]$;

г) $\left[-\frac{5\pi}{2}+5\pi k;\frac{5\pi}{3}+5\pi k\right]$. **4.** а) $x\neq\pi+2\pi k$; ә) $x=\pi k$; б) $x\neq-\frac{3}{2}$;

в) $x=\frac{10\pi}{11}+2\pi k$; г) $[-\pi;+\infty)$.

5. а) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$;

ә) $\left[-\frac{21\pi}{4}+14\pi k;\frac{21\pi}{4}+14\pi k\right]$;

б) $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi k}{3};\frac{7\pi}{6}+\frac{4\pi k}{3}\right)$;

в) $\left[\frac{11\pi}{20}+2\pi k;\frac{21\pi}{20}+2\pi k\right]$;

г) $\left[-\frac{7\pi}{12}+2\pi k;\frac{11\pi}{12}+2\pi k\right]$.

6. а) $\left(-\arccos\frac{1}{7}+2\pi k;\arccos\frac{1}{7}+2\pi k\right)$;

ә) $\left[-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{7}+\pi k;\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{7}+\pi k\right]$;

б) $\left(\frac{8}{5}\arccos\frac{5}{7}+\frac{16\pi k}{5};\frac{16\pi}{5}-\frac{8}{5}\arccos\frac{5}{7}+\frac{16\pi k}{5}\right)$;

в) $\left[-\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{10}+2\pi k;-\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{10}+2\pi k\right]$;

г) $\left[-\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{10}+2\pi k;\frac{7\pi}{4}-\arccos\frac{1}{10}+2\pi k\right]$.

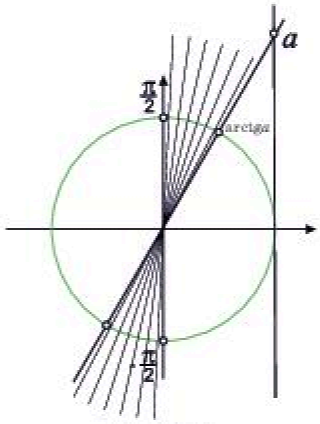
7. $x\in(-\infty;1]\cup[2;4]\cup[5;+\infty)$.

8. 8 см^3.

3.3 Құрамында $\operatorname{tg}x$ және $\operatorname{ctg}x$ бар теңсіздіктер

3 жаттығу

$\operatorname{tg}x \le \sqrt{3}$ теңсіздігін шешейік. Ол үшін тангенстер өсінен $\sqrt{3}$ санын (жуықтап алғанда $\sqrt{3} \approx 1,73$) және $\sqrt{3}$ -тен кіші барлық сандарды «белгілейміз». Шеңбердің центрі мен белгіленген барлық нүктелердің әрқайсысы арқылы бір-бір түзу жүргіздік деп есептейік. Осы түзулердің шеңбермен қиылысу нүктелерінің жиынтығын бояйық. Боялған жиынның $\operatorname{tg}x \le \sqrt{3}$ теңсіздігінің шешімімен не байланыстыратынын анықтаңыз, өз бетіңізбен осы теңсіздіктің шешімін аралық түрінде жазып көріңіз.



7-сурет

$\operatorname{tg}x > a$ **теңсіздігін шешу керек болсын.** Шеңбер және тангенстер өсін саламыз, тангенстер өсінен a нүктесін және соған сәйкес $\operatorname{arctg}a$ бұрышын шеңберден белгілейміз. Тангенсті a-дан артық сандар тангенстер өсінде a санынан жоғары, орналасады (7-сурет); оған сәйкес бұрыштар $\operatorname{arctg}a$-дан $\frac{\pi}{2}$ дейінгі доғасына және оған координаталар басына қатысты симметриялы доғаны «толтырады», сондай-ақ екінші доға бірінші доғаны π бұрышқа бұру арқылы алынатыны көрініп тұр. Сол себепті теңсіздіктің шешімі $x \in \left(\operatorname{arctg}a + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

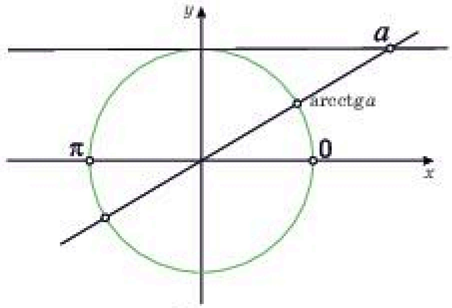
Осы келтірілген талдаулардан $\operatorname{tg}x \ge a$ теңсіздігінің шешімі $x \in \left[\operatorname{arctg}a + \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ аралықтар топтамасы екеніне көз жеткізуге болады.

$\operatorname{tg}x < a$ **теңсіздігін қарастырайық.** $\left(-\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg}a\right)$ доғасынан алынған кез-келген бұрыш және оған координата басына қатысты симметриялы бұрыштың тангенсі a-дан кіші шешімі болады (тағы да 7-сурет). Олай болса, $\operatorname{tg}x < a \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg}a + \pi k\right)$, $\operatorname{tg}x \le a \Leftrightarrow$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg}a + \pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\mathrm{ctg}\,x > a$ теңсіздігі.

$\mathrm{ctg}(x\pm\pi)=\mathrm{ctg}\,x$ қасиеті орындалатындықтан, бастапқыда 0-ден π-ге дейінгі доғадан дербес шешімдерді, одан кейін жалпы шешімдерді табуға мүмкіндік аламыз (8-сурет).

0-ден $\mathrm{arcctg}\,a$-ға дейінгі доғадағы кез келген x бұрышы үшін $\mathrm{ctg}\,x>a$ шарты орындалады. Демек,



8-сурет

$$\mathrm{ctg}\,x > a \Leftrightarrow x \in (0+\pi k; \mathrm{arcctg}\,a+\pi k),\ k\in\mathbb{Z}$$

$\mathrm{arcctg}\,a$-дан π-ге дейінгі доғадағы кез келген бұрыш үшін $\mathrm{ctg}\,x<a$ орындалады. Демек,

$$\mathrm{ctg}\,x<a \Leftrightarrow x\in(\mathrm{arcctg}\,a+\pi k; \pi+\pi k) \Leftrightarrow x\in(\mathrm{arcctg}\,a-\pi+\pi k; \pi k),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Сәйкесінше,

$$\mathrm{ctg}\,x\geq a \Leftrightarrow x\in(\pi k; \mathrm{arcctg}\,a+\pi k],\ k\in\mathbb{Z};$$

$$\mathrm{ctg}\,x\leq a \Leftrightarrow x\in[\mathrm{arcctg}\,a+\pi k; \pi+\pi k) \Leftrightarrow x\in[\mathrm{arcctg}\,a-\pi+\pi k; \pi k),\ k\in\mathbb{Z}.$$

4 мысал

Теңсіздікті шешіңдер: $\mathrm{ctg}\,2x \leqslant 4$.

Шешуі. $2x=z$ алмастыруын қарастырамыз.

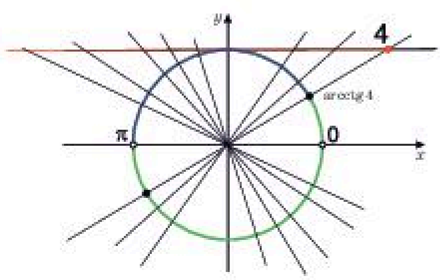
$\mathrm{ctg}\,z\leq 4$ теңсіздігін шешеміз (9-сурет).

$$z\in[\mathrm{arcctg}\,4+\pi k; \pi+\pi k),\ k\in\mathbb{Z};$$

$$\mathrm{arcctg}\,4+\pi k\leq z<\pi+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$$

$$\mathrm{arcctg}\,4+\pi k\leq 2x<\pi+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{arcctg}\,4+\frac{\pi k}{2}\leq x<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$



9-сурет

Жауабы: $x\in\left[\frac{1}{2}\mathrm{arcctg}\,4+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2}+\frac{\pi k}{2}\right)$, мұндағы $k\in\mathbb{Z}$.

Есептер

1-бөлім

Теңсіздіктерді шешіңдер (1–5):

1.(2) а) $\operatorname{tg} x > 0$; ә) $\operatorname{tg} 4x \geq 0$; б) $\operatorname{tg} \frac{x}{4} < 0$;

в) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{7}\right) \leq 0$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{6x}{7} + \frac{6\pi}{7}\right) \leq 0$.

2.(2) а) $\operatorname{ctg} x > -1$; ә) $\operatorname{ctg} 9x \geq 1$; б) $\operatorname{ctg} \frac{2x}{5} < -1$;

в) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \leq 1$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{2x}{11} + \frac{\pi}{8}\right) \leq -1$.

3.(2) а) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$; ә) $\operatorname{tg} 3x - \sqrt{3} \geq 0$; б) $\operatorname{tg} \frac{x}{5} < \sqrt{3}$;

в) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \leq 0$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{7x}{2} + \frac{5\pi}{6}\right) \leq -\sqrt{3}$.

4.(2) а) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$; ә) $\operatorname{ctg} 2x > -\sqrt{3}$; б) $\operatorname{ctg} 6x < \sqrt{3}$;

в) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{9x}{4} - \frac{5\pi}{4}\right) \leq \sqrt{3}$.

5. (2) а) $\operatorname{ctg} x > 121$; ә) $\operatorname{ctg} 200x > -\frac{1}{200}$; б) $700 \operatorname{ctg} \frac{3x}{7} < 3$;

в) $4 \operatorname{ctg}\left(x + \frac{5}{\pi}\right) - 5 \leq 0$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{10x}{3} + \frac{\pi}{5}\right) \leq 1000$.

2-бөлім

Теңсіздіктерді шешіңдер (6–10):

6.(2) а) $\operatorname{ctg} x > 0$; ә) $\operatorname{ctg} 5x \geq 0$; б) $\operatorname{ctg} \frac{x}{5} < 0$;

в) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{9}\right) \leq 0$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{7x}{5} - \frac{7\pi}{5}\right) \leq 0$.

7.(2) а) $\operatorname{tg} x > 1$; ә) $\operatorname{tg} 10x \geq -1$; б) $\operatorname{tg} \frac{x}{8} < -1$;

в) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{4x}{5} + \frac{5\pi}{4}\right) \leq -1$.

8.(2) а) $\operatorname{tg} x > \frac{1}{\sqrt{3}}$; ә) $\operatorname{tg} 2x \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{6} < 1$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{9}\right)+1 \leq 0$; г) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x-\frac{5\pi}{9}\right)-1 \leq 0$.

9.(2) а) $\operatorname{ctg} x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$; ә) $\operatorname{ctg} 3x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{x}{8} < -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{8}{\pi}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\operatorname{ctg}\left(x-\frac{8}{5\pi}\right) \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

10.(2) а) $\operatorname{tg} x > 100$; ә) $\operatorname{tg} 20x > -20$; б) $\operatorname{tg}\frac{5x}{8} < \frac{5}{8}$;

в) $\operatorname{tg}\left(11x+\frac{\pi}{4}\right)+100 \leq 0$; г) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{9\pi}{4}\right) \leq \pi$.

Жауаптары: *(барлық жауаптарда $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ болып табылады).*

1. а) $\left(\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$; ә) $\left[\frac{\pi k}{4}; \frac{\pi}{2}+\frac{\pi k}{4}\right)$; б) $(-2\pi+4\pi k; 4\pi k)$; в) $\left(-\frac{9\pi}{14}+\pi k; -\frac{\pi}{7}+\pi k\right]$;
г) $\left(-\frac{19\pi}{12}+\frac{7\pi k}{6}; -\pi+\frac{7\pi k}{6}\right]$; **2.** а) $\left(\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k\right)$; ә) $\left(\frac{\pi k}{9}; \frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{9}\right]$;
б) $\left(-\frac{5\pi}{8}+\frac{5\pi k}{2}; \frac{5\pi k}{2}\right)$; в) $\left[\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{7\pi}{8}+\pi k\right)$; г) $\left[-\frac{33\pi}{16}+\frac{11\pi k}{2}; -\frac{11\pi}{16}+\frac{11\pi k}{2}\right)$;
3. а) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$; ә) $\left[\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)$; б) $\left(-\frac{5\pi}{2}+5\pi k; \frac{5\pi}{3}+5\pi k\right)$;
в) $\left(-\frac{5\pi}{6}+\pi k; -\frac{2\pi}{3}+\pi k\right]$; г) $\left(-\frac{8\pi}{21}+\frac{2\pi k}{7}; -\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{7}\right]$. **4.** а) $\left(\pi k; \frac{\pi}{6}+\pi k\right)$;
ә) $\left(\frac{\pi k}{2}; \frac{5\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right]$; б) $\left(\frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{6}; \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{6}\right)$; в) $\left[-\frac{\pi}{12}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k\right)$;
г) $\left[\frac{17\pi}{27}+\frac{4\pi k}{9}; \pi+\frac{4\pi k}{9}\right)$. **5.** а) $(\pi k; \operatorname{arcctg} 121+\pi k)$;
ә) $\left[\frac{\pi k}{200}; \frac{\pi}{200}-\frac{1}{200}\operatorname{arcctg}\frac{1}{200}+\frac{\pi k}{200}\right)$; б) $\left(\frac{7}{3}\operatorname{arcctg}\frac{3}{700}+\frac{7\pi k}{3}; \frac{7\pi}{3}+\frac{7\pi k}{3}\right)$;
в) $\left[-\frac{5}{\pi}+\operatorname{arcctg}\frac{5}{4}+\pi k; \frac{\pi^2-5}{\pi}+\pi k\right)$; г) $\left[-\frac{3\pi}{50}+\frac{3}{10}\operatorname{arcctg} 1000+\frac{3\pi k}{10}; \frac{12\pi}{50}+\frac{3\pi k}{10}\right)$.

6. а) $\left(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$; ә) $\left(\frac{\pi k}{5};\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}\right]$; б) $\left(-\frac{5\pi}{2}+5\pi k;5\pi k\right)$; в) $\left[-\frac{7\pi}{18}+\pi k;\frac{\pi}{9}+\pi k\right)$;
г) $\left[\frac{9\pi}{14}+\frac{5\pi k}{7};\pi+\frac{5\pi k}{7}\right)$. **7.** а) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$; ә) $\left[-\frac{\pi}{40}+\frac{\pi k}{10};\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{10}\right)$;
б) $(-4\pi+8\pi k;-2\pi+8\pi k)$; в) $\left(-\frac{3\pi}{4}+\pi k;\pi k\right]$; г) $\left(-\frac{35\pi}{16}+\frac{5\pi k}{4};-\frac{15\pi}{8}+\frac{5\pi k}{4}\right]$.
8. а) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$; ә) $\left[-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)$; б) $(-3\pi+6\pi k;\pi+6\pi k)$;
в) $\left(-\frac{7\pi}{18}+\pi k;\frac{\pi}{18}+\pi k\right]$; г) $\left(\frac{\pi}{18}+\pi k;\frac{13\pi}{18}+\pi k\right]$. **9.** а) $\left(\pi k;\frac{2\pi}{3}+\pi k\right)$;
ә) $\left(\frac{\pi k}{3};\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}\right]$; б) $\left(-\frac{8\pi}{3}+8\pi k;8\pi k\right)$; в) $\left[\frac{\pi^2-24}{3\pi}+\pi k;\frac{\pi^2-8}{\pi}+\pi k\right)$;
г) $\left[\frac{24-5\pi^2}{15\pi}+\pi k;\frac{8}{5\pi}+\pi k\right)$. **10.** а) $\left(\mathrm{arctg}\,100+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$;
ә) $\left[-\frac{1}{20}\mathrm{arctg}\,20+\frac{\pi k}{20};\frac{\pi}{40}+\frac{\pi k}{20}\right)$; б) $\left(-\frac{4\pi}{5}+\frac{8\pi k}{5};\frac{8}{5}\mathrm{arctg}\frac{5}{8}+\frac{8\pi k}{5}\right)$;
в) $\left(-\frac{3\pi}{44}+\frac{\pi k}{11};-\frac{\pi}{44}-\frac{1}{11}\mathrm{arctg}\,100+\frac{\pi k}{11}\right]$; г) $\left(-\frac{11\pi}{4}+\pi k;-\frac{9\pi}{4}+\mathrm{arctg}\,\pi+\pi k\right]$.

3.4 Қарапайым тригонометриялық теңсіздіктер жүйесі

«Егер біз шынымен де бірнәрсе білетін болсақ, ол математиканы оқығанның арқасында».
Пьер Гассенди

Тригонометриялық теңсіздіктер жүйесінің шешімі жүйедегі бірінші теңсіздікті де, екінші теңсіздікті де қанағаттандыратын x бұрыштарының жиыны болады. Төмендегі екі қадамнан тұратын алгоритм арқылы қарапайым тригонометриялық теңсіздіктер жүйесінің шешімін табуға қол жеткізуге болады.

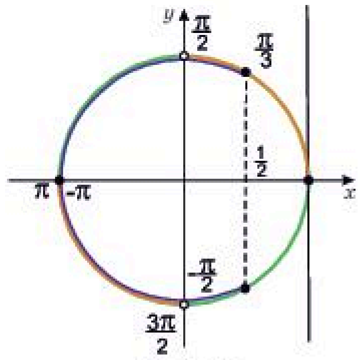
- **1-қадам.** Бірінші теңсіздікті қанағаттандыратын бұрыштардың шеңбердегі доғасын бір түске бояймыз; екінші теңсіздікті қанағаттандыратын бұрыштардың шеңбердегі доғасын басқа түске бояймыз.
- **2-қадам.** Боялған бөлікке екі рет түскен M_x нүктелері теңсіздіктер жүйесінің шешімі болатын x бұрыштарының жиыны болып табылады. Қандай да бір дербес шешімді жазамыз. **Жазған кезде екі рет боялған доғаның бойымен кіші бұрыштан үлкеніне қарай сағат тілінің бағытына қарай қозғаламыз.** Жалпы жауапты жазғанда периодты ескереміз.

Мысал қарастырайық.

5 мысал

Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 0, \\ \cos x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$

Шешуі. Бірінші теңсіздікке қызыл түсті $\left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ доғасы сәйкес келеді; екінші теңсіздікке көк түсті $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$ доғасы сәйкес келеді. Жауапқа екі рет боялған бөлікке сәйкес доғаны жазамыз: $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.



10-сурет

Период 2π екенін ескеріп, жалпы жауапты жазамыз:

$$x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left[\pi + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Бұл жауапты басқаша түрде де жазуға болады:

$$x \in \left[-\pi + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right).$$

Не себепті екенін түсіндіріңдер.

6 мысал

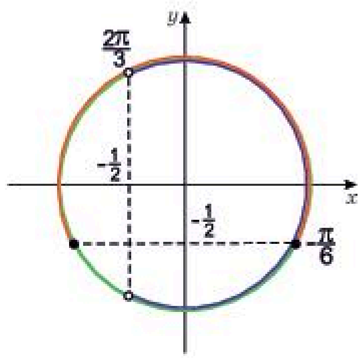
Теңсіздіктер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} \cos x > -\frac{1}{2}, \\ \sin x \geq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Жауабы:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

(11-сурет).

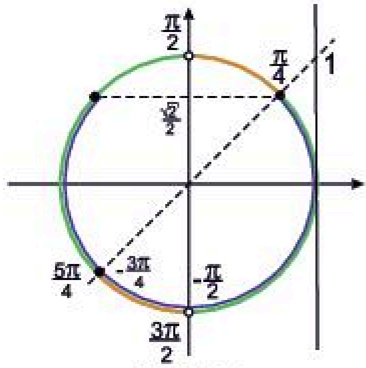


11-сурет

7 мысал

Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \ge 1, \\ \sin x \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$



12-сурет

Жауабы:

$$x \in \left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \cup \left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k\right\},$$

мұндағы $k \in \mathbb{Z}$ (12-сурет).

Осы жауаптың басқаша жазылу түрі:

$$\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k\right\} \cup \left[\frac{5\pi}{4}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right),$$ мұндағы $k \in \mathbb{Z}$.

8 мысал

Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} \operatorname{ctg} x < 1, \\ \cos x < -\sqrt{2}. \end{cases}$

Шешуі. Екінші теңсіздіктің шешімі жоқ, олай болса, екі теңсіздікті бірдей қанағаттандыратын x-тің мәндері табылмайды.

Жауабы: $x \in \varnothing$.

Есептер

1-бөлім

Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер (1-16):

1.(1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \le 0, \\ \cos x \le \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

2.(1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \le 0, \\ \cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

3.(1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \ge 1, \\ \cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

4.(1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \cos x < -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

5.(1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \ge 1, \\ \cos x \ge -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

6.(1) $\begin{cases} \sin x \ge -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

7.(1) $\begin{cases} \sin x \ge -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x \ge \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

8.(1) $\begin{cases} \sin x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

9.(2) $\begin{cases} \cos x \ge \dfrac{1}{2}, \\ \sin x \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

10.(2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}, \\ \cos x \leq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ **11.**(2) $\begin{cases} \cos x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3}. \end{cases}$ **12.**(2) $\begin{cases} \sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{ctg} x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

13.(2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x < \sqrt{3}, \\ \cos x \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ **14.**(2) $\begin{cases} \sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{ctg} x < 1. \end{cases}$ **15.**(2) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}. \end{cases}$

16.(2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 1, \\ \operatorname{ctg} x \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

Функциялардың анықтау облыстарын табыңдар (17–18):

17. (2) а) $y = \sqrt{-2\sin x - \sqrt{3}} - \sqrt{6\cos x - 3}$; ә) $y = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}}} + \dfrac{1}{\sqrt{10\sin x - 5}}$.

18. (3) а) $y = \dfrac{1}{2\sin x + 1} + \sqrt{2\cos x - \sqrt{3}}$; ә) $y = \dfrac{1}{2\operatorname{tg} x - 2} + \sqrt{2\cos x - \sqrt{2}}$.

2-бөлім

Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер (19-36):

19. (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 0, \\ \cos x < -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ **20.** (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 0, \\ \cos x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ **21.** (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 1, \\ \cos x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

22. (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}, \\ \cos x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ **23.** (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \cos x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$ **24.** (1) $\begin{cases} \sin x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x \geq -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

25. (1) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \geq 1, \\ \cos x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ **26.** (1) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \leq 1, \\ \sin x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ **27.** (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 0, \\ \sin x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

28.(1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 1, \\ \sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ **29.**(2) $\begin{cases} \cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$ **30.**(2) $\begin{cases} \cos x \geq \dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}. \end{cases}$

31.(2) $\begin{cases} \sin x \geq \dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}. \end{cases}$ **32.**(2) $\begin{cases} \cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{ctg} x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$ **33.**(2) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \sin x \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

34.(2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 1, \\ \cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ **35.**(2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 1, \\ \operatorname{ctg} x \geq 1. \end{cases}$ **36.**(2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 1, \\ \operatorname{ctg} x \geq 1. \end{cases}$

Функциялардың анықталу облыстарын табыңдар (37–38):

37. (2) а) $y=\sqrt{4\cos x-2\sqrt{3}}-\sqrt{8\sin x+4}$; ә) $y=\dfrac{1+\operatorname{ctg} x}{\sqrt{3\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}}-\dfrac{1}{\sqrt{5\sin x+10}}$.

38. (3) а) $y=\dfrac{1}{2\cos x+3}+\sqrt{2\sin x+\sqrt{3}}$; ә) $y=\dfrac{1}{2\operatorname{ctg} x+3}+\sqrt{2\sin x-\sqrt{2}}$.

39. (2) Ықшамдаңдар: $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\cdot\dfrac{x^2-1}{2}+1$.

40. (3) Азық-түліктің бір түрінің 1 кг үшін және басқа түрінің 10 кг үшін 2000 теңге төленді. Егер маусымдағы бағалардың өзгеруіне байланысты азық-түліктің бірінші түрінің бағасы 15%-ға қымбаттаса, ал екіншісінің бағасы 25%-ға арзандаса, онда дәл осы мөлшердегі азық-түлікке 1820 теңге төленеді. Азық-түліктің әрбір түрінің 1 кг қанша тұрады?

41. (2) Ықшамдаңдар: $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}{2\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

42. (2) Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} x+y^3=2, \\ 2x+x^2+5y^3=8. \end{cases}$

Жауаптары: *(барлық жауаптарда $n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}$ болып табылады).*

1. $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right]\cup\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\pi+2\pi k\right]$. **2.** $x\in\left(-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;2\pi k\right]$.

3. $x\in\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$. **4.** $x\in\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$.

5. $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$.

6. $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right]$.

7. $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$. **8.** $x\in\varnothing$. **9.** $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

10. $\left[\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$; **11.** $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$. **12.** $x\in\varnothing$. **13.** $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$.

14. $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right]$. **15.** $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$. **16.** $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right]$. **17.** а) $x\in\left\{-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right\}$;

ә) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$. **18.** а) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$; ә) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$

19. $\left[\pi+2\pi k;\frac{4\pi}{3}+2\pi k\right)$; **20.** $\left[2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left[\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$.

21. $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$. **22.** $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left[\frac{4\pi}{3}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$.

23. $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$. **24.** $\left\{\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right\}\cup\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$. **25.** $\left(2\pi k;\frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$.

26. $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;2\pi k\right)\cup\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\pi+2\pi k\right)\cup\left[\frac{5\pi}{4}+2\pi k;\frac{4\pi}{3}+2\pi k\right)$.

27. $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$. **28.** $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$. **29.** $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$;

30. $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$. **31.** $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]$.

32. $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ 2\pi k\right]$. **33.** $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$. **34.** $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$;

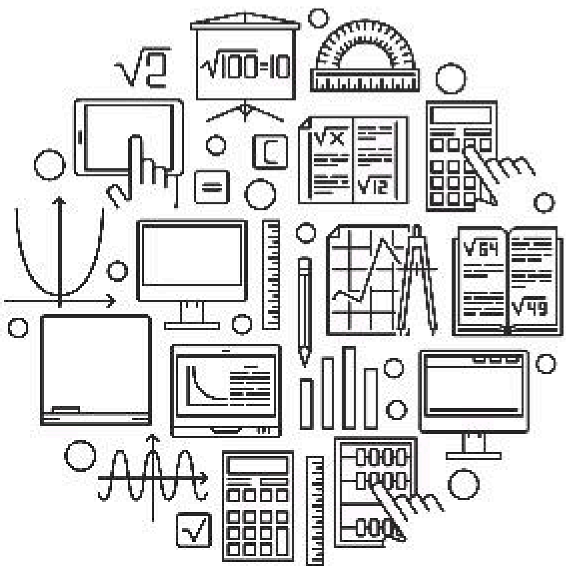
35. $\left(\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right]$. **36.** $x\in\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k\right\}$. **37.** а) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$; ә) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$.

38. а) $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{4\pi}{3}+2\pi k\right]$; ә) $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$. **39.** $\sqrt{1-x^2}$.

40. 800 теңге және 120 теңге. **41.** $\mathrm{tg}\,\alpha$. **42.** (1; 1), (2; 0).

4-тарау

ЫҚТИМАЛДЫҚ



Кіріспе

Математикада ықтималдықтар теориясының өз алдына жеке бағыт ретінде пайда болуы – құмар ойындарда жеңу стратегиясын табуға деген құлшыныстың нәтижесі.

Құмар ойындар – ойын нәтижесі ойыншының дағдысына ғана емес, сонымен қатар кездейсоқ факторға да тәуелді болатын ойындар. Осы мағынада алып қарасақ, шахмат немесе дойбы құмар ойынға жатпайды, ал нарды ойынында әрбір жүріс екі ойын сүйегіндегі түсетін ұпайлар комбинациясына тәуелді болады. Бүгінгі күнде ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика ғылымының барлық саласында және адамның күнделікті іс-әрекетінде жиі қолданылатын аса қуатты құрал болып табылады: ол сақтандыру саласы мен статистикалық физикада, әлеметтану мен биологияда, информатика мен құрылыс т.с.с. салаларда қолданылады.

Кванттық механикада қарапайым бөлшектердің қозғалыс тәртібі ықтималдықтар теориясында арнайы терминдер арқылы сипатталады. Тиімді сақтандыру стратегияларын жасауды қазіргі ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика жетістіктерінсіз іске асыру мүмкін емес. Гендер арқылы берілетін тұқым қуалаушылық белгілерінің пайда болу ықтималдығы, биологтар мен дәрігерлердің басты назарында болып келеді.

Ықтималдықтар теориясының негіздерін түсінген адам, **еш уақытта** құмар ойындармен **әуестенбейтінін** айта кеткен жөн.

§1 НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАР

1.1 Сынақтар, элементар нәтижелер және оқиғалар

Ойын сүйегі – бұл жақтары бірден алтыға дейін нүктелер белгіленген кішкене кубик (текше). Ойын сүйегін ойын алаңының бетіне лақтырғанда жоғарғы жағында түскен нүктелер саны, ойындағы ойын ережесінде басты мәлімет ретінде қарастырылады. Біз жақтары 1-ден 6-ға дейінгі сандармен белгіленген біртекті ойын сүйегінің математикалық моделі ретінде қарастырамыз. Егер сүйекті лақтырғанда жоғарғы бетінде, мәселен 2 саны түссе, онда лақтыруда 2 саны түсті деп айтамыз.

Ойын сүйегін бірнеше рет лақтырғанда, (мысалы $10\,000\,000$ рет) әрбір санның түзу жиілігі мөлшермен бірдей болады деп болжауға болады. Оны әрбір лақтырғанда алты санның жоғарғы бетте түсуіне ешқандай артықшылық берілмейтіндігімен түсіндіруге болады. Бұл жағдайда біз $1, 2, 3, 4, 5, 6$ сандарының түсуі тең мүмкіндікті немесе тең ықтималдықты деп атаймыз.

1-АНЫҚТАМА.

Нәтижесі жайлы алдын-ала айта алмайтын, уақыт бойынша шектеулі (ақырлы) кездейсоқ процесті сынақ немесе эксперимент деп аталады. Сынақтың тең мүмкіндікті (тең ықтималдықты) нәтижелерін элементар нәтиже деп атайды. Ал қандайда бір шартты қанағаттандыратын элементар нәтижелер жиынтығын кездейсоқ оқиға немесе жай ғана оқиға деп атаймыз.

Оқиғаларды латынның бас әріптерімен белгілейді.

1 мысал

Ойын сүйегін лақтыру сынақ болып табылады. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ сандар жиыны барлық элементар нәтижелер жиыны. Осы жағдайда оқиғалар әртүрлі тәсілдермен анықталуы мүмкін. Бірнеше мысалдар келтірейік:

- A : «жұп санның түсуі».
- B : «5 санының түсуі».
- C : «5-тен кем емес санның түсуі».
- D : «1-ден 6-ға дейінгі бүтін сандардың бірінің түсуі».
- E : «7 санының түсуі».

A оқиғасын үш сан: $\{2, 4, 6\}$ сандары қанағаттандырады. (Басқаша түрде: «A оқиғаның нәтижелері $\{2, 4, 6\}$ немесе A оқиғасы $\{2, 4, 6\}$ жиыны» деп те айтуға болады B оқиғасына 5 санының түсуі сәйкес келеді. Ол дегеніміз, B оқиғасы бір ғана элементар нәтижеден тұрады» дегенді білдіреді. С оқиғасы орындалуы үшін 5 немесе 6 саны түсуі қажет. D оқиғасы «1-ден 6-ға дейінгі бүтін сандардың біреуінің түсуі» кез келген лақтыруда орындалады. Ондай оқиғаны ақиқат оқиға деп атайды. E оқиғасы «7 санының түсуі» сүйекті қанша лақтырса да орындалмайды. Ондай оқиғаны мүмкін емес оқиға деп атайды.

2-АНЫҚТАМА.

Сынақтың кез келген нәтижесінде орындалатын оқиға ақиқат оқиға деп аталады.

3-АНЫҚТАМА.

Сынақтың кез келген нәтижесінде орындалмайтын оқиға мүмкін емес оқиға деп аталады.

2 мысал

$[0;1]$ кесіндісінен қандай да бір нүктені таңдау сынағын анықтайық. Осы аралықта таңдалған нүктені таңдауда ешбір нүктеге ерекше артықшылық берілмейді деп есептейміз. Оқиғаның элементар нәтижелері кесіндіге тиісті барлық нүктелер. Осы сынақта анықталатын оқиғаларға мысалдар келтірейік.

- A: оқиғасы: «0,3-тен артпайтын санды таңдау».
- B: оқиғасы: «$(0,4;0,9)$ аралығына тиісті санды таңдау».
- C: «Теріс емес санды таңдау».
- D: «Теріс санды таңдау».

Бұл мысалда C оқиғасы ақиқат оқиға, ал D оқиғасы мүмкін емес оқиға.

3 мысал

Сынақ бір мезгілде үш әртүрлі тиынды лақтыру оқиғасынан тұрсын делік. Егер «елтаңба» жағы түссе, «0» деп, «цифр» жағы түссе «1» деп жазайық.

Мысалы 110 тізбегі, алғашқы екі тиында «елтаңба», үшінші тиында «елтаңба» түскені дегенді білдіреді. Сонда 8 әртүрлі тең мүмкінді элементар нәтижелер алынады: 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111. B оқиғасын төмендегідей етіп анықтайық: Үш тиынның тура екеуінде «елтаңба түсуі». B оқиғасын 001, 010, 100 нәтижелері қанағаттандырады (басқаша түрде – оқиғаға қолайлы жағдай, оқиғаға тиісті деп айтуға болады.

1.2 Үйлесімді және үйлесімсіз оқиғалар. Қарама-қарсы оқиғалар.

4-АНЫҚТАМА.

Бір ғана сынақ нәтижесінде, бір мезетте қатар орындалмайтын екі оқиғаны үйлесімсіз оқиға деп атайды.

1 мысал

Алдыңғы пункттегі 1-мысалдағы A және B оқиғалары үйлесімсіз болып табылады.

2 жаттығу

1.1. пункттегі 2 мысалдағы үйлесімсіз оқиғаларды көрсетіңіз.
Бірнеше оқиғалардың үйлесімсіздігі де осылай анықталады.

5-АНЫҚТАМА.

Бір ғана сынақ нәтижесінде оқиғалардың біреуінің пайда болуы басқасын жоятын болса, ол оқиғалар үйлесімсіз деп аталады.

2 мысал

Қорапта 10 қызыл және 10 көк шар бар. Барлық шарлардың өлшемдері бірдей. Кездейсоқ екі шар суырылады (олар қайта орнына салынбайды). Төмендегідей оқиғалар болуы мүмкін:

- A оқиғасы – екі шар да қызыл.
- B оқиғасы – екі шар да көк.
- C оқиғасы – бір шар көк, екіншісі қызыл.

Осы үш оқиғаның кез келген екеуі бір мезетте орындалмайтынын түсіну қиын емес. Сол себепті осы үш оқиға үйлесімсіз. Сондай-ақ, сынақ нәтижесінде осы үш оқиғаның біреуі міндетті түрде орындалады. Бұл жағдайда A, B, C оқиғалары оқиғалардың толық жиынын құрайды.

6-АНЫҚТАМА.

Сынақ нәтижесінде біреуі міндетті түрде орындалатын, бірақ кез келген басқа екеуі бір мезгілде орындалмайтын бірнеше оқиға оқиғалардың толық жиынын құрайды.

Оқиғалардың толық жиынын қарапайым мысал ретінде қарама-қарсы оқиғаларды алуға болады. Мысалы, сынақ тиынды үш қайтара лақтыру оқиғасынан құралсын. A оқиғасы – тиынды үш рет лақтырғанда «ең болмағанда бір рет елтаңбаның түсуі» болсын. Оған қарама-қарсы оқиға $\overline{A}$ – үш рет тиынды лақтырғанда «елтаңбаның бір де бір рет түспеуі» болады, яғни үш ретінде де «цифрдың түсуі» болады.

7-АНЫҚТАМА.

Толық жиын құрайтын екі үйлесімсіз оқиға қарама-қарсы оқиға деп аталады.

Шын мәнінде кез келген A оқиғасына қарама-қарсы оқиға $\overline{A}$ оқиғасы – ол A оқиғасы орындалмайды дегенді білдіреді. Қарам-қарсы оқиғалардың анықтамасынан, қарама-қарсы оқиғалар – ол сынақ нәтижесінде екеуі бір мезетте орындалмайтын, бірақ екеуінің біреуі міндетті түрде орындалатын оқиғалар жұбы екені шығады.

Сондай-ақ анықтамадан қарама-қарасы оқиғалардың қосындысы ақиқат оқиға екендігі шығады.

8-АНЫҚТАМА.

Бір сынақ нәтижесінде екеуі де бір мезетте орындалатын екі оқиғаны үйлесімді оқиғалар деп атайды.

3 мысал

Қорапта 10 қызыл және 10 көк шар бар. Барлық шарлардың өлшемдері бірдей. Екі шар кездейсоқ алынды (қайтарымсыз) оқиғаларды төмендегідей етіп анықтайық:
- A – бірінші алынған шар қызыл;
- B – екінші алынған шар қызыл:

Егер суырылған екі шардың екеуі де қызыл болса, онда A оқиғасы да, B оқиғасы да орындалатынын түсіну қиын емес. Яғни A оқиғасы да, B оқиғасы да бірін-бірі жоққа шығармайды. A және B оқиғалары үйлесімді.

4 мысал

Сынақ $[1;2]$ кесіндісінен кез келген нүктені нүктені таңдаудан құралады. A оқиғасы $1,7$-ден артпайтын санды таңдау, B оқиғасы – $[1,2;1,5]$ кесіндісінен санды таңдау ретінде анықтайық. Егер A оқиғасы орындалса, ол B оқиғасы да орындалады дегенді білдірмейді, B оқиғасы орындалмауы да мүмкін. Егер B оқиғасы орындалса, онда A оқиғасы міндетті түрде орындалады.

1.3 Оқиғалардың қосындысы және көбейтіндісі

5 мысал

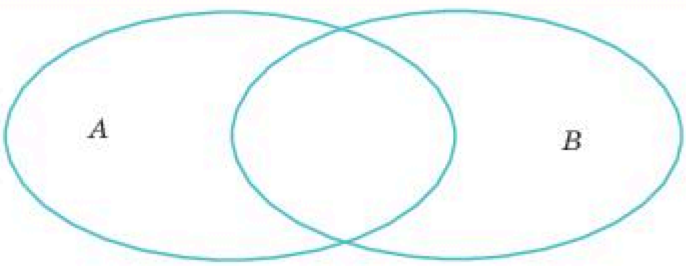
Сынақ ойын сүйегін бір рет лақтырудан тұрсын делік. Төмендегідей оқиғаларды анықтап алайық:

- B оқиғасы – «жұп санның түсуі»;
- D оқиғасы – «$2, 4$ немесе 3 сандарының біреуінің түсуі».

H оқиғасын төмендегідей етіп анықтайық: егер B немесе D оқиғасының ең болмағанда біреуі орындалса, оқиға орындалады сонда және тек қана сонда. Осыны талдап көрейік. B оқиғасы $\{2, 4, 6\}$ элементар нәтижелерден тұрады. D оқиғасы $\{2, 4, 3\}$ жиынынан тұрады. Егер $\{2, 4, 3, 6\}$ сандарының біреуі түссе B немесе D оқиғаларының ең болмағанда біреуі орындалады. Осылайша H оқиғасы $\{2, 4, 3, 6\}$ сандарынан құралады. Бұл B оқиғасы немесе D оқиғасы немесе екі оқиғанында орындалуына әкелетін нәтиже. H оқиғасы B және D оқиғаларының қосындысы деп атайды оны былайша жазады: $H=B+D$.

9-АНЫҚТАМА.

A немесе B берілген оқиғаларының ең болмаса біреуі орындалатындай оқиғадан тұратын оқиғаны олардың $A+B$ қосындысы немесе $A \cup B$ бірігуі деп атайды. $A \cup B$ оқиғасының нәтижесіне A оқиғасы немесе B оқиғалы немесе екеуі де орындалатын оқиғалар кіреді.
Осы пункттің басындағы мысалға қайта оралайық. F оқиғасын төмендегідей етіп анықтайық: оқиға B және D оқиғалары бір мезетте орындалғанда, тек сонда ғана орындалады. В оқиғасы $\{2, 4, 6\}$ элементар нәтижелерінен құралған D оқиғасы $\{2, 4, 3\}$ жиынынан құралған. B және D оқиғаларының екеуі бір мезетте орындалады, егер $\{2,4\}$ сандарының біреуі түссе. Бұл екі оқиғаға да тиісті нәтижелер болып табылады. F оқиғасын осы жағдайда B және D оқиғаларының көбейтіндісі деп атайды.



10-АНЫҚТАМА.

A және B екі оқиғаның екеуі де орындалатындай оқиғалардан құралатын оқиғаны екі оқиғаның көбейтіндісі деп атайды. Белгіленуі AB.

6 мысал

Сынақ ойын сүйегін бір рет лақтыру түрінде берілген. Оқиғаларды төмендегідей етіп анықтайық:
- A оқиғасы – «5 санының түсуі»;
- B оқиғасы – «жұп санның түсуі»;
- D оқиғасы: $\{2, 5, 6\}$

Табыңыздар

а) A және B оқиғаларының қосындысын және көбейтіндісін;
ә) A және D оқиғаларының қосындысын және көбейтіндісін;

Шешуі. а) A және B оқиғаларының қосындысы $\{2, 4, 5, 6\}$ жиыны, A және B оқиғаларының көбейтіндісі бос жиын.
ә) A және оқиғаларының қосындысы D: $\{2, 5, 6\}$ жиыны, A жиыны D жиынымыз ішкі жиыны. Сол себепті A және D оқиғаларының көбейтіндісі A: $\{5\}$.

Оқиғалардың көбейтіндісіне «және» жалғауы сәйкес келеді. Оқиғалардың қосындысына «немесе» жалғауы сәйкес келеді.

7 мысал

Екі мерген өз нысаналарына бір-бірден көздеп оқ атты. A оқиғасы – бірінші мергеннің тигізу оқиғасы, B оқиғасы – екінші мергеннің тигізу оқиғасы болсын.

Шешуі. A және B оқиғаларының қосындысы болатын $A+B$ оқиғасы, ал ең болмағанада бір мергеннің нысанаға дәл тигізуін көрсетеді, басқаша айтқанда немесе бірінші, немесе екінші, немесе екеуі де тигізетінін білдіреді.

Есептер

1-бөлім

1. Ойын сүйегі бір рет лақтырылды. Осы оқиғаға сәйкес келетін біреуі ақиқат, екіншісі мүмкін емес оқиға болатындай 4 мысал келтіріңдер.
2. Сынақ $[-2;2]$ кесіндісінен кез-келген нүкте таңдау түрінде берілген. Осы оқиғаға сәйкес келетін біреуі ақиқат, екіншісі мүмкін емес оқиға болатындай 4 мысал келтіріңдер.
3. Сынақ әр түрлі екі тиынды бір мезетте лақтыру арқылы жүргізілсін. Егер «елтаңба» жағы түссе «0», ал «цифр» жағы түссе «1» деп жазайық.

A оқиғасы – «екі тиында да «елтаңба» түсуі, B оқиғасы – «тек бір жағында «елтаңба» түсуі, C оқиғасы – «бірінші тиында» елтаңба түсуі оқиғалары болсын.
а) A, B және C оқиғаларының нәтижелерін сәйкес нөлдер мен бірліктерден тұратын тізбек түрінде жазыңдар;
ә) A және B оқиғаларымен қоса алғанда барлық төрт оқиғадан тұратын толық оқиғалар жиынын құратындай тағы екі оқиғаны анықтаңдар.

4. Сынақ ойын сүйегін бір рет лақтыру арқылы жүргізілсін. Оқиғаларды төмендегідей етіп анықтайық:
- A оқиғасы – «3 немесе 5 санының түсуі»;
- B оқиғасы – «жұп санның түсуі»;
- C оқиғасы – «тақ санның түсуі».

Төмендегі сұрақтарға жауап беріңдер:
а) осы оқиғалардың арасынан үйлесімді оқиғалар жұбын анықтаңдар;
ә) осы оқиғалардың арасынан үйлесімсіз оқиғалар жұбын анықтаңдар;
б) осы оқиғалардың арасынан қарама-қарсы оқиғалар жұбын анықтаңдар;
в) A оқиғасына қарама-қарсы оқиғаны анықтаңдар;
г) A және B оқиғаларының қосындысын және көбейтіндісін анықтаңдар;
д) A және C оқиғаларының қосындысын және көбейтіндісін анықтаңдар;
е) B және C оқиғаларының қосындысын және көбейтіндісін анықтаңдар.

5. Жазықтықта 10 көк және 7 сарғыш түсті нүктелер белгіленген. Әрбір белгіленген нүктелер бір-бірімен қосылған. Кездейсоқ бір кесінді таңдалады. Оқиғаларды төмендегідей етіп анықтайық:
- A оқиғасы – «кесіндісінің екі ұшы да көк түсті»,
- B оқиғасы – «кесіндісінің бір ұшы көк, екінші ұшы сарғыш түсті»,
- C оқиғасы – «кесіндісінің ең болмағанда бір ұшы көк түсті»,
- D – «кесіндісінің ең болмағанда бір ұшы сарғыш түсті»,
- E оқиғасы – «кесіндісінің екі ұшы да сарғыш түсті».

Онда:
а) осы оқиғалардың арасында қарама-қарсы оқиғалар жұбы бар, осы жұптарды табыңдар;
ә) үшеуінің біреуі қалған екеуінің қосындысына тең болатындай оқиғалар үштігін табыңдар;
б) толық жиын құрайтын оқиғалар үштігін көрсетіңдер;
в) көрсетілген оқиғалардың арасынан D және C оқиғаларының көбейтіндісіне тең болатын оқиғаны табыңдар.

2-бөлім

6. Тиын екі рет лақтырылды. Осы сынақ кезіндегі біреуі ақиқат, екіншісі мүмкін емес болатындай 4 оқиғаға мысал келтіріңдер.

7. Сынақ $[-1;1]$ кесіндісінен кез келген нүкте таңдау арқылы анықталған. Осы сынақ кезіндегі біреуі ақиқат, екіншісі мүмкін емес болатындай 4 оқиғаға мысал келтіріңдер.

8. Сынақ бір мезетте үш әртүрлі тиынды лақтыру түрінде берілген. Егер «елтаңба» жағы түссе «0», ал «цифр» жағы түссе «1» деп жазайық. A оқиғасы – «тиынның барлығының елтаңба» жағымен түсуі, B оқиғасы – «үш тиынның тек біреуінде ғана елтаңба» жағының түсуі, C оқиғасы – «бірінші тиында елтаңбаның» түсуі.
а) A, B, және C оқиғаларының элементар нәтижелеріне сәйкес келетін нөлдер мен бірлерден тұратын тізбекті жазыңдар.
ә) A және B оқиғаларымен қоса алғанда төртеуі толық жиын құрайтын тағы екі оқиғаны анықтаңдар.

9. Сынақ ойын сүйегін бір рет лақтыру түрінде берілген. Оқиғаларды төмендегідей етіп анықтайық:
• A оқиғасы – «4 немесе 5 санның түсуі»;
• B оқиғасы – «тақ санның түсуі»;
• C оқиғасы – $\{1, 2, 3, 6\}$.
Онда:
а) осы оқиғалардың арасынан үйлесімді оқиғалар жұбын анықтаңдар;
ә) осы оқиғалардың арасынан үйлесімсіз оқиғалар жұбын анықтаңдар;
б) осы оқиғалардың арасынан қарама-қарсы оқиғалар жұбын анықтаңдар;
в) B оқиғасына қарама-қарсы оқиғаны анықтаңдар;
г) A және B оқиғаларының қосындысын және көбейтіндісін анықтаңдар;
д) A және C оқиғаларының қосындысын және көбейтіндісін анықтаңдар;
е) B және C оқиғаларының қосындысын және көбейтіндісін анықтаңдар.

10. Бота шеңберден бірнеше ашық жасыл түсті нүктені, ал Ақниет бірнеше күлгін түсті нүктелерді белгіледі. Ақниет әрбір белгіленген нүктені қалғандарымен қосып шықты, ал Бота төбелері берілген нүктелерде болатын үшбұрышты кездейсоқ таңдады. Оқиғалар құрайық:
• A оқиғасы – «үшбұрыштың үш төбесі де ашық жасыл түсті»,
• B оқиғасы – « үшбұрыштың тек бір ғана төбесі ашық жасыл түсті»,
• C оқиғасы – « үшбұрыштың тек екі төбесі ашық жасыл түсті»,
• D оқиғасы – «үшбұрыштың барлық төбесі күлгін түсті»,
• E оқиғасы – «үшбұрыштың ең болмағанда бір төбесі ашық жасыл түсті»,
• F оқиғасы – «үшбұрыштың ең болмағанда бір төбесі күлгін түсті».
Онда:
а) осы оқиғалардың қайсылары қарама-қарсы оқиғалар жұбын құрайтынын анықтаңдар;

ә) осы оқиғалардың төртеуі толық жиын құрайды, осы төрттікті құрайтын оқиғаларды анықтаңдар;
б) B және C оқиғаларының қосындысы, E және F оқиғаларының көбейтіндісіне тең екенін дәлелдеңдер.

11. (2) Артур, Аңсар, Ғани, Төлеген және Арыстан есімді достар билет кезегіне тұрды. Артурдың билетті Аңсарға қарағанда ерте алғаны, бірақ Арыстаннан кейін алғаны белгілі. Ғани мен Арыстан қатар тұрған жоқ, ал Төлеген Артурмен де , Арыстанмен де, Ғанимен де қатар тұрмағаны белгілі. Кімнен кейін кім тұрғанын анықтаңдар.

12. (2) Өрнекті ықшамдаңдар: $(1-\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha)+\sin^2\alpha+3$.

Жауаптары:

4. а) A және C; ә) A және B, B және C; б) B және C; в) $D:\{1, 2, 4, 6\}$; г) $A+B:\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $AB:$ бос жиын; ғ) $C:\{1, 3, 5\}$; д) $E:\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, бос жиын. **5.** а) A және D, C және E; ә) $C=A+B$, $D=B+E$; б) A, B және E; в) A. **9**. а) A және B, B және C; ә) A және C; б) A және C; в) $D:\{2, 4, 6\}$; г) $A+B:\{1, 3, 4, 5\}$, $AB:\{5\}$; ғ) $A+C:\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $AC:$ бос жиын; д) $B+C:\{1, 2, 3, 5, 6\}$, $BC:\{1, 3\}$. **10**. а) A және F, D және E; ә) A, B, C, D. **11**. Арыстан, Артур, Ғани, Аңсар және Төлеген. **12**. 4.

§2 КОМБИНАТОРИКА

2.1 Көбейту және қосу принципі

Бізге ары қарай жұмыс істеу үшін комбинаториканың кейбір фактілері қажет болады. Комбинаторика – қандай да бір шартты қанағаттандыратын объектілерді немесе олардың комбинациясын есептейтін әдістерді қарастыратын математиканың бөлімі. Басқаша айтқанда, комбинаторика: «санамай-ақ санын қалай табады?» деген сұраққа жауап береді. Мысал келтірейік. k бірдей қызыл және m бірдей жасыл шарды бір қатарға қанша тәсілмен орналастыруға болады? k мен m-нің кіші мәндерінде барлық жағдайларды тізіп жазып шығу арқылы жауапты оңай табуға болады.

Мысалы $k=2$ және $m=29$ болғанда барлық тәсілдер саны 10: $kk333$, $k3k33$, $k33k3$, $k333k$, $3kk33$, $3k3k3$, $3k33k$, $33kk3$, $33k3k$, $333kk$.

Бірақ барлық жағдайларды осылайша талдап шығу мүмкін емес. Бірақ қарапайым комбинаторикалық тәсілмен дәл жауапты алуға болады. $k=6$ және $m=29$ болғанда ондай тәсілдер саны 1 623 160. Осылайша осы шарлар жайлы сұрақты төмендегідей оған пара-пар басқа сұрақпен алмастыруға болады екен: берілген 35 санның аралығынан, олардың орналасу ретін ескермей 6 санды неше тәсілмен таңдап алуға болатынын анықтаңдар.

1 жаттығу

Сыныпта 10 ұл және 15 қыз бар. Мектеп үйірмесіне қатысатын бір ұл, бір қыздан тұратын жұпты қанша тәсілмен таңдауға болатынын табыңдар.

Көбейту принципі. Егер бірінші таңдауды n тәсілмен, ал екінші таңдауды m тәсілімен таңдауға болатын болса, онда алдымен бірінші, сонан кейін екінші таңдаудан $m \cdot n$ тәсілмен таңдау жасауға болады.

Көбейтудің жалпыланған принципі. Егер бірінші таңдаудан n_1 тәсіл, екіншісінен n_2 тәсіл т.с. – k-шы таңдаудан n_k тәсілімен таңдауға болатын болса, онда алдымен бірінші, сонан кейін екінші және т.с.с. k-ға дейін таңдаулардан $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ тәсілмен таңдау жасауға болады.

1 мысал

Сыныпта 30 оқушы бар. Сыныптағы оқушылардың арасынан староста, оның көмекшісін және оқу секторын (әрқайсысын бірден) сайлау керек. Сайлауды қанша тәсілмен іске асыруға болатынын табыңдар.

Шешуі. Сайлауды кезекпен іске асырамыз. Старостаны 30 тәсілмен тағайындауға болады. Егер старостаны таңдап болсақ, енді оның көмекшісін 29 тәсілмен тағайындауға болады. Енді староста мен оның көмекшісін таңдап болсақ, оқу секторын таңдаудың 28 тәсілі қалады. Сонымен қорытындысында көбейту принципі бойынша барлығы $30 \cdot 29 \cdot 28$ тәсілмен іске асыруға болатыны шығады.

2 жаттығу

A қаласынан B қаласына 5 түрлі жолмен баруға болады, ал B қаласынан C қаласына 4 жолмен баруға болады. A қаласынан E қаласына 3 жолмен, ал E қаласынан C қаласына баратын 6 жол бар. A қаласынан C қаласына қанша тәсілмен баруға болатынын табыңыз. Бұл жаттығудағы есепті шешу үшін A-дан C-ға апаратын әрі B мен E арқылы өтетін барлық жолдар санын санау керек. Есептің жауабы осы сандардың қосындысы болады. Яғни біз барлық жолдарды екі топқа бөлдік те, оның әрқайсысындағы жолдардың санын таптық. Біз қосу принципін қолдандық.

Қосу принципі. Егер барлық тәсілдер өзара қиылыспайтын q топтарға бөлінетін болса, онды барлық тәсілдердің қосындысы $k_1 + k_2 + ... + k_q$ болады, мұндағы k_i – і-ші топтағы тәсілдер саны.

Қосу принципінің қолданудағы қиындық, негізгінен алғанда тәсілдерді топтарға сәйкес келетіндей етіп дұрыс бөлу болып табылады.

2 мысал

Бауыржанның бірнеше ағаш кубигі бар. Бауыржан кубиктерді бір-бірлеп алып, жақтарын екі түсті, қызыл немесе жасыл етіп бояп шықты. Кубиктердің жақтары әр түрлі боялған болып шығуы үшін Бауыржан ең көп (максимал) дегенде қанша кубикті бояп шығуы тиіс екенін анықтаңдар.

Шешуі: Есептеуді қалай да реттеп, жеңілдету қажет. Қосу принципі бойынша қызыл жақтарды $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ сандары бойынша классификациялап көруге болады. Егер қызыл жақ саны 0 болса, онда қалған жақтардың бәрі жасыл түсті. Бұл бір тәсіл. Егер тек бір жағы ғана қызыл болса, ол тағы бір тәсіл. Егер кубикте екі қызыл жақ болса, онда олар немесе көршілес, немесе қарама-қарсы болуы мүмкін – бұл арадан екі тәсіл шығады. Үш қызыл жақ бір-біріне қатысты тек екі тәсілмен ғана орналаса алады (қандай екенін ойлап көріңіз). Егер қызыл жақ саны 4, 5 немесе 6 болса, онда жасыл түстер саны сәйкес 2, 1 немесе 0. Бұл жағдайларда қызыл түстің орнына жасыл түсті алсақ, сәйкес $2, 1$ және 1 тәсіл аламыз. Сонымен барлығы $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$ бояулары қайталанбайтын боялған кубик алуға болады.

2.2 Комбинаториканың негізгі формулалары

Ары қарай жылжу үшін бізге комбинаториканың кейбір формулаларын еске түсіруге тура келеді.

Қайталанбалы орналастырулар саны.

3 мысал

Мұрат ойын сүйегін 5 рет лақтырудан тұратын экспериментті бірнеше рет қайталап жасады. Әрбір эксперимент нәтижесін бес рет түскен сандардан құралған тізбектер түрінде жазып шықты. Оның әртүрлі қанша тізбек салатынын табыңыз.

Шешуі. Тізбекте бірінші орында 1-ден 6-ға дейінгі сандардың кез-келгені тұрады, ал екінші орында тұратын сан бірінші орында қандай сан тұратынына байланыссыз 1-ден 6-ға дейінгі кез келген сан болады т.с.с. жалғасады. Кез келген бес орында, басқа орында қандай сандар түскеніне тәуелсіз, 1-ден 6-ға дейінгі кез келген сан тұрады. Көбейту принципі бойынша 6^5 деген жауапты аламыз.

Жалпы жағдайда S жиынының n элементінен әртүрлі болуы міндетті емес k элементі таңдау мен оны бір қатарға тізіп орналастыру (бір элемент бірнеше рет қайталануы мүмкін) тәсілдерінің санын **қайталанатын орналастырулар** саны деп атайды және $\overline{A}_n^k = n^k$ формуласымен есептейді.

4 мысал

Сыныпта 30 оқушы бар. Оқушылардың сабақта тыныш отырмайтынын байқаған сынып жетекшісі оларды әр күні басқадай отырғызуды ұйғарды. Кабинетте әрқайсысында 2 орны бар 15 парта орналасқаны белгілі. Крылов мысалындағыдай әділеттікке қол жеткізу үшін, сынып жетекшісіне оқушылардың барлығының орындарын ауыстырып отырғызу үшін неше күн қажет болатынын табыңдар.

Шешуі. Сыныпта 30 орын бар, оның біріншісіне кез келген оқушыны отырғызудың – 30 тәсілі бар. Егер осындай таңдау жасалған болса, екінші орынға қалған 29 оқушының ішінен біреуі таңдалады. Егер екінші оқушыны отырғызып болса, үшінші орынға қалған 28 оқушының ішінен біреуі таңдалады. Осылайша жалғаса береді. Көбейту принципі бойынша барлығы $30\cdot 29\cdot 28\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ тәсілмен орындауға отырғызуга болады. $30\cdot 29\cdot 28\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ санын $30!$ деп белгілейді. ($30!$ өте үлкен сан, жуық шамамен $7267201638690165990035848767 12$ жыл.)

Жалпы жағдайда $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$ натурал 1 ден n-ге дейінгі сандардың көбейтіндісін $n!$ деп белгілейміз. $0!$ санын бірге тең деп алу қабылданған. Талдау арқылы байқағанымыз n әр түрлі элементтердің барлық алмастырулар саны: $n!$. Алмастырулар санын P_n деп белгілейді.

$$P_n = n!$$

Алмастырулар санын n әртүрлі элементтерді әрқайсысы k элементтен тұратын қайталанбайтын орналастырулар санының дербес жағдайы ретінде қарастыруға болады. Ол санды A_n^k деп белгілейді. Басқаша айтқанда A_n^k саны – ол берілген n элементтен k – элементті таңдап, оларды бір қатарға қойып шығу тәсілдерінің санын білдіреді.

Осы параграфтағы 1-мысалдағы есептің жауабы A_{30}^3. 1-мысалдың шешіміне әкелген талдаулар A_n^k санының саннан тұратын $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$, көбейтіндісіне тең екенін көрсетеді.

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Енді өте маңызды болып табылатын n элементтен әрқайсысы k-дан жасалатын терулер санына тоқталамыз.

Ретін есепке алмайтын n элементтен k элементті таңдап алу тәсілдерінің санын C_n^k деп белгілейді.
Оқылуы: «Це n-нен k». Мысалы 12 белгіленген нүктелерден нүктелер жұбын таңдау тәсілдерінің санын C_{12}^2-ден белгілейді. Берілген 35-тен 6 санды таңдау тәсілдерінің санын C_{35}^6 деп белгілейді.

Келесі мысалды 1-мысалмен салыстырыңдар.

5 мысал

Сыныпта 30 адам бар. 3 адамнан тұратын сынып белсенділерін сайлау керек. Неше тәсілмен іске асыруға болатынын анықтаңдар.

Шешуі: 1-мысалдағы есепті басқадай жолмен шығарып отырмыз деп ойлайық. Алдымен үш адамнан тұратын белсенділерді таңдайық, сонан соң олардың арасындағы қызметті бөлісейік. Таңдалған үш адамның арасынан қызметті бөлісу тәсілдерінің саны $P_3 = 3!$. Егер C_{30}^3 арқылы белсенділерді таңдау тәсілдерінің санын белгілесек, көбейту принципі бойынша староста, оның көмекшісін және оқу секторын таңдау тәсілдерінің саны $C_{30}^3 \cdot P_3$ болады. Екінші жағынан біз бұл сұрақтың жауабы 1-сысал бойынша A_{30}^3 екенін білеміз.

$C_{30}^3 \cdot P_3 = A_{30}^3$ теңдігін аламыз. Бұдан $C_{30}^3 = \dfrac{A_{30}^3}{P_3}$ екені шығады.

Егер $A_{30}^3 = \dfrac{30!}{(30-3)!}$ және $P_3 = 3!$, формулаларын орнына қойсақ,

$C_{30}^3 = \dfrac{30!}{3!(30-3)!}$ екені шығады.

Жалпы жағдайда осы сияқты талдаулар жасау арқылы $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ формуласын алуға болады.

6 мысал

k-ның кіші мәндері үшін C_n^k формуланы талдау жасап көрейік

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1,$$

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1))} = n,$$

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{(1\cdot 2)(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-2))} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{(1\cdot 2\cdot 3)(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-3))} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

3 жаттығу

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ формуласын пайдаланып $C_n^n = C_n^0 = 1$, $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$, $C_n^{n-2} = C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ дұрыстығын дәлелдеңдер.

7 мысал

Сыныпта 10 ұл және 15 қыз бар. Құрамында 2 ұл және 2 қыз болатындай етіп команда құру керек. Осыны неше тәсілмен жүзеге асыруға болатынын табыңдар.

Шешуі. Он ұлдан 2 ұлды C_{10}^2 тәсілмен таңдауға болады. Екі қызды 15 қыздың арасынан C_{15}^2 тәсілмен таңдауға болады. Төрт адамнан тұратын команда құру үшін ұлдардың кез келген жұбын және қыздардың кез келген жұбын алуға болады. Көбейту принципі бойынша барлығы $C_{10}^2 \cdot C_{15}^2$ тәсілі бар.

Есептесек: $C_{10}^2 \cdot C_{15}^2 = \dfrac{10 \cdot 9}{2} \cdot \dfrac{15 \cdot 14}{2} = 4725$.

8 мысал

Сыныпта 10 ұл және 15 қыз бар. Құрамында 2 ұл немесе 2 қыз болатындай, екі адамнан тұратын команда жасақтау керек. Қанша тәсілмен команданы жасақтауға болатынын табыңдар.

Шешуі. Он ұлдың ішінен 2 ұлды C_{10}^2 тәсілмен таңдауға болады. Екі қызды 15 қыздың арасынан C_{15}^2 тәсілмен таңдауға болады.

Қосу принципі бойынша $C_{10}^2 + C_{15}^2$ тәсілі болады. Есептесек: $C_{10}^2 + C_{15}^2 = \dfrac{10 \cdot 9}{2} + \dfrac{15 \cdot 14}{2} = 45 + 105 = 150$.

9 мысал

Шеңберден 7 қызыл, 5 көк нүкте белгіленген. Ең болмағанда бір төбесі қызыл болатын қанша үшбұрыш бар екенін табыңдар.

Шешуі. 1-тәсіл. Ең болмағанда бір төбесі қызыл болатын барлық үшбұрыштарды қызыл төбелерінің саны бойынша топтарға бөлеміз: барлық үш төбесі қызылдар, тек екі төбесі қызылдар, тек бір төбесі қызылдар.

Барлық үш төбесі қызыл болатын үшбұрыштар саны жеті қызыл нүктеден үш қызыл нүктені таңдау тәсілдерінің санына тең болады. Ол анықтамаға сәйкес C_7^3-ке тең. Екі төбесі қызыл және 1-і көк болатын үшбұрыштар санын табу үшін 2 қызыл нүктені 7 нүктеден, бір көк нүктені 5 нүктеден таңдап аламыз. Оны $C_7^2 \cdot C_5^1$ тәсілмен іске асыруға болады, ал қызыл нүктелер жұбына көк нүктелердің кез келгенін сәйкестендіруге болады. Осылайша ізделінді түрдегі үшбұрышты алуға болады (көбейту принципі). Бір қызыл, екі көк төбесі бар үшбұрышты да, алдындағы сияқты $C_7^1 \cdot C_5^2$ тәсілмен таңдауға болады. Сонымен барлығы $C_7^3 + C_7^2 \cdot C_5^1 + C_7^1 \cdot C_5^2$ үшбұрышты ең болмағанда бір төбесі қызыл болатындай етіп таңдап алуға болады. Арифметикалық есептеулер жүргізіп, 210 деген жауапты алуға болады.

2 тәсіл. Төбелері белгіленген нүктелерде болатын барлық үшбұрыштарды екі типке бөлуге болады.

Бірінші типке ең болмағанда бір төбесі қызыл болатын үшбұрыштар, ал екінші типке бірде-бір қызыл төбесі жоқтар жатады (үшбұрышта қызыл төбе бар немесе жоқ, үшінші жағдай жоқ. Барлық үшбұрыштар санын және барлық төбелері көк үшбұрыштар санын санау идеясы басшылыққа алынған. Осы сандардың айырмасы ізделінді жауап болады). Төбелері белгіленген нүктелерде болатын үшбұрыштар саны 12 -ден 3 нүктені таңдау, яғни C_{12}^3-ке тең. Төбелері көк нүктелер болатын үшбұрыштар саны C_5^3-ке тең. Ізделінді үшбұрыштар саны: $C_{12}^3 - C_5^3 = 210$.

Есепті шығарудағы 2-тәсіл «толықтыруға көшу» деп аталатын өте пайдалы есеп шығару идеясын көрнекі түрде сипаттап береді. Оны мәнісіне тоқталайық. Бізге қандай да бір A жиыны берілсін және осы жиынның қандай да бір қасиеттерге ие болатын элементтердің санын табу керек болсын. Кей жағдайда жиынның барлық элементтерінің санын тауып және ізделінді қасиетке ие болмайтын элементтердің санын тауып, сол сандардың айырмасын жауап ретінде алуға болады.

Есептер

1 бөлім

1. а) Тек қана тақ цифрлардан тұратын барлығы неше төрт таңбалы сан бар екенін табыңдар.
ә) Тек қана жұп цифрлардан тұратын барлығы неше төрт таңбалы сан бар екенін табыңдар.

2. Дархан, Айгүл және олардың бес досы киноға бір қатардағы 1-ден 7-ге дейінгі орындарда отыратындай орындарға билет сатып алды.
а) Олар өз орындарына қанша тәсілмен отыра алатынын табыңдар.
ә) Дархан 2-ші орында отыратындай етіп, олардың неше тәсілмен отыратынын табыңдар.
б) Дархан 2-ші орында отырмайтын, ал қалғандары өз орындарына отыратындай етіп, неше тәсілмен отыра алатынын табыңдар.
в) Дархан мен Айгүл қатар отыратындай, ал қалғандары өз орындарына отыратындай етіп, неше тәсілмен отыра алатынын табыңдар.

г) Дархан мен Айгүл қатар отырмайтындай, ал қалғандары өз орындарына отыратындай етіп, неше тәсілмен отыра алатынын табыңдар.

3. Бір қатарда 15 орындық тұр.

(1) а) Олардың ішінен 4-н неше тәсілмен таңдауға болатынын табыңдар;
(1) ә) Олардың ішінен 11-н неше тәсілмен таңдауға болатынын табыңдар;

(1) б) Төрт қызды 15 орындыққа қанша тәсілмен отырғызуға болатынын табыңдар.

4. Сыныпта 15 ұл бар және таңертең олар бір-бірімен қол алысып амандасады. Барлық қол алысулар саны қанша екенін табыңдар.

5. Жазықтықта 5 жасыл және 8 көкшіл түсті нүктелер белгіленген. Әрбір нүкте өзара кесінділермен қосылған.

а) Екі ұшы да көкшіл түсті неше кесінді бар екенін табыңдар.

ә) Екі ұшы да жасыл түсті неше кесінді бар екенін табыңдар.

б) Қанша кесіндісінің ұштарының түсі әртүрлі болатынын табыңдар.

6. Сыныпта 12 ұл және 12 қыз бар. Сыныптың ішінен 3 ұлдан және 2 қыздан тұратын команданы қанша тәсілмен жасақтауға болатынын табыңдар.

7. Бірдей 3 ақ және бірдей 4 қызыл шар бар.

а) Оларды бір қатарға қанша тәсілмен орналастыруға болатынын табыңдар.

ә) Бірінші орында ақ шар болатындай етіп оларды бір қатарға қанша тәсілмен орналастыруға болатынын табыңдар.

8. Шеңберде 6 қызыл және 9 көк түсті нүктелер белгіленген.

а) Тек бір ғана төбесі қызыл болатын неше үшбұрыш бар екенін анықтаңдар.

ә) Тек екі төбесі көк түсті болатын неше үшбұрыш бар екенін анықтаңдар.

9. (3) Жүйе әрқайсысы бір-біріне тәуелді, жанатын немесе жанбайтын сегіз нөмірленген шамдардан тұрады A: №1 шам жанып тұр; B: №7 және №8 шамдардың екеуі де сөндірулі тұр. Жүйе қандай күйде екенін анықтаңдар, егер;
а) A шарты орындалмаса;
ә) B шарты орындалса;
б) B шарты орындалмаса;
в) A және B шаршының екеуі де орындалмаса;
г) Екі шарттың ең болмағанда біреуі орындалмаса;
д) Екі шарттың екеуі де орындалмаса;
е) Екі шартты ең болмағанда біреуі орындалмаса.

2-бөлім

10. Он бес кітап бар олардың арасынан алғашқы 3 кітапты таңдап алып және оларды сөреге кезекпен қойып шығудың қанша тәсілі бар екенін табыңдар.

11. а) Тек қана $1, 4, 7$ цифрларынан құралатын неше бес таңбалы сан бар екенін табыңдар.

ә) Барлық бес таңбалы сандар қанша екенін табыңдар.

12. Қанат және оның алты досы киноға бір қатардағы 1-ден 7-ге дейінгі орындарға билет сатып алды.
а) Қанат 1-ші немесе 7-ші орында да отырмайтындай етіп, олар орындарға қанша тәсілмен отыра алатынын табыңдар.
ә) Қанат 1-ші орында да, 7-ші орында да отырмайтындай етіп, орындарға қанша тәсілдермен отыра алатынын табыңдар.

13. Шахмат турниріне 10 шахматшы қатысты және олардың әрқайсысы басқаларымен тек бір партиядан ойнап шықты. Барлығы қанша партия ойналғанын табыңдар.

14. Жазықтықта 15 жасыл және 18 көгілдір түсті нүктелер белгіленген. Әрбір нүкте өзара кесінділермен қосылған.
а) Екі ұшы да көгілдір түсті қанша кесінді бар екенін табыңдар.
ә) Екі ұшы да жасыл түсті қанша кесінді бар екенін табыңдар.
б) Ұштарының түстері әртүрлі болатын кесінділер саны қанша екенін табыңдар.

15. Дүкенде балмұздақтың 7 түрі және тоқаштың 10 түрі бар. Үш түрлі балмұздақ және 3 тоқаш кіретіндей етіп, қанша тәсілмен топтама жасауға болатынын табыңдар.

16. Бірдей 3 ақ шар және бірдей 4 қызыл шар бар. Осы шарларды үшінші орында ақ шар тұратындай етіп, бір қатарға қанша тәсілмен орналастыруға болатынын табыңдар.

17. Шеңберде 6 қызыл және 9 көк нүкте белгіленген.
а) Төбелері осы белгіленген нүктелерде болатын неше үшбұрыш бар екенін табыңдар.
ә) Тек бір төбесі көк болатындай неше үшбұрыш бар екенін табыңдар.
б) Ең болмағанда екі төбесі көк болатындай неше үшбұрыш бар екенін табыңдар.

18. (3) Сынақ ойын сүйегін 3 қайтара лақтырудан тұрады. Әрбір лақтырған сайын түскен сандар жазылып отырады. Осылайша әр сынақ нәтижесінен құралған үш саннан тұратын тізбек алынды.
а) Барлық алынатын мүмкін тізбектер санын анықтаңдар.
Тізбектің алғашқы үш саны да 1 болса, бұл шартты A деп алайық. Соңғы үш сан 5-ке тең немесе 6-ға тең болса, бұл шартты B деп алайық.
Тізбектің жалпы саны табыңдар, егер:
ә) A шарты орындалмайтын болса;
б) B шарты орындалатын болса;
в) B шарты орындалмайтын болса;
г) A және B шарттарының екеуі де орындалатын болса;
д) Екі шарттың ең болмағанда біреуі орындалмаса;
е) Шарттардың ешқайсысы орындалмаса;
ж) Шарттардың ең болмағанда біреуі орындалады;

19. A және B – C-ның балалары. A-ның шешесі C, A – C-ның ұлы, B – C-ның қызы емес. A мен B-ның бір-біріне қандай жақындығы бар екенін анықтаңдар.

20. Мен бір стақан кофенің жартысын ішіп алып, орнына сонша сүт құйдым. Сосын сүті бар кофенің үштен бірін тағы ішіп, орнына сонша сүт құйдым. Соңында сүті бар кофенің алтыдан бір бөлігін іштім де, тағы сонша сүт құйдым. Ең аяғында түк қалдырмай ішіп қойдым. Қорытындысында мен кофені көп іштім бе, әлде сүтті көп іштім бе, соны анықтаңдар.

Жауаптары:

1. а) 625; ә) 500. **2**. а) $7!$; ә) $6!$; б) $6\cdot 6!$; в) $2\cdot 6!$; г) $5\cdot 6!$. **3**. а) C_{15}^4; ә) $C_{15}^{11}=C_{15}^4$; б) $A_{15}^4=12\cdot 13\cdot 14\cdot 15$. **4**. C_{15}^2. **5**. а) C_8^2; ә) C_5^2; б) 40. **6**. $C_{12}^3\cdot C_{12}^2$. **7**. а) 35; ә) 15. **8**. а) $6\cdot C_9^2$; ә) $6\cdot C_9^2$. **9.** а) 2^7; ә) 2^6; б) 2^8-2^6; в) 2^5; г) Екі жағдай ғана болуы мүмкін: не екі шартта та орындалады, не кем дегенде біреуі орындалмайды. Алдыңғы пунктың жауабын ескере отырып, келесі жауапты аламыз: 2^8-2^5. ғ) $3\cdot 2^5$; д) $7\cdot 2^5$. **10**. $15\cdot 14\cdot 13$. **11**. а) 3^5; ә) 9000. **12**. а) $2\cdot 6!$; ә) $5\cdot 6!$. **13**. 45. **14**. а) C_{18}^2; ә) C_{15}^2; б) $15\cdot 18$. **15**. $C_7^3\cdot C_{10}^3$. **16**. 15. **17**. а) C_{15}^3; ә) $9\cdot C_6^2$; б) $C_9^3\cdot C_6^0+C_9^2\cdot C_6^1$. **18.** а) 6^3; ә) 6^3-6^2; б) $2\cdot 6^2$; в) $6^3-2\cdot 6^2$; г) 12; ғ) 6^3-12; д) 20; е) 6^3-20. **19.** Ағайындылар. **20**. Тең.

§3 ЫҚТИМАЛДЫЛЫҚТЫҢ КЛАССИКАЛЫҚ АНЫҚТАМАСЫ

Тағы да классикалық мысал – ойын сүйегіне назар аударайық. Жоғары болып түсетіндей оның ешбір жағының ерекше артықшылығы жоқ. Сондықтан сүйекті өте көп лақтырсақ (мысалы 6000000000 рет), оның әрбір 1-ден 6-ға дейінгі саны бірдей шамада (шамамен 1000000000 рет) түседі. Бұл дегеніміз, әрбір жағы орташа алғанда әрбір 6 рет лақтырған сайын түсіп отырады. Енді әйтеуір бір себеппен бізге 2 санының түскені керек болсын. 2 санының түсу мүмкіндігі 6 мүмкіндіктен 1 мүмкіндік екені былай да түсінікті. Математиктер басқадай айтады: 2 санының түсу **ықтималдығы** $\frac{1}{6}$.

Енді басқа жағдайды қарастырайық: жеңіс үшін келесі лақтыруда 5-тен кем емес сан түсу керек болсын. Бұл дегеніміз, 5 немесе 6 саны жеңіс қуанышын сыйлайды, ал басқалары жеңіліске ұшыратады деген сөз. Яғни 6-дан 2 жеңіс мүмкіндігі, 6–дан 4 жеңіліс мүмкіндігі бар. Әрбір лақтыруда 5-тен кем емес сан түсу ықтималдылығы $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$-ге тең, ал 5-тен кем сан түсу ықтималдылығы $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$-ге тең. Сіздер 1, 2, 3, 4, 5, 6 сандарының түсуі берілген сынақтағы элементар нәтижелер, ал 5-тен кем емес сан түсу – кездейсоқ оқиғалар деп аталатындығын білесіздер. Ықтималдылық теориясында оқиғаның ықтималдылығын P әрпімен белгілейді. Мысалы $P(A)=\frac{1}{6}$ деген жазу A оқиғасының ықтималдылығы $\frac{1}{6}$-ге тең деген сөз.

АНЫҚТАМА.

Әйтеуір бір сынақ q тең ықтималды нәтижелер берсін делік және олардың ішінде p нәтижесі A оқиғасына апарсын. Сонда A оқиғасының $P(A)$ ықтималдылығы $\frac{p}{q}$ қатынасына тең.

Осы анықтамадан оқиғаның ықтималдылығын есептеу алгоритмі шығады.

1. Алдымен q – тең ықтималды өзара бірін бірі жоққа шығаратын нәтижелердің жалпы санын есептейміз.
2. A оқиғасының p – нәтижелер санын есептейміз.
3. A оқиғасының $P(A)$ ықтималдылығын $P(A)=\frac{p}{q}$ формуласымен табамыз.

1 мысал

Сынақ бір мезетте 3 әртүрлі тиындардың лақтырылуынан тұрсын делік. Сол 3 лақтырылудың екеуіндегі цифр түсу ықтималдылығы неге тең?

Шешуі. «0» деп «елтаңба» түскенін, ал «1» деп «цифр» түскенін жазайық. Сонда 110 жазуы алғашқы 2 тиында «цифр», ал 3-нде «елтаңба түскендігін көрсетеді». Сонда 8 тең мүмкіндікті нәтижелер бар: 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111. Соның тек үшеуінде ғана дәл екі нөлі бар: 001, 010, 100. Демек, 8 мүмкіндіктің 3-інде есеп шартындағы қажетті B оқиғасы-«3 лақтырылудың екеуіндегі цифр түсу» оқиғасы жүзеге асады. Мұндай оқиғаның $P(B)$ ықтималдылығы $\frac{3}{8}$ санына тең.

Берілген анықтама мен келтірілген алгоритмді пайдалана отырып, өз беттеріңмен төмендегі жаттығуларды орындап көріңдер.

1 жаттығу

Іші көрінбейтін дорбада формалары бірдей 225 қызыл және 625 көк шариктер бар. Алғашқы таңдалған шариктің көк болу ықтималдылығы қандай?

2 жаттығу

Қорапта 1–*ден* 30-*ға дейінгі натурал сандар жазылған пішіндері бірдей* 30 *шар бар Кез келген* 2 *шардағы сандар әртүрлі*. Төмендегі оқиғалардың ықтималдылықтарын табыңдар:

а) алғашқы таңдалған шар нөмірінің жұп болуы;
ә) алғашқы таңдалған шар нөмірінің жай сан болуы.

3 жаттығу

«Аңғал тұтынушы». Бір елде 20 қала қала бар және әр қалада бір-бірден «Зерде» дүкендері бар болсын. «Зерде» дүкендер желісі 1 желтоқсаннан 31 қаңтарға дейінгі аралығында лотерея берілетін жаңажылдық акция жариялады, әрбір сатылымға 20 автокөліктің бірі ойнатылатын болады. Ахмет 1 желтоқсаннан 31 қаңтарға дейін күн сайын 1 сатылым жасап отыруды шешті. Егерде күн сайын орташа есеппен 1000 сатылым жасалса, онда оның автокөлік ұтып алу мүмкіндігі қандай?

2 мысал

«Керемет нәтиже». Ғазиз, Мадияр және Бибігүл мынандай ойын ойнайды. Ғазиз, ойын төрешісі болып, тиынды көп рет лақтырады. Ол «елтаңба» түскен сайын «0» санын, ал «цифр түскен сайын «1» санын жазып отырады. Барлық таңбалар бір қатарға жазылады. Мадиярдың тізбегі деп жеті нөл қатар түскен «0000000» жазуы, ал Бибігүлдің тізбегі деп 4 нөл және 3 бірлік тек қана «0101010» тәртібінде түскен жазу аталады. Ғазиздың жазбасында қайсысының жазуы бірінші болып пайда болады, сол жеңімпаз болады. Қайсысының жеңіске жету мүмкіндігі көп екенін табыңдар.

Талқылау. Сынақтың мәні неде? Бибігүл де, Мадияр да ойын барысында Ғазиздің әрбір лақтыруынан кейін өз тізбектерін Ғазиздің жазбасындағы соңғы 7 **таңбамен** салыстырып отырады. Сондықтан әрбір сынақ деп тиынның 7 рет лақтырылу топтамасын айтуға болады: 1-сынақ нәтижесі жазбадағы 1-ден 7-ге дейінгі жазу, 2-сынақ нәтижесі жазбадағы 2-ден 8-ге дейінгі жазу, және солай жалғаса береді. Элементар нәтижелердің санын есептеу қалды. Мадиярдың жеңісі тек 1 элементар нәтижемен анықталады, сол сияқты Бибігүлдің жеңісі де сол 1 элементар нәтижемен анықталады.

Шешуі. 1 сынақ деп тиынның 7 рет лақтырылу топтамасын айтуға болады. Яғни, 2^7 элементар нәтиже бар, басқаша айтсақ 7 таңбадан тұратын 2^7 түрлі 0 мен 1-дің тізбектерін жазуға болады. Бибігүлдің тізбегі 7 таңбадан тұратын 2^7 түрлі тізбектердің 1-уі ғана, Мадиярдікі де дәл сондай, 7 таңбадан тұратын 2^7 түрлі тізбектердің 1-уі. Демек, олардың жеңіске жету мүмкіндігі бірдей.

3 мысал

«Қатал Аяз-Ата». Жаңа жылдың алдында Аяз-Ата апалы-сіңлілі қыздар Айтолқын мен Ақботаға қонаққа келгенде, оның қабында 12 «Айгөлек» қуыршағы мен 8 су тапаншасы қалыпты. Аяз-Ата кез келген ойыншыққа бала мәз болады деп ойлайтындықтан,

қарамастан кез келген 20 ойыншықтың қолға ілінген екеуін алып қыздарға сыйлай салды. Егер қыздар қаруды жек көрсе, онда олардың сыйлыққа мәз болу ықтималдылығы қандай екенін табыңыз.

Талқылау. Сынақ неден тұрады? Сынақ 12 қуыршақ пен 8 тапаншадан тұратын 20 нәрседен кездейсоқ 2 таңдау жасаудан тұрады. Элементар нәтижелер жинағы деп нені түсінеміз? Элементар нәтижелер жинағы деп таңдалуы мүмкін жұптар жиынын айтамыз. Олардың саны қаншама? 20-дан 2 элементті қанша әдіспен таңдауға болады? Элементтер тәртібі рөл атқара ма? Қыздарға қандай қуыршақ тигені бәрібір, яғни таңдау тәртібінің рөлі жоқ: егер Аяз-Ата қос қуыршақ алып шықса, олар риза, басқа тәртіпте олардың бірі, әйтпесе екеуі де риза болмайды. 20–дан 2 элементті C_{20}^2 әдіспен таңдауға болады. Осы шама ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша тең мүмкіндікті нәтиженің саны (q). Ал қуыршақтар жұбы қайдан таңдалады? Әрине, қаптағы 12 қуыршақтың ішінен. Қыздарға мұндай жұптың кез келгені бәрібір. 12–қуыршақтан 2 қуыршақты неше түрлі әдіспен таңдауға болады?

Шешуі: Сынақ 20–дан 2 нәрсені кездейсоқ таңдаудан тұрады. Демек, берілген сынақтың $q=C_{20}^2$ түрлі тең мүмкіндікті нәтижесі бар. A оқиғасы екі нәрсенің де қуыршақ болуы. Қуыршақ саны 12 болғандықтан, A оқиғасын шығаратын p нәтижелер саны C_{12}^2 шамасына тең. Ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша $P(A)=\frac{p}{q}=\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}=\frac{12\cdot 11}{2}\cdot\frac{2}{20\cdot 19}=\frac{33}{95}$.

Жауабы: $\frac{33}{95}$.

4 мысал

«Таңдау құқығынсыз». Аяз-Ата Айтолқын мен Ақботаға сыйлық бергеннен кейін, Аружан мен оның інісі Әлиханға барады. Қабынан қолына бірінші іліккен сыйлықты Аружанға, сосын сол әдіспен екінші сыйлықты Әлиханға береді. Кетпес бұрын, балаларға егер өзінен алынған ойыншықтарымен олар ойнамаса, онда қайтып келіп, сыйлаған ойыншықтарын алып кететінін мәлімдеді. Егер Аружан қуыршақты, ал Әлихан тапаншамен ойнағанды жақсы көрсе, балалардың Жаңа жылды мәз болып қарсы алу ықтималдығы қандай?

Талқылау. Айтолқын мен Ақбота риза болғаннан кейін Аяз-Ата қабында 10 «Айгөлек» қуыршағы мен 8 су тапаншасы қалатыны түсінікті. Сонда сынақтың ендігі мәні неде? Түсініксіздеу. Ал оқиғаның мәні не? Балалар мәз болу үшін бірінші қуыршақ, ал екінші тапанша таңдалу керек. Есептің идеясы – балаларға берілуі мүмкін барлық ойыншықтар жұбын қарастыру керек. Қай тәртіпте таңдау жүретіні керек пе? Әрине керек, мысалы 1-ші тапанша, 2-қуыршаққа балалар, әрине келіспейді (олардың өзара ойыншық ауыстыруына Аяз-Ата келіспейді, есеп шарты бойынша, онда ол ойыншықтарын тартып алады). Сондықтан элементар нәтижелер жиыны деп 18 нәрседен таңдауға болатын тәртіптелген жұптардың жиынын айтуға болады. Жұптар тәртіптелген деп, мысалы, $(3,11)$ және $(11,3)$ жұптары әртүрлі болған жағдайды айтуға болады. Барлық 10 қуыршақты 1-ден 10-ға дейінгі сандармен, ал барлық 8 тапаншаны 11-ден 18-ге дейінгі сандармен нөмірлейік. Бізге қажетті жұптар, бірінші саны 1-ден 10-ға дейін, ал екінші саны 11-ден 18-ге дейін болатын жұптар.

Шешуі: Барлық 10 қуыршақты 1-ден 10-ға дейінгі сандармен, ал барлық 8 тапаншаны 11-ден 18-ге дейінгі сандармен нөмірлейік. Бұл жағдайда сынақ деп 1-ден 18-ге дейінгі натурал сандар ішінен тәртіптелген $(x;y)$, $x \neq y$ сандар жұбын таңдауды айтамыз. Мұндай сынақтың элементар нәтижелерінің саны $q = A_{18}^2$. Бізге қажеттісі жұптағы бірінші сан 1-ден 10-ға дейінгі кез келген натурал сан болуы, ал екінші сан 11-ден 18-ге дейінгі кез келген натурал сан болуы. Осындай жұптың таңдалуын A оқиғасы деп атаймыз. Осындай жұптың санын табамыз. Ең алдымен 1-ден 10-ға дейінгі кез келген натурал санды таңдап, оны 1-ші орынға қоямыз, сосын 2-орынға 11-ден 18-ге дейінгі кез келген натурал сан таңдап, қоямыз. A оқиғасын шығаратын нәтижелердің жалпы саны $p = 10 \cdot 8$. Ықтималдық анықтамасына сәйкес $P(A) = \frac{p}{q} = \frac{10 \cdot 8}{A_{18}^2} = \frac{10 \cdot 8}{18 \cdot 17} = \frac{40}{153}$.

Жауабы: $\frac{40}{153}$.

5 мысал

Шеңбер бойынан 7 қызыл және 5 көк нүктелер белгіленген. Сол нүктелерде төбелері болатын үшбұрыштарды қарастырайық. Кез келген таңдалған үшбұрыштың тым болмағанда бір қызыл төбесі болуының ықтималдығын қандай?

Шешуі. Алдыңғы параграфтағы 9-есепке оралып, оның шешімін еске түсірейік. Онда тым болмағанда бір қызыл төбесі болатын 210 үшбұрыш бар екендігін тапқанбыз. Ал берілген 12 нүктеден төбелері таңдалатын үшбұрыштардың жалпы саны 12-ден 3 нүктені таңдау әдістерінің санына, яғни C_{12}^3 шамасына тең. $C_{12}^3 = 220$ болғандықтан, кез келген таңдалған үшбұрыштың тым болмағанда бір қызыл төбесі болуының ықтималдығы $\frac{210}{220}=\frac{21}{22}$ шамасына тең.

6 мысал

Оқытушы емтиханға 20 билет дайындады. Емтиханда студент кез келген билет таңдап, оны дәптеріне көшіріп алады да, орнына қайта қойып қояды. Емтиханға 3 дос келді. Төмендегі ықтималдықтарды табыңдар:

а) үшеуіне бірдей билеттің келуін;

ә) үшеуіне әртүрлі билеттің келуін;

б) үшеуінің тек екеуіне ғана бірдей билеттің келуін.

Шешуі. Достарды X, Y және Z деп атайық. X студентке 20 билеттің кез келген бірі келуі мүмкін. Y студентке 20 билеттің кез келген бірі келуі мүмкін. Z студентке 20 билеттің кез келген бірі келуі мүмкін. Көбейту принципі бойынша 3 студентке билет келуінің $20\cdot20\cdot20$ нұсқасы бар. Тура сондай нәтиже $n=20$ және $k=3$ шартындағы $\overline{A}_n^k=n^k$ қайталануы бар орналастыру формуласымен де алынады. Сонымен, ықтималдықтың классикалық анықтамасының $P(A)=\frac{p}{q}$ формуласындағы элементар нәтижелердің жалпы саны 20^3.

Шешуі:

а) «үшеуіне бірдей билеттің» келу оқиғасын B оқиғасы деп белгілейік. Егер үшеуіне де бір билет келсе, онда ол билет 20-ның бірі, яғни $p=20$. B оқиғасының ықтималдылығы $P(B)=\frac{p}{q}$, мұндағы $q=\overline{A}_{20}^3=20^3$. Табамыз: $P(B)=\frac{p}{q}=\frac{20}{20^3}=\frac{1}{400}$.

ә) «үшеуіне әртүрлі билеттің» келу оқиғасын A оқиғасы деп белгілейік. 3 билетті 20-ның ішінен таңдап, оны 3 студентке бөліп таратудың $A_{20}^3=20\cdot19\cdot18$ жолы бар. Осы шешімді формуласыз-ақ көбейту принципі бойынша алуға да болады: X студент 20-ның 1-ін таңдайды, Y студент қалған 19-дың 1-ін таңдайды, ал Z студент қалған 18-дің 1-ін таңдайды, сонда бөліп таратудың 20·19·18 жолы табылады. Сонымен A оқиғасының ықтималдылығы $P(A)=\frac{p}{q}$, мұндағы $p=A_{20}^3=20\cdot19\cdot18$,

$q=\overline{A}_{20}^{3}=20^3$. Табамыз: $P(A)=\frac{p}{q}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{20^3}=\frac{342}{400}$.

б) «үшеуінің тек екеуіне ғана бірдей билеттің келу» C оқиғасы деп белгілейік. Егер үшеуінің тек екеуіне ғана бірдей билет келсе, үшіншісіне басқа билет келеді. Бұл 2 билетті $A_{20}^2=20\cdot 19$ әдіспен таңдауға болады. Егер 1–билет X және Y достарға тап келсе, онда Z үшіншісіне 2-билет тап болады, егер 1-билет Y және Z достарға тап келсе, онда X үшіншісіне 2-билет тап болады, ал егер 1-билет X және Z достарға тап келсе, онда Y үшіншісіне 2-билет тап болады. Достарды 2+1 әдіспен бөлудің барлығы 3 әдісі бар ($XY+Z$, $YZ+X$, $XZ+Y$). Мұндағы әрбір әдістің әрқайсысына 2 билет таңдаудың $A_{20}^2=20\cdot 19$ әдісі сәйкес келеді. Сонда жиыны $3A_{20}^2=3\cdot 20\cdot 19$ әдіс бар. Сонымен формуладағы $P(C)=\frac{p}{q}$: $p=3\cdot 20\cdot 19$, ал $q=\overline{A}_{20}^{3}=20^3$. $P(C)=\frac{3\cdot 20\cdot 19}{20^3}=\frac{57}{400}$ екенін есептеп табамыз.

Есептер

1-бөлім

1. Сауда орталығында 10000 көйлек бар, оның 7000-ы қызғылт түсті, 2000 – ақ түсті және 1000 – көгілдір түсті. Айзеренің төмендегі түсті көйлектерді таңдау ықтималдықтарын табыңдар:
а) ақ көйлек;
ә) жасыл көйлек;
б) ақ, немесе көгілдір көйлек;
в) көгілдір емес көйлек.

2. Сынақ ойын сүйегін бір рет лақтырудан тұрады. Төменгідегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) 6 саны түседі;
ә) жұп сан түседі;
б) 1-ден кем емес сан түседі.

3. Сынақ 2 тиынды бір мезетте лақтырудан тұрады. Төменгідегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) екі тиында да «елтаңба» түседі;
ә) біреуінде «елтаңба», екіншісінде – «цифр» түседі;
б) ең болмағанда бірінде «елтаңба» түседі.

4. 1-ден 200-ге дейінгі натурал сандар жиынынан кездейсоқ бір сан таңдалады. Төменгідегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) таңдалған сан $a_n = -30 + 12n$, мұндағы $n \geq 1$, түріндегі арифметикалық прогрессияның мүшесі болуы;
ә) таңдалған санның 5-ке еселі сан болуы (5-ке қалдықсыз бөлінетін сан);
б) таңдалған санның 5-ке және 7-ге еселі сан болуы;
в) таңдалған санның 5-ке, немесе 7-ге еселі сан болуы.
5. Сынақ 2 ойын сүйегін бір мезетте лақтырудан тұрады. Түскен сандардың көбейтіндісінің жай сан болу ықтималдығы қандай?
6. Сынақ ойын сүйегін 3 рет лақтырудан тұрады. 3 реттегі түскен сандардың қосындысының 17 немесе 18 сандары болуының ықтималдығы қандай?
7. Айғаным достарына сыйлықтар таратпақшы. Оның сөмкесінде 4 математика және 7 физика кітаптары бар. Ол қарамастан сыйлықтарын алып, кезекпен достарына таратады. Төменгідегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) 1-ші кездейсоқ алынған кітап физика болып шығуы;
ә) Бастапқы 2 кездейсоқ алынған кітаптардың физика болып шығуы;
б) 1-ші кездейсоқ алынған кітап математика, ал 2-ші кітап физика болып шығуы.
8. Сыныпта 20 бала бар. **КТА** (көңілді әрі тапқырлар алаңы) ойындарының сайысына қатысу үшін 7 оқушы жеребемен таңдалуы керек. Әсел мен Әсеттің бір командада болу ықтималдығын табыңдар.
9. Қорапта 3 қызыл, 3 сары және 3 жасыл, барлығы 9 шар бар. Кез келген 3 шар таңдалады. Төменгідегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) 3 шар да бірдей түсте болуы;
ә) 2 шар – қызыл, 1 шар – жасыл болуы;
б) 3 шар әртүрлі түсте болуы.
10. 3 жолаушы автобусқа отырды. Маршрут бойынша алдыда 8 аялдама бар. Төменгідегі ықтималдықтарды табыңыз:
а) 3 жолаушы да аялдаманың әйтеуір біреуінен бірге түседі;
ә) 3 жолаушы әр аялдамадан бөлек-бөлек түседі;
б) 2 жолаушы аялдамадан бірге түседі, ал 3-сі басқа аялдамадан түседі.
11. Параллель түзулердің бірінен 10 нүкте, ал екіншісінен 12 нүкте белгіленген. Сол нүктелерде төбелері болатын үшбұрыштар қарастырылады. Кездейсоқ таңдалған үшбұрыштың 3 төбесінің екеуінің бірінші түзуде жату ықтималдығы қандай екенін табыңдар.
12. Шеңберден 10 қызыл нүкте, 7 көк нүкте белгіленген. Сол нүктелерде төбелері болатын үшбұрыштар қарастырылады. Кездейсоқ таңдалған үшбұрыш төбелерінің төмендегі түстерде болу ықтималдығы қандай екенін табыңдар:
а) 3 төбенің де қызыл болуы;
ә) 3 төбенің де бірдей түсте болуы.

2-бөлім

13. Алпамыс батырдың Айсұлу атты сүйікті қызы өзінің туған күніне жайлаудағы жылқылардың бірін сұрады. Алпамыс батыр қызының көңілін ешқашан қайтармайды. Жайлауда 3600 жылқы бар, олардың 1200-і жирен, 900-і күрең, ал қалғаны қасқа. Төмендегі оқиғалардың ықтималдықтарын табыңдар:
а) Айсұлу жирен атқа ие болады;
ә) Айсұлуға қасқа атқа ие болмайды;
б) Айсұлу торы атқа ие болады.

14. Сынақ ойын сүйегін 1 рет лақтырудан тұрады. Төмендегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) 3 немесе 5 саны түседі;
ә) 6 санының бөлгіші түседі;
б) 8-ден артық емес сан түседі.

15. Қорапта 3 қызыл және 5 жасыл шар бар. Шарлар кезекпен (қайтарылмай) алына бастайды. Төмендегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) кездейсоқ алынған бірінші шардың қызыл түсте болуы;
ә) кездейсоқ алынған бастапқы екі шар да қызыл түсте болуы;
б) бірінші шар қызыл, ал екінші шар жасыл түстерде болуы.

16. Қорапта 3 қызыл және 5 жасыл шар бар. Кезекпен шарлар алына бастайды және алынған шар қайтадан урнаға салынып отырылады. Төменгідегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) кездейсоқ алынған бірінші шардың қызыл түсте болуы;
ә) кездейсоқ алынған бастапқы екі шар да қызыл түсте болуы;
б) бірінші шар қызыл, ал екінші шар жасыл түсте болуы.

17. Сынақ 3 тиынды бір мезетте лақтырудан тұрады. Төмендегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) үш тиында да «елтаңба» түседі;
ә) ең болмағанда бір «елтаңба» және бір «цифр» түседі;
б) ең болмағанда екі тиында «елтаңба» түседі.

18. 1-ден 100-ге дейінгі натурал сандар жиынынан кездейсоқ бір сан таңдалады. Төмендегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) таңдалған санның 6-ға еселі сан болуы (6-ға қалдықсыз бөлінетін сан);
ә) таңдалған санның 6-ға және 8-ге еселі сан болуы;
б) таңдалған санның 6-ға немесе 8-ге еселі сан болуы;
в) таңдалған санның $b_n = \frac{1}{16} \cdot 2^{n-1}$, мұндағы $n \geq 1$, түріндегі геометриялық прогрессияның мүшесі болуы.

19. Сынақ 2 ойын сүйегін бір мезетте лақтырудан тұрады. Түскен сандар көбейтіндісінің тақ сан болу ықтималдығы қандай?

20. Қонжық пен Түлкішектің алдарында 24 түрі бірдей жабық құмыра тұр. Қонжық пен Түлкішек олардың әрқайсысында бал бар екендігіне сенімді. Ал шындығында олардың мейірімді досы қодық 12 құмырадағы балды жеп алып еді. Сол себепті 24 құмыраның 12-де бал, қалған 12-де гүл өсіруге керекті сапалы тыңайтқыш бар. Қонжық пен Түлкішек әрқайсысы өзіне бір құмырадан таңдайды. Төмендегі ықтималдықтарды табыңдар:

а) Қонжыққа тыңайтқышы бар құмыра бұйырады;

ә) Қонжыққа да, Түлкішекке де тыңайтқышы бар құмыра бұйырады;

б) Қонжыққа тыңайтқышы бар құмыра, ал Түлкішекке балы бар құмыра бұйырады.

21. Жазықтықта 4 жасыл нүкте, 9 көгілдір нүкте белгіленген. Ұштары осы нүктелерде болатын кесінділер қарастырылады. Кездейсоқ таңдалған кесінді ұштарының төмендегі түстерде болу ықтималдылығы қандай?

а) екі ұшы да көгілдір;

ә) екі ұшы әртүрлі түстерде?

б) екі ұшы бірдей түстерде?

22. Шеңберден 10 қызыл нүкте, 7 көк нүкте белгіленген. Төбелері осы нүктелерде болатын үшбұрыштар қарастырылады. Кездейсоқ таңдалған үшбұрыштың төбелерінің төмендегі түстерде болу ықтималдығы қандай?

а) тек бір ғана төбенің қызыл болуы;

ә) ең болмағанда 2 төбенің қызыл болуы.

23. Сапарбек пен Дидар жаяу әскерлер взводына түсті. Олардың взводында қатардағы 30 жауынгер бар. Олардың арасынан кездейсоқ түрде 10 жауынгер таңдалады да, оларды ауыр артиллериялық техниканы күзетуге жібереді. Екі достың да техниканы күзететін команда құрамында болу ықтималдығын табыңдар.

24. Қорапта 4 қызыл, 4 сары және 4 жасыл, барлығы 12 шар бар. Кез-келген 3 шар таңдалады. Төменгідегі ықтималдықтарды табыңдар:

а) барлық шар да бірдей түсте болуы;

ә) таңдалған шарлардың арасында жасыл шардың жоқ болуы;

б) барлық шар әртүрлі түсте болуы.

25. Егер геометриялық прогрессияның 1-мүшесі 2, ал 4-мүшесі 16 болса, онда оның 3-мүшесі неге тең?

Жауаптары:

1. а) $0{,}2$; ә) 0; б) $0{,}3$; в) $0{,}9$. 2. а) $\frac{1}{6}$; ә) $\frac{1}{2}$; б) 1. 3. а) $\frac{1}{4}$; ә) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{4}$. 4. а) $\frac{17}{200}$; ә) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{40}$; в) $\frac{63}{200}$. 5. $\frac{1}{6}$. 6. $\frac{1}{54}$. 7. а) $\frac{7}{11}$; ә) $\frac{21}{55}$; б) $\frac{14}{55}$. 8. $\frac{C_{18}^{5}}{C_{20}^{7}}$. 9. а) $\frac{1}{28}$; ә) $\frac{3}{28}$; б) $\frac{9}{28}$.

10. а) $\frac{1}{64}$; ә) $\frac{21}{32}$; б) $\frac{21}{64}$. 11. $\frac{12\cdot C_{10}^2}{12\cdot C_{10}^2+10\cdot C_{12}^2}=\frac{9}{20}$. 12. а) $\frac{C_{10}^3}{C_{17}^3}=\frac{3}{17}$; ә) $\frac{C_{10}^3+C_7^3}{C_{17}^3}=\frac{31}{136}$. 13. а) $\frac{1}{3}$; ә) $\frac{7}{12}$; б) 0. 14. а) $\frac{1}{3}$; ә) $\frac{2}{3}$; б) 1. 15. а) $\frac{3}{8}$; ә) $\frac{3}{28}$; б) $\frac{15}{56}$. 16. а) $\frac{3}{8}$; ә) $\frac{9}{64}$; б) $\frac{15}{64}$. 17. а) $\frac{1}{8}$; ә) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{2}$. 18. а) $\frac{4}{25}$; ә) $\frac{1}{25}$; б) $\frac{6}{25}$. 19. $\frac{1}{4}$. 20. а) $\frac{1}{2}$; ә) $\frac{11}{46}$; б) $\frac{6}{23}$. 21. а) $\frac{C_9^2}{C_{13}^2}$; б) $\frac{C_4^1\cdot C_9^1}{C_{13}^2}$; ә) $\frac{C_4^2+C_9^2}{C_{13}^2}$. 22. а) $\frac{C_{10}^1\cdot C_7^2}{C_{17}^3}$; ә) $\frac{C_{10}^2\cdot C_7^1+C_{10}^3\cdot C_7^0}{C_{17}^3}$. 23. $\frac{C_{28}^2}{C_{30}^{10}}$.

24. а) $\frac{3}{55}$; ә) $\frac{1}{55}$; б) $\frac{16}{55}$. 25. 8.

§4 ЫҚТИМАЛДЫҚТЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ АНЫҚТАМАСЫ

1 мысал

Жауын тамшысы, ұзындығы 100 метр болатын түзу жүгіру жолына тамады. A оқиғасын «Тамшы старт сызығынан a метрден артық емес қашықтыққа тамады» деп анықтаймыз. A оқиғасының $P(A)$ ықтималдығы қандай? Жолдан тыс жерге таматын тамшылар қарастырылмайды.

Шешім-талқылау. 50 метр жолға таматын тамшылар 100 метр жолға таматын тамшылардан 2 есе аз екендігін түсіну қиын емес. Сондықтан, мысалы, $a=50$ болса, онда $P(A)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$. Егер $a=25$ болса, онда ұзындығы 25 метр жол бөлігі бүкіл жолдан 4 есе қысқа, осы себепті $P(A)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$. Жалпы алғанда ұзындығы a метр жолға, a метр 100–ден неше есе кіші болса, сонша есе аз тамшылар тамады. Яғни $P(A)=\frac{a}{100}$.

Келтірілген мысал ықтималдықтың келесі геометриялық анықтамасын табиғи түрде көрсетеді.

1-АНЫҚТАМА.

Ұзындығы l болатын L кесінді мен ұзындықтарының қосындысы k болатын бірнеше кесіндіден тұратын оның K ішкі жиыны берілсін. L кесіндіге кездейсоқ түрде нүкте тасталсын. A оқиғасы деп сол нүктенің K ішкі жиынына түсуі анықталсын. Сонда A оқиғасының ықтималдығы $P(A)=\frac{k}{l}$.

2 мысал

Ұзындығы 2 метр жіп кез келген жерінен кесілген. Алынған бөліктің бірінің ұзындығы 1 м 50 см шамасынан артық болу ықтималдылығы қандай?

Шешуі. Бөліктің бірінің ұзындығы 1 м 50 см шамасынан артық болу дегеніміз, екіншісінің ұзындығы 50 см-ден аз болса ғана болады.

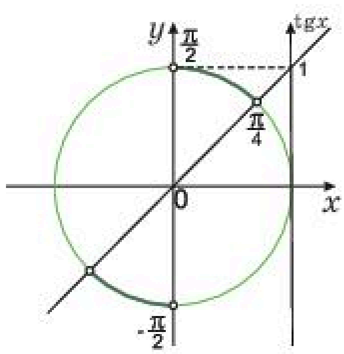
K ішкі жиыны әрқайсысы соңынан санағанда 50 см болатын екі бөліктен тұрады. Ықтималдықтың анықтамасы бойынша $P(A)=\frac{k}{l}$, k саны 50 см + 50 см=1 м, $l=2$ м.

Жауабы: $\frac{1}{2}$.

3 мысал

Кез келген x саны үшін $\operatorname{tg} x>1$ теңсіздігінің орындалу ықтималдылығы неге тең?

Шешуі. Тригонометриялық бірлік шеңбер мен тангенстер өсін саламыз.



$\operatorname{tg} x>1$ теңсіздігінің шешімі: $x\in\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, мұндағы $k\in Z$.

Осы доғаларды шеңберде бейнелейміз. Егер x осы доға кесінділерінде жатса, онда $\operatorname{tg} x > 1$ теңсіздігі дұрыс болады. L бұл жағдайда радиусы 1-ге тең тригонометриялық бірлік шеңбер. Оның ұзындығы $l = 2\pi r = 2\pi$. Бейнеленген доғалардың әрқайсысының ұзындығы $\frac{\pi}{4}$. K ішкі жиыны осындай екі доғадан тұрады, олардың жалпы ұзындығы $k = \frac{\pi}{2}$.

Жауабы: $P(A) = \frac{k}{l} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi} = \frac{1}{4}$.

Ықтималдықтың осыған ұқсас анықтамасы жазық фигураларға да қолданылады.

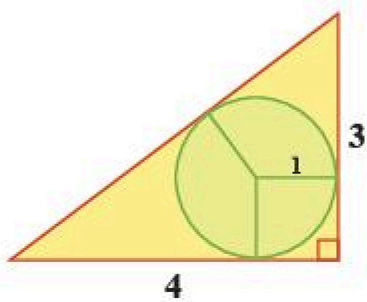
2-АНЫҚТАМА.

Ауданы S болатын F фигура мен аудандарының қосындысы g болатын бірнеше бөліктен тұратын оның G ішкі жиыны берілсін. F фигураға кездейсоқ түрде нүкте тасталсын. A оқиғасы деп сол нүктенің G ішкі жиынына түсуі анықталсын. Сонда A оқиғасының ықтималдығы $P(A) = \frac{g}{S}$.

4 мысал

Катеттері 3 және 4 болатын тік бұрышты үшбұрышқа кездейсоқ түрде нүкте тасталсын. Сол нүктенің іштен сызылған дөңгелек ішіне түсу ықтималдылығы неге тең?

Шешуі. F фигура бұл жағдайда тік бұрышты үшбұрыш.



Оның ауданы $S = \frac{3 \cdot 4}{2}$ болады. Іштен сызылған шеңбер радиусы $r = \frac{a + b - c}{2}$, мұндағы a және b – катеттер,

c – гипотенуза. Гипотенуза Пифагор теоремасымен табылады: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Демек, іштен сызылған шеңбер радиусы $r=\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{3+4-5}{2}=1$. G ішкі жиыны анықтама бойынша радиусы 1-ге тең іштен сызылған дөңгелек, оның ауданы $S=\pi r^2$. Есептеп табамыз: $P(A)=\dfrac{g}{S}=\dfrac{\pi\cdot 1^2}{6}\approx 0,5236$.

Есептер

1-бөлім

1. Сан өсіндегі $[-3;3]$ кесіндіге кездейсоқ түрде нүкте тасталған. Сол нүктенің $|x-1|\le 1$ шартымен анықталатын теңсіздіктің шешімдер жиынына түсу ықтималдылығы неге тең екенін табыңдар.
2. Тригонометриялық бірлік шеңберде нүктелері $\sin x\ge\dfrac{1}{2}$ теңсіздігін қанағаттандыратын доғаны белгілеп аламыз. Кез келген санның осы доғада жату ықтималдығы қандай екенін табыңдар.
3. Дұрыс үшбұрыш дөңгелекке іштей сызылған. Дөңгелекке кездейсоқ түрде нүкте тасталған. Сол нүктенің дұрыс үшбұрыш ішіне түсу ықтималдылығы неге тең? Жауапты үтірден кейінгі 3 орынды дәлдікпен табыңдар.
4. Дөңгелек шаршыға іштей сызылған. Шаршыға кездейсоқ түрде нүкте тасталған. Сол нүктенің дөңгелек ішіне түсу ықтималдылығы неге тең? Жауапты үтірден кейінгі 3 орынды дәлдікпен табыңдар.
5. Катеті 5 және гипотенузасы 5 болатын тік бұрышты үшбұрыш дөңгелекке іштей сызылған.

   а) Дөңгелектің кез келген нүктесі үшбұрыштың ішкі нүктесі болуының ықтималдылығы неге тең? Жауапты үтірден кейінгі 3 орынды дәлдікпен табыңдар.

   ә) Дөңгелектің кез келген нүктесі үшбұрыштың ішкі нүктесі болмауының ықтималдылығы неге тең? Жауапты үтірден кейінгі 3 орынды дәлдікпен табыңдар.
6. Орта нүктесі O болатын шеңберге OA және OB радиустары жүргізілген, олардың арасындағы бұрыш 60°. Дөңгелектің кез келген нүктесінің центрлік бұрышы 60° болатын AOB секторында жату ықтималдылығы қандай екенін табыңдар.

2-бөлім

7. Сан өсіндегі $[-4;7]$ кесіндіге кездейсоқ түрде нүкте тасталған. Сол нүктенің $x^2+2x-3\le 0$ шартымен анықталатын теңсіздіктің шешімдер жиынына түсу ықтималдылығы неге тең екенін табыңдар.

8. Тригонометриялық бірлік шеңберде нүктелері $\cos x\le\frac{1}{2}$ теңсіздігін қанағаттандыратын доғаны белгілеп аламыз. Кез келген санның осы доғада жату ықтималдығы қандай?

9. Дұрыс үшбұрышқа дөңгелек іштей сызылған. Үшбұрышқа кездейсоқ түрде нүкте тасталған. Сол нүктенің дөңгелек ішіне түсу ықтималдылығы неге тең? Жауапты үтірден кейінгі 3 орынды дәлдікпен табыңдар.

10. Дөңгелекке шаршы іштей сызылған. Дөңгелекке кездейсоқ түрде нүкте тасталған. Сол нүктенің шаршы ішіне түсу ықтималдылығы екенін табыңыз. Жауапты үтірден кейінгі 3 орынды дәлдікпен табыңдар.

11. Катеті 5 және гипотенузасы 13 болатын тік бұрышты үшбұрышқа дөңгелек іштей сызылған.
а) Тік бұрышты үшбұрыштың кез келген нүктесі дөңгелектің ішкі нүктесі болуының ықтималдылығы неге тең? Жауапты үтірден кейінгі 3 орынды дәлдікпен табыңдар.
ә) Тік бұрышты үшбұрыштың кез келген нүктесі дөңгелектің ішкі нүктесі болмауының ықтималдылығы неге тең? Жауапты үтірден кейінгі 3 орынды дәлдікпен табыңдар.

12. Орта нүктесі O болатын шеңберге OA және OB радиустары жүргізілген, олардың арасындағы бұрыш 60°. Дөңгелектің кез келген нүктесінің AB кесіндісімен анықталатын кіші сегменттің ішінде болу ықтималдылығы қандай екенін табыңдар.

13. Төмендегі теңдеулер жүйесінің қайсысының кем дегенде бір нақты шешімі бар екенін табыңдар:

A) $\frac{x}{y}=x+y=x-y$; B) $\frac{y}{x}=x-y=x+y$; C) $\frac{x}{y}=xy=x+y=x-y$;

D) $\frac{x}{y}=\frac{y}{x}=x-y=x+y$; E) $\frac{x}{y}=xy=x+y$.

14. Өрнектің мәнін есептеп табыңдар: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{50^2}\right)$.

Жауаптары:

1. $\frac{1}{3}$. 2. $\frac{1}{3}$. 3. 0,045. 4. 0,785. 5. а) 0,226; ә) 0,774. 6. $\frac{1}{6}$. 7. $\frac{4}{11}$. 8. $\frac{2}{3}$. 9. 0,605. 10. 0,637. 11. а) 0,419; ә) 0,581. 12. 0,029. 13. E. 14. $\frac{51}{100}$.

§5 ТӘУЕЛСІЗ ОҚИҒАЛАР

5.1 Тәуелсіз оқиғалар және олардың көбейтіндісі

1 мысал

Бірінші дорбада 10 сары және 12 жасыл шар бар. Ал екінші дорбада 7 сары және 22 жасыл шар бар. Әр дорбадан кез келген бір-бір шардан алып шығады. Екі шардың да сары болып шығуының ықтималдығы қандай?

Шешуі. Бұл ықтималдықтың классикалық анықтамасымен шығатын қарапайым есеп. Бірі бірінші қаптан, ал екіншісінің екінші қаптан алынуы мүмкін шар жұптарының жалпы саны $22 \cdot 29$, ал екеуі де сары болатын осындай жұптың жалпы саны $10 \cdot 7$. Сонда екі шардың да сары болып шығуының ықтималдығы $\frac{10 \cdot 7}{22 \cdot 29}$. Бұл бөлшек $\frac{10}{22}$ және $\frac{7}{29}$ бөлшектерінің көбейтіндісі екенін байқауға болады, мұндағы бірінші бөлшек $\left(\frac{10}{22}\right)$ бірінші қаптан алынған шардың сары болып шығуының ықтималдығы, ал екінші бөлшек $\left(\frac{7}{29}\right)$ екінші қаптан алынған шардың сары болып шығуының ықтималдығы. Сонымен, егер бірінші қаптан алынған шардың сары болып шығу оқиғасын A оқиғасы, ал екінші қаптан алынған шардың сары болып шығу оқиғасын B оқиғасы деп белгілесек, онда бұл оқиғалардың көбейтіндісі AB екі шардың да сары болатынын көрсетеді және $\frac{10 \cdot 7}{22 \cdot 29} = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{10}{22} \cdot \frac{7}{29}$ болады екен.

Шындығында $P(AB) = P(A)P(B)$ теңдігі кез келген жағдайда орын ала бермейді, ол тек тәуелсіз оқиғалар үшін дұрыс болады.

АНЫҚТАМА.

Бірінің пайда болуы екіншісінің пайда болу ықтималдығына әсерін тигізбейтін оқиғаларды тәуелсіз оқиғалар деп атайды.

Мысалы, жоғарыдағы мысалдың оқиғалары тәуелсіз, себебі бір қаптан алынған шар екінші қаптан шар таңдауға қатысы жоқ. Тәуелсіздікті сынақ шарттары негізінде логикалық пайымдау арқылы анықтаймыз.

1-ТЕОРЕМА.

Тәуелсіз екі оқиға көбейтіндісінің ықтималдығы олардың ықтималдықтарының көбейтіндісіне тең: $P(AB)=P(A)P(B)$.

2 мысал

Екі мерген әрқайсысы өз нысанасына бір-бірден оқ атады. 1–мергеннің өз нысанасына тигізу ықтималдығы $0{,}8$, ал 2-мергеннің нысанасына тигізу ықтималдығы $0{,}7$. Екі мергеннің де өз нысаналарына тигізу ықтималдығы неге тең?

Шешуі. Егер 1-мергеннің өз нысанасына тигізу оқиғасын A-оқиғасы деп, ал 2-мергеннің өз нысанасына тигізу оқиғасын B-оқиғасы деп белгілесек, онда «екі мергеннің де өз нысаналарына тигізу» оқиғасы A және B оқиғаларының көбейтіндісі болады. A және B оқиғалары тәуелсіз, сондықтан $P(AB)=P(A)P(B)=0{,}8\cdot0{,}7=0{,}56$.

Бұл теореманы тәуелсіз оқиғалардың көп санына да жалпылауға болады: әрбір жұптары өзара тәуелсіз оқиғалар көбейтіндісінің ықтималдығы олардың ықтималдықтарының көбейтіндісіне тең

3 мысал

Ойын сүйегі 3 рет лақтырылады. Бірінші рет 5 саны, екінші рет 3-ке еселі сан, ал үшінші рет тақ сан түсуінің ықтималдығы неге тең екенін табыңыз.

Шешуі. Бірінші рет 5 санының түсу ықтималдығы $\frac{1}{6}$-ге тең. 3 пен 6 сандары 3-ке еселі, осы себепті екінші жолы 3-ке еселі сан түсуінің ықтималдығы $\frac{2}{6}$, ал сүйектегі тақ сандар $1,3$ және 5 болғандықтан, үшінші рет тақ сан түсуінің ықтималдығы $\frac{3}{6}$. Лақтырулар бір-біріне қатыссыз, сол себепті үш оқиғаның қатар пайда болу ықтималдығы $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{36}$ көбейтіндісіне тең.

Тағы да назар аударыңдар, $P(AB)=P(A)P(B)$ теңдігі кез келген жағдайда орын ала бермейді, ол тек тәуелсіз оқиғалар үшін ғана дұрыс болады! Мысалы, екі оқиға A және B үйлесімсіз болса, онда $P(AB)=0$. Шындығында, A және B оқиғалары үйлесімсіз болса, онда олар бір мезетте қатар пайда бола алмайды (бірі екіншісінің болуын жоққа шығарады), яғни AB оқиғасы мүмкін емес. Мүмкін емес оқиғаның ықтималдығы, әрине нөлге тең.

5.2 Оқиғалар қосындысының ықтималдығы

4 мысал

Сынақ тиынның 3-рет лақтырылуынан тұрсын делік: «елтаңба» түссе, «0» деп, ал «цифр» түссе, «1» деп жазайық. Сонда мүмкіндіктері бірдей нәтижелер жиыны 8 тізбектен тұрады: $\{000, 001, 010, 100, 110, 101, 011, 111\}$. Егер $\{000, 001, 010\}$ тізбектерінің бірі орын алса, онда A оқиғасы, ал $\{001, 010, 100, 110\}$ тізбектерінің бірі орын алса, онда B оқиғасы орын алады деп қабылдайық. $A+B$ оқиғалар қосындысының ықтималдығы неге тең екенін табыңыз.

Шешуі. A және B оқиғалар қосындысы дегеніміз, ол A және B жиындарының бірігуі. Бұл дегеніміз оқиғалар қосындысын тым болмағанда A, немесе B жиынына жататын элементтерден тұратын жиын ретінде қарастырамыз, яғни A және B оқиғалар қосындысын немесе A оқиғасына, немесе B оқиғасына, немесе екеуіне де жататын элементтерден тұратын жиын ретінде қарастырамыз. Қарастырылып отырған мысалда $A+B=\{000, 001, 010, 100, 110\}$.

A жиыны 3 элементтен, B жиыны 4 элементтен тұрады. Егер $A=\{000, 001, 010\}$ жиынының 3 элементіне $B=\{001, 010, 100, 110\}$ жиынының 4 элементін формальды түрде қоса салсақ, онда 7 элементтен тұратын $\{000, 001, 010, 001, 010, 100, 110\}$ жиынтық шығады. Мұндағы $AB=\{001, 010\}$ көбейтіндісінің элементтері жиынтықта 2 рет кездеседі. Егер «артық» екі рет кездесетін элементтерді алып тастасақ, онда $A+B=\{000, 001, 010, 100, 110\}$ қосындысы шыға келеді. Егер жиын элементтерінің санын модуль белгісімен белгілесек (мысалы A жиын элементтерінің санын $|A|$ деп), онда $|A+B|=|A|+|B|-|AB|$ теңдігі алынады $(5=3+4-2)$. Егер осы теңдіктің екі жағын да нәтижелердің жалпы санына бөлсек, онда $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ теңдігі бір сынақта орын алуы мүмкін кез келген оқиғаларда дұрыс болатындығын дәлелдеуге болады. Бұл қағиданы дәлелдеусіз теорема түрінде береміз.

2-ТЕОРЕМА.

Берілген сынақта орын алуы мүмкін кез келген A және B оқиғалары үшін $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ теңдігі орындалады.

ТЕОРЕМА 3.

Берілген сынақта орын алуы мүмкін кез келген A және B үйлесімсіз оқиғалар үшін мына теңдік орындалады: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.
Үйлесімсіз оқиғалар $P(AB)=0$ теңдігін ескерсек, 2-теореманың дәлелдеуі 1–теоремадан бірден шығады. Үйлесімсіз оқиғалар қосындысы туралы теорема оқиғалардың үлкен санында да дұрыс.

ТЕОРЕМА 4.

Берілген сынақ нәтижесінде орын алатын, әрбір жұптары өзара үйлесімсіз оқиғалар үшін олардың қосындысының ықтималдығы олардың ықтималдықтарының қосындысына тең.

ТЕОРЕМА 5.

Қарама-қарсы оқиғалар ықтималдықтарының қосындысы 1-ге тең.

5-теореманы дәлелдейік. A мен $\overline{A}$ – қарама-қарсы оқиғалар болсын. Бір жағынан қарама-қарсы оқиғалардың қосындысы рас оқиға болып табылады, яғни $P\left(A+\overline{A}\right)=1$. Екінші жағынан 3-теоремаға сәйкес $P(A)+P\left(\overline{A}\right)=P\left(A+\overline{A}\right)$. Демек, $P(A)+P\left(\overline{A}\right)=1$. Теорема дәлелденді. Практикада бұл формула $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)$ түрінде қолданылады.

5 мысал

Екі мерген өз нысаналарына бір-бірден оқ атады. Бірінші мергеннің дәл тигізу ықтималдығы $0{,}8$ ал екінші мергеннің дәл тигізу ықтималдығы $0{,}7$.
а) Екі мергеннің де дәл тигізу ықтималдығы неге тең?
ә) Бірінші мергеннің мүлт кету, ал екінші мергеннің дәл тигізу ықтималдығы неге тең?
б) Тек бір мергеннің ғана дәл тигізу ықтималдығы неге тең?
в) Тым болмағанда бір мергеннің дәл тигізу ықтималдығы неге тең?

Шешуі. Бірінші мергеннің дәл тигізу оқиғасын A - оқиға деп, ал екінші мергеннің дәл тигізу оқиғасын B - оқиға деп белгілейміз. Сонда $\overline{A}$ және $\overline{B}$ оқиғалары бірінші және екінші мергеннің сәйкесінше мүлт кеткендерін көрсететін оқиғалар.
а) Біз бұл есептің шешімін параграфтың 2–мысалында келтіргенбіз: оқиғалар тәуелсіз болғандықтан,

$P(AB)=P(A)P(B)=0,8\cdot 0,7=0,56$, мұндағы AB оқиғасы екі мергеннің де дәл тигізуін көрсетеді.

ә) Бірінші мергеннің мүлт кету, ал екінші мергеннің дәл тигізу оқиғасы $\overline{A}B$ көбейтіндісі. A және B оқиғалары тәуелсіз болғандықтан, $\overline{A}$ және B да тәуелсіз. Яғни, $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$.

Қарама-қарсы оқиғалардың қосындысы туралы 5-теорема бойынша $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,8=0,2$. Осыдан: $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=0,2\cdot 0,7=0,14$.

б) Тек бір мергеннің ғана дәл тигізуі деген келесі оқиғалардың біріне сәйкес: «бірінші мерген дәл тигізді, ал екінші мерген мүлт кетті» және «екінші мерген дәл тигізді, ал бірінші мерген мүлт кетті». «Бірінші мерген дәл тигізді, ал екінші мерген мүлт кетті» оқиғасы $A\overline{B}$ көбейтіндісін, ал «екінші мерген дәл тигізді, ал «бірінші мерген мүлт кетті» оқиғасы $\overline{A}B$ көбейтіндісін береді. Яғни, тек «бір мергеннің ғана дәл тигізу» оқиғасы $A\overline{B}+\overline{A}B$ қосындысына тең, және мұндағы $A\overline{B}$ және $\overline{A}B$ оқиғалары үйлесімсіз. Үйлесімсіз оқиғалардың қосындысы туралы 3-теоремаға сәйкес $P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=$ $=0,8\cdot 0,3+0,2\cdot 0,7=0,38$.

в) 1-әдіс. «Тым болмағанда бір мерген дәл тигізді» оқиғасы A және B оқиғаларының қосындысы (оқиғалардың қосындысы туралы бөлімнің 1.3 п.). 2 – теорема бойынша $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,8+0,7-0,56=0,94$.

2-әдіс. «Тым болмағанда бір мерген дәл тигізді» оқиғасы «бірінші мерген дәл тигізді, ал екінші мерген мүлт кетті», «екінші мерген дәл тигізді, ал бірінші мерген мүлт кетті» және «екеуі де дәл тигізді» деген $A\overline{B}+\overline{A}B+AB$ үйлесімсіз оқиғалардың қосындысы. Бұл оқиғалар бір мезетте болуы мүмкін емес. Яғни үйлесімсіз оқиғалар туралы 4–теорема бойынша

$$P(A\overline{B}+\overline{A}B+AB)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB)=$$

$$=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)+P(A)P(B)=$$

$$=0,8\cdot 0,3+0,2\cdot 0,7+0,8\cdot 0,7=0,94.$$

3-әдіс. «Тым болмағанда бір мерген дәл тигізді» оқиғасы «екеуі де мүлт кетті» деген $\overline{C}$ оқиғаға қарама-қарсы оқиға, демек 2-теорема бойынша $P(C)=1-P(\overline{C})$. «Екеуі де мүлт кетті» оқиғасы ($\overline{C}$) «бірінші мерген мүлт кетті» – $\overline{A}$ және «екінші мерген мүлт кетті» – $\overline{B}$ деген тәуелсіз оқиғалардың көбейтіндісі. Яғни $P(\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})=0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}06$, осыдан $P(C)=1-P(\overline{C})=1-0{,}06=0{,}94$.

Есептер

1-бөлім

1. Бір дорбада 5 сары және 6 жасыл шар бар. Ал екінші дорбада 7 сары және 11 жасыл шар бар. Әр дорбадан кез келген 1 шардан таңдалады. Төменгідегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) екі шардың да сары болуы;
ә) екі шардың да бір түсте болуы.

2. Сынақ ойын сүйегін 3 рет лақтырудан тұрады. Үш ретінде де түскен сандардың бәрінің де жұп болуының ықтималдығы қандай екенін табыңдар.

3. 3 жәшіктің әрқайсысында 12 бұйымнан бар. 1-ші жәшіктегі 12 бұйымның 2-і ақаулы, 2-ші жәшіктегі 12 бұйымның 1-і, ал 3-ші жәшіктегі 12 бұйымның 3-і ақаулы. Әр жәшіктен қарамай 1-ден бұйым алды. Төмендегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) Барлық 3 бұйым да ақаулы болып шығады;
ә) Барлық 3 бұйым да ақаусыз болып шығады;
б) 1-жәшіктегі бұйым ақаулы, ал 2 және 3-жәшіктегі бұйымдар ақаусыз болып шығады;
в) Үш бұйымнан тек біреуі ғана ақаусыз болып шығады.

4. (3) Екі мерген садақ атудан жарысуда. Бірінші мергеннің садақпен тигізу ықтималдығы 0,8-ге тең, ал екіншісінің тигізу ықтималдығы 0,9-ға тең. Егер мергендердің әрқайсысы бір реттен оқ ататын болса, онда төмендегілердің ықтималдығын табыңдар:
а) екі мергеннің де нысанаға дәл тигізуі;
ә) тек бірінші мергеннің нысанаға тигізуі;
б) тек екінші мергеннің нысанаға тигізуі;
в) екі мергеннің де тигізе алмауы.

5. (4) Әлем кубогінің қорытынды кезеңіне қатысу үшін, спортшыға үш тәуелсіз кезеңіне қатысу қажет. Спортшының осы үш кезеңнің біріншісінен жеңу ықтималдығы 0,8-ге тең. Ал әрбір келесі күрделі кезеңдерден жеңіп шығу ықтималдығы әр жолы 0,1-ге кеміп отырады. Екінші және үшінші кезеңдерге қатысу, алдыңғы кезеңдердің нәтижелеріне тәуелсіз. Келесі оқиғалардың ықтималдықтары қандай?

а) спортшының іріктеудің барлық кезеңдерінде жеңіске жетуі;
ә) спортшының екінші және үшінші кезеңдерде ғана жеңіске жетуі;
б) спортшының ешбір кезеңде жеңіске жете алмауы;
в) спортшының кез келген үш кезеңнің екеуінде жеңіске жетуі?

2-бөлім

6. Бір дорбада 8 сары және 6 жасыл шар бар. Ал екінші қапта 6 сары және 11 жасыл шар бар. Әр дорбадан кездейсоқ бір-бір шардан таңдалады. Төменгідегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) бірінші дорбадағы шар сары, ал екінші дорбадағы шар жасыл болуы;
ә) екі шардың да әр түсте болуы.

7. Сынақ ойын сүйегін 3 рет лақтырудан тұрады. Төмендегі 3 оқиғаның: 1-ші лақтырылуда тақ сан түседі, 2-ші лақтырылуда 5-тен кем емес сан түседі, 3-ші лақтырылуда 2 саны түсуінің – қатар орындалуының ықтималдығы неге тең екенін табыңдар.

8. 3-жәшіктің әрқайсысында 20 піскен, 10 шикі алма бар. Әр жәшіктен қарамай бір-бірден алма алады. Төменгідегі ықтималдықтарды табыңыз:
а) 1-ші және 3-ші жәшіктерден алынған алмалар шикі, ал 2-жәшіктен алынған алма піскен болуы;
ә) Барлық алынған үш алманың тек қана екеуінің шикі болуы.

9. Мергеннің нысанаға дәл тигізу ықтималдығы $0,7$. Мерген 2 оқ атады. Төменгідегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) екі рет мүлт кетті;
ә) тек қана 1 рет мүлт кетті;
б) екі рет дәл тигізді.

10. Мерген 30 қадам жерден асқабаққа $0,9$ ықтималдықпен, ал алмаға $0,4$ ықтималдықпен дәл тигізе алады. Мерген 1 рет асқабаққа, 2 рет алмаға оқ атпақшы. Төменгідегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) ол асқабаққа дәл тигізе алмайды;
ә) алмаға дәл тигізді;
б) алмаға ғана дәл тигізді;
в) ол тек біреуіне ғана дәл тигізді;
г) ол тым болмағанда біреуіне ғана дәл тигізді .

11. 2037 жыл. Чемпиондар лигасының ширек финалы өтпекші. «Қайрат» – «Реал Мадрид», «Манчестер Юнайтед» – «Бавария», «Челси» – «Ювентус», «Зенит» – «Аякс» командалары кездеспекші. Жұптағы бірінші команданың екіншісін жеңу ықтималдығы сәйкесінше $0,9$, $0,2$, $0,5$ және $0,3$. Төменгідегі ықтималдықтарды табыңдар:
а) A – «Қайрат» «Реал Мадрид» командасын жеңе алмайды;

ә) B – «Қайрат» командасы «Реал Мадрид» командасын жеңе алмайды және «Манчестер Юнайтед» «Баварияны» ұтады;
б) C – «Қайрат» командасы «Реал Мадрид» командасын жеңеді, «Ювентус» «Челсиден» жеңілмейді, ал голландықтар ресейліктерден жеңілмейді.

12. $|x-1|=x^2$ теңдеуінің неше түбірі бар екенін табыңдар.

13. Егер қияр сатып алуға кеткен шығындар 92%-ға, ал 1 килограмм қиярдың бағасы 60%-ға артса, онда сатып алынған қиярдың салмағы қаншаға көбейгенін табыңдар.

Жауаптары:

1. а) $\frac{35}{198}$; ә) $\frac{101}{198}$.

2. $\frac{1}{8}$.

3. а) $\frac{1}{288}$; ә) $\frac{55}{96}$; б) $\frac{11}{96}$; в) $\frac{103}{288}$.

4. а) $0,72$; ә) $0,08$; б) $0,18$; в) $0,02$.

5. а) $0,336$; ә) $0,084$, б) $0,024$; в) $0,452$.

6. а) $\frac{44}{119}$; ә) $\frac{62}{119}$.

7. $\frac{1}{36}$.

8. а) $\frac{2}{27}$; ә) $\frac{2}{9}$.

9. а) $0,09$; ә) $0,42$; б) $0,49$.

10. а) $0,1$; ә) $0,4$; б) $0,04$; в) $0,58$; г) $0,94$.

12. 2.

11. а) $0,1$; ә) $0,02$; б) $0,252$.

13. 20%-ға.

САН ТҮЗУІНДЕГІ ЖИЫНДАР

**«Құдай бүтін сандарды жаратты,
ал қалғандары – адамның ісі».
Леопольд Кронекер**

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ...$ т.с.с. натурал сандар деп аталады. Ең кіші натурал сан, бұл – «бір» саны. Натурал сандар заттарды санау үшін қолданылатын сандар. Кейде осылай айтылады. Алайда саналатын заттар шексіз көп болмайды, ал натурал сан шексіз. Натурал сандар жиыны N белгісімен таңбаланады.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,6,7,......\}$

Егер натурал сандар жиынына нөлді және барлық натурал санға қарама-қарсы сандарды қоссақ, бүтін сандар жиыны пайда болады:

$$\mathbb{Z}=\{...,-11,-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,2,3,4,5,...\}.$$

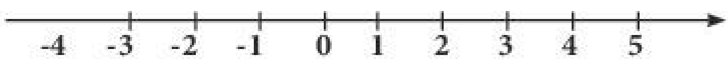
$\frac{p}{q}$ қатынасымен анықталатын барлық сандар $\mathbb{Q}$ рационал сандар жиынын құрайды. Мұндағы p–қандайда бір бүтін сан, q–қандай да бір натурал сан.

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\right\}$, мұндағы p – бүтін, q – натурал сандар.

Рационал сандарға мысалдар: $\frac{3}{7}, -\frac{3}{7}=\frac{-3}{7},\ 0=\frac{0}{1},\ -10=\frac{-10}{1}$.

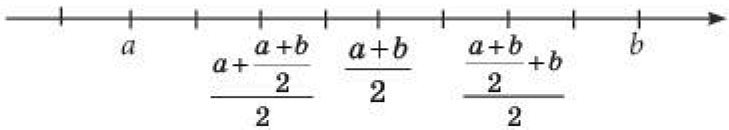
Әрбір натурал сан бүтін, ал әрбір бүтін – рационал сан. Рационал сандарды көбейткенде, қосқанда және бөлгенде рационал сан шығады.

Сан осінде сандарды нүктемен белгілеген қолайлы екенін білесіңдер.



Кез келген екі рационал санның (нүктенің) арасында шексіз көп басқа рационал сандар (нүктелер) бар. Шындығында, егер a және b – рационал сандар, $a<b$ болса,онда $a<\frac{a+b}{2}<b$ және $\frac{a+b}{2}$ – рационал сан. $\frac{a+b}{2}$ – геометриялық нүкте, a-дан b-гедейінгі кесіндінің ортасы, сонда осы сияқты

a және $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+b}{2}$ және b арасында тағы да рационал санды табуға болады және осылай шексіздікке дейін жалғасады.



Осыған ұқсас болады: **сан өсінен ұзындығы өте аз кесіндіні қарастырсақ та, одан шексіз көп рационал нүктелер табылады.** Бірақ бұл сан түзуіндегі кез келген нүкте рационал санға сәйкес келеді дегенді білдірмейді. Мысалы, ауданы 2-ге тең шаршының қабырғасы $\frac{p}{q}$, мұндағы $p=\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$ түрінде өрнектелмейді. Мұндай ұзындықты $\sqrt{2}$ деп белгілейміз, $\sqrt{2}$ – рационал сан емес. Рационал емес сандардың барлығы иррационал сандар деп аталады. Рационал және иррационал сандардың бірігуі R нақты сандар жиынын береді. $\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$.

«1 және 3 санының арасында неше сан бар?» сұрағына «1 және 3 сандарының арасында бір сан орналасқан. Ол сан 2 болады» деген жауапты есту таңырқарлық.

Кез келген $a<b$ болғандағы a және b сандарының арасында шексіз көп сан бар. Мысалы, $x\in(1;3)$ жазылуы, қарастырып отырған x саны 1-ден артық, бірақ 3-тен кем барлық сандар дегенді білдіреді. $(1;3)$ жиынында ең үлкен,ең кіші элементті көрсету мүмкін емес. Осындай жиында c саны ең үлкен болып қалды делік, онда $\frac{c+3}{2}$ саны: $1<c=\frac{c+c}{2}<\frac{c+3}{2}<\frac{3+3}{2}<3$. Демек, $\frac{c+3}{2}$ саны да жиынға тиесілі, сонымен бірге ол c-дан артық. Бірақ біз ең үлкен сан c деп болжадық. Қарама-қайшылыққа тірелдік, олай болса біздің болжауымыз қате.

$x\in[1;3]$ түріндегі жазылу, 1-ден кем емес, 3-тен артық емес барлық сан қарастырылады дегенді білдіреді. Мұндай жиында 1 – ең кіші элемент, 3 – ең үлкен элемент. Сонымен, кез келген a және b сандары үшін $a<b$ болғанда, мыналар орынды:

$$x\in(a;b)\Leftrightarrow a<x<b$$
$$x\in[a;b]\Leftrightarrow a\le x\le b$$
$$x\in[a;b)\Leftrightarrow a\le x<b$$

$x \in (a; b] \Leftrightarrow a < x \leq b$
$x \in (a; +\infty) \Leftrightarrow x > a$
$x \in [a; +\infty] \Leftrightarrow x \geq a$
$x \in (-\infty; b] \Leftrightarrow x \leq b$
$x \in (-\infty; b] \Leftrightarrow x < b.$

***A* және *B* жиындарының қиылысуы** дегеніміз A және B жиындарының әрқайсысына тиісті элементтердің жиынтығы. Белгіленуі: $A \bigcap B$

$$x \in A \bigcap B \Leftrightarrow x \in A \text{ және } x \in B.$$

***A* және *B* жиындарының бірігуі** дегеніміз A және B жиындарының ең болмаса біреуіне тиісті элементтердің жиынтығы. Белгіленуі: $A \bigcup B$.

$$x \in A \bigcup B \Leftrightarrow x \in A \text{ немесе } x \in B.$$

Кез келген қиылысу элементі олардың бірігуіне тиісті.
Осы сияқты үлкенірек сандардың қиылысуы мен бірігуі анықталады.
Мектеп курсында шарттар **жүйесін** (теңдеулер, теңсіздіктер және т.б) шешу дегеніміз. шарттарды қанағаттандыратын **жиындардың қиылысуын** табу дегенді білдіреді; шарттар **жиынтығын** (теңдеулер, теңсіздіктер және т.б) шешу дегеніміз, шарттарды қанағаттандыратын **жиындардың бірігуін** табу дегенді білдіреді.

Мысал келтірейік. Сыныптағы оқушылардың көбісі не футболмен, не волейболмен шұғылданады делік. ***A*** *– жиынына футболмен шұғылданатын оқушыларды,* ***B*** *жиынына – волейболмен шұғылданатын оқушыларды жатқызайық. Онда спорттың екі түрімен де шұғылданатын оқушылар –* ***A*** *және* ***B жиындарының қиылысуы*** *болып табылады. Екі спорттың* ***кем дегенде бір түрімен****, яғни, не футболмен, не волейболмен, не осы спорт түрлерінің* **екеуімен де** *шұғылданатын оқушылар* ***A*** *және* ***B жиындарының бірігуі*** *болып табылады. Келтірілген мысал сендерге көмектеседі деп сенеміз.*

АНЫҚТАМАЛЫҚ МАТЕРИАЛДАР

A. Қысқаша көбейту формулалары:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$
$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab;$$
$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab.$$

B. Тригонометрияның негізгі формулалары:
1. Бір аргументпен байланысқан функциялардың формулалары

$\sin^2 x+\cos^2 x=1;$ $\quad$ $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x};$ $\quad$ $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x};$

$\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1;$ $\quad$ $1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x};$ $\quad$ $1+\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

2. Қосу формулалары:

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;$ $\quad$ $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y;$

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;$ $\quad$ $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y;$

$\operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y};$ $\quad$ $\operatorname{tg}(x-y)=\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}.$

3. Екі еселенген аргументтер формуласы:

$\sin 2x=2\sin x\cos x;$ $\quad$ $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x;$

$\operatorname{tg} 2x=\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$

4. Үш еселенген аргументтер формуласы:

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

5. Дәрежені төмендету формулалары:

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$;

$\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$; $\cos^3 x = \dfrac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$.

6. Қосындыны көбейтумен алмастыру формулалары:

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$; $\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$;

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$; $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$;

$\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$; $\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\, y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$.

7. Көбейтуді қосындымен алмастыру формулалары:

$\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$; $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$;

$\sin x \sin y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$.

8. Жарты аргументтің формулалары:

$\sin x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}$; $\cos x = \dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}$;

$\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$; $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

C. Абсолюттік шамасы бар теңсіздіктер:

1. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$

2. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$

ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ

Қазақша	Орысша	Ағылшынша
Арифметика		
Арифметикалық квадрат түбір	Арифметический квадратный корень	Arithmetical square root
Дәрежеге шығару	Возведение в степень	Involution, powering
Бөлінгіш	Делимое	Dividend
Бөлгіш	Делитель	Divisor
Санның квадраты	Квадрат числа	Square of number
N – ші дәрежелі түбір	Корень n – й степени	N-th root
Санның кубы	Куб числа	Cube of number
Дәреженің негізі	Основание степени	Base of power
Қалдық	Остаток	Remainder, residual
Түбір астындағы өрнек	Подкоренное выражение	Radical expression
Дәреженің көрсеткіші (дәреже көрсеткіші)	Показатель степени	Exponent, index of power
Бөлінгіштік белгілері	Признак делимости	Criterion of divisibility, divisibility test, test for divisibility
Көбейтінді	Произведение	Product
Радикал	Радикал	Radical
Көбейткіштерге жіктеу	Разложение на множители	Factorisation
Айырма	Разность	Difference between
Дәреженің қасиеттері	Свойства степени	Power properties
Дәреже	Степень	Power
Рационал көрсеткішті дәреже	Степень с рациональным показателем	Power with rational exponent
Қосынды	Сумма	Sum
Бөлінді	Частное	Quotient
Вектор		
Вектор	Вектор	Vector
Векторлық әдіс	Векторный метод	Vectorial method
Вектордың ұзындығы	Длина вектора	Lenght of vector
Коллинеар векторлар	Коллинеарные векторы	Collinear vectors
Компланар векторлар	Компланарные векторы	Coplanar vectors

Вектордың координаттары	Координаты вектора	Vector coordinates
Нүктенің координаталары	Координаты точки	Position of a point
Векторлардың сызықтық комбинациясы	Линейная комбинация векторов	Linear combination of vectors
Вектордың проекциясы	Проекция вектора	Vector projection
Қарама-қарсы векторлар	Противоположные векторы	Opposite vectors
Радиус-вектор	Радиус-вектор	Radius-vector
Скаляр көбейтінді	Скалярное произведение	Scalar product
Бағыттас векторлар	Сонаправленные векторы	Codirectional vectors
Вектордың құраушылары	Составляющие вектора	Vector component
Шама		
Шексіз үлкен шама	Бесконечно большая величина	Infinite
Шексіз аз шама	Бесконечно малая величина	Infinitesimal
Үлкен	Больше	Greater
Кіші	Меньше	Less
Теріс емес	Неотрицательный	Nonnegative
Оң емес	Неположительный	Non-positive
Теріс сандар	Отрицательные числа	Negative number
Теріс	Отрицательный	Negative
Оң	Положительный	Positive
Өрнек		
Әріпті өрнек	Буквенное выражение	Literal expression
Екімүше	Двучлен	Binomial
Бөлшекті өрнектер	Дробные выражения	Fractional expression
Өрнектің мәні	Значение выражения	Value of expression
Екімүшенің квадраты	Квадрат двучлена	Square of binomial
Квадрат үшмүше	Квадратный трехчлен	Quadratic trinomial
Коэффициент	Коэффициент	Coefficient
Айнымалының мүмкін мәндерінің облысы	Область допустимых значений переменной	Admitted region of variable, tolerance range of variable
Иррационалдықтан құтылу	Освобождение от иррациональностей	Rationalization
Өрнектерді түрлендіру	Преобразование выражений	Expression transformation
Сандық өрнек	Числовое выражение	Numeral expression
Есептеу		
Жуық есептеу	Приближенное вычисление	Approximate calculation

Геометрия

Геометриялық фигура	Геометрическая фигура	Geometric figure
Гомотетия	Гомотетия	Homothety
Кесіндінің ұзындығы	Длина отрезка	Length of segment
Салу есептері	Задачи на построение	Construction problems
Инверсия	Инверсия	Inversion
Қисық	Кривая	Curve
Қисық сызықты трапеция	Криволинейная трапеция	Curvilinear trapezoid
Сынық	Ломаная	Polygonal curve
Сәуле	Луч	Ray
Көлбеу	Наклонная	Slanting line
Бейне	Образ	Image
Ортақ перпендикуляр	Общий перпендикуляр	Common perpendicular
Тірек түзуі	Опорная прямая	Line of support, supporting line
Ортогональ кескіндеу	Ортогональное проектирование	Orthogonal projection
Өстік симметрия	Осевая симметрия	Rotational symmetry
Кесінділердің қатынасы	Отношение отрезков	Segment ratio
Кесінді	Отрезок	Segment
Параллель кескіндеу	Параллельное проектирование	Parallel projection
Параллель түзулер	Параллельные прямые	Parallel lines
Параллель көшіру	Параллельный перенос	Parallel shift, parallel translation
Перпендикуляр	Перпендикуляр	Perpendicular
Жазық фигура	Плоская фигура	Plane figure
Салу	Построение	Construct
Жазықтықты түрлендіру	Преобразование плоскости	Plane transformation
Перпендикулярлық белгісі	Признак перпендикулярности	Test of perpendiculars
Параллельдік белгілері	Признаки параллельности	Test of parallels
Проекция	Проекция	Projection
Түзу	Прямая	Line
Түзу сызық	Прямая линия	Straight line
Қиюшы	Секущая	Secant
Орта перпендикуляр	Серединный перпендикуляр	Middle perpendicular

Қабырға	Сторона	Side
Гомотетия центрі	Центр гомотетии	Ray center
Масса центрі	Центр масс	Centre of mass
График		
График салу	Построение графика	Construction of graph
Графиктерді түрлендіру	Преобразование графика	Graph transformation
Функцияның графигін түрлендіру	Преобразование графика функции	Function graph transformation
Бөлшек		
Ондық бөлшек	Десятичная дробь	Decimal fraction
Үлес	Доля	Fracture
Бөлшек бөлігі	Дробная часть	Fractional part
Бөлім	Знаменатель	Denominator
Бұрыс бөлшек	Неправильная дробь	Unproper fraction
Қысқартылмайтын бөлшек	Несократимая дробь	Irreducible fraction
Жай бөлшек	Обыкновенная дробь	Vulgar fraction
Дұрыс бөлшек	Правильная дробь	Proper fraction
Рационал бөлшек	Рациональная дробь	Rational fraction
Бөлшекті қысқарту	Сокращение дробей	Reduction of fractions
Бүтін бөлігі	Целая часть	Integer part
Алым	Числитель	Numerator
Индукция		
Жарты	Половина	Half
Үштен бірі	Треть	Third
	Индукция	
Индукция базисі	Базис индукции	Basis of induction
Индуктивті болжау	Индуктивное предположение	Induction hypothesis
Индуктивті қадам	Индуктивный шаг	Induction step
Математикалық индукция әдісі	Метод математической индукции	Method of mathematical induction
Құрал		
Сызғыш	Линейка	Rule
Транспортир	Транспортир	Protractor
Циркуль	Циркуль	Compass
Интеграл		
Бөліктеп интегралдау	Интегрирование по частям	Partial integration
Анықталмаған интеграл	Неопределенный интеграл	Indefinite integral

Интегралдау ережелері	Правила интегрирования	Integration rule
Интегралдау кестесі	Таблица интегралов	Integral table
Комбинаторика		
Орналастыру	Перестановка	Commutation
Алмастыру	Размещение	Disposition
Теру	Сочетание	Combination
Факториал	Факториал	Factorial
Комплекс сандар		
Нақты бөлігі	Действительная часть	Real part
Комплекс сан	Комплексное число	Complex number
Комплекс санның түбірі	Корень из комплексного числа	Root of complex number
Жорамал бөлігі	Мнимая часть	Imaginary part
Комплекс санның модулі	Модуль комплексного числа	Complex number modulus, modulus of complex number
Түйіндес комплекс сан	Сопряженное комплексное число	Complex conjugate
Комплекс санның тригонометриялық түрі	Тригонометрическая форма комплексного числа	Trigonometric form of complex number
Координаталар		
Абсцисса	Абсцисса	Abscissa
Координаталық өс	Координатная ось	Coordinate axis
Координаттық сәуле	Координатный луч	Coordinate ray
Координаттар әдісі	Метод координат	Coordinate method
Ордината	Ордината	Ordinate
Ширек	Четверть (координатная)	Quadrant
Қисықтар		
Параболаның төбесі	Вершина параболы	Vertex of parabola
Гипербола	Гипербола	Hyperbola
Логарифмдер		
Логарифм негізі	Основание логарифма	Logarithmic base
Көпбұрыштар		
Төбесі	Вершина	Vertex
Іштей сызылған	Вписанный	Inscribed
Іштей сызылған көпбұрыш	Вписанный многоугольник	Inscribed polygon
Дөңес фигура	Выпуклая фигура	Convex figure
Диагональ	Диагональ	Diagonal
Квадрат	Квадрат	Square

Көпбұрыш	Многоугольник	Polygon
Сырттай сызылған көпбұрыш	Описанный многоугольник	Circumscribed polygon
Параллелограмм	Параллелограмм	Parallelogram
Параллелограмм ережесі	Правило параллелограмма	Parallelogram law, parallelogram rule
Дұрыс көпбұрыш	Правильный многоугольник	Regular polygon
Тік төртбұрыш	Прямоугольник	Rectangle
Ромб	Ромб	Rhomb, rhombus
Трапеция	Трапеция	Trapezium
Көпмүше		
Көпмүше	Многочлен	Polynomial
Біртекті көпмүше	Однородный многочлен	Homogeneous polynomial
Бірмүше	Одночлен	Monomial
Бос мүше	Свободный член	Absolute term
Симметриялық көпмүше	Симметрический многочлен	Symmetric polynomial
Үлкен коэффициент	Старший коэффициент	Leading coefficient
Үшмүше	Трехчлен	Trinomial
n-ші мүшесінің формуласы	Формула n-го члена	n-th term formula
Жиын		
Шексіз жиын, ақырсыз жиын	Бесконечное множество	Infinite set
Шекті жиын, ақырлы жиын	Конечное множество	Finite set, finite aggregate
Жиын	Множество	Set
Ішкі жиын	Подмножество	Subset
Бос жиын	Пустое множество	Empty collection, empty set
Жиынның элементі	Элемент множества	Set member
Теңсіздік		
Қос теңсіздік	Двойное неравенство	Two-sided inequality
Теңсіздікті дәлелдеу	Доказательство неравенств	Inequality proving
Интервалдар әдісі	Метод интервалов	Interval method
Теңсіздік	Неравенство	Inequality
Орталар туралы теңсіздіктер	Неравенство о среднем	Mean value inequality
Теңсіздіктің қасиеттері	Свойства неравенств	Inequality properties
Теңсіздік жүйелері	Система неравенств	Simultaneous inequalities
Теңсіздік жиынтығы	Совокупность неравенств	Set of inequalities

Көлем		
Куб метр	Кубический метр	Cubic meter
Куб сантиметр	Кубический сантиметр	Cubic centimeter
Көлем	Объем	Volume
Шеңбер		
Диаметр	Диаметр	Diameter
Шеңбердің ұзындығы	Длина окружности	Perimeter of circle
Доға	Дуга	Arc
Жанама	Касательная	Tangent
Дөңгелек	Круг	Circle
Шеңбер	Окружность	Circumference
Дөңгелектің ауданы	Площадь круга	Area of a circle
Сегмент	Сегмент	Segment
Сектор	Сектор	Sector
Шеңбердің теңдеуі	Уравнение окружности	Circumference equation
Хорда	Хорда	Chord
Центрлік бұрыш	Центральный угол	Central angle
Анықтама		
Аксиома	Аксиома	Axiom
Алгоритм	Алгоритм	Algorithm
Бином	Бином	Binomial
Жеткілікті шарты	Достаточное условие	Sufficient condition
Бастапқы шарт	Начальное условие	Starting condition
Қажетті шарт	Необходимое условие	Necessary condition
Дирихле принципі	Принцип дирихле	Dirichlet principle
Аудан		
Шаршы метр	Квадратный метр	Square meter
Шаршы сантиметр	Квадратный сантиметр	Square centimeter
Аудан	Площадь	Area
Тең шамалы фигуралар	Равновеликие фигуры	Equal figures
Тең құрамдас фигуралар	Равносоставленные фигуры	Decomposition-equal figures
Ұқсастық		
Ұқсастық	Подобие	Similarity
Ұқсас үшбұрыштар	Подобные треугольники	Similar triangles
Ұқсас фигуралар	Подобные фигуры	Similar figures
Ұқсастық белгілері	Признак подобия	Test of similarity
Алмастыру		

Алмастыру әдісі (тәсілі)	Метод подстановки	Method of substitution
Алмастыру	Подстановка	Substitution
Тізбек		
Тізбек	Последовательность	Sequence
Рекуррентті арақатынас	Рекуррентное соотношение	Recurrence relation
Шек		
Тамаша шек	Замечательный предел	Remarkable limit
Біржақты шектер	Односторонние пределы	One-sided limit
Тізбек шегі	Предел последовательности	Limit of sequence
Прогрессия		
Арифметикалық прогрессия	Арифметическая прогрессия	Arithmetical progression
Шектеусіз геометриялық прогрессия	Бесконечная геометрическая прогрессия	Infinite geometrical progression
Геометриялық прогрессия	Геометрическая прогрессия	Geometrical progression
Геометриялық прогрессияның еселігі	Знаменатель геометрической прогрессии	Geometric ratio
Прогрессия	Прогрессия	Progression
Арифметикалық прогрессияның айырымы	Разность арифметической прогрессии	Arithmetical ratio
Туынды		
Туынды	Производная	Derivative
Кері функцияның туындысы	Производная обратной функции	Derivative of reciprocal function
Күрделі функцияның туындысы	Производная сложной функции	Derivative of combined function, derivative of complicated function
Пропорция		
Пропорционалдық коэффициент	Коэффициент пропорциональности	Coefficient of proportionality
Кері пропорционал	Обратная пропорциональность	Reciprocal proportionality
Пропорционал бөлу	Пропорциональное деление	Proportional division
Пропорция	Пропорция	Proportion
Тура пропорционал	Прямая пропорциональность	Direct proportionality

Өлшем		
Ұзындық	Длина	Length
Ені	Ширина	Width
Шешім		
Шешімдер жиыны	Множество решений	Solution set
Жалпы шешім	Общее решение	General solution
Үшбұрышты шешу	Решение треугольников	Solution of triangle
Дербес шешім	Частное решение	Particular solution
Қысқаша көбейту		
Айырманың кубы	Куб разности	Cube of difference
Қосындының кубы	Куб суммы	Cube of sum
Кубтардың айырмасы	Разность кубов	Cube difference
Кубтардың қосындысы	Сумма кубов	Sum of cubes
Айырманың квадратының формуласы	Формула квадрата разности	Square of difference formula
Екі өрнектің қосындысының квадратының формуласы	Формула квадрата суммы двух выражений	Square of sum formula
Квадраттар айырмасының формуласы	Формула разности квадратов	Square difference formula
Қысқаша көбейту формулары	Формулы сокращенного умножения	Formulas of abridged multiplication
Статистика		
Нақты жағдай	Достоверное событие	Persistent event
Қатардың медианасы	Медиана ряда	Median of series
Қатардың модасы	Мода ряда	Mode of series
Қатардың ауқымы	Размах ряда	Spread of series
Арифметикалық орта арифметикалық ортасы	Среднее арифметическое	Arithmetic average, arithmetical mean arithmetic average
Элементарлық жағдай	Элементарное событие	Elementary event, simple event
Мәтіндік есептер		
Уақыт	Время	Time
Қозғалыс	Движение	Movement
Масштаб	Масштаб	Coverage
Жұмыс көлемі	Объем работы	Work content, volume of work
Өнімділік	Производительность	Productivity
Жол	Путь	Path, way
Қашықтық, арақашықтық	Расстояние	Distance

Жылдамдық	Скорость	Speed
Қоспа	Смесь	Mixture
Қорытпа	Сплав	Alloy
Орташа жылдамдық	Средняя скорость	Average speed
Бүйір бет	Боковая поверхность	Lateral surface
Дөңес көпжақтар	Выпуклые многогранники	Convex polyhedrons
Сферамен жанасу	Касание со сферой	Contact with sphere
Конус	Конус	Cone
Көпжақ	Многогранник	Polyhedron
Көпжақ	Многогранник	Polyhedron
Көпжақты бұрыш	Многогранный угол	Polyhedral angle
Сырттай сызылған көпжақ	Описанные многогранники	Circumscribed polyhedron
Тірек жазықтығы	Опорная плоскость	Plane of support, supporting plane
Өстік қима	Осевое сечение	Axial section
Параллелепипед	Параллелепипед	Parallelepiped
Шардың қиылысуы	Пересечение шара	Ball crossing
Пирамида	Пирамида	Pyramid
Бет	Поверхность	Surface
Толық бет	Полная поверхность	Complete surface
Дұрыс пирамида	Правильная пирамида	Regular pyramid
Призма	Призма	Prism
Кеңістік фигуралары	Пространственные фигуры	Space figures
Тік цилиндр	Прямой цилиндр	Straight cylinder
Жазба	Развертка	Involute, evolvent
Қыры	Ребро	Edge
Қима	Сечение	Cut set, section
Конустың қимасы	Сечение конуса	Cone section
Көпжақтың қимасы	Сечение многогранника	Polyhedron section
Айқас түзулер	Скрещивающиеся прямые	Skew lines
Сфера	Сфера	Sphere
Айналу денелері	Тела вращения	Body of revolution
Қиық пирамида	Усеченная пирамида	Truncated pyramid
Цилиндр	Цилиндр	Cylinder
Шар	Шар	Ball
Эллипс	Эллипс	Ellipse

Тепе-теңдік		
Тепе-тең түрлендіру	Тождественное преобразование	Identity substitution
Тепе-теңдік	Тождество	Identity
Нүкте		
Нүктелер жиыны	Множество точек	Set of points
Қозғалмайтын нүктелер	Неподвижные точки	Fixed points
Нүкте	Точка	Point
Иілу нүктесі	Точка перегиба	Point of inflection
Үшбұрыш		
Биссектриса	Биссектриса	Bisector
Биіктік	Высота	Altitude
Гипотенуза	Гипотенуза	Hypotenuse
Катет	Катет	Cathetus
Медиана	Медиана	Median
Үшбұрыштың теңсіздігі	Неравенство треугольника	Triangle inequality
Бағдар	Ориентация	Orientation
Ортоцентр	Ортоцентр	Orthocenter
Табаны	Основание	Base
Периметр	Периметр	Perimeter
Үшбұрыш ережесі	Правило треугольника	Triangle law
Үшбұрыштардың теңдік белгілері	Признаки равенства треугольников	Test of triangles equality
Тікбұрышты үшбұрыш	Прямоугольный треугольник	Right-angled triangle
Теңбүйірлі үшбұрыш	Равнобедренный треугольник	Isosceles triangle
Теңқабырғалы үшбұрыш	Равносторонний треугольник	Equilateral triangle
Үшбұрыш	Треугольник	Triangle
Тригонометрия		
Бірлік шеңбер	Единичная окружность	Unit circumference
Косинус	Косинус	Cosine
Котангенс	Котангенс	Cotangent
Котангенстер сызығы	Линия котангенсов	Line of cotangents
Тангенстер сызығы	Линия тангенсов	Line of tangents
Кері тригонометриялық функциялар	Обратные тригонометрические функции	Inverse trigonometric functions

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдік	Основное тригонометрическое тождество	Fundamental trigonometric identity
Қарапайым тригонометриялық теңдеулер	Простейшие тригонометрические уравнения	Elementary trigonometric equations
Синус	Синус	Sine
Тангенс	Тангенс	Tangent
Қос аргументтің формулары	Формулы двойного аргумента	Double-argument formula
Жарты аргументтің формулары	Формулы половинного аргумента	Half-argument formula
Келтіру формулары	Формулы приведения	Reduction formulas
Бұрыш		
Вертикаль бұрыштар	Вертикальные углы	Vertical angles
Іштей сызылған бұрыш	Вписанный угол	Inscribed angle
Градус	Градус	Degree
Екіжақты бұрыш	Двугранный угол	Dihedral angle
Айқыш бұрыштар	Накрест лежащие углы	Alternate angles
Тұстас бұрыштар	Односторонние углы	Unilateral angles
Сүйір бұрыш	Острый угол	Sharp angle
Жазық бұрыш	Плоский угол	Plane angle
Жазықтық	Плоскость	Plane
Бұру	Поворот	Rotating
Тік бұрыш	Прямой угол	Right angle
Радиан	Радиан	Radian
Жазыңқы бұрыш	Развернутый угол	Flat angle, straight angle
Сыбайлас бұрыштар	Смежные углы	Adjacent angles
Сәйкес бұрыштар	Соответственные углы	Corresponding angles
Үшжақты бұрыш	Трехгранный угол	Trihedral angle
Доғал бұрыш	Тупой угол	Blunt angle
Бұрыш	Угол	Angle
Теңдеу		
Биквадрат теңдеу	Биквадратное уравнение	Biquadratic equation
Графиктік әдіс	Графический метод	Graphic method
Қос аргумент	Двойной аргумент	Double argument
Дискриминант	Дискриминант	Discriminant
Дифференциалдық теңдеулер	Дифференциальные уравнения	Differential equation
Айнымалыны алмастыру	Замена переменной	Change of variable

Иррационал теңдеу	Иррациональное уравнение	Irrational equation
Квадрат теңдеу	Квадратное уравнение	Quadratic equation
Теңдеудің түбірі	Корень уравнения	Root of equation
Қосымша аргумент әдісі	Метод вспомогательного аргумента	Method of auxiliary argument
Параметр	Параметр	Parameter
Айнымалы	Переменная	Variable
Түбір жоғалту	Потеря корней	Loss of roots
Бөгде түбірдің пайда болуы	Приобретение посторонних корней	Acquisition of extraneous root
Мәндес теңдеулер	Равносильные уравнения	Equivalent equations
Рационал теңдеу	Рациональное уравнение	Rational equation
Теңдеудің рационал түбірлері	Рациональные корни уравнения	Rational roots of equations
Симметриялық теңдеулер	Симметрические уравнения	Symmetrical equations
Бұрыштық коэффициент	Угловой коэффициент	Angular coefficient
Теңдеу	Уравнение	Equation
Екінші ретті теңдеу	Уравнение второго порядка	Second order equation
Жазықтықтың теңдеуі	Уравнение плоскости	Equation of plane
Түзудің теңдеуі	Уравнение прямой	Equation of line
Дәрежені төмендету формулары	Формулы понижения степени уравнения	Formula for depression of equation
Теңдеудің бүтін түбірлері	Целые корни уравнения	Integer roots of equations
Функция		
Асимптота	Асимптота	Asymptote
Тік асимптота	Вертикальная асимптота	Vertical asymptote
Өзара кері функциялар	Взаимно обратные функции	Mutually inverse functions
Ойыс	Вогнутость	Concavity
Өсуі	Возрастание	Increase
Өспелі функция	Возрастающая функция	Increasing function
Екінші ретті туынды	Вторая производная	Second derivative
Көлденең асимптота	Горизонтальная асимптота	Horizontal asymptote
График	График	Graph, plot
Дифференциал	Дифференциал	Differential
Бөлшек-сызықтық функция	Дробно-линейная функция	Homographic function

Квадраттық функция	Квадратичная функция	Quadratic function
Функциялар композициясы	Композиция функций	Composition of functions
Сызықтық функция	Линейная функция	Linear function, affine function
Бірсарындылық	Монотонность	Monotony
Функцияның ең үлкен мәні	Наибольшее значение функции	Maximum
Функцияның ең кіші мәні	Наименьшее значение функции	Minimum
Көлбеу асимптота	Наклонная асимптота	Oblique asymptote
Үзіліссіздік	Непрерывность	Continuity
Тақ функция	Нечетная функция	Odd function
Функцияның мәндерінің жиыны	Область значений функции	Range
Функцияның анықталу аймағы	Область определения функции	Function domain
Алғашқы функция	Первообразная	Primitive
Период	Период	Period
Көрсеткіштік функция	Показательная функция	Exponential function
Жарты аргумент	Половинный аргумент	Half-argument
Өсімше	Приращение	Increment
Аралық, интервал	Промежуток, интервал	Interval
Алғашқы бейне	Прообраз	Inverse image, original
Үзілістік	Разрывность	Discontinuity
Дәрежелік функция	Степенная функция	Power function
Тригонометриялық функциялар	Тригонометрические функции	Trigonometric functions
Үшінші аргумент	Тройной аргумент	Triple argument
Кемуі	Убывание	Decrease
Кемімелі функция	Убывающая функция	Decreasing function
Функция	Функция	Function
Жұп функция	Четная функция	Even function
Сандық функциялар	Числовые функции	Numerical function
Экстремум	Экстремум	Extremum
Цифр		
Разряд	Разряд	Digit, position
Цифр	Цифра	Numeral, figure
Сан		
Өзара жай сандар	Взаимно простые числа	Coprime numbers, relative primes

Нақты сандар	Действительные числа	Real numbers
Иррационал сандар	Иррациональные числа	Irrational numbers
Еселік	Кратное	Multiple
Натурал сандар жиыны	Множество натуральных чисел	Set of natural numbers
Рационал сандар жиыны	Множество рациональных чисел	Set of rational numbers
Бүтін сандар жиыны	Множество целых чисел	Set of integer numbers
Санның модулі	Модуль числа	Module, modulus
Натурал сандар	Натуральные числа	Natural numbers
Тақтық	Нечетность	Oddness
Сандардың қатынасы	Отношение чисел	Numbers ratio
Оң сандар	Положительные числа	Positive numbers
Жай сандар	Простые числа	Prime numbers
Қарама-қарсы сандар	Противоположные числа	Opposite numbers
Рационал сандар	Рациональные числа	Rational numbers
Теңдеуді шешу	Решить уравнение	Solve equation
Аралас сан	Смешанное число	Mixed number
Құрама сандар	Составные числа	Composite numbers
Сандарды салыстыру	Сравните числа	Compare numbers
Жұптық	Четность	Evenness
Сан	Число	Number

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. www.esepterqory.kz веб-сайты;
2. Сборник задач по математике: Под ред.: М.И. Сканави. – М., 2005
3. Элементар математика есептерінің жинағы. Т.Н. Бияров, М.Т. Молдабеков. – Алматы: Кітап, 1992.
4. 3000 конкурсных задач. Е.Д. Куланин и др. – М., 2003.
5. problem.ru веб-сайты;
6. Халықаралық Кенгуру байқауының есептері;
7. Википедия – ашық энциклопедиясы: kk.wikipedia.org.

Оқулық басылым *Учебное издание*

Олег Владимирович Пак
Дархан Ардақұлы
Елена Викторовна Ескендирова

АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

1-бөлім
Қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы жалпы білім беретін мектептің 10-сынып оқушыларына арналған оқулық

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Часть 1
Учебник для учащихся 10 класса общеобразовательной школы общественно-гуманитарного направления

Арнайы редакторы / спецредактор – З. Н. Киябаева
Дизайн – Е. А. Ибрашов
Суретін салған / Художник – Б. Б. Булатов
Мұқаба / Обложка: Е.С. Жузбаев, Б. Б. Булатов, А. М. Әбдіразах
Беттеуші / Верстка – М. С. Шелекбаева

Басуға 22.07.2019 ж. қол қойылды.
Пішімі 70х100 1/16. Есептік баспа табағы 7,84.
Шартты баспа табағы 19,35. Офсеттік басылым.
Әріп түрі «Open Sans». Офсеттік қағаз.
Таралымы 8000 дана. Тапсырыс № 2150.

Подписано в печать 22.07.2019 г.
Формат 70х100 1/16. Уч.-изд. л. 7,84.
Усл. печ. л. 19,35. Печать офсетная.
Гарнитура «Open Sans». Бумага офсетная.
Тираж 8000 экз. Заказ № 2150

Сапасы жөнінде мына мекемеге хабарласыңыз:
Қазақстан Республикасы,
050012, Алматы қаласы, Жамбыл көшесі, 111-үй,
«АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ» ЖШС,
тел. +7 (727) 250 29 58, факс +7 (727) 292 81 10.
e-mail: info@almatykitap.kz

С претензиями по качеству обращаться:
Республика Казахстан,
050012, г. Алматы, ул. Жамбыла, 111,
ТОО «АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ»,
тел. +7 (727) 250 29 58; факс +7 (727) 292 81 10.
e-mail: info@almatykitap.kz

Сапа және қауіпсіздік стандарттарына сай.
Сертификация қарастырылмаған.
Сақтау мерзімі шектелмеген.

Соответствует всем стандартам качества и безопасности.
Сертификация не предусмотрена.
Срок годности не ограничен.

Қазақстанда басылды
«Реформа» ЖШС
Алматы қ., Ақбұлақ ы-ауд., Шарипов к-сі, 40Б-үй

Отпечатано в Казахстане
ТОО «Реформа»,
г. Алматы, мкр. Акбулак, ул. Шарипова, д. 40Б