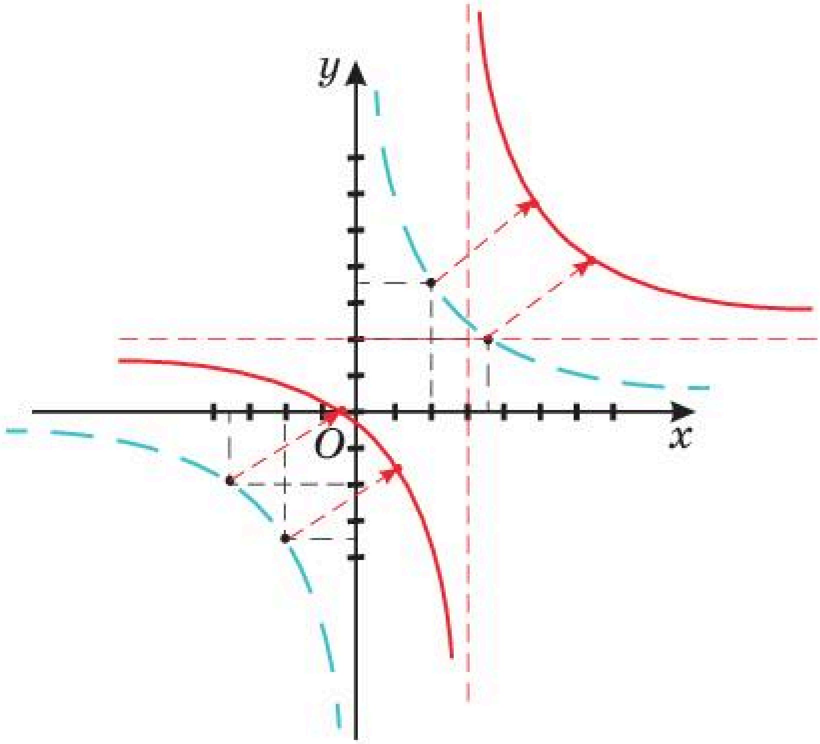


АЛГЕБРА

және анализ бастамалары

2-бөлім

Қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы жалпы білім беретін мектептің 10-сынып оқушыларына арналған оқулық

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі ұсынған

О. В. Пак
Д. Ардақұлы
Е. В. Ескендирова

АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ
2019

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72
П 13

Оқулықпен қалай жұмыс істеу керек?

Бұл оқулық сыныпта жұмыс істеу және материалды өз бетінше зерттеу үшін жасалған. Оқулықтың теориялық материалдары мысалдар мен жаттығулардан тұрады. Мысалдардың шешімін бірінші оқылымда бірден қарастыруға болады. Жаттығулар өздігімен шешуге арналған. Жаттығулардың мақсаты – оқушыларды жаңа тақырыпты неғұрлым тиімді қабылдауға дайындау және олардың алған дағдыларын бекіту. Алдымен өз күшіңмен жаттығуларды шешуге тырысып көргеннен соң мәтіннің төменгі жағындағы шешімдеріне қарау керек. Негізгі мәтінді түсіндіретін авторлық ескертулер курсивпен берілген.

Дағдыларды бекітуге арналған есептер әрбір теориялық бөлімнің соңында орналасады және екі бөлікке бөлінеді. 1-бөлім сыныпта жұмыс істеуге арналған. 2-бөлім 1-бөлімнің идеялық мазмұнына ұқсас жаттығулардан тұрады және үй тапсырмасына арналған. Бұдан басқа, 2-бөлімде сыни және логикалық ойлауды дамыту (күлгін түспен бөлінген), функционалдық сауаттылықты дамыту бойынша тапсырмалар (сары) және қайталауға арналған мысалдар бар (жасыл). Оқулықтағы барлық тапсырмалар 1-ден 6-ға дейінгі қиындық деңгейіне қарай жіктеледі. Қиындық деңгейі тапсырма нөмірінен кейін бірден жақшада беріледі.

Пак О. В.
П 13 **Алгебра және анализ бастамалары:** Қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы жалпы білім беретін мектептің 10-сынып оқушыларына арналған оқулық. 2-бөлім. / О. В. Пак, Д. Ардақұлы, Е. В. Ескендирова, – Алматы: АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ, 2019. – 168 бет; суретті.

ISBN 978-601-01-3806-3 (жалпы)
2-бөлім – 168 бет
ISBN 978-601-01-3807-0

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72

ISBN 978-601-01-3807-0 (2-бөлім)
ISBN 978-601-01-3806-3 (жалпы)

ҚҰРМЕТТІ ОҚУШЫЛАР!

Ағылшынның ұлы ойшылы және математигі Бертран Рассел: «Математика тек шындықтан ғана құралмайды, сонымен қатар айрықша сұлулыққа – ұлы өнер туындыларына ғана тән шыңдалған әрі айқын, шынайы мүлтіксіз әрі асқақ таза сұлулыққа да ие», – деген екен.

Қазір қолдарыңа ұстап отырған оқулықпен бірге сендер ежелгі және ұлы ғылымды түсінуге тағы бір қадам жасайсыңдар. Бұл жаңа курс «Алгебра және анализ бастамалары» деп аталады. Онда функция түсінігі және оның қасиеттері, функция туындысы, сонымен қатар ықтималдықтар теориясының кейбір мәселелері де жан-жақты қарастырылады. Біз сендермен бірге қоршаған өмірді функцияның қалай сипаттайтынын білетін боламыз.

Математика не үшін қажет? Біз пайдаланатын тұрмыстық техника, қуатты агрегаттар, біз тұратын үйлер, аспанда қалықтаған ұшақтар, теңіздегі кемелер, қолыңдағы ұялы телефон, сенің анаң пісіретін тоқаш – адам қолымен жасалатын құралдардың бір де бірі математикалық есептеулерсіз жүзеге аспайды. Қазіргі заманғы ғылымның барлығы өздерінің теориялық және тәжірибелік зерттеу жұмыстарында математиканы қолданады.

Математика не үшін қажет? Мектеп немесе жоғары оқу орнын бітіргеннен кейін көпшілігіңе, мысалы тригонометриялық өрнектерді ықшамдау қажет болмай қалады. Бірақ ойлау, пайымдау, деректерді бір-бірімен салыстыра білу және шынымен де пайдалы болатын логикалық қорытынды жасау сияқты тіршілікте қажетті қасиеттердің тәжірибелік маңызының зор екенін жоққа шығара алмайсың. Ұғымталдық, тапқырлық, өнертапқыштық кез келген мәселелерді жеңіп шығуға және табысты жеке тұлға болуға көмектеседі. Басқа адамдарды түсіне білу, өз ойыңды дұрыс жеткізе білу адамдардың бір-бірімен тиімді қарым-қатынас жасауы үшін қажет. Математикамен айналысу ғана адамның осындай жақсы қасиеттерін дамытады.

Сонымен қатар, өмірде қандай мамандықты таңдасаң да, бәрібір сандарды қолдануға тура келеді. Ал, біз сендердің араларыңнан математикамен кәсіби түрде айналысатын мамандар шығады деп үміттенеміз.

Оқулық үнемі үйренуге, білуге ұмтылатын оқушыларға арналған. Әр параграфтың теориялық бөлімі мысалдардан ғана емес, сонымен бірге жаттығулардан тұрады. Жаттығуларды өз бетімен орындау жаңа материалды терең түсіну үшін қажет.

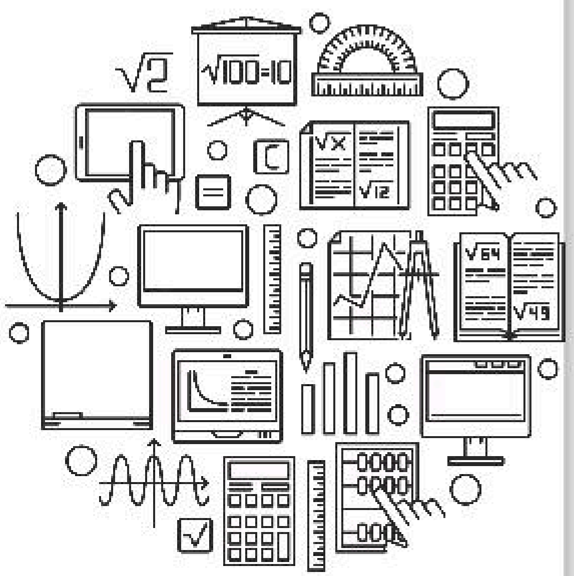
Жұмыстарыңа сәттілік тілейміз!

Құрметпен, авторлар.

МАЗМҰНЫ

5-тарау

ТУЫНДЫ



«Математиканың ұлы қағидаларын игерген адамдарда басқаларға қарағанда бір сезім мүшесі артық болады».
Ч.Дарвин

Объективті шынайылық – біздің санамыздан тыс өмір сүретін айналамыздағы әлем және оның қасиеттері. Субъективті шынайылық – біздің санамыздағы объективті шынайылықтың бейнесі, яғни әлемді және оның қасиеттерін көз алдымызға қалай елестететінімізді көреміз. Элейлік Зенон (б.з.д. V ғасыр) объективті және субъективті шынайылықтар мүлде алуан түрлі болғандықтан, бізді қоршаған әлем ғылыми үлгілердің көмегімен зерттеуге көнбейтіндігін дәлелдеуге тырысты. Ол осы тезистің дәлелдемесі ретінде 40 апория тұжырымдады (апория – парадокс, көзқарас қайшылық, софизм). Олардың тоғызы біздің заманымызға дейін жетті. Зенон өзінің апорияларында уақытты, кеңістік және қозғалысты қарастырды. Негізгі сұрақ – уақыт пен кеңістікті шексіз бөліктерге бөлуге бола ма, әлде олар одан әрі бөлуге келмейтін, бөлінбейтін бөлшектерден тұра ма? Басқаша айтқанда, уақыт пен кеңістік үздіксіз бе, әлде дискретті ме? Зенон кейбір апорияларында алғашқы мүмкіндіктерге сүйеніп, логикалық пайымдау жолымен қарама-қайшылыққа тап болады. Ал енді бірінде ол екінші мүмкіндіктерге сүйенеді, бірақ тағы да қарама-қайшылыққа жолығады. Осыдан ұлы философ: «Әлемді тұтастай тану мүмкін емес, толық зерттеуге көнбейді», – деген қорытындыға келеді. Белгілі үш апориясы: «Дихотомия», «Ахиллес пен тасбақа» және «Жебе».

«Дихотомия» *(ортасынан қақ бөлу): «Кеңістіктің A нүктесінен B нүктесіне бару үшін дене алдымен A-дан B-ға дейінгі қашықтықтың жартысынан өтуі тиіс. Алайда жолдың жартысын жүріп өтпес бұрын, ол жолдың жартысының жартысын жүріп өтуі керек.*

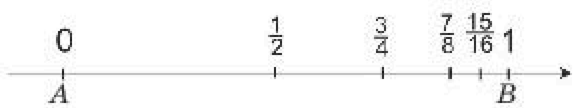
Жартысының жартысын жүріп өтпестен бұрын, дене сол жартының жартысының жартысын жүріп өтуі тиіс. Бұдан әрі осылай шексіздікке дейін жалғасады. Демек, қозғалыс ешқашан басталмайды». Осы апорияның екінші нұсқасы: «A нүктесінен B нүктесіне жету үшін дене алдымен A-дан B-ға дейінгі қашықтықтың жартысынан өтуі тиіс. Сосын ол қалған қашықтықтың жартысын жүріп өтуі қажет. Оны жүріп өткеннен кейін B нүктесіне жету үшін, қалған қашықтықтың жартысынан өтуі қажет. Осылайша жалғаса береді: қалған жолдың кезекті жартысын жүріп өткеннен кейін, B нүктесіне жету үшін дене кезекті қалған қашықтықтың жартысын игеруі тиіс. Бұл үрдіс шексіз жалғасады. Демек, қозғалыс ешқашан бітпейді.»

«Ахиллес және тасбақа»: *Егер қозғалыс басталған кезде тасбақа Ахиллестің алдында болса, желаяқ Ахиллес жайбасар тасбақаны ешқашан қуып жете алмайды. Айталық, Ахиллес тасбақадан 10 есе тез жүгіреді және тасбақадан 1000 қадам кейін тұрды делік. Осы қашықтықты Ахиллес жүгіріп өтетін уақытта, тасбақа 100 қадам алға жылжиды. Ахиллес 100 қадам жүгіргенде, тасбақа тағы 10 қадам алға жылжиды және* *ары қарай осылай жалғаса береді. Бұл үрдіс шексіздікке дейін жалғаса береді, Ахиллес еш уақытта тасбақаны қуып жете алмайды».*

«Жебе»: *«Уақыттың әрбір сәтінде тыныштықта болғандықтан, ұшып келе жатқан жебе қимылсыз болады, ол уақыттың әр сәтінде тыныштықта болады, сондықтан да әрдайым тыныштықта болады».*

Алғашқы екі апорияда уақыт пен кеңістік үздіксіз, ал үшіншісінде – дискретті деп алынады. Зенон қойған мәселелерді барлық қырынан толық қарастыруға біздің қазір мүмкіндігіміз жоқ. Мәселенің математикалық жағына тоқталамыз. «Дихотомияның» екінші нұсқасындағы A-дан B-ға дейінгі қашықтықты бірлік деп есептейміз. Координаталық түзудегі AB кесіндісіндегі A нүктесінің координатасы 0, B нүктесінің координатасы 1 болатындай орналасқан деп есептейміз. Дене A-дан B-ға дейінгі жолдың жартысынан өткен мезетте, оның координатасы $\frac{1}{2}$-ге тең, ал жолдың қалған бөлігі $\frac{1}{2}$-ге тең болады. Дене қалған жолдың жартысын жүргенде, оның координатасы $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$-ке тең, ал жолдың кезекті қалған бөлігі $\frac{1}{4}$-ге тең болады; $x_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$; $y_3=\frac{1}{8}$.

Осылайша $x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$, $y_n=\frac{1}{2^n}$.



n-нің мәні неғұрлым үлкен болған сайын оның мәнінің 1-ден айырмашылығы соғұрлым аз болады; n-нің үлкен мәндерін қаншалықты қарастырсақ та, жолдың қалған бөлігі нөлге тең емес оң шама болып табылады. Біз Зенон сияқты анық айғақты теріске шығармаймыз: егер дене тұрақты жылдамдықпен қозғалатын болса, онда әйтеуір B нүктесіне жетеді. Құрылған математикалық үлгі біздің тәжірибемізге қайшы келмеуі үшін шексіз оң таңбалы қосылғыштардың шексіз санының қосындысы бірге тең болатынын мойындауымыз керек: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$. Математиктердің айтуы бойынша, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ қатары **жинақталатын қатар** болып табылады, сонымен бірге $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ тізбегінің шегі 1-ге тең. Сондай-ақ кеңістік және уақыт үзіліссіз деп есептеледі, яғни уақыт пен кеңістіктің кез келген аралығын шексіз кішігірім бөліктерге бөлуге болады. Құрылған математикалық үлгі аясында Зенон апориясы енді қайшылыққа тап болмайды. Өйткені, егер дене тұрақты жылдамдықпен қозғалып, A-дан B-ға дейінгі жолдың жартысын жүруге T уақыт жұмсаса, онда қалған жарты жолдың жартысын жүруге $\frac{T}{2}$, келесі жартысының жартысын жүруге $\frac{T}{4}$ уақыт жұмсайды және осылайша жалғаса береді. A-дан B-ға дейінгі барлық жолға кететін уақыт $T+\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\frac{T}{8}+\ldots+\frac{T}{2^n}+\ldots=2T$. Қозғалыс, дегенмен, аяқталады.

«Ахиллес және тасбақа» апориясы үшін, оған қайшы келмейтін, шек ұғымын пайдаланатын осыған ұқсас математикалық үлгіні жасауға болады. Алайда, қайшы келмейтін математикалық үлгілерді құру, біздің кеңістік туралы күңгірт түсініктеріміз бен субъективті тәжірибелерімізге сүйеніп құрылғанын атап өтуіміз керек. Сондықтан, бұдан екі жарым мың жыл бұрын ұлы философ қойған жалпы мәселені шештік деп есептемейміз. Ғылым әлемінде Зенон апориялары жөніндегі талас-тартыстар әлі күнге дейін саябырлаған жоқ. Микроәлемде атом ядросының өлшемімен шамалас қашықтықта дискреттіліктің рөлі күрт артатынын көрсеткен кванттық механиканың (элементар бөлшектерді зерттейтін физиканың бөлімі) қазіргі жетістіктері отқа май құйғандай болды.

Қорытындыларының соңы сөзсіз селқос әрекетсіздікке әкелетін, жалпы бәрібір түсінбейтінді түсінуге тырысудың керегі не дейтін Элейлік Зенонмен ой түкпірінде келіскіміз келмейді. Бұл тарауда біз **математикалық анализді** оқып-үйренуге кірісеміз. Математиканың осы бөлімі аясында құрылған ғылыми үлгілердің тиімділігі мен пайдалылығына көз жеткізу және оны бағалау оңай нәрсе емес екені анық.

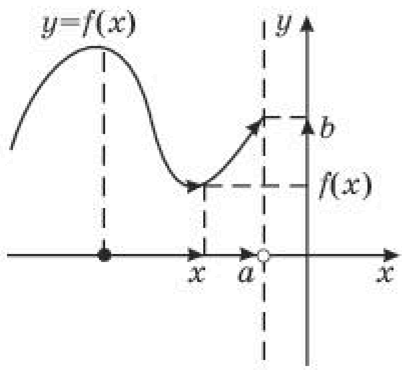
§1 ФУНКЦИЯНЫҢ ШЕГІ ЖӘНЕ ҮЗІЛІССІЗДІК

«Математика – адамзаттың әлемді барлық мүмкін болатын тәсілдермен зерттеуді ұсынған ғылымы».
Иммануил Кант

1.1 Функцияның нүктедегі шегінің анықтамасы

a – қандай да бір белгілі сан болсын.

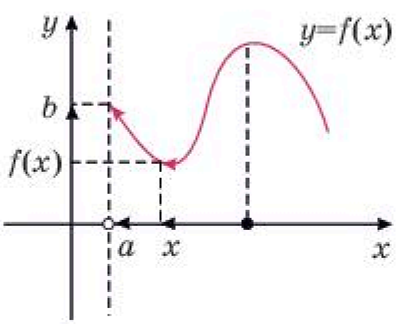
«x саны a-ға сол жағынан ұмтылады» (белгіленуі «$x \to a-0$») дегенді былайша түсінеміз: x-тің мәні a-ға шексіз жақындай отырып, артады; x-тің мәні a-дан кіші, бірақ a-дан айырмашылығы өте аз болады.



1-сурет

«x саны a-ға оң жағынан ұмтылады» (белгіленуі $x \to a+0$) дегенді былайша түсінеміз: x-тің мәні a-ға шексіз жақындай отырып, кемиді; x-тің мәні a-дан үлкен, бірақ a-дан айырмашылығы өте аз болады.

$x \to a-0$ шартынан қандай да бір $f(x)$ функциясы мәнінің b санынан айырмашылығы өте аз екендігі шықса, онда «x шамасы a-ға сол жағынан ұмтылғанда $f(x)$ функциясының шегі b-ға тең» деп түсінеміз. Сонымен қатар, x-тің кейбір немесе барлық мәндерінде $f(x)=b$ теңдігі орындалады (1-сурет). Белгіленуі: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)=b$.



2-сурет

$x \to a+0$ шартынан $f(x)$ функциясы мәнінің b санынан айырмашылығы өте аз екендігі шықса, онда «x шамасы a-ға оң жағынан ұмтылғанда $f(x)$ функциясының шегі b-ға тең» деп айтамыз. Сонымен қатар x-тің кейбір немесе барлық мәндерінде $f(x)=b$ теңдігі орындалады (2-сурет).

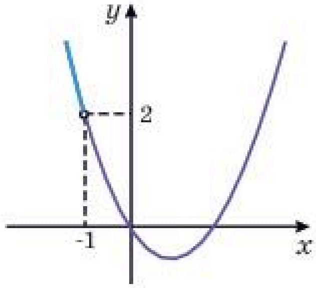
Белгіленуі: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)=b$.

1 мысал

$f(x)=\dfrac{x^3-x}{x+1}$ функциясы берілген.

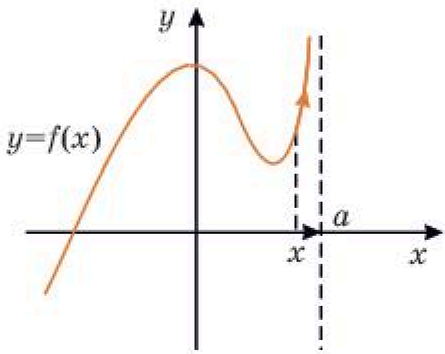
Анықталу облысы: $x\neq-1$.

Егер $x\neq-1$ болса, онда $f(x)=x(x-1)$ функциясының графигі $(-1;2)$ «үзіліс» нүктесі бар парабола (3-сурет). Бұл жағдайда: $\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)=2$.



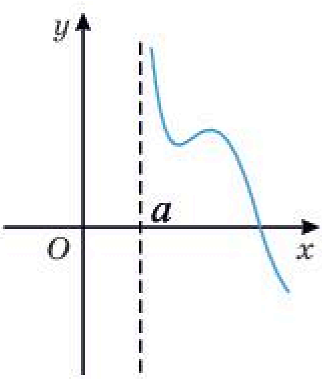
3-сурет

Егер $x\to a-0$ болғанда $f(x)$ мәндері шексіз артатын болса, онда $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=+\infty$ (4-сурет) деп жазамыз да, x шамасы a-ға сол жағынан ұмтылғанда $y=f(x)$ функциясының шегі плюс шексіздікке тең болады деп айтамыз.

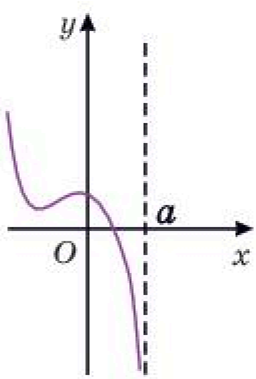


4-сурет

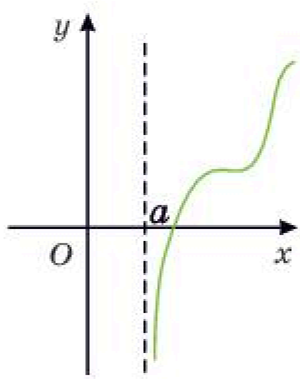
Осыған ұқсас тағы 3 жағдай анықталады: $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=+\infty$ (5-сурет), $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=-\infty$ (6-сурет) және $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=-\infty$ (7-сурет).



5-сурет



6-сурет



7-сурет

«$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$» және «$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$» жазуларын сәйкесінше $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі **оң жақ** және **сол жақ шегі** деп атаймыз.

1-АНЫҚТАМА.

Егер $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$ және $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ болатындай b саны бар болса, онда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ (x саны a-ға ұмтылғанда $f(x)$-тің шегі b-ға тең) бар болады; қалған жағдайлардың бәрінде $f(x)$-тің a нүктесіндегі шегі болмайды дейтін боламыз.

Біржақты шектің (оң жақты және сол жақты) анықтамасынан $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ жазылуын былай түсіну керек: «x мәнінің a-дан айырмашылығы неғұрлым аз болса, x-тің a-ға жақындау тәсілінен тәуелсіз, $f(x)$-тің b-дан айырмашылығы соғұрлым аз болады. Егер x-тің a-дан айырмашылығы өте болса, онда $f(x)$-тің де b-дан айырмашылығы мүлде аз болады», 1-мысалда (3-сурет) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$. Шектердің интуитивті түсінікті қасиеттерін дәлелдемей келтіреміз.

1) Кез келген тұрақты c үшін мынадай теңдік орындалады:

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x))=c\cdot\lim_{x\to a} f(x),$$

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$,

3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)$,

4) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$,

5) a нүктесінің қайсыбір аймағында $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ және $g(x)\neq 0$ болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

6) Үзіліссіз функциялар үшін (анықтамасы төменде беріледі)

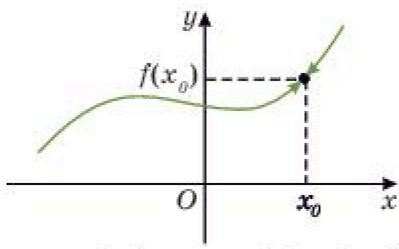
$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

Келтірілген формулалардың әрқайсысында, онда берілген шектердің барлығы да бар және олар $\pm\infty$-ке тең емес деп алынған.

1.2 Функцияның нүктедегі және аралықтағы үзіліссіздігі

2-АНЫҚТАМА.

Егер қандай да бір функция үшін қайсыбір нүктеде біржақты шектің екеуі де бар болса және олар берілген нүктедегі функцияның мәніне тең болса, онда берілген нүктеде функция **үзіліссіз функция** делінеді.



$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$$

10-сурет

3-АНЫҚТАМА.

Егер берілген аралықта функцияның үзіліс нүктелері жоқ болса, онда функцияны **осы аралықта үзіліссіз** деп атаймыз.

Егер аралықта функция үзіліссіз болса, онда осы аралық ішіндегі әрбір нүктеде функция үзіліссіз болатынын көру қиын емес. Кері тұжырым да дұрыс: егер белгілі бір аралық ішіндегі әрбір нүктеде функция үзіліссіз болса, онда ол бүкіл аралықта үзіліссіз болады. Аралықтағы үзіліссіздіктің негізгі мағынасы мынада: аргументтің өте аз, нөлге жақын өзгерулері функция мәндерінің де өте аз, нөлге жақын өзгерулерін тудырады. Функцияның мәндері «секірмелі» түрде өзгере алмайды. Олай болса аралықта үзіліссіз болатын функциялардың қосындысы, айырмасы және көбейтіндісі де үзіліссіз болатыны шығады. Үзіліссіз функциялардың қатынасы, бөлшектің бөлімінің «нөлдерінен» басқа нүктелердің барлығында үзіліссіз болады.

Егер функцияның графигін қарындашты қағаз бетінен ажыратпай сызып шығуға болатын болса, онда функция үзіліссіз делінеді. Бұл анықтама да, оған дейінгі анықтамалар да математикалық мағынада қатаң сақталатын анықтамалар емес, бірақ функцияның үзіліссіздігі туралы жақсы түсінік береді. Мысалы, келесі өте пайдалы теорема айқын болады:

1-ТЕОРЕМА.

Егер f функциясы $[a;b]$ аралығында үзіліссіз және $f(a)f(b)<0$ болса, онда $[a;b]$ аралығында $f(c)=0$ болатындай ең болмағанда бір c нүктесі бар болады.

Басқаша айтқанда, егер кесіндіде үзіліссіз болатын функция кесіндінің ұштарында әртүрлі таңбаға ие болса, онда осы кесіндіде $f(x)=0$ теңдеуінің ең болмаса бір түбірі болады. Шындығында, нақтылық үшін $f(a)<0$ және $f(b)>0$ болсын. Бұл координатасы $(a,f(a))$ болатын A нүктесі Ox өсінен төмен, ал координатасы $(b,f(b))$ болатын B нүктесі Ox өсінен жоғары жатыр (өздерің салыңдар) дегенді білдіреді. Шарт бойынша, $f(x)$ – $[a;b]$ жиынында үзіліссіз, оның графигі – үзіліссіз сызық. A және B нүктелерін «қарындашты қағаз бетінен ажыратпай» бір-біріне қосу үшін жасалған кез келген қадам Ox өсін ең болмағанда бір рет қиып өтуге әкеледі. Міне, бар болғаны осы.

4-АНЫҚТАМА.

Егер $f(x)$ функциясы белгілі бір $x=a$ нүктесінде үзіліссіз емес болса, онда a нүктесі $f(x)$ функциясының **үзіліс нүктесі** деп айтылады.

1.3 Функцияның шексіздіктегі шегі

«x шексіздікке ұмтылады» дегенді «$x\to\infty$» деп белгілеп, «x айнымалысының мәні шексіз өседі; кез келген үлкен M саны үшін x айнымалысының мәні ең соңында M-нен артық болады» деп түсінетін боламыз.

Егер «$x\to\infty$» шартынан $f(x)$ функциясының мәні шексіз өсетіні шығатын болса, яғни x айнымалысының кейбір мәнінен бастап, $f(x)$ мәні алдын-ала берілген кез келген саннан артық болса, онда x айнымалысы шексіздікке ұмтылатын $f(x)$ функциясының шегі шексіздікке тең болады және былай жазылады: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

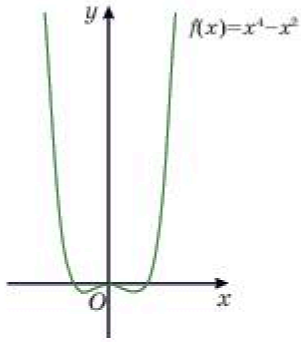
Келесі жағдайлар да осыған ұқсас түсіндіріледі:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

Мысалы, дәрежесі нөлден өзгеше жұп сан болатын, бас коэффициенті оң кез келген $P(x)$ көпмүшесі үшін $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=+\infty$ қатынасы орындалады.

Мысалы: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4-x^2\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4-x^2\right)=+\infty$ (9-сурет).

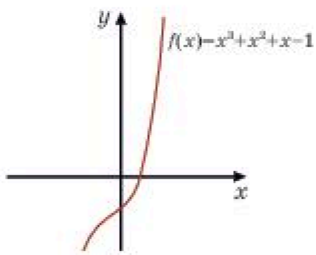
Бас коэффиценті оң тақ сан болатын кез келген $P(x)$ көпмүшесі үшін $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=-\infty$ қатынастары орындалады.



9-сурет

Мысалы: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x^2+x-1\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+x^2+x-1\right)=-\infty$. (10–сурет).

Естеріңе саламыз: $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+$ $+a_1x+a_0$ түріндегі функция **көпмүше** деп аталады, мұндағы $a_n, a_{n-1}, a_{n-2},\ldots,a_1, a_0$ – қандай да бір сандар, $a_n\neq 0$ – бас коэффициент, n– көпмүшенің дәрежесі. Мысалы, бізге белгілі квадрат үшмүше – бұл 2-ші-дәрежелі көпмүше.

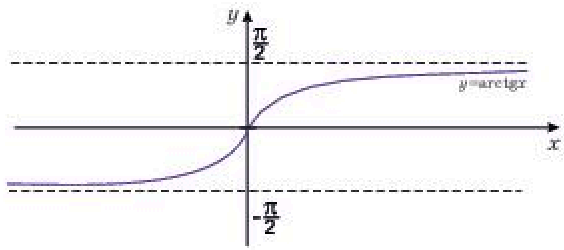


10-сурет

Егер $x\to\infty$ шартынан $f(x)$ функциясының мәні қандай да бір $b\neq\pm\infty$ санына шексіз жақындайтыны белгілі болса, яғни x**-тің барлық** өте үлкен мәндерінде $f(x)$ функциясы мәнінің b санынан айырмашылығы жоқтың қасы болса, онда x айнымалысы шексіздікке ұмтылатын $f(x)$ функциясы b-ға ұмтылады және $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$ түрінде жазылады.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$ жазбасы да осыған ұқсас түсіндіріледі.

Мысалы, $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x=-\dfrac{\pi}{2}$ (11-сурет).



11-сурет

Есептер

1-бөлім

1. (1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ функциясының графигін салыңдар.

а) Функцияның анықталу облысын және мәндер жиынын табыңдар.

ә) Графикті пайдаланып, анықтау керек: $\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)$. $a=-1$ нүктесінде $f(x)$ функциясының шегі бар екенін дәлелдеп, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ табыңдар.

б) Функцияның үзіліссіздік аралығын және үзіліс нүктесін көрсетіңдер.
в) Анықтаңдар: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. (2) Функциясының графигін салыңдар: $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

а) Функцияның анықталу облысын және мәндер жиынын табыңдар.
ә) Графикті пайдаланып, $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)$ анықтау керек.

б) Графикті пайдаланып, $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ анықтау керек.

в) Функцияның үзіліссіздік аралығын және үзіліс нүктесін көрсетіңдер.
г) Анықтаңдар: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. (1) Анықтаңдар: $\lim\limits_{x\to-1+0} \arcsin x$, $\lim\limits_{x\to1-0} \arcsin x$.

4. (2) $y=\operatorname{sign} x$ функциясы (x санының таңбасы) мынадай түрде анықталады:

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases}0, \text{ егер } x=0;\\ \dfrac{x}{|x|}, \text{ егер } x\neq 0.\end{cases}$$

а) Функцияның графигін салыңдар. Оның анықталу облысын және мәндер жиынын табыңдар.
ә) Анықтаңдар: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{sign} x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\operatorname{sign} x)$.

б) Анықтаңдар: $\lim\limits_{x\to0+0}(\operatorname{sign} x)$, $\lim\limits_{x\to0-0}(\operatorname{sign} x)$.

5. (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$ шектері бар ма? Егер жоқ болса, неліктен? Егер бар болса, неге тең?

6. (3) Функция $y=f(x)$ функциясы мынадай түрде анықталады:

$$f(x)=\begin{cases}x+1+\pi, & \text{егер} \quad x\in(-\infty;-1),\\ \arccos x, & \text{егер} \quad x\in(-1;1),\\ x^2, & \text{егер} \quad x\in(1;+\infty).\end{cases}$$

а) $y=f(x)$ функциясының графигін салыңдар, функцияның анықталу облысын және мәндер жиынын табыңдар.
ә) Анықтаңдар: $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)$.

б) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ шектері бар ма? Егер жоқ болса, неліктен? Егер бар болса, неге тең?

в) Анықтаңдар: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

г) Функцияның үзіліссіздік аралығын және үзіліс нүктесін көрсетіңдер.

2-бөлім

7. (1) $f(x)=\dfrac{-x^2+1}{x+1}$ функциясының графигін салыңдар.

а) Функцияның анықталу облысын және мәндер жиынын табыңдар.

ә) Графикті пайдаланып, $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)$ анықтаңдар. $f(x)$ функциясының $a=-1$ нүктесінде шегі бар екенін дәлелдеп, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ табыңдар.

б) Функцияның үзіліссіздік аралығын және үзіліс нүктесін көрсетіңдер.

в) Анықтаңдар: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

8. (2) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$ функциясының графигін салыңдар

а) Функцияның анықталу облысын және мәндер жиынын табыңдар.

ә) Графикті пайдаланып, $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)$ анықтаңдар.

б) Графикті пайдаланып, $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ анықтаңдар.

в) Функцияның үзіліссіздік аралығын және үзіліс нүктесін көрсетіңдер.

г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ анықтаңдар.

9. (1) $\lim\limits_{x\to-1+0} \arccos x$, $\lim\limits_{x\to1-0} \arccos x$ анықтаңдар.

10. (3) $y=f(x)$ функциясын қарастырайық, мұндағы $f(x)=3\operatorname{sign}(x-2)$.

а) Функцияның графигін салыңдар. Оның анықталу облысын және мәндер жиынын табыңдар.

ә) Анықтаңдар: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

б) Анықтаңдар: $\lim\limits_{x\to2+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)$.

в) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ шегі бар ма?

11. (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x$ шектері бар ма? Егер жоқ болса, неліктен?

Егер бар болса, неге тең?

12. (3) $y=f(x)$ функциясы мынадай түрде анықталады:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{x+2}, \text{ егер } x\in(-\infty;-2),\\ \arcsin\dfrac{1}{2}x, \text{ егер } x\in[-2;2],\\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ егер } x\in(2;+\infty).\end{cases}$$

а) $y=f(x)$ функциясының графигін салыңдар, функцияның анықталу облысын және мәндер жиынын табыңдар.

ә) Анықтаңдар: $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2+0} f(x)$.

б) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ шектері бар ма? Егер жоқ болса, неліктен? Егер бар болса, неге тең?

в) Анықтаңдар: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

г) Функцияның үзіліссіздік аралығын және үзіліс нүктесін көрсетіңдер.

1.4 $\frac{0}{0}$ және $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтар.

$f(x)$ және $g(x)$ функциялары үшін $\lim\limits_{x\to a} f(x)=p$ және $\lim\limits_{x\to a} g(x)=q$ қатынастары орындалсын делік, мұндағы p және q – қандай да бір сандар, мұндағы $q\neq0$. Онда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ қасиеті бойынша $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{p}{q}$ теңдігін аламыз. Мысалы, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=50000000000$ болса және $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ екенін түсіну қиын емес.

Енді, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ және $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ болсын делік. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ шегінің мәні неге тең болуы мүмкін?

5-АНЫҚТАМА.

Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ және $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ шегін есептеген кезде $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ **түріндегі анықталмағандық туындайды** деп айтылады.

Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ және $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ бір мезгілде орындалса, онда сәйкес **анықталмағандық** жағдай туындайды.

6-АНЫҚТАМА.

Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ және $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ шегін есептегенде $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ **түріндегі анықталмағандық туындайды** деп айтылады.

Екі анықтамада да $a=\pm\infty$ теңдігі орындалуы мүмкін екенін байқаймыз. Анықталмағандық орын алған кезде шекті есептеу **анықталмағандықты ашу** деп аталады.

Мысалы, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ шегін қарастырайық. Бұл жерде $f(x)=x^3-1$ және $g(x)=x-1$.

$f(1)=g(1)=0$ екенін байқаймыз. Сонымен қатар, функциялардың екеуі де $a=1$ нүктесінде үзіліссіз. Онда $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$ және $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ шегінде $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ түріндегі анықталмағандық орын алып тұр. Осы анықталмағандықты ашамыз: $\lim\limits_{\to}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\quad}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x\ \ +x+1)}{x-1}=$ $=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$. Бұл дегеніміз, x-тің 1-ге өте жақын мәндерінде $f(x)\approx 3g(x)$ жуықтау теңдігі орындалады.

Енді, $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^3-1}{(x-1)^2}$ шегін қарастырайық. Осы жерде $f(x)=x^3-1$ және $g(x)=(x-1)^2$, мұндағы $x\to 1-0$. $f(1)=g(1)=0$ екенін байқаймыз. Тағы да $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ түріндегі анықталмағандық туындап тұр. Бірақ осы жолы $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^3-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{(x^2+x+1)}{(x-1)}=-\infty$, себебі $\lim\limits_{x\to 1-0}(x^2+x+1)=3$ және $\lim\limits_{x\to 1-0}(x-1)=0-0$.

Енді $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^3-1)^2}{x-1}$ шегін қарастырамыз.

Бұл жағдайда $f(x)=(x^3-1)^2$ және $g(x)=x-1$. Тағы да $f(1)=g(1)=0$,

бірақ $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^3-1)^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x-1)(x^2+x+1)^2=0.$

Осы есептеудің нәтижесінен қандай қорытындылар жасауға болады?

$x\to1$ жағдайда $f(x)=(x^3-1)^2$ және $g(x)=x-1$ функцияларының екеуінің де мәні нөлге ұмтылады. Бірақ, бір жағынан x-тің мәні 1-ге өте жақын, $f(x)$ функциясының мәні $g(x)$ функциясының мәнімен салыстырғанда өте кішкентай.

Көріп отырғандарыңыздай, анықталмағандықты ашқан кезде кез келген шамаға тең болуы мүмкін, сондықтан да анықталмағандық деп айтылады.

Шектерді есептеу үшін практикада шектердің анықтамасы қолданылады. Егер $f(x)$ функциясы a нүктесінде үзіліссіз болса, онда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

теңдігі орындалады ($x=a$ алмастыруы функцияда нәтиже береді). Егер де a нүктесі үзіліс нүктесі болса және анықталмағандық туындаса, онда алгебралық түрлендірулердің көмегімен анықталмағандықты ашамыз. Бірнеше мысал қарастырамыз.

2 мысал

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ шегін есептеңдер.

$x=0$ нүктесінде анықталмағандық туындамайтындықтан, функцияның $x=0$ нүктесіндегі мәнін есептелік.

Жауабы: 1.

3 мысал

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ шегін есептеңдер.

$x=1$ тікелей алмастыруын жасасақ $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық шығады.

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеу формуласын пайдаланып, көпмүшені көбейткіштерге жіктейміз: $2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$ және $x^2-1=(x-1)(x+1)$, мұндағы x_1, x_2– квадрат үшмүшенің түбірлері.

Сонда мынаны аламыз:

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1+1}{2\cdot1+1}=\frac{2}{3}.$$

Жауабы: $\frac{2}{3}$.

4 мысал

Есептеңдер: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x+1}$.

Бұл мысал алғашқы екеуінен өзгеше, себебі x-тің орнына ∞ қоя алмаймыз. Сондықтан, бұл жерде мынадай әдіс қолданамыз: бөлшектің алымын да, бөлімін де x^2-қа бөлеміз, сонда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{2x^2-x+1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$ аламыз.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ және $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ екенін байқаймыз. Демек,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Жауабы: $\dfrac{1}{2}$.

5 мысал

Есептеңдер: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

Ол үшін алымындағы жақшаларды ашамыз және ұқсас қосылғыштарды біріктіреміз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5-1-5x}{x^2+x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{10x^2+10x^3+5x^4+x^5}{x^2+x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(10+10x+5x^2+x^3\right)}{x^2\left(1+x^3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{10+10x+5x^2+x^3}{1+x^3}=\frac{10+10\cdot 0+5\cdot 0+0}{1+0}=10.$$

Жауабы: 10.

6 мысал

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x+2x^2)(1+3x)-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+3x+2x^2+3x+9x^2+6x^3-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^3+11x^2+6x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(6x^2+11x+6)}{x}=\lim_{x\to 0}(6x+11x+6)=6.$$

Жауабы: 6.

7 мысал

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ шегін есептеңдер.

$x=4$ мәнін қойғанда $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ анықталмағандығы шығады. Құрамында иррационал өрнегі бар шекті есептегенде алымын да, бөлімін де түйіндес өрнектерге көбейту тәсілін жиі қолданамыз:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}.$$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ квадраттар айырымы формуласын қолданып, мынаны аламыз:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(\left(\sqrt{1+2x}\right)^2-3^2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(1+2x-9)+\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}=\frac{2\left(\sqrt{4}+2\right)}{\sqrt{1+2\cdot 4}+3}=\frac{2\cdot 4}{6}=\frac{4}{3}.$$

Жауабы: $\dfrac{4}{3}$.

Маңызды ескерту: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ тамаша шегі орындалады.

Бұл шекті тригонометриялық функциялары бар шектерді есептегенде қолдануға болады.

8 мысал

Есептеңдер: $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{5x}{x}$

Алымын да, бөлімін де 5-ке көбейтеміз, сонда

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5$, себебі $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=1$.

Жауабы: 5.

Есептер

1-бөлім

1. (1) Шектерді табыңдар:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+1}{3x-2}$; ә) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+c}{bx-d}$, мұндағы a, b, c және d – қандай да бір сандар. «Екі сызықтық функцияның мәндерінің қатынастары...» деп басталатын жалпылама ұйғарым тұжырымдаңдар.

2. (1) Шектерді табыңдар:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x-5}{7x^2+1}$; ә) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+10x+7}{7x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+1000000000x}{7x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}$. Жалпылама ұйғарым тұжырымдаңдар.

3. (2) 1-ші және 2-ші есептердің жалпылама ұйғарымдарын қолданып, есептемей-ақ шектерді анықтаңдар: а) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{4-60z}{12z+4000}$; ә) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x+1}{2x^2-1}$.

4. (2) Шектерді табыңдар:

а) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{4-60z}{12z^2+4000}$; ә) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{12z^2+4000}{4-60z}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x+1}{20x^3-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{20x^3-1}{4x^2+3x+1}$; г) $n=m$, $n<m$, $n>m$ жағдайлары үшін

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1+b_0}$, мұндағы n және m – натурал сандар.

«Екі көпмүшенің мәндерінің қатынасы...» деп басталатын жалпылама ұйғарым тұжырымдаңдар.

Шектердің мәнін есептеңдер (5–8):

5. (2) а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}-2x)$; ә) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+1}{\sqrt{x^2+3x+10}+3x}$.

6. (2) а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-9}{x+3}$; ә) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to b}\frac{x^2-b^2}{x-b}$.

7. (3) а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$; ә) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

8. (3) а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$; ә) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$; г) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

2-бөлім

Шектерді табыңдар (9–10):

9. (1) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x^2+5x+2}$; ә) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+1)(3x-1)}{(x+2)(4x-1)}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{5x+1}{3x+2}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{3x}-\frac{5}{x^2}\right)$.

10. (1) а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+1)(x+3)}-x)$; ә) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+1}}$.

11. (2) $a\geq 0$ болғанда $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}x)=0$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

12. (2) Шектерді табыңдар:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2-5x+2}{4x-8}$; ә) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{4x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to x_1}\frac{ax^2+bx+c}{x-x_1}$, мұндағы x_1 ax^2+bx+c үшмүшелігінің түбірі болып табылады.

Шектердің мәнін есептеңдер (13–15):

13. (3) а) $\lim\limits_{x\to 0.5}\frac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$; ә) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0.4}\frac{5x^3-2x^2+5x-2}{5x^4-2x^3-5x^2+2x}$.

14. (2) а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; ә) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

15. (3) а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$; ә) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

16. (2) Маржанның ағаларының жастарының көбейтіндісі 1664-ке тең. Олардың кішісі үлкенінен екі есе кіші. Маржанның неше ағасы бар?

17. (2) Геометриялық прогрессияның алғашқы үш мүшесінің қосындысы 12-ге, ал алғашқы алты мүшесінің қосындысы 84-ке тең. Прогрессияның үшінші мүшесін табыңдар.

18. Теңсіздікті шешіңдер:

а) (2) $\left|x^2+2x-4\right|>4$;

ә) (2) $|2x+1|+|3x+2|\le 5x+3$;

б) (2) $\left|\left|x^3-x-1\right|-5\right|>x^3+x+8$.

19. (2) Бөлмеде 3 шырағдан бар, олардың әрқайсысын басқаларынан тәуелсіз қосып немесе өшіріп қоюға болады. Түнгі уақытта бөлмені жарықтандырудың неше тәсілі бар?

A) 6; B) 7; C) 8; D) 9; E) 10.

Жауаптары:

1. а) $\frac{7}{3}$; ә) $\frac{a}{b}$. **2.** а) 0; ә) $-\frac{3}{7}$; б) $-\frac{3}{7}$; в) $\frac{a}{a_1}$. **3.** а) -5; ә) 2.

4. а) 0; ә) $-\infty$; б) 0 в) ∞; г) $n<m$ болғанда 0, $n=m$ болғанда $\frac{a_n}{b_m}$, $n>m$ болғанда $\frac{a_n}{b_m}$ өрнегінің таңбасына байланысты $+\infty$ немесе $-\infty$.

5. а) 0; ә) $\frac{3}{2}$.

6. а) -4; ә) -6; б) $2b$.

7. а) -1; ә) 4; б) -2.

8. а) 2; ә) $0,4$; б) $0,4$; в) $\frac{m}{n}$; г) $\cos a$.

9. а) 2; ә) $1,5$; б) $\frac{5}{3}$; в) $\frac{2}{3}$.

10. а) 0; ә) $0,5$.

12. а) $-0,25$; ә) $0,75$; б) $a(x_1-x_2)$.

13. а) $0,4$; ә) $-2,5$; б) $-\frac{145}{42}$.

14. а) $1,5$; $\frac{1}{16}$.

15. а) 1; ә) 0, 5; б) 2; в) $-\sin a$.

16. 3.

17. 16.

18. а) $(-\infty;-4)\cup(-2;0)\cup(2;+\infty)$; ә) $x\ge-\frac{1}{2}$; б) $x\le-\sqrt[3]{6}$.

19. C.

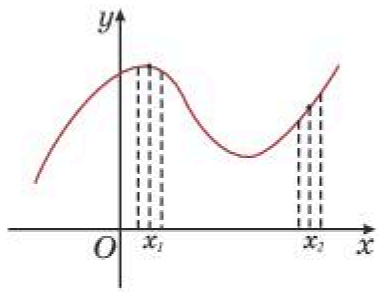
§2 ТУЫНДЫ ТҮСІНІГІ

2.1 Кіріспе

«Математиканың оңайлығы оның таза логикалық құрылымының мүмкіндіктеріне, ал көпшілікті қорқытатын қиындығы – оны басқаша мазмұндау мүмкін еместігіне негізделген».

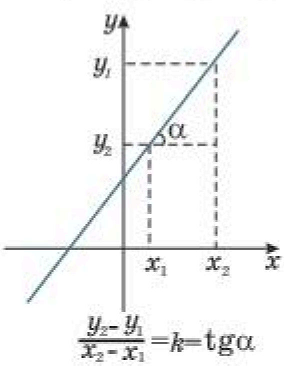
Хуго Штейнгаус

Физикалық шамалардың өзгеру заңы белгілі болғанда, олардың өзгеру жылдамдығын өлшеуге талпыныс жасау нәтижесінде туынды ұғымы пайда болды. Еркін түсу нәтижесінде дене t уақыт ішінде $\frac{gt^2}{2}$ жол жүретіні, ал t уақыт мезетіндегі түсу жылдамдығы gt-ға тең екені физика курсынан белгілі. Бұл функциялар жұбы тек берілген құбылыстың ғана ерекшеліктері бола ма, әлде олардың арасында қандай да бір жалпы заңдылықтың дербес жағдайы ретіндегі байланыс бар ма? 1-суретте қайсыбір $f(t)$ функциясының графигі кескінделген. x_1 нүктесінің аймағында функцияның мәні x_2 нүктесінің аймағындағы мәнге қарағанда баяуырақ өзгеретіні түсінікті. Бірақ осы f функциясын терминдермен қалай сипаттауға болады?



1-сурет

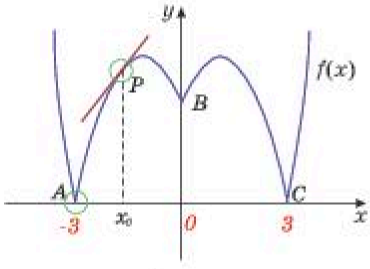
Бұл тұрғыдан $y=kx+m$ сызықтық функцияны қарастыру әлдеқайда түсінікті болады. Олардың өзгеру жылдамдығы тұрақты және k-ға тең. Егер дәлірек айтсақ, y_2-y_1 функциясы өзгеруінің x_2-x_1 аргументінің өзгеруіне қатынасы k-ға тең. x_1 мен x_2 – кез келген мәндер (2–сурет).



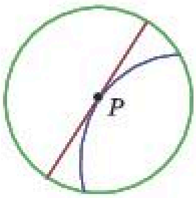
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k=\operatorname{tg}\alpha$$
2-сурет

Физикалық, химиялық және басқа табиғат құбылыстарын сипаттайтын функциялардың көпшілігінің графиктері «тегіс» (сынусыз) немесе «бөлікті-тегіс» болып келеді. Негізгі ой мынада: **мұндай графиктердің кішкентай бөлігі түзудің кесінділеріне ұқсас болады.**

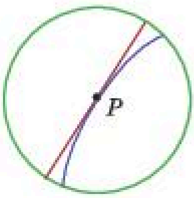
Осыған дейін салынған функцияның графигін қарастырайық. P нүктесінде және сол сияқты A, B және С нүктелерінен басқа кез келген нүкте арқылы **жанама түзу жүргізуге болатыны** түсінікті. **Жанама – P нүктесінің кіші аймағында графикпен жанасатын (беттесетін) түзу.** Кескіннің өлшемін өзгертпей, центрі P нүктесі болатын шеңберлер сызып көрсек, онда шамамен мынадай тізбекті аламыз: 4, 5, 6-суреттер.



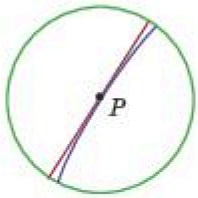
3-сурет



4-сурет



5-сурет



6-сурет

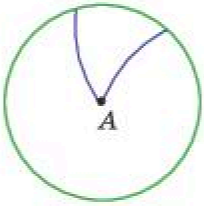
Графиктің P нүктесі тиісті болатын кішігірім бөлігі жанама кесіндісімен көбірек беттеседі. Жанама түзу дегеніміз $y=kx+m$ сызықтық функциясының графигі. k коэффициенті x_0 нүктесіндегі $f(x)$ функциясы туындысының мәні делінеді. Туындының x_0 нүктесіндегі мәні жанаманың k бұрыштық коэффициентіне тең.

1-АНЫҚТАМА.

Егер $y=f(x)$ функциясына $(x_0;f(x_0))$ нүктесі арқылы $y=kx+m$ жанамасы жүргізілетін болса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде **дифференциалданады** немесе $f(x)$ функциясың x_0 **нүктесінде туындысы бар** деп аталады. Туындының мәні жанамананың **бұрыштық коэффициенті** k-ға тең.

Егер центрі A нүктесі болатын шеңберлерді қарастыратын болсақ, онда радиусты қаншама кіші алсақ та, A нүктесі жататын графиктің бөлігі түзудің кесіндісінде ұқсамайтын болады (7-сурет). Дәл осыны B және C нүктелері үшін де айтуға болады.

Сонда $x=-3,0,3$ нүктелерінде $f(x)$ функциясының туындысы жоқ делінеді.

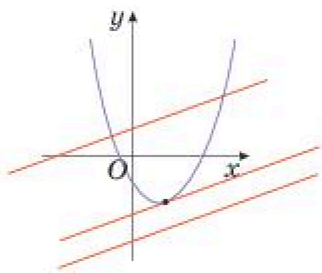


7-сурет

2.2 Дифференциалдық есептеудің негізгі қағидасы

Сонымен осы кезеңде квадраттық функцияның графигіне жүргізілген жанаманы нақты анықтау мүмкіндігіне ие болдық. Кез келген $y=kx+m$ түзуінің $y=ax^2+bx+c$ параболасымен не 0, не 1, не 2 ортақ нүктесі бар болады (8-сурет).

Шындығында, түзу және параболаның ортақ нүктелерінің саны $ax^2+bx+c=kx+m$, $ax^2+(b-k)x+(c-m)=0$ теңдеулерінің шешімдер санына тең. $a\neq0$ болғандықтан, соңғы теңдеу квадраттық теңдеу болады. Квадраттық теңдеудің не 0, не 1, не 2 шешімі бар екені бізге белгілі.



8-сурет

2-АНЫҚТАМА.

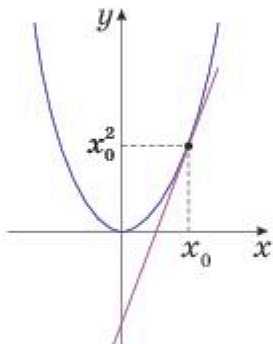
Егер $y=kx+m$ түзуінің параболамен тек бір ғана ортақ нүктесі бар болса, онда $y=kx+m$ түзуі параболаға **жүргізілген жанама** деп аталады.

1 мысал

Абсциссасы $x_0=3$ болатын нүктеде $y=x^2$ параболасына жүргізілген жанаманың теңдеуін табыңдар.

Шешуі. Параболадағы абсциссасы $x_0=3$ болатын нүктенің ординатасы $y_0=x_0^2=3^2=9$.

$(3;9)$ нүктесі арқылы өтетін барлық түзулердің теңдеуі $y-9=k(x-3)$ түрінде болады. Берілген түзу мен $y=x^2$ параболасының бір ғана ортақ нүктесі болу үшін $\begin{cases} y-9=k(x-3) \\ y=x^2 \end{cases}$ жүйенің бір ғана шешімі болу керек. $y=x^2$ теңдеуін бірінші теңдеуге қойсақ: $x^2-9=k(x-3)$, $D=k^2-12k+36=0$ шығады.

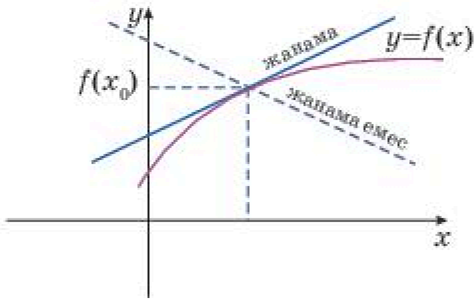


9-сурет

Алынған квадрат теңдеудің дискриминанты нөлге тең болса, онда оның жалғыз ғана шешімі болады:

$$D=k^2-12k+36=0,\ k=6.$$

Табылған $k=6$ мәнін $y-9=k(x-3)$ теңдеуіне қойып, $y=6x-9$ жанамасының теңдеуін аламыз. Есеп шешілді.



10-сурет

1-мысалдағы $y=x^2$ функциясының графигіне абсциссасы $x_0=3$ болатын нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті: $k=6$. Бұл $y=x^2$ функциясының $x_0=3$ нүктесіндегі туындысы 6 санына тең дегенді білдіреді.

Жалпы жағдайды қарастырайық. $y=kx+m$ түзуі y $f(x)$ функциясының графигіне абсциссасы x x болатын нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуі болсын. Жанасу нүктесінің координатасы: $(x_0;f(x_0))$ (10-сурет).

Жанаманың қатаң түрдегі анықтамасын келтірмей-ақ (бұл сабақта ондай анықтама беру мүмкін емес), біршама түсініктеме берумен шектелеміз.

1) жанама $(x_0;f(x_0))$ нүктесі арқылы өтетін басқа түзулерден ерекшеленеді, өйткені осы нүктенің маңында оның бөлігі $y=f(x)$ **функциясының графигімен жанасады** (10-сурет).

2) x_0-ге жақын x нүктесінде, басқа сызықтық функцияларға қарағанда $y=kx+m$ сызықтық функциясының мәні $f(x)$ функциясының мәніне өте жақын болады (10-сурет).

3) x_0-ге жақын x нүктесінде, $y=f(x)$ графигінің кішігірім бөлігі $y=kx+m$ жанамасының кішігірім бөлігі тәрізді болады (10-сурет).

Дифференциалдық есептеудің негізгі қағидасына тоқталамыз:

Егер $(x_0;f(x_0))$ нүктесінде $y=f(x)$ функциясының графигіне $y=kx+m$ жанамасын жүргізу мүмкін болса, онда x_0 мәніне өте жақын x мәні табылып, $f(x)\approx kx+m$ жуық теңдігі орындалады.

Дифференциалдық есептеудің негізгі принципі x_0 нүктесінің өте кішкентай аймағында, $y=f(x)$ функциясының орнына $y=kx+m$ сызықтық функциясын қарастыруға мүмкіндік береді.

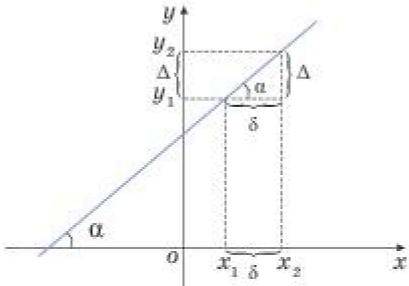
3-АНЫҚТАМА.

Берілген функцияның графигін $x=x_0$ нүктесінде жүргізілген $y=kx+m$ жанамасының k бұрыштық коэффициентін, $f(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктесіндегі **туындысы** деп атайды.

Белгіленуі. $f(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктесіндегі туындысы $f'(x_0)$ деп белгіленеді.

Ескерту. $f(x)=kx+m$ сызықтық функцияның графигі болып табылатын түзу өз-өзіне жүргізілген жанама болып табылады. Сондықтан $f(x)=kx+m$ сызықтық функциясының туындысы кез келген нүктеде k бұрыштық коэффициентіне тең.

x аргументі мәнінің $\delta=x_2-x_1$ шамасына өзгеруі $y=kx+m$ сызықтық функциясы мәнінің $\Delta=y_2-y_1=k\delta$ шамасына өзгеруіне алып келеді (11-сурет).



11-сурет

2 мысал

$f(x)=-\dfrac{1}{x}$ функциясына абциссасы $x_0=\dfrac{1}{2}$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін табыңдар. Туындысының $x_0=\dfrac{1}{2}$ нүктесіндегі мәнін табыңдар.

Шешуі:

$f(x)=-\dfrac{1}{x}$ функциясының графигі гипербола болып табылады (өздерің салып көріңдер). $y=kx+b$ түзуі гиперболаны жанайды сонда және тек қана сонда, егер онымен бір ғана ортақ нүктесі болғанда, ол геометриялық тұрғыдан түсінікті. Шарт бойынша ол ортақ нүктенің абсциссасы $x_0=\dfrac{1}{2}$ түбірі болатындай k және m параметрінің барлық мәндерін табыңдар.

$-\dfrac{1}{x}=kx+m$ теңдеуі $kx^2+mx+1=0$ теңдеуіне мәндес. $x_0=\dfrac{1}{2}$ саны жалғыз ғана түбір болғандықтан, $kx^2+mx+1=0$ теңдеуінің дискриминанты 0-ге тең болу керек: $D=m^2-4k=0$. Жүйе шешеміз: $\begin{cases} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+m\dfrac{1}{2}+1=0 \\ m^2-4k=0 \end{cases}$ нәтижесінде $m=-4$, және $k=4$ болады. Туындының $x_0=\dfrac{1}{2}$ мәні жанаманың көлбеулік коэфиценті k-ға тең: $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$

Жауабы: $y=4x-4$, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$.

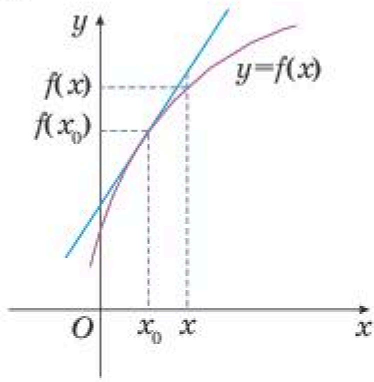
2.3 Туындының аналитикалық анықтамасы

Осылайша, k коэффициенті сызықтық функцияның мәнінің өзгерісінің аргументтің сәйкесінше өзгерісіне қатынасына тең. Басқаша айтсақ, k – коэффициенті **сызықтық функцияның өсу жылдамдығы.** Егер $y=f(x)$ функциясының графигіне $x=x_0$ нүктесінде $y=kx+m$ жанамасы жүргізілсе, онда туындының анықтамасы бойынша $f'(x_0)=k$. **Дифференциалдық есептеудің негізгі қағидасынан** x_0 нүктесінің шағын аймағында $f(x)$ функциясының мәндер өзгерісінің x аргументінің өзгерісіне қатынасы жуық шамамен $f'(x_0)=k$-ға тең болатыны шығады.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\approx f'(x_0).$$

x_0 нүктесінің неғұрлым кішірек аймағын қарастыратын болсақ, теңдік соншалықты дәлірек болады (12-сурет).

Басқаша айтқанда, $f(x)$ функциясының $f'(x_0)$ туындысының мәні – **берілген функцияның x_0 нүктесіндегі өсу жылдамдығы.** Бұдан:



12-сурет

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

теңдігінің орындалатындығы туралы қорытынды шығаруға болады.

Берілген теңдікті туындының аналитикалық анықтамасы деп атаймыз. $f(x)-f(x_0)$ айырмасы **функцияның өсімшесі**, $x-x_0$ айырмасы **аргументтің өсімшесі** деп аталады.

3 мысал Аналитикалық анықтаманы пайдаланып, $f(x)=x^3-x$ функциясының $x_0=2$ нүктесіндегі туындысын табамыз.

Шешуі. $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы x мәні x_0-ге ұмтылған кездегі $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ қатынасының шегіне тең. Берілген жағдайда $f(x)=x^3-x$, $f(x_0)=f(2)=2^3-2=6$.

$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x-6}{x-2}$. Мұнда $\left(\frac{0}{0}\right)$ түріндегі анықталмағандық туындайтындықтан, бөлшектің алымында

$(x-2)$ көбейткішін бөліп аламыз. $(x-2)$ көбейткіші x^3-2^3 кубтарының айырмаларының формуласы бойынша алынады. Түрлендіруден кейін:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8-x-6+8}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)-(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4-1)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+3)=11.$$

Жауабы: 11.

Есептер

1-бөлім

1. (1) $y=3x-567$, $y=-3x$, $y=6$, $y=-\frac{1}{2}x$, $y=\frac{1}{2}x+7$ функцияларының туындысы неге тең? Туындының таңбасы мен сәйкесінше түзудің көлбеулігі өзара қалай байланысқан?

2. (1) Жұп функцияның $x=5$ нүктесіндегі туындысы (-10)-ға тең. Функцияның $x=-5$ нүктесіндегі туындысының мәні туралы не айтуға болады?

3. (1) $y=f(x)$ функциясының $x=4$ нүктесіндегі туындысының мәні 7-ге тең. $x=-7$ нүктесіндегі $y=f(-x)$ функциясының туындысының мәні туралы не айтуға болады? $x=-4$ нүктесіндегі $y=f(-x)$ функциясы туындысының мәні туралы ше?

4. (1) $f(x)=x^2-2x$ функциясының графигі бойынша $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(1)$, $f'(4)$ сандарының таңбасын анықтаңдар.

5. (2) $f(x)=|x^2-2x|$ функциясының графигін сызып, төмендегі нүктелерді табыңдар:

а) туындысы жоқ; ә) туындысы нөлге тең; б) туындысы оң болатын.

6. (2) $f(x)=|\sin x|+1$ функциясының графигін сызып, келесі нүктелерді табыңдар:

а) туындысы жоқ; ә) туындысы нөлге тең; б) туындысы теріс болатын.

7. (3) $y=3x$ түзуі абсциссасы $x_0=1$ болатын нүктеде $f(x)=x^2+x+1$ функциясының жанамасы болатынын дәлелдеңдер.

8. (3) Графиктің ордината өсімен қиылысатын нүктесінде $y=\frac{x}{4}+2$ түзуінің $f(x)=\sqrt{x+4}$ функциясының графигіне жанама болатынын дәлелдеңдер.

9. (3) Туындының аналитикалық анықтамасына сүйеніп, $x_0=1$ нүктесінде $f(x)=x^3$ функциясының туындысын табыңдар.

10. (3) Туындының аналитикалық анықтамасына сүйеніп, $x_0=-2$ нүктесіндегі $f(x)=x^2+5x+6$ функциясының туындысын табыңдар.

11. (4) Абсциссасы $x_0=1$ болатын нүктеде $f(x)=\frac{3}{x}$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін табыңдар. $f'(1)$ туындысының мәнін анықтаңдар (п.2.2, 2-мысалды қараңдар).

12. (4) $f(x)=-x^2+4x$ функциясының графигіне абсциссасы $x_0=3$ болатын нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін табыңдар. $f'(3)$ туындысының мәнін анықтаңдар (п.2.2, параболаға жүргізілген жанаманың анықтамасын және 1-мысалды қараңдар).

2-бөлім

13. (1) $y=-2x+3$, $y=5x+57$, $y=-8$ функцияларының туындысы неге тең?

14. (1) Тақ функцияның $x=-3$ нүктесіндегі туындысының мәні 6-ға тең. Осы функцияның $x=3$ нүктесіндегі туындысының мәні туралы не айтуға болады?

15. (1) $y=f(x)$ функциясының $x=4$ нүктесіндегі туындысының мәні 7-ге тең. $y=-f(x)$ функциясының $x=-4$ нүктесіндегі туындысының мәні туралы не айтуға болады? $y=-f(x)$ функциясының $x=4$ нүктесіндегі туындысының мәні туралы ше?

16. (1) $f(x)=-x^2-2x$ функциясының графигі бойынша $f'(1)$, $f'(0)$, $f'(-1)$, $f'(-3)$ сандарының таңбасын анықтаңдар.

17. (2) $f(x)=\left|x^2+2x\right|$ функциясының графигін сызыңдар. Төмендегі нүктелерді анықтаңдар:

а) туындысы жоқ; ә) туындысы нөлге тең; б) туындысы теріс болатын.

18. (2) $f(x)=|\cos x|-3$ функциясының графигін сызып, келесі нүктелерді анықтаңдар:

а) туындысы жоқ; ә) туындысы нөлге тең; б) туындысы оң болатын.

19. (3) $y=-3x+2$ түзуі $f(x)=-x^2+x-1$ функциясының графигіне абсциссасы $x_0=1$ болатын нүктеде жүргізілген жанама болатынын дәлелдеңдер.

20. (3) $y=-\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$ түзуі $f(x)=-\sqrt{x+3}$ функциясының графигіне абсциссасы $x_0=1$ нүктесінде жүргізілген жанама екенін дәлелдеңдер.

21. (3) Туындының аналитикалық анықтамасына сүйеніп, $x_0=-2$ нүктесіндегі $f(x)=-x^3$ функциясының туындысын табыңдар.

22. (3) Туындының аналитикалық анықтамасына сүйеніп, $x_0=3$ нүктесіндегі $f(x)=x^2-7x+100$ функциясының туындысын табыңдар.

23. (4) $f(x)=-\frac{2}{x}$ функциясының графигіне абсциссасы $x_0=-1$ болатын нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін табыңдар. $f'(-1)$ туындысының мәнін анықтаңдар (2-мысал, п.2.2).

24. (4) $f(x)=x^2+4x$ функциясының графигіне абсциссасы $x_0=-5$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін табыңдар. $f'(-5)$ туындысының мәнін анықтаңдар (п.2.2, параболаға жүргізілген жанаманың анықтамасын және 1-мысалды қараңдар).

Жауаптары:

1. Сызықтық функцияның графиктері түзу сызық болады. Түзудің әрбір кесіндісі бүкіл түзу бойындағыдай көлбеулікке ие болады. Мұндай жағдайда сызықтық функцияның графигі өз-өзіне жанама болады. Сондықтан, $y=3x-567$, $y=-3x$, $y=6$, $y=-\frac{1}{2}x$, $y=\frac{1}{2}x+7$ функцияларының туындысы сәйкесінше $3, -3, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$-ге тең. Түзудің жоғары бөлігінің көлбеулігі оң жағында тігінен алғанда туындының оң мәніне сәйкес келеді, ал түзудің жоғары бөлігінің көлбеулігі сол жағында тігінен алғанда туындының теріс мәніне сәйкес келеді.

2. Oy осі жұп функцияның графигі үшін симметрия осі болғандықтан, графикке қарама-қарсы нүктелерде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті де қарама-қарсы болады.

3. $x=-4$ нүктесінде $y=f(-x)$ функциясының туындысының мәні -7-ге тең. $y=f(-x)$ функциясының $x=-7$ нүктесіндегі туындысының мәні туралы ешнәрсе айта алмаймыз.

4. Туындының таңбасы сәйкесінше жанаманың көлбеулігімен анықталады: $f'(-1)<0$, $f'(0)<0$, $f'(2)>0$, $f'(1)=0$, $f'(4)>0$.

5. а) Графиктің «сыну» нүктелерінде туындысы жоқ: $x=0$, $x=2$.
ә) Берілген нүктедегі функцияның туындысы – бұл жанаманың бұрыштық коэффициенті болып табылады. Жанаманың бұрыштық коэффициенті нөлге тең болғанда, функцияның туындысы нөлге тең болады. Горизонталь түзудің көлбеулік коэффициенті нөлге тең. Жауабы: $x=1$.

б) Жанаманың бұрыштық коэффициенті оң мән болса, функцияның туындысы оң болады. Жауабы: $x\in(0;1)\cup(2;+\infty)$.

6. а) $x=\pi k$, мұндағы k – $k\in Z$ бүтін сан. ә) $x=-\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, мұндағы k – кез-келген бүтін сан. б) $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\pi k\right)$, мұндағы k – кез келген бүтін сан.

7. Нұсқау. $x^2+x+1=3x$ теңдеуінің жалғыз түбірі $x=1$ бар екенін көрсету жеткілікті.

9. $f'(1)=3$.

10. $f'(-2)=1$.

11. $y=-3x+6$, $f'(1)=-3$.

12. $y=-2x+9$, $f'(3)=-2$.

13. Туындылары сәйкесінше -2, 5, 5-ге тең.

14. Функцияның $x=3$ нүктесіндегі туындысының мәні 6-ға тең.

15. $x=4$ нүктесінде $y=-f(x)$ функциясының туындысының мәні –7-ге тең. Берілген $x=-4$ нүктесі туралы нақты ешнәрсе айтуға болмайды.

16. $f'(1)<0$, $f'(0)<0$, $f'(-1)=0$, $f'(-3)>0$.

17. а) Графиктің $x=0$, $x=-2$ «сыну» нүктелерінде туындысы жоқ. ә) $x=-1$ нүктесінде туынды нөлге тең. б) $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;0)$ нүктелерінде туынды теріс.

18. а) Графиктің $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ «сыну» нүктесінде туындысы жоқ.

ә) $x=\pi k$ нүктесінде туынды нөлге тең.

б) $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\pi k\right)$, мұндағы k – қандай да бір бүтін сан.

21. $f'(-2)=-12$.

22. $f'(3)=-1$.

23. $y=2x+4$, $f'(-1)=2$.

24. $y=-6x-25$, $f'(-5)=-6$.

2.4 Туындыны табу ережелері

«Математика – бұл арнайы ойлап шығарылған түсініктерге қатысты арнайы әзірленген ережелер бойынша жүзеге асырылған күрделі, тапқыр іс-әрекеттер туралы ғылым».
Ю. П. Вигнер

Туындыны табу процесі **дифференциалдау** деп аталады. Егер берілген нүктеде функцияның туындысының мәні бар (туындысы бар) болса, онда ол **берілген нүктеде дифференциалданады** деп аталады. Егер функция аралықтың әрбір нүктесінде дифференциалданатын болса, онда ол **берілген аралықта дифференциалданады** деп аталады. Осы аралықта дифференциалданатын функция бұл аралықта әрқашан үзіліссіз болады.

Функцияны зерттеу үшін туындыны қолданатын математикалық талдау бөлімі **дифференциалдық есептеу** деп аталады. Элементар функциялардың кез келген комбинациясының туындысын табу үрдісі белгілі бір ережелер мен формулалардың механикалық қолданылуына әкеледі. Бұл үрдіс бағдарламаланған болуы мүмкін.

$f(x)$ және $g(x)$ функциялары x_0 нүктесінде дифференциалданатын болсын. Онда туындыны есептеудің төменде көрсетілген ережелері орындалатынын дәлелдеуге болады ((x_0) таңбасын алып тастаймыз):

1. Егер c – қандай да бір тұрақты (сан) болса, онда $(cf)' = cf'$.
2. $(f+g)' = f' + g'$ (қосындыны дифференциалдау ережесі).
3. $(f-g)' = f' - g'$ (айырманы дифференциалдау ережесі).
4. $(f \cdot g)' = f'g + g'f$ (көбейтіндіні дифференциалдау ережесі).
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$ (бөлуді дифференциалдау ережесі).

Бұл ережелердің қатаң дәлелденуі біздің сабағымыздың аясынан асып кетеді. Сондықтан, туындының аналитикалық анықтамасына сүйенеміз. Оны көбейтіндіні дифференциалдау ережесін дәлелдеу арқылы көрсетейік. $h(x) = f(x)g(x)$ болсын.

Сонда:

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}g(x)\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Осы уақытқа дейін біз функцияның нүктедегі туындысының мәнін анықтау жайында айттық. Бірақ, **егер f функциясының қандай да бір аралықтың әрбір x нүктесінде туындысы бар болса, онда осындай әрбір нүктеге $f'(x)$ туындысының мәнін сәйкестендіруге болады. Осындай тәсілмен анықталған функция $f(x)$ функциясының туындысы деп аталады және $y=f'(x)$ түрінде белгіленеді.**

1–5 ережелер қандай да бір аралықта анықталған және дифференциалданған f және g функциялары үшін ақиқат болатыны анық.

Күрделі функцияны дифференциалдау ережесі туындыны табу ережелерінің ішінде ерекше орын алады.

$$\boxed{(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

Осы ережені дәлелдейік. Дәлелдеу үшін келесі түрдегі туындының аналитикалық анықтамасын пайдаланамыз:

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Берілген формула бойынша:

$$(f(g(x)))'=\lim_{t\to x}\frac{f(g(t))-f(g(x))}{t-x}==\lim_{t\to x}\left(\frac{f(g(t))-f(g(x))}{g(t)-g(x)}\cdot\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right)=$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{f(g(t))-f(g(x))}{g(t)-g(x)}\cdot\lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Салыстыру. G жүгірушінің жылдамдығы X жүгірушінің жылдамдығына қарағанда 2 есе артық. Ал, F жүгірушінің жылдамдығы G жүгірушінің жылдамдығына қарағанда 3 есе артық. F жүгірушінің жылдамдығы X жүгірушінің жылдамдығынан неше есе артық?

2.5 Туындыны табу формулалары

Қарапайым функциялардың туындысын табу үшін келесі формулаларды пайдаланамыз (кестені қараңдар). $f(x)$ ретінде бірінші бағандағы функциялар, ал $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ күрделі функциясын дифференциалдау ережелерін қолдану нәтижелері сәйкесінше екінші бағанда көрсетілген. Қабылдауды жеңілдету үшін біз $g(x)$-тің орнына бүкіл жерде g деп жаздық.

Туындылар кестесі

1	$C' = 0$	
2	$(kx)' = k$	
3	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(g^n)' = ng^{n-1} \cdot g'$
4	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin g)' = \cos g \cdot g'$
5	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos g)' = -\sin g \cdot g'$
6	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} g)' = \dfrac{1}{\cos^2 g} \cdot g'$
7	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} g)' = -\dfrac{1}{\sin^2 g} \cdot g'$
8	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin g)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-g^2}} \cdot g'$
9	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos g)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-g^2}} \cdot g'$
10	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} g)' = \dfrac{1}{1+g^2} \cdot g'$
11	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} g)' = -\dfrac{1}{1+g^2} \cdot g'$

Бірінші бағандағы барлық формулаларды дәлелдейік.

1–2-формулаларды дәлелдеу.

Ең қарапайым сызықтық функция үшін барлығы оңай орындалады. Қарапайым мағынада айтқанда оның графигі «өзін-өзі жанап өтеді». Егер $f(x)=kx+m$ болса, онда $f(x)$-тің өсу жылдамдығы k-ға тең. Бұдан $(kx+m)'=k$ екендігі шығады. Егер $k=0$ және $m=C$ болса, 1-формуланы аламыз, ал $m=0$ болғанда, 2-формула шығады.

3-формуланы дәлелдеу.

$f(x)=x^n$ дәрежелік функциясының туындысын табайық, мұндағы n – натурал сан.

Келесі формулалар орындалады:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$

$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3),$$

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4).$$

Мына формуланы дәлелдейік:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Геометриялық прогрессияның қосындысының формуласы бойынша

$$1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^3+\ldots+\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}=\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n-1}{\frac{b}{a}-1}=\frac{b^n-a^n}{a^{n-1}(b-a)}.$$

Теңдіктің екі жағын да $a^{n-1}(a-b)$ өрнегіне көбейтеміз.

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ формуласында $x=t$ және $x_0=x$ деп белгілесек:

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{t^n-x^n}{t-x}.$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{(t-x)(t^{n-1}+t^{n-2}x+\ldots+x^{n-1})}{t-x}=\lim_{t\to x}(t^{n-1}+t^{n-2}x+\ldots+x^{n-1})=$$

$$=(x^{n-1}+x^{n-2}x+\ldots+x^{n-1})=nx^{n-1}.$$

Шындығында $(x^n)'=nx^{n-1}$ формуласы тек натурал сандар үшін ғана емес, n-нің басқа да кез келген мәндерінде орындалады.

4 мысал

$(x^n)' = nx^{n-1}$ формуласының қолданылуы:

а) $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$.

ә) $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

б) $(x^{2013})' = 2013x^{2012}$.

в) $\left(\frac{1}{x^7}\right)' = (x^{-7})' = -7x^{-7-1} = -7x^{-8} = -\frac{7}{x^8}$.

г) $(x\sqrt{x})' = \left(x^{1+\frac{1}{2}}\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$.

4-формуланы дәлелдеу.

$$(\sin x)' = \lim_{t\to x}\frac{\sin t - \sin x}{t-x} =$$

$$= \lim_{t\to x}\frac{2\sin\frac{t-x}{2}\cos\frac{t+x}{2}}{t-x} =$$

$$= \lim_{t\to x}\frac{\sin\frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}}\cos\frac{t+x}{2} = \lim_{t\to x}\cos\frac{t+x}{2} = \cos x.$$

Түрлендірулерде біз $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ теңдігін қолдандық.

1 жаттығу

$(\cos x)' = -\sin x$ екенін дәлелдеу керек (5-формула).

6-формуланы дәлелдеу.

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ ережесін қолданамыз:

$$(\text{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2 жаттығу

$(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ екенін дәлелдеу керек (7-формула).

10-формуланы дәлелдеу.

$(\mathrm{arctg}\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ екенін дәлелдейік.

Шынында да, арктангенстің анықтамасы бойынша барлық x үшін $(\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)) = x$ теңдігі орындалады.

Демек, барлық x үшін $(\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}))' = x'$ теңдігі орындалады.

Теңдіктің сол жағына $(\mathrm{tg}\,g)' = \dfrac{1}{\cos^2 g}\cdot g'$ формуласын қолданамыз, мұндағы $g = \mathrm{arctg}\,x$. Мынадай теңдікті аламыз:

$\dfrac{1}{\cos^2(\mathrm{arctg}\,x)}\cdot(\mathrm{arctg}\,x)' = 1$. Бұдан $(\mathrm{arctg}\,x)' = \cos^2(\mathrm{arctg}\,x)$.

Енді $\cos^2(\mathrm{arctg}\,x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ екенін дәлелдеу қалды. $\mathrm{arctg}\,x = \alpha$ болсын, сонда $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ және $\mathrm{tg}\,\alpha = x$, $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3 жаттығу

Дәлелдеу керек: а) $(\arcsin)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

ә) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (9-формула);

б) $(\mathrm{arcctg}\,x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ (11-формула).

Бір күрделі функцияны дифференциалдау ережесін қарастырған болатынбыз, содан кестедегі екінші бағандағы 3–11-формулаларын дәлелденді деуге болады. Оларды қолдануға бірнеше мысалдар келтірейік.

5 мысал

Табыңдар: а) $(\sin^3 x)'$; ә) $(\sin x^3)'$;

б) $\left(\cos\left(8x - \dfrac{\pi}{3}\right)\right)'$; в) $\left(\sqrt{ax^2 + bx + c}\right)'$.

Шешуі. а) $\left(\sin^3 x\right)'$ есептеу үшін $\left(g^n\right)' = ng^{n-1}\cdot g'$ формуласын қолданамыз, мұндағы $g=\sin x$: $\left(\sin^3 x\right)' = 3\sin^2 x\left(\sin x\right)' =$

$= 3\sin^2 x\cos x$.

ә) $\left(\sin^3 x\right)'$ есептеу үшін $\left(\sin g\right)' = \cos g\cdot g'$ формуласын қолданамыз, мұндағы $g=x^3$: $\left(\sin x^3\right)' = \cos x^3\cdot\left(x^3\right)' = 3x^2\cos x^3$.

б) $\left(\cos\left(8x-\frac{\pi}{3}\right)\right)'$ есептеу үшін $\left(\cos g\right)' = -\sin g\cdot g'$ формуласын қолданамыз, мұндағы $g = 8x-\frac{\pi}{3}$:

$$\left(\cos\left(8x-\frac{\pi}{3}\right)\right)' = -\sin\left(8x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(8x-\frac{\pi}{3}\right)' = -8\sin\left(8x-\frac{\pi}{3}\right).$$

в) $\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'$ есептеу үшін $\left(g^n\right)' = ng^{n-1}\cdot g'$ формуласын қолданамыз, мұндағы $g = ax^2+bx+c$, ал $n=\frac{1}{2}$:

$$\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' = \left(\left(ax^2+bx+c\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(ax^2+bx+c\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(ax^2+bx+c\right)' =$$

$$= \frac{\left(ax^2+bx+c\right)'}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\left(ax^2\right)'+\left(bx+c\right)'}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

4 жаттығу

$f(x) = \frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}-4$ функциясының $x_0=1$ нүктесіндегі туындысының мәнін табыңдар.

5 жаттығу

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ функциясының $f'(x)$ туындысын табыңдар.

6 жаттығу

Егер $f(x)=x^3\sin 10x$ болса, $f'(x)$ табыңдар.

7 жаттығу

Егер $f(x)=\frac{x^7}{7}$ болса, $f'(x)$ табыңдар.

8 жаттығу

$f(x)=\arcsin(x^2+4x)$ функциясының $f'(x)$ туындысын табыңдар.

4-жаттығудың шешуі.

$$f'(x)=\left(\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}-4\right)'=\left(5x^{-2}+3x^{-3}-4\right)'==\left(5x^{-2}\right)'+\left(3x^{-3}\right)'-4'=$$

$$=5\left(x^{-2}\right)'+3\left(x^{-3}\right)'-0=-10x^{-3}-9x^{-4}=-\frac{10}{x^3}-\frac{9}{x^4}.$$

Алынған $f'(x)$ өрнегіне $x=x_0=1$ мәндерін қою ғана қалды:

$$f'(x_0)=f'(1)=-\frac{10}{1^3}-\frac{9}{1^4}=-19.$$

5-жаттығудың шешуі.

$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$ формуласын қолданамыз:

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)'=\frac{(x^2+1)'(x^2-1)-(x^2-1)'(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x(x^2-1-x^2-1)}{(x^2-1)^2}=-\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

6-жаттығудың шешуі.

$(fg)'=f'g+g'f$ формуласын қолданамыз:

$$\left(x^3\sin 10x\right)'=\left(x^3\right)'\sin 10x+(\sin 10x)'x^3=3x^2\sin 10x+\cos 10x\cdot(10x)'\cdot x^3=$$

$$=x^2(3\sin 10x+10x\cos 10x).$$

7-жаттығудың шешуі.

Бұл жаттығу $\left(\dfrac{x^7}{7}\right)'$-нің мәнін $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$ формуласын пайдаланып есептеуге талпыныс жасаушыларға арналған. Қазіргі жағдайда осы формуланы қолдануға бола ма? Әрине болады.

$$\left(\frac{x^7}{7}\right)'=\left(\frac{1}{7}x^7\right)'=\frac{1}{7}\left(x^7\right)'=\frac{1}{7}\cdot 7x^6=x^6.$$

8-жаттығудың шешуі.

Берілген функциядан туынды табу үшін келесі формуланы қолданамыз: $\left(\arcsin(g(x))\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}}\cdot g'(x)$.

$$\left(\arcsin\left(x^2+4x\right)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2+4x\right)^2}}\cdot\left(x^2+4x\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2+4x\right)^2}}\cdot(2x+4)=\frac{2(x+2)}{\sqrt{1-\left(x^2+4x\right)^2}}.$$

Қандай да бір $f'(x)$ функцияның белгілі бір аралықта табылған $f'(x)$ туындысының да өз туындысы бар болуы мүмкін. Туындының туындысы берілген функцияның **екінші ретті туындысы** деп аталады және $f''(x)$ деп белгіленеді. Екінші ретті туындыдан туынды табу **үшінші ретті туынды** деп аталады және т.с.с. жалғаса береді.

$$\left(f'(x)\right)'=f''(x),\ \left(f''(x)\right)'=f'''(x).$$

6 мысал

$f(x)=\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{3}x^3$ функциясының екінші және үшінші ретті туындысын табыңдар.

Шешуі. Бірінші ретті туындысы: $f'(x)=\left(\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{3}x^3\right)'=x^4+x^2$.

Екінші ретті туындысы: $f''(x)=\left(x^4+x^2\right)'=4x^3+2x$. Үшінші ретті туындысы: $f'''(x)=\left(4x^3+2x\right)'=12x^2+2$.

7 мысал

$f(x)=\cos^3(x^2+2x)$ функциясының туындысын табыңдар.

Шешуі. Алдымен $\left((g(x))^n\right)'=ng^{n-1}(x)\cdot g'(x)$ формуласын қолданамыз:

$$f'(x)=\left(\cos^3(x^2+2x)\right)'=3\cos^2(x^2+2x)\cdot\left(\cos(x^2+2x)\right)'.$$

Енді $(\cos g(x))'=-\sin g(x)\cdot g'(x)$ формуласын қолданамыз:

$$f'(x)=3\cos^2(x^2+2x)\cdot\left(-\sin(x^2+2x)\right)\cdot(x^2+2x)'=$$

$$=-6\cdot(x+1)\cos^2(x^2+2x)\cdot\sin(x^2+2x).$$

Жауабы: $-6\cdot(x+1)\cos^2(x^2+2x)\cdot\sin(x^2+2x)$.

Есептер

1-бөлім

Келесі функциялардың туындыларын табыңдар (1–5):

1. а) $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=x^3$, $u(x)=x^4$, $v(x)=x^{2014}$;

ә) $f(x)=1$, $g(x)=\frac{1}{2x^2}$, $h(x)=\frac{1}{3x^3}$, $u(x)=-\frac{1}{4x^4}$, $v(x)=-\frac{1}{2^{15}(x^2)^{12}}$.

2. $f(x)=2x-1$, $g(x)=x^2-2x-1$, $h(x)=(2x-1)^2$, $u(x)=(x^2-2x-1)^4$.

3. а) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sin 2x$, $h(x)=\frac{1}{6}\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$, $u(x)=-\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{5}-4\pi x\right)$;

ә) $f(x)=-\cos x$, $g(x)=\cos 3x$, $h(x)=\frac{1}{4}\cos\left(8x-\frac{\pi}{7}\right)$, $u(x)=\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi x}{2}\right)$;

б) $f(x)=2\,\mathrm{tg}\,x$, $g(x)=\mathrm{tg}\frac{5x}{2}$, $h(x)=\frac{3}{7}\mathrm{tg}\left(\frac{14x}{3}-\frac{\pi}{9}\right)$, $u(x)=\frac{1}{3\pi}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{5}-9\pi x\right)$;

в) $f(x)=-3\,\mathrm{ctg}\,x$, $g(x)=7\,\mathrm{ctg}\frac{8x}{7}$, $h(x)=\frac{4}{9}\mathrm{ctg}\left(\frac{27x}{2}-\frac{\pi}{21}\right)$,

$u(x)=-\frac{1}{11\pi}\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{11}-22\pi x\right)$.

4. а) $f(x)=\arcsin x$, $g(x)=\arcsin 2x$, $h(x)=2\arcsin(2x^2)$, $u(x)=\dfrac{1}{2}\arcsin(x^2+1)$;

ә) $f(x)=0{,}1\mathrm{arctg}\,x$, $g(x)=0{,}3\mathrm{arctg}\left(27x+\dfrac{\pi}{9}\right)$, $h(x)=\dfrac{1}{6}\mathrm{arctg}(2x^3)$, $u(x)=\dfrac{1}{5}\mathrm{arctg}(x^5-1)$.

5. $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{3-4x}$, $h(x)=\sqrt{5-4x^2}$, $u(x)=\sqrt{2+\cos x}$.

6. $f(x)$ функциясының туындысының мәні a-ға тең болатындай x айнымалысының мәнін табыңдар.

а) $f(x)=-\cos x$, $a=1$; ә) $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 4x+8$, $a=\sqrt{3}$;

б) $f(x)=7\cos 2x-5x$, $a=2$; в) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{7}\mathrm{tg}\,14x+8x$, $a=10$.

7. t айнымалысының қандай мәндерінде бір мезетте мына екі шарт қатар орындалады: $f'(t)\geq 0$ және $f(t)<0$, егер $f(t)=-t^2+2t+3$.

8. $f(x)=3x^4+8x^3$ функциясының туындысының мәні оң болатын x айнымалысының мәндер жиынын көрсетіңдер.

9. $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысының мәнін есептеңдер.

а) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x_0=1$; ә) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$, $x_0=0$;

б) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+4}$, $x_0=-3$; в) $f(x)=\dfrac{5x+2}{7x+13}$, $x_0=-2$.

10. Келесі теңсіздіктерді шешіңдер:

а) $f'(x)>\dfrac{1}{2(x-1)}$, егер $f(x)=-\dfrac{1}{x-1}$;

ә) $f'(x)\leq\dfrac{4}{3(x^2-1)}$, егер $f(x)=-\dfrac{1}{x^2-1}$.

11. Айнымалының қандай мәндерінде $g(x)$ функциясының мәні $f(x)$ функциясының туындысының мәніне тең болады, егер:

а) $f(x)=-\cos x$, $g(x)=\sin 3x$;

ә) $f(x)=-5\cos x-5x$, $g(x)=6\cos^2 x$;

б) $f(x)=\sqrt{2}x+5$, $g(x)=\cos 3x+\sin 3x$;

в) $f(x)=\cos x$, $g(x)=\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}$.

12. $f(x)=\sin 2x-\cos x+3x$ функциясы берілген. Функцияның туындысын, екінші ретті туындысын, үшінші ретті туындысын, төртінші ретті туындысын табыңдар.

13. $f(x)=\dfrac{1}{120}x^5-3x^4+\dfrac{1}{16}x^3-3x^2+\sqrt{7}$ функциясы берілген. $f(x)$ функциясының бесінші ретті туындысының мәнін табыңдар.

14. Келесі функциялардың туындыларын табыңдар:

а) $f(x)=\sin^4 x$, $g(x)=\sin x^4$, $h(x)=\sin^3 x^4$, $u(x)=\sin(4x)^3$;

ә) $f(x)=\arccos^2 x$, $g(x)=\arccos^2(2x-1)$, $h(x)=\arccos(2x+1)^3$,

$u(x)=\arccos^3(4x+5)^2$.

15. Берілген $f(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктесіндегі туындысының мәнін табыңдар, егер:

а) $f(x)=x\sin x+\cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$;

ә) $f(x)=x^2\cos 2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

б) $f(x)=(4\pi x-\pi)\operatorname{tg}(3\pi x)$, $x_0=\dfrac{1}{12}$;

в) $f(x)=x\arccos 2x$, $x_0=0$.

16. Есептеңдер:

а) $g'(-9)$, егер $g(x)=x(x+10)^5$;

ә) $h'(1)$, егер $h(x)=2x(3x-2)^7$;

б) $u'(-1)$, егер $u(x)=(2x+1)^4(2+3x)^9$;

в) $f'(-3)$, егер $g(x)=3x\left(\dfrac{9}{x}+4\right)^3$.

17. Келесі теңсіздіктерді шешіңдер:

а) $f'(x)\geq 0$, егер $f(x)=\cos 2x-x$;

ә) $f'(x)\leq 1$, егер $f(x)=\sin x-\cos x$;

б) $f'(x)\geq 5$, егер $f(x)=\sin^2 x+4x$;

в) $f'(x)\geq \cos x$, егер $f(x)=\cos x$.

2-бөлім

Келесі функциялардың туындыларын табыңдар (18–22):

18. а) $f(x)=-x$, $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$, $h(x)=-\dfrac{x^3}{3}$, $u(x)=\dfrac{x^4}{4}$, $v(x)=\dfrac{x^m}{m}$;

ә) $f(x)=-\dfrac{1}{5x^5}$, $g(x)=\dfrac{1}{6x^3}$, $h(x)=-\dfrac{1}{14x^7}$, $u(x)=\dfrac{1}{24x^8}$, $v(x)=-\dfrac{1}{3^{95}\left(x^3\right)^{91}}$.

19. $f(x)=1-3x$, $g(x)=2-3x^2$, $h(x)=3\left(1-\dfrac{x}{3}\right)^5$, $u(x)=\dfrac{1}{15}\left(2-3x^2\right)^5$.

20. а) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{2}$, $g(x)=\dfrac{7}{3}\sin 3x$, $h(x)=-\dfrac{1}{7}\sin\left(14x+\dfrac{\pi}{6}\right)$,

$u(x)=\dfrac{1}{5\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-10\pi x\right)$;

ә) $f(x)=-22\cos\dfrac{x}{11}$, $g(x)=\dfrac{1}{18}\cos 27x$, $h(x)=-\dfrac{2}{9}\cos\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\pi}{7}\right)$,

$u(x)=-\dfrac{8}{9}\cos\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{27\pi x}{16}\right)$;

б) $f(x)=4\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{4}$, $g(x)=\dfrac{3}{4}\mathrm{tg}\dfrac{8x}{9}$, $h(x)=\dfrac{4}{45}\mathrm{tg}\left(\dfrac{15x}{2}-\dfrac{\pi}{9}\right)$,

$u(x)=\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{5}-5\pi x\right)$;

в) $f(x)=-\dfrac{1}{3}\mathrm{ctg}\dfrac{x}{3}$, $g(x)=\dfrac{9}{11}\mathrm{ctg}\dfrac{22x}{3}$, $h(x)=\dfrac{3}{5}\mathrm{ctg}\left(\dfrac{10x}{9}-\dfrac{\pi}{21}\right)$,

$u(x)=-\dfrac{1}{25\pi}\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{11}-75\pi x\right)$.

21. а) $f(x)=3\arccos x$, $g(x)=\arccos\left(2x+\dfrac{\pi}{5}\right)$, $h(x)=\dfrac{1}{3}\arccos x^3$,

$u(x)=\dfrac{1}{4}\arccos\left(2x^2-1\right)$;

ә) $f(x)=0{,}2\,\mathrm{arcctg}\,5x$, $g(x)=0{,}6\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{5}{3}x+\dfrac{\pi}{7}\right)$, $h(x)=\dfrac{1}{12}\mathrm{arctg}\,3x^4$,

$u(x)=\dfrac{1}{7}\mathrm{arcctg}\left(14x^2-1\right)$.

22. $f(x)=\sqrt{x+2}$, $g(x)=2\sqrt{\frac{x}{2}-8}$, $h(x)=-4\sqrt{14-\sin x}$, $u(x)=-4\sqrt{\sin 7x+5}$.

23. $f(x)$ функциясының туындысының мәні a-ға тең болатындай x айнымалысының мәнін табыңдар.

а) $f(x)=3\sin x$, $a=1,5$; ә) $f(x)=5\cos 4x+8\pi$, $a=10\sqrt{3}$;

б) $f(x)=9\sin 4x-15x$, $a=3$; в) $f(x)=0,3\operatorname{ctg}(10\pi x)+9\pi x$, $a=6\pi$.

24. t айнымалысының қандай мәндерінде мына екі шарт қатар орындалады: $f'(t)<0$ және $f(t)\le 0$, егер $f(t)=t^2+4t-5$.

25. $f(x)=4x^3-9x^4$ функциясының туындысы теріс болатындай x айнымалысының мәндер жиынын көрсетіңдер.

26. $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысының мәнін табыңдар.

а) $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x+1}$, $x_0=0,5$; ә) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^3+2}$, $x_0=0$;

б) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+4}$, $x_0=-3$; в) $f(x)=\dfrac{6x+2}{3x-5}$, $x_0=2$.

27. Келесі теңсіздіктерді шешіңдер:

а) $f'(x)\ge\dfrac{2}{3(4x-x^2)}$, егер $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x}$;

ә) $f'(x)<\dfrac{4}{(2x^2-1)}$, егер $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-1}$.

28. Айнымалының қандай мәндерінде $g(x)$ функциясының мәні $f(x)$ функциясының туындысының мәніне тең болады, егер:

а) $f(x)=-\dfrac{2\cos 5x}{5}+\cos\dfrac{\pi}{3}$, $g(x)=\sin 3x+\sin 7x$;

ә) $f(x)=2x+\cos^2\dfrac{4\pi}{17}$, $g(x)=\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x$;

б) $f(x)=-\dfrac{\cos 8x}{8}-\dfrac{\cos 2x}{2}$, $g(x)=2\sin 3x\cos x$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{8}+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{\sin 2\pi}{21}$, $g(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$.

29. $f(x)=\sin x+\cos 3x-7x^2$ функциясы берілген. Функцияның туындысын, екінші ретті туындысын, үшінші ретті туындысын, төртінші ретті туындысын табыңдар.

30. $f(x)=\frac{1}{12}x^4+2x^2-85x+2015^2$ функциясы берілген. $f(x)$ функциясының төртінші ретті туындысын табыңдар.

31. Келесі функциялардың туындыларын табыңдар:

а) $f(x)=4\sqrt{\cos x}$, $g(x)=\sqrt{\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}$, $h(x)=\cos\sqrt{x}$, $u(x)=\cos\sqrt{x^2+1}$;

ә) $f(x)=\operatorname{arctg}^3 x$, $g(x)=\operatorname{arctg}^3(5x)$, $h(x)=\operatorname{arctg}(2x^3)$, $u(x)=\operatorname{arctg}^2(x^2+1)$.

32. $x=x_0$ нүктесіндегі $f(x)$ функциясының мәнін табыңдар, егер:

а) $f(x)=x\cos x-\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$; ә) $f(x)=4x^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)$, $x_0=\frac{2\pi}{3}$;

б) $f(x)=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{8}\right)$, $x_0=2$; в) $f(x)=x\arcsin(x+1)$, $x_0=0$.

33. Есептеңдер:

а) $g'(0)$, егер $g(x)=x^6(7-x)^7$;

ә) $h'(2)$, егер $h(x)=(3-x)^5(2x-3)^4$;

б) $u'(-1)$, егер $u(x)=\left(\frac{2}{x}+3\right)^6(3x+4)^{10}$;

в) $f'(-0,5)$, егер $g(x)=4x(8x+5)^5$.

34. Келесі теңсіздіктерді шешіңдер:

а) $f'(x)\geq 0$, егер $f(x)=2\sin x-x$; ә) $f'(x)\geq 0$, егер $f(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$;

б) $f'(x)\leq \pi+3$, егер $f(x)=\sin 2\pi x+3x$; в) $f'(x)\leq \sin x$, егер $f(x)=\sin x$.

35. (4) 11 үлкен қораптың кейбіреулерінің ішінде 8 орташа қорап бар, ал орташа қораптардың кейбіреулерінің ішінде 8 кішкене қорап бар. Барлық қораптардың 102-нің іші бос. Барлық қорап саны қанша екенін табыңдар.

36. (3) Турист екі қаланың арасын үш күнде жүріп өтті. Ол бірінші күні барлық жолдың $\frac{1}{5}$-ін және 60 км жүрді, екінші күні ал барлық жолдан $\frac{1}{4}$-ін және тағы 20 км жүрді, ал үшінші күні барлық жолдың $\frac{23}{80}$ бөлігін және 25 км жүрді. Қалалардың ара қашықтығын табыңдар.

37. (2) Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} x+|y|=2, \\ 3x+|y|=4. \end{cases}$

38. (3) Екі бригада жұмысты қатар істеп, бір жер телімін 12 сағатта өңдеп болды. Егер бригадалардың жұмысты орындау жылдамдықтарының қатынасы 3:2 қатынасындай болса, ол жерді әр бригада жеке өзі қандай мерзімде өңдеп болар еді?

39. (3) Ықшамдаңдар: $\dfrac{a^2+10a+25+2\sqrt{5}\left(\sqrt{a^3}+5\sqrt{a}\right)}{\left(a^2-25\right)\left(\left(\sqrt{a^3}-\sqrt{125}\right)\left(a+\sqrt{5a}+5\right)^{-1}\right)^{-1}}$.

40. (2) Теңдеуді шешіңдер:

а) $\dfrac{1-x}{(2-x)(x-3)}+1=\dfrac{1}{2-x}$; ә) $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x^2-2x}$.

41. (2) Геометриялық прогрессияның еселігі 3-ке тең, ал алғашқы төрт мүшенің қосындысы 40-қа тең. Геометриялық прогрессияның үшінші мүшесін табыңдар.

Жауаптары: *(жауаптарда кездесетін $n, k \in \mathbb{Z}$)*

1. а) $f'(x)=1$, $g'(x)=2x$, $h'(x)=3x^2$, $u'(x)=4x^3$, $v'(x)=2014x^{2013}$;

ә) $f'(x)=0$, $g'(x)=-\dfrac{1}{x^3}$, $h'(x)=-\dfrac{1}{x^4}$, $u'(x)=\dfrac{1}{x^5}$, $v'(x)=\dfrac{3}{2^{12}x^{25}}$.

2. $f'(x)=2$, $g'(x)=2x-2$, $h'(x)=8x-4$, $v'(x)=8\left(x^2-2x-1\right)^3(x-1)$.

3. а) $f'(x)=\cos x$, $g'(x)=2\cos 2x$, $h'(x)\dfrac{1}{2}\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $u'(x)=4\cos\left(\dfrac{\pi}{5}-4\pi x\right)$;

ә) $f'(x)=\sin x$, $g'(x)=-3\sin 3x$, $h'(x)=-2\sin\left(8x-\dfrac{\pi}{7}\right)$,

$u'(x)=3\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{3\pi x}{2}\right)$;

б) $f'(x)=\dfrac{2}{\cos^2 x}$, $g'(x)=\dfrac{5}{2\cos^2\dfrac{5x}{2}}$, $h'(x)=\dfrac{2}{\cos^2\left(\dfrac{14x}{3}-\dfrac{\pi}{9}\right)}$,

$u'(x)=-\dfrac{3}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}-9\pi x\right)}$;

в) $f'(x)=\frac{3}{\sin^2 x}$, $g'(x)=-\frac{8}{\sin^2\frac{8x}{7}}$, $h'(x)=-\frac{6}{\sin^2\left(\frac{27x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$,

$u'(x)=-\frac{2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{11}-22\pi x\right)}$.

4. а) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$, $h'(x)=\frac{8x}{\sqrt{1-4x^2}}$, $u'(x)=\frac{x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$;

ә) $f'(x)=\frac{1}{10+10x^2}$, $g'(x)=\frac{8,1}{1+\left(27x+\frac{\pi}{9}\right)^2}$, $h'(x)=\frac{x^2}{1+4x^6}$,

$u'(x)=\frac{x^4}{x^{10}-2x^5+2}$.

5. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $g'(x)=-\frac{2}{\sqrt{3-4x}}$, $h'(x)=-\frac{4x}{\sqrt{5-4x^2}}$, $u'(x)=-\frac{\sin x}{2\sqrt{2+\cos x}}$.

6. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; ә) $\pm\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}$; б) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$; в) $x\in\varnothing$.

7. $t\in(-\infty;-1)$. **8.** $x\in[-2;+\infty)$. **9.** а) $\frac{1}{2}$; ә) 0; б) 13; в) 51.

10. а) $x\in(-\infty;1)\cup(1;3)$; ә) $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;-0,5)\cup(2;+\infty)$.

11. а) πk, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; ә) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; б) $\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}$; в) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$.

12. $f'(x)=2\cos 2x+\sin x+3$; $f''(x)=-4\sin 2x+\cos x$;

$f'''(x)=-8\cos 2x-\sin x$; $f''''(x)=16\sin 2x-\cos x$.

13. 1. **14.** а) $f'(x)=4\sin^3 x\cos x$, $g'(x)=4x^3\cos x^4$, $h'(x)=12x^3\sin^2 x^4\cos x^4$,

$u'(x)=192x^2\cos\left(64x^3\right)$;

ә) $f'(x)=-\frac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x)=-\frac{2\arccos(2x-1)}{\sqrt{x-x^2}}$, $h'(x)=-\frac{6(2x+1)^2}{\sqrt{1-(2x+1)^6}}$,

$u'(x)=-\frac{24(4x+5)\arccos^2(4x+5)^2}{\sqrt{1-(4x+5)^4}}$.

15. а) 0; ә) $-\dfrac{\pi}{8}$; б) $4\pi-\pi^2$; в) $\dfrac{\pi}{2}$.

16. а) -44; ә) 44; б) 35; в) 30.

17. а) $x\in\left[-\dfrac{5\pi}{12}+\pi k;\ \dfrac{\pi}{12}+\pi k\right]$; ә) $x\in\left[-\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k;2\pi k\right]$;

б) $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k$; в) $x\in\left[-\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k;-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right]$.

18. а) $f'(x)=-1$, $g'(x)=x$, $h'(x)=-x^2$, $u'(x)=x^3$, $v'(x)=x^{m-1}$;

ә) $f'(x)=\dfrac{1}{x^6}$, $g'(x)=-\dfrac{1}{2x^4}$, $h'(x)=\dfrac{1}{2x^8}$, $u'(x)=-\dfrac{1}{3x^9}$, $v'(x)=\dfrac{91}{3^{94}x^{274}}$.

19. $f'(x)=-3$, $g'(x)=-6x$, $h'(x)=-5\left(1-\dfrac{x}{3}\right)^4$, $u'(x)=-2x\left(2-3x^2\right)^4$.

20. а) $f'(x)=\cos\dfrac{x}{2}$, $g'(x)=7\cos 3x$, $h'(x)=-2\cos\left(14x+\dfrac{\pi}{6}\right)$,

$u'(x)=-2\cos\left(\dfrac{\pi}{8}-10\pi x\right)$;

ә) $f'(x)=2\sin\dfrac{x}{11}$, $g'(x)=-\dfrac{3}{2}\sin 27x$, $h'(x)=\dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\pi}{7}\right)$,

$u'(x)=-\dfrac{3\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{27\pi x}{16}\right)$;

б) $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{4}}$, $g'(x)=\dfrac{2}{3\cos^2\dfrac{8x}{9}}$, $h'(x)=\dfrac{2}{3\cos^2\left(\dfrac{15x}{2}-\dfrac{\pi}{9}\right)}$,

$u'(x)=-\dfrac{5}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}-5\pi x\right)}$;

в) $f'(x)=\dfrac{1}{9\sin^2\dfrac{x}{3}}$, $g'(x)=-\dfrac{6}{\sin^2\dfrac{22x}{3}}$, $h'(x)=-\dfrac{2}{3\sin^2\left(\dfrac{10x}{9}-\dfrac{\pi}{21}\right)}$,

$u'(x)=-\dfrac{3}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{11}-75\pi x\right)}$.

21. а) $f'(x)=-\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{1-\left(2x+\dfrac{\pi}{5}\right)^2}}$, $h'(x)=-\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$,

$u'(x)=-\dfrac{x}{2\sqrt{x^2-x^4}}$;

ә) $f'(x)=-\dfrac{1}{1+25x^2}$, $g'(x)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{5}{3}x+\dfrac{\pi}{7}\right)^2}$, $h'(x)=\dfrac{x^3}{1+9x^8}$,

$u'(x)=-\dfrac{4x}{1+(14x^2-1)^2}$.

22. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$, $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{2}-8}}$, $h'(x)=\dfrac{2\cos x}{\sqrt{14-\sin x}}$, $u'(x)=-\dfrac{14\cos 7x}{\sqrt{\sin 7x+5}}$.

23. а) $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$; ә) $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{4}$;

б) $\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}$; в) $\dfrac{1}{20}+\dfrac{k}{10}$.

24. $t\in[-5;-2)$. **25.** $x\in\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **26.** а) 1; ә) 0; б) 5; в) -36.

27. а) $x\in(-\infty;0)\cup(0;1]\cup[6;+\infty)$; ә) $x\in(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$.

28. а) $\dfrac{\pi k}{5}, \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}$; ә) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k, \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}, \dfrac{\pi}{14}+\dfrac{\pi m}{7}$; б) $\dfrac{\pi k}{2}, \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{6}$; в) $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}$.

29. $f'(x)=\cos x-3\sin 3x-14x$; $f''(x)=-\sin x-9\cos 3x-14$;

$f'''(x)=-\cos x+27\sin 3x$; $f''''(x)=\sin x+81\cos 3x$.

30. 2. **31.** а) $f'(x)=-\dfrac{2\sin x}{\sqrt{\cos x}}$, $g'(x)=-\dfrac{\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}}$, $h'(x)=-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$,

$u'(x)=-\dfrac{x\sin\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$;

ә) $f'(x)=\dfrac{3\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}$, $g'(x)=\dfrac{15\operatorname{arctg}^2(5x)}{1+25x^2}$, $h'(x)=\dfrac{6x^2}{1+4x^6}$,

$u'(x)=\dfrac{4x\operatorname{arctg}(x^2+1)}{2+2x^2+x^4}$.

32. а) $-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$; ә) $-\frac{8\pi^2}{9}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{2}$. **33.** а) 0; ә) 3; б) 28; в) -76.

34. а) $x\in\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$; ә) $x\in\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right)$;

б) $x\in\left[\frac{1}{6}+k;\frac{5}{6}+k\right]$; в) $x\in\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in Z$.

35. 115. **36.** 400 км. **37.** (1;1), (1;–1); **38.** 20 және 30 сағатта. **39.** $\sqrt{a}+\sqrt{5}$.
40. а) $x=1$; ә) $x=3$. **41.** 9.

Қосымша тапсырмалар

Келесі функциялардың туындыларын табыңдар (1–7):

1. (1) $f(x)=x+5$.

2. (1) $f(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1$.

3. (2) $f(x)=\frac{x^2+2x}{2x-6}$.

4. (2) $f(x)=\frac{1-x^9}{1-x^3}$.

5. (2) $f(x)=(5x^2-3x+2)^5$.

6. (2) $f(x)=\frac{3-x}{(x+7)^2}$.

7. (2) $f(x)=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.

8. (2) $f'(x)=0$ теңдеуін шешіңдер, егер: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x$ болса.

9. (2) $f'(x)=g'(x)$ теңдеуін шешіңдер, егер:
$f(x)=4x^3+12x^2$, $g(x)=2x^3+8x^2+5x+11$.

10. (3) $f'(x)<g'(x)$ теңсіздікті шешіңдер, егер:
$f(x)=3x^3+21x^2+5x-7$, $g(x)=2x^3+8x^2+5x+11$.

11. (3) $\frac{f'(x)}{g'(x)}<0$ теңсіздікті шешіңдер, егер:
$f(x)=11x^3-11x^2+9$, $g(x)=4x^3+5x^2-17$.

12. (3) Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} f'(x) > 0, \\ g'(x) \le 0. \end{cases}$

Егер $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 16x + 18$, $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 21$ болса.

13. (2) $f'(x) \le 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын бүтін шешімдерінің санын анықтаңдар, егер $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{16x^3}{3}$ болса.

14. (2) $y = x^3 - 3x$ функциясының туындысының оң мән қабылдайтын аргументтерінің мәндерін табыңдар.

Келесі функциялардың туындыларын табыңдар(14-17):

15. (2) а) $f(x) = \sqrt{x}$; ә) $f(x) = 3x + 4\sqrt{x}$.

16. (3) а) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; ә) $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}-x}$.

17. (3) а) $f(x) = \left(\sqrt{5x}+1\right)^4$; ә) $f(x) = \frac{1}{\left(7\sqrt{2x}+8x\right)^3}$.

18. (3) $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысының мәнін табыңдар:

а) $f(x) = x^4\left(2\sqrt{x}+3x\right)^4$, $x_0 = 1$;

ә) $f(x) = \left(x^2 - 8x + 16\right)^2\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\right)^3$, $x_0 = 4$.

Келесі функциялардың туындыларын табыңдар (19–24):

19. (1) а) $y = -\cos x$; ә) $y = 5\sin x$; б) $y = x^2 \sin x$.

20. (2) а) $y = 2\sin x \cos x$; ә) $y = x^2 + \cos 2x \sin 3x$.

21. (2) а) $y = \cos^2 x$; ә) $y = \frac{7}{\sin^7 x}$; б) $y = \cos^3 x \sin^2 x$;

в) $y = \frac{1}{\sin^2 x}$; г) $y = \mathrm{tg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 x$ ғ) $y = -\frac{1}{9}\sin^3 3x$;

д) $y = \left(x^2 + 5\sin x\right)^3$.

22. (3) а) $f(x)=\sqrt{x+\sin x}$; ә) $f(x)=\sqrt{x\sin 2x}$; б) $f(x)=\sqrt{\cos x\sin x}$;

в) $f(x)=\operatorname{ctg}^2\sqrt{2x^3-3x^2}$; г) $f(x)=\sin\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; ғ) $f(x)=\dfrac{\sin\sqrt{2x^3+6x}}{\cos\sqrt{2x^3+6x}}$.

23. (3) а) $f(x)=\sin\sin x$; ә) $f(x)=\cos(\sin x)$;

б) $y=\operatorname{tg}\sqrt{\operatorname{tg}2x}$; в) $f(x)=\cos(\cos x)\sin(\sin x)$.

24. (3) а) $f(x)=\arccos 2x$; ә) $f(x)=\operatorname{arctg}(x)^2$;

б) $f(x)=\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2-\dfrac{\pi}{6}}$; в) $f(x)=x^2\arcsin x$.

25. $y=1+4\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ функциясының туындысының мәні $10\sqrt{3}$-ке тең болатын x-тің барлық мәндерін табыңдар.

26. (4) Төмендегі шарттарды қанағаттандыратын $f_n(x), n=0,1,2\ldots\ldots,$ функция тізбегі берілген:

1) $f_0(x)=\sin x$,

2) $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$ ($f_0(x)$-тен өзге әрбір функция алдыңғы функциясының туындысына тең).

Табыңдар: а) $f_4(x)$; ә) $f_{10}(x)$; б) $f_{2014}(x)$.

27. (2) $f'(x)=0$ теңдеуін шешіңдер, егер $f(x)=3x^4-4x^3$ болса.

28. (3) $f'(x)=g'(x)$ теңдеуін шешіңдер, егер $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ болса.

29. (3) $f'(x)<g'(x)$ теңсіздігін шешіңдер, егер $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+1}$, $g(x)=\dfrac{2x^2}{2x^2+1}$ болса.

30. (3) $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}<0$ теңсіздігін шешіңдер, егер $f(x)=5x^3-25x^2$, $g(x)=3x^3+9x^2$ болса.

31. (3) Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} f'(x)\le 0, \\ g'(x)\le 0. \end{cases}$

Егер $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3+3x^2+8x$, $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+3x^2+9x$ болса.

32. (2) $y=x^5-\frac{5}{4}x$ функциясы теріс мәндерді қабылдайтын аргументтің мәндерін табыңдар.

33. (2) $y=\sqrt{x}+x$ функциясы теріс емес мәндерді қабылдайтын аргументтің мәндерін табыңдар.

Келесі функциялардың туындыларын табыңдар (34–35):

34. (2) а) $f(x)=x\sqrt{x}$; ә) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$; б) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$; в) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+5}$.

35. (3) а) $f(x)=x^2\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}-7\right)^2$; ә) $f(x)=x^2\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}-7\right)^2$; б) $f(x)=x^3\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}-13x\right)^3$.

36. (3) $y=5+8\cos\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$ функциясының туындысы $8\sqrt{3}$-ке тең болатын x-тің барлық мәндерін табыңдар.

37. (4) Келесі шарттарды қанағаттандыратын $f_n(x),(n=0,1,2......)$ функциялар тізбегі берілген:

1) $f_0(x)=\cos x$,

2) $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$ ($f_0(x)$-тен басқа әрбір функция алдыңғы функцияның туындысына тең).

Табыңдар: а) $f_4(x)$; ә) $f_{10}(x)$; б) $f_{2014}(x)$.

Жауаптары:

1. 1. **2.** $x^4+x^3+x^2-x$. **3.** $\frac{x^2-6x-6}{2(x-3)^2}$. **4.** $3x^2+6x^5$. **5.** $5(10x-3)(5x^2-3x+2)^4$.

6. $\frac{x-13}{(x+7)^3}$. **7.** $\frac{4x-4}{(x+1)^3}$. **8.** $-1;-3$. **9.** $0;\frac{8}{3}$. **10.** $x\in\left(-\frac{26}{3};0\right)$. **11.** $x\in\left(-\frac{5}{6};0\right)\cup\left(0;\frac{2}{3}\right)$.

12. $x\in(4;16]$. **13.** 9. **14.** $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **15.** а) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. ә) $3+\frac{2}{\sqrt{x}}$. **16.** а) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

ә) $\frac{x+6\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-x)^2}$. **17.** а) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{x}}(\sqrt{5x}+1)^3$; ә) $-3\left(\frac{7\sqrt{2}+16\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(7\sqrt{2x}+8x)^4}\right)$.

18. а) 4500; ә) 0. **19.** а) $\sin x$; ә) $5\cos x$; б) $2x\sin x + x^2\cos x$.

20. а) $2\cos 2x$; ә) $2x - 2\sin 2x\sin 3x + 3\cos 3x\cos 2x$.

21. а) $-\sin 2x$; ә) $-\dfrac{49\cos x}{\sin^8 x}$. б) $\sin x\cos^2 x(5\cos^2 x - 3)$; в) $-\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$. г) 0.

ғ) $-\sin^2 3x\cos 3x$; д) $3(x^2+5\sin x)^2(2x+5\cos x)$.

22. а) $\dfrac{1+\cos x}{2\sqrt{x+\sin x}}$; ә) $\dfrac{\sin 2x + 2x\cos 2x}{2\sqrt{x\sin 2x}}$; б) $\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{2\sin 2x}}$;

в) $\dfrac{6(x-x^2)}{\sqrt{2x^3-3x^2}\sin^2\sqrt{2x^3-3x^2}}\operatorname{ctg}\sqrt{2x^3-3x^2}$; г) $-\dfrac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\cos\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$;

ғ) $\dfrac{3(x^2+1)}{\sqrt{2x^3+6x}\cdot\cos^2\sqrt{2x^3+6x}}$. **23.** а) $\cos(\sin x)\cos x$; ә) $-\sin(\sin x)\cos x$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} 2x}\cdot\cos^2 2x\cdot\cos^2\sqrt{\operatorname{tg} 2x}}$; в) $-\sin x\cdot\cos(2\cos x)$.

24. а) $-\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$; ә) $\dfrac{2x}{1+x^4}$; б) $\dfrac{6x}{(\pi-1-x^2)\sqrt{x^2-\dfrac{\pi}{6}}}$; в) $2x\arcsin x + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

25. $x = \dfrac{1}{5}\left(\pm\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **26.** а) $\sin x$; ә) $-\sin x$; б) $-\sin x$. **27.** 0;1.

28. $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. **29.** $x\in\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$. **30.** $x\in(-2;0)\cup\left(0;\dfrac{10}{3}\right)$.

31. $x\in\{-3\}$. **32.** $x\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **33.** $x\in[0;+\infty)$.

34. а) $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$; ә) $\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$; б) $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$; в) $\dfrac{5-x}{2\sqrt{x}(x-5)^2}$.

35. а) $\dfrac{4x\sqrt{x}-\sqrt{5}}{2\sqrt{x}(\sqrt{5x}-x)^2}$; ә) $2\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-7x\right)(\sqrt{x}-7)$; б) $3\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-13x^2\right)^2(\sqrt{x}-26x)$.

36. $x = \dfrac{1}{2}\left((-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{7} + \pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **37.** а) $\cos x$; ә) $-\cos x$; б) $-\cos x$.

§3 ТУЫНДЫНЫҢ ФИЗИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ МАҒЫНАСЫ

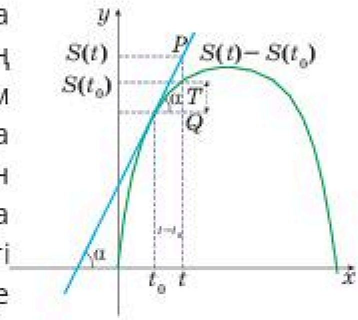
3.1 Дифференциал және туындының физикалық мағынасы

«Математик жаратылысты зерттеушінің тапқан шешімінің әлдеқайда тереңнен түсіндірілуіне ғана мүмкіндік туғызбайды, сонымен қатар бастапқы қойылған проблемаларды елеулі түрде жалпылайды.»
Ю. П. Вигнер

Физик пен математик бастапқы v_0 жылдамдықпен жердің бетінен вертикаль бағытта жоғары лақтырылған тастың қозғалысын бақылайды. Екеуі де уақыттың, жылдамдықтың және арақашықтықтың арасындағы өзара байланысты талқылайды. Физик шамамен былай ойлайды. «Тұрақты v жылдамдықпен қозғалған материалдық нүкте, t уақыт аралығында $S=vt$ жол жүреді. Бірақ, тастың жылдамдығы тұрақты шама емес екені анық». Онда бұл жағдайды белгіленген сәттен бастап өткен өте аз dt уақыт аралығында қарастырайық. Осы уақыт аралығында тастың биіктігі өте аз dS шамаға өзгереді. Физик өте аз dt уақыт ішінде тастың жылдамдығы айтарлықтай өзгеруі мүмкін емес екенін болжайды (негізсіз емес). Тастың t_0 уақыт аралығындағы жылдамдығын $v_0(t)$ деп белгілеп, ол сенімді түрде $dS=v(t_0)dt$ деп жазады; $v_0(t)$ шамасын ол лездік жылдамдық деп атайды; dS-ты ол шексіз аз dt уақыт аралығында жүрген жолдың шексіз аз өсімшесі деп атайды; dS және dt физик үшін – жол мен уақыттың сәйкесінше дифференциалы. Сонымен қоса, dS және dt ол үшін – нақты бар шамалар, тек олар өте кішкентай. Ол тіпті оларға математикалық амалдар қолданады: теңдіктің екі жағын да dt-ға бөледі, сөйтіп мысалы, мына теңдікті алады $\frac{dS}{dt}=v(t_0)$.

Ал математик, математикке тән қасиет бойынша, шынайы табиғатта жоқ нәрселерді ойластыра бастайды. Ол көз алдына S биіктіктің t уақыттан тәуелділік графигін елестетеді (1-сурет). Графиктегі абсциссасы t_0 болатын нүктеде жанама жүргізеді және $S'(t_0)$ туындысын жанаманың көлбеулік коэффициенті деп атайды. Математик жағдайды уақыт мезетінде: аргументтің өсімшесін $t-t_0$, функция өсімшесін $S(t)-S'(t_0)$ және туындыны $S'(t_0)(t-t_0)$ деп қарастырады. Туынды $S'(t_0)(t-t_0)=k(t-t_0)=\operatorname{tg}\alpha(t-t_0)=PQ_t$. Белгілеудегі t индексі t-ның t_0-ге жақындаған сәтіндегі жағдайдың динамикасын көрсету үшін қойылды.

Математик мұндай жақындау орын алғанда $S(t)-S(t_0)$ және $S'(t_0)(t-t_0)=PQ_t$ шамаларының арасындағы PT айырмасы айтарлықтай жылдам кішірейетінін түсінеді, сонда $t-t_0$ айырмасы да кішірейеді. Бірақ, өзінің физик досына деген сый-құрметі жоғары болса да, оның нақтылыққа деген сүйіспеншілігі жеңеді, математик тіпті t және t_0 шамаларының өте жақын мәндерінде $S(t)-S(t_0)$ функциясы өсімшесінің $S'(t_0)(t-t_0)$ өрнегімен беттесетінімен де келісе алмайды (өйткені PT кесіндісі бар ғой). Ол:



1-сурет

$$S(t)-S(t_0)=S'(t_0)(t-t_0)+PT \text{ деп жазады.}$$

$S(t)$ функциясының t_0 нүктесіндегі диференциалын математик $S'(t_0)(t-t_0)$ функциясы деп атады.

Ол содан кейін $t-t_0$ өте аз айырманың мәнін dt деп белгілеуге келісті, ал $S'(t_0)(t-t_0)$ функциясының өзін dS деп белгіледі және $dS=S'(t_0)dt$.

Екеуі де t-ның t_0-ге өте жақын мәндерінде (айырмашылығы өте аз) математик те, физик те «dS-тің айырмашылығы өте аз» деген келісімге келді, екеуі де $v(t_0)$ лездік жылдамдықпен $S'(t_0)$ туындысы екеуі бір-ақ нәрсе екенін түсінді. Математик туындыны $S'(t_0)=\frac{dS}{dt}$ деп жаңаша белгілеуге келісті, бірақ ол үшін $\frac{dS}{dt}$ – бөлшек емес, бар болғаны символдар жинағы.

Қорытынды жасайық.

Туындының физикалық мағынасы. $S(t)$ функциясы қандай да бір S физикалық шамасының t уақытқа тәуелділігін сипаттайтын функция болсын. Онда $S'(t)$ туындысы t уақыт мезетіндегі S шамасының өзгеруін көрсететін $v(t)$ лездік жылдамдығын береді.

Егер $v(t)$ – дифференцияланданатын функция болса, онда оның $v'(t)$ туындысын жылдамдық өзгерісінің жылдамдығы деп қарастыру орынды болады. Оны физикада $a(t)$ үдеу деп атайды. Жылдамдық $v(t)=S'(t)$, үдеу $a(t)=v'(t)$ болады.

x нүктесіндегі $f(x)$ функциясының дифференциалы деп dx пен тәуелді функцияны атайды: $df=f'(x)dx$, мұндағы dx шамасы x аргументінің жеткілікті түрдегі өте аз өсімшесін білдіреді.

1 мысал

Сан өсінің бойымен қозғалып келе жатқан x материалдық нүктесінің координатасы $x(t)=t^3+3t^2-9t+2$, мұндағы $t\geq 0$ заңы бойынша өзгерсін. Нүктенің бастапқы орнын, бастапқы жылдамдығын және бастапқы үдеуін табыңдар. Өстің сол жақ шетіндегі болған кездегі үдеуін табыңдар.

Шешуі: t уақыт мезетінде жылдамдығы $v(t)=\frac{dx}{dt}=$ $=\left(t^3+3t^2-9t+2\right)'=3t^2+6t-9$ формуласымен, ал үдеу $a(t)=\frac{dv}{dt}=$ $=v'(t)=\left(3t^2+6t-9\right)'=6t+6$ формуласымен есептеледі. Өстегі нүктенің бастапқы орны $x(0)=2$. Бастапқы жылдамдық $v(0)=-9$ (яғни кәдімгі сан өсінде нүкте бастапқыда солға қарай қозғалған), бастапқы үдеу $a(0)=6$. Сол жақ шеткі орнында жылдамдықтың нөлге тең екенін түсіну қиын емес.
$3t^2+6t-9=0$, $t^2+2t-3=0$, $t_1=1\in[0;+\infty)$, $t_2=-3\notin[0;+\infty)$ шарты орындалғанда жылдамдық нөлге тең болады. Бұл дегеніміз, $t=1$ мезетіндегі нүктенің 0-ге тең жылдамдығы бар дегенді білдіреді. $t=1$ мәнін $x(t)$-ға апарып қойсақ, x нүктесінің сол жақ шеткі орнын анықтаймыз:
$x(1)=-3$. Ал осы мезеттегі үдеу $a(1)=12$ болады.

2 мысал

Егер электр тізбегіндегі I ток күші тұрақты болса, t уақыт аралығындағы өткізгіштің қимасынан өтетін заряд мөлшері $Q=I\cdot t$ формуласымен өлшенеді. Егер $I=I(t)$ тұрақты емес, үзіліссіз уақыттан тәуелді шама болса, физиктерше талдасақ, төмендегі қатынасты алуға болады: $dQ=I(t)dt$, $\frac{dQ}{dt}=I(t)$, $Q'(t)=I(t)$.

3 мысал

Егер қандай да бір құрылғының қуаты $N(t)$ заңымен өзгерсе, ал $A(t)$ оның жасайтын жұмысы болса, онда $dA=N(t)dt$, $\frac{dA}{dt}=N(t)$, $A'(t)=N(t)$ теңдігі орындалады.
Өз кезегінде егер $F(t)$ күш болса, онда $dN=F(t)dt$, $\frac{dN}{dt}=F(t)$, $N'(t)=F(t)$ болады.

Есептер

1-бөлім

1. (3) Материалдық нүкте $x(t)=3t^2+4t+2$ (x – метрмен, t – секундпен есептелген) заңдылығымен түзу сызықты қозғалады. Нүктенің $t=0$ мезетінен бастап жылдамдығы 16 м/с-қа тең болған уақытқа дейін жүрген жолын табыңдар.
2. (3) Жердің бетінен вертикаль жоғары лақтырылған дене $h(t)=60t-5t^3$ (h – метрмен, t – секундпен өлшенеді) заңдылығымен қозғалады. Қанша уақыттан кейін ол өзінің ең жоғарғы нүктесіне жетеді? Оның көтеріле алатын биіктігін анықтаңдар.
3. (2) $t=2$ болғанда $x(t)=2t_3-t_2$ заңдылығымен түзу қозғалған материалдық нүктеге m салмақпен әсер ететін F күшін табыңдар.
4. (2) Электр өткізгіш сым арқылы өткен заряд мөлшері $Q(t)=5t^3+2t^2-5$ заңдылығы бойынша өзгереді. $t=2$ мезетіндегі тоқтың шамасын табыңдар.
5. (2) Машинаның қозғалтқышының орындаған жұмыс мөлшері $A(t)=3t^2+5t$ заңдылығымен өзгереді. $t=1$ мезетіндегі қозғағыштың қуаты қандай?
6. (2) Егер қозғалтқыш қуатының теңдеуі $N(t)=2t+16$ болса, онда 12 секундтан кейін қозғалтқыштың атқаратын жұмыс мөлшері қандай болады? Жұмыстың теңдеуін табыңдар!

2-бөлім

7. (2) Материалдық нүкте $x(t)=\dfrac{1}{2}t^2+4t+2$ заңдылығы бойынша түзу сызықты қозғалады. Нүктенің $t=1$ уақыт ішіндегі орташа жылдамдығының $t=2$ мезетіндегі лездік жылдамдыққа қатынасын табыңдар.
8. (2) Бойының ұзындығы $1,8$ м болатын адам 12 м биіктікте орналасқан жарық көзінен 50 м/мин жылдамдықпен алыстайды. Оның басының көлеңкесі қандай жылдамдықпен жылжиды?
9. (3) Салмағы 2 кг дене $x(t)=t^2+t+1$ заңдылығымен тура сызықпен қозғалады. x-тің координатасы сантиметрмен, t уақыт секундпен өлшенеді. Табыңдар:
   а) әсер етуші күшті;
   ә) дененің қозғалысты бастағаннан кейін 2 с өткендегі E кинетикалық энергиясын.

10. (2) Электр сымындағы тоқ $I(t)=2t^3+5$ заңы бойынша өзгереді. Ондағы заряд қандай заңға сәйкес өзгереді?

A) $q(t)=\frac{1}{2}t^3+5t$; B) $q(t)=6t^2$; C) $q(t)=6t^2+5t$; D) $q(t)=\frac{1}{2}t^4+5t$.

11. (2) Асан және Әлия келесі ойынды ойнап отыр. Олар кезекпен үймеден 1-ден кем емес және 7-ден артық емес тастар алады. Ойыншының алатын тасының саны басқа ойыншының алдыңғы жүрісте алған тасының санымен бірдей болмауы тиіс. Жүріс жасай алмай қалған адам жеңіледі. Ойын басында үймеде 15 тас болды. Бірінші болып Асан жүреді. Егер ол ойында жеңімпаз болғысы келсе, бірінші жүрісте қанша тас алуы керек?

12. (2) Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

а) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2,9$;

ә) $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$.

13. (2) Арман жұмысқа орналасады. «K» фирмасы оған алғашқы айда 1000 ш.б. (шартты бірлік) жалақы төлеуге және содан кейін әр ай сайын оның жалақысын 10%-ға өсіріп отыруға уәде береді. Алғашқы бір жылда Арман қанша жалақы (ш.б.) алады?

14. (2) Ықшамдаңдар: $(3\sin x+2\cos x)^2+(2\sin x+3\cos x)^2$.

Жауаптары:

1. 20 м.

2. 2 секундтан кейін 80 м биіктікке.

3. 22 м.

4. 68 А.

5. 11 Вт.

6. $A(t)=t^2+16t$, 336 Дж.

7. $\frac{13}{12}$.

8. $\frac{1000}{17}$ м/мин.

9. а) 0,04 Н; ә) 0,0025 Дж.

10. D.

11. 7.

12. а) $x_1=2$, $x_2=0,5$; ә) $x_2=0,5$, $x_2=0,5$.

13. ≈ 21384 ш. б.

14. 13.

3.2 Функцияның графигіне жүргізілген жанама

«Есептерді шығара білу – суда жүзе білу немесе шаңғымен сырғанай алу тәрізді тәжірибелік өнер. Оған тек еліктеу, талпыну немесе жаттығу арқылы ғана қол жеткізуге болады.»
Д. Пойа

$y=f(x)$ функциясы $x=x_0$ нүктесінде дифференциалданады делік. Бұл $(x_0, f(x_0))$ нүктесінде жанама бар дегенді білдіреді.

ТЕОРЕМА.

$y=f(x)$ функциясы $x=x_0$ нүктесінде дифференциалданатын болсын. Функцияның графигіне абсциссасы $x=x_0$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуі мынадай болады:

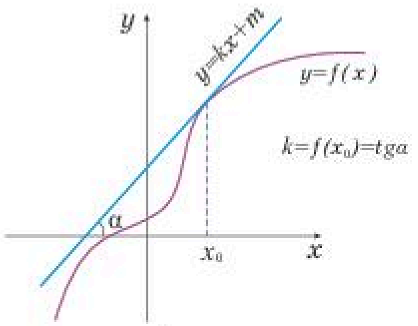
$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Дәлелдеу. Координаттық жазықтықта координатасы $(x_0; y_0)$ болатын нүкте берілсін. Сонда осы нүкте арқылы өтетін кез келген түзудің теңдеуі $y-y_0=k(x-x_0)$ түрінде болады, мұндағы k–қандай да бір сан, ол бұрыштық коэффициент болып табылады. Шындығында, теңдеуге $x=x_0$ және $y=y_0$ алмастыруын енгізсек, тура теңдік шығады:

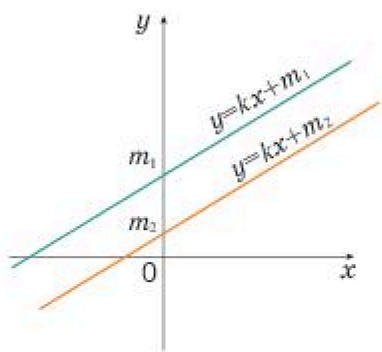
$$y_0-y_0=k(x_0-x_0).$$

$y=f(x)$ функциясының графигіне абсциссасы $x=x_0$ нүктесінде жүргізілген жанама координаты $(x_0, f(x_0))$ (2–сурет) болатын нүкте арқылы өтеді, сондықтан, теңдеу мына түрге ие болады:

$$y_0-f(x_0)=k(x_0-x_0).$$



2-сурет



3-сурет

Жанаманың бұрыштық коэффициенті k туындының $f'(x_0)$ мәніне тең:

$$y_0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_0 - x_0)$$

Теорема дәлелденді.

Берілген теңдеуден басқа, жанамалар туралы есептердің дұрыс шешіміне қол жеткізу үшін тағы да бірнеше теориялық фактілерді есте сақтау қажет:

1) Егер $y = kx + m$ – теңдеуі $y = f(x)$, функциясының графигіне x_0 нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуі болса, онда $k=f'(x_0)$.

2) $y = kx + m$ түзуі үшін k коэффициенті түзудің «жоғарғы жақ» бөлігі мен Ox өсінің оң бағыты арасындағы α бұрышының тангенсіне тең.

3) $y = k_1x + m_1$ және $y = k_2x + m_2$ түзулері (3-сурет) $\begin{cases} k_1 = k_2 \\ m_1 \neq m_2 \end{cases}$ орындалғанда ғана және тек сонда ғана параллель болады.

4) Кез келген $y=f(x)$ функциясы графигінің Oy ордината өсімен қиылысуын $x=0$ (Oy өсіндегі барлық нүктелерде абсцисса 0-ге тең болғандықтан) шартынан іздейміз. Кез келген $y=f(x)$ функциясының Ox абсцисса өсімен қиылысуын $y=0$ (Ox өсіндегі барлық нүктелерде ордината 0-ге тең болғандықтан) шартынан іздейміз.

Енді шешімдері соңында көрсетілген жаттығулар тізімі берілген. Өздеріңнің қай деңгейге дейін білімдерің жететінін сынап көру сендерге қызық болады деп ойлаймын.

1 жаттығу

$y=\cos^2 x$ функциясының графигіне абсциссасы $x_0 = \frac{\pi}{4}$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін табыңдар.

2 жаттығу

$y=x^3-4x$ функциясының графигіне осы графиктің абсцисса өсімен қиылысу нүктелерінде жүргізілген жанамаларының теңдеуін табыңдар.

3 жаттығу

$y=4x+1000$ түзуіне параллель болатын $y = \frac{2x-2}{x+1}$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың координат өстерімен қиылысу нүктелерінің координатасын табыңдар.

4 жаттығу

Ox өсімен $\frac{3\pi}{4}$ бұрышын жасайтын, $y = \frac{x+1}{x-3}$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың Ox өсімен қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар

5 жаттығу

Әрқайсысы координат өстерімен ауданы 2 болатын үшбұрыш жасайтын $y=\frac{x^2+1}{x}$, функциясының графигіне жүргізілген барлық жанамалардың теңдеуін жазыңдар.

6 жаттығу

$y=x^2$ және $y=-x^2+4x-6$ функцияларының графиктеріне ортақ болатын жанамалардың теңдеулерін табыңдар.

7 жаттығу

$y=\sin 2x-3x^3$ және $y=\frac{x^3}{3}+2x^2+6x.$ функцияларының графиктеріне сәйкес жүргізілген екі параллель жанамалардың теңдеулерін табыңдар.

Талдау жасау және шешімдері:

1 жаттығудың шешімі

Талдау. Теория бойынша жанаманың теңдеуі: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.
Не белгілі? x_0-дің мәні белгілі.
Нені табу қажет? $f(x)$ және $f'(x_0)$ есептеу керек.
Оны қалай істеу керек? x_0-ді $f(x)$ және $f'(x)$-ке қою керек.
Әрине, алдымен $f'(x)$-ті табу керек.

Шешуі. $f(x)=\cos^2 x,\ f(x_0)=\cos^2\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$

$f'(x)=-2\cos x\sin x=-\sin 2x,\ f'(x_0)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-1.$

Жанаманың теңдеуі: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $y=\frac{1}{2}-1\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $y=-x+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$

Жауабы: $y=-x+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$

2 жаттығудың шешімі

Талдау. Графиктің Ox өсімен қиылысу нүктелерін қалай табуға болады? Осы өстегі кез келген нүктенің екінші координатасы (y) нөлге тең. $0=x^3-4x$, $(x-2)(x+2)=0$, $x=0$ теңдігі шығады, $x=0$ немесе $x=2$ немесе $x=-2$. Бұл деген не? Бұл дегеніміз, үш қиылысу нүктесі бар дегенді білдіреді. 3 жағдайды қарастыру керек: $x_0=0$, $x_0=2$, $x_0=-2$.

Шешуі. $f(x)=x^3-4x, f'(x)=3x^2-4.$

1) $x_0=0$, $f(0)=0$, $f'(0)=4$, $y=f(0)+f'(0)(x-0)$, $y=-4x$.

Қалған екі жағдай да осыған ұқсас.

3 жаттығудың шешімі

Талдау. Қандай жағдайда түзулер параллель болады? Олардың бұрыштық коэффициенттері тең болуы керек. $y = 4x+1000$ түзуінде коэффициент 4-ке тең. Ал жанаманың бұрыштық коэффициенті неге тең? Теория бойынша ол $f'(x_0)$-ге тең. Демек, $4=f'(x_0)$. Туынды $f'(x)$ тауып, $f'(x)=4$ теңдеуін шешеміз. Егер x_0-ді тапсақ, онда қалғанын 1 немесе 2-жаттығулардағыдай етіп шығарамыз. Тек $f'(x_0)$ ғана белгілі. Жанаманың координаттар өсімен қиылысу нүктелерін Oy үшін $x=0$ және Ox үшін $y=0$ шарттарынан табамыз.

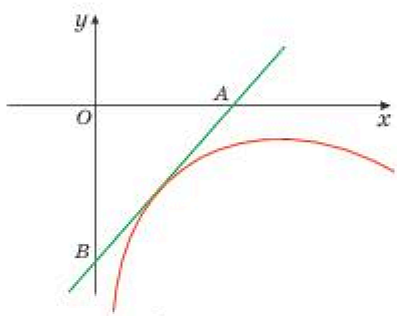
4 жаттығудың шешімі

Талдау. Қандай түзулер Ox өсімен $\frac{3\pi}{4}$ бұрышын жасайды?

Кез келген $y=kx+m$ түзу үшін коэффициент $k=\mathrm{tg}\alpha$, мұндағы α– түзу мен Ox өсінің арасындағы бұрыш, яғни $k=\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}=-1$. Бірақ, бұл жай ғана түзу емес, бұл – жанама! Осыдан $k=f'(x_0)$ мұндағы x_0 әзірге белгісіз. Алынған $-1=f'(x_0)$ теңдігінен x_0-ді табамыз.

5 жаттығудың шешімі

Талдау. Әзірге $y=\frac{x^2+1}{x}$ функциясының графигін дәл салмай шығаруға тырысып көрейік. Көз алдымызға оның жалпы нұсқасын елестетейік (4-сурет). AOB үшбұрышының ауданы 2-ге тең. Бұдан біз нені таба аламыз? Ешнәрсе.



4-сурет

*Қазір біз сендерге **өте пайдалы кеңес** береміз. Есептің шартында берілген сандарды пайдаланып ешнәрсе таба алмайтын болсақ, онда бұл есептің шешімін теңдеумен немесе теңдеулер жүйесімен шығару керек екендігін білдіреді. Есептің шартында берілгендерді өрнектеуге (табуға) болатындай шамаларды іздейміз. Оларды қандай да бір әріптер (x, y, a, b және т.с.с.) арқылы белгілеп, уақытша олар белгілі деп болжаймыз және олар арқылы есепте берілген шамаларды өрнектеуге тырысамыз. Теңдеу немесе теңдеулер жүйесі пайда болады.*

Егер біз жанасу нүктесінің абсциссасын x_0 білсек, онда жанаманың теңдеуін, осы жанаманың координаттар өсімен қиылысу нүктелерін және AOB үшбұрышының ауданын табар едік (4-сурет).

Дәл осылай, x_0 бізге белгілі деп ойлаймыз.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x},\ f'(x)=1-\frac{1}{x^2},\ f(x_0)=x_0+\frac{1}{x_0},\ f'(x_0)=1-\frac{1}{x_0^2}.$$

Осыларды жанаманың теңдеуіне қоямыз.

Шешуі. Жанасу нүктесінің абсциссасы x_0 болсын. Онда

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}, f(x_0)=x_0+\frac{1}{x_0}, f'(x_0)=1-\frac{1}{x_0^2}.$$

Осыларды жанаманың теңдеуіне қоямыз:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\ y=x_0+\frac{1}{x_0}+\left(1-\frac{1}{x_0^2}\right)(x-x_0),\ y=\left(1-\frac{1}{x_0^2}\right)x+\frac{2}{x_0}.$$

Бұл түзудің Ox өсімен қиылысу нүктесі A-ны $y=0$ шартынан іздейміз, $\left(1-\frac{1}{x_0^2}\right)x=-\frac{2}{x_0}, x=\frac{2x_0}{1-x_0^2}$ – A нүктесінің абсциссасы. Жанаманың Oy өсімен қиылысу нүктесін B-ны $y=0$ шартынан іздейміз: $A\left(\frac{2x_0}{1-x_0^2},0\right), B\left(0;\frac{2}{x_0}\right)$.

OAB үшбұрышының ауданы мынаған тең:

$\frac{1}{2}AO\cdot BO$-ға тең, мұндағы $AO=\left|\frac{2x_0}{1-x_0^2}\right|, BO=\left|\frac{2}{x_0}\right|$

A және B нүктелері теріс жарты өстерде орналасуы мүмкін, сондықтан BO кесіндісі $\frac{2}{x_0}$-ге емес, $\left|\frac{2}{x_0}\right|$-ге тең.

$S_{AOB}=2\left|\frac{1}{1-x_0^2}\right|$. Есеп шарты бойынша $S_{AOB}=2$. Мына теңдеуді аламыз: $\frac{1}{1-x_0^2}=\pm1$, бұдан $x_0=\sqrt{2},-\sqrt{2},0$. x_0-дің соңғы мәні $y=\frac{x^2+1}{x}$ функциясының анықталу облысында жатпайды.

Жауабы: $y=\frac{x}{2}\pm\sqrt{2}$.

6 жаттығудың шешімі

Талдау. Тағы да есептің шартында берілгендермен тікелей есептеулер жүргізе алмаймыз. Ең болмағанда, қиылысу нүктелерінің абсциссаларын білгенімізде ғой ...

p және q – жанасу нүктелерінің абсциссалары болсын (5-сурет).

Егер олар белгілі болса, онда біз жанаманың теңдеуін жаза алар едік. Біз p және q белгілі деп есептеп, жанаманың теңдеуін жазайық.

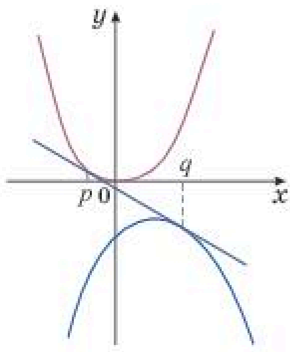
Шешуі. $f(x)=x^2, f'(x)=2x, f(p)=p^2, f'(p)=2p.$

p нүктесіндегі жанаманың теңдеуі

$y=p^2+2p(x-p)$, $y=2px-p^2$ түрінде болады. Екінші функция үшін $g(x)=-x^2+4x-6$, $g'(x)=-2x+4.$

q нүктесіндегі жанаманың теңдеуі мынадай түрде болады:

$y=-q^2+4q-6+(4-2q)(x-q)$, $y=(4-2q)x+q^2-6$.



5-сурет

Шарт бойынша бұл жанама: $y=2px-p^2$ біріншісімен беттеседі. Бірақ $k_1=k_2$ және $m_1=m_2$ болған жағдайда, бұл екі теңдеу $y=k_1x+m_1$ және $y=k_2x+m_2$ бірігіп бір түзуді береді.

Осыдан мына теңдеулер жүйесі шығады: $\begin{cases} 2p=4-2q, \\ -p^2=q^2-6. \end{cases}$

Жүйені шешіп, $q=1\pm\sqrt{2}$ екенін табамыз. Осы табылған $q=1\pm\sqrt{2}$-ні $y=(4-2q)x+q^2-6$ теңдеуіне қоя отырып, нәтижесінде екі мүмкін болатын түзуді аламыз.

7 Жаттығудың шешімі

Талдау. Қандай жағдайда жанамалар параллель болады? (6-сурет) Олардың бұрыштық коэффициенттері өзара тең. Бұрыштық коэффициент деген не? Бұл жанасу нүктесіндегі туындының мәні.
Енді туындыларын тауып теңестіру керек.

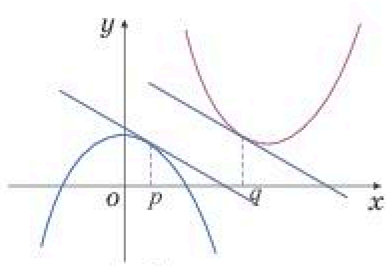
$$f(x)=\sin 2x-3x^3, f'(x)=2\cos 2x-9x^2, g(x)=\frac{x^3}{3}+2x^2+6x,$$

$$g'(x)=x^2+4x+6, f'(x)=g'(x), 2\cos 2x-9x^2=x^2+4x+6$$

Біріншіден, өзгеше теңдеу шықты.

Екіншіден, шартты қайта қарап, жанасу нүктелерінің абсциссалары беттеспеуі тиіс. p және q – жанасу нүктелерінің абсциссалары болсын (графикті қараңдар). Онда $2\cos 2p-9p^2=q^2+4q+6$ шығады.

Ескерту: *Егер теңдеудің құрамында бір мезетте дәрежелік және тригонометриялық функциялар бар болатын болса, онда не «жікте және шығар», не «минимум мен максимум нүктелерін іздестір» қағидаларын басшылыққа аламыз.*



6-сурет

Кез келген p үшін $\cos 2p \le 1$ және $p^2 \ge 0$ теңіздігі орындалатындықтан, $2\cos 2p - 9p^2 \le 2$ екінші жағынан $q^2+4q+6=q^2+4q+4+2=(q+2)^2+2\ge 2$ өйткені кез келген q үшін $(q+2)^2 \ge 0$ теңіздігі орындалады.

$2\cos 2p - 9p^2 = q^2+4q+6$ теңдеуінің сол жағы 2-ден аспайды, ал оң жағы 2-ден кем емес. Олай болса теңдік орындалуы үшін екі жағы да 2-ге тең болуы қажет:

$$\begin{cases} 2\cos 2p - 9p^2 = 2, \\ q^2+4q+6=2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos 2p - 9p^2 = 2, \\ (q+2)^2 = 0. \end{cases}$$

$2\cos 2p = 2+9p^2$ теңдеуін шешкенде де осылай талдаулар жасаймыз. Кез келген p үшін $2\cos 2p \le 2$ және $2+9p^2 \ge 2$, онда $2\cos 2p = 2+9p^2$ теңдігі орындалуы үшін, әр теңсіздіктегі теңдікті аламыз, яғни $2\cos 2p = 2$ және $2+9p^2=2$. Бұдан $p=0$ екені шығады.

Осылайша $p=0$ және $q=-2$ бірінші функциялардың графиктерінің жанамалармен жанасу нүктелерінің абсциссалары. Ары қарай 1-жаттығудағы сияқты орындалады. Біздің талдауларымыз есептің шешіміне алып келді.

Есепті соңына дейін шығарып, дәптерлеріңе жазыңдар.

Есептер

1-бөлім

$f(x)$ функциясының графигіне абсциссасы x_0 нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар (1–8):

1. (1) $f(x)=0,5x^2+x+1,\ x_0=2$.

2. (1) $f(x)=\dfrac{x^2}{6},\ x_0=2$.

3. (1) $f(x)=\cos x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

4. (1) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1},\ x_0=1$.

5. (1) $f(x)=x^4-7x^3+12x-45,\ x_0=0$.

6. (1) $f(x)=(x-2)(x\ \ +2x+4),\ x\ \ =3$.

7. (1) $f(x)=5-0,5x^2,\ x_0=-\sqrt{3}$.

8. (1) $f(x)=\sin(x+\pi)+1,\ x_0=-\dfrac{\pi}{4}$.

Функция графигінің абсциссалар өсімен қиылысу нүктесінде осы графикке жүргізілген жанаманың теңдеулерін жазыңдар (9–10):

9. (2) $y=\dfrac{x^3+1}{3}$.

10. (2) $y=x^2-2x$.

Функцияның графигінің ординаталар өсімен қиылысу нүктесінде осы графикке жүргізілген жанаманың теңдеулерін жазыңдар (11–13):

11. (2) $y=x^2-2x+5$.

12. (2) $y=3x^3+2x+5$.

13. (2) $y=2-x-x^3$.

$y=f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың берілген түзуге параллель өтетін x_0 нүктесінің абсциссасын табыңдар (14–17):

14. (3) $y=x^2-3x+2$, берілген түзу $2x+y=5$.

15. (3) $y=x^2-2x+5$, берілген түзу $y=2x$.

16. (3) $y=x^2$, берілген түзу $y=-\dfrac{1}{2}x+5$

17. (3) $y=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+10x-4$, берілген түзу $y=3+x$.

18. (3) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5x^2}{2}+7x-4$ функциясының графигіне жүргізілген жанама қандай нүктелерде Ox өсімен 45^0 бұрыш жасайды?

19. (3) $y=2x^2-5$ және $y=x^2-3x+5$ қисық сызықтарының қиылысу нүктелері арқылы осы қисық сызықтарға жүргізілген жанамалардың теңдеулерін жазыңдар.

20. (3) $y=x(x-4)^3$ функциясының графигінен, осы графиктің жанамалары абсцисса өсіне параллель болатын нүктелерді табыңдар.

21. (3) $y=\dfrac{x-4}{x-2}$ функциясының координаттар өсімен қиылысу нүктелері арқылы жүргізілген жанамалардың осы функцияның графигіне параллель болатынын көрсетіңдер.

22. (3) $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-x+1$ қисық сызығына жүргізілген жанама қандай нүктелерде $y=2x-1$ түзуіне параллель болады?

23. (3) $y=\dfrac{x+4}{x-5}$ функциясының графигіне жүргізілген, Ox өсімен 135^0 жасайтын жанамалардың Oy өсімен қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар.

24. (3) $y=-x$ түзуімен $M(1;-1)$ нүктесінде жанасатын $y=x^2+bx+c$ параболасының теңдеуін жазыңдар.

Берілген функцияның графигіне $y=2-x$ түзуіне параллель жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар (25–26):

25. (2) $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{5}{2}x^2-x$

26. (2) $y=\dfrac{x^3}{3}+x^2-x$

27. (3) $y=\dfrac{6}{\sqrt{x}}$ және $y=12x^{-\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}$ функциялары графиктерінің қиылысу нүктелері арқылы әрбір графикке жанамалар жүргізілген. Ox өсінің оң бағыты мен осы жанамалар арасында пайда болған бұрыштардың айырмасын табыңдар.

28. (3) $M(1;8)$ нүктесінде $y=\sqrt{\left(5-x^{-\frac{2}{3}}\right)^{3}}$ қисық сызығына жанама жүргізілген. Оның координаттар өсімен шектелген бөлігіндегі кесіндінің ұзындығын табыңдар.

29. (3) $y=\sqrt{x^2-5}$ қисық сызығына $M(3;\ 2)$ нүктесінде жүргізілген жанама мен координаттық бұрыш биссектрисаларынан жасалған үшбұрыштың ауданын табыңдар.

30. (3) $y=\dfrac{4}{x}$ гиперболасына жанамалар жүргізілген. Оның бірі $M(2;2)$ нүктесі арқылы өтсе, екіншісі $y=-4x$ түзуіне параллель. Осы жанамалардың әрқайсысы мен координаттар өсі арқылы жасалатын үшбұрыштардың ауданын табыңдар.

31. (3) $y=\cos x$ функциясының графигіне екі жанама жүргізілген. Оның бірі графиктегі абсциссасы $x=\dfrac{\pi}{6}$ нүктесі, ал екіншісі абсциссасы $x=\dfrac{7\pi}{6}$ нүктесі арқылы өтеді. Осы жанамалардың қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

32. (3) $y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$ функциясының графигіне екі жанама, бірі графиктегі абсциссасы $x=-1$ нүктесінде, ал екіншісі абсциссасы $x=3$ нүктесінде жүргізілген. Осы жанамалардың қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

2-бөлім

$f(x)$ функциясының графигіне абсциссасы x_0 нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар (33–37):

33. (1) $f(x)=x^4-2x^2,\ \ x_0=0{,}5$.

34. (1) $f(x)=\cos^2 x,\ \ x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

35. (1) $f(x)=\sin x,\ x_0=0$.

36. (1) $f(x)=\sqrt{4-5x},\ x_0=0$.

37. (1) $f(x)=\sqrt{x}+1,\ x_0=4.$

Функция графигінің абсциссалар өсімен қиылысу нүктесі арқылы осы графикке жүргізілген жанамалардың теңдеуін жазыңдар (38–39):

38. (2) $y=4x-x^2$.

39. (2) $y=6x^2-5x+1.$

40. (3) Функцияның графигінің ординаталар өсімен қиылысу нүктесі арқылы жүргізілген жанамалардың теңдеуін жазыңдар:

$$y=4+\sqrt[3]{x^5}+\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right).$$

41. (3) Берілген түзуге параллель болатын $y=f(x)$ функциясына жүргізілген жанаманың жанасу нүктесінің x_0 абсциссасын табыңдар:

$y=\frac{x^3}{3}-3x^2+10x-4$, берілген түзу $y=3+x.$

Абсцисса өсімен α бұрыш жасайтын $y=f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар (42–43):

42. (2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}x^3-3\sqrt{3x},\ \ \alpha=60^\circ.$

43. (2) $f(x)=\frac{4}{\sqrt{3}}x-\frac{\sqrt{3}}{3}x^3,\ \alpha=30^\circ.$

44. (2) $y=4-x^2$ параболасына абсциссасы $x_0=1$ нүктесінде жанама жүргізілген. Осы жанаманың Oy өсімен қиылысу нүктесінің координатасын табыңдар.

45. (2) $y=4x-x^2$ параболасына абсциссасы $x_0=3$ нүктесінде жанама жүргізілген. Осы жанаманың Ox өсімен қиылысу нүктесінің координатасын табыңдар.

46. (2) $y=\sqrt{4-2x-x^2}$ функциясының графигіне $(3;0)$ нүктесі арқылы өтетін жанаманың теңдеуін жазыңдар.

47. (2) Ox өсімен 45^0 бұрыш жасайтын, $y=\frac{3x-1}{x+8}$ функциясының графигіне жүргізілген жанамалардың Oy өсімен қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

48. (3) $y=\sin 3x$ функциясының графигіне екі жанама жүргізілген. Оның бірінің графиктегі абсциссасы $x=\frac{\pi}{18}$ нүктесі, ал екіншісінің абсциссасы $x=\frac{5\pi}{18}$ нүктесі. Осы жанамалардың қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

49. (3) $y=\frac{x^2+1}{x-3}$ функциясының графигіне екі жанама жүргізілген. Оның бірінің графиктегі абсциссасы $x=4$ нүктесі, ал екіншісінің абсциссасы

$x=-2$ нүктесі. Осы жанамалардың қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

50. (3) Әрқайсысы координаттар өсімен ауданы $\frac{1}{\sqrt{2}}$ болатын үшбұрыш құрайтын, $y=\sqrt{1-2x^2}$ функциясының графигіне жүргізілген барлық жанамалардың теңдеулерін табыңдар.

51. (3) $y=3x-x^2$ функциясының графигіне екі жанама жүргізілген. Бірінші жанама графиктегі абсциссасы $x_0=2$ нүктесі, ал екіншісі – берілген функцияның максимум нүктесі арқылы жүргізілген. Осы жанамалар және ордината өсімен шектелген үшбұрыштың ауданын табыңдар.

52. (2) Егер кеше дүйсенбі болса, онда бүгінгі талтүстен 72 сағаттан кейін, шын мәнінде аптаның арғы күні болатын күн болар еді. Демек, ертең ... бола ма?

53. (3) Емтихан алдында апта бойы оқушы 12 сағат 15 минут дайындалды, ол әр күн сайын емтиханға дайындалуға алдыңғы күнге қарағанда бірдей минут артық қосып отырды. 3 күнде ол барлығы 3 сағат 45 минут дайындалды. Емтиханға бір күн қалғанда ол қанша минут дайындалды?

54. (3) Белгілі бір мөлшерде құймақ дайындау керек. Базарда пішіні бірдей жұмыртқалардың екі түрі бар, бірақ бірінші сұрыпты жұмыртқаның биіктігі екінші сұрыпты жұмыртқаның биіктігінен 1,5 есе үлкен. Бірінші сұрыпты 8 жұмыртқаның орнына екінші сұрыпты жұмыртқаның нешеуін сатып алуға болады?

A) 10; B) 12; C) 16; D) 27; E) 24.

55. (2) Теңдеуді шешіңдер:

а) $x^2+4|x-3|-7x+11=0$; ә) $\left(3|x+1|+\frac{1}{3}\right)^2=6(x+1)^2+\frac{10}{9}$.

Жауаптары:

1. $y=3x-1$. **2.** $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$.

3. $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\pi\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\pi\sqrt{2}}{8}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. $y=x+1$. **12.** $y=2x+5$.

14. $0{,}5$. **15.** 2.

16. $-\frac{1}{4}$. **17.** 3. **18.** $\left(2,\frac{8}{3}\right),\left(3,\frac{7}{2}\right)$.

19. $(-5{,}45)$ нүктесінде $y=-20x-55$, $y=-13x-20$; $(2{,}3)$ нүктесінде: $y=8x-13$, $y=x+1$.

20. $(4;0),(1;-27)$.

22. $(3;-2),\left(-1;\frac{2}{3}\right)$.

23. $(0;0),(0;12)$.

24. $y=x^2-3x+1$.

25. $y=-x, y=20\frac{5}{6}-x$.

26. $y=1\frac{1}{3}-x, y=-x$.

27. $\frac{\pi}{6}$.

28. $3\sqrt{5}$.

29. 5 шаршы бірлік.

30. $S_1=S_2=S_3=8$ бірлік.

31. $\left(\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right)$.

32. $(-7;4)$.

33. $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{16}$.

34. $y=-x+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

37. $y=\frac{1}{4}x+2$.

39. $y=-x+\frac{1}{3}$, $y=x-\frac{1}{2}$.

40. $y=-2x+4$.

41. 3.

42. $3y=\sqrt{3}x\pm\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

43. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

44. $(0;5)$.

45. $(4{,}5;0)$.

46. $y=-\sqrt{\frac{5}{11}}(x-3)$.

47. $(0;1)$, $(0;21)$.

48. $\left(\frac{\pi}{6};\frac{3+\pi\sqrt{3}}{6}\right)$.

49. $(5{,}5;3{,}5)$.

50. $y=-\sqrt{2}x+\sqrt{2}; y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$.

51. $49/32$.

52. Бейсенбі.

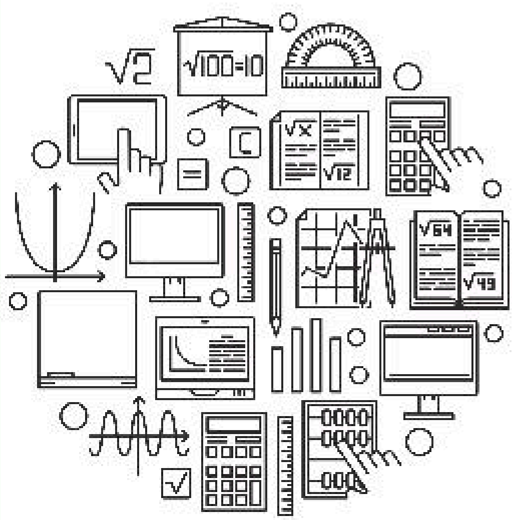
53. 150.

54. D.

55. а) $x_1=\frac{11-\sqrt{29}}{2}, x_2=\frac{(3+\sqrt{13})}{2}$; ә) $x_1=-\frac{2}{3}, x_2=-\frac{4}{3}$.

6-тарау

ТУЫНДЫНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ



§1 БІРСАРЫНДЫЛЫҚ БЕЛГІЛЕРІ

«Заманауи компьютердің беретін мүмкіндігін жоғары дәрежеде пайдалану үшін математикалық білімнің қажеті бар ма? Онсыз мүмкін емес деген болжам жасап көрейін. Неліктен? Өйткені, компьютер құбылмалы Янусқа ұқсас. Бір жағынан – «темір». Темірдің ең маңызды жақтарын тек математика сипаттай алады және де едәуір абстрактілі, «лайықсыз» бөлімдерде қаралады. Екінші жағынан – «софт». Интерфейстердің жұқа қабаты және кодтың геологиялық қатпарлары астында Буль алгебрасының мықты қаңқасы жатыр. Тәжірибелік қажеттіліктерден емес, сонымен бірге XIX ғасырдағы математиктердің жасаған іс-әрекеттерінен туындаған тәртіп ғылымға да аздаған жүйелілік енгізді.»

М. Ваннах

1 жаттығу

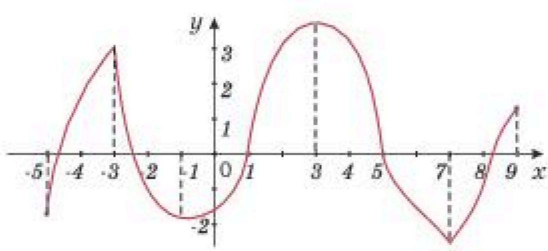
$y=kx+m$ сызықтық функцияларының графиктерін бір жазықтықта салыңдар: $y=x+3$, $y=\frac{1}{2}x-3$, $y=2x$, $y=3x-1$, $y=7x-5$, $y=-\frac{1}{2}x-3$, $y=-2x$, $y=-3x-1$, $y=-7x-5$.

k коэффициентінің оң және теріс таңбалы мәндері бар графиктерді түрлі түсті қарындашпен кескіндеңдер.

k коэффициентінің таңбасына тәуелді сызықтық функцияның бірсарындылығы туралы қандай қорытынды жасауға болады?

2 жаттығу

1-суретте қандай да бір $y=f(x)$ функциясының графигі кескінделген.



1-сурет

Еске түсіреміз: егер графиктің абсциссасы x нүктені қамтитын жеткілікті аз бөлігі түзудің кесіндісіне ұқсас болса, онда $f(x)$ функциясының x нүктесінде туындысы бар және туындының мәні осы нүктеде жүргізілген жанаманың k бұрыштық коэффициентіне тең. Олай болмаған жағдайда x нүктесінде туынды болмайды деп есептейміз (мысалы, $x=-3$ және $x=7$ «сыну» нүктелерінде).

а) x-тің мәнін біртіндеп -5-тен 9-ға дейін арттыра отырып, графиктің тиісті нүктесінде жүргізілген жанаманың k коэффициентінің таңбасы қалай өзгеретінін бақылаңдар. Жекелеген сан өсінде $f'(x)$ туындысының таңбасын көрсетіңдер.

ә) функциясының өсу аралығы мен кему аралығын табыңдар. а) және ә) пункттерінің нәтижелері өзара қалай байланысқан? Себебі неде?

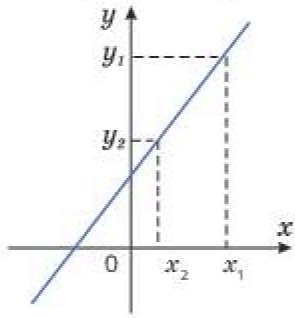
б) $x=-1$, $x=3$ нүктелерінде k және $f'(x)$ неге тең?

$y=kx+m$ – сызықтық функция және $k>0$.

Егер $x_1>x_2$ – кез келген сандар болса, онда

$$y_1-y_2=(kx_1+m)-(kx_2+m)=k(x_1-x_2)>0,\quad y_1>y_2.$$

Аргументтің үлкен мәніне сызықтық функцияның үлкен мәні сәйкес келеді (2-сурет).



2-сурет

Демек, егер $k>0$ болса,онда $y=kx+m$ функциясы– қатаң өспелі. Осыған ұқсас, егер $k<0$ болса, онда $y=kx+m$ функциясы – қатаң кемімелі екендігі дәлелденеді.

ТЕОРЕМА.

Егер белгілі бір аралықтың барлық нүктелерінде функцияның туындысы бар және оң болса, онда осы аралықта функция **өспелі**. Егер белгілі бір аралықтың барлық нүктесінде функцияның туындысы бар және теріс болса, онда осы аралықта функция **кемімелі** болады.

Дәлелдеу. Егер аралықтың барлық нүктесінде функцияның туындысы бар болса, онда оның әрқайсысы арқылы графикке жанама жүргізуге болады. Егер барлық нүктедегі туынды нөлден артық болса, онда барлық жанаманың көлбеулік коэффициенті оң болады. Кез келген нүктенің жеткілікті аз аймағында сәйкесінше график бөлігінің жанаманың бөлігінен айырмашылығы жоқ болады. Жанама өспелі сызықтық функцияның графигі болып табылады. Демек, бүкіл график өспелі функцияның графигі болып саналады.

Теореманың екінші бөлімі осыған ұқсас дәлелденеді.

Функцияның туындысын табу үшін қолданылатын аналитикалық өрнекті табу, шын мәнінде, қарапайым операцияларды орындау екеніне көз жеткізіңдер. Осындай операцияларды орындай білу функцияны зерттеу барысында қуатты құрал болады.

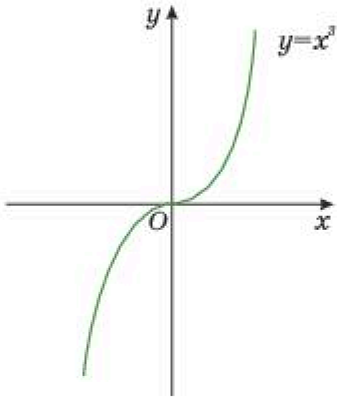
2-жаттығуды орындау барысында сендер мынаны түсінген боларсыңдар: интервалдағы үзіліссіз функцияның туындысының таңбасы, сонымен қатар бірсарындылық сипаты туынды 0-ге тең болатын нүктеде немесе туындысы жоқ нүктеде қарама-қарсы таңбаға және сипатқа өзгереді. Мұндай нүктелерді бір терминмен атаған жөн.

АНЫҚТАМА.

$(a;b)$ аралығында бөлікті-тегіс үзіліссіз f функциясы берілсін. f функциясының туындысы нөлге тең болатын немесе туындысы жоқ болатын ішкі нүктелерді функцияның кризистік нүктелері деп атайды.

«Бөлікті-тегіс» термині мынаны білдіреді: функцияның графигіне бір немесе бірнеше нүктелерден басқаларының бәрі арқылы жанама жүргізуге болады. Туындысы 0-ге тең болатын немесе туындысы болмайтын анықтау облысының ішкі нүктелері ғана кризистік нүктелер бола алады.

Егер нүкте кризистік нүкте болса, онда функцияның бірсарындылық сипаты осы нүктеде өзгермеуі де мүмкін. Классикалық мысал: $y=x^3, x\in(-\infty,+\infty)$. Оның туындысы $y'=3x^2$ және $x=0$ нүктесінде 0-ге тең, яғни $y=x^3$ функцияның кризистік нүктесі $x=0$. Алайда, $x<0$ және $x>0$ болғанда да, туындының таңбасы оң болады. $y=x^3$ функциясы бүкіл анықталу облысында өспелі (3-сурет).



3-сурет

Функцияның бірсарындылығын зерттеу үшін келесі қадамдарды жасау керек:

1. Функцияның анықталу облысын табу керек және үзіліссіздікке зерттеу керек.
2. Функцияның туындысын және кризистік нүктелерін табу керек.
3. Шеткі нүктелері кризистік нүктелер немесе үзіліс нүктелері, немесе анықталу облысының шекаралары болатын барлық аралықтағы туындының таңбасын интервалдар әдісімен анықтау керек.
4. Әрбір аралықтағы функцияның бірсарындылық сипаты туралы қорытынды жасау керек. Туынды өзінің таңбасын өзгертпейтін кризистік нүктелерін бірсарындылық аралыққа еңгіземіз.

1 мысал

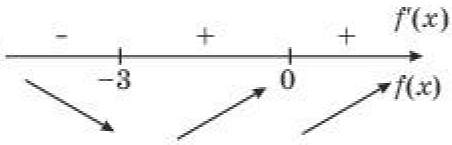
$f(x)=x^4+4x^3$ функциясының бірсарындылық аралығын табыңдар.

Шешуі.

1. $D(f)=(-\infty,+\infty)$, $f(x)$ функциясы $D(f)$ жиынында үзіліссіз.

2. $f'(x)=4x^3+12x^2$, $D(f)$ жиынының кез келген нүктесінде $f'(x)$ туындысы бар.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3+12x^2=0\Leftrightarrow x^2(x+3)=0$, $x=0$ және $x=-3$ – кризистік нүктелер.

3.


4. $(-\infty;-3)$ кему аралығы, $(-3;+\infty)$ өсу аралығы.

2 мысал

$f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2}}$ функциясының бірсарындылық аралығын табыңдар:

Шешуі.

1. Анықталу облысы $x^2-2>0$ теңсіздігімен анықталады,

$x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

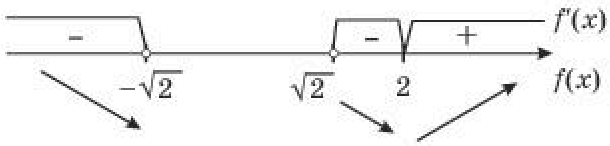
2. $$f'(x)=\frac{(x-1)'\sqrt{x^2-2}-\left(\sqrt{x^2-2}\right)'(x-1)}{x^2-2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-2}-\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-2}}}{x^2-2}=\frac{x-2}{\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2-2}}.$$

$f'(x)$-тің аналитикалық формуласы $f(x)$ функциясының барлық анықталу облысында бар болуын қамтамасыз етеді. Демек, x-тің тек $f'(x)=0$ теңдігін қанағаттандыратын нүктелері ғана берілген функцияның кризистік нүктелері болып табылады:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-2}{\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2-2}}=0\Leftrightarrow x=2.$$

3. Туындының таңбасын анықтаймыз.



4-сурет

4. $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{2};2\right)$ кему аралығы, $(2;+\infty)$ өсу аралығы.

3 мысал

$f(x)=\sqrt{3}x-\sin 2x$ функциясының бірсарындылық аралығын табыңдар.

Шешуі. $D(f):(-\infty;+\infty)$; $f(x)$ функциясы барлық анықталу облысында үзіліссіз. Функцияның туындысын табайық:

$f'(x)=\left(\sqrt{3}x-\sin 2x\right)'=\sqrt{3}-2\cos 2x$. Функцияның өсу аралығы $f'(x)>0$ теңсіздігі арқылы анықталады, яғни $\sqrt{3}-2\cos 2x>0$. Теңсіздікті шешіп, функция $x\in\left(\frac{\pi}{12}+\pi k;\frac{11\pi}{12}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ аралығында өсетінін көреміз.

Осыған ұқсас, $f'(x)<0\Leftrightarrow\sqrt{3}-2\cos 2x<0$ теңсіздігін шешу арқылы кему аралығы табамыз: $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi k;\ \frac{\pi}{12}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

4 мысал

p параметрінің қандай мәндерінде $g(x)=2\cos x-px$ функциясы өзінің бүкіл анықталу облысында кемімелі болады?

Шешуі. $D(g):(-\infty;+\infty)$; $g(x)$ функциясы кез келген p үшін өзінің анықталу облысында үзіліссіз, $g'(x)=-2\sin x-p$. Егер кез келген x үшін $g'(x)<0$ болса, онда $-2\sin x-p<0$, $p>-2\sin x$ болады. $\sin x\in[-1;1]$ болғандықтан, $p>-2\sin x$ теңсіздігі барлық x үшін $p>2$ болғанда ғана орындалады.

$p=2$ жағдайын қарастырайық:

$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ болғанда $g'(x)=-2\sin x-2=0$. $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ топтамасы – кризистік нүктелер жиыны, бұл нүктелерде туынды таңбасын өзгертпейді, себебі, егер $x\neq-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ болса, онда $\sin x\neq-1$, $\sin x>-1$, $g'(x)=-2\sin x-2<0$.

Жауабы: $p\geqslant 2$.

Есептер

1-бөлім

1. (2) Функцияның бірсарындылық аралықтарын анықтаңдар:

а) $f(x)=-5x+4$; ә) $g(x)=3x^2-12x+11$; б) $h(x)=-\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+8x+\cos\frac{\pi}{3}$.

2. (2) Функцияның өсу және кему аралықтарын табыңдар:

а) $f(x)=-x^4+3x^3-9$; ә) $g(x)=3x^5-20x^3+87$; б) $h(x)=\frac{(x-2)^3}{x}$.

3. (2) Функцияның бірсарындылығын зерттеңдер:

а) $f(x)=\sqrt{6x+24}$; ә) $g(x)=\sqrt{x^2-4}$; б) $h(x)=x\sqrt{1-x^2}$; в) $u(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2}}$.

4. (2) $f(x)=\dfrac{(x-1)^4(x+1)^7(5-x)^3}{(x+3)^6}$ қандай да бір $F(x)$ функциясының туындысы. $F(x)$ функциясының кему аралығын табыңдар.

5. (3) Дәлелдеңдер:

а) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+x-2014$ функциясы барлық анықталу облысында өседі;

ә) $g(x)=2\cos x-3x$ функциясы барлық анықталу облысында кемиді;

б) $h(x)=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ функциясы барлық анықталу облысында өседі.

6. (3) $f(x)=\dfrac{1}{3}\cos 3x-\dfrac{1}{3}\sin 3x-\sqrt{2}x$ функциясы туындысының мәндер жиынын анықтап, $f(x)$ функциясы неліктен барлық анықталу облысында кемитінін түсіндіріңдер.

7. (2) Функциялардың бірсарындылық аралығын (туындыны пайдаланып) анықтаңдар (туынды арқылы):

а) $f(x)=\cos x-\sqrt{3}$; ә) $g(x)=x+\sin 2x$;

б) $h(x)=5\sin\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}x$.

8. (3) Егер $a_2=102$ және $a_3=202$ болса, онда a_n арифметикалық прогрессияның неше мүшесі $g(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2015}{2}x^2+2014x-2013$ функциясының кему аралығына тиісті?

9. (3) a параметрінің қандай мәнінде $f(x)=x^2+2ax-17$ функциясы:

а) $x\in(-\infty;4)$ аралығында кемиді және $x\in(4;+\infty)$ аралығында өседі;

ә) $x\in(-\infty;4)$ аралығында кемиді.

2-бөлім

10. (2) Функцияның бірсарындылық аралығын анықтаңдар:

а) $f(x)=x\sin\dfrac{15\pi}{7}-67$; ә) $g(x)=\dfrac{\arccos(-1)}{(-2\pi)}x^2+7x\,\mathrm{tg}\dfrac{15\pi}{4}+777\sin 6$;

б) $h(x)=x^3+x^2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{5\pi}{3}-9x+7\arcsin\dfrac{2}{3}$.

11. (2) Функцияның өсу және кему аралықтарын табыңдар:

а) $f(x)=x^5-5x^4$;

ә) $g(x)=-5x^8+64x^5+\text{arcctg}\,2015$;

б) $h(x)=\dfrac{(x+1)^7}{1-x}$.

12. (2) Функцияның бірсарындылығын зерттеңдер:

а) $f(x)=\sqrt{5-x}$; ә) $g(x)=\sqrt{12-x-x^2}$;

б) $h(x)=x\sqrt{8-x^2}$; в) $u(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{3-x^2}}$.

13. (2) $F(x)$ функциясының туындысы $f(x)=\dfrac{x^{2014}(x^2-1)^{2015}(x+11)^4}{(4-x)^5}$ функциясы болады. $F(x)$ функциясының өсу аралықтарын табыңдар.

14. (3) Дәлелдеңдер:

а) $f(x)=-x^3+9x^2-27x+2015$ функциясы барлық анықталу облысында кемиді;

ә) $g(x)=2x-\sin 2x$ функциясы барлық анықталу облысында өседі;

б) $h(x)=\text{arctg}\,x-x$ функциясы барлық анықталу облысында өседі.

15. (3) $f(x)=\sin 2014x+\cos 2014x+2x+11$ функциясы туындысының мәндер жиынын анықтап, $f(x)$ функциясы барлық анықталу облысында неліктен кемитінін түсіндіріңдер.

16. (2) Функцияның бірсарындылық аралығын (туындыны пайдаланып) анықтаңдар:

а) $f(x)=5\sin(-x)+5\,\text{tg}\,5$;

ә) $g(x)=-2\cos 3x-6x\cos\dfrac{3\pi}{4}$;

б) $h(x)=\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)-2x$.

17. (3) Арифметикалық прогрессияның екінші және төртінші мүшелерінің қосындысы 12-ге, ал прогрессияның алғашқы 10 мүшесінің қосындысы 110-ға тең. Берілген прогрессияның неше мүшесі $h(x)=-\dfrac{x^3}{3}+7x^2+15x-16$ функциясының кему аралығына тиісті емес?

18. (3) p параметрінің қандай мәндерінде $f(x)=x^3+3px^2+76$ функциясының кему аралығының ұзындығы 12-ге тең болады?

19. (3) Екі материалдық нүктенің арақашықтығы кеңістікте $t_0=0$ мезетінен бастап, уақыттан тәуелді $S(t)=\sqrt{t^2-2t+26}$ функциясы арқылы сипатталатындай болып қозғалады. Нүктелердің арасындағы ең кіші арақашықтық қаншаға тең болуы мүмкін?

20. (2) Егер алғашқы n мүшесінің қосындысы $S_n=5n^2-2n$ болса, онда арифметикалық прогрессияны табыңдар.

21. (4) Клубта 20 бозбала кездесті. Олардың кейбірі қалпақ киеді, кейбіреуі қалпақ кимейді. Арасында бозбалалардың бірі қалпағын шешіп, сол сәттегі қалпағы жоқтардың біріне кигізеді. Ең соңында 10 бозбаланың кез келгені қалпақ алғандарға қарағанда бергендердің көп екенін санады. Неше бозбала клубқа қалпақпен келген?

22. (3) Ұшақ бастапқыда 220 км/сағ жылдамдықпен ұшты. Ұшып өткен қашықтықтан 385 км кем қашықтық қалғанда оның жылдамдығы 330 км/сағ болды. Ұшақтың барлық жолдағы орташа жылдамдығы 250 км/сағ. Ұшақ қанша арақашықтықты ұшып өтті?

Жауаптары

1. а) $f(x)$ функциясы $x\in(-\infty;+\infty)$ аралығында кемиді; ә) $g(x)$ функциясы $x\in(-\infty;2)$ аралықта кемиді және $x\in(2;+\infty)$ аралықта өседі; б) $(-8;1)$ – өсу аралығы, $(-\infty;-8)$, $(1;+\infty)$ – кему аралығы.

2. а) $\left(-\infty;2\frac{1}{4}\right)$ – өсу аралығы, $\left(2-;+\infty\right)$ – кему аралығы; ә) $(-\infty;-2)$ – кему аралығы, $(-4;+\infty)$ – өсу аралығы, б) $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$ – өсу аралығы, $(-2;2)$ – кему аралығы.

3. а) $[-4;+\infty)$ – өсу аралығы; ә) $(-\infty;-2]$ – кему аралығы, $[2+\infty;)$ – өсу аралығы; б) $\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$ – кему аралығы, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – өсу аралығы; в) $(-\infty;-\sqrt{2})$, $(\sqrt{2};2)$ – кему аралығы, $(2;+\infty)$ – өсу аралығы.

4. $(-1;5)$ – өсу аралығы, $(-\infty;-3)$, $(-3;-1)$, $(5;+\infty)$ – кему аралығы.

7. а) $(2\pi k;\pi+2\pi k)$ – өсу аралығы, $(-\pi+2\pi k;2\pi k)$ – кему аралығы;

ә) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$ – өсу аралығы, $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2\pi}{3}+\pi k\right)$ – кему аралығы;

б) $\left(\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$ – өсу аралығы, $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\pi+\pi k\right)$ – кему аралығы.

8. 21. **9.** а) $a=-4$; ә) $a\le -4$.

10. а) $(-\infty;+\infty)$ – өсу аралығы;

ә) $(-\infty;-7)$ – өсу аралығы, $(-7;+\infty)$ – кему аралығы;

б) $(-3;1)$ – кему аралығы, $(-\infty;-3)$, $(1;+\infty)$ – өсу аралығы.

11. а) $(-\infty;0)$, $(4;+\infty)$ – өсу аралығы, $(0;4)$ – кему аралығы;

ә) $(-\infty;2)$ – өсу аралығы, $(2;+\infty)$ – кему аралығы;

б) $(-\infty;1)$, $\left(1;\frac{4}{3}\right)$ – өсу аралығы, $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$ – кему аралығы.

12. а) $x\in(-\infty;5]$ анықталу облысында кемиді; ә) $[-4;-0,5)$ – өсу аралығы, $(-0,5;3]$ – кему аралығы; б) $(-2;2)$ – өсу интервалы, $\left[-2\sqrt{2};-2\right)$, $\left(2;2\sqrt{2}\right]$ – кему аралығы; в) $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ – өсу аралығы.

13. $F(x)$ функциясы $(-\infty;-1)$ және $(1;4)$ интервалдарында өседі.

16. а) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ – өсу аралығы, $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ – кему интервалы;

ә) $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3};\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right)$ – өсу аралығы, $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3};-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right)$ – кему аралығы;

б) $\left(\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)$ – өсу аралығы, $\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi k}{2}\right)$ – кему аралығы.

17. 7. **18.** ± 6. **19.** 5. **20.** 3; 13; 23; 33 … .

21. 10. Нұсқау. Егер бозбала қалпақсыз келсе, онда оның бергенінің саны алғанының санынан артық бола алмайды. **22.** 1375 км.

§2 ЭКСТРЕМУМДАР ЖӘНЕ КРИЗИСТІК НҮКТЕЛЕР

1 жаттығу

Локальді экстремум анықтамасын тауып, қайтадан оқып шығыңдар. Алдыңғы параграфтың 2-жаттығуындағы графиктен экстремум нүктелерін табыңдар. x айнымалының мәнін -5-тен 9-ға дейін біртіндеп арттырып, кризистік нүктелердегі туынды таңбасының өзгеруін қадағалаңдар. Экстремум нүктелері аймағында туынды таңбаларының комбинациясы мен экстремум сипаты (максимум немесе минимум) арасында қандай да бір байланыс бар ма? Егер осындай байланыс тапсаңдар, онда оны түсіндіріңдер.

Адамзат іс-әрекетінің түгелге дерлік саласында экстремум мәселесі өзекті мәселе болып табылады. Жеке адам немесе адамдар тобы алдына қандай мақсат қойса да, алдымен аз шығынмен жоғары табыс әкелетін жоспар құрады. Экстремумдарды табуға арналған есептерді шешудің жалпы қағидаларын қарастыратын математиканың бүтін бір бағыты бар. Ол – «Оңтайлы басқару теориясы». Мұндай есептерде функцияның минимум немесе максимум нүктелерін табу өте көп айнымалыларға тәуелді болатыны түсінікті. Бүгінгі таңда біз алдымызға қарапайым мақсат қоямыз: бір айнымалысы бар функциялардың экстремумдарын табуды үйренеміз.

Біз I тарауда локальді экстремум ұғымын қарастырдық.

1-АНЫҚТАМА

Егер функцияның анықталу облысының ішкі нүктесі кему аралығының оң жақ шеті және өсу аралығының сол жақ шеті болса, ол локальді минимум нүктесі деп аталады.

2-АНЫҚТАМА

Егер функцияның анықталу облысының ішкі нүктесі өсу аралығының оң жақ шеті және кему аралығының сол жақ шеті болса, ол **локальді максимум нүктесі** деп аталады.

$f(x)$ функциясының x_0 нүктесіне жақын аймағындағы барлық нүктелерінде (x_0 нүктесінің өзі болмауы да мүмкін) туындысы бар болсын (дифференциалданатын). Алдыңғы параграфтағы теореманы, сондай-ақ локальді экстремумның анықтамасын ескеріп, төмендегі локальді экстремумның бар болуының жеткілікті шартын құрастыруға болады.

ТЕОРЕМА (ЭКСТРЕМУМНЫҢ ЖЕТКІЛІКТІ ШАРТЫ)

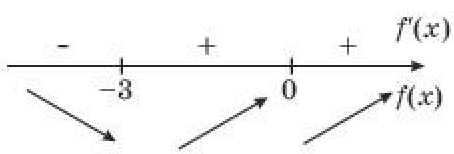
$f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болсын.
а) Егер x_0 нүктесі $f'(x)>0$ теңсіздігі орындалатындай аралықтың оң жақ ұшы және $f'(x)<0$ теңсіздігі орындалатындай аралықтың сол жақ ұшы болса, онда x_0 – локальді максимум нүктесі болады.
ә) Егер x_0 нүктесі $f'(x)<0$ теңсіздігі орындалатындай аралықтың оң жақ ұшы және $f'(x)>0$ теңсіздігі орындалатындай аралықтың сол жақ ұшы болса, онда x_0 – локальді минимум нүктесі болады.

Теореманы неғұрлым қатаң түрде тұжырымдасаң, соғұрлым оны оқырмандардан мағынасын жасырғандай боласың. Шындығына келгенде барлығы да қарапайым. Кризистік нүктелерді орналастырамыз, аралықтардағы таңбаны анықтаймыз және анықталу облысының сол жақ ұшынан айнымалысымен оң жақ ұшына қарай қозғаламыз. Егер кризистік нүктеден өткенде туындының таңбасы «+»-тен «–»-ке ауысса, ол кризистік нүкте максимум нүкте; егер «–»-тен «+»-ке ауысса, ол кризистік нүкте минимум болады. Бұл алгоритм бойынша жұмыс – ол түсінікті. Туындының таңбасының «+»-тен «–»-ке ауысуы өсу кемумен алмасқанын білдіреді. Максимум осылай табылды. Ал таңбаның «–»-тен «+»-ке ауысуы кему өсумен алмасқанын білдіреді. Минимум осылайша табылады. Егер кризистік нүктеден өткенде туындының таңбасы өзгермесе, онда ол кризистік нүкте экстремум нүкте болмайды.

Көптеген есептерде, егер бірсарындылық аралықтары табылған болса, онда локальді экстремумдарды табу мәселесі бірден шешіледі. Құрастырылған теореманың көмегімен функцияның өсу және кему аралығын тапқаннан кейін, бірден локальді экстемумдарды табуға мүмкіндік пайда болады.

1 мысал

$f(x)=x^4+4x^3$ функциясының локальді экстремумдары мен экстремум мәндерін табыңдар.
Шешуі. Бірсарындылықты анықтау (алдыңғы параграфтағы келтірілген 1-мысал) мынадай нәтиже береді:



1-сурет

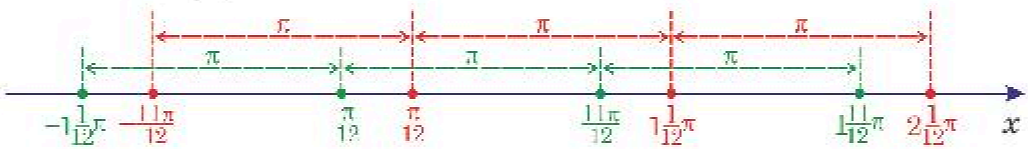
Осылайша, $(-\infty;-3)$ – кему интервалы, $(-3;+\infty)$ – өсу интервалы. Экстремумның бар болуы жеткілікті шартының теоремасы бойынша берілген функцияның, біріншіден, локальді максимум нүктесі болмайды, екіншіден, локальді минимум нүктесі $x=-3$ бар. Локальді минимум мәні $f(-3)=(-3)^4+4(-3)^3=-27$.

Ескерту. Егер екі түрлі мағына бермейтін болса, онда «локальді экстремум», «локальді минимум» не «локальді максимум» сөздерінің орнына сәйкесінше «экстремум», «минимум» немесе «максимум» сөздерін қолдануға болады.

2 мысал

$f(x)=\sqrt{3}x-\sin 2x$ функциясының локальді экстремум нүктелерін анықтаңдар.

Шешуі. Бірсарындылыққа зерттеу (алдыңғы параграфта келтірілген 3-мысал) мынадай нәтиже береді: $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi k;\frac{\pi}{12}+\pi k\right)$ – кему аралығы, $\left(\frac{\pi}{12}+\pi k;\frac{11\pi}{12}+\pi k\right)$ – өсу аралығы, $k\in\mathbb{Z}$.



2-сурет

Демек, $\frac{\pi}{12}+\pi k$ нүктесі минимум нүктесі болады (2-суретте қызыл түспен көрсетілген). Егер солдан оңға қарай қозғалсақ, онда $x=\frac{\pi}{12}+\pi k$ нүктесінде туындының таңбасы терістен оң шамаға өзгереді. Будан $-\frac{\pi}{12}+\pi k$ және $\frac{11\pi}{12}+\pi k$ топтамасы координаттық түзуде бірдей мәнге ие болатынын түсіну қиын емес (2-суретте жасыл түспен көрсетілген). Экстремумның жеткілікті шарты бойынша $x=-\frac{\pi}{12}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ нүктесі максимум нүктесі болады.

3 мысал

p параметрінің қандай мәндерінде $f(x)=px^3-5p^2x^2+3x-5$ функциясының $x=3$ мәні минимум нүктесі болады?

Шешуі. p параметрінің кез келген мәні үшін $f(x)$ функциясы барлық нақты сандар жиынында үзіліссіз және дифференциалданады. Экстремумның кез келген нүктесі кризистік нүкте болып табылады. Демек, $f'(x)=3px^2-10p^2x+3$ туындының $x=3$ нүктесіндегі мәні нөлге тең: $f'(3)=3p\cdot3^2-10p^2\cdot3+3=0$.

Осыдан, $p=1$ немесе $p=-0,1$.

Егер $p=1$ болса, онда $f'(x)=3x^2-10x+3=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)$. Туындының таңбасын зерттеу, мұндай жағдайда $x=3$ нүктесі минимум нүктесі болатынын білдіреді.

Егер $p=-0,1$ болса, онда $f'(x)=-0,3x^2-0,1x+3=$ $=-0,3\left(x+\frac{10}{3}\right)(x-3)$. Туындының таңбасын зерттеу, мұндай жағдайда $x=3$ нүктесінің максимум нүктесі болатынын білдіреді.

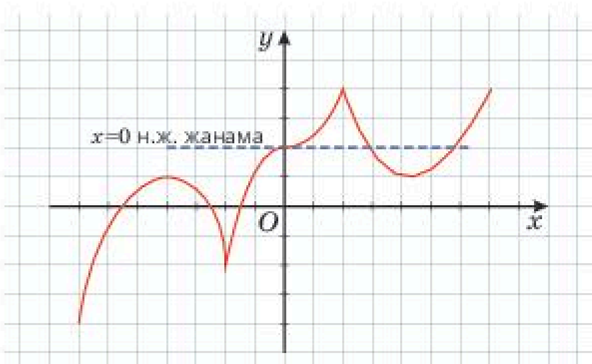
Жауабы: $p=1$.

Есептер

1-бөлім

Берілген есептерде және алдағы уақыттарда да экстремум нүктелерін анықтау барысында осы нүктелердің максимум немесе минимум нүктесі болатынын немесе болмайтынын көрсету қажет.

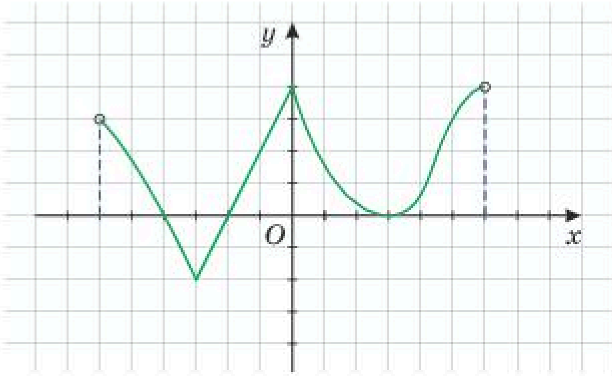
1. (1) 3-суретте $y=f(x)$, $D(f):(-7;7)$ функциясының графигі бейнеленген.



3-сурет

а) $f(x)$ функциясының барлық кризистік нүктелерін көрсетіңдер.
ә) локальді экстремум нүктелерін көрсетіңдер.
б) $f'(x)\le 0$, $f'(x)<0$, $f'(x)\ge 0$, $f'(x)>0$ теңсіздіктерін шешіңдер.

2. (3) 4-суретте $y=f(x)$, $D(f):(-6;6)$ функцияның $f'(x)$ туындысының графигі көрсетілген.



4-сурет

а) $f(x)$ функциясының кризистік нүктелерін көрсетіңдер;

ә) $f(x)$ функциясының бірсарындылық аралығын көрсетіңдер;

б) $f(x)$ функциясының локальді экстремум нүктелерін көрсетіңдер.

3. (2) а) $y=8x^2+10x+3$ квадрат үшмүшелігі берілген. Экстремум нүктелерін және осы экстремум нүктелеріндегі мәнін есептеңдер.
ә) экстремумның жеткілікті шартын пайдаланып, келесі тұжырымды дәлелдеңдер: «Егер $a>0$ болса, онда $y=ax^2+bx+c$ квадрат үш мүшелігі $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ нүктесінде ең кіші мәнін қабылдайды. Үшмүшеліктің ең кіші мәні $y_0=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$».

4. (1) Функциялардың кризистік нүктелерін анықтаңдар. Олардың ішінен экстремум нүктелерін табыңдар. Экстремумның әрбір нүктесіндегі функцияның мәнін анықтаңдар:

а) $f(x)=4x^3-6x^2+20x+9$;

ә) $g(x)=4x^3-6x^2+18x+9$;

б) $h(x)=4x^3-6x^2-72x+9$.

5. (2) $y=x^3-6x^2-9x+1$ функциясының $\left(-\dfrac{3}{5};5\right)$ аралығындағы экстремум нүктелерін анықтаңдар.

6. (2) Локальді максимум нүктесінде $f(x)=x^3(x+3)^4$ функциясының мәнін табыңдар.

7. (3) Функциялардың локальді экстремум нүктелерін табыңдар:

а) $f(x)=\sin x$;   ә) $g(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{2}x$

б) $h(x)=\sin 3x\cos\frac{3\pi}{7}-\cos 3x\sin\frac{3\pi}{7}+\frac{3\sqrt{3}}{2}x$.

8. (2) Функциялардың локальді экстремум нүктелерін және экстремум мәндерін табыңдар:

а) $f(x)=x+\frac{1}{x}$; ә) $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$; б) $h(x)=\frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$; в) $u(x)=\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2$.

9. (1) а) Функцияның локальді экстремум нүктелерін және экстремум мәнін табыңдар: $g(x)=\frac{1}{4}x+\sqrt{4-x}$.

(2) ә) a және b оң сандары берілсін. $g(x)=ax+\sqrt{b-x}$ функциясының локальді экстремум нүктелерін және экстремум мәндерін табыңдар.

10. (1) $F(x)$ функциясының туындысы $f(x)=-3x^2+10x-3$. $F(x)$ функциясының локальді экстремум нүктелерін табыңдар.

11. (3) Функциялардың кризистік нүктелерін анықтаңдар:

а) $f(x)=-\sin x+14\cos x-12x-18$;

ә) $g(x)=\sin 4x-2\sin 2x+2\cos 2x-\cos 4\pi$.

12. (3) a параметрінің қандай мәнінде $x=13$ нүктесі $y=ax^2-52x+777$ функциясының кризистік нүктесі болады? a-ның табылған әрбір мәнінде $x=13$ нүктесі берілген функция үшін максимум не минимум нүктесі болатынын анықтаңдар.

13. (3) p параметрінің қандай мәнінде $x_0=p$ нүктесі $f(x)$ функциясының минимум нүктесі болады, егер $f(x)=2x^3-3(p-3)x^2-18px-7$ болса?

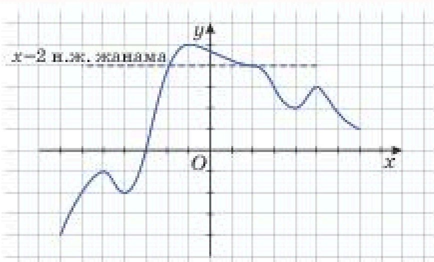
2-бөлім

14. (1) 5-суретте $y=f(x)$, $D(f):[-7;7]$ функциясының графигі кескінделген.

а) $f(x)$ функциясының барлық кризистік нүктелерін көрсетіңдер.

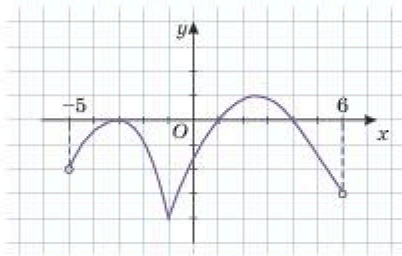
ә) $f(x)$ функциясының локальді экстремум нүктелерін көрсетіңдер.

б) $f'(x)>0$, $f'(x)\geq 0$, $f'(x)<0$, $f'(x)\leq 0$ теңсіздіктерін шешіңдер.



5-сурет

15. (3) 6-суретте $f(x), D(f):(-5;6)$ функциясының $f'(x)$ туындысының графигі кескінделген.
а) $f(x)$ функциясының кризистік нүктелерін анықтаңдар.
ә) $f(x)$ функциясының бірсарындылық аралығын көрсетіңдер.
б) $f(x)$ функциясының локальді экстремум нүктелерін табыңдар.



6-сурет

16. (2) а) $y=-3x^2+4x+1$ үшмүшелігі берілген. Экстремум нүктесін және экстремум нүктесіндегі үшмүшеліктің мәнін табыңдар.
ә) Экстремумның жеткілікті шартын пайдаланып, берілген тұжырымды дәлелдеңдер: «Егер $a<0$ болса, онда $x_0=-\frac{b}{2a}$ нүктесінде $y=ax^2+bx+c$ квадрат үшмүшелігі ең үлкен мән қабылдайды. Квадрат үшмүшеліктің ең үлкен мәні $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$».

17. (1) Функциялардың кризистік нүктелерін анықтаңдар. Олардың ішінен экстремум нүктелерін және функциялардың экстремум нүктелеріндегі мәндерін табыңдар:

а) $f(x)=-x^3-5x^2-3x+1$;

ә) $f(x)=-10x^3-5x^2-3x+1$;

б) $f(x)=-x^3-5x^2-\frac{25}{3}x+1$.

18. (2) $\left(-6;-\frac{1}{5}\right)$ аралығында $y=-x^3-9x^2-3x+100$ функциясының экстремум нүктелерін табыңдар.

19. (2) Локальді минимум нүктесінде $f(x)=(x-2)^4(11-x)^5$ функциясының мәнін табыңдар.

20. (3) Функциялардың локальді экстремум нүктелерін анықтаңдар:

а) $f(x)=\cos x$;

ә) $g(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$;

б) $g(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-2x$.

21. (3) Функциялардың локальді экстремум нүктелерін анықтаңдар және экстремум мәндерін табыңдар:

а) $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$; ә) $g(x)=\frac{x+7}{x^2+x-6}$; б) $h(x)=\frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$; в) $u(x)=\frac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$.

22. (2) Функцияның локальді экстремум нүктелерін және экстремум мәндерін табыңдар: $h(x)=\sqrt{3}\arccos x-2\sqrt{1-x^2}$.

23. (1) $F(x)$ функциясының туындысы $f(x)=(x-11)(x-100)^2(x-8)^7$. Берілген $F(x)$ функциясының локальді экстремум нүктелерін табыңдар.

24. (3) Функциялардың кризистік нүктелерін анықтаңдар:

а) $g(x)=5\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)-3\cos\left(5x+\dfrac{\pi}{3}\right)$;

ә) $h(x)=\dfrac{1}{3}\cos 3x+\dfrac{1}{7}\cos 7x-\dfrac{2}{5}\cos 5x-\dfrac{2}{7}$.

25. (3) a параметрінің қандай мәндерінде $x=-50$ нүктесі $y=ax^2+4a^3x-1$ функциясының кризистік нүктесі болады? a-ның табылған әрбір мәнінде $x=-50$ нүктесі берілген функцияның максимум не минимум нүктесі болатынын анықтаңдар.

26. (3) p параметрінің қандай мәнінде $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{(p+5)}{2}x^2+5px+9$ функциясының экстремум нүктелері болмайды?

27. (2) $1, 2, 3, \ldots 19$ сандар тізбегінен барлық жұп сандарды, сонымен қатар $19-x$ болғанда 3-ке бөлінетін x-тің барлық мәндерін сызып тастаңдар. Неше сан қалды?

28. (3) Мамыр айының соңғы аптасында «Балалар әлемінде» сатылған бөбектерге арналған суда жүзетін үрлемелі ойыншықтардың саны күніне бірдей санға артып отырды. Егер 27 мамырда 45 ойыншық, 29 мамырда 405 ойыншық сатылса, онда 31 мамырда сатылған ойыншықтар санының 30 мамырда сатылған ойыншықтар санына қатынасын анықтаңдар.

29. (2) Велосипедші мотоциклшімен салыстырғанда әр минут сайын 500 м кем жол жүреді, сондықтан 120 км жолға мотоциклшімен салыстырғанда 2 сағ артық уақыт жұмсайды. Велосипедшінің жылдамдығын табыңдар.

30. (2) Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases}\dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=7,\\[2mm]\dfrac{3}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=-1.\end{cases}$

Жауаптары

1. а) $x \in \{-4;\ -2;\ 0;\ 2;\ 4\}$.

ә) $x \in \{-4;2\}$ – локальді максимум нүктесі; $x \in \{-2;4\}$ – локальді минимум нүктесі.

б) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-7;-4) \cup (-2;0) \cup (0;2) \cup (4;7)$;

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4;-2) \cup (2;4)$;

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-7;-4] \cup (-2;2) \cup [4;7)$;

$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-4;-2) \cup (2;4] \cup \{0\}$.

2. а) $x \in \{-4;-2;3\}$;

ә) $(-6;-4);(-2;6)$ өсу аралығы. $(-4;-2)$ кему аралығы.

б) $x = -4$ – максимум нүктесі; $x = -2$ – минимум нүктесі.

3. а) $x_0 = -\dfrac{5}{8}$ – минимум нүктесі, $y_0 = -\dfrac{1}{8}$.

4. а) кризистік нүктесі жоқ;

ә) $x = \dfrac{1}{2}$ кризистік нүктесі экстремум болмайды;

б) $x = -2$ – локальді максимум нүктесі, $h(-2) = 93$; $x = 3$ – минимум нүктесі, $h(3) = -153$.

5. $x = 2 + \sqrt{7}$ минимум нүктесі.

6. $f(-3) = 0$.

7. а) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ – максимум нүктелері, $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ – минимум нүктелері, мұндағы $k \in \mathbb{Z}$;

ә) $-\dfrac{5\pi}{24} + \pi k$ – минимум нүктелері, $\dfrac{\pi}{24} + \pi k$ – максимум нүктелері, мұндағы $k \in \mathbb{Z}$;

б) $-\dfrac{17\pi}{126} + \dfrac{2\pi k}{3}$ – минимум нүктелері, $\dfrac{53\pi}{126} + \dfrac{2\pi k}{3}$ – максимум нүктелері, мұндағы $k \in \mathbb{Z}$.

8. а) $x=1$ – локальді минимум нүктесі, $f(1)=2$; $x=-1$ – локальді максимум нүктесі, $f(-1)=-2$; ә) $x=-1$ – локальді минимум нүктесі, $g(-1)=-0{,}5$; $x=1$ – локальді максимум нүктесі, $g(1)=0{,}5$; б) $x=3\frac{1}{5}$ – максимум нүктесі, $h(3{,}2)=\frac{9}{16}$; в) $x=\frac{1}{2}$ – минимум нүктесі, $u\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

9. а) $x=0$ – максимум нүктесі, $g(0)=2$; ә) $x=b-\frac{1}{4a^2}$ – максимум нүктесі, $g\left(b-\frac{1}{4a^2}\right)=ab+\frac{1}{4a}$.

10. $x=\frac{1}{3}$ – локальді минимум нүктесі, $x=3$ – локальді максимум нүктесі.

11. а) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; ә) $x_1=\pi k$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_3=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, мұндағы $k\in\mathbb{Z}$.

12. $a=2$ болғанда $x=13$ минимум нүктесі болады.

13. $p>-3$.

14. а) $\{-5;-4;-1;\ 2;\ 5;\ 4\}$ – кризистік нүктелері;

ә) $x\in\{-5;-1;5\}$ – локальді максимумдар нүктесі;

$x\in\{-4;\ 4\}$ – локальді минимумдар нүктесі.

б) $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-7;-5)\cup(-4;-1)\cup(4;5)$;

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-5;-4)\cup(-1;2)\cup(2;4)\cup(5;7)$;

$f'(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in[-5;-4]\cup[-1;4]\cup[5;7)$.

15. а) $x\in\{-3;1;4\}$ – кризистік нүктелер.

ә) $x\in(-5;1)$ – кему аралығында, $x\in(1;4)$ – өсу аралығы;

$x\in(4;6)$ – кему аралығы.

б) $x=1$ – минимум нүктесі, $x=4$ – максимум нүктесі.

16. а) $x_0=\frac{2}{3}$ – максимум нүктесі, $y_0=\frac{7}{3}$.

17. а) $x=-3$ – минимум нүктесі, $f(-3)=-8$; $x=-\frac{1}{3}$ – максимум нүктесі, $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{40}{27}$;

ә) кризистік нүктелер жоқ; б) $x=-\frac{5}{3}$ – кризистік нүкте экстремум болмайды.

18. Минимум нүктесі $x=-3-2\sqrt{2}$.

19. $f(2)=0$.

20. а) $2\pi k$ – максимум нүктесі, $\pi+2\pi k$ – минимум нүктесі, мұндағы $k\in\mathbb{Z}$;

ә) $\frac{5\pi}{6}+4\pi k$ – минимум нүктесі, $\frac{13\pi}{6}+4\pi k$ – максимум нүктесі, мұндағы $k\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{5\pi}{24}+\pi k$ – минимум нүктесі, $\frac{11\pi}{24}+\pi k$ – максимум нүктесі, мұндағы $k\in\mathbb{Z}$.

21. а) $x=2$ – минимум нүктесі, $f(2)=12$; ә) $x=-13$ – минимум нүктесі, $g(-13)=-\frac{1}{25}$; $x=-1$ – максимум нүктесі, $g(-1)=-1$; б) $x=-1$ – максимум нүктесі, $h(-1)=0{,}25$; $x\in\{0;4\}$ – минимум нүктелері, $h(0)=0$, $h(4)=10\frac{2}{3}$; в) $x=5$ – максимум нүктесі, $u(5)=-\frac{27}{4}$.

22. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ – минимум нүктесі, $h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-1$.

23. $x=8$ – максимум нүктесі, $x=11$ – минимум нүктесі.

24. а) $x_1=\frac{5\pi}{48}+\frac{\pi k}{4}$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; ә) $x=\frac{\pi k}{5}$, мұндағы $k\in\mathbb{Z}$.

25. $a=\pm5$, $a=5$ болғанда $x=-50$ минимум нүктесі, $a=-5$ болғанда $x=-50$ максимум нүктесі болады.

26. $p=5$. **27.** 6. **28.** 3. **29.** 30 км/сағ. **30.** $(2;1)$.

§3 ФУНКЦИЯНЫҢ КЕСІНДІДЕГІ ЕҢ ҮЛКЕН ЖӘНЕ ЕҢ КІШІ МӘНДЕРІ

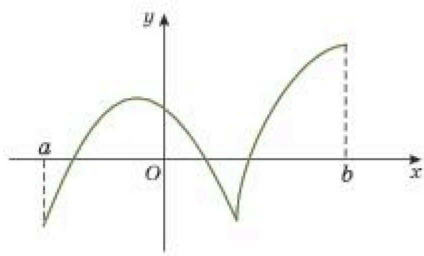
«Мен сіздердің туындысы жоқ бақытсыз сұрықсыз функцияларыңыздан қорқыныштан дірілдей теріс айналамын.»

Шарль Эрмит

$[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f(x)$ функциясы берілген және $[a;b]$ кесіндісі $f(x)$ функциясының анықталу облысының ішкі жиыны болып табылсын. Онда функцияның мәні ең үлкен болатын $c\in[a;b]$ нүктесі табылады, яғни кез келген $x\in[a;b]$ үшін $f(x)\leqslant f(c)$ теңсіздігі орындалады. Осыған ұқсас, функцияның барлық мәндерінің ішінде ең кіші мәні болатын $d\in[a;b]$ нүктесі табылады, яғни кез келген $x\in[a;b]$ үшін $f(x)\geq f(d)$ теңсіздігі орындалады.

Жоғары математика курсында бұл тұжырымдама Вейерштрасс теоремасы делінеді және дәлелденеді. Сендер мен біз үшін бұл интуитивті түсінікті сөйлем. Бәрі осылай қарапайым екен деп ойлап қалмаңдар. $f(x)=x^2$ функциясы $x\in(-2;3)$ жиынында өзінің ең үлкен мәніне ие болмайды деген факті жөнінде ойланып көріңдер.

Сұрақ: c және d нүктелерін қалай табуға болады? Функция өзінің максимум (ең үлкен) мәніне кесіндідегі локальді максимум нүктесінде, не болмаса кесінді ұштарының бірінде жетеді, ал минимум мәніне локальді минимум нүктеде, немесе кесінді ұштарының бірінде жетеді (1-сурет).



1-сурет

Экстремум нүктелері – кризистік нүктелер болып табылады. Екінші жағынан, біз зерттеген функциялардың кесіндіде кризистік нүктелерінің шекті саны ғана болуы мүмкін. Осыдан мынадай идея шығады: кризистік нүктелердің әрқайсысы қандай болатынын талдамай-ақ, осы нүктелердің әрқайсысындағы және кесіндінің ұштарындағы функция мәндерін есептеу керек. Алынған сандардың ең үлкені мен ең кішісі, сәйкесінше, функцияның $[a;b]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндері болады.

Осылайша, кесіндіде функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу алгоритмі төмендегідей қадамдардан тұрады:

1. Функцияның туындысын және оның барлық кризистік нүктелерін табу керек.
2. Берілген кесіндіге тиісті барлық кризистік нүктелердегі және кесінді ұштарындағы функцияның мәндерін есептеу керек.
3. Алынған сандардың ішінен ең үлкені мен ең кішісін таңдау керек.

Осы алгоритмді пайдаланып келесі жаттығуларды өз беттеріңмен орындауға тырысыңдар.

1 жаттығу

$x \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$ кесіндісінде $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

2 жаттығу

$y = 2\sin x + \cos 2x$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

3 жаттығу

$x \in [0; 3]$ кесіндісінде $f(x) = 4x^3 - x|x-2|$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

Жаттығуларды қарастырайық.

1 жаттығудың шешуі

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$. Кризистік нүктелерді шартынан табамыз. $f'(x) = 0$:
$12x^3 + 12x^2 = 0$, $x^2(x+1) = 0$, немесе $x = -1$.
$x = 0$ және $x = -1$ – екі кризистік нүктесі бар, олардың ішінде екіншісі $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$ кесіндісінде жатады. $f(-2) = 3 \cdot (-2)^4 + 4(-2)^3 + 1 = 13$, $f(-1) = 0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{16}$.

Жауабы: $\max\limits_{x \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = f(-2) = 13$, $\min\limits_{x \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = f(-1) = 0$.

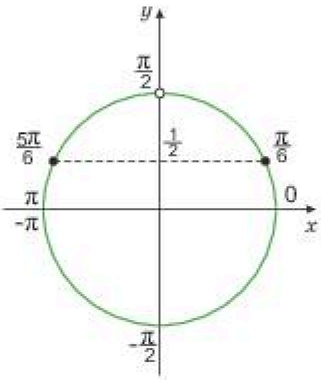
2 жаттығудың шешуі

1-әдіс.

$f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ болсын. Функция периоды 2π болатын период функция. Демек, ұзындығы 2π болатын қандай да бір кесіндіні қарастырсақ жеткілікті. Мысалы, $x \in [-\pi; \pi]$. $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$.

Кризистік нүктелерді $f'(x) = 0$ шартынан табамыз: $\cos x - \sin 2x = 0$, $\cos x - 2\sin x \cos x = 0$, $\cos x(1 - 2\sin x) = 0$, $\cos x = 0$ немесе $\sin x = \frac{1}{2}$,

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ немесе $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ немесе $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$.
$[-\pi;\pi]$ кесіндісінде жататын нүктелер: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ (2-сурет).
$f(-\pi)=1$; $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-3$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$; $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$;
$f(\pi)=1$.
Жауабы: ең үлкен мәні $\frac{3}{2}$-ке, ең кіші мәні –3-ке тең.



2-сурет

2-әдіс.

$f(x)=2\sin x+\cos 2x$ болсын.

Алмастыруынан кейін $f(x)=2\sin x+1-2\sin^2 x=-2t^2+2t+1=g(t)$ аламыз. Егер $x\in(-\infty;+\infty)$ болса, онда $\sin x=t\in[-1;1]$. Есепте $g(t)=-2t^2+2t+1$ функциясының $t\in[-1;1]$ кесіндісінде ең үлкен және ең кіші мәндерін табамыз. $g'(t)=-4t+2$ функциясының $[-1;1]$ кесіндісінде жатқан $t=\frac{1}{2}$ нүктесіндегі туындысы нөлге тең. $g(t)$ функцияның $[-1;1]$ кесіндіде ең үлкен және ең кіші мәндерін табу үшін $g(-1)$, $g(1)$ және $g\left(\frac{1}{2}\right)$ мәндерін есептеу қалды. Сонымен, $g(-1)=-3$, $g(1)=1$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$ болғандықтан, $f(x)$ функциясының ең үлкен мәні $\frac{3}{2}$-ке, ал ең кіші мәні –3-ке тең.

3 жаттығудың шешуі

$f(x)=4x^3-x|x-2|, x\in[0;3]$.

Шешуі. $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$, $x=2$, $2\in[0;3]$ екенін байқаймыз.
Егер $x\ge 2$ болса, онда $|x-2|=x-2$, $f(x)=4x^3-x(x-2)$, $f(x)=4x^3-x^2+2x$, $f'(x)=12x^2-2x+2$. $f'(x)=0$ теңдеуінің түбірлері жоқ болғандықтан, $(2;3)$ интервалында функцияның кризистік нүктелері болмайды.

Егер $x<2$ болса, онда $|x-2|=2-x$, $f(x)=4x^3+x(x-2)$, $f(x)=4x^3+x^2-2x$, $f'(x)=12x^2+2x-2$. $f'(x)=0$ теңдеуінің түбірлері $x=-\frac{1}{2}$ және $x=\frac{1}{3}$. Осы $x=\frac{1}{3}$ кризистік нүктесі $[0;2)$ жиынына тиесілі.

Егер үй тапсырмаларын өз уақытында дұрыс орындаған болсаңдар, онда сендер мынаны білуге тиістісіңдер: қандай да бір өрнектің модулі нөлге тең болатын нүктелер, графиктің «сыну», яғни кризистік нүктелері болады. Берілген есепте $x=2$ нүктесі кризистік нүкте екенін тексерудің қажеттілігі жоқ. Оны «күдіктілер» тізіміне енгіземіз:

$$f(0)=0,\ f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}-\frac{1}{3}\left(2-\frac{1}{3}\right)=-\frac{11}{27},\ f(2)=32,\ f(3)=105.$$

Жауабы: $\max\limits_{x\in[0;3]} f(x)=f(3)=105,\ \min\limits_{x\in[0;3]} f(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{11}{27}$.

Есептер

1-бөлім

1. (1) $x\in[1;4]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

а) $f(x)=-x^2+4x-3$; ә) $g(x)=-x^2-4x-3$; б) $h(x)=x^2+4x-3$.

2. (1) Берілген кесінділерде $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

а) $x\in[-3;-1]$; ә) $x\in[0;2]$; б) $x\in[-3;3]$.

3. (2) $f(x)=x^4-2x^2+3$ функциясы $x\in[-1;2]$ кесіндісінде берілген. Осы функция графигіндегі

а) ординатасы ең үлкен;

ә) ординатасы ең кіші нүктелердің координаттарын табыңдар.

4. (2) $x\in[-2;1]$ кесіндісінде $g(x)=-x^3(x+2)$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

5. (3) Берілген кесіндіде функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

а) $f(x)=\frac{x^4}{x+2}$, $x\in[-0,5;0]$; ә) $g(x)=\frac{x-1}{3x-x^2-3}-1$, $x\in[-1;3]$.

6. (1) а) $t\in[-1;1]$ кесіндісінде $z(t)=t^2-t$ функциясы берілген. $t\in[-1;1]$ айнымалысының қандай мәндерінде $z(t)$ функциясы ең үлкен мән қабылдайды?
(3) ә) жоғарыдағы а) пунктінің шешімін және $\sin x=t$ алмастыруын пайдаланып, $f(x)=\sin^2 x-\sin x$ функциясының ең үлкен мәнін табыңдар. x айнымалының қандай мәндерінде $f(x)$ функциясы ең үлкен мәнге ие болады?

7. (3) $f(x)=-2\cos 2x+3\sqrt{3}\cos x-7\sin^2 x$ функциясы ең кіші мән қабылдайтын x айнымалысының барлық мәндерін табыңдар.

8. (3) $f(x)=\frac{2}{3}\cos^3 x+\frac{3}{2}\sin^2 x+\cos x+1$ функциясы
а) ең үлкен мәнді қабылдайтын;
ә) ең кіші мәнді қабылдайтын x-тің барлық мәндерін табыңдар.

9. (3) $t\in[-3;1]$ кесіндісінде $v(t)=2t^3+3t|t+1|-33t+1$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

10. (4) $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ кесіндісінде берілген $f(x)=\operatorname{tg} x-\frac{4}{3}x$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтаңдар.

2-бөлім

11. (1) Төмендегі кесінділерде $f(x)=2x^2+6x-2$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:
а) $x\in[-3;-2]$; ә) $x\in[-2;0]$; б) $x\in[0;1]$.

12. (1) $x\in[-1;2]$ кесіндісінде берілген функциялардың ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:
а) $f(x)=-x^3+x^2$; ә) $g(x)=-x^3+9x^2$; б) $h(x)=-x^3+27x$.

13. (2) Берілген кесіндіде функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:
а) $f(x)=-4x^4+2x^2+5$, $x\in[0;2]$; ә) $g(x)=(x+2)^2(1-x)^3$, $x\in[-3;-1]$.

14. (3) Берілген кесіндіде функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:
а) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2-9}$, $x\in[4;6]$; ә) $g(x)=\frac{x^3+2x^2}{x-2}$, $x\in[-1;1]$.

15. (3) $y=-x^3+26x$ функциясы берілген, оның анықталу облысы $x\in[-1;4]$. Функция графигіндегі нүктелердің арасынан координаталарының қосындысы:
а) ең үлкен мәнге;
ә) ең кіші мәнге тең болатын нүктесін табыңдар.

16. (1) $\cos x=t\in[-1;1]$ алмастыруын пайдаланып, $f(x)=\cos^2 x+\cos x$ функциясының ең кіші мәнін анықтаңдар. x айнымалысының қандай мәнінде $f(x)$ функциясы ең кіші мәнді қабылдайды?

17. (3) $f(x)=3\cos 2x-4\sin x+2\sin^2 x+100$ функциясы ең үлкен мәнді қабылдайтын x айнымалысының барлық мәндерін табыңдар.

18. (3) $f(x)=-4\sin^3 x-9\cos^2 x-6\sin x+1$ функциясының
а) ең кіші мәнді;
ә) ең үлкен мәнді қабылдайтын x айнымалысының барлық мәндерін табыңдар.

19. (4) $t\in[-1;2]$ кесіндісінде $v(t)=|t|\left(4t^2-15t+12\right)+5$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

20. (4) $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде берілген $f(x)=-\text{ctg}\,x-2x$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

21. (2) Асқарда 20 түрлі түсті шар бар: қара, көк, жасыл және сары түсті. Осы шарлардың 17-сі жасыл емес, 5-еуі қара, ал 12-сі сары емес. Асқарда қанша көк шар бар?

22. Интервалдар әдісімен шешіңдер:

(1) а) $\dfrac{3}{2x-1}>0$; (2) ә) $\dfrac{9-x^2}{3x+1}\geq\dfrac{2}{x}$;

(3) б) $x\geq\dfrac{25}{1-x}-9$, теңсіздігінің ең кіші шешімін көрсетіңдер.

23. (3) Екі материалдық нүкте $t=0$ мезетінде қозғала бастады. Қозғалыс кезіндегі олардың арақашықтығы уақытқа тәуелді $S(t)=\sqrt{8t+36}$ функциясымен сипатталды. Олардың арасындағы ең кіші арақашықтықтың мәні неге тең болуы мүмкін?
A) мәліметтер жеткіліксіз; B) 4; C) 5; D) 6; E) 0.

24. (3) Парфюмерлік дүкенде сатылған сыйлықтар жиынтығының саны наурыз айының алғашқы 7 күні ішінде күн сайын бірдей санға артып отырды. Егер екінші күні 95 сыйлықтар жиыны, ал бесінші күні 140 сыйлықтар жиыны сатылған болса, онда 7 күнде неше сыйлық сатылды?

Жауаптары:

1. а) $\max\limits_{x\in[1;4]} f(x)=f(2)=1$, $\min\limits_{x\in[1;4]} f(x)=f(4)=-3$;

ә) $\max\limits_{x\in[1;4]} g(x)=g(1)=-8$, $\min\limits_{x\in[1;4]} g(x)=g(4)=-35$;

б) $\max\limits_{x\in[1;4]} h(x)=h(4)=29$, $\min\limits_{x\in[1;4]} h(x)=h(1)=2$.

2. а) $\max\limits_{x\in[-3;-1]} f(x)=f(-2)=21$, $\min\limits_{x\in[-3;-1]} f(x)=f(-3)=10$;

ә) $\max\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f(2)=5$, $\min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f(1)=-6$;

б) $\max\limits_{x\in[-3;3]} f(x)=f(3)=46$, $\min\limits_{x\in[-3;3]} f(x)=f(1)=-6$.

3. а) $(2;11)$; ә) $(-1;2)$ немесе $(1;2)$.

4. $\max\limits_{x\in[-2;1]} g(x)=g\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{16}$, $\min\limits_{x\in[-2;1]} g(x)=g(1)=-3$.

5. а) $\max\limits_{x\in[-0,5;0]} f(x)=f(-0,5)=\dfrac{1}{24}$, $\min\limits_{x\in[-0,5;0]} f(x)=f(0)=0$;

ә) $\max\limits_{x\in[-1;3]} g(x)=g(0)=-\dfrac{2}{3}$, $\min\limits_{x\in[-1;3]} g(x)=g(2)=-2$.

6. $\sin x=-1$, яғни $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ болғанда:

а) $\max\limits_{t\in[-1;1]} z(t)=z(-1)=2$; ә) $\max\limits_{x\in R} f(x)=2$.

7. $x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

8. а) $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$; ә) $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$.

9. $\max\limits_{t\in[-3;1]} v(t)=v(2)=45$, $\min\limits_{t\in[-3;1]} v(t)=v(1)=-24$.

10. $\max\limits_{x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\dfrac{4\pi}{9}$, $\min\limits_{x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2\pi}{9}$.

11. а) $\max\limits_{x\in[-3;-2]} f(x)=f(-3)=-2$, $\min\limits_{x\in[-3;-2]} f(x)=f(-2)=-6$;

ә) $\max\limits_{x\in[-2;0]} f(x)=f(0)=-2$, $\min\limits_{x\in[-2;0]} f(x)=f(-1{,}5)=-6{,}5$;

б) $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x)=f(1)=6$, $\min\limits_{x\in[0;1]} f(x)=f(0)=-2$.

12. а) $\max\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=f(-1)=2$, $\min\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=f(2)=-4$;

ә) $\max\limits_{x\in[-1;2]} g(x)=g(2)=28$, $\min\limits_{x\in[-1;2]} g(x)=g(0)=0$;

б) $\max\limits_{x\in[-1;2]} h(x)=h(2)=46$, $\min\limits_{x\in[-1;2]} h(x)=h(-1)=-26$.

13. а) $\max\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=5\dfrac{1}{4}$, $\min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f(2)=f(1)=-51$.

ә) $\max\limits_{x\in[-3;-1]} g(x)=g(-3)=64$, $\min\limits_{x\in[-3;-1]} g(x)=g(-2)=0$.

14. а) $\max\limits_{x\in[4;6]} f(x)=f(4)=\dfrac{128}{7}$, $\min\limits_{x\in[4;6]} f(x)=f(3\sqrt{3})=9\sqrt{3}$;

ә) $\max\limits_{x\in[-1;1]} g(x)=g(0)=0$, $\min\limits_{x\in[-1;1]} g(x)=g(1)=-3$.

15. а) (3;51); ә) (−1;-25).

16. $\cos x=-0{,}5$, яғни $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ болғанда $\min\limits_{x\in R} f(x)=-0{,}25$.

17. $x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

18. а) $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$; ә) $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

19. $\max\limits_{t\in[-1;2]} v(t)=v(-1)=36$, $\min\limits_{t\in[-1;2]} v(t)=v(2)=1$.

$\max\limits_{x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-1-\dfrac{\pi}{2}$, $\min\limits_{x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\pi$. **21.** 4 шар.

22. а) $x>\dfrac{1}{2}$; ә) $x\in(-\infty;-2]\cup\left(-\dfrac{1}{3};0\right)\cup\{1\}$; б) −4. **23.** D. **24.** 875.

§4 ЭКСТРЕМУМДАРДЫ ТАБУҒА АРНАЛҒАН ЕСЕПТЕР

«Маңызды шешімдер интуитивті емес, алдын-ала болжаулардың, математикалық есептеулердің негізінде қабылдануы тиіс. Қазіргі кезде тіршіліктің барлық салаларында математикалық тәсілдердің қарқынды түрде қолданылуы кездейсоқтық емес. Нақты объектілерде «қолданып көру және қателесудің» орнына адамдар мұны математикалық модельде жасап көруді жөн көреді. Мұндай модельдерді құру, оларды талдау және ұсыныс жасау – қолданбалы математиканың маңызды мәселелерінің бірі».

Е.С. Вентцель

1 жаттығу

200 санын көбейтіндісі ең үлкен болатындай екі оң санның қосындысы түрінде көрсет.

2 жаттығу

Өлшемдері $20\times10\times5$ см кірпіштен қалыңдығы 10 см және биіктігі 0,5 м тіктөртбұрышты қоршау тұрғызу керек. Егер кірпіш мөлшері шектеулі болса, онда жердің ауданы ең үлкен болуы үшін дуалды қалай тұрғызу керек?

3 жаттығу

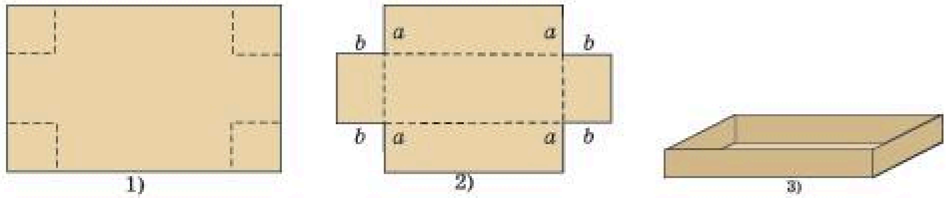
Координаттар жазықтығында әртүрлі ABC үшбұрыштары қарастырылады: олардың әрқайсысының $\angle ABC=90^0$, A төбесінің координатасы $(-4;0)$; B төбесі Ox өсінің $[0;4]$ кесіндісінде, ал C төбесі $y=4x-x^2$ параболасында жатыр. ABC үшбұрышының ауданы ең үлкен мәнге ие болуы үшін C төбесінің координаталары қандай болуы керек?

4 жаттығу

Кеме жағалаудың ең жақын нүктесінен 9 км қашықтықта зәкірде тұр. Кемеден жағалаудың ең жақын нүктесінен 15 км қашықтықта (жағалау бойынша санағанда) орналасқан лагерьге теңізшіні жіберуге болады (лагерь жағалауда орналасқан). Теңізші жағалау бойымен 5 км/сағ жылдамдықпен, ал ескекті қайықпен 4 км/сағ жылдамдықпен жүзеді. Лагерьге ең аз уақытта жету үшін ол жағалаудың қай пунктіне тоқтауы тиіс?

5 жаттығу

Сенің қолыңда тіктөртбұрышты картон қағаз, қайшы және жабысқақ желім бар деп ойла. Сенің мақсатың келесі әдістермен қорап жасау: бұрыштарынан квадрат қиып алу (1), пунктир сызықтар бойымен a және b қырлары біріккенше бүктеу (2), қосылған қырларын желіммен ұстату және жасаған бұйымыңа сүйсіне қарау (3) (1-сурет).



1-сурет

Егер бұрыштардан қиылған квадраттар өте кішкентай болса, онда жазық қорап пайда болады. Егер қиылған квадраттың қабырғасы тіктөртбұрыштың кіші қабырғасынан сәл кем болса, онда пайда болған қорап өте тар болады. Сұрақ: берілген тіктөртбұрыштан ең үлкен көлемді қорапты қалай алуға болады?

6 жаттығу

Ұзындығы 1 м-ден аспайтын жіп немесе арқан алып, ұштарын байлаңдар. Жіппен қоршалған аудан ең үлкен болатындай етіп, оны үстел үстіне орналастырыңдар. Қандай пішін пайда болды?

1 мысал

1-жаттығудың шешіңдер.

Шешуі. Бірінші қосылғыш x болсын. Онда екінші қосылғыш $200-x$ болады, мұндағы $x \in [0;200]$. $x(200-x)$ көбейтіндісі ең үлкен мән қабылдайтындай x-тің мәнін табу керек. Сонымен $x \in [0;200]$ кесіндісіндегі $f(x)=x(200-x)$ функциясының ең үлкен мәнін табу есебі пайда болады. $f'(x)=0$ шартынан кризистік нүктені анықтаймыз. $f'(x)=(x(200-x))'=(200x-x^2)'=200-2x$ болса, онда $200-2x=0$ теңдеуін аламыз. Осы жерде $x_0=100$ кризистік нүкте болып табылады. $f(0)=f(200)=0$, $f(100)=10000$, онда $x(200-x)$ көбейтіндісінің ең үлкен мәні $x=100$ нүктесінде болады.

Жауабы: $200=100+100$.

2 мысал

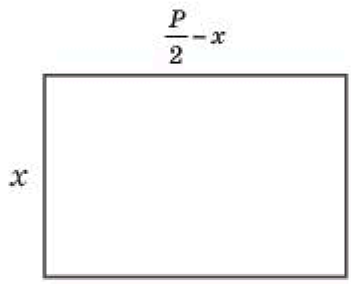
2-жаттығуды шешіңдер.

Шешуі. Дуалдың қалыңдығы, биіктігі белгілі болғандықтан, саны шектеулі кірпіштерден ұзындығы белгілі қабырға тұрғызуға болады. Экстремумға арналған таза геометриялық есеп шығады. Периметрі P болатын барлық тіктөртбұрыштардың ішінен ауданы ең үлкен болатын тіктөртбұрышты табу керек. Егер x–бір қабырғасының ұзындығы болса, онда $\frac{P}{2}-x$ екінші қабырғасының ұзындығы (2-сурет).

Аудан $S(x)=x\left(\frac{P}{2}-x\right)$, $x\in\left[0;\frac{P}{2}\right]$. $S'(x)=\frac{P}{2}-2x$, $S'(x)=0$, $x=\frac{P}{4}$ – кризистік нүкте.

$S(0)=S\left(\frac{P}{2}\right)=0$, $S\left(\frac{P}{4}\right)=\frac{P^2}{16}$ – ең үлкен мәні.

Егер бір қабырғасының ұзындығы $x=\frac{P}{4}$ болса, онда екінші қабырғасының ұзындығы $\frac{P}{2}-\frac{P}{4}=\frac{P}{4}$. Тіктөртбұрыш квадрат болған жағдайда, ауданның мәні ең үлкен болады. Жерді шаршы пішінді дуалмен қоршау керек. Периметрі берілген тіктөртбұрыштардың ішінде шаршының ауданы ең үлкені екені геометрияда дәлелденген. Осылайша, осы геометриялық факт (айғақ) пен математикалық талдаудың арасында байланыс бар екені шығады. $P=400$ деп алсақ, онда 1-жаттығу шығады. Неліктен екенін ойланып көр.



2-сурет

3 мысал

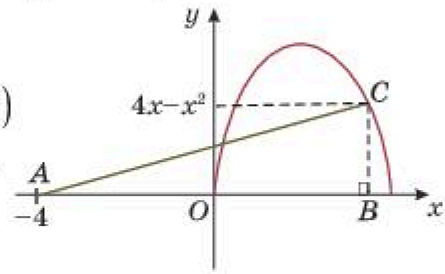
3-жаттығуды шешіңдер.

Шешуі. Экстремумды табуға арналған есептегі жағдайды «қозғалыста» қарастыру керек: шамалардың біреуін бір шекті мәннен келесі шекті мәнге дейін елестете отырып өзгертіп, сәйкесінше басқа шамалардың қалай өзгеретінін бақылау керек.

Берілген есепте, мысалы, B нүктесінің абсцисса өсіндегі 0 нүктесінен 4 нүктесіне дейінгі қозғалысын бақылаймыз. Шеткі нүктелерде үшбұрышының ауданы 0-ге тең екені көрініп тұр. C нүктесі B нүктесінің үстінен парабола бойымен қозғала отырып, нүктесінің абсциссасы B нүктесінің абсциссасына тең болады. Егер B-ның координатасы $(x; 0)$ болса, онда C нүктесінің координатасы $\left(x; 4x - x^2\right)$ болады. Бұл бақылау арқылы x параметрінің мәні үшбұрыштың $BC = 4x - x^2$ биіктігін беретінін түсінеміз, олай болса, ABC үшбұрышының ауданын:

$$S(x) = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2}(x+4)\left(4x - x^2\right)$$

беретіні айқын мұндағы x-тің мәні 0-ден 4-ке дейін өзгереді. Кесіндіде функцияның ең үлкен мәнін анықтауға арналған есеп пайда болды. Оны өзің шығара алатыныңа сенеміз.



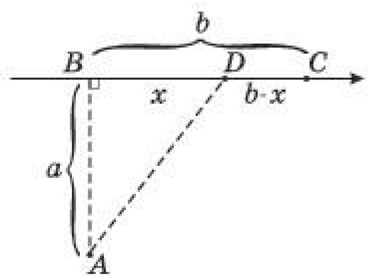
3-сурет

Жауабы: $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{16}{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\right)$.

4 мысал

4-жаттығуды шешіңдер.

Шешуі. Керек емес нәрселерді (кеме, теңізші, шағала және т.б.) шығарып, бірден математикалық модель құруға тырысайық: B кесіндісі BC кесіндісіне перпендикуляр, $AB = 9$, $BC = 15$. S нүктесінің түзу бойымен жүру жылдамдығы 5-ке және BC кесіндісінен тыс жүру жылдамдығы 4-ке тең. S нүктесінің BC кесіндісінің бойындағы қандай да бір D нүктесіне қарай қозғалады, сосын BC түзуінің бойымен жүріп, C нүктесінде қозғалысын аяқтайды. Қозғалыс уақыты ең аз болуы үшін D нүктесін қай жерден таңдау керек?



4-сурет

$BD = x$ болсын, мұндағы $0 \le x \le 15$. Онда $AD = \sqrt{9^2 + x^2}$, $DC = 15 - x$, қозғалысқа кеткен уақыт $T(x) = \frac{AD}{4} + \frac{DC}{5} = \frac{\sqrt{9^2+x^2}}{4} + \frac{15-x}{5}$. $T(x) = \frac{\sqrt{9^2+x^2}}{4} + \frac{15-x}{5}$ функциясының $x \in [0;15]$ аралығындағы ең кіші мәнін табу керек. Туынды табамыз $T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{9^2+x^2}} - \frac{1}{5}$, кризистік нүктелерді $T'(x) = 0$ шартынан іздейміз.

Сонда пайда болған теңдеуді шешеміз: $\frac{x}{4\sqrt{9^2+x^2}} = \frac{1}{5}$,

$\frac{x}{4\sqrt{9^2+x^2}} = \frac{1}{5}$, $5x = 4\sqrt{9^2+x^2}$, $5^2x^2 = 4^2 \cdot 9^2 + 4^2x^2$, $x^2 = \frac{4^2 \cdot 9^2}{5^2 - 4^2}$,

$x^2 = 16 \cdot 9$, $x = \pm 12$. Екі мәннің арасынан тек $x = 12$ мәні ғана $[0;15]$ кесіндісіне тиісті. Функцияның кесінді ұштарындағы және кризистік нүктедегі мәндерін есептейміз:

$T(0) = \frac{9}{4} + \frac{15}{5} = 5,25$, $T(15) = \frac{\sqrt{9^2+15^2}}{4} = \frac{\sqrt{306}}{4} \approx 4,37$ және

$T(12) = \frac{\sqrt{9^2+12^2}}{4} + \frac{15-12}{5} = 4\frac{7}{20} = 4,35$.

Үш санның арасындағы ең кішісі $T(12) = 4,35$ болып табылады.

Жауабы. Лагерьден 3 км қашықтықта тоқтауы тиіс.

5-жаттығуды қарастырмаймыз. Математикалық модель құрып, өз беттеріңмен шығарыңдар. a және b тіктөртбұрыштың қабырғаларының ұзындығы, – қиылып алынатын шаршы қабырғаларының ұзындығы және т.с.с. Егер жалпылама жағдайда да қиындық туындаса, онда алдымен дербес жағдайды қарастырыңдар: $a=4$, $b=8$.

6-жаттығуда жіпті шеңбер жасап орналастыру керек. Жазықтықта белгілі бір ұзындығы бар тұйық сызықтардың ішінде дөңгелек ең үлкен ауданды шектеп тұрады. Кеңістікте көлемді жерді шектеп жатқан және жазықтықта белгіленген ауданы бар пішіндердің ішінде ең үлкен көлемге сфера ие болады.

Осы тұрғыда, қазақтың киіз үйі шын мәнінде оңтайлы пішінге ие: табаны дөңгелек, ал шаңырақ – жарты сфера дерлік.

Өкінішке орай, бұл теоремаларды дәлелдеуді мектеп бағдарламасы аясында қарастыру мүмкін емес.

Есептер

1-бөлім

1. (2) Санның кубы мен сол санның өзінің айырмасы ең кіші мән қабылдайтындай оң санды табыңдар.

2. (2) а) 20 санын екі оң қосылғыштың қосындысы түрінде жазыңдар, мұндағы қосылғыштардың бірінің кубы мен екіншісінің квадратының қосындысы ең кіші болуы тиіс.

ә) p оң санын екі оң қосылғыш түрінде жазыңдар, мұндағы қосылғыштардың бірінің кубы және екіншісінің квадратының қосындысы ең кіші болуы тиіс.

(2) б) жоғарыдағы ә)-дегі формулаға $p=20$ деп қойып, а) және ә) нәтижелерінің сәйкестігін тексеріңдер. ә)-дегі формуланы пайдаланып, $p=48$ болғандағы ә) пунктіндегі есептің жауабын табыңдар.

3. (2) а) Тіктөртбұрыштың үш қабырғасының ұзындықтарының қосындысы 100-ге тең. Осы тіктөртбұрыштың ең үлкен ауданы қандай болуы мүмкін?

ә) Тіктөртбұрыштың үш қабырғасының қосындысы a-ға тең. Ауданы ең үлкен болатын осы тіктөртбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

4. (3) а) Ғани оң сан таңдады. Арман осы санды 4-ке көбейтті, ал Балнұр таңдап алынған санға кері санды 9-ға көбейтті. Содан кейін Ғани Арман мен Балнұрдың нәтижелерін қосады. Нәтижесінде ең кіші мән шығуы үшін Ғани бастапқыда қандай санды атауы қажет? Ғанида қандай ең кіші сан шығуы тиіс?

(3) ә) a және b оң сандары берілсін. Кез келген x оң сан үшін $ax+\frac{b}{x}\geq 2\sqrt{ab}$ теңсіздігінің орындалатынын, сонымен бірге $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ болғанда теңбе-теңдік шығатынын дәлелдеңдер.

5. (3) а) $y=-\frac{4}{3}x+4$ түзуіндегі барлық нүктелердің ішінен координаттар басынан ең кіші қашықтықта орналасқан нүктенің координатасын табыңдар.

(4) ә) k және m сандары берілген. $y=kx+m$ түзуіндегі барлық нүктелердің ішінен координаттар басынан ең кіші қашықтықта орналасқан нүктенің координатасын табыңдар.

(2) б) жоғарыдағы ә) нәтижесін пайдаланып, $y=3x-10$, $y=\sqrt{3}x+12$ түзулері үшін ұқсас есепті шығарыңдар.

6. (3) а) Гипотенузасы 8 см, бір бұрышы 60^0 болатын тікбұрышты үшбұрышқа іштей ауданы ең үлкен болатын тіктөртбұрыш сызылған. Тіктөртбұрыштың бір қабырғасы гипотенузада жатыр. Тіктөртбұрыштың үлкен қабырғасын табыңдар.

(4) ә) Гипотенузасы c, бір бұрышы α болатын тікбұрышты үшбұрышқа іштей тіктөртбұрыш сызылған. Оның бір қабырғасы гипотенузада жатыр. Тіктөртбұрыштың мүмкін болатын ең үлкен ауданын табыңдар.

7. (3) Екі төбесі $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде берілген $y = 4\cos x$ функциясының графигінде жататын, қалған екі төбесі Ox өсінде орналасқан тіктөртбұрыштарды қарастырайық. Осы тіктөртбұрыштардың ішінен периметрі ең үлкен болатын тіктөртбұрышты табыңдар.

8. (3) ABC тікбұрышты үшбұрыштарын қарастырайық. A төбесінің координатасы $\left(-3\frac{1}{2}; 0\right)$, C төбесі Ox өсінде $[-1;1]$ кесіндісінде жатыр, B төбесі центрі координаттар басында жатқан бірлік шеңберде орналасқан, ABC бұрышы – тік. Осындай ABC үшбұрышының ең үлкен ауданы қандай болуы мүмкін.

9. (4) Екі нүкте координаттар өсі бойымен оң бағытта тұрақты $v_1 = 2$ және $v_2 = 1$ жылдамдықпен қозғалып келеді. Егер олардың бастапқы орындары сәйкесінше $(-3;0)$ және $(0;-5)$ болса, онда қозғалыстағы екі нүктенің арақашықтығы қандай уақыт сәтінде ең қысқа болады?

10. (3) Егер фермер 20-дан артық емес алма ағашына күтім жасаса, онда әрбір ағаштан 600 алмадан алады. Егер ол 20-дан артық алма ағашына күтім жасаса, онда әрбір ағаштың шығыны арта түседі. Шын мәнінде, әрбір жаңа алма ағашы қосылған сайын әрбір ағаштың шығыны 15 алмаға артады. Алмалардың ең көп түсіміне қол жеткізу үшін фермер қанша ағашқа күтім жасауы қажет?

2-бөлім

11. (2) x оң санының кубы мен $12x$ санының айырмасы ең кіші мән қабылдайтындай x санын табыңдар.

12. (2) а) Екі оң санның қосындысы 30-ға тең. Олардың біреуін екіншісінің квадратына көбейткенде ең үлкен сан шығатындай етіп, осы сандарды таңдап алыңдар.

(2) ә) Екі оң санның қосындысы p-ға тең. Осы сандарды олардың біреуін екіншісінің квадратына көбейткенде ең үлкен сан шығатындай етіп таңдап алыңдар.

(2) б) жоғарыдағы ә) формуласына $p = 30$ мәнін қойып, а) және ә) нәтижелерінің сәйкестігін тексеріңдер. ә) формуласын пайдаланып, $p = 3^{2014}$ деп алып, есепті шығарыңдар.

13. (2) а) Тікбұрышты параллелепипедтің көлемі оның үш өлшемнің: ұзындығы, ені және биіктігінің көбейтіндісіне тең. Ұзындығы енінен 2 есе артық, ал үш өлшемінің қосындысы 18-ге тең болатын тікбұрышты параллелепипедтің ең үлкен көлемін табыңдар.

(3) ә) Ұзындығы енінен 2 есе артық, үш өлшемінің қосындысы $3l$ -ге тең болатын тікбұрышты параллелепипедтің ең үлкен көлемін табыңдар.

14. (2) а) Берік 1 санын оң сан болуы міндетті емес екі санның қосындысы түрінде жазады. Серік бірінші қосылғышты квадраттап, 3-ке көбейтеді, екінші қосылғышты да квадраттап, 6-ға көбейтеді. Шыққан көбейтінділерді қосады. Серікте мүмкін болатын ең кіші нәтиже шығуы үшін Берік 1 санын қандай қосылғыштарға жіктейді?

(3) ә) a және b оң сандары берілсін. $x\in(-\infty;+\infty)$ болса, $ax^2+b(1-x)^2$ өрнегінің ең кіші мәнін табыңдар.

15. (3) Шеберханада балалар киімін тігеді. Әрбір киімнің өзіндік құны 20 ш.б (шартты бірлік). Егер киімдер p ш.б бағасымен сатылса, онда тұтынушылар айына $1560-12p$ киім сатып алады. Шеберхананың түсірген пайдасы максимал болуы үшін шеберхана айына қанша киім тігулері қажет?

16. (3) а) Катеттері 8 және 6 болатын тікбұрышты үшбұрыш берілген. Оған іштей бір төбесі гипотенузада жататындай, оған қарама-қарсы төбесі үшбұрыштың тік бұрышының төбесімен дәлме-дәл келетіндей, қалған екі төбесі екі катетте жататындай етіп тіктөртбұрыш сызылған. Осындай тіктөртбұрыштың ең үлкен ауданын табыңдар.

(3) ә) жоғарыдағы а) есебін катеттері a және b болатын кез келген тікбұрышты үшбұрыш үшін есептеңдер.

(2) б) жоғарыдағы ә) есебін катеттері $\sqrt{13}-3$ және $\sqrt{13}+3$ болатын кез келген тікбұрышты үшбұрыш үшін есептеңдер.

17. (3) Екі төбесі өстегі $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ кесіндісінде, ал қалған екі төбені $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ кесіндісіне сәйкес $y=\sin 4x$ функциясының графигінде жататын тіктөртбұрыштарды қарастырайық. Осы тіктөртбұрыштардың ішінен периметрі ең үлкен тіктөртбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

18. (4) а) Әртүрлі екі ыдысқа тұз ерітіндісі құйылған, оның бірінде 10 кг, екіншісінде 15 кг ерітінді бар. Су буланғанда бірінші ыдыста тұздың мөлшері p есе, екінші ыдыста q есе артты. $pq=6$ екені белгілі болса, екі ыдыстағы қалған ерітіндінің ең кіші жиынтық массасы қандай?

(4) ә) бірінші ыдыста бастапқыда m_1 кг, екінші ыдыста m_2 кг, $pq=c$ болды деп есептеп, жоғарыдағы а) пунктіндегі есепті шығарыңдар, мұндағы m_1, m_2 және c оң сандар, $c>1$.

19. (4) $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=6$ сызықтарымен шектелген пішінге іштей сызылған параллелограмның ең үлкен ауданын табыңдар, егер параллелограмның екі төбесі $x=6$, түзуінде, қалған екі төбесі $y=x^2$, $y=2x^2$ параболаларында жататын болса.

20. (3) Жалпы тұрғын ауданы $40\,000$ м^2 болатындай бірдей бірнеше үй салу керек. Жалпы тұрғын ауданы S болатын бір үйді салуға кететін шығын $\sqrt{S}$-ке пропорционал іргетас құны мен $S\sqrt{S}$-ке пропорционал жерүсті бөлігі құндарының қосындысынан тұрады. Тұрғын ауданы $400\ \text{м}^2$ болатын үйді салуда 80% шығын іргетасқа жұмсалады. Шығын ең аз болу үшін неше үй тұрғызу керек?

21. (3) Қоян тасбақамен 100 м-ге жүгіруден жарысқа түсті. Қоян мәреге жеткенде, тасбақаға мәреге дейін әлі 90 м бар еді. Екеуі мәреге бір мезгілде жетулері үшін, қоянға арналған бастау (старт) сызығын қандай қашықтыққа жылжыту керек?

22. (2) Бірінші сан $0{,}5$-ке, екінші сан $0{,}3$-ке тең. Екінші сан берілген сандар айырымының қанша пайызын құрайды?

23. (3) Ұзындығы 120 мм болатын металл өзекше берілген. Ол ұзындығы 10 мм бөліктерге бөлінді. Әр кескен сайын өзекшенің 1 мм-і металл ұнтағына айналады. Кесектің ең көп дегенде қанша санын алуға болады?

A) 9; B) 10; C) 11; D) 12; E) 13.

24. (2) Ықшамдаңдар: $\cos^2(\pi-\alpha)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

Жауаптары:

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.** а) $\frac{10}{3}+\frac{50}{3}$; ә) бірінші қосылғыш $\frac{\sqrt{6p+1}-1}{3}$-ке тең болуы керек; б) $\frac{16}{3}+\frac{128}{3}$. **3.** а) 1250; ә) тіктөртбұрыш өлшемі $\frac{a}{4}\times\frac{a}{2}$ болады.

4. а) Егер Ғани $1{,}5$ санын таңдаса, ең кіші нәтиже 12 болады.

5. а) $\left(\frac{48}{25};\frac{36}{25}\right)$; ә) $\left(-\frac{km}{1+k^2};\frac{m}{1+k^2}\right)$; б) $y=3x-10$ түзуі үшін жауап $(3;-1)$, $y=\sqrt{3}x+12$ түзуі үшін жауап $\left(-3\sqrt{3};3\right)$. **6.** а) 4 см; ә) $\frac{c^2\sin 2\alpha}{8}$.

7. Ox өсінде жатқан қабырғасы $\frac{\pi}{3}$-ке тең; биіктігі $2\sqrt{3}$ -ке тең. **8.** $\frac{15\sqrt{15}}{32}$.

9. $t=0{,}2$ с. **10.** 30. **11.** 2. **12.** а) $30=10+20$; ә) $\frac{p}{3}+\frac{2p}{3}$; б) $3^{2013}+2\cdot3^{2013}$.

13. а) 192; ә) $\frac{8}{9}t^3$. **14.** а) $1=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$; ә) $\frac{ab}{a+b}$. **15.** 660. **16.** а) 12; ә) $\frac{1}{4}ab$; б) 1.

17. Өсінде жатқан қабырғасының ұзындығы $\frac{\pi}{12}$-ге тең; биіктігі $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ге тең.

18. а) 10 кг; ә) жауап: $2\sqrt{\frac{m_1m_2}{c}}$. **19.** 32. **20.** 25 үй. **21.** 900 м. **22.** 150%. **23.** C. **24.** 1.

§5 ФУНКЦИЯЛАРДЫ ЗЕРТТЕУ ЖӘНЕ ГРАФИКТЕРІН САЛУ

5.1 Графиктің асимптотасы дегеніміз не?

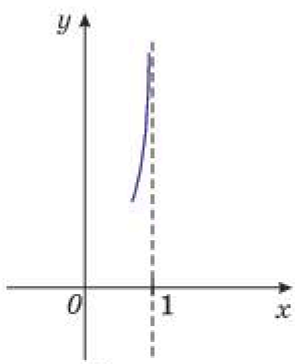
5 жаттығу

Кестені толтырыңдар.

x	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	8	12	16
$\frac{1}{2}x$						1	$\frac{3}{2}$						
$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$						2	$2\frac{1}{6}$						

Толтырылған кестені пайдаланып, $y=\frac{1}{2}x$ және $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ мұндағы $x>0$, функцияларының графиктерін салыңдар (Масштаб 1 бірлік = 1 см = 2 торкөз).

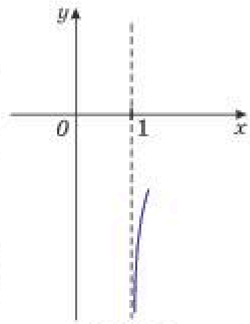
$y=f(x)$ **бөлшек-рационал функциясының** $x=1$ нүктесінің маңайындағы сипатын қарастырамыз, мұндағы $f(x)=\frac{(x+2)(x-3)}{x-1}$; x сол жақтан 1-ге ұмтылсын $(x\to 1-0)$. Бөлшектің алымы $(x+2)(x-3)$ үзіліссіз функция және алымның мәні $(1+2)(1-3)=-6$ санына жақындайды. Біз x-тің 1-ге сол жағынан ұмтылуын қарастырайық, онда $x<1$ және $x-1<0$ болады. Демек, егер x-тің мәні 1-ге өте жақын болса, онда $f(x)\approx\frac{-6}{\textit{модулі бойынша өте кіші теріс сан}}=$ *өте үлкен оң сан.* x қаншалықты 1-ге жақындаған сайын, $y=f(x)$-тің мәні соншалықты үлкен оң санға тең болады. Графикте бұл шамамен былай көрініс табады (1-сурет):



1-сурет

Функцияның осыған ұқсас сипаты $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=+\infty$ теңдігімен сипатталады. Бұдан, $x=1$ вертикаль асимптота екендігі шығады.

Енді тағы да $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-1}$ функциясын қарастырамыз, бұл жолы x оң жақтан 1-ге ұмтылсын $(x\to1+0)$. Сонда $x>1$ және $x-1>0$ болады. Егер x–1-ге өте жақын сан болса, онда алымы шамамен –6-ға, ал бөлімі – модулі бойынша өте кіші оң санға тең болады.


2-сурет

$$f(x)\approx\frac{-6}{\textit{модулі бойынша өте кіші оң сан}}=\textit{модулі бойынша өте үлкен теріс сан.}$$

x оң жағынан 1-ге қаншалықты жақындаған сайын, $y=f(x)$-тің мәні модулі бойынша соншалықты ең үлкен теріс санға тең болады. Графикте бұл шамамен былай көрініс табады (2-сурет):

$\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=-\infty$ болады. Бұдан, $x=1$ түзуі $y=f(x)$ функциясының вертикаль асимптотасы екендігі шығады.

1-АНЫҚТАМА.

Егер $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty$ төрт шартының кем дегенде біреуі орындалса, онда $x=a$ түзуі $y=f(x)$ функциясы – графигінің вертикаль **асимптотасы** болып табылады.

Енді $y=f(x)$, мұндағы $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-1}$ функциясының сипатын айнымалының өте үлкен мәндері үшін қарастырамыз.

$$\frac{(x+2)(x-3)}{x-1}=\frac{x^2-x-6}{x-1}=\frac{x^2-x}{x-1}-\frac{6}{x-1}=x-\frac{6}{x-1}.$$

x-тің өте үлкен мәндерінде $\dfrac{6}{x-1}$ бөлшегі модулі бойынша өте кіші болады және $f(x)$ мәні жуықтап x-ке тең болады. Бұдан басқа, $\dfrac{6}{x-1}>0,$

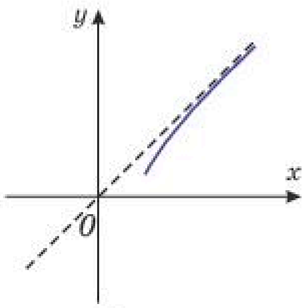
$$f(x)=x-\frac{6}{x-1}<x.$$

$$f(x)\approx x-\frac{6}{\textit{өте үлкен сан}}\approx x\ (x-\textit{модулі бойынша өте кіші оң сан}).$$

x-тің мәні неғұрлым үлкен болса, соғұрлым $f(x)$ мәнінің x-тен айырмашылығы аз болады. $f(x)<x$ болғандықтан, $f(x)$ функциясының графигі $y=x$ түзуіне төменгі жағынан шексіз жақындай түседі.

Бұл графикте төмендегідей кескінделеді (3-сурет):

Сонда: $x\to+\infty$ $f(x)\approx x$ теңдігі орындалады, $x>0$ болғанда $y=x$ түзуі $y=f(x)$ функциясы графигінің көлбеу асимптотасы болады.



3-сурет

$x\to-\infty$ болғанда $\dfrac{6}{x-1}$ бөлшегінің мәні модулі бойынша өте кіші теріс сан болады. Себебі $f(x)=x-\dfrac{6}{x-1}$, сонда $x\to-\infty$ ұмтылғанда $f(x)$ жуықтап x-ке тең болады, сонымен қатар $f(x)>x$.

x-тің абсолют шамасы (модулі) қаншалықты үлкен болса, $f(x)$ мәнінің x-тен айырмашылығы соншалықты аз болады. $f(x)$ графигі $y=x$ түзуіне жоғары жақтан шексіз жақындай түседі.

График түрі суретте кескінделген (3-сурет):

Сондай-ақ: $x\to-\infty$ болғанда $f(x)\approx x$ теңдігі орындалады, $y=x$ түзуі $x>0$ болғанда $y=f(x)$ функциясының көлбеу асимптотасы болады.

2-АНЫҚТАМА.

Егер $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+m))=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(kx+m))=0$ шарттарының ең болмаса біреуі орындалса, онда $y = kx + m$ түзуінің графигі $y=f(x)$ функциясының көлбеу асимптотасы болады.

Ескерту. Егер $k=0$ болса, онда $y=m$ горизонталь асимптота. Горизонталь асимптота – көлбеу асимптотаның дербес жағдайы. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=m$ болса, $y=m$ түзуі – горизонталь асимптота екендігін кейде бірден түсінуге болады.

k және m коэффициенттерін келесі пайымдаулардан іздейміз. x айнымалысының үлкен мәндерінде жуықтап $f(x)\approx kx+m$ теңдігі орындалады. Демек, $\dfrac{f(x)}{x}\approx\dfrac{kx+m}{x}\approx k$ және $m\approx f(x)-kx$. x айнымалының модулі бойынша мәндер өте үлкен болғанда шектерге көшіп, $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ және $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$ қатынастарын аламыз.

5.2 Функцияны зерттеу

Егер шектердің ең болмаса біреуі ақырғы санға тең болмаса, онда ешқандай асимптота жайлы сөз қозғалмайды.

Функцияны зерттеуді келесі жоспар бойынша жүргіземіз:

1. Анықталу облысы
2. Үзіліссіздік
3. Жұптылық қасиеттері
4. Периодтылық
5. Бірсарындылық
6. Экстремумдар
7. Графиктің координата өстерімен қиылысуы. Таңба тұрақтылық аралықтары.
8. Көлбеу асимптоталары
9. Мәндер жиыны

Әр пунктті түсіндіреміз.

1. Егер есеп шартында анықталу облысы туралы ешнәрсе айтылмаса, онда нақты анықталу облысын, яғни аргументтің мүмкін мәндер облысын анықтаймыз.

2. Егер үзіліс нүктелері табылса, онда бір жақты шектерді есептеу қажет.

3. Функцияның жұп немесе тақ екенін, немесе функцияның жалпы түрдегі функция екенін дәлелдеу керек.

4. Көпмүше және бөлшек-рационал функциялар үшін периодтылық туралы мәселе қарастырылмайды. Функцияның периодтылығы ұзындығы оның периодына тең қандай да бір кесінділе функцияны зерттеумен шектелуге мүмкіндік береді.

Көпмүшелер – *мынадай түрде берілетін функциялар:* $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, мұндағы $a_{n-1}, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – қандай да бір сандар және $a_n \neq 0$. Бөлшек-*рационал функция*лар – $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, мұндағы $f(x)$ және $g(x)$ – *көпмүшелер.*

Егер функция периодты болса, онда негізгі периодын анықтау керек.

5. Бірсарындылық аралығын туынды көмегімен табамыз:

Оң таңбалы туындының аралығына функцияның өсу интервалы сәйкес келеді; туындысы теріс таңбалы аралыққа функцияның кему аралығы сәйкес келеді.

6. Экстремумның жеткілікті шартын қолданамыз: егер кризистік нүкте арқылы (солдан оңға қара) өткен кезде туындының таңбасы «+»-тен, «–»-қа ауысса, онда кризистік нүктеде өсу кемумен алмасады. Сондықтан, локальді максимум нүктесі орын алады. Егер кризистік нүкте арқылы (солдан оңға қарай) өткенде туындының таңбасы «–»-тан «+»-ке ауысса, онда кему өсумен алмасып, локальді минимум нүктесі орын алады.

7. Oy өсіндегі кез келген нүктенің абсцисасы нөлге тең. Сондықтан $y=f(x)$ функциясының Oy өсімен қиылысу нүктесін $x=0$ шартынан табамыз. Ox өсіндегі кез келген нүктенің ординатасы нөлге тең. Сондықтан $y=f(x)$ функциясының Ox өсімен қиылысу нүктесін $y=0$ шартынан тауып, $f(x)=0$ теңдеуін шешеміз. Таңба тұрақтылық аралықтарын интервалдар әдісімен табамыз.

Кез келген $f(x)=0$ теңдеуінің түбірін кейде айқын түрде табу мүмкін бола білмейді. Мұндай жағдайда бұл пунктті орындамауға болады.

8. Көлбеу асимптотаны табу тәсілдері осы параграфтың 1-пунктінде баяндалған. Сонымен қатар төменде берілген мысалдарды қараңдар.

9. Графиктің барлық нүктелерінің ординаталарының бірігуін мәндер жиыны ретінде анықтаймыз.

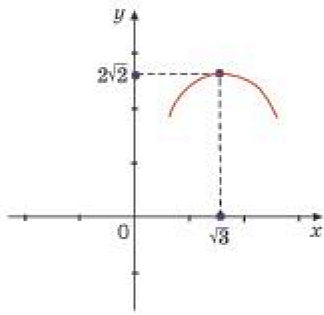
Мәндер жиынын табудың басқа да әдістері бар.

Жалпы ескертулер

1. График салуда, егер мүмкіндік болса, графиктерді қарапайым түрлендірулерді қолдануға болады және қолдану керек.

2. Егер $f(x)$-тің аналитикалық формуласында модулі бар өрнек кездессе және графикке қарапайым түрлендіру қолдану мүмкін болмаса, онда модуль ішіндегі өрнектің әрбір таңба тұрақтылығы интервалдарына график жеке салынады. Модуль таңбасы астындағы өрнектің «нөлдерінде» $f(x)$ мәнін бөлек есептейміз.

3. Салу жұмысының дұрыстығын тексеру үшін функцияның мәндерінің кішігірім кестесін (2-3 нүктедегі) жасап алған пайдалы.



5-сурет

4. Функцияның жұп немесе тақ екені анықталса, сонымен бірге зерттеудің мақсаты график салу болса, онда алдымен $x>0$ аймағында (Oy өсімен салыстырғанда оң жарты жазықтық) графикті салу керек. Содан кейін егер функция жұп болса, Oy өсіне қатысты симметриялы кескінін салу қажет. Егер функция тақ болса, онда $(0;0)$ нүктесіне қатысты симметриялы кескіні салынады.

5. Зерттеу процесі кезінде иррационал сандар шықса, онда график салғанда олардың жуық мәндерін қолдану керек, бірақ жауап жазғанда дәл мәнін жазамыз. Мысалы, $\sqrt{3}$ локальді максимум нүктесі, $2\sqrt{2}$ локальді максимум. $\approx 1,7...$, $\approx 1,4$, ...болғандықтан, жазықтықта $(1,7; 2,8)$ нүктелерін белгілейміз, бірақ дәл белгілеу жасаймыз (5-сурет).

1 мысал

$y=\dfrac{x}{x^2+1}$ функциясын зерттеп, графигін салыңдар.

Шешуі. 1) Анықталу облысы $D(f):(-\infty;+\infty)$.

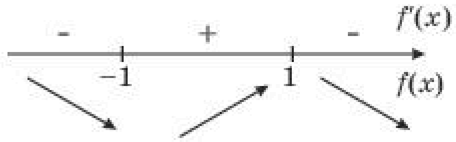
2) Бөлшекті-рационал функцияның x^2+1 бөлімі нөлге айналмайды. $(-\infty;+\infty)$ жиынында функция үзіліссіз.

3) Барлық $x \in D(f)$ үшін $f(-x)=\frac{-x}{(-x)^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}=f(x)$ теңдігі орындалады, демек $f(x)$ тақ функция.

4) Функция периодты емес.

5) Функцияның туындысы $f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $f(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$.

$D(f'(x))=(-\infty;+\infty)$ болғандықтан, кризистік нүктелерді келесі шарттардан іздейміз: $f'(x)=0$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ немесе $x=-1$. Интервалдар әдісін пайдаланып, туынды таңбасын зерттейміз:



Демек, осыдан:
$(-\infty;-1)$ – кему аралығы,
$(-1;1)$ – өсу аралығы,
$(1;+\infty)$ – кему аралығы екендігі шығады.

6) $x=-1$ нүктесі – локальды минимум нүктесі, $f(-1)=-\frac{1}{2}$, $x=1$ нүктесі – локальді максимум нүктесі, $f(1)=\frac{1}{2}$.

7) $x=0$ шартынан графиктің Oy өсімен қиылысу нүктесі іздейміз. $f(0)=0$ болғандықтан, график Oy өсін $(0;0)$ координаталар басында қиып өтеді.

Ox өсімен қиылысуы: $y=0 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1}=0 \Rightarrow x=0$. Осыдан функция графигі Ox өсін $(0;0)$ координаталар басында қиып өтетіні шығады.

$x \in (0;+\infty)$ болғанда $f(x)>0$; $x \in (-\infty;0)$ болғанда $f(x)<0$ екені түсінікті.

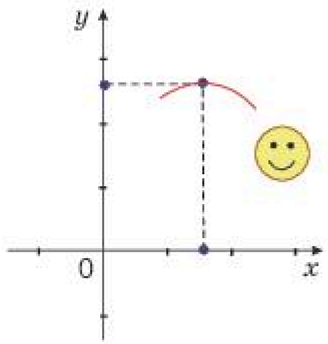
8) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=0.$

Сондықтан $y=0$ түзуі – графиктің горизонталь асимптотасы.

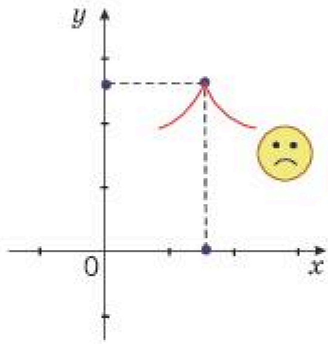
9) Функцияның мәндер жиыны: $E(f)=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

График нүктелерін салуды 6-пункттен бастаймыз.

Үзіліссіздік аралығында туындының бар болуы функция графигінің «тегіс болатынына» кепілдік береді: графиктің «сынуы» болмайды. Осы себепті, мысалы $f'(x)=0$ *болатын локальді максимум нүктесі сыну емес, иілген (дөңгелектенген) төбе түрінде кескінделеді (6, 7-суреттер).*

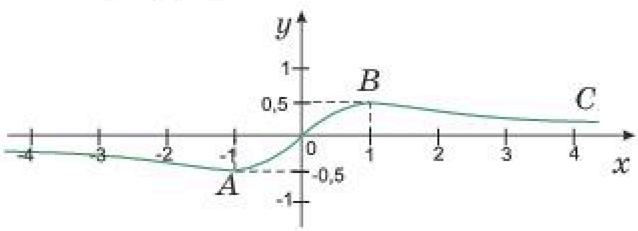


6-сурет



7-сурет

Графикті саламыз (8-сурет):



8-сурет

Бұл графикті мынадай жолмен салдық:

1) Нүктелердің белгіленуі: $A\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$, $O(0;0)$, $B\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

2) A және B нүктелерінде кішкентай горизонталь кесінділер – болашақ графиктің бөліктері жүргізілген. Кесінділер горизонталь, себебі $f'(-1)=0$ *және* $f'(1)=0$*, яғни графикке A және B нүктелерінде жүргізілген жанамалар горизонталь.*

3) A-O-B бөлігін саламыз. Зерттеу бойынша $(-1;\,1)$ *– өсу интервалы болғандықтан, A нүктесіндегі кішкентай горизонталь сызықтың оң жақ ұшынан бастап, B нүктесіндегі кішкентай горизонталь сызықтың сол жақ ұшына дейін бірқалыпты өсетін сызық жүргіземіз. Сызықты* $(0;0)$ *нүктесі арқылы өткіземіз, себебі* $(0;0)$ *– графиктің координат өстерімен қиылысу нүктесі.*

4) B-C бөлігін саламыз. $(1;\ +\infty)$ – кему интервалы болғандықтан, B-C бөлігіндегі сызық төмен түсуі керек. $(0;\ +\infty)$ – $f(x)$ функциясы оң мән қабылдайтын аралығы болғандықтан, B-C бөлігінде сызық төмен түскенімен Ox өсін еш жерде қимайды. Ox – графиктің асимптотасы болғандықтан, B-C бөлігі Ox өсін еш жерде қимай, x мәнінің өсуі бойынша Ox өсіне барынша жақындай түседі. Қорытынды: B нүктесіндегі кішкентай горизонталь кесіндінің оң жақ ұшынан Ox өсіне төменнен жақындайтын сызық жүргіземіз.
5) $f(x)$ функциясы тақ болғандықтан, D-A бөлігін $(0;0)$ нүктесіне қатысты B-C бөлігінің симметриялы кескінін саламыз.

1 мысал

Функцияны зерттеңдер: $y=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-1}$.

Шешуі. $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-1}$ – бөлшек-рационал функция.

1) $D(f)$ анықталу облысы: $x\neq 1$;

2) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=-\infty$ болғандықтан, $x=1$ нүктесі – 2-текті үзіліс нүктесі, сондықтан $x=1$ түзуі графиктің вертикаль асимптотасы болады (осы параграфтың 1-пунктін қараңдар).

3) $f(x)$ функциясының жұптылық қасиеті жоқ, себебі оның анықталу облысы Ox өсінде нөлге қатысты симметриялы емес: $x=1\in D(f)$, $x=-1\in D(f)$.

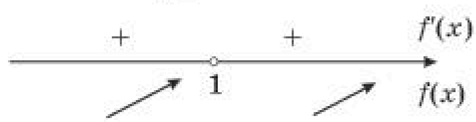
4) Функция периодты емес.

5) Функцияның туындысы:

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x-6)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+7}{(x-1)^2}.$$

$x=1$ нүктесінде туындысы жоқ, бірақ $x=1$ нүктесі $f(x)$ функциясының үзіліссіз болатын араларында жатпайды, сондықтан кризистік нүкте бола алмайды. $f'(x)=0$ теңдеуінің шешімі болмағандықтан, басқа кризистік нүктелер де жоқ. Шындығында, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x+7=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

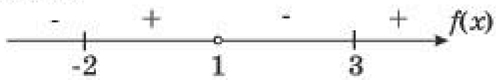
Интервалдар әдісімен $f'(x)$ туындының таңбасын зерттейміз:



$(-\infty;1)$ және $(1;+\infty)$ интервалында туынды таңбасы оң, берілген интервалдар $f(x)$ функциясының өсу аралықтары.
6) Экстремум нүктелері жоқ.
7) $x=0$ шартынан Oy өсімен қиылысуын іздейміз. $f(0)=6$ болғандықтан, график Oy өсін $(0;6)$ нүктесінде қиып өтеді.
$y=0$ шартынан Ox өсімен қиылысуын іздейміз:

$$\frac{(x+2)(x-3)}{x-1}=0 \Leftrightarrow x=-2,\ x=3.$$

Демек, график Ox өсін $(-2;0)$ және $(3;0)$ нүктелерінде қиып өтеді. Интервалдар әдісімен функцияның таңба тұрақтылығы аралықтарын табамыз:



$x\in(-\infty;-2)\cup(1;3)$ болғанда, функция теріс мәндер қабылдайды: $f(x)<0$.

$x\in(-2;1)\cup(3;+\infty)$ болғанда, функция оң мәндер қабылдайды: $f(x)>0$.

8) Көлбеу асимптоталары.
Асимптотаны табу тәсілдерінің бірі – бүтін бөлікті бөліп алу (осы параграфтың 5.1 пунктінде қарастырылды). Басқа бір тәсілі бар. $y=kx+m$ түзуі $y=f(x)$ функциясының көлбеу асимптотасы болады, тек сонда егер төмендегі соңғы шегі бар болса ғана:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ және } m=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

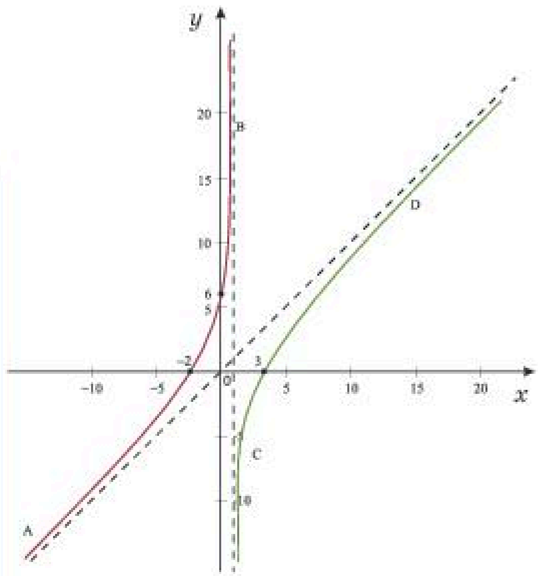
Біздің мысалда:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1,$$

$$m=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x-6}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{x-1}=0.$$

$x\to\infty$ ұмтылғанда екі шекті есептеу нәтижесінің осы алынған шектерден айырмашылығы жоқ. Осыдан $y=1x+0=x$ түзуі $y=f(x)$ функциясының $x>0$ және $x<0$ болғандағы көлбеу асимптотасы болатындығы шығады.
9) $E(f):(-\infty;\infty)$.

График саламыз (9-сурет):



9-сурет

Бұл кескіннің қалай салынғанын осы параграфтың 1-пунктінен тағы бір қарап алыңдар. Тек мыналарды байқаймыз, $(-\infty;1)$ – өсу аралығы болғандықтан, A-B бөлігі солдан оңға көтерілетін сызық, сонымен қатар ол $(-2;0)$ және $(0;6)$ нүктелері арқылы өтеді, $(1;+\infty)$ – өсу аралығы болғандықтан, C-D бөлігі $(3;0)$ нүктесі арқылы өтетін солдан оңға көтерілетін сызық.

3 мысал

$y=2\sin x+\cos 2x$ функциясының графигін салыңдар.

Шешуі:

1) $D(f):(-\infty;\infty)$.

2) $D(f)$ жиынында $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ функциясы үзіліссіз.

3) $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-3;\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ екенін байқаймыз. Осыдан, функция жұп болу қасиетіне ие емес екендігі шығады, әйтпеген-де $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ немесе $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ теңдіктерінің біреуі орындалар еді.

4) Периоды $T=2\pi$, себебі кез келген $x\in D(f)$ үшін $f(x+2\pi)=f(x)$ теңдігі орындалады. Шындығында,

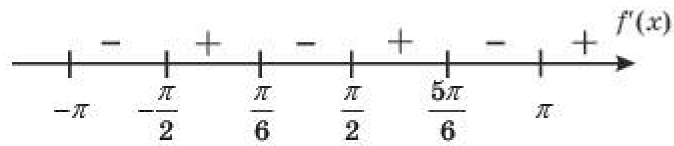
$$f(x+2\pi)=2\sin(x+2\pi)+\cos(2(x+2\pi))=2\sin x+\cos 2x=f(x).$$

5) Туындысы: $f'(x)=2\cos x-2\sin 2x$. Кризистік нүктелерді $f'(x)=0$ шартынан іздейміз (§3, 2-жаттығуды қараңдар).

$T=2\pi$ – периоды. $y=f(x)$ функциясының графигін ұзындығы 2π кесіндіде, *мысалы,* $[-\pi;\pi]$ кесіндісінде салуға мүмкіндігіміз бар, сосын осы салынған бөлікті Ox өсі бойымен оңға және солға жылжытып, «көбейтеміз».

$[-\pi;\pi]$ кесіндісінде 4 кризистік нүкте бар: $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$, бұған қоса $f(-\pi)=1$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-3$,

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$, $f(\pi)=1$.



10-сурет

Аралықтардан $f'(x)$ таңбасын анықтау үшін әрбір аралық ішінен бір нүктені таңдап, оның мәнін $f'(x)$-ке қоюға болады. Мысалы, $\frac{\pi}{2}=90°$ және $\frac{5\pi}{6}=150°$ арасындағы $135°=\frac{3\pi}{4}$ нүктені алған қолайлы, тексеріп көрейік: $f'(\frac{3\pi}{4})>0$ (10-сурет). Қарапайым интервалдар әдісінде тек таңбалардың үнемі кезектесе бермейтінін ескертеміз.

6) Экстремумның жеткілікті шарты пайдаланып, мыналарды аламыз: $x=-\frac{\pi}{2}$ және $x=\frac{\pi}{2}$ – локальді минимум нүктесі, $x=\frac{\pi}{6}$ және $x=\frac{5\pi}{6}$ – локальді максимум нүктесі.

7) Oy өсімен қиылысуы: $x=0$, $f(0)=1$, $(0;1)$ – Oy өсімен қиылысу нүктесі.

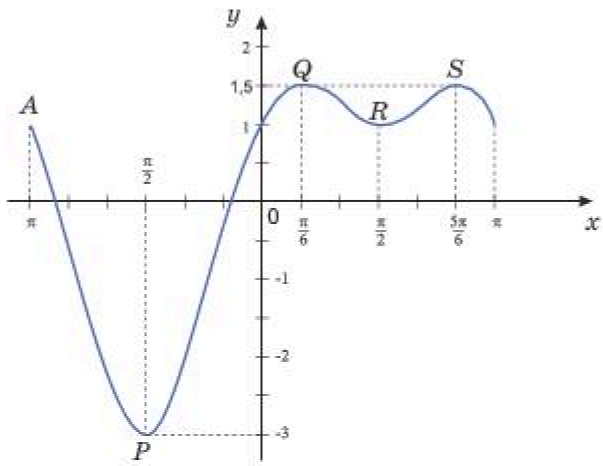
Ox өсімен қиылысуы: $f(x)$ функциясының нөлдері $2\sin x+\cos 2x=0$ теңдеуімен табылады. $\cos 2x=1-2\sin x^2$, $\sin x=t$ алмастыруларын енгізгеннен кейін $2t^2-2t-1=0$ теңдеуін аламыз. Оның түбірлері: $t=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$, $x=(-1)^n\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Мұндай түбірлерді Ox өсінде қалай белгілейміз? (Мүмкін емес!). Біздің мақсатымыз график салу, ал мұндай түбірлер бізге еш көмектеспейді.

8) Асимптоталары жоқ.

Айтпақшы, нөлге тең болмайтын периодты функциялардың көлбеу асимптоталары бола ма?

9) $E(f)=\left[-3;\dfrac{3}{2}\right]$. Графикті саламыз (11-сурет):



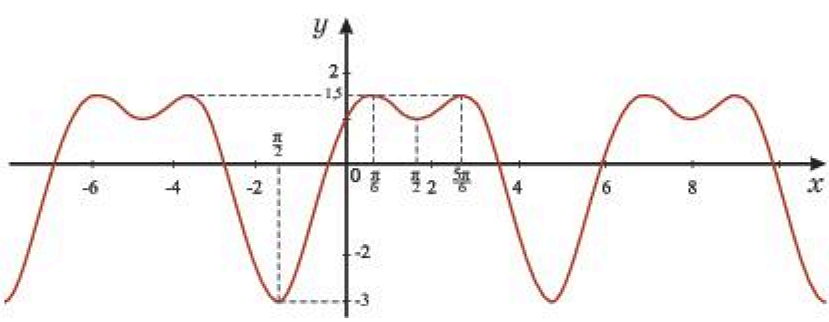
11-сурет

Сонымен бұл график мына жолмен салынады:

1. Нүктелер белгіленді: $A(-\pi;1)$, $B(0;1)$, $C(\pi,1)$.

2. Локальді экстремумға сәйкес нүктелер белгіленді:

$P\left(-\dfrac{\pi}{2};-3\right)$, $Q\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{3}{2}\right)$, $R\left(\dfrac{\pi}{2};1\right)$, $S\left(\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{3}{2}\right)$. $-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ кризистік нүктелеріндегі туынды нөлге тең. Демек, осы нүктелерде жанама горизонталь. Олай болса, P, Q, R және S нүктелерінен тұратын графиктің кішкентай бөліктері түзудің бөліктеріне ұқсас болады. Алдымен осы нүктелер арқылы кішкентай горизонталь түзулердің кесіндісін жүргіземіз, содан соң нүктелерді емес, осы кішкентай кесінділердің ұштарын бірқалыпты сызықпен қоса отырып, график сызамыз (12-сурет).



12-сурет

Есептер

1-бөлім

1. (2) $y=\dfrac{4}{x^2-1}$ функциясы берілген. Функцияның вертикаль асимптотасын табыңдар. Берілген параграфтың 5.1 пунктіндегі 9-суреттегідей етіп вертикаль асимптотаға жақын нүктелердегі функцияның нобайын графиктік түрде кескіндеңдер.

2. (3) а) $y=f(x)$ функциясын зерттеңдер және оның графигін салыңдар, мұндағы $f(x)=x^3-3x$.

ә) Салынған графикті пайдаланып $f(x)=g(x)$ теңдеуінің түбірлерінің санын анықтаңдар, мұндағы $g(x)=x-1$.

б) a параметрінің мәндеріне байланысты $x^3-3x=a$ теңдеуінің түбірлерінің санын анықтаңдар.

3. (3) а) $y=3+2x^2-x^4$ функциясын зерттеңдер және оның графигін салыңдар.

Дәл сол координаталық $y=0,5x+1$ функциясының графигін салыңдар. Салынған графикті қолданып, $3+2x^2-x^4=0,5x+1$ теңдеуінің түбірлерін мүмкіндігінше нақтырақ табыңдар.

4. (3) а) $y=\dfrac{8x}{x^2+4}$ функциясын зерттеңдер және оның графигін салыңдар.

ә) Дәл сол координаталық жазықтықта $y=\dfrac{x^2}{2}$ функциясының графигін салыңдар. $\dfrac{8x}{x^2+4}\geq\dfrac{x^2}{2}$ теңсіздігін график арқылы шешіңдер.

5. (3) а) $y=x+\dfrac{4}{x}$ функциясын зерттеңдер және оның графигін салыңдар.

ә) Дәл сол координаталық жазықтықта $x^2+y^2=36$ шеңберін салыңдар. Теңдеулер жүйесінің шешімдерінің санын анықтаңдар. $\begin{cases}x^2+y^2=36,\\ xy=x^2+4.\end{cases}$

6. а) $y=k\,(x-2)$, мұндағы k – кез келген сан, түріндегі түзулердің барлығы координатасы $(2;0)$ болатын нүкте арқылы өтетінін дәлелдеңдер. Түзудің орны k-ның оң және теріс мәндерінде қалай өзгереді? k-ның оң мәнінде $м$-ның мәні артса, $y=k(x-2)$ түзуі қалай өзгереді? k-ның теріс мәнінде k-ның мәні кемісе, $y=k(x-2)$ түзуі қалай өзгереді?

ә) $y=\dfrac{3x}{x^2-4}$ функциясының графигін салыңдар. Салынған графикке сүйене отырып, $\dfrac{3x}{x^2-4}=k(x-2)$ теңдеуінің k параметріне байланысты түбірлерінің санын анықтауға тырысыңдар.

7. (3) $x \to +\infty$, $f(x)=\dfrac{2x^3+32x^2+26x-57}{3(x^2+x-2)}$ функциясының графигінің асимптотасының теңдеуін анықтаңдар. Асимптотаның теңдеуін пайдаланып, $x=300$ нүктесіндегі $f(x)$ функциясының мәнін жуықтап табыңдар.

8. (4) $f(x)=4\cos\dfrac{x}{2}-2\cos x$ функциясын зерттеңдер және оның графигін салыңдар.

9. (3) $g(x)=x-2\sin x$ функциясы $x\in[-2\pi;2\pi]$ аралығында анықталған. $y=g(x)$ функциясын зерттеңдер және оның графигін салыңдар.

2-бөлім

10. (2) $y=\dfrac{-5-x}{x^2(x+3)}$ функциясы берілген. Функцияның вертикаль асимптотасының теңдеуін табыңдар. Берілген параграфтың 5.1 пунктіндегі 9-суреттегідей етіп вертикаль асимптотаға жақын нүктелердегі функцияның нобайын графиктік түрде кескіндеңдер.

11. (3) а) $y=f(x)$ функциясының және оның графигін салыңдар, мұндағы $f(x)=-x^3+2x^2-x$.

ә) Салынған графикті пайдаланып $f(x)=g(x)$ теңдеуінің түбірлерінің санын табыңдар, мұндағы $g(x)=x+5$.

б) a параметрінің мәндеріне байланысты $-x^3+2x^2-x=a$ теңдеуінің түбірлерінің санын анықтаңдар.

12. (3) а) $y=-x+2$ функциясын зерттеңдер және оның графигін салыңдар.
ә) Дәл сол координаталық жазықтыққа $y=-x+2$ функциясының графигін салыңдар. Салынған графикке сүйене отырып, мүмкіндігінше нақтырақ $x(x-2)^3=-x+2$ теңдеуінің түбірлерін табыңдар.

13. (3) а) $y=\dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$ функциясын зерттеңдер және оның графигін салыңдар.

ә) Дәл сол координаталық $y=x^2-2x-2$ функциясының графигін салыңдар. $\dfrac{6(x-1)}{x^2+3}\le x^2-2x-2$ теңсіздігін график арқылы шешіңдер.

14. (3) а) $y=\dfrac{9-x^2}{x}$ функциясының зерттеңдер және оның графигін салыңдар.

ә) Дәл сол координаталық жазықтықта $(x-6)^2+(y-6)^2=36$ функциясының графигін салыңдар. Теңдеулер жүйесінің шешімдерінің санын анықтаңдар. $\begin{cases}(x-6)^2+(y-6)^2=36,\\ xy=9-x^2.\end{cases}$

15. (4) а) $y=k(x+3)$, мұндағы k – кез келген сан, түріндегі түзулердің барлығы координатасы $(-3;0)$ болатын нүкте арқылы өтетінін дәлелдеңдер. Түзу орны k-ның оң және теріс мәндерінде қалай өзгереді? k-ның оң мәнінде k-ның мәні артса, $y=k(x-2)$ түзуі қалай өзгереді? k-ның теріс мәнінде k-ның мәні кемісе, $y=k(x-2)$ түзуі қалай өзгереді?

ә) $y=\dfrac{x^2}{9-x^2}$ функциясының графигін салыңдар. Салынған графикке сүйене отырып, $\dfrac{x^2}{9-x^2}=k(x+3)$ теңдеуінің k параметріне байланысты түбірлерінің санын анықтауға тырысыңдар.

16. (3) $x\to+\infty$, $f(x)=\dfrac{-5x^3+130x^2-245x+126}{6(x-1)^2}$ функциясының графигінің асимптотасының теңдеуін анықтаңдар. Асимптотаның теңдеуін пайдаланып, $x=60$ нүктесіндегі $f(x)$ функциясының мәнін жуықтап табыңдар.

17. (4) $f(x)=2\cos x+\sin 2x$ функциясын зерттеңдер және оның графигін салыңдар.

18. (3) $g(x)=2\cos x+x$ функциясы $x\in[-2\pi;2\pi]$ аралығында анықталған. $y=g(x)$ функциясы зерттеңдер және оның графигін салыңдар.

19. (4) 10 ә-сыныбында оқитын Қуаныш пен оның сол мектепте оқитын 8 досы жорыққа шықты. Кез келген 4 туристің арасында міндетті түрде сыныптастар бар екені анық, ал кез келген 5 адамның арасында 3-тен артық емес сыныптастар бар. 10 ә-сыныбынан жорыққа неше оқушы шыққанын табыңдар.

20. (3) Ардақ Алматыда тұрады, бірақ ол кәсіпкерлікпен Талдықорғанда айналысады. Оған кейде бір қаладан екіншісіне ақша жіберуге тура келеді. Ол оны екі түрлі тәсілмен жүзеге асыра алады: банк арқылы жіберсе, банк жіберген соманың $0{,}4\%$-ын ұстап қалады; екіншісі курьер арқылы, бұл жағдайда оған жол шығынына жіберген соманың мөл-

шеріне тәуелсіз, 12 000 теңге төлеуіне тура келеді. Банкке қарағанда курьер арқылы ақша жіберу тиімді болу үшін, Ардаққа қанша мөлшердегі сомадан бастап жіберген дұрыс екенін табыңдар.
A) 300000 тг; B) 4800001 тг; C) 480000 тг; D) 3000000 тг; E) 3000001 тг.

21. Z университетінің Y факультетінің X пәніне емтихан тапсырушылар саны жүз отыздан артық, бірақ жүз жетпістен кем екені белгілі. Олардың тура 64%-ы «3» деген баға алды. Емтихан тапсырған түлектер санын табыңдар.

22. (1) Теңдеуді шешіңдер: а) $0,6|x-0,3|=x^2+0,27$; ә) $|2-x|=5-4x$.

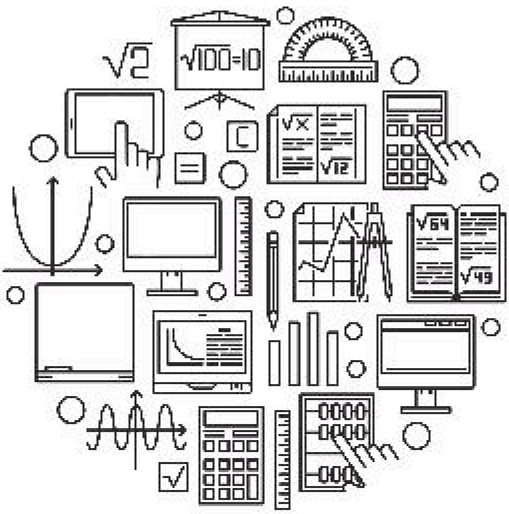
Жауаптары:

1. Вертикаль асимптоталардың теңдеулері: $x=-1$, $x=1$. **2.** ә) 3 түбір; б) $a<-2$ немесе $a>2$ теңдеудің бір түбірі бар, $a=\pm2$ болса, екі түбір, $-2<a<2$ болса, үш түбір. **4.** ә) $x\in[0;2]$. **5.** б) Жүйенің 4 шешімі бар. **6.** ә) $k>0$ теңдеудің үш түбірі $k\le0$ болса, бір түбірі бар. **7.** $x\to+\infty$ функция графигінің асимптотасы $y=\frac{2}{3}x+10$, түзуі болады, олай болса, айнымалының жеткілікті үлкен мәнінде, жуық шамамен $\frac{2x^3+32x^2+26x-57}{3(x^2+x-2)}\approx\frac{2}{3}x+10$, теңдігі орындалады, яғни $f(300)\approx\frac{2}{3}\cdot300+10=210$. **10.** Вертикаль асимптоталардың теңдеулері: $x=0$, $x=-3$. **11.** ә) бір түбір; б) $a<-\frac{4}{27}$ немесе $a>0$ болса, теңдеудің бір түбірі бар; $a=-\frac{4}{27}$ немесе $a=0$ екі түбірі; $-\frac{4}{27}<a<0$ үш түбір. **13.** ә) $x\in(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$. **14.** ә) екі шешім. **15.** ә) $k>0$ болса 3 түбірі бар, $k\le0$ болса бір түбірі бар. **16.** $x\to+\infty$ функция графигінің асимптотасы $y=-\frac{5}{6}x+20$ түзуі болады, $f(60)\approx-\frac{5}{6}\cdot60+20=-30$.

19. 3. **20.** E. **21.** 150. **22.** а) $x=-0,3$ ә) $x=1$.

7-тарау

КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ СИПАТТАМАСЫ



§1 ТАНЫСТЫРУ МЫСАЛДАРЫ

Бірнеше сандық шамаларды қарастырайық.

- X шамасы: ойын текшесін лақтыру нәтижесі.
- Y шамасы: автомобилдің нөмірінің цифрларының қосындысы.
- Z шамасы: кездейсоқ таңдап алынған бүтін санды 13-ке бөлгендегі қалдық.
- W шамасы: $\frac{p}{q}$ түріндегі бөлшектің мәні, мұндағы p және q сандары $\{1, 2, 3\}$ жиынынан кездейсоқ тәсілмен таңдап алынады.
- S шамасы: дартс ойынында нысананың дәл ортасы мен найзаның қадалған жеріне дейінгі дәлме-дәл арақашықтық.
- T шамасы: үйіңнен үйден мектепке дейінгі қозғалысыңның нақты уақыты.

X шамасы 1-ден 6-ға дейінгі кез келген мәнді қабылдай алады. Қазақстандағы автомобиль нөмірлері үш цифрдан тұратындықтан Y шамасы 1-ден 27-ге дейінгі мәндерді қабылдайды. Z шамасы қандай мәндер қабылдай алатынын өздерің ойланып көріңдер. W шамасы $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3\right\}$ жиынынан мәндер қабылдай алады. Егер дартс ойынындағы нысананың диаметрі, мысалы, 20 см-ге тең болса, онда дөңгелектеусіз сантиметрмен өрнектелген S шамасы 0-ден 20-ға дейінгі кез келген нақты сан болуы мүмкін. Егер сенің үйден мектепке дейінгі жүрген жолыңа кеткен уақыт 3 сағаттан аспайды, бірақ 5 минуттан кем емес деп болжасақ, онда T шамасы 5 минуттан 3 сағатқа дейінгі кез келген мәнді қабылдай алады, мысалы, $\sqrt{2}$ сағат.

Барлық аталған шамалар бір бақылау нәтижесінде қандай да бір нақты сандық мән қабылдайды, ол санды бақылау жасағанға дейін алдын-ала болжау мүмкін емес. Мұндай шамалар **кездейсоқ шамалар** деп аталады.

§2 ДИСКРЕТТІ ЖӘНЕ КЕЗДЕЙСОҚ ҮЗІЛІССІЗ ШАМАЛАР

1-АНЫҚТАМА.

Бақылау нәтижесінде бір және тек қана бір сандық мән қабылдай-тын, кездейсоқ факторлардан тәуелді және алдын-ала болжауға кел-мейтін шаманы кездейсоқ шама деп атайды.

Алғашқы X, Y, Z және W шамалары соңғы екі S және T шамаларынан ерекшеленеді. Алғашқы төрт шаманың әрқайсысы мәндердің ақырлы жиынын қабылдай алады, ал соңғы екеуінің әрқайсысының мәні белгілі бір аралықтағы кез келген нақты сандар бола алады. Сондықтан X, Y, Z және W шамалары дискретті кездейсоқ шамалар, ал S және T шамалары үзіліссіз **кездейсоқ шамалар** деп аталады.

2-АНЫҚТАМА.

Егер кездейсоқ шама белгілі бір ықтималдықпен ақырлы немесе саналымды жиындардың мәндерін қабылдайтын болса, онда бұл кездейсоқ шама **дискертті** деп аталады.

Егер ақырлы жиын жөнінде бәрі түсінікті болса, онда «Саналымды жиын дегеніміз не?» деген сұрақ туындайды. Егер жиын шексіз болса, бірақ оның элементтерін нөмірлеуге болатын болса, онда бұл жиын **саналымды жиын** деп аталады. Мысалы, қорытындысы 1-ге тең емес геометриялық прогрессияның барлық мүшелерінің жиыны – саналымды жиын. Барлық рационал сандардың жиыны неге саналымды жиын болатынын түсіну қиындау. Ол туралы https://kk.wikipedia.org/wiki/ рационал сандар парақшасынан оқи аласыңдар. Біз саналымды жиыннан мәндер қабылдай алатын кездейсоқ шамаларды қарастыратын боламыз.

3-АНЫҚТАМА.

Егер кездейсоқ шама ақырлы немесе шексіз аралықтағы барлық мәндерді қабылдайтын болса, онда ол үзіліссіз **кездейсоқ шама** деп аталады.

1 жаттығу

Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамаларға бірнеше мысалдар келтіріңдер.

1 мысал

Жаңбыр тамшылары ұзындығы 100 метр болатын түзу жүгіру жолағына түседі. Жеке алынған тамшының старттан а метрден үлкен емес қашықтыққа түсу ықтималдығы $P(a)$ қандай? Жолақтан тыс жерге түсетін тамшылар қарастырылмайды.

Шешу-талдау. Жүгіру жолағының ұзындығы 50 метр болатын бөлігіне ұзындығы 100 метр болатын жүгіру жолағының барлық жеріне түскен тамшыға қарағанда шамамен 2 есе аз тамшы түсетінін болжау қиын емес. Сондықтан, мысалы, $a=50$ болса, онда $P(a)=P(50)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$. Егер $a=25$ болса, онда ұзындығы 25 метрлік бөлігі барлық жүгіру жолағынан 4 есе кіші, сондықтан $P(a)=P(25)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$.

Ұзындығы a жүгіру жолағына 100-ден a неше есе кіші болса, сонша есе азырақ жаңбыр тамшысы тамады. Демек, $P(a)=\frac{a}{100}$.

Қазіргі жағдайда біз үзіліссіз кездейсоқ шаманың біркелкі таралуы деп аталатын мәселені қарастырамыз. Оны X деп атаймыз. Бақылау нәтижесінде – жүгіру жолағына тамшының түсуі – X шамасы жаңбыр тамшысы түскен жерден стартқа дейінгі арақашықтыққа тең мәнді қабылдайды. Үзіліссіз X кездейсоқ шамасы $(0;100)$ интервалында біркелкі таралған деп айтылады. Кез келген $(a;b)$ интервалында біркелкі таралу да осыған ұқсас анықталады. Нүкте $(a;b)$ интервалынан кездейсоқ таңдалады. Осындай сынақтың нәтижесінде X кездейсоқ шамасы нүктенің координатасына тең мән қабылдайды.

§3 ДИСКРЕТТІ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАНЫҢ СИПАТТАМАСЫ

Осы параграфты оқып-үйренуді мысал келтіруден бастайық.

1 мысал

«Алдаркөсе мен шайтан». Бір күні шайтан Алдаркөсеге мынадай ереже бойынша ойын ойнауды ұсынды: Алдаркөсе ойын тасын лақтырады. Егер «1», «2» немесе «3» түссе, онда шайтан оған 50 сникерс (50 Sn) береді; егер «4» немесе «5» сандары түссе, онда шайтан Алдаркөсеге 240 Sn береді; егер «6» түссе, онда Алдаркөсе шайтанға 666 Sn береді». Алдаркөсеге осындай ойынға келісу қажет пе? Өте көп мөлшерде n тас лақтырғаннан кейінгі, мысалы $n=6000$ болғанда, ойын нәтижесіне болжам жасап көріңдер («Шайтанның аты шайтан – онымен байланыспаған дұрыс», «шайтан ойын тасына қандай да бір әсер бере алуы мүмкін» деген тәрізді ойларды есеп шартына қоспау керек).

Шешу-талдау. $n=6000$ рет тас лақтырылды деп болжайық. Барлық қырларының түсу ықтималдығы бірдей. Сондықтан, өте көп мөлшерде лақтырған кезде «1» саны орташа алғанда алты жағдайдың біреуінде түседі, «2» саны да орташа алғанда алты жағдайдың біреуінде түседі және осылайша жалғаса береді.

Демек, $n=6000$ болғанда тастың әрбір қыры шамамен 1000 реттен түскен. Ойын шарты бойынша, егер «1», «2» немесе «3» түссе, онда шайтан Алдаркөсеге 50 сникерс (50 Sn) береді. «1», «2» және «3» нәтижелері барлық тең мүмкіндікті нәтижелер санының тура жартысына тең. Бұл дегеніміз – жағдайлардың шамамен жартысында Алдаркөсенің сникерстерінің саны 50-ге артты деген сөз. Осыған ұқсас, «4» және «5» нәтижелері де барлық тең мүмкіндікті нәтижелер санының үштен біріне тең. Бұл шамамен $\frac{1}{3}\cdot 6000$ рет Алдаркөсенің сникерстерінің саны 240-қа артты дегенді білдіреді. Сондай-ақ шамамен $\frac{1}{6}\cdot 6000$ рет Алдаркөсе шайтанға 666 сникерс береді. Қорытынды жасайық: Алдаркөсе шамамен 3000 рет 50 сникерстен, шамамен 2000 рет 240 сникерстен алды, шамамен 1000 рет 666 сникерстен берді. Барлығы шамамен $3000\cdot 50+2000\cdot 240+1000\cdot(-666)=-36000$ Sn болады.

Қорытынды: егер Алдаркөсе ойнауға келісетін болса, шамамен 6000 рет тас лақтырғаннан кейін шайтанға шамамен 36000 Sn қарыз болады.

2 мысал

Айлакер шайтан Алдаркөсені иландыруды жалғастырады: «Құрметтім! 6000 рет ойнағың келмесе 6000 рет ойнамай-ақ қой. Кел, осы шарттармен жоқ дегенде бір рет ойын тасын лақтырып көрейік. Жақсылап ойлан. Бір рет лақтырғанда алтылықтың түсе қоюы екіталай. Алты саны басқа қырларына қарағандай әлдеқайда сирек түседі». Алдар келіссін бе?

Шешуі. Келіспесін. Егер 6000 рет лақтырғанда «ұтыс» –36000 Sn-ті құраса, онда бір рет лақтырғандағы «ұтыс» орташа алғанда $\frac{-36000}{6000}=-6$ сникерсті құрайды.

$3000\cdot 50+2000\cdot 240+1000\cdot(-666)=-36000$ теңдігін мұқият қарап шығайық.

Теңдіктің екі жағын да тасты лақтыру санына 6000-ға бөлейік:

$$\frac{3000}{6000}\cdot 50+\frac{2000}{6000}\cdot 240+\frac{1000}{6000}\cdot(-666)=-\frac{36000}{6000},$$

$$\frac{1}{2}\cdot 50+\frac{1}{3}\cdot 240+\frac{1}{6}\cdot(-666)=-6.$$

Сосын 50, 240 және 666 сандары Алдаркөсенің мүмкін болатын ұтыстарына тең болса, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ және $\frac{1}{6}$ сандары сәйкесінше осы ұтыстар түсетін ықтималдыққа тең.

1 жаттығу

Алдаркөсеге 50, 240 немесе –666 сандарының біреуін шайтанға қарсы ойында өз мүмкіндіктерін теңестіретіндей санға алмастыруға көмектес. Фольклорлық кейіпкерлерден арылып, 1-мысалды белгілі математикалық терминдермен айтайық. Алдаркөсенің мүмкін болатын ұтысын X шамасы деп атайық. X дискретті кездейсоқ шама болып табылатыны белгілі. Шамамен мынадай мәтін алынады: Біршама сынақтың нәтижесінде X шамасы кездейсоқ түрде $\frac{1}{2}$ ықтималдықпен 50 мәнін, $\frac{1}{3}$ ықтималдықпен 240 мәнін, $\frac{1}{6}$ ықтималдықпен –666 мәнін қабылдайды. Сынақтың өте көп мөлшерінде X шамасының орташа мәні нешеге тең болады? 2-мысалды қарастыра отырып, біз бұл сұраққа жауап бердік: X шамасының орташа мәні –6-ға тең. Қазір ғана тұжырымдалған есептің шартын кесте түрінде жинақы және көрнекі етіп жазуға болады болады:

x_i	50	240	–666
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Мұндай кесте X кездейсоқ шамасын таралу қатары немесе **таралу кестесі** деп аталады. X шамасының орташа мәні өте көп мөлшерде сынақ жасалған кезде X кездейсоқ шамасының **математикалық күтім** деп аталады. «Ал\даркөсе мен шайтан» мысалында «1», «2» және «3» нәтижелеріне 50 саны, «4» және «5» нәтижелеріне 240, және де «6» нәтижесіне –666 саны сәйкестендіріледі. Кездейсоқ шамаларға тағы да бірнеше мысал келтірейік:

- автомобиль нөмірлері цифрларының қосындысы;
- ақшамен көрсетілген лоторея билетінің ұтысы;
- тиын лақтырған кезде 0 саны «елтаңба» жағына және 1 саны «цифр» жағына сәйкестендіріледі;
- сыныптағы әрбір оқушының тоқсан бойынша алған бағаларының арифметикалық орталары.

1-АНЫҚТАМА.

Кездейсоқ шама мен ықтималдықтың мәндері арасындағы тәуелділікті көрсететін кез келген қатынас кездейсоқ шаманың **таралу заңы** деп аталады.

Біз осындай тәуелділікті көрсетудің бір ғана тәсілін қарастыратын боламыз: «Алдаркөсе мен шайтан» мысалында жасаған кестемізге ұқсас таралу кестесі.

2-АНЫҚТАМА.

Қандай да бір сынақтың қарапайым нәтижелер жиынында X кездейсоқ шамасы берілсін делік. Ол ықтималдығы p_1, p_2, p_3 және т.б. болатын сәйкесінше x_1, x_2, x_3 және т.б. мүмкін болатын мәндердің бірін қабылдайды. Ықтималдығы көрсетілетін және оның әрқайсысынан X кездейсоқ шамасы әрбір өз мәнін қабылдайтын кесте X кездейсоқ шамасының **таралу кестесі** деп аталады.

Таралу кестесі төмендегідей түрде болады:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Таралу кестесінің анықтамасынан қарапайым нәтижелердің барлығы қарастырылатыны, яғни кестедегі барлық ықтималдықтардың қосындысы $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ бірге тең болатындығы шығады.

3-АНЫҚТАМА.

$M(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ формуласы бойынша есептелетін $M(X)$ саны X кездейсоқ шамасының **математикалық күтімі** деп аталады.

«Ашып көрсетілген» түрінде $M(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ формуласы төмендегідей болады:

$$M(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_n x_n .$$

Математикалық болжамның мәні – сынақтар өте көп жасалған кезде X шамасының орташа мәнін көрсететіндігі(«Aldar-Khose and the Devil» мысалын тағы бір рет қараңдар).

4-АНЫҚТАМА.

$D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - a)^2$ формуласы бойынша есептелген $D(X)$ саны X кездейсоқ шамасының **дисперсиясы** деп аталады, мұндағы $a = M(X)$.

$D(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-a)^2$ жазбасы,

$D(X)=p_1(x_1-a)^2+p_2(x_2-a)^2+p_3(x_3-a)^2+\ldots+p_n(x_n-a)^2$ екендігін білдіреді.

X кездейсоқ шамасының негізінде жаңа $Y=(X-a)^2$ кездейсоқ шамасын анықтаймыз, мұндағы $a-X$ шамасының $M(X)$ математикалық болжамы. Бұл дегеніміз, егер сынақ нәтижесінде X шамасы x_i мәнін қабылдаса, онда Y шамасы $y_i=(x_i-a)^2$ мәнін қабылдайды. Y шамасының таралу кестесін құрайық:

y_i	$(x_1-a)^2$	$(x_2-a)^2$	$(x_3-a)^2$	...	$(x_n-a)^2$
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

$D(X)=p_1(x_1-a)^2+p_2(x_2-a)^2+p_3(x_3-a)^2+\ldots+p_n(x_n-a)^2$ формуласын мұқият қарап, оны математикалық болжамның анықтамасымен салыстырайық:

$M(X)=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\ldots+p_nx_n$.

Шындығында, $D(X)$ дисперсиясы $Y=(X-a)^2$ шамасының математикалық болжамы болатынын байқау қиын емес:

$$D(X)=M\left((X-a)^2\right).$$

Екінші жағынан, $y_i=(x_i-a)^2$ шамасы X кездейсоқ шамасының a орташа мәнінен берілген x_i мәнінің қаншалықты «алшақ» екендігін көрсетеді. Енді x_i мәні жиынтығында өзінің орташа $M(X)$ мәніне қаншалықты жақын болса, дисперсия мәні $D(X)$ соншалықты кіші болатыны көрініп тұр. Дисперсия кездейсоқ шама мәндерінің өзінің математикалық болжамының айналасында шашырау деңгейін сипаттайды.

$D(X)$ дисперсия төмендегі формула бойынша есептелінеді:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X).$$

$n=3$ үшін осы формуланы дәлелдейік. $a=M(x)=p_1x_1+p_2x_2+p_2x_2$ и $p_1+p_2+p_3=1$ екенін алдын ала байқаймыз. Демек,

$$D(X)=p_1(x_1-a)^2+p_2(x_2-a)^2+p_3(x_3-a)^2=$$

$$=p_1(x_1^2-2x_1a+a^2)+p_2(x_2^2-2x_2a+a^2)+p_3(x_3^2-2x_3a+a^2)=$$

$$=p_1(x_1)^2+p_2(x_2)^2+p_3(x_3)^2-2a(p_1x_1+p_2x_2+p_2x_2)+a^2(p_1+p_2+p_3)=$$

$$=M(X^2)-2a\cdot a+a^2=M(X^2)-a^2=M(X^2)-M^2(X).$$

Бұл формула n-нің басқа да мәндері үшін осыған ұқсас дәлелденеді.

5-АНЫҚТАМА.

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ формуласы бойынша есептелген $\sigma(X)$ шамасы X кездейсоқ шамасының орташа **квадраттық ауытқуы** деп аталады.

Орташа квадраттық ауытқу, сонымен қатар кездейсоқ шама мәндерінің өзінің математикалық болжамының төңірегінде шашырау деңгейін сипаттайды. Алайда оның дисперсиядан артықшылығы – мұнда шашырау деңгейі кездейсоқ шаманың өлшем бірлігіндегідей бірлікпен сипатталады.

Y кездейсоқ шамасының берілген таралу кестесі бойынша оның математикалық болжамын, дисперсиясын және орташа квадраттық ауытқуын есептеңдер.

y_i	10	15	20	30	40
p_i	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

Шешуі. $M(Y)=p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3+p_4y_4+p_5y_5=$

$=0,1\cdot10+0,3\cdot15+0,2\cdot20+0,3\cdot30+0,1\cdot40=22,5$.

$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)$ формуласы бойынша дисперсияны есептейміз.

Y^2 шамасының таралу кестесін құрайық:

y_i^2	100	225	400	900	1600
p_i	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

Y шамасы квадратының математикалық болжамы $M(Y^2)$:

$M(Y^2)=p_1y_1^2+p_2y_2^2+p_3y_3^2+p_4y_4^2+p_5y_5^2=$

$=0,1\cdot100+0,3\cdot225+0,2\cdot400+0,3\cdot900+0,1\cdot1600=587,5$.

Дисперсия: $D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=587,5-(22,5)^2=81,25$.

Орташа квадраттық ауытқу $\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{81,25}\approx 9,01388$.

4 мысал Мерген нысанаға 3 рет атты. Әр атқан кездегі нысанаға оқтың тию ықтималдығы 0,8-ге тең. Әрбір жолы нысанаға тиген сайын 10 ұпай ала алады. Алған ұпайлардың санының бөліну заңдылығын табыңдар, математикалық күтімін және дисперсиясын табыңдар.

Шешуі: 3 атыстан тұратын атыс нәтижесі бойынша 0-ден 3-ке дейін тигізе алады. Енді әрбір тигізу санына сәйкес қандай ықтималдықтар болуы мүмкін екенін түсіндірейік. A_1, A_2, A_3 сәйкес бірінші, екінші және үшінші атыс кезіндегі тигізу оқиғалары болсын.

Онда $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ – сәйкес атыстар кезіндегі тимеу оқиғаларын білдірсін. Шарт бойынша $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=0,8$ олай болса $P(\overline{A_1})=P(\overline{A_2})=P(\overline{A_3})=1-0,8=0,2$. Мысалы $\overline{A_1A_2A_3}$ – үш ретінде де тигізбейді деген оқиғаға сәйкес келеді, ал $A_1\overline{A_2A_3}$ оқиғасы 1-ші ретте тиді, екінші, үшінші ретте мүлт кету оқиғасына сәйкес келеді. Сол сияқты $A_1\overline{A_2}A_3$. Оқиғаны 2-ші ретте мүлт кету, бірінші және үшінші атуда тигізді оқиғасына сәйкес келеді. Барлық A_1, A_2, A_3 үш оқиға өзара тәуелсіз, сондықтан атқыштың үш ретінде де мүлт кету ықтималдығы

$P(\overline{A_1A_2A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=0,2^3=0,008$. Сол сияқты,

$P(A_1\overline{A_2A_3})=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=0,8\cdot 0,2^2=0,032$,

$P(A_1\overline{A_2}A_3)=P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)=0,8^2\cdot 0,2=0,128$ және т.с.с.

Кесте құрамыз

Дәл тигізу саны	0	1	2	3
Ұпайлар саны	0	10	20	30
Сәйкес элементар оқиғалар	$\overline{A_1A_2A_3}$	$\overline{A_1A_2}A_3$, $A_1\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$	$\overline{A_1}A_2A_3$, $A_1\overline{A_2}A_3$, $A_1A_2A_3$	$A_1A_2A_3$
Әр оқиғаның ықтималдығы	$0,2^3$	$0,8\cdot 0,2^2$	$0,8^2\cdot 0,2$	$0,8^3$
Ықтималдықтардың қосындысы	$0,2^3$	$3\cdot 0,8\cdot 0,2^2$	$3\cdot 0,8^2\cdot 0,2$	$0,8^3$

Ары қарай, X кездейсоқ шамасының үлестірімінің кестесін аламыз:

x_i	0	10	20	30
p_i	0,008	0,096	0,384	0,512

Математикалық күтім және дисперсияны 3-мысал бойынша есептейміз. Есеп шешілді.

Зерттеуге арналған есеп. *Сауытта k ақ және 1 қара шар жатыр, сондай-ақ $k \geq 2$ және $l \geq 1$. Бір рет алғанда шамамен m шар алады, $2 \leq m \leq k+l$. Y кездейсоқ шамасы деп алынған шарлардың ішіндегі ақ шарлардың санын айтамыз. Y шамасының таралу қатарын жасаңдар. Зерттеуге арналған жоспар ретінде келесі жоспарды пайдалануға болады. Осы параграфтан кейінгі 5-есепті де қараңдар.*

а) $k=2$, $l=2$, $m=2$; ә) $k=2$, $l=3$, $m=2$; б) $m=2$ болғанда кез келген k және l үшін; в) көбірек ортақ нәтижеге қол жеткізуге ұмтылып, басқа да жағдайларды қарастырыңдар.

Есептер

1-бөлім

1. (2) 1-інші және 2-нші мергеннің атып алған ұпайларының саны – X және кездейсоқ шамаларының таралу заңы белгілі

X:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

Y:

x_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_j	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

$M(X)$ және $M(Y)$-ті есептеңдер.

2. (2) Алдыңғы есептегі әрбір мергеннің атып алған ұпайлары санының дисперсиясын және орташа квадраттық ауытқуын есептеңдер.

3. (1) Арифметикалық прогрессияның бірінші мүшесі -10-ға, ал айырымы Z-ке тең. Ойын сүйегі лақтырылады. Z кездейсоқ шамасы нөмірі ойын сүйегінде түскен ұпайға тең арифметикалық прогрессияның мүшесінің мәнін қабылдайды. Z шамасының математикалық күтімін, дисперсиясын және орташа квадраттық ауықтқуын табыңдар.

4. (2) Нүкте тәуекелмен $(5;17)$ аралығына тасталады. Нүктенің келесі жиындарға түсу ықтималдығы қандай:

а) $(5;7)$; ә) $(7;11)$; б) $(7;11)\cup(14;17)$; в) қайсысы $-x^2+23x-130 \geq 0$ теңсіздігінің шешімі болады?

5. (3) Сауытта 2 қызыл және бір жасыл доп бар. Шамамен кері қайтарылмайтын 2 шар алынады. Алынған қызыл доптардың санын Y кездейсоқ шамасы деп алайық. Y кездейсоқ шамасының таралу кестесін әзірлеңдер.

6. Сауытта 6 ақ және 4 қара шар бар. Сауыттан қатарынан 5 рет шар алынады, сонымен қоса әрбір алынған шар сауытқа қайтадан салынады да, шарлар араласып кетеді. X кездейсоқ шамасын сауыттан алынған ақ шарлардың саны ретінде қабылдап, X шамасының таралу заңын әзірлеңдер, оның математикалық болжамы мен дисперсиясын анықтаңдар.

2-бөлім

7. (2) X кездейсоқ шамасы – таза ұтыс үшін $M(X)$ есептеңдер.

x_i	-7	193	243	4993
p_i	0,990	0,005	0,004	0,001

8. (2) Геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі 8-ге, ал еселігі 0,5-ке тең. Ойын сүйегі лақтырылады. Z кездейсоқ шамасы нөмірі ойын сүйегінде түскен ұпайға тең геометриялық прогрессияның мүшесінің мәнін қабылдайды. Z шамасының математикалық күтімін, дисперсиясын және орташа квадраттық ауықтқуын табыңдар.

9. (2) X кездейсоқ шамасы таралу қатарымен сипатталады:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Математикалық болжамын анықтаңдар.

10. (2) Алдыңғы есептегі дисперсия мен орташа квадраттық ауытқуын есептеңдер.

11. (3) Нүкте шамамен $(a;b)$ интервалына тасталады. Нүктенің $(c;d)$ жиынына түсу ықтималдығы қандай, мұндағы
а) $a \le c \le d \le b$; ә) $c \le a \le d \le b$; б) $c \le a \le b \le d$.

12. (4) Сынақ үш мәрте тиын лақтырудан тұрады. Z кездейсоқ шамасы «бүркіт» жағының түсу санына тең мәнді қабылдайды. Z шамасының таралу қатарын әзірлеңдер, оның математикалық болжамы мен дисперсиясын табыңдар.

13. (3) Теңдеуді шешіңдер: $\cos x - \cos 3x = \cos 2x - \cos 4x$.

14. (3) Егер қандай да бір екі таңбалы санды оның цифрларының көбейтіндісіне бөлсек, бөліндісі 3-ке тең болады және 9 қалдық қалады. Егер осы санның цифрларының квадраттарының қосындысына осы цифрлардың көбейтіндісін қосатын болсақ, ізделініп отырған сан шығады. Осы санды табыңдар.

15. (3) Келесі тізбекті *Қ* – қызыл, *Ж* – жасыл, *С* – сары, *К* – көк, *А* – ақ түсті білдіреді. Егер тізбекті жалғастыратын болсақ, келесі түс қандай болады?
К К Қ К К Қ А К Қ А Ж К Қ А Ж С К Қ К Қ А К Қ А

16. (3) Қоймада үлкен және кішкентай қораптар бар. Кішкентай қорапқа бір доп, үлкен қорапқа екі доп сияды. 13 допты қораптарға 9 қорап бос қалатындай етіп салу керек. 10 допты қораптарға 6 қорап бос қалатындай етіп салу керек. Қоймада неше қорап бар?

Жауаптары

1. $M(X)=5{,}36$; $M(Y)=5{,}36$.

2. $D(X)=13{,}61$; $D(Y)=4{,}17$; $\sigma_x=\sqrt{D(X)}=3{,}69$; $\sigma_y=\sqrt{D(Y)}=2{,}04$.

3. $M(Z)=2{,}5$, $D(Z)=72{,}91667$, $M(Z)=2{,}625$.

4. а) $\frac{1}{6}$; ә) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{7}{12}$; в) $0{,}25$.

5.

y_j	1	2
p_i	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

6.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,010	0,077	0,230	0,346	0,259	0,078

$M(X)=3{,}00$; $D(X)=1{,}20$.

7. $M(X)=0$. **8.** $M(Z)=2{,}625$, $D(Z)=7{,}328125$, $\sigma(Z)=2{,}707$.

9. $M(X)=1{,}32$. **10.** $D(X)=0{,}8976$; $\sigma_x=0{,}95$. **11.** а) $\frac{d-c}{b-a}$; ә) $\frac{d-a}{b-a}$; б) 1.

13. $x=\pi n, x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$. **14.** 63.

15. Жасыл.
Шешуі:
К/КҚ/ҚКА/ККАЖ/КҚАЖС/КҚ/ККА/ККАЖ/КҚАЖС.

16. Нұсқау. Есептің шарты бойынша 13 допты қораптарға салу үшін ең аз дегенде 7 қорап керек.

ҚАЙТАЛАУ

«Математика курсының кез келген басқа пәндер тәрізді жалпы білім берудегі мәні, ең алдымен оның беретін жалпы түсініктерінде және оның ой-өрісті кеңейтуінде, адамдардың тіршілік құбылыстарына ықпал ету тәсілдерінде жатыр. Осындай көзқарас тұрғысынан математика, біріншіден, өзінің логикасымен, тұжырымдарының реттілігімен және нақтылығымен маңызды. Екіншіден, математика қиындығымен пайдалы. Оның абстрактылы қатаң пайымдаулары үлкен және ұзақ уақыт ойлануға ақыл-ой күшін талап етеді, соншалықты есте сақтауды ғана емес, түсіну мен ой жүгірте білуді талап етеді.»

А.Д. Александров

1 топтама

Мұғаліммен істелетін жұмыс **А** әрпімен, үй жұмысы – **Ә** әрпімен белгіленген.

1. $y=f(x)$ функциясының туындысын табыңдар.

А. $y=x^2\mathrm{tg}2x$.

Ә. $f(x)=(x+1)^4(x-2)^3$.

2. Қарапайым түрлендірулердің көмегімен функцияның графигін салыңдар. Әр функция үшін анықталу облысын, мәндер жиынын, бірсарындылық аралығын көрсетіңдер.

А. $y=-(x+3)^2+9$.

Ә. $y=\left|\left|x-2\right|-1\right|$.

3. Теңдеуді шешіңдер.

А. $\cos\frac{\pi}{3}\sin 5x+\sin\frac{\pi}{3}\cos 5x=-\frac{1}{2}$;

Ә. $-\sin 7x\cos x=\sin 6x$.

4. Теңдеулер жүйесін шешіңдер.

А. $\begin{cases}\sin x=\cos y=1,\\ \sin^2 x-\cos^2 x=1;\end{cases}$

Ә. $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{4},\\ \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y=\frac{1}{6}.\end{cases}$

5. Теңдеуді шешіңдер.

А. $\cos(\arccos(x+2))=x^2$;

Ә. $\sin(\arcsin(4x-1))=3x^2$.

6. А. $y=f(x)$ функциясы графигінің $y=6x^2-5x+1$ абсцисса өсімен қиылысу нүктелерінде жүргізілген жанаманың теңдеуін табыңдар.

Ә. $y=f(x)$ функциясының графигінің координаттар өсімен қиылысу нүктесінде $y=3x^3+2x+5$ осы графикке жүргізілген жанаманың теңдеуін табыңдар.

7. А. Акцияның бағасы алдымен 20%-ға төмендеді, кейіннен 20%-ға артты. Бастапқы бағамен салыстырғанда акцияның бағасы қанша пайызға өзгерді?

Ә. Акцияның бағасы алдымен 40%-ға төмендеді, кейіннен 40%-ға артты. Бастапқы бағамен салыстырғанда акцияның бағасы қанша пайызға өзгерді?

8. Функцияның мәндер облысын табыңдар.

А. $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-5;$ Ә. $y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1.$

2 топтама

1. Функцияның туындысын табыңдар.

А. $f(x)=\cos^3 2x-x^4+\frac{1}{x^2+x}+2\sqrt{x};$ Ә. $y=\sin^3 x^5.$

2. Функцияның тақ және жұп болуын зерттеңдер.

А. $f(x)=\frac{x+1}{x-1};$ Ә. $g(x)=\sin 2x+x^3.$

3. $y=f(x)$ функциясының графигіне x_0 абсцисса нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар.

А. $y=\frac{x^3+1}{3},\ x_0=-1.$ Ә. $y=x\cos x,\ x_0=\frac{\pi}{2}.$

4. Теңдеулерді шешіңдер.

А. $\cos 2x+\sqrt{2}\sin x=1;$ Ә. $6\cos^2 x-5\sin x+5=0.$

5. А. Хайуанаттар бағындағы ұзындығы 100 м арқан кесіндісімен аңдарға арналған қашаны қоршайды. Оның пішіні тең бүйірлі үшбұрыш тәрізді, павильонның қабырғасы оның табаны бола алады. Үшбұрыштың ауданы ең үлкен болуы үшін оның табанын қандай етіп таңдап алу керек?

Ә. Көлемі 32 м³ ашық хауыздың түбі квадрат тәрізді, оның табаны мен қабырғаларын қаптауға ең аз мөлшерде материал жұмсалады. Осы хауыздың өлшемдерін табыңдар.

6. $f(x)$ функциясы графигінің x_0 үзіліс нүктесі аймағындағы сызбалық үзіндісін кескіндеңдер (осындай функцияға мысал келтіріңдер), егер:

А. $x_0=2,\ \lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=4;$ Ә. $x_0=1,\ \lim\limits_{x\to -0} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to +0} f(x)=0.$

7. Функцияның ең кіші оң периодын табыңдар.

А. $y=\mathrm{tg}\,4x;$ Ә. $y=\mathrm{ctg}\frac{x}{3}.$

8. А. $1, 2, 3, 4, 5$ цифрларынан қанша бес таңбалы сан құрастыруға болады, егер сандағы цифр қайталанбауы қажет болса.

Ә. Жарысқа 4 команда қатысты. Олардың арасында орындарды үлестірудің неше нұсқасы бар?

3 топтама

1. Функцияның туындысын табыңдар.

А. $y = \sin(4x-1)^2$; Ә. $f(x) = \sqrt{\mathrm{ctg}x \cdot \sin\frac{x}{2}}$.

2. Функцияның жұп немесе тақ болуын зерттеңдер.

А. $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + |x| + 3}{x^2 - 1}$; Ә. $g(x) = \sin x \cos 3x \cos 4x$.

3. $y = f(x)$ функциясының графигіне x_0 абсцисса нүктесінде жүргізілген жанама көлбеулігінің тангенсін табыңдар.

А. $y = 1 - \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$; Ә. $y = x^2\cos x$, $x_0 = 1$.

4. Жүйені шешіңдер:

А. $\begin{cases} \cos x > -\frac{1}{2}, \\ \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ Ә. $\begin{cases} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

5. А. Тіктөртбұрыштың периметрі 12 м-ге тең. Оның ауданы ең үлкен болуы үшін қабырғаларының ұзындығы қандай болуы тиіс?
Ә. Ауданы 100 м^2 болатын барлық тіктөртбұрыштардың ішінен периметрі ең кішісін табыңдар.

6. Табыңдар:

А. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3}{1+5x^2} + \frac{1-3x^2}{3x+1}\right)$; Ә. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1-2} - \frac{12}{x^3-8}\right)$.

7. Функцияның ең кіші оң периодын табыңдар:

А. $y = \sin 4x \cos x - \cos 4x \sin x$; Ә. $y = \cos 5x \cos 3x + \sin 5x \sin 3x$.

8. А. Екінші сыныптың оқушылары 8 пәннен сабақ өтеді. Бір күнде әртүрлі 4 пән болатындай етіп бір күнгі сабақ кестесін неше тәсілмен қоюға болады?
Ә. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 цифрларының көмегімен неше үш таңбалы сан жазуға болады (санның жазылуында цифрлар қайталанбайды)?

4 топтама

1. Функцияның жұп немесе тақ болуын зерттеңдер:

А. $f(x) = x^5 + 2x^3$; Ә. $f(x) = 2x^3 - x|x|$.

2. Берілген аралықта функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

А. $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3, [-2; 2]$; Ә. $f(x) = 4x + \frac{1}{\sqrt{x}} - 3, \left[\frac{1}{9}; 1\right]$.

3. Теңдеуді шешіңдер:

А. $\sin 3x = \sin x$;

Ә. $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x$, теңдеуінің $\left[-\pi; \frac{7\pi}{6}\right]$ аралығындағы түбірлерінің санын табыңдар.

4. Теңсіздіктің берілген аралыққа тиісті шешімін табыңдар:

А. $\sin x \geq \frac{1}{2}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right)$; Ә. $\cos\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

5. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

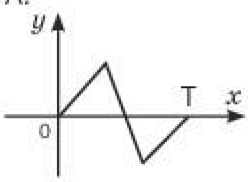
А. $y = \arcsin\left(x^2 + x - 1\right)$; Ә. $y = \arccos\left(\sqrt{2 - x}\right)$.

6. А. Қайықтың жағалауға жақын A нүктесінен 3 км қашықтықта тұр. Қайықтағы жолаушы A ауылынан 5 км қашықтықта көл жағасында орналасқан B ауылына баруды көздейді (AB бөлігін түзу сызықты деп есептейміз). Қайық 4 км/сағ жылдамдықпен қозғалады. Жолаушы қайықтан түсіп, 5 км-ге бір сағатта жаяу жете алады. Жолаушы ең аз уақыт ішінде ауылға жетуі үшін қайық жағалаудың қай нүктесіне тоқтауы тиіс?

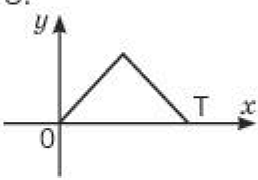
Ә. Бұрғылау мұнарасы тас жолға ең жақын нүктеден 9 км қашықтықта жазық жерде орналасқан. Бұрғылау орнынан 15 км жерде тас жолда орналасқан ауылға атшабар жіберу керек (тас жол түзу сызықты деп есептейміз). Атшабардың жазық жермен велосипедпен жүргендегі жылдамдығы 8 км/сағ, ал тас жолмен 10 км/сағ. Ауылға аз уақыт ішінде жеткі үшін тас жолдың қай нүктесіне баруы керек?

7. Суретті периоды T болатын функция графигінің бөлігі суреттелген. Осы графиктің $[-T; 2T]$ аралығындағы жалғасын сызыңдар. Берілген функция жұп немесе тақ функция бола ма?

А.



Ә.



8. А. Ғарыш кемесінің экипажын құру кешінде кеме командирінің орнына 10, бортинженердің орнына 20, ғарышкер-зерттеушінің орнына 25 үміткер болды. Үміткерлердің ешқайсысы бір мезетте екі орынға таласа алмайды. Командирге, не бортинженерге, не ғарышкер зерттеушіге үміткерлердің ішінен неше тәсілмен біреуін таңдап алуға болады?

Ә. Ондық санау жүйесінде екі таңбалы сандардың нешеуін жазуға болады?

5 топтама

1. $y=f(x)$ функциясының туындысын табыңдар:

   А. $y=(2x+1)^{10}$; Ә. $f(x)=\sqrt{3x-7}$.

2. Қарапайым түрлендірулердің көмегімен функция графигін салыңдар:

   А. $y=-x^2+4|x|+5$; Ә. $y=\cos 2x+1$.

3. Теңдеуді шешіңдер: А. $\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}=1$; Ә. $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-2=0$.

4. Теңсіздікті шешіңдер:

   А. $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$; Ә. $-4\sin 2x\cos 2x\geq\sqrt{2}$.

5. Теңдеуді шешіңдер:

   А. $(\mathrm{arcctg}x)^2-6\mathrm{arcctg}x+8=0$; Ә. $2(\mathrm{arcctg}x)^2-5\mathrm{arctg}x+2=0$.

6. Функцияның шегін табыңдар. А. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x^2+4}$; Ә. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+2}{x^2+1}$.

7. Функция үзіліссіз болып табыла ма? Анықтаңдар:

   А. $x_0=1$ нүктесінде $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$; Ә. $x_0=-2$ нүктесінде $f(x)=\frac{2+x}{2-x}$.

8. Функцияның анықталу облысын табыңдар: А. $y=\mathrm{ctg}3x$; Ә. $y=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

6 топтама

1. Шектерді табыңдар:

   А. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-7x}$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+5x^2-7x+1}{2x^2+3x-5}$; Ә. $\lim\limits_{x\to 17}\frac{4-\sqrt{x-1}}{x^2-17x}$, $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^3+4x^2-x-2}{3x^2+7x+2}$.

2. Қарапайым түрлендірулердің көмегімен функцияның графигін салыңдар:

   А. $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; Ә. $y=-\left|\frac{3}{x+1}\right|$.

3. Функцияның өсу және кему аралықтарын табыңдар:

   А. $y=x^3+x^2-16x-2$; Ә. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

4. Теңдеуді шешіңдер: А. $3\cos^2 x-\sin 2x-\sin^2 x=0$; Ә. $5\cos x+2\sin x=3$.

5. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

   А. $\begin{cases}\cos x+\cos y=\sqrt{3},\\ x+y=\frac{\pi}{3};\end{cases}$ Ә. $\begin{cases}x+y=\frac{7\pi}{3},\\ \sin^2 x+\sin^2 y=\frac{3}{2}.\end{cases}$

6. Есептеңдер:

А. $\sin\left(2\arccos\frac{12}{13}\right)$; Ә. $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{13}\right)$.

7. А. 18 санын екі оң қосылғыштың қосындысы түрінде жазыңдар, олардың квадраттарының қосындысы ең кіші болсын.

Ә. 12 санын екі қосылғыштың қосындысы түрінде жазыңдар, олардың кубтарының қосындысы ең кіші болсын.

8. Шектерді есептеңдер:

А. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$; Ә. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+2}$.

7 топтама

1. Функция үзіліссіз болып табыла ма? Анықтаңдар:

А. $x_0=-1$ нүктесінде $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{егер } x\le-1,\\ 3x+4, & \text{егер } x\ge-1.\end{cases}$

Ә. $x_0=1$ нүктесінде $g(x)=\begin{cases}2x-3, & \text{егер } x<1,\\ x^2-2, & \text{егер } x\ge1.\end{cases}$

2. Функция графигін салыңдар: А. $y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$; Ә. $y=2\cos\frac{x}{2}$.

3. Есептеңдер: А. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; Ә. $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4. Функцияның туындысын табыңдар: А. $y=\sin^3 2x$; Ә. $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x-2}$.

5. Функцияның экстремум нүктелерін табыңдар:

А. $f(x)=x+\cos x$; Ә. $f(x)=2-x+\sin x$.

6. А. 15 адамнан тұратын саяхатшылар тобынан 3 кезекшіні таңдап алу керек. Бұл таңдауды неше тәсілмен жасауға болады?

Ә. Ішіне 9 алма, 6 алмұрт салынған ыдыстан 3 алма және 2 алмұрт таңдап алу керек. Мұндай таңдауды неше тәсілмен жасауға болады?

7. А. жанамасы берілген түзуге параллель болатын $y=f(x)$ функциясы графигінің x_0 нүктесінің абсциссасын табыңдар: $y=x^2-3x+2$, түзу $2x+y=5$.

Ә. жанамасы берілген түзуге параллель болатын $y=f(x)$ функциясы графигінің x_0 нүктесінің абсциссасын табыңдар: $y=8\sin x+\sqrt{27}\operatorname{tg}x+x$, түзу $y=x+3$; $x_0\in[-\pi;0]$.

8. Шектерді есептеңдер:

А. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\sin 2x}{\sin x}$. Ә. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{5x^3}{1+5x^2}+\frac{1-3x^2}{3x+1}\right)$.

САН ТҮЗУІНДЕГІ ЖИЫНДАР

«Құдай бүтін сандарды жаратты, ал қалғандары – адамның ісі».
Леопольд Кронекер

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ...$ т.с.с. натурал сандар деп аталады.Ең кіші натурал сан, бұл – «бір» саны. Натурал сандар заттарды санау үшін қолданылады. Кейде осылай айтылады. Алайда саналатын заттар шексіз көп болмайды, ал натурал сан шексіз. Натурал сандар жиыны N белгісімен таңбаланады.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,6,7,......\}$

Егер натурал сандар жиынына нөлді және барлық натурал санға қарама-қарсы сандарды қоссақ, бүтін сандар жиыны пайда болады:

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-11,-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,2,3,4,5,\ldots\}.$$

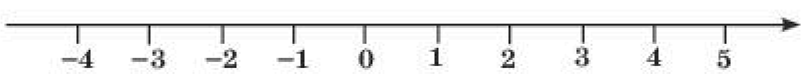
$\frac{p}{q}$ қатынасымен анықталатын барлық сандар $\mathbb{Q}$ рационал сандар жиынын құрайды. Мұндағы p–қандай да бір бүтін сан, q–қандай да бір натурал сан.

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\right\}$, мұндағы p – бүтін, q – натурал сандар.

Рационал сандарға мысалдар: $\frac{3}{7}, -\frac{3}{7}=\frac{-3}{7},\ 0=\frac{0}{1},\ -10=\frac{-10}{1}$.

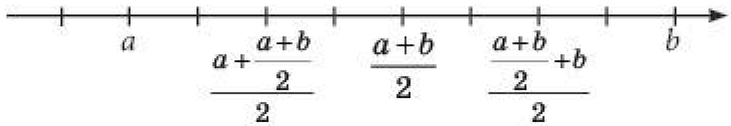
Әрбір натурал сан бүтін, ал әрбір бүтін – рационал сан. Рационал сандарды көбейткенде, қосқанда және бөлгенде рационал сан шығады.

Сан өсінде сандарды нүктемен белгілеген қолайлы екенін білесіңдер.



Кез келген екі рационал санның (нүктенің) арасында шексіз көп басқа рационал сандар (нүктелер) бар. Шындығында, егер a және b – рационал сандар, $a<b$ болса,онда $a<\frac{a+b}{2}<b$ және $\frac{a+b}{2}$ – рационал сан. $\frac{a+b}{2}$ – геометриялық нүкте, a-дан b-ге дейінгі кесіндінің ортасы, сонда осы сияқты

a және $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+b}{2}$ және b арасында тағы да рационал санды табуға болады және осылай шексіздікке дейін жалғасады.



Осыған ұқсас болады: **сан өсінен ұзындығы өте аз кесіндіні қарастырсақ та, одан шексіз көп рационал нүктелер табылады.** Бірақ бұл сан түзуіндегі кез келген нүкте рационал санға сәйкес келеді дегенді білдірмейді. Мысалы, ауданы 2-ге тең шаршының қабырғасы $\frac{p}{q}$, мұндағы $p=\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$ түрінде өрнектелмейді. Мұндай ұзындықты $\sqrt{2}$ деп белгілейміз, $\sqrt{2}$ – рационал сан емес. Рационал емес сандардың барлығы **иррационал сандар** деп аталады. Рационал және иррационал сандардың бірігуі R нақты сандар жиынын береді. $\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$.

«1 және 3 санының арасында неше сан бар?» сұрағына «1 және 3 сандарының арасында бір сан орналасқан. Ол сан 2 болады» деген жауапты есту таңырқарлық.

Кез келген $a<b$ болғандағы a және b сандарының арасында шексіз көп сан бар. Мысалы, $x\in(1;3)$ жазылуы, қарастырып отырған x саны 1-ден артық, бірақ 3-тен кем барлық сандар дегенді білдіреді. $(1;3)$ жиынында ең үлкен,ең кіші элементті көрсету мүмкін емес. Осындай жиында c саны ең үлкен болып қалды делік, онда $\frac{c+3}{2}$ саны: $1<c=\frac{c+c}{2}<\frac{c+3}{2}<\frac{3+3}{2}<3$.

Демек, $\frac{c+3}{2}$ саны да жиынға тиесілі, сонымен бірге ол c-дан артық. Бірақ біз ең үлкен сан c деп болжадық. Қарама-қайшылыққа тірелдік, олай болса біздің болжауымыз қате.

$x\in[1;3]$ түріндегі жазылу, 1-ден кем емес, 3-тен артық емес барлық сан қарастырылады дегенді білдіреді. Мұндай жиында 1 – ең кіші элемент, 3 – ең үлкен элемент. Сонымен, кез келген a және b сандары үшін $a<b$ болғанда, мыналар орынды:

$x\in(a;b)\Leftrightarrow a<x<b;$
$x\in[a;b]\Leftrightarrow a\le x\le b;$
$x\in[a;b)\Leftrightarrow a\le x<b;$

$x \in (a; b] \Leftrightarrow a < x \le b;$
$x \in (a; +\infty) \Leftrightarrow x > a;$
$x \in [a; +\infty] \Leftrightarrow x \ge a;$
$x \in (-\infty; b] \Leftrightarrow x \le b;$
$x \in (-\infty; b] \Leftrightarrow x < b.$

A және B жиындарының қиылысуы – дегеніміз A және B жиындарының әрқайсысына тиісті элементтердің жиынтығы. Белгіленуі: $A \cap B$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ және } x \in B.$$

A және B жиындарының бірігуі – дегеніміз A және B жиындарының ең болмаса біреуіне тиісті элементтердің жиынтығы. Белгіленуі: $A \cup B$.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ немесе } x \in B.$$

Кез келген қиылысу элементі олардың бірігуіне тиісті.

Осы сияқты үлкенірек сандардың қиылысуы мен бірігуі анықталады.

Мектеп курсында шарттар **жүйесін** (теңдеулер, теңсіздіктер және т.б) шешу дегеніміз. шарттарды қанағаттандыратын **жиындардың қиылысуын** табу дегенді білдіреді; шарттар **жиынтығын** (теңдеулер, теңсіздіктер және т.б) шешу дегеніміз, шарттарды қанағаттандыратын **жиындардың бірігуін** табу дегенді білдіреді.

*Сыныптағы оқушылардың көбісі спортпен шұғылданады делік. **A** – жиынына футболмен айналысатын оқушыларды, **B** жиынына – волейболмен айналысатын оқушыларды жатқызамыз. Мынадай шарт қоюға болады: спорттың **екі түрімен де** айналысатын оқушылар бар. Онда спорттың екі түрімен де айналысатын оқушылардан **A** және **B жиындарының қиылысуы** шығады. Мынадай да шарт қоюға болады: оқушылардың екі спорт түрінің **кем дегенде біреуімен** айналыстын оқушылар бар. Сонда спортпен айналысатындардан **A** және **B жиындарының бірігуі** шығады. Келтірілген мысал сіздерге көмектеседі деп үміттенеміз.*

АНЫҚТАМАЛЫҚ МАТЕРИАЛДАР

A. Қысқаша көбейту формулалары:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$
$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab;$$
$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab.$$

B. Тригонометрияның негізгі формулалары:
1. Бір аргументпен байланысқан функциялардың формулалары

$\sin^2 x+\cos^2 x=1;$ $\quad \operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x};$ $\quad \operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x};$

$\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1;$ $\quad 1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x};$ $\quad 1+\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

2. Қосу формулалары:

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;$ $\quad \sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y;$

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;$ $\quad \cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y;$

$\operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y};$ $\quad \operatorname{tg}(x-y)=\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}.$

3. Екі еселенген аргументтер формуласы:

$\sin 2x=2\sin x\cos x;$ $\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x\quad =2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x;$

$\operatorname{tg} 2x=\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$

4. Үш еселенген аргументтер формуласы:

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$;　　$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

5. Дәрежені төмендету формулалары:

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$;　　$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$;

$\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$;　　$\cos^3 x = \dfrac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$.

6. Қосындыны көбейтумен алмастыру формулалары:

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$;　　$\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$;

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$;　　$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$;

$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$;　　$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$.

7. Көбейтуді қосындымен алмастыру формулалары:

$\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$; $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$;

$\sin x \sin y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$.

8. Жарты аргументтің формулалары:

$\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$;　　$\cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$;

$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$;　　$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

C. Абсолюттік шамасы бар теңсіздіктер:

1. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$

2. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$

ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ

Қазақша	Орысша	Ағылшынша
Арифметика		
Арифметикалық квадрат түбір	Арифметический квадратный корень	Arithmetical square root
Дәрежеге шығару	Возведение в степень	Involution, powering
Бөлінгіш	Делимое	Dividend
Бөлгіш	Делитель	Divisor
Санның квадраты	Квадрат числа	Square of number
N – ші дәрежелі түбір	Корень n – й степени	N-th root
Санның кубы	Куб числа	Cube of number
Дәреженің негізі	Основание степени	Base of power
Қалдық	Остаток	Remainder, residual
Түбір астындағы өрнек	Подкоренное выражение	Radical expression
Дәреженің көрсеткіші (дәреже көрсеткіші)	Показатель степени	Exponent, index of power
Бөлінгіштік белгілері	Признак делимости	Criterion of divisibility, divisibility test, test for divisibility
Көбейтінді	Произведение	Product
Радикал	Радикал	Radical
Көбейткіштерге жіктеу	Разложение на множители	Factorisation
Айырма	Разность	Difference between
Дәреженің қасиеттері	Свойства степени	Power properties
Дәреже	Степень	Power
Рационал көрсеткішті дәреже	Степень с рациональным показателем	Power with rational exponent
Қосынды	Сумма	Sum
Бөлінді	Частное	Quotient
Вектор		
Вектор	Вектор	Vector
Векторлық әдіс	Векторный метод	Vectorial method
Вектордың ұзындығы	Длина вектора	Lenght of vector
Коллинеар векторлар	Коллинеарные векторы	Collinear vectors
Компланар векторлар	Компланарные векторы	Coplanar vectors
Вектордың координаттары	Координаты вектора	Vector coordinates
Нүктенің координаталары	Координаты точки	Position of a point

Векторлардың сызықтық комбинациясы	Линейная комбинация векторов	Linear combination of vectors
Вектордың проекциясы	Проекция вектора	Vector projection
Қарама-қарсы векторлар	Противоположные векторы	Opposite vectors
Радиус-вектор	Радиус-вектор	Radius-vector
Скаляр көбейтінді	Скалярное произведение	Scalar product
Бағыттас векторлар	Сонаправленные векторы	Codirectional vectors
Вектордың құраушылары	Составляющие вектора	Vector component
Шама		
Шексіз үлкен шама	Бесконечно большая величина	Infinite
Шексіз аз шама	Бесконечно малая величина	Infinitesimal
Үлкен	Больше	Greater
Кіші	Меньше	Less
Теріс емес	Неотрицательный	Nonnegative
Оң емес	Неположительный	Non-positive
Теріс сандар	Отрицательные числа	Negative number
Теріс	Отрицательный	Negative
Оң	Положительный	Positive
Өрнек		
Әріпті өрнек	Буквенное выражение	Literal expression
Екімүше	Двучлен	Binomial
Бөлшекті өрнектер	Дробные выражения	Fractional expression
Өрнектің мәні	Значение выражения	Value of expression
Екімүшенің квадраты	Квадрат двучлена	Square of binomial
Квадрат үшмүше	Квадратный трехчлен	Quadratic trinomial
Коэффициент	Коэффициент	Coefficient
Айнымалының мүмкін мәндерінің облысы	Область допустимых значений переменной	Admitted region of variable, tolerance range of variable
Иррационалдықтан құтылу	Освобождение от иррациональностей	Rationalization
Өрнектерді түрлендіру	Преобразование выражений	Expression transformation
Сандық өрнек	Числовое выражение	Numeral expression
Есептеу		
Жуық есептеу	Приближенное вычисление	Approximate calculation
Геометрия		
Геометриялық фигура	Геометрическая фигура	Geometric figure
Гомотетия	Гомотетия	Homothety

Кесіндінің ұзындығы	Длина отрезка	Length of segment
Салу есептері	Задачи на построение	Construction problems
Инверсия	Инверсия	Inversion
Қисық	Кривая	Curve
Қисық сызықты трапеция	Криволинейная трапеция	Curvilinear trapezoid
Сынық	Ломаная	Polygonal curve
Сәуле	Луч	Ray
Көлбеу	Наклонная	Slanting line
Бейне	Образ	Image
Ортақ перпендикуляр	Общий перпендикуляр	Common perpendicular
Тірек түзуі	Опорная прямая	Line of support, supporting line
Ортогональ кескіндеу	Ортогональное проектирование	Orthogonal projection
Өстік симметрия	Осевая симметрия	Rotational symmetry
Кесінділердің қатынасы	Отношение отрезков	Segment ratio
Кесінді	Отрезок	Segment
Параллель кескіндеу	Параллельное проектирование	Parallel projection
Параллель түзулер	Параллельные прямые	Parallel lines
Параллель көшіру	Параллельный перенос	Parallel shift, parallel translation
Перпендикуляр	Перпендикуляр	Perpendicular
Жазық фигура	Плоская фигура	Plane figure
Салу	Построение	Construct
Жазықтықты түрлендіру	Преобразование плоскости	Plane transformation
Перпендикулярлық белгілісі	Признак перпендикулярности	Test of perpendiculars
Параллельдік белгілері	Признаки параллельности	Test of parallels
Проекция	Проекция	Projection
Түзу	Прямая	Line
Түзу сызық	Прямая линия	Straight line
Қиюшы	Секущая	Secant
Орта перпендикуляр	Серединный перпендикуляр	Middle perpendicular
Қабырға	Сторона	Side
Гомотетия центрі	Центр гомотетии	Ray center
Массалар центрі	Центр масс	Centre of mass
График		
График салу	Построение графика	Construction of graph
Графиктерді түрлендіру	Преобразование графика	Graph transformation

Функцияның графигін түрлендіру	Преобразование графика функции	Function graph transformation
Бөлшек		
Ондық бөлшек	Десятичная дробь	Decimal fraction
Үлес	Доля	Fracture
Бөлшек бөлігі	Дробная часть	Fractional part
Бөлім	Знаменатель	Denominator
Бұрыс бөлшек	Неправильная дробь	Unproper fraction
Қысқартылмайтын бөлшек	Несократимая дробь	Irreducible fraction
Жай бөлшек	Обыкновенная дробь	Vulgar fraction
Дұрыс бөлшек	Правильная дробь	Proper fraction
Рационал бөлшек	Рациональная дробь	Rational fraction
Бөлшекті қысқарту	Сокращение дробей	Reduction of fractions
Бүтін бөлігі	Целая часть	Integer part
Алым	Числитель	Numerator
Индукция		
Жарты	Половина	Half
Үштен бірі	Треть	Third
	Индукция	
Индукция базисі	Базис индукции	Basis of induction
Индуктивті болжау	Индуктивное предположение	Induction hypothesis
Индуктивті қадам	Индуктивный шаг	Induction step
Математикалық индукция әдісі	Метод математической индукции	Method of mathematical induction
Құрал		
Сызғыш	Линейка	Rule
Транспортир	Транспортир	Protractor
Циркуль	Циркуль	Compass
Интеграл		
Бөліктеп интегралдау	Интегрирование по частям	Partial integration
Анықталмаған интеграл	Неопределенный интеграл	Indefinite integral
Интегралдау ережелері	Правила интегрирования	Integration rule
Интегралдау кестесі	Таблица интегралов	Integral table
Комбинаторика		
Орналастыру	Перестановка	Commutation
Алмастыру	Размещение	Disposition
Теру	Сочетание	Combination
Факториал	Факториал	Factorial

Комплекс сандар		
Нақты бөлігі	Действительная часть	Real part
Комплекс сан	Комплексное число	Complex number
Комплекс санның түбірі	Корень из комплексного числа	Root of complex number
Жорамал бөлігі	Мнимая часть	Imaginary part
Комплекс санның модулі	Модуль комплексного числа	Complex number modulus, modulus of complex number
Түйіндес комплекс сан	Сопряженное комплексное число	Complex conjugate
Комплекс санның тригонометриялық түрі	Тригонометрическая форма комплексного числа	Trigonometric form of complex number
Координаталар		
Абсцисса	Абсцисса	Abscissa
Координаталық өс	Координатная ось	Coordinate axis
Координаттық сәуле	Координатный луч	Coordinate ray
Координаттар әдісі	Метод координат	Coordinate method
Ордината	Ордината	Ordinate
Ширек	Четверть (координатная)	Quadrant
Қисықтар		
Параболаның төбесі	Вершина параболы	Vertex of parabola
Гипербола	Гипербола	Hyperbola
Логарифмдер		
Логарифм негізі	Основание логарифма	Logarithmic base
Көпбұрыштар		
Төбесі	Вершина	Vertex
Іштей сызылған	Вписанный	Inscribed
Іштей сызылған көпбұрыш	Вписанный многоугольник	Inscribed polygon
Дөңес фигура	Выпуклая фигура	Convex figure
Диагональ	Диагональ	Diagonal
Квадрат	Квадрат	Square
Көпбұрыш	Многоугольник	Polygon
Сырттай сызылған көпбұрыш	Описанный многоугольник	Circumscribed polygon
Параллелограмм	Параллелограмм	Parallelogram
Параллелограмм ережесі	Правило параллелограмма	Parallelogram law, parallelogram rule
Дұрыс көпбұрыш	Правильный многоугольник	Regular polygon
Тік төртбұрыш	Прямоугольник	Rectangle
Ромб	Ромб	Rhomb, rhombus
Трапеция	Трапеция	Trapezium

Көпмүше		
Көпмүше	Многочлен	Polynomial
Біртекті көпмүше	Однородный многочлен	Homogeneous polynomial
Бірмүше	Одночлен	Monomial
Бос мүше	Свободный член	Absolute term
Симметриялық көпмүше	Симметрический многочлен	Symmetric polynomial
Үлкен коэффициент	Старший коэффициент	Leading coefficient
Үшмүше	Трехчлен	Trinomial
n-ші мүшесінің формуласы	Формула n-го члена	n-th term formula
Жиын		
Шексіз жиын, ақырсыз жиын	Бесконечное множество	Infinite set
Шекті жиын, ақырлы жиын	Конечное множество	Finite set, finite aggregate
Жиын	Множество	Set
Ішкі жиын	Подмножество	Subset
Бос жиын	Пустое множество	Empty collection, empty set
Жиынның элементі	Элемент множества	Set member
Теңсіздік		
Қос теңсіздік	Двойное неравенство	Two-sided inequality
Теңсіздікті дәлелдеу	Доказательство неравенств	Inequality proving
Интервалдар әдісі	Метод интервалов	Interval method
Теңсіздік	Неравенство	Inequality
Орталар туралы теңсіздіктер	Неравенство о среднем	Mean value inequality
Теңсіздіктің қасиеттері	Свойства неравенств	Inequality properties
Теңсіздік жүйелері	Система неравенств	Simultaneous inequalities
Теңсіздік жиынтығы	Совокупность неравенств	Set of inequalities
Көлем		
Куб метр	Кубический метр	Cubic meter
Куб сантиметр	Кубический сантиметр	Cubic centimeter
Көлем	Объем	Volume
Шеңбер		
Диаметр	Диаметр	Diameter
Шеңбердің ұзындығы	Длина окружности	Perimeter of circle
Доға	Дуга	Arc
Жанама	Касательная	Tangent
Дөңгелек	Круг	Circle
Шеңбер	Окружность	Circumference
Дөңгелектің ауданы	Площадь круга	Area of a circle
Сегмент	Сегмент	Segment

Сектор	Сектор	Sector
Шеңбердің теңдеуі	Уравнение окружности	Circumference equation
Хорда	Хорда	Chord
Центрлік бұрыш	Центральный угол	Central angle
Анықтама		
Аксиома	Аксиома	Axiom
Алгоритм	Алгоритм	Algorithm
Бином	Бином	Binomial
Жеткілікті шарт	Достаточное условие	Sufficient condition
Бастапқы шарт	Начальное условие	Starting condition
Қажетті шарт	Необходимое условие	Necessary condition
Дирихле принципі	Принцип дирихле	Dirichlet principle
Аудан		
Шаршы метр	Квадратный метр	Square meter
Шаршы сантиметр	Квадратный сантиметр	Square centimeter
Аудан	Площадь	Area
Тең шамалы фигуралар	Равновеликие фигуры	Equal figures
Тең құрамдас фигуралар	Равносоставленные фигуры	Decomposition-equal figures
Ұқсастық		
Ұқсастық	Подобие	Similarity
Ұқсас үшбұрыштар	Подобные треугольники	Similar triangles
Ұқсас фигуралар	Подобные фигуры	Similar figures
Ұқсастық белгілері	Признак подобия	Test of similarity
Алмастыру		
Алмастыру әдісі (тәсілі)	Метод подстановки	Method of substitution
Алмастыру	Подстановка	Substitution
Тізбек		
Тізбек	Последовательность	Sequence
Рекуррентті арақатынас	Рекуррентное соотношение	Recurrence relation
Шек		
Тамаша шек	Замечательный предел	Remarkable limit
Біржақты шектер	Односторонние пределы	One-sided limit
Тізбек шегі	Предел последовательности	Limit of sequence
Прогрессия		
Арифметикалық прогрессия	Арифметическая прогрессия	Arithmetical progression
Шектеусіз геометриялық прогрессия	Бесконечная геометрическая прогрессия	Infinite geometrical progression
Геометриялық прогрессия	Геометрическая прогрессия	Geometrical progression

Геометриялық прогрессияның еселігі	Знаменатель геометрической прогрессии	Geometric ratio
Прогрессия	Прогрессия	Progression
Арифметикалық прогрессияның айырымы	Разность арифметической прогрессии	Arithmetical ratio
Туынды		
Туынды	Производная	Derivative
Кері функцияның туындысы	Производная обратной функции	Derivative of reciprocal function
Күрделі функцияның туындысы	Производная сложной функции	Derivative of combined function, derivative of complicated function
Пропорция		
Пропорционалдық коэффициент	Коэффициент пропорциональности	Coefficient of proportionality
Кері пропорционал	Обратная пропорциональность	Reciprocal proportionality
Пропорционал бөлу	Пропорциональное деление	Proportional division
Пропорция	Пропорция	Proportion
Тура пропорционал	Прямая пропорциональность	Direct proportionality
Өлшем		
Ұзындық	Длина	Length
Ені	Ширина	Width
Шешім		
Шешімдер жиыны	Множество решений	Solution set
Жалпы шешім	Общее решение	General solution
Үшбұрышты шешу	Решение треугольников	Solution of triangle
Дербес шешім	Частное решение	Particular solution
Қысқаша көбейту		
Айырманың кубы	Куб разности	Cube of difference
Қосындының кубы	Куб суммы	Cube of sum
Кубтардың айырмасы	Разность кубов	Cube difference
Кубтардың қосындысы	Сумма кубов	Sum of cubes
Айырманың квадратының формуласы	Формула квадрата разности	Square of difference formula
Екі өрнектің қосындысының квадратының формуласы	Формула квадрата суммы двух выражений	Square of sum formula
Квадраттар айырмасының формуласы	Формула разности квадратов	Square difference formula
Қысқаша көбейту формулары	Формулы сокращенного умножения	Formulas of abridged multiplication

Статистика

Нақты жағдай	Достоверное событие	Persistent event
Қатардың медианасы	Медиана ряда	Median of series
Қатардың модасы	Мода ряда	Mode of series
Қатардың ауқымы	Размах ряда	Spread of series
Арифметикалық орта	Среднее арифметическое	Arithmetic average, arithmetical mean arithmetic average
Элементарлық жағдай	Элементарное событие	Elementary event, simple event

Мәтіндік есептер

Уақыт	Время	Time
Қозғалыс	Движение	Movement
Масштаб	Масштаб	Coverage
Жұмыс көлемі	Объем работы	Work content, volume of work
Өнімділік	Производительность	Productivity
Жол	Путь	Path, way
Қашықтық аралашықтық	Расстояние	Distance
Жылдамдық	Скорость	Speed
Қоспа	Смесь	Mixture
Қорытпа	Сплав	Alloy
Орташа жылдамдық	Средняя скорость	Average speed
Бүйір бет	Боковая поверхность	Lateral surface
Дөңес көпжақтар	Выпуклые многогранники	Convex polyhedrons
Сферамен жанасу	Касание со сферой	Contact with sphere
Конус	Конус	Cone
Көпжақ	Многогранник	Polyhedron
Көпжақ	Многогранник	Polyhedron
Көпжақты бұрыш	Многогранный угол	Polyhedral angle
Сырттай сызылған көпжақ	Описанные многогранники	Circumscribed polyhedron
Тірек жазықтығы	Опорная плоскость	Plane of support, supporting plane
Осьтік қима	Осевое сечение	Axial section
Параллелепипед	Параллелепипед	Parallelepiped
Шардың қиылысуы	Пересечение шара	Ball crossing
Пирамида	Пирамида	Pyramid
Бет	Поверхность	Surface
Толық бет	Полная поверхность	Complete surface
Дұрыс пирамида	Правильная пирамида	Regular pyramid
Призма	Призма	Prism
Кеңістік фигуралары	Пространственные фигуры	Space figures

Тік цилиндр	Прямой цилиндр	Straight cylinder
Жазба	Развертка	Involute, evolvent
Қыры	Ребро	Edge
Қима	Сечение	Cut set, section
Конустың қимасы	Сечение конуса	Cone section
Көпжақтың қимасы	Сечение многогранника	Polyhedron section
Айқас түзулер	Скрещивающиеся прямые	Skew lines
Сфера	Сфера	Sphere
Айналу денелері	Тела вращения	Body of revolution
Қиық пирамида	Усеченная пирамида	Truncated pyramid
Цилиндр	Цилиндр	Cylinder
Шар	Шар	Ball
Эллипс	Эллипс	Ellipse
Тепе-теңдік		
Тепе-тең түрлендіру	Тождественное преобразование	Identity substitution
Тепе-теңдік	Тождество	Identity
Нүкте		
Нүктелер жиыны	Множество точек	Set of points
Қозғалмайтын нүктелер	Неподвижные точки	Fixed points
Нүкте	Точка	Point
Иілу нүктесі	Точка перегиба	Point of inflection
Үшбұрыш		
Биссектриса	Биссектриса	Bisector
Биіктік	Высота	Altitude
Гипотенуза	Гипотенуза	Hypotenuse
Катет	Катет	Cathetus
Медиана	Медиана	Median
Үшбұрыштың теңсіздігі	Неравенство треугольника	Triangle inequality
Бағдар	Ориентация	Orientation
Ортоцентр	Ортоцентр	Orthocenter
Табаны	Основание	Base
Периметр	Периметр	Perimeter
Үшбұрыш ережесі	Правило треугольника	Triangle law
Үшбұрыштардың теңдік белгілері	Признаки равенства треугольников	Test of triangles equality
Тікбұрышты үшбұрыш	Прямоугольный треугольник	Right-angled triangle
Теңбүйірлі үшбұрыш	Равнобедренный треугольник	Isosceles triangle

Теңқабырғалы үшбұрыш	Равносторонний треугольник	Equilateral triangle
Үшбұрыш	Треугольник	Triangle
Тригонометрия		
Бірлік шеңбер	Единичная окружность	Unit circumference
Косинус	Косинус	Cosine
Котангенс	Котангенс	Cotangent
Котангенстер сызығы	Линия котангенсов	Line of cotangents
Тангенстер сызығы	Линия тангенсов	Line of tangents
Кері тригонометриялық функциялар	Обратные тригонометрические функции	Inverse trigonometric functions
Негізгі тригонометриялық тепе-теңдік	Основное тригонометрическое тождество	Fundamental trigonometric identity
Қарапайым тригонометриялық теңдеулер	Простейшие тригонометрические уравнения	Elementary trigonometric equations
Синус	Синус	Sine
Тангенс	Тангенс	Tangent
Қос аргументтің формулары	Формулы двойного аргумента	Double-argument formula
Жарты аргументтің формулары	Формулы половинного аргумента	Half-argument formula
Келтіру формулары	Формулы приведения	Reduction formulas
Бұрыш		
Вертикаль бұрыштар	Вертикальные углы	Vertical angles
Іштей сызылған бұрыш	Вписанный угол	Inscribed angle
Градус	Градус	Degree
Екіжақты бұрыш	Двугранный угол	Dihedral angle
Айқыш бұрыштар	Накрест лежащие углы	Alternate angles
Тұстас бұрыштар	Односторонние углы	Unilateral angles
Сүйір бұрыш	Острый угол	Sharp angle
Жазық бұрыш	Плоский угол	Plane angle
Жазықтық	Плоскость	Plane
Бұру	Поворот	Rotating
Тік бұрыш	Прямой угол	Right angle
Радиан	Радиан	Radian
Жазыңқы бұрыш	Развернутый угол	Flat angle, straight angle
Сыбайлас бұрыштар	Смежные углы	Adjacent angles
Сәйкес бұрыштар	Соответственные углы	Corresponding angles
Үшжақты бұрыш	Трехгранный угол	Trihedral angle

Доғал бұрыш	Тупой угол	Blunt angle
Бұрыш	Угол	Angle
Теңдеу		
Биквадрат теңдеу	Биквадратное уравнение	Biquadratic equation
Графиктік әдіс	Графический метод	Graphic method
Қос аргумент	Двойной аргумент	Double argument
Дискриминант	Дискриминант	Discriminant
Дифференциалдық теңдеулер	Дифференциальные уравнения	Differential equation
Айнымалыны алмастыру	Замена переменной	Change of variable
Иррационал теңдеу	Иррациональное уравнение	Irrational equation
Квадрат теңдеу	Квадратное уравнение	Quadratic equation
Теңдеудің түбірі	Корень уравнения	Root of equation
Қосымша аргумент әдісі	Метод вспомогательного аргумента	Method of auxiliary argument
Параметр	Параметр	Parameter
Айнымалы	Переменная	Variable
Түбір жоғалту	Потеря корней	Loss of roots
Бөгде түбірдің пайда болуы	Приобретение посторонних корней	Acquisition of extraneous root
Мәндес теңдеулер	Равносильные уравнения	Equivalent equations
Рационал теңдеу	Рациональное уравнение	Rational equation
Теңдеудің рационал түбірлері	Рациональные корни уравнения	Rational roots of equations
Симметриялық теңдеулер	Симметрические уравнения	Symmetrical equations
Бұрыштық коэффициент	Угловой коэффициент	Angular coefficient
Теңдеу	Уравнение	Equation
Екінші ретті теңдеу	Уравнение второго порядка	Second order equation
Жазықтықтың теңдеуі	Уравнение плоскости	Equation of plane
Түзудің теңдеуі	Уравнение прямой	Equation of line
Дәрежені төмендету формулары	Формулы понижения степени уравнения	Formula for depression of equation
Теңдеудің бүтін түбірлері	Целые корни уравнения	Integer roots of equations
Функция		
Асимптота	Асимптота	Asymptote
Тік асимптота	Вертикальная асимптота	Vertical asymptote
Өзара кері функциялар	Взаимно обратные функции	Mutually inverse functions
Ойыс	Вогнутость	Concavity
Өсуі	Возрастание	Increase
Өспелі функция	Возрастающая функция	Increasing function

Екінші ретті туынды	Вторая производная	Second derivative
Көлденең асимптота	Горизонтальная асимптота	Horizontal asymptote
График	График	Graph, plot
Дифференциал	Дифференциал	Differential
Бөлшек-сызықтық функция	Дробно-линейная функция	Homographic function
Квадраттық функция	Квадратичная функция	Quadratic function
Функциялар композициясы	Композиция функций	Composition of functions
Сызықтық функция	Линейная функция	Linear function, affine function
Бірсарындылық	Монотонность	Monotony
Функцияның ең үлкен мәні	Наибольшее значение функции	Maximum
Функцияның ең кіші мәні	Наименьшее значение функции	Minimum
Көлбеу асимптота	Наклонная асимптота	Oblique asymptote
Үзіліссіздік	Непрерывность	Continuity
Тақ функция	Нечетная функция	Odd function
Функцияның мәндерінің жиыны	Область значений функции	Range
Функцияның анықталу аймағы	Область определения функции	Function domain
Алғашқы функция	Первообразная	Primitive
Период	Период	Period
Көрсеткіштік функция	Показательная функция	Exponential function
Жарты аргумент	Половинный аргумент	Half-argument
Өсімше	Приращение	Increment
Аралық, интервал	Промежуток, интервал	Interval
Алғашқы бейне	Прообраз	Inverse image, original
Үзілістік	Разрывность	Discontinuity
Дәрежелік функция	Степенная функция	Power function
Тригонометриялық функциялар	Тригонометрические функции	Trigonometric functions
Үшінші аргумент	Тройной аргумент	Triple argument
Кемуі	Убывание	Decrease
Кемімелі функция	Убывающая функция	Decreasing function
Функция	Функция	Function
Жұп функция	Четная функция	Even function
Сандық функциялар	Числовые функции	Numerical function
Экстремум	Экстремум	Extremum
Цифр		
Разряд	Разряд	Digit, position

Цифр	Цифра	Numeral, figure
Сан		
Өзара жай сандар	Взаимно простые числа	Coprime numbers, relative primes
Нақты сандар	Действительные числа	Real numbers
Иррационал сандар	Иррациональные числа	Irrational numbers
Еселік	Кратное	Multiple
Натурал сандар жиыны	Множество натуральных чисел	Set of natural numbers
Рационал сандар жиыны	Множество рациональных чисел	Set of rational numbers
Бүтін сандар жиыны	Множество целых чисел	Set of integer numbers
Санның модулі	Модуль числа	Module, modulus
Натурал сандар	Натуральные числа	Natural numbers
Тақтық	Нечетность	Oddness
Сандардың қатынасы	Отношение чисел	Numbers ratio
Оң сандар	Положительные числа	Positive numbers
Жай сандар	Простые числа	Prime numbers
Қарама-қарсы сандар	Противоположные числа	Opposite numbers
Рационал сандар	Рациональные числа	Rational numbers
Теңдеуді шешу	Решить уравнение	Solve equation
Аралас сан	Смешанное число	Mixed number
Құрама сандар	Составные числа	Composite numbers
Сандарды салыстыру	Сравните числа	Compare numbers
Жұптық	Четность	Evenness
Сан	Число	Number

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. www.esepterqory.kz веб сайты;
2. Сборник задач по математике: Под ред.: М.И. Сканави. – М., 2005
3. Элементар математика есептерінің жинағы. Т.Н. Бияров, М.Т. Молдабеков. – Алматы: Кітап, 1992
4. 3000 конкурсных задач. Е.Д. Куланин и др. – М., 2003.
5. problem.ru веб сайты;
6. Халықаралық Кенгуру байқауының есептері.

Оқулық басылым *Учебное издание*

Олег Владимирович Пак
Дархан Ардақұлы
Елена Викторовна Ескендирова

АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ **АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА**

2-бөлім
Қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы жалпы білім беретін мектептің 10-сынып оқушыларына арналған оқулық

Часть 2
Учебник для учащихся 10 класса общеобразовательной школы общественно-гуманитарного направления

Арнайы редакторы / спецредактор – З. Н. Киябаева
Дизайн – Е. А. Ибрашов
Суретін салған / Художник – Б. Б. Булатов
Мұқаба / Обложка: Е.С. Жузбаев, Б. Б. Булатов, А. М. Әбдіразах
Беттеуші / Верстка – М. С. Шелекбаева

Басуға 22.07.2019 ж. қол қойылды.
Пішімі 70x100 $^1/_{16}$. Есептік баспа табағы 5,74.
Шартты баспа табағы 13,55. Офсеттік басылым.
Әріп түрі «Open Sans». Офсеттік қағаз.
Таралымы 8000 дана. Тапсырыс № 2182.

Подписано в печать 22.07.2019 г.
Формат 70x100 $^1/_{16}$. Уч.-изд. л. 5,74.
Усл. печ. л. 13,55. Печать офсетная.
Гарнитура «Open Sans». Бумага офсетная.
Тираж 8000 экз. Заказ № 2182

Сапасы жөнінде мына мекемеге хабарласыңыз:
Қазақстан Республикасы,
050012, Алматы қаласы, Жамбыл көшесі, 111-үй,
«АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ» ЖШС,
тел. +7 (727) 250 29 58, факс +7 (727) 292 81 10.
e-mail: info@almatykitap.kz

С претензиями по качеству обращаться:
Республика Казахстан,
050012, г. Алматы, ул. Жамбыла, 111,
ТОО «АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ»,
тел. +7 (727) 250 29 58; факс +7 (727) 292 81 10.
e-mail: info@almatykitap.kz

Сапа және қауіпсіздік
стандарттарына сай.
Сертификация қарастырылмаған.
Сақтау мерзімі шектелмеген.

Соответствует всем стандартам качества
и безопасности.
Сертификация не предусмотрена.
Срок годности не ограничен.

Қазақстанда басылды
«Реформа» ЖШС
Алматы қ., Ақбұлақ ы-ауд., Шарипов к-сі, 40Б-үй

Отпечатано в Казахстане
ТОО «Реформа»,
г. Алматы, мкр. Акбулак, ул. Шарипова, д. 40Б