А.Е. Әбілқасымова, З.Ә. Жұмағұлова

АЛГЕБРА және АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

10

Жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманитарлық бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі бекіткен

Алматы "Мектеп" 2019

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72
Ә20

Шартты белгілер :

— жаңа білімді меңгеру барысында шешілетін мәселе

— анықтамалар, ережелер, қасиеттер

— пысықтау сұрақтары

— теорема немесе қасиеттердің дәлелдеуінің аяқталуы

— параграфтың ішіндегі тапсырмалар

— қосымша материалдар

A — барлық оқушылардың орындауы міндетті жаттығулар

B — орта деңгейдегі жаттығулар

Әбілқасымова А.Е., Жұмағұлова З.Ә.

Ә20 **Алгебра және анализ бастамалары:** Жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманитарлық бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық / А.Е. Әбілқасымова, З.Ә. Жұмағұлова. — Алматы: Мектеп, 2019 — 152 б., сур.

ISBN 978–601–07–1151–8

$Ә\frac{4306020503—043}{404(05)—19}$ 30(1)—19

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72

ISBN 978–601–07–1151–8

АЛҒЫ СӨЗ

Құрметті оқушылар! Ұсынылып отырған оқулық алдыңғы сыныптардағы алгебра курсының жалғасы және математикалық анализдің алғашқы элементтерін оқып-үйренудің бастамасы болып табылады. Алгебра және анализ бастамалары курсы элементар және жоғары математика арасындағы сабақтастықты қалыптастыру мақсатында мектеп бағдарламасына енгізілген.

Бұл курста функция ұғымын және оның қасиеттерін, түрлерін, берілу тәсілдерін, графиктерін кеңінен қарастырасыңдар. Кері функция, күрделі функция ұғымдарымен танысасыңдар. Қарапайым түрлендірулерді қолданып функциялардың графиктерін салуды үйренесіңдер.

Тригонометрия формулаларымен, кері тригонометриялық функциялар ұғымымен және олардың графиктерімен танысып, тригонометриялық теңдеулер мен тригонометриялық теңсіздіктерді шешу дағдысын меңгересіңдер.

Функцияның нүктедегі шегі, функцияның нүктедегі және кесіндідегі үзіліссіздігі, олардың қасиеттері, функцияның туындысы ұғымымен танысасыңдар, туындыны функцияларды зерттеу кезінде қолдануды үйренесіңдер.

Ықтималдықтар теориясы бойынша білімдеріңді толықтырасыңдар.

Оқулық 7 тараудан және 24 параграфтан тұрады.

Ұсынылып отырған оқулықтың бейімдік бағытына сай есеп шығарудың нақты алгоритмдері, өзіндік жұмысқа арналған сұрақтар мен тапсырмалар, пысықтау сұрақтары, тест тапсырмалары, бірігіп шығаруға арналған жаттығулар, математикалық сауаттылық бойынша тапсырмалар берілген.

Жаттығулар екі топқа бөлінген: А — барлық оқушылар үшін міндетті тапсырмалар; В — ізденісті қажет ететін тапсырмалар. А тобының тапсырмаларын орындау дағдысы қалыптасқаннан кейін оқушылардың мүмкіндіктері мен қабілеттеріне сай В тобының тапсырмаларын орындауға көшу қажет.

Оқулықта 7—9-сыныптардағы алгебра курсын және 10-сыныптың алгебра және анализ бастамалары курсын қайталауға арналған жаттығулар берілген .

Оқулықтың соңында глоссарий ұсынылған.

Жаттығулардың дұрыс шешімін тексеру үшін оқулықтың соңында есептердің жауаптары берілген.

7—9-СЫНЫПТАРДАҒЫ АЛГЕБРА КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

1. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\frac{3-2b}{a+b}\cdot\frac{9b+9a}{4b^2-9}-\frac{6b}{2b+3}$;

ә) $\frac{16a^2-25c^2}{ac+c^2}:\frac{5c-4a}{3c}+\frac{21a+24c}{a+c}$;

б) $\left(\frac{b+2}{b^2-3b+9}-\frac{6}{b^3+27}\right):\frac{3b+15}{2b^2-6b+18}$;

в) $\left(\frac{a-1}{a^2+2a+4}-\frac{2}{a^3-8}\right):\frac{3-a}{a^2+2a+4}$;

г) $\frac{2a+1}{a-7}+\left(\frac{a}{a+8}+\frac{a}{7-a}\right):\frac{a}{8+a}$;

ғ) $\left(\frac{b}{2b-3}-\frac{b}{3+2b}\right):\frac{b}{9+12b+4b^2}+\frac{45-6b}{3-2b}$;

д) $25\sqrt{b}-0,5\sqrt{4b}+100\sqrt{0,16b}$;

е) $\sqrt{98a}+3\sqrt{242a}-17\sqrt{512a}$.

2. Теңдеуді шешіңдер:

а) $(x-4)^2-6=(2+x)^2$; ә) $(5-y)^2+17=(y-3)^2$;

б) $10+(3x-1)^2=20-6x$; в) $7x+x(x-7)=(2x+5)(5-2x)$;

г) $(3x+2)(4x-1)-12=x(10+11x)$;

ғ) $2y(3y-4)+24y=(7y-3)(2+y)$;

д) $x^2-x+2(x-1)^2=3x-2$;

е) $31-3x-x^2=20x+7(x-2)^2$.

3. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

а) $\frac{3}{x+7}=\frac{2}{9-x}$; ә) $\frac{x+5}{3}=\frac{5}{3+x}$; б) $\frac{x+1}{x-2}=\frac{2+x}{1+x}$;

в) $\frac{x}{x-3}-\frac{4}{3-x}=0$; г) $\frac{x}{x-5}+\frac{6}{25-x^2}=0$;

ғ) $\frac{x}{4+x}+\frac{x}{5-x}=\frac{x^2}{x-5}$; д) $\frac{6}{x^2-4}-\frac{3}{x-2}=\frac{1}{x+2}$.

4. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases}x+y=7,\\x^2-9y=7;\end{cases}$ ә) $\begin{cases}2x-y=-1,\\5x-y^2=-4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}xy=12,\\\frac{3}{x}-\frac{1}{y}=\frac{5}{12};\end{cases}$ в) $\begin{cases}xy=2,5,\\\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}2\alpha}.\end{cases}$

5. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер:

а) $\begin{cases} x + y = 2, \\ y = x^2 + 1; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - y = 1, \\ y = \dfrac{3}{x}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = \dfrac{4}{x}. \end{cases}$

6. Теңсіздікті квадраттық функцияның графигі көмегімен және интервалдар әдісімен шешіңдер:

а) $x^2 - 7x + 12 \geq 0$; ә) $x^2 + 6x - 16 < 0$;

б) $-x^2 + 7x - 10 \geq 0$; в) $-7x^2 + 2x + 5 < 0$.

7. Теңсіздікті шешіңдер:

а) $\dfrac{x^2 - 4}{9 + x} \geq 0$; ә) $\dfrac{2x - x^2}{6 - x} \geq 0$; б) $\dfrac{x + 7}{3x - x^2} > 0$;

в) $\dfrac{5 - x}{x^2 + 4x} < 0$; г) $\dfrac{1 + |x|}{x - 1} < 0$; ғ) $\dfrac{|x| + 4}{5 + x} \geq 0$.

8. Теңсіздікті қанағаттандыратын ең кіші бүтін санды табыңдар:

а) $(x + 1)(x - 2)(x - 3) > 0$; ә) $(x + 2)(x + 4)(x - 8) > 0$;

б) $(x + 7)(x + 1)(x - 6)^2 < 0$; в) $(x + 3)^2(x - 1)(x - 5) < 0$.

9. Теңсіздікті қанағаттандыратын ең үлкен бүтін санды табыңдар:

а) $(x + 1)(x - 4)(x - 5) \leq 0$; ә) $(x + 2)(x - 2)(x - 3) < 0$;

б) $(x - 3)(x - 8)^2 \leq 0$; в) $(x + 5)^2(x + 1) < 0$.

10. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

а) $\begin{cases} x^2 - 6x - 16 < 0, \\ x - 5 \geq 0; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x^2 + 2x - 24 \geq 0, \\ 3 - x > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0, \\ x^2 + 3x - 28 < 0. \end{cases}$

11. Теңсіздіктер жүйесімен берілген нүктелер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеңдер:

а) $\begin{cases} x^2 - 3x > 0, \\ x - 4 < 0; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} 2x - x^2 \leq 0, \\ 3 - x > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ |x| + 1 \geq 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y^2 + x^2 < 16, \\ 2x - 1 \leq 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y + x^2 < 0, \\ y^2 + x^2 \leq 4; \end{cases}$ ғ) $\begin{cases} 1 - x^2 \leq 0, \\ 1 + |x| < 0. \end{cases}$

12. Функцияның графигін салыңдар және мәндер жиынын көрсетіңдер:

а) $y = x^2 - 8x$; ә) $y = -x^2 + 7x$; б) $y = \sqrt{x+1} - 1$;

в) $y = 2 - \sqrt{x+2}$; г) $y = x^2 - |x|$; ғ) $y = -x^2 + |x|$.

13. а) Бірінші натурал сан екінші натурал санның 75%-ына тең және олардың көбейтіндісінің мәні 1200-ге тең болатын екі натурал санды табыңдар;

ә) егер бөлшектің алымын екіге, бөлімін үшке арттырса, онда берілген бөлшектен $\frac{49}{35}$-ға артық бөлшек шығады. Бастапқы бөлшекті табыңдар;

б) екітаңбалы санның цифрларының қосындысының мәні 9-ға, ал цифрларының квадраттарының айырымы 27-ге тең. Екітаңбалы санды табыңдар;

в) катер өзен ағысымен 36 км, өзен ағысына қарсы 48 км жүріп, барлық жолға 6 сағ уақыт жіберді. Егер өзен ағысының жылдамдығы 3 км/сағ болса, онда катердің меншікті жылдамдығын табыңдар;

г) аралығы 180 км жолға бірінші пойыз екінші пойызға қарағанда 1,5 сағ артық уақыт жібереді. Егер пойыздар 3 сағ-та бірге 162 км аралықты жүрсе, онда әр пойыздың жылдамдығын табыңдар.

14. а) 3,2; 4; 4,8; … арифметикалық прогрессиясының айырымын, тоғызыншы мүшесін және алғашқы он мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар;

ә) 40; 39,6; 39,2; … арифметикалық прогрессиясының жетінші мүшесін және алғашқы жиырма мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар;

б) арифметикалық прогрессияның алтыншы мүшесі 35-ке, алғашқы сегіз мүшесінің қосындысының мәні 220-ға тең. Прогрессияның бірінші мүшесі мен айырымын табыңдар;

в) арифметикалық прогрессияның екінші және сегізінші мүшелерінің айырымының мәні –60-қа, үшінші және жетінші мүшелерінің қосындысының мәні –40-қа тең. Прогрессияның бірінші мүшесін табыңдар.

15. а) 1,5; 3; 6; … геометриялық прогрессиясының еселігін, жетінші мүшесін және алғашқы сегіз мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар;

ә) $\frac{2}{3}$; –2; 6; … геометриялық прогрессиясының бесінші мүшесін және алғашқы алты мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар ;

б) геометриялық прогрессияның бесінші мүшесі 4-ке, алғашқы үш мүшесінің қосындысының мәні 112-ге тең. Прогрессияның бірінші мүшесі мен еселігін табыңдар;

в) барлық мүшелері оң сандар болатын геометриялық прогрессияның бесінші мүшесі $\frac{1}{3}$-ге, үшінші және бірінші мүшелерінің айырымының мәні –24-ке тең. Прогрессияның бірінші мүшесін табыңдар.

16. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\sin 30° - 2\cos 60° + \mathrm{ctg}\,45° - \mathrm{tg}\,180°$;

ә) $\sin 60° - 8\,\mathrm{tg}\,45° - \cos 30° - 8\,\mathrm{tg}\,135°$;

б) $-\cos 300^\circ + \sin 30^\circ - \operatorname{ctg} 120^\circ + \operatorname{tg} 210^\circ$;

в) $\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ + \sin 120^\circ - 3\cos 210^\circ$;

г) $-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 4\sin\frac{\pi}{6} - 2\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} + 3\operatorname{tg} 0^\circ$;

ғ) $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - 9\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4} + 5\operatorname{ctg} 0{,}5\pi$.

17. Егер: а) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ және $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$ болса, онда $\cos\alpha$ және $\operatorname{tg}\alpha$-ның;

ә) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ және $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$ болса, онда $\sin\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$-ның мәндерін табыңдар.

18. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\dfrac{4\cos 4\alpha}{\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}$; ә) $\dfrac{\sin 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$; б) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha}$.;

в) $\dfrac{\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha}{0{,}5\sin 4\alpha}$; г) $\dfrac{\sin(2\pi - 2\alpha)}{\cos(\alpha + \pi)\cdot\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}$;

ғ) $\dfrac{2 - 2\sin^2(\alpha + 0{,}5\pi)}{1 - \cos(\alpha - \pi)} - 2\sin(\alpha + 1{,}5\pi)$;

д) $\dfrac{\cos(\pi + \alpha)\cdot\cos(1{,}5\pi - 2\alpha)}{2\operatorname{ctg}(\alpha + 0{,}5\pi)}$; е) $\dfrac{2\sin^2(\alpha - 2\pi) - 2}{\cos(\alpha + 1{,}5\pi) - 1} - 2\cos(1{,}5\pi + \alpha)$.

19. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

а) $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha}\cdot\cos^2 2\alpha = 0{,}5$;

ә) $\dfrac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha}\cdot\sin^2 2\alpha - 0{,}5 = 0$;

б) $\dfrac{\sin 3\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos 3\alpha}{0{,}5\cos 2\alpha\sin 4\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha = 1$;

в) $\dfrac{\sin 3\beta\sin 6\beta}{\cos 4\beta\cos\beta - \sin 4\beta\sin\beta} + 2\cos^2 3\beta = 1$.

Математикалық сауаттылық бойынша тапсырмалар

20. (8*5) * (660 * 11) = 100 теңдігі ақиқат болу үшін жұлдызшалардың орнына арифметикалық таңбаларды қойыңдар:

A) (·), (+), (·); B) (+), (·), (–); C) (·), (+), (·);
D) (·), (–), (:); E) (·), (+), (:).

21. Егер $6a = 25$ және $3b = 5$ болса, онда $\frac{a}{b}$ қатынасын табыңдар:

A) 0,4; B) $\frac{5}{6}$; C) 2,5; D) 1,2; E) 6.

22. Егер 49 санына еселік болатындай 61 санының екі жағына бір цифрдан қойыңдар:

A) 6615; B) 7625; C) 8615; D) 7614; E) 8616.

23. 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26 сандар тізбегіндегі 3-ке бөлінетін сандар осы тізбектің қанша пайызын құрайды:

A) 20%; B) 25%; C) 30%; D) 40%; E) 50%?

24. Егер $(a - b)^2 = 64$ және $ab = 33$ болса, онда $(a + b)^2$ өрнегінің мәні неге тең:

A) 169; B) 144; C) 180; D) 175; E) 196?

25. 9 санына бөлгенде қалдықта 6 санын беретін ең кіші үштаңбалы санды табыңдар:

A) 117; B) 119; C) 118; D) 116; E) 114.

26. Сандар қандай да бір заңдылықпен құрастырылған. Белгісіз санды табыңдар:

1-кесте

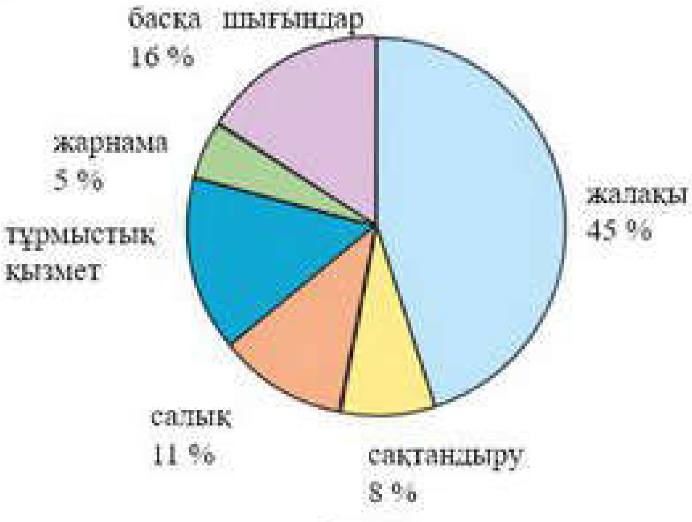
2	6	66	5478
3	11	83	?

A) 5627; B) 5629; C) 5637; D) 5617; E) 5619.

27. 6; 8; 1 цифрларынан қанша үштаңбалы жұп сан құрастыруға болады:

A) 8; B) 4; C) 10; D) 12; E) 6?

28. Кәсіпорынның бір айдағы шығыны диаграмма түрінде берілген (1-сурет). Жалпы шығын 3 000 000 теңгені құрайды. Кәсіпорынның тұрмыстық қызметке жіберген шығынын табыңдар.



1-сурет

A) 150 050; B) 150 150; C) 150 000;
D) 150 200; E) 150 300.

ФУНКЦИЯ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИГІ

1

§1. ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫҢ БЕРІЛУ ТӘСІЛДЕРІ

Түйінді ұғымдар

Функция, анықталу облысы, мәндер жиыны, функцияның берілу тәсілдері

Функция ұғымы бойынша білімдеріңді тереңдетесіңдер.

2-кестені толтырыңдар.

2-кесте

Функция	Анықталу облысы	Мәндер жиыны	Графигі
$y = ax + b$			
$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$			
$y = ax^3$			
$y = \frac{k}{x},\ k \neq 0$			
$y = \sqrt{x},\ x \geq 0$			

X жиынындағы x-тің әрбір мәніне Y жиынның бір ғана y мәнін сәйкес қоятын ереже немесе заңдылық ***функция*** *деп аталады.*

Функцияны $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = g(x)$ және т.с.с. белгілейді, мұндағы x — тәуелсіз айнымалы немесе функцияның аргументі, y — тәуелді айнымалы немесе функция, f, φ, g және т.с.с. — ереже немесе заңдылық.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

1. Функция бір ғана мән қабылдайтын тәуелсіз айнымалының мәндер жиынын функцияның анықталу облысы (D) деп атайды.

2. Анықталу облысынан алынған әрбір тәуелсіз айнымалыға сәйкес табылған функцияның мәндерін оның мәндер жиыны (E) деп атайды.

Сонда анықтамадағы X жиыны функцияның анықталу облысы, Y жиыны функция мәндерінің жиыны болады.

МЫСАЛ

1. а) $y = x^2 + 2x - 5$; ә) $y = \frac{2}{x+1}$; б) $y = \sqrt{x}$ функциясының анықталу облысын табайық.

Шешуі. а) $y = x^2 + 2x - 5$ функциясы көпмүше (бүтін рационал функция) болғандықтан, аргументтің кез келген мәнінде анықталады. Демек, функцияның анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны, яғни $D(f) = R$.

ә) $y = \frac{2}{x+1}$ бөлшек-рационал функция, оның бөлімі $x + 1 \neq 0$ болуы шарт немесе $x \neq -1$. Демек, $x = -1$ мәнінде функция анықталмаған. Сонда берілген функцияның анықталу облысы -1 санынан басқа барлық нақты сандар немесе $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;

б) $y = \sqrt{x}$ функциясының анықталу облысын табу үшін түбір ішіндегі өрнекті теріс емес деп аламыз, яғни $x \geq 0$. Бұдан $D(f) = [0; +\infty)$.

Жауабы : а) R; ә) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$.

МЫСАЛ

2. $y = 3\sin x$ функциясының мәндер жиынын табайық.

Шешуі. $y = \sin x$ функциясының мәндер жиыны $[-1; 1]$ кесіндісі екені белгілі, яғни берілген функцияның мәндер жиынын табу үшін $-1 \leq \sin x \leq 1$ қос теңсіздігіне көшеміз. Енді қос теңсіздіктің әрбір бөлігін 3-ке көбейтеміз: $-3 \leq 3\sin x \leq 3$. Демек, берілген функцияның мәндер жиыны $[-3; 3]$ кесіндісі.

Жауабы : $[-3; 3]$.

Сонымен:

1) бүтін рационал функцияның (көпмүше түрінде берілуі) анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны;

2) бөлшек-рационал функцияның анықталу облысы бөлшектің бөлімі нөлге тең болатын аргумент мәндерінен өзге барлық нақты сандар жиыны;

3) егер функция иррационал өрнек түрінде берілсе, онда функцияның анықталу облысы түбірдің дәреже көрсеткішіне тәуелді, яғни түбірдің дәреже көрсеткіші тақ болса, онда оның анықталу облысы — бөлімі нөлге айналмайтын сандардан басқа барлық нақты сандар жиыны; егер түбірдің дәреже көрсеткіші жұп болса, онда түбір астындағы өрнек теріс емес (түбір өрнектің тек алымында болса) немесе оң (түбір өрнектің бөлімінде болса) болатын аргумент мәндерінің жиыны;

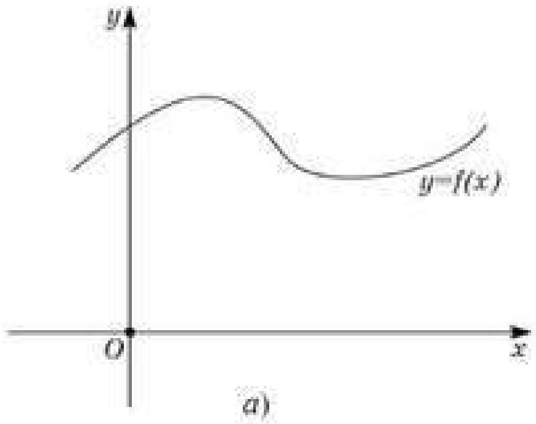
4) күрделі трансцендент функциялардың анықталу облыстары сәйкес элементар функциялардың анықталу облыстары негізінде табылады;

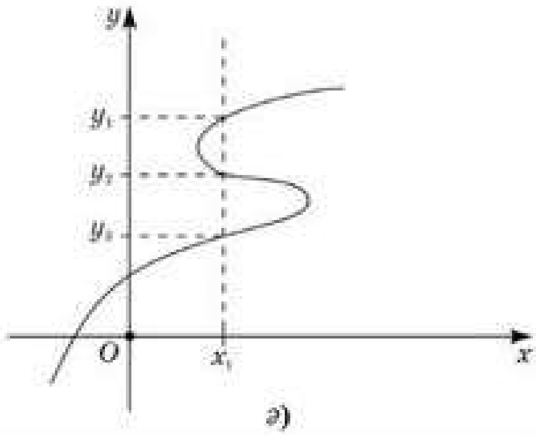
5) егер функция әртүрлі функциялардың алгебралық қосындысы түрінде берілсе, онда оның анықталу облысы қосылғыш функциялардың анықталу облыстарының қиылысуына тең.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Координаталық жазықтықтағы абсциссалары тәуелсіз айнымалы x, ординаталары тәуелді айнымалы y болатын, $(x; f(x))$ нүктелерінің геометриялық орны $y = f(x)$ функциясының графигі болатыны белгілі (2, *а*-сурет).

2, *ә*-суретте берілген қисық функцияның графигі болмайды, өйткені x_1 аргументіне функцияның y_1, y_2, y_3 бірнеше мәндері сәйкес келеді.





2-сурет

Функцияның берілу тәсілдері бойынша білімдеріңді тереңдетесіңдер.

Функциялардың кестелік, графиктік және аналитикалық тәсілдермен берілетіні белгілі.

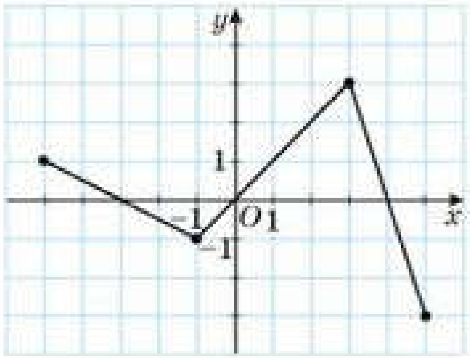
Функцияның кестелік тәсілмен берілуі. Қыс айларының біріндегі бір тәулік ішіндегі ауа температурасының өзгеруін алайық (3-кесте).

3-*кесте*

t (сағ)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
T (°C)	–12	–15	–16	–12	–6	–4	–6	–9	–11

Мұнда бірінші жолда t уақыттың (тәуліктегі) мәндері, екінші жолда уақыт мәндеріне сәйкес анықталған T ауа температурасы. Демек, кестеде температура мен тәулік мезгілінің арасындағы тәуелділік көрсетілген.

Функцияның графиктік тәсілмен берілуі. 3-суретте берілген функцияның графигі бойынша оның мына қасиеттерін байқауға болады:



3-сурет

1) функцияның анықталу облысы $D(f) = [-5; 5]$;

2) функцияның мәндер жиыны $E(f) = [-3; 3]$;

3) функцияның нөлдері: $x = -3$; 0; 4;

4) $f(-5) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 0$, $f(5) = -3$.

Күнделікті өмірде, практикада, ғылымның барлық салаларында, атап айтсақ, физика, химия, медицина, метеорология т.с.с. графиктік тәсіл кеңінен қолданылады. Метеорологияда қолданылатын құрал — барограф атмосфералық қысымның өзгеру графигі барограмманы сызса, медицинада электрокардиограф жүректің соғуын тіркеп, оны график түрінде (электрокардиограмма) береді. График бойынша өтіп жатқан процесс туралы жалпы сипаттама жасауға болады.

Функцияның аналитикалық тәсілмен берілуі.

а) $f(x) = x^2 + \dfrac{1-x}{x}$; ә) $f(x) = \sin x + x$ аналитикалық тәсілмен берілген функциялар.

ЕСТЕ САҚТАҢДАР:

1) *Кестелік тәсілмен берілудің ерекшелігі* — аргументтің мәндеріне сәйкес функцияның мәндері қатар беріледі;

2) *графиктік тәсілдің* ерекшелігі — көрнекілігінде;

3) *аналитикалық тәсіл* функцияны толық зерттеу үшін өте ыңғайлы.

?

1. Функцияның анықталу облысына қандай жиын сәйкес қойылады?
2. Функцияның анықталу облысын табу үшін қандай шарттар қарастырылады? Мысалдар келтіріңдер.
3. Функцияның графигін $y = b$ және $x = a$ түзулері бірнеше нүктеде қиюы мүмкін бе? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

1.1. $y = f(x)$ функциясының берілген нүктелердегі мәндерін табыңдар :

а) $f(x) = 2x^2 + 3$, $x = -1;\ 2{,}5;\ 3;$ ә) $f(x) = \frac{1}{3} - 5x$, $x = -0{,}5;\ \frac{1}{15};\ 0;$

б) $f(x) = \frac{5}{x-3} + 2$, $x = 4;\ 5;\ \frac{1}{2};$ в) $f(x) = \frac{2}{2+x}$, $x = -1;\ 0;\ -\frac{1}{5}$.

1.2. а) $f(x) = x^2 + 2$; ә) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$; б) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x+4}$; в) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

функциясының $f(-2)$, $f(0{,}5)$, $f(1)$ мәндерін табыңдар .

1.3. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

а) $g(x) = 2{,}5x - 4{,}2$; ә) $g(x) = 3x^2 - 7x + 4$;

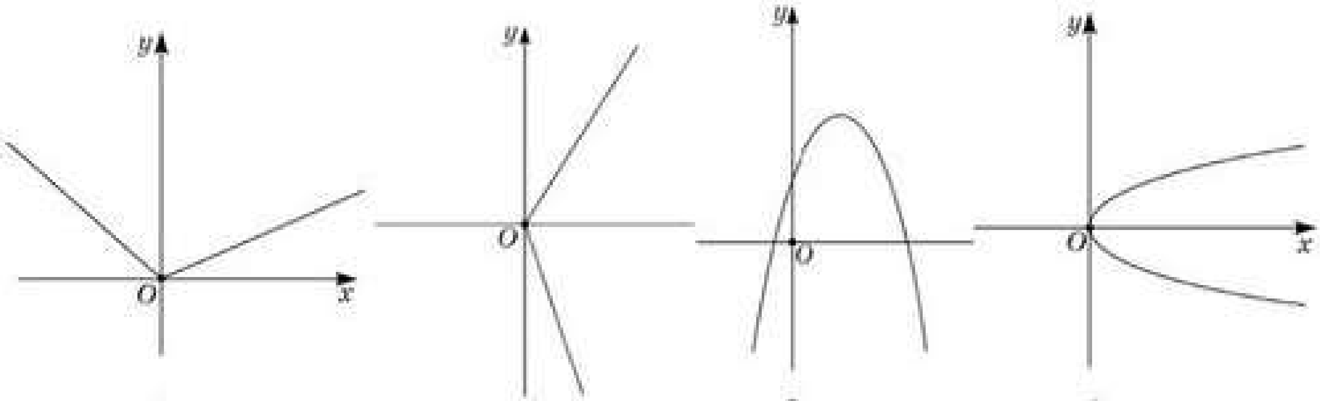
б) $g(x) = \frac{2}{2x+1}$; в) $g(x) = \frac{2}{3x} + 3$.

1.4. $f(x) = -\frac{1}{3x} - x$ және $g(x) = \frac{3}{x} + x$:

а) $f(1) + g(1) + g\left(-\frac{1}{3}\right)$; ә) $f\left(\frac{1}{2}\right) + g\frac{2}{3x}$; б) $f(-2) - g(-3)$;

в) $4f(2) + 3g-\frac{1}{3x}$ өрнегінің мәнін есептеңдер .

1.5. 4-суреттегі қай график функцияның графигі болмайды?



а) *ә)* *б)* *в)*

4-сурет

1.6. $f(x) = x^2 - 3x + 4$ функциясы берілген. Аргументтің қандай мәндерінде берілген функция:
а) $f(x) = 4$; ә) $f(x) = 9$; б) $f(x) = 19$; в) $f(x) = -11$ мәнін қабылдайды?

1.7. $f(x) = x^2 - 5x + 2$ функциясы берілген. $f(2) = -4$, $f(-1) = 8$ теңдіктерінің орындалатынын тексеріңдер.

B

1.8. Берілген нүктелердегі $y = g(x)$ функциясының мәндерін табыңдар:
а) $g(x) = x^2 - \dfrac{x+2}{x}$; $x_1 = -\dfrac{1}{4}$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1{,}5$;
ә) $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$; $x_1 = 4$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$;
б) $g(x) = 3 - \cos 2x$; $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$; $x_2 = \dfrac{\pi}{4}$; $x_3 = -\dfrac{\pi}{4}$;
в) $g(x) = \dfrac{2}{x^2} + 3x$; $x_1 = t$; $x_2 = t + 2$; $x_3 = \dfrac{2}{t}$.

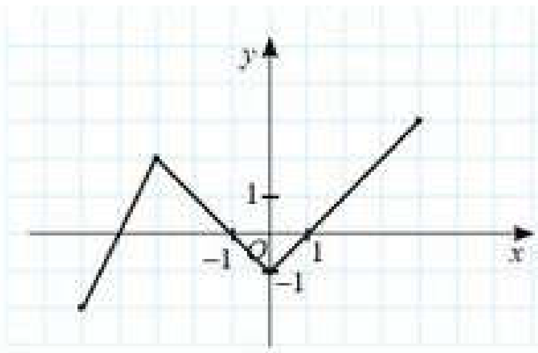
1.9. Функцияның анықталу облысын табыңдар:
а) $f(x) = 0{,}5 - \sqrt{x-3}$; ә) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7x + 5}$;
б) $f(x) = \dfrac{x+5}{16x^2 - 1}$; в) $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{x+1}{4x^2 - 9}$.

1.10. Функцияның анықталу облысын және мәндер жиынын табыңдар:
а) $y = x^2 - 4x + 4$; ә) $y = \dfrac{3}{x} - 5$;
б) $y = \dfrac{1}{2} - 2\sin x$; в) $y = 5\cos\dfrac{x}{2}$.

1.11. $f(x) = \dfrac{3}{x} - 2x^2$ және $g(x) = \dfrac{4}{x} + 2$ функциялары берілген:
а) $f(-3) + g(-2) + f(1)$; ә) $f(0{,}5) - g\left(\dfrac{1}{4}\right)$;
б) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot g(-2) - \dfrac{g(0{,}5)}{f(3)}$; в) $3f(a) + 4g(a)$ функциясының мәндерін табыңдар.

1.12. Егер $f(x) = \dfrac{1+x}{x} + 1$ және $g(x) = \dfrac{3x}{2-x} - 4$ болса, онда осы функцияларды н $x = -1$ нүктесіндегі мәндерін салыстырыңдар.
а) $f(x) < g(x)$; ә) $f(x) > g(x)$;
б) $f(x) = g(x)$; в) $f(x)$ m $g(x)$.

1.13. $f(x)$ функциясының графигі берілген (5-сурет).
а) Функцияның анықталу облысын;
ә) функцияның мәндер жиынын;
б) функцияның нөлін;
в) $f(-4)$, $f(0)$, $f(4)$ мәндерін табыңдар.



5-сурет

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Сызықтық функция, квадраттық функция, кері пропорционалдық тәуелділік, фигураларды түрлендіру түрлері, нүкте мен түзуге қарағандағы симметрия, параллель көшіру, гомотетия.

§ 2. ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ГРАФИКТЕРІН ТҮРЛЕНДІРУ

Түйінді ұғымдар

Функция, функция графигі, түрлендіру

Функция графигіне түрлендіруді қолдануды үйренесіңдер.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

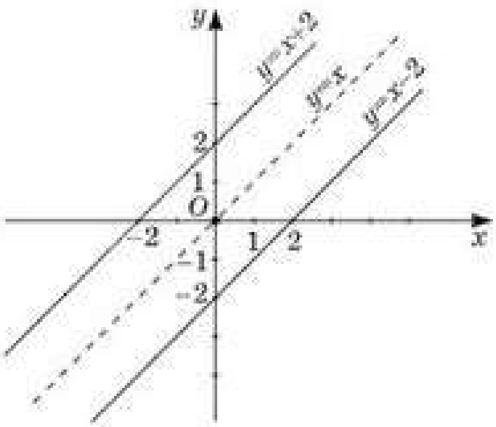
$y = ax + b$ сызықтық функциясының графигі — түзу. $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, квадраттық функциясының графигі — парабола, $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ кері пропорционалдық тәуелділіктің графигі — гипербола.

$y = kf(ax + b) + d$ (мұндағы k, a, b, d — нөлден өзге нақты сандар) функциясының графигін қарапайым түрлендірулер қолдану арқылы салу жолын қарастырайық.

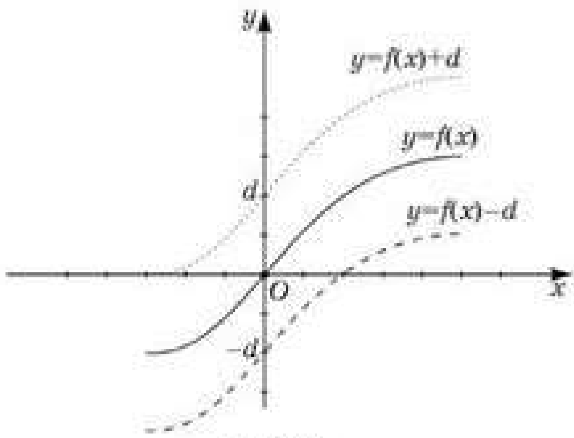
МЫСАЛ

1. Бір координаталық жазықтықта $y = x$, $y = x + 2$, $y = x - 2$ функцияларының графиктерін салатын болсақ 6-суретті аламыз. Енді $y = x + 2$ және $y = x - 2$ функцияларының графиктерін $y = x$ функциясының графигімен салыстырамыз. Сонда $y = x + 2$ функциясының графигін алу үшін $y = x$ түзуі Oy осі бойымен 2 бірлікке жоғары, $y = x - 2$ функциясының графигін алу үшін Oy осі бойымен 2 бірлікке төмен параллель көшірілгенін байқаймыз.

Демек, $y = f(x) + d$ функциясының графигі $y = f(x)$ функциясының графигін Oy ордината осінің бойымен, егер $d > 0$ болса, онда d бірлікке жоғары, егер $d < 0$ болса, онда d бірлікке төмен параллель көшіру арқылы салынады (7-сурет).



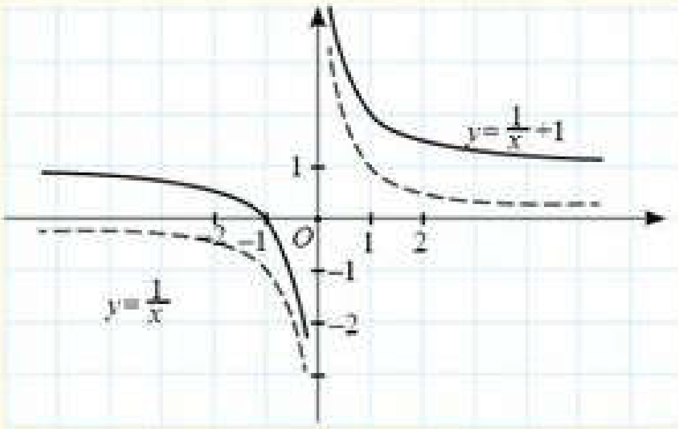
6-сурет



7-сурет

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$y = \frac{1}{x} + 1$ функциясының графигін салу үшін $y = \frac{1}{x}$ функциясының графигіне қандай түрлендіру қолданылған (8-сурет)?

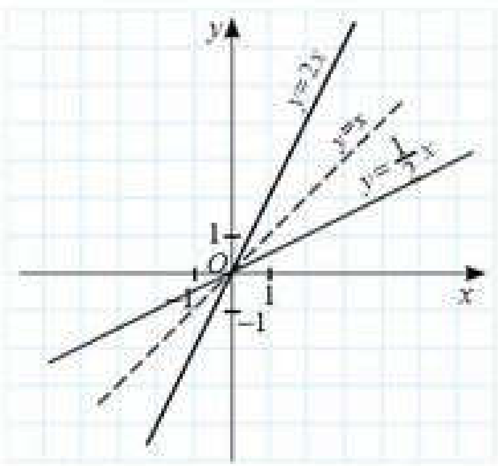


8-сурет

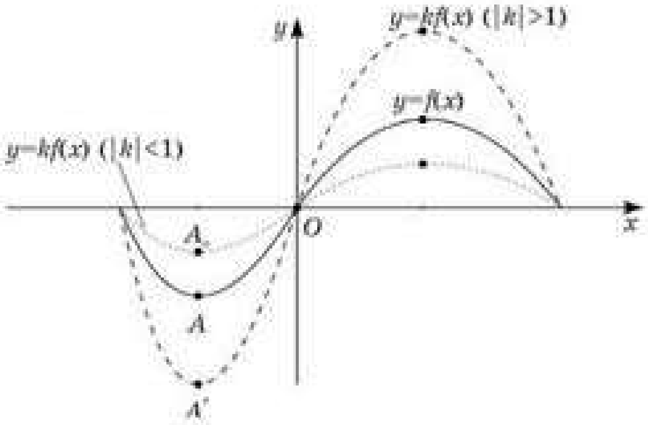
МЫСАЛ

2. Координаталық жазықтықта $y = x$, $y = 2x$ және $y = \frac{1}{2}x$ функцияларының графиктерін салатын болсақ, 9-суретті аламыз. Енді $y = 2x$ және $y = \frac{1}{2}x$ функциялар графиктерінің орналасуын $y = x$ функциясының графигімен салыстырамыз. Сонда $y = 2x$ және $y = \frac{1}{2}x$ функцияларының графиктерін алу үшін $y = x$ функциясының графигін Oy осі бойымен сәйкесінше 2 есе созамыз және сығамыз.

Демек, $y = k\,f(x)$ (мұн дағы $k \neq 0$) функциясының графигін салу үшін $y = f(x)$ функциясының графигін Oy осінің бойымен $|k| > 1$ болғанда $|k|$ есе созу, $|k| < 1$ болғанда $\left(\frac{1}{|k|}\right)$-ға сығу керек (10-сурет).



9-сурет



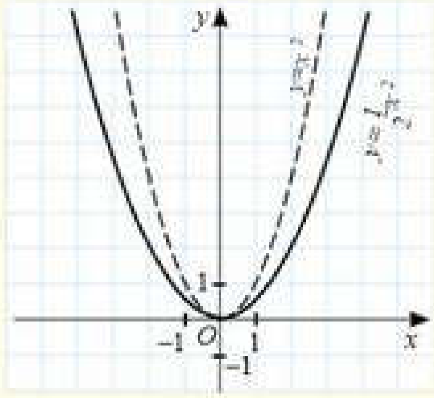
10-сурет

Егер $|k| > 1$ $(|k| < 1)$ болса, онда $y = f(x)$ функциясы графигінің нүктелерінің барлық ординаталары $|k|$ $\left(\frac{1}{|k|}\right)$ есе артады (кемиді).

Егер $k < 0$ болса, онда $y = |k|f(x)$ функциясының графигін салып, шыққан графикті Ox осіне қараған да симметриялы етіп бейнелейді.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$y=\frac{1}{2}x^2$ функциясының графигін салу үшін $y=x^2$ функциясының графигіне қандай түрлендіру қолданылған (11-сурет)?



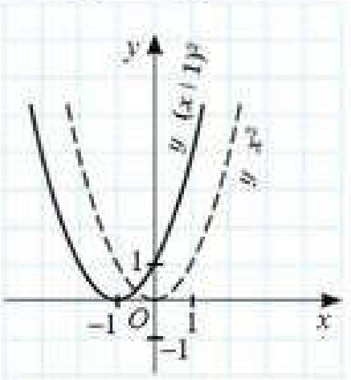
11-сурет

МЫСАЛ

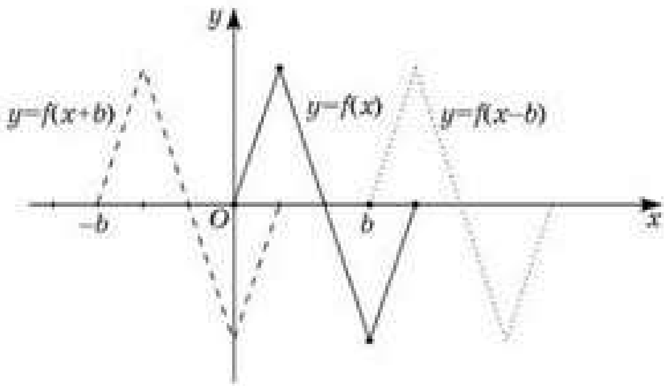
3. Бір координаталық жазықтықта $y=x^2$ және $y=(x+1)^2$ функцияларының графиктері салынған (12-сурет).

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$y=(x+1)^2$ функциясының графигін салу үшін $y=x^2$ функциясының графигіне қандай түрлендіру қолданылған (12-сурет)?



12-сурет



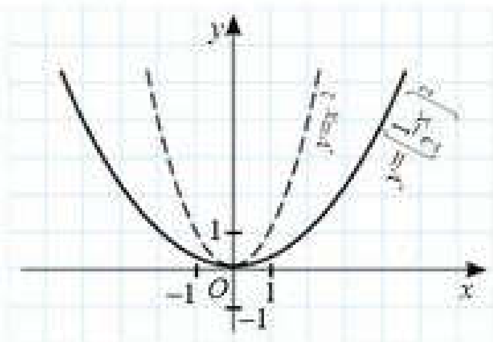
13-сурет

Демек, $y=f(x+b)$ *(мұндағы* $b\neq0$*) функциясының графигін* $y=f(x)$ *функциясының графигінен* Ox *осінің бойымен* $b>0$ *болғанда теріс бағытта,* $b<0$ *болғанда оң бағытта* $|b|$ *бірлікке параллель көшіру арқылы алуға болады* (13-сурет).

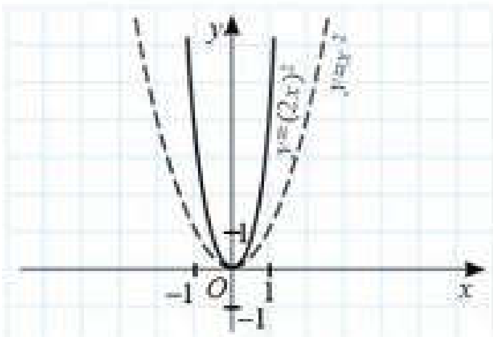
МЫСАЛ

4. а) $y=\left(\frac{1}{2}x\right)^2$ және ә) $y=(2x)^2$ функциясының графигін салайық.

Шешуі: Ол үшін берілген функциялардың графиктерін $y=x^2$ функциясының графигін Ox осі бойымен сәйкесінше 2 есе созу; 4 есе сығу арқылы аламыз (14 *а*, *ә*-сурет).



а)



ә)

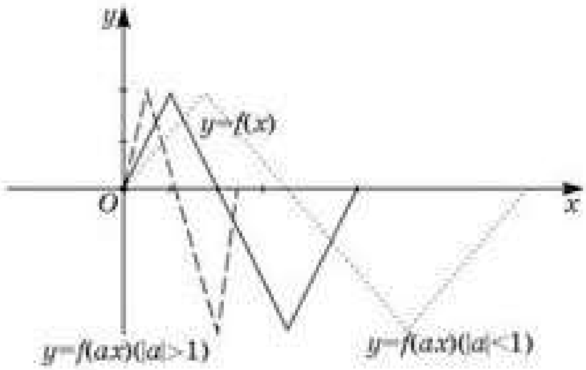
14-сурет

Демек, $y = f(ax)$ (*мұндағы* $a \neq 0$ — *кез келген сан*) *функциясының графигін* $y = f(x)$ *функциясының графигінен* Ox *осі бойымен* $|a| > 1$ *болғанда* $|a|$ *есе сығу немесе* $0 < |a| < 1$ *болғанда* $\frac{1}{|a|}$ *есе созу арқылы алады* (15-сурет).

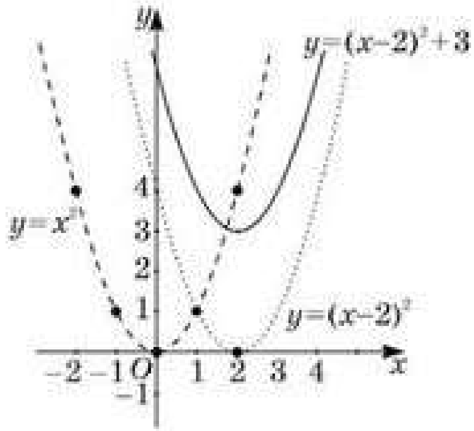
Енді барлық түрлендіруді қолдануды қажет ететін функция графигін салуға мысал келтірейік.

МЫСАЛ

5. $y = (x - 2)^2 + 3$ функциясының графигін салайық. Ол үшін:
1) $y = x^2$ параболасын саламыз;
2) параболаны оң бағытка Ox осінің бойымен 2 бірлікке параллель көшіреміз;
3) шыққан параболаны Oy осінің бойымен 3 бірлік жоғары параллель көшіреміз (16-сурет).



15-сурет



16-сурет

Демек, $y = kf(ax + b) + d$ функциясының графигін $y = f(x)$ функциясының графигінен жоғарыда қарастырылған түрлендіруді қолданып аламыз.

$y = (2x + 1)^2 - 4$ функциясының графигін салу үшін қандай түрлендіру қолданылатынын атаңдар.

?

1. Графиктерді түрлендіруді қандай жағдайларда қолданған ыңғайлы?
2. $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$ функцияларының графиктерін түрлендіру арқылы салудың ерекшелігі неде? Мысал келтіріңдер.
3. $y = -af(x)$, $y = f(-ax)$ функцияларының графиктерін салу кезінде $f(x)$ функциясының графигін түрлендіруде қандай ұқсастық бар?

Жаттығулар

A

2.1. $y = x$ функциясының графигін қолданып, $y = 3x$, $y = -2x$, $y = x + 2$, $y = -4x - 1$ функция ларының графиктерін бір координаталық жазықтыққа салыңдар.

2.2. $y = \frac{1}{x}$ функциясының графигін қолданып, $y = \frac{1}{x} + 1$, $y = -\frac{1}{x} + 1{,}5$, $y = \frac{1}{x+1} - 2$ функцияларының графиктерін бір координаталық жазықтыққа салыңдар.

2.3. Функцияның графигі қандай қисық болады:

а) $y = \sin\frac{\pi}{2} - 2x^2$; ә) $y = 2\cos 0 + \frac{2}{x}$;

б) $y = 4\sin\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}x^3$; в) $y = -\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$?

2.4. $y = -2x^2$, $y = x^2 + \frac{1}{2}$, $y = -x^2 + 5$, $y = 3x^2$ функцияларының графиктерін $y = x^2$ функциясының графигін қолданып, бір координаталық жазықтыққа салыңдар.

2.5. $y = \sqrt{x}$ функциясының графигін қолданып, $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{4}$, $y = \sqrt{x} + \frac{1}{2}$, $y = 3\sqrt{x} - 1$ функцияларының графиктерін бір координаталық жазықтыққа салыңдар.

B

2.6. а) $y = 2(3 + x)^2 - 5$ ә) $y = -2\ (x - 1)^2 + 4$ функциясының графигін $y = x^2$ функциясының графигінен қандай түрлендірулер жүргізу арқылы алуға болады? Графигін салыңдар.

2.7. $y = x^3$ функциясының графигін қолданып, $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар:

а) $f(x) = x^3 + 4$; ә) $f(x) = -x^3 - 3$;

б) $f(x) = -2x^3 + 1$; в) $f(x) = 2(x - 1)^3 - 5$.

ҚАЙТАЛАУ

2.8. Берілген функциялардың графиктерінің қиылысатынын графиктің көмегімен көрсетіңдер:

а) $y = x^2 - 2x$ және $y = -1$; ә) $y = x^2 - 5x + 4$ және $y = -\frac{3}{x}$.

2.9. Графиктік тәсілмен теңдеудің қанша түбірі болатынын анықтаңдар : а) $x^2 = \frac{1}{x}$; ә) $x^2 - 1 = \sqrt{x}$.

2.10. 4-кестеде берілген мәндер $y = 2x + 1$, $y = 2x^2 + 1$, $y = x^3 - 3$ функцияларының қайсысының формуласына сәйкес келеді?

4-кесте

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

2.11. Егер $f(x) = x^4 + x^2 - 10$ және $g(x) = x^3 + x - 9$ болса, онда $f(1)$ мен $g(1)$ мәндерін салыстырыңдар.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның анықталу облысы мен мәндер жиыны, функцияның графигі, берілу тәсілдері, функцияның графигін қарапайым түрлендіру.

§ 3. ФУНКЦИЯНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Түйінді ұғымдар

Функция, функцияның қасиеттері

Функцияның қасиеттері туралы білімдеріңді тереңдетесіңдер.

Жұп және тақ функцияларға анықтама беру үшін алдымен симметриялы жиын ұғымын енгізейік.

Егер X жиынында оның кез келген x элементімен қатар $(-x)$ элементі де бар болса, онда бұл жиын ***симметриялы жиын*** *деп аталады.*

Мысалы, $(-5;\ 5)$, $[-b;\ b]$, $(-\infty;\ +\infty)$ — симметриялы жиындар.

Егер $y = f(x)$ функциясының анықталу облысы симметриялы жиын болып, x аргументінің кез келген мәні үшін $f(-x) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда ***функция жұп****, ал $f(-x) = -f(x)$ теңдігі орындалса,* ***функция тақ*** *деп аталады.*

Бұдан кейбір функциялардың жұптылық немесе тақтылық қасиеті шығады. Егер анықтамадағы шарттар орындалмаса, онда функция жұп та, тақ та болмайды. Ондай функцияларды жалпы түрдегі функция деп айтады.

МЫСАЛ

1. а) $f(x) = 5x^2$; ә) $f(x) = x^3 - x$; б) $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$ функцияларының жұп немесе тақ екенін анықтайық.

Шешуі. Ол үшін жұп және тақ функциялардың анықтамаларын қолданамыз. Берілген функциялардың анықталу облыстары — симметриялы жиындар.

а) $f(-x) = 5(-x)^2 = 5x^2 = f(x)$ — функция жұп;

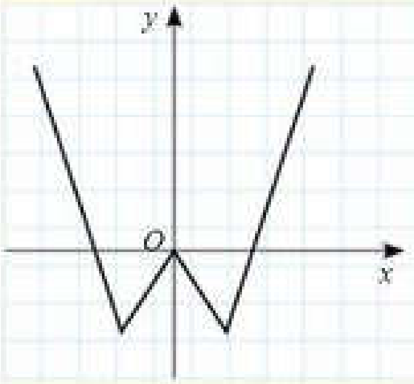
ә) $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$ — функция тақ;

б) $f(-x) = 2(-x)^2 + \frac{1}{-x} = 2x^2 - \frac{1}{x}$ функция жұп та, тақ та емес.

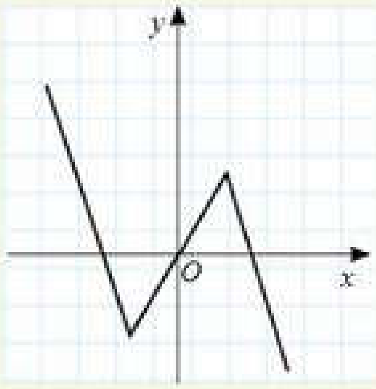
Жауабы: а) жұп; ә) тақ; б) жұп та емес, тақ та емес.

Жұп және тақ функциялардың графиктерінің өзіне тән ерекшеліктері бар, *яғни жұп функцияның графигі ордината осіне қарағанда симметриялы, тақ функцияның графигі координаталар бас нүктесіне қарағанда симметриялы қисық.*

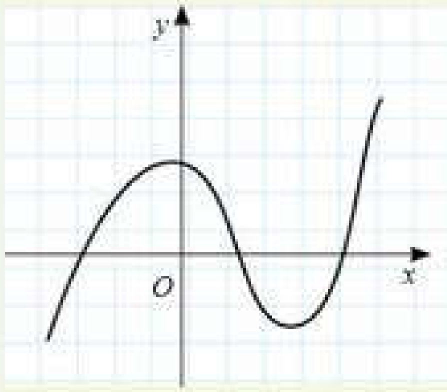
МЫСАЛ **2.** 17-суретте берілген графиктер бойынша функциялардың жұп немесе тақ екенін анықтайық.



17-сурет



18-сурет



19-сурет

Шешуі. Жұп және тақ функциялардың графиктерінің қасиетін қолданып, мынадай қорытындыға келеміз:

1) график Oy осіне қарағанда симметриялы, демек, функция — жұп (17-сурет);

2) график координаталар бас нүктесіне қарағанда симметриялы, онда функция — тақ (18-сурет);

3) графикте симметриялық жоқ, сондықтан функция тақ та, жұп та болмайды (19-сурет).

Егер $y = f(x)$ функциясы үшін $T \neq 0$ саны табылып және анықталу облысынан алынған кез келген x үшін $f(x + T) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда ол ***периодты функция*** *деп аталады.*

$T \neq 0$ санын *функцияның периоды* деп атайды.

МЫСАЛ **3.** $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ функцияларының периодын анықтайық.

Шешуі: $y = \sin x$, $y = \cos x$ функциялары үшін сәйкесінше $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ функциялары үшін сәйкесінше $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$ теңдіктерінің орындалатыны 9-сыныптан белгілі. Демек, $y = \sin x$, $y = \cos x$ функциялары үшін $T = 2\pi$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ функциялары үшін $T = \pi$ болады.

Егер $y = f(x)$ функциясының периоды $T \neq 0$ санына тең болса, онда $n \cdot T$ (мұндағы n — кез келген бүтін сан) саны да берілген функция үшін период болады.

Сонда берілген қасиет бойынша тригонометриялық функциялар үшін төмендегі теңдіктер орындалады:

$$\begin{aligned} &\sin(x + 2\pi n) = \sin x,\ n \in Z; \\ &\cos(x + 2\pi n) = \cos x,\ n \in Z; \\ &\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x,\ n \in Z; \\ &\operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg} x,\ n \in Z. \end{aligned} \qquad (1)$$

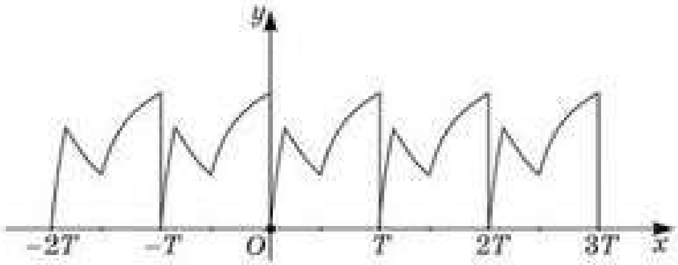
Енді $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, $n \in Z$ теңдігінің орындалатынын дәлелдейік.

Дәлелдеуі. 9-сыныптан белгілі $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ формуласын пайдаланамыз. Сонда $\sin(x+2\pi n)=\sin x\cdot\cos 2\pi n+$ $+\cos x\cdot\sin 2\pi n$, мұндағы $\cos 2\pi n=1$, $\sin 2\pi n=0$ екенін ескерсек, $\sin(x+$ $+2\pi n)=\sin x\cdot 1+\cos x\cdot 0=\sin x$. Демек, $\sin(x+2\pi n)=\sin x$.

(1)-формуланың ақиқаттығын өздерің дәлелдеңдер.

Ең кіші оң период функцияның периоды деп қабылданады. Мысалы, $y=\sin x$, $y=\cos x$ функцияларының ең кіші оң периоды 2π, $y=\mathrm{tg}\, x$, $y=\mathrm{ctg}\, x$ функцияларының ең кіші оң периоды π-ге тең болады.

Периоды T санына тең периодты функцияның графигін салу үшін ұзындығы T-ға тең кесіндіге графикті салып, оны Ox осінің бойымен оңға және солға $n\cdot T$ қашықтыққа параллель көшіру керек (20-сурет).



20-сурет

Егер $y=f(x)$ функциясы периодты және оның периоды T санына тең болса, онда $y=kf(ax+b)$ (мұндағы k, $a\neq 0$ және b — тұрақты сандар) функциясы да периодты және оның периоды $\frac{T}{|a|}$ санына тең.

МЫСАЛ

4. $y=\cos(3x-1)$ функциясының периодын табайық.

Шешуі. Берілген функцияның периодын жоғарыда берілген қасиет бойынша анықтаймыз. $y=\cos x$ функциясының периоды 2π, есептің берілгені бойынша $a=3$. Онда $\frac{T}{|a|}=\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$ болады. Демек, берілген функцияның периоды $\frac{2}{3}\pi$ санына тең.

Жауабы: $\frac{2}{3}\pi$.

Анықталу облысының кез келген нүктесінде $f(x)$ функциясы мәндерінің абсолют шамасы белгілі бір $b\geq 0$ санынан кіші емес болса, яғни $|f(x_0)|\leq b$, $x_0\in X$, онда ол осы жиында ***шектелген функция*** *деп аталады*. Егер теңсіздік орындалмаса, онда функция ***шектеусіз*** деп аталады.

МЫСАЛ

5. $f(x)=1+\sin 2x$ функциясы шектелген функция болатынын дәлелдейік.

Дәлелдеуі. $y=\sin x$ функциясы мәндерінің абсолют шамалары кез келген $x\in R$ үшін 1-ден аспайды, яғни $|\sin x|\leq 1$.

Осыдан $|\sin 2x| \le 1$ немесе $-1 \le \sin 2x \le 1$. Соңғы қос теңсіздіктің барлық бөлігіне 1 санын қоссақ, $0 \le 1 + \sin 2x \le 2$ қос теңсіздігін аламыз. Сонымен, берілген функцияның мәндерінің жиыны $E(f) = [0; 2]$. Бұл шектелген функция.

Анықталу облысының қайсыбір аралықтарында функция тек оң мәндерді (оның графигі Ох осінің жоғарғы жағында орналасқан), басқа аралықтарында тек теріс мәндерді (график Ох осінің төменгі жағында орналасқан) қабылдаса, онда мұндай аралықтарды ***функцияның таңбатұрақтылық аралықтары*** *деп атайды.*

МЫСАЛ

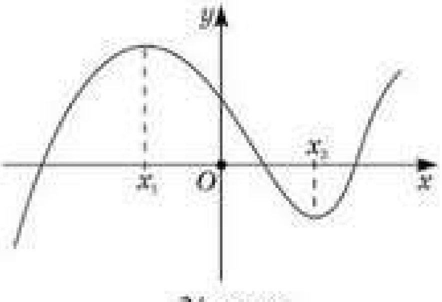
6. а) $y = x + 1$; ә) $y = \frac{x^2+2}{x}$ функциясы таңбасының тұрақтылық аралықтарын анықтайық.

Шешуі. а) $y = x + 1$ функциясы нақты сандар жиынында өспелі және $x = -1$ нүктесінде 0-ге тең. Олай болса, бұл функцияның $(-\infty; -1)$ аралығында теріс таңбалы, $(-1; +\infty)$ аралығында оң таңбалы болатыны айқын. Бұлар функцияның таңбатұрақтылық аралықтары.

ә) Бөлшектің алымы x-тің кез келген мәнінде оң болғандықтан, оның таңбасы бөліміндегі өрнекке тәуелді. Ендеше, $(-\infty; 0)$ аралығында функция теріс мәндерді, $(0; +\infty)$ аралығында оң мәндерді қабылдайды.

Егер $y = f(x)$ функциясының анықталу облысындағы кез келген $x_1 < x_2$ сандары үшін $f(x_1) < f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, онда функция ***өспелі***, *$f(x_1) > f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, онда функция* ***кемімелі*** *деп аталады.*

Егер $y = f(x)$ функциясының анықталу облысындағы кез келген $x_1 < x_2$ сандары үшін $f(x_1) \le f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, онда функция ***кемімейтін***, *және $f(x_1) \ge f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, онда* ***өспейтін функция*** *деп аталады.*



21-сурет

Өспелі, кемімелі, кемімейтін және өспейтін функцияларды *бірсарынды (монотонды) функциялар* деп атайды.

Функцияны қайсыбір нүктенің маңайында зерттегенде нүктенің аймағы ұғымы пайдаланылады.

а нүктесінің аймағы деп осы нүктені қамтитын кез келген аралықты айтады.

21-суреттегі x_1 (x_2) нүктесінде функцияның графигі өсуден кемуге (кемуден өсуге) алмасады. Мұндай нүктені *максимум* (x_{max}) (*минимум* (x_{min})) *нүктесі* деп атайды.

Егер x_0 нүктесінің қандай да бір аймағынан алынған барлық x үшін $f(x) \ge f(x_0)$ ($f(x) \le f(x_0)$) теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының ***минимум (максимум) нүктесі*** *деп аталады.*

Минимум және максимум нүктелерін *экстремум нүктелері*, осы нүктелердегі мәндерді сәйкесінше *функцияның минимумы* және *максимумы* немесе функцияның *экстремумдары* деп атайды.

1. Егер жұп функцияның анықталу облысы $[a; b]$ кесіндісі болса, онда a және b сандары туралы не айтуға болады?
2. Тек қана оң мәндер қабылдайтын тақ функция бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.
3. Функцияның периодтылығы дегеніміз не?
4. Функцияның таңбатұрақтылық аралықтарын қалай анықтайды?
5. Егер $y = f(x)$ функциясы нақты сандар жиынында өспелі болса, онда $y = -f(x)$ функциясы өспелі ме, әлде кемімелі ме?

Жаттығулар

А

3.1. Функцияны жұптылыққа тексеріңдер:

а) $f(x) = -3x^4 + 2{,}5x^2$; ә) $f(x) = \cos\frac{2x}{3} - 4x^2 + x$;

б) $f(x) = 5\sin^2 x + \frac{1}{2} - x$; в) $f(x) = -2{,}5x^6 - 5$.

3.2. Функцияны тақтылыққа тексеріңдер:

а) $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 1$; ә) $f(x) = \sin x - 2x^3$;

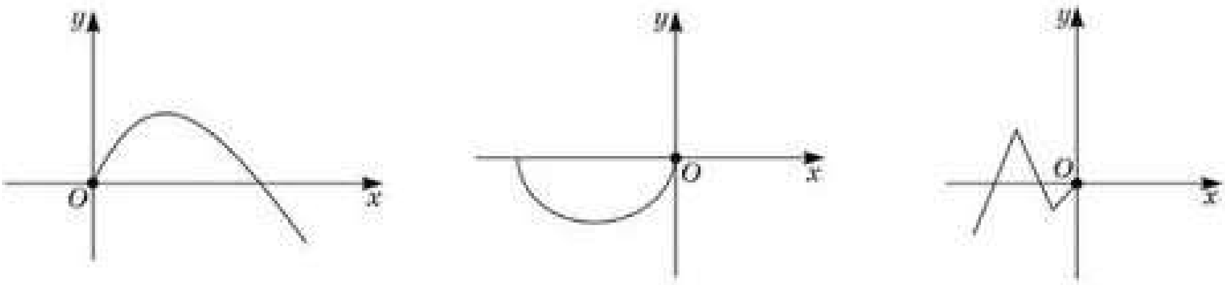
б) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 \cdot \operatorname{ctg} x^2$; в) $f(x) = 2x\,|x| - 3x - 1$.

3.3. T саны $y = f(x)$ функциясының периоды болатынын тексеріңдер:

а) $f(x) = 2\sin\frac{1}{3}x$, $T = 6\pi$; ә) $f(x) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{8}\right)$, $T = 10\pi$;

б) $f(x) = \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + 1$, $T = 3\pi$; в) $f(x) = \operatorname{tg}5x + 2{,}5$, $T = \frac{\pi}{5}$.

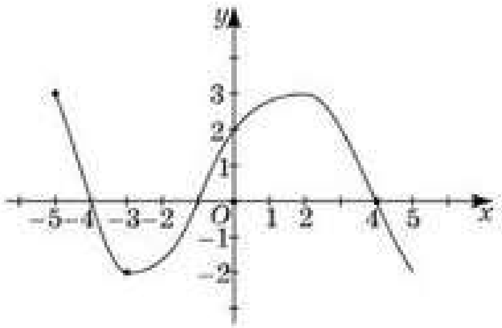
3.4. 22 а, ә, б-суреттерде $x \geq 0$ ($x \leq 0$) шартын қанағаттандыратын барлық x үшін $y = f(x)$ функциясының графигі берілген. а) $f(x)$ — тақ функция; ә) $f(x)$ — жұп функция; б) $f(x)$ — тақ та емес, жұп та емес деп алып, $f(x)$ функциясының графигін толықтырып салыңдар.



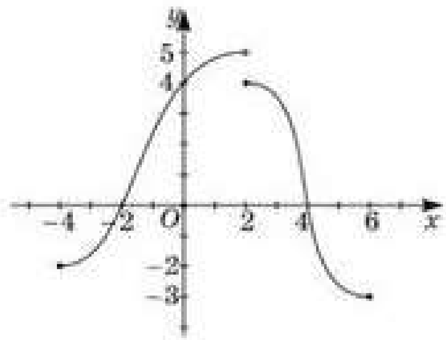
а) ә) б)

22-сурет

3.5. 23-24-суреттерде $y = f(x)$ функциясы графигінің бөлігі берілген. Графикті қолданып, функцияның: 1) координата осьтерімен



23-сурет



24-сурет

қиылысу нүктелерінің координаталарын; 2) өсу және кему аралықтарын; 3) таңбатұрақтылық аралықтарын табыңдар.

B

3.6. $y = f(x)$ функциясының жұп немесе тақ екенін дәлелдеңдер:

а) $y = \frac{2}{3}x^4 + 4|x|$;   ә) $f(x) = |x| - 2x^2$;

б) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{0{,}5\sin 2x}$;   в) $f(x) = \frac{x(x-3)}{\cos 3x}$.

3.7. Берілген функциялардың ең кіші оң периодын табыңдар :

а) $f(x) = \cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$;   ә) $f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x$;

б) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right)$;   в) $f(x) = 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

3.8. Төменде берілгендерді қолданып $f(x)$ функциясының графигін салыңдар:

а) функция $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ аралығында өседі, $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ аралығында кемиді;

ә) $(-\infty; 1]$ және $[3; +\infty)$ аралықтарында өседі; $[1; 3]$ — кемиді;

б) $(-\infty; -4]$ және $[1; +\infty)$ аралықтарында кемиді; $[-4; 1]$ — өседі;

в) $x_{max} = -1$, $x_{min} = 2$, $f(-1) = 2$, $f(2) = -3$;

г) $f(x)$ — жұп функция, $x_{max} = 0$, $x_{min} = 1$, $f(0) = 4$, $f(1) = 0$;

ғ) $f(x)$ — тақ функция, $x_{min} = 5$, $f(0) = 2$, $f(5) = -3$.

3.9. Түрлендіру арқылы $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар. График бойынша функцияның өсу және кему аралықтарын, экстремум нүктелерін, таңбатұрақтылық аралықтарын табыңдар:

а) $y = 2x - x^2$;   ә) $y = \frac{1}{x+2} - 3$.

3.10. $y = f(x)$ функциясы жұп функция екені белгілі.

а) $f(x) = 2x^2$;   ә) $f(x) = x^4 - x^2$

функциясының формуласын қандай алгебралық қосылғышпен толықтырғанда: 1) жұп функцияны; 2) жалпы түрдегі функцияны алуға болады?

3.11. $y = f(x)$ функциясы так функция екені белгілі.

а) $f(x) = -3x^3$; ә) $f(x) = x + x^3$

функциясының формуласын қандай алгебралық қосылғышпен толықтырғанда:

1) тақ функцияны; 2) жалпы түрдегі функцияны алуға болады?

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның түрлері, графигі және қасиеттері, аргумент, функцияның анықталу облысы және мәндер жиыны, бір айнымалыны екінші айнымалы арқылы өрнектеу.

§4. КЕРІ ФУНКЦИЯ ҰҒЫМЫ. КҮРДЕЛІ ФУНКЦИЯ

Түйінді ұғымдар

Функция, кері функция, күрделі функция, функция графигі

! Кері функция ұғымымен танысасыңдар; берілген функцияға кері функцияны табуды үйренесіңдер; өзара кері функциялардың графиктерінің орналасу қасиетін білесіңдер.

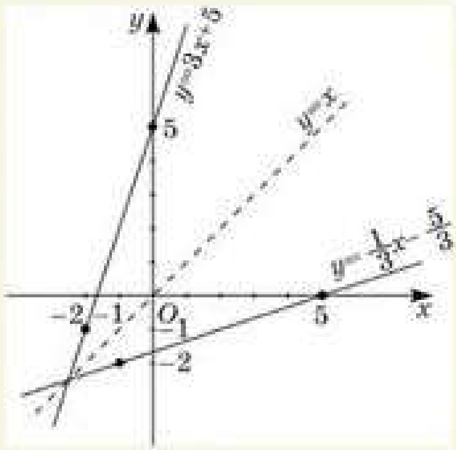
*Егер $y = f(x)$ функциясы X анықталу облысында бірсарынды өспелі (немесе кемімелі) функция болса, онда осы функцияның Y мәндер жиынында анықталған бірсарынды өспелі (бірсарынды кемімелі) функция оның **кері функциясы** болады.*

Өзара кері функциялардың графиктері $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы болып келеді.

МЫСАЛ

1. $y = 3x + 5$ функциясына кері функцияны анықтайық.

Шешуі. Берілген сызықтық функция x-тің кез келген мәнінде анықталған және өспелі функция. Демек, берілген функцияның кері функциясы бар. Оны анықтау үшін x айнымалысын y айнымалысы арқылы өрнектейік. Сонда $3x = y - 5$ немесе $x = \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$. Соңғы теңдіктегі x пен y айнымалыларының орындарын алмастырсақ, $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ функциясын аламыз. Осы функция $y = 3x + 5$ функциясына кері функция. Ендеше, $y = 3x + 5$ тура функция, $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ кері функция.



25-сурет

Бұл функциялар бірсарынды өспелі, олардың графиктері 25-суретте берілген.

Жауабы: $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $y = x^2$ функциясының кері функциясы $y = \sqrt{x}$, мұндағы $x \geq 0$, болатынын түсіндіріңдер.

Күрделі функция ұғымымен танысасыңдар, күрделі функцияны ажыратуды және функциялар композицияларын құруды үйренесіңдер.

$y = f(u)$ функциясы берілсін. Анықталу облысы U, функция мәндерінің жиыны Y болсын. Ал u айнымалысы өз кезегінде айнымалы x-ке тәуелді функция болса, яғни $u = g(x)$, $x \in X$, онда $y = f(g(x))$ функциясы X жиынында анықталған ***күрделі функция*** деп аталады.

Демек, күрделі функцияның жалпы түрі $y = f(g(x))$.

Мысалы, $y = \sqrt{2x+1}$ функциясы $x \in [-\frac{1}{2}; +\infty)$ аралығында анықталған күрделі функция, себебі, $y = \sqrt{u}$, $u = 2x + 1$.

МЫСАЛ

2. $v = x + 1$ және $u = \sqrt{x}$ функциялары берілген. Осы функциялардан $v(u(x))$ және $u(v(x))$ күрделі функцияларын құрастырайық.

Шешуі. Егер $y = v(u(x))$ болса, онда $y = \sqrt{x} + 1$, $x \in [0; +\infty)$; егер $y = u(v(x))$ болса, онда $y = \sqrt{x+1}$, $x \in [-1; +\infty)$.

1. Кез келген функцияға кері функция табуға бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

2. $y = x^2$, $y = (3x + 5)^2$ функциялары күрделі функция бола ма?

Жаттығулар

A

4.1. Берілген функцияның кері функциясын анықтаңдар:

а) $y = 7x + 2$; ә) $y = \frac{2x}{3}$; б) $y = 5 - x$.

4.2. $y = f(g(x))$ күрделі функциясын құрайтын f және g функцияларын анықтаңдар :

а) $y = (x + 1)^2$; ә) $y = \sqrt{2x}$.

4.3. $y = x^2$ және $y = \sqrt{x}$ функциялары x-тің қандай мәндерінде өзара кері функциялар болады?

4.4. $y = 2x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ функцияларынан мүмкін болатын күрделі функцияларды құрастырыңдар.

B

4.5. Берілген функцияның кері функциясын анықтап, графигін салыңдар:

а) $y = 2x + 3$; ә) $y = -6x + 9$.

4.6. $f(x) = \frac{2}{x^3}$ және $g(x) = 3x - 5$ функцияларынан күрделі функциялар құрастырыңдар.

4.7. $f(x) = 3x^2 - 2$ функциясына кері функцияны құрастырыңдар, мұндағы $x \mid 0$.

4.8. $f(x) = 2x^2$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$ функцияларынан күрделі функциялар құрастырыңдар.

4.9. $y = \sqrt{\dfrac{3}{x}}$ күрделі функциясы қандай функциялардан құрастырылғанын екі тәсілмен көрсетіңдер.

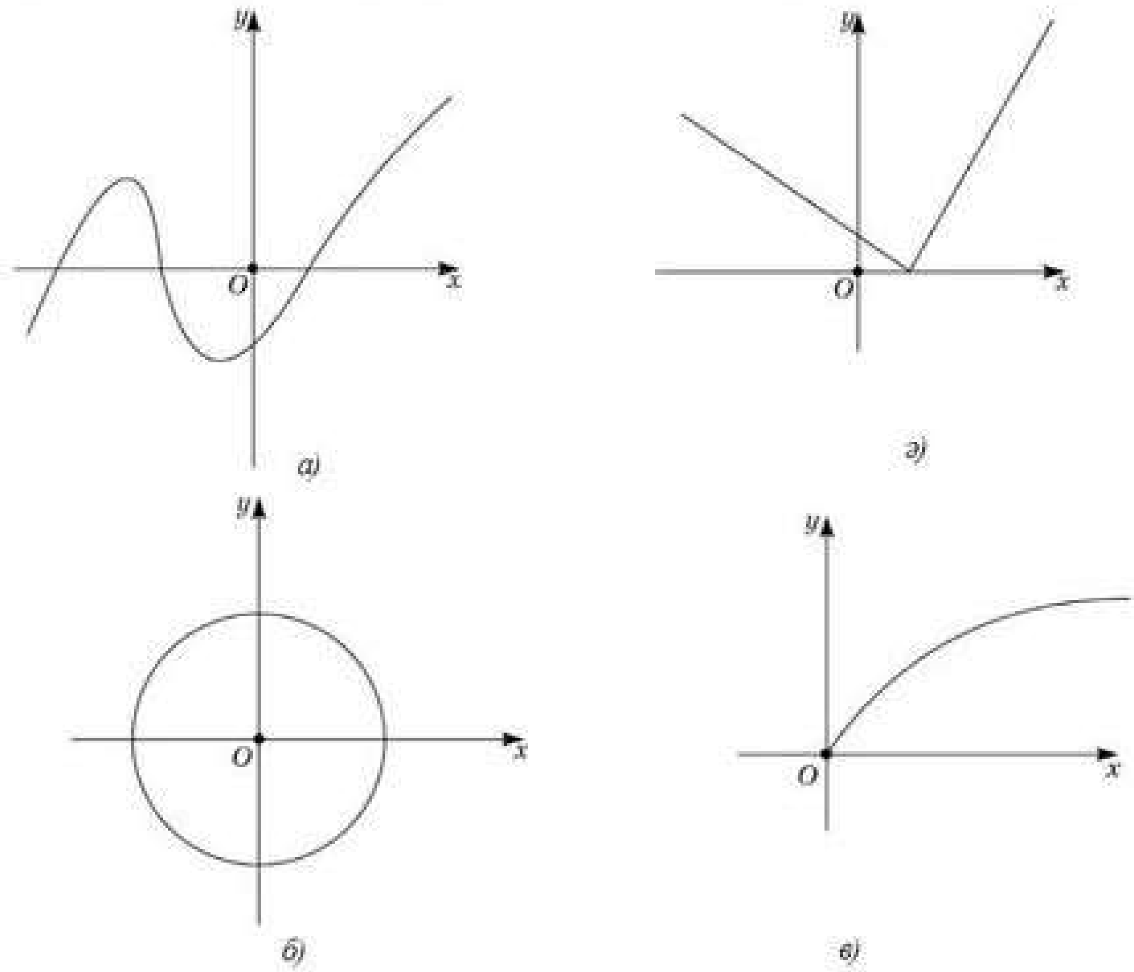
4.10. $f(x) = x$; $g(x) = \sqrt{x}$ және $\varphi(x) = x^2 - 3$ функцияларынан $f(g(\varphi(x)))$ күрделі функциясын құрастырыңдар және күрделі функцияның анықталу облысын табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $f(x) = \sqrt{x-2}$ функциясының анықталу облысын көрсетіңдер :
A) $[-2;\ +\infty)$; B) $(2;\ +\infty)$; C) $[2;\ +\infty)$; D) $(-\infty;\ 2)$.

2. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ функциясының $x_0 = 3$ нүктесіндегі мәнін табыңдар :
A) 4; B) –2; C) –1; D) 2.

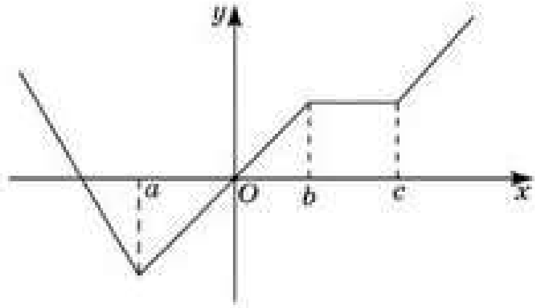
3. Төменде кескінделген қисықтардың қайсысы функцияның графигі болмайды:
A) *а*; B) *ә*; C) *б*; D) *в*?



а) *ә)* *б)* *в)*

4. Берілген функцияның қайсысы жұп функция болып табылады:
A) $y = 2\cos x$; B) $y = 1{,}5\sin x$; C) $y = x$; D) $y = \operatorname{tg} x$?

5. $y = f(x)$ функциясының графигі берілген. Осы функцияның өсу аралықтарын табыңдар:



A) $[a;\ b] \cup [c;\ +\infty)$;
B) $(-\infty;\ a] \cup [b;\ +\infty)$;
C) $(-\infty;\ a]$;	D) $[a;\ b]$.

6. 5-тапсырмадағы суретті қолданып, функцияның кему аралықтарын көрсетіңдер :

A) $[a;\ b]$ және $[c;\ +\infty)$;	B) $(-\infty;\ a]$ және $[b;\ +\infty)$;
C) $(-\infty;\ a]$;	D) $[a;\ b]$.

7. $f(x) = \dfrac{x + 10}{(x + 4)(x + 1)}$ функциясының анықталу облысын көрсетіңдер :

A) $x \neq 4$;	B) $x \neq 1,\ x \neq -4$;
C) $x \neq 1$;	D) $x \neq -4,\ x \neq -1$.

8. Тақ функцияны көрсетіңдер :

A) $y = -\sin^2 x$;	B) $y = \sin x$;
C) $y = \cos x$;	D) $y = \cos^2 x$.

9. $f(x) = \sqrt{2}\cos 4x + \sqrt{2}$ функциясының $x = \dfrac{\pi}{4}$ нүктесіндегі мәнін көрсетіңдер :

A) $\sqrt{2}$;	B) 0;	C) $2\sqrt{2}$;	D) $-\sqrt{2}$.

10. $y = 7{,}8 - 5x$ функциясының мәндер жиыны қандай:

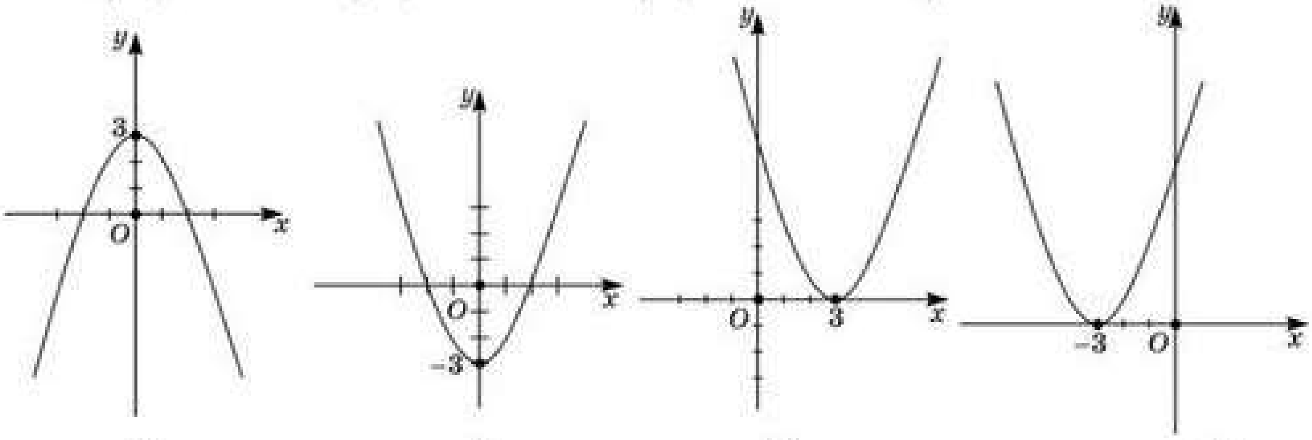
A) R;	B) Q;	C) Z;	D) N?

11. Егер $f(x) = \dfrac{x + 8}{4 + x}$, $g(x) = \dfrac{2}{1 - x}$ және $x = 0$ болса, онда $3f(x) - 2g(x)$ өрнегінің мәнін есептеңдер :

A) 2;	B) 2,5;	C) 1;	D) –2,5.

12. $y = (x - 3)^2$ функциясының графигі қай суретте кескінделген:

A) *а*;	B) *ә*;	C) *б*;	D) *в*?



а)	*ә)*	*б)*	*в)*

13. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{(x + 2)(x - 5)}$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

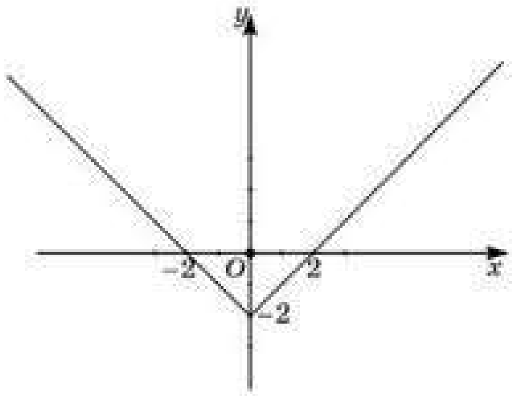
A) $[0;\ 2) \cup (2;\ 5)$; B) $(-\infty;\ 2) \cup (5;\ +\infty)$;
C) $[0;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$; D) $[0;\ +\infty]$.

14. Тақ функцияны көрсетіңдер:
A) $y = |x| + x$; B) $y = |x| + x^2$;
C) $y = x^2|x|$; D) $y = -x\ |x|$.

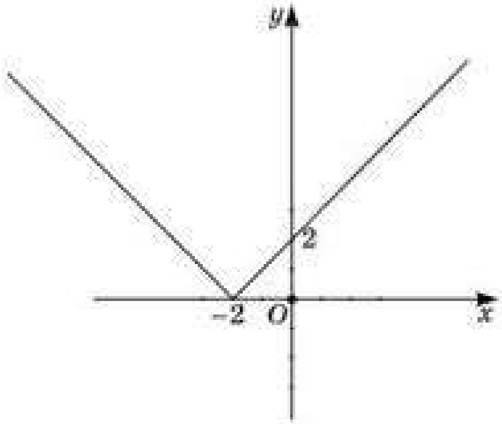
15. $y = \cos x + 1$ функциясының мәндер жиынын табыңдар :
A) $[-1;\ 1]$; B) $[0;\ 1]$; C) $[-2;\ 0]$; D) $[0;\ 2]$.

16. $y(x) = 2 + x$ функциясына кері функцияны көрсетіңдер :
A) $x(y) = 2 - y$; B) $x(y) = y + 2$;
C) $x(y) = y$; D) $x(y) = y - 2$.

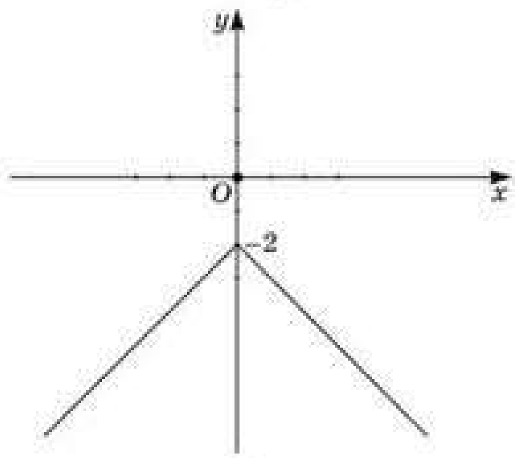
17. Төмендегі графиктердің қайсысы $y = |x + 2|$ функциясының графигі болады:
A) *а*; B) *ә*;
C) *б*; D) *в*?



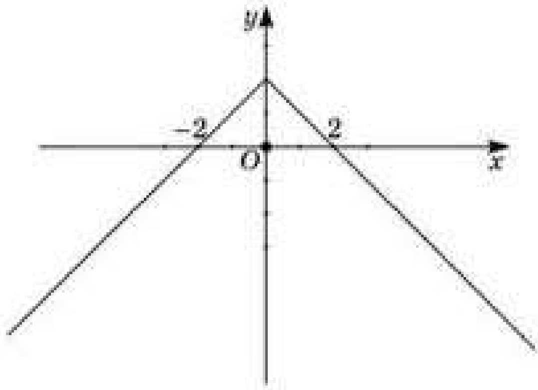
а)



ә)



б)



в)

18. Жұп функцияны көрсетіңдер:
A) $y = x^3 - \cos x$; B) $y = x^2 - \cos x$;
C) $y = x - \sin x$; D) $y = x^3 - \sin 5x$.

19. $y = \sin x - 2$ функциясының мәндер жиынын табыңдар:
A) $(-\infty;\ 0]$; B) $[-3;\ -1]$; C) $[0;\ 2]$; D) $(-2;\ 0]$.

20. $y = \dfrac{5 - x}{1 + x^2}$ функциясының анықталу облысын табыңдар :

A) $x \neq -2$; $x \neq 2$; B) $x \neq 0$; C) $x \neq -2$; D) x — кез келген сан.

21. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 4}$ функциясының анықталу облысын табыңдар :

A) $x \neq 4$; B) $x \neq -4$; C) x | 0; $x \neq 4$; D) x | 0.

22. $y = \dfrac{1}{x + 1} - 7$ функциясының мәндер жиынын табыңдар :

A) $y \neq -1$; B) $y \neq -7$; C) $y \neq 1$; D) $y \neq 7$.

Математикалық сауаттылық бойынша тапсырмалар

23. Доп 16 м жоғарыдан лақтырылды және лақтырылған биіктіктің ширегіне көтеріледі. Доп тоқтағанға дейін қанша метр жүріп өтеді:

A) 26; B) 25; C) 27; D) 16; E) 24?

24. Үш бала баскетбол себетіне доп лақтырды. Әрқайсысы 10 рет лақтырған. 5-кестедегі a және b-ның мәндерін табыңдар:

5-кесте

Ойыншы	Себетке түскен доптар саны	Түскен доптар санының пайызы
Бірінші	8	a
Екінші	b	25%
Үшінші	5	50%

A) 50%; B) 25%; C) 30%; D) 70%; E) 80%.

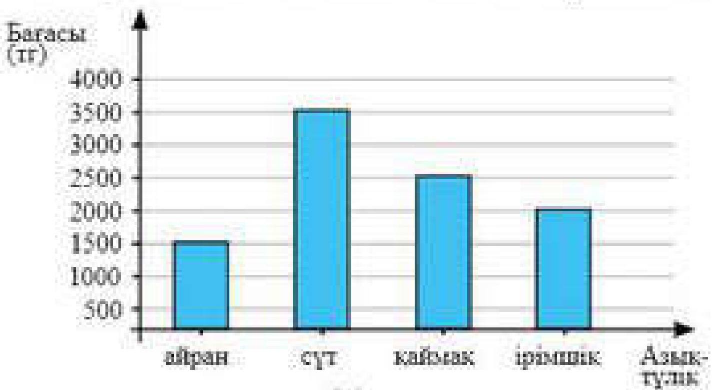
25. Егер $7x = 10$ және $49y = 25$ болса, онда $\dfrac{25x}{28y} + 1{,}5$ өрнегінің мәнін табыңдар:

A) 1,5; B) 2,65; C) 4; D) 5; E) 6,5.

26. Бір күнде типография 20 бума қағаз жұмсайды. Үш аптада қанша бума қағаз жібереді:

A) 300; B) 400; C) 440; D) 350; E) 420?

27. Диаграммада бес адамнан тұратын жанұяның бір айда кейбір азық-түліктерге жіберетін шығыны көрсетілген (26-сурет). Бір адам үшін бір айда сүт пен ірімшікке қанша теңге жұмсалады:



26-сурет

A) 5500 тг; B) 5000 тг; C) 1100 тг; D) 1000 тг; E) 2000 тг?

ÒÀÐÈÕÈ ÌÀҒËÝÌÀÒÒÀÐ

Өëåì ãi òàióåà ôóíêöèÿ ұғûìû үëêåí ðөë àòқàðàäû. Өàìàëàð àðàñûíäàғû áàéëàíûñ ìàòåìàòèêàëûқ қàòûíàñòàðäàí, ñàíäàðғà қîëäàíûëàòûí áàéëàíûñ àðқûëû àíûқòàëàäû. Òàáèғàò äåðåê, ìàòåìàòèêàëûқ áàéëàíûñ ìàòåìàòèêàëûқ òàë ðàìñiðiíà áàéëàíûñòû áàéëàíûñòû ôóíêöèÿ äåï àòàëàäû.

XVII ғ. ôóíêöèÿëàðäûқ òәóåëäiëiêòi қîëäàíó æәíå ìәíäi çåðòòåó ìàòåìàòèêàғà àéìàқòàғû ұғûìûíûң åíãiçiëóiíå áàéëàíûñòû áàñòàëäû.

Îë êåçäå ôóíêöèÿ ұғûìû àéқûí åìåñ. Äåãåíìåí ôóíêöèÿíûң àëғàøқû àíûқòàìàñû Ð. Äåêàðò "Ãåîìåòðèÿ" àòòû åңáåãiíäå ұñûíäû. Áұë åңáåãiíäå îë àéíûìàëûқ øàìàëàð òóðàëû ìәñåëåíi қîéäû.

Àíûқòàìàíû ôóíêöèÿ ұғûìû åíãiçãåíäå ìàòåìàòèêàëûқ àíàëèçäiң íåãiçãi ìàқñàòû — ôóíêöèÿíû òàëäàó.

Ôóíêöèÿ ñөçi (ëàò. *functio* — "îðûíäàó, æүçåãå àñûðó") Ã.Â. Ëåéáíèö åңáåãiíäå ìàғûíàñûíäà қîëäàíûëäû. "*x*-òåí ôóíêöèÿ" òåðìèíií àëғàø Ã.Â. Ëåéáíèö ìåí îíûң øәêiðòi È. Áåðíóëëè қîëäàíäû. Ñîíäàé-ақ, 1698 жылдàí áàñòàï Ã.Â. Ëåéáíèö "àéíûìàëû" æәíå "êîíñòàíòà" (òұðàқòû) òåðìèíäåðií åíãiçäi.

Ôóíêöèÿғà íàқòû àíûқòàìàíû 1718 æ. øâåéöàðèÿëûқ ìàòåìàòèê È. Áåðíóëëè: "*Àéíûìàëû øàìàíûң ôóíêöèÿñû äåï îñû àéíûìàëû ìåí òұðàқòûäàí қàíäàé äà áið òәñiëìåí құðûëғàí øàìàíû àéòàäû*" äåï áåðäi.

Ë. Ýéëåð "Àíàëèçãå êiðiñïå" (1748 æ.) àòòû êiòàáûíäà ôóíêöèÿíûң àíûқòàìà-ñûíû áûëàé òұæûðûìäàéäû: "*Àéíûìàëû øàìàíûң ôóíêöèÿñû äåãåíiìiç — îñû àéíûìàëû øàìà ìåí ñàíäàðäàí íåìåñå òұðàқòû øàìàäàí құðûëғàí àíàëèòèêà-ëûқ өðíåê*". Îë қàçiðãi êåçäå қàáûëäàíғàí ôóíêöèÿíûң áåëãiëåóëåðií äå åíãiçäi.

Ôóíêöèÿíûң áåðiëó өäiñi қîëäàíûëìàéòûí ñàíäûқ ôóíêöèÿíûң қàçiðãi àíûқòàìàñûí îðûñ ìàòåìàòèãi Í.È. Ëîáà÷åâñêèé (1834 æ.) ìåí íåìiñ ìàòåìàòèãi Ï. Äèðèõëå (1837 æ.) áið-áiðiíåí òәóåëñiç áåðäi.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның қасиеттері мен графигі, тригонометриялық функциялардың анықтамасы, мәндерінің кестесі, тригонометриялық теңе-теңдіктер.

2 ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР

§5. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР, ОЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ МЕН ГРАФИКТЕРІ

Түйінді ұғымдар

Функция, тригонометрия, синус, косинус, тангенс, котангенс

Тригонометриялық функциялардың негізгі қасиеттерімен танысасыңдар, олардың графиктерін салуды үйренесіңдер.

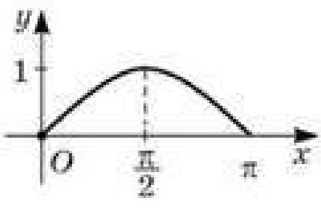
9-сынып алгебра курсында тригонометриялық функциялардың анықтамаларымен, формулалары және кейбір қасиеттерімен таныстыңдар. Осыларды ескеріп және график салудың алгоритмін қолдана отырып, тригонометриялық функциялардың графиктерін салуды қарастырамыз.

I. $y = \sin x$ функциясы.

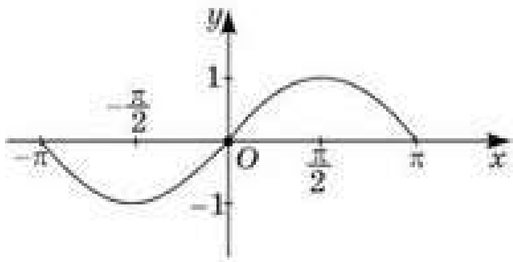
1) Анықталу облысы — барлық нақты сандар жиыны, яғни $x \in R$;
2) мәндер жиыны $[-1;\ 1]$ кесіндісі, яғни $y \in [-1;\ 1]$;
3) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, периодты функция, ең кіші оң периоды 2π.
4) функция тақ, өйтке ні $\sin(-x) = -\sin x$.

$(0;\ 0)$, $\left(\frac{\pi}{6};\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6};\frac{1}{2}\right)$, $(\pi;\ 0)$ нүктелерін координаталық жазықтыққа түсіріп, $y = \sin x$ функциясының $[0;\ \pi]$ кесіндісіндегі графигін саламыз (27, а-сурет).

$y = \sin x$ функциясы тақ функция болғандықтан, оның графигі бас нүктеге қарағанда симметриялы. Осы қасиетті пайдаланып, $[-\pi;\ 0]$ аралығына графикті жалғастырамыз. Сонда $y = \sin x$ функциясының $[-\pi;\ \pi]$ кесіндісіндегі графигін аламыз (27, ә-сурет).



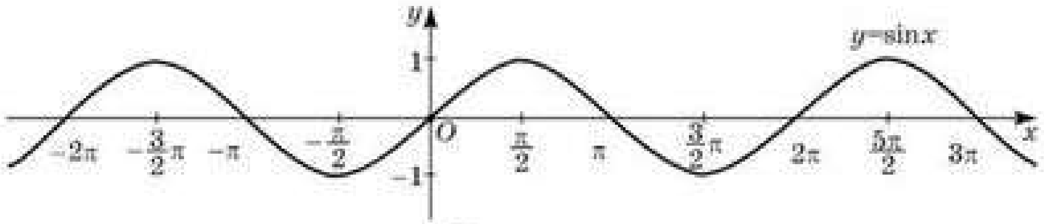
а)



ә)

27-сурет

Демек, $y = \sin x$ функциясының толық бір период ішіндегі графигін салдық. Енді периодты функцияның қасиетін пайдаланып, барлық анықталу облысындағы функция графигін салуға болады (28-сурет).



28-сурет

5) $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$, кесінділерінде функция бірсарынды өспелі, $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$, кесінді лерінде бірсарынды кемімелі.

$y=\sin x$ функциясының графигін *синусоида* деп атайды.

II. $y=\cos x$ функциясы.

Функцияның:

1) анықталу облысы — барлық нақты сандар жиыны, яғни $x\in R$;

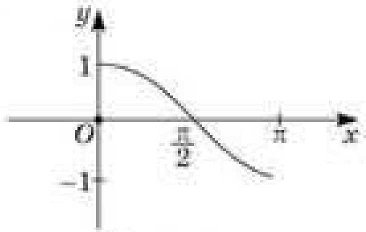
2) мәндер жиыны $[-1;\ 1]$ кесіндісі, яғни $y\in[-1;\ 1]$;

3) $\cos(x+2\pi)=\cos x$, функция периодты, ең кіші оң периоды 2π;

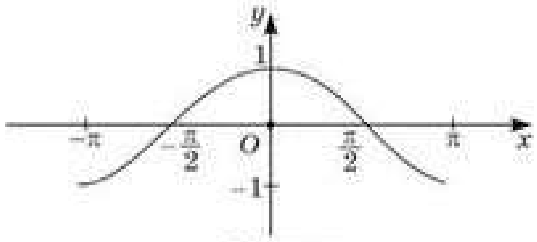
4) функция жұп, өйткені $\cos(-x)=\cos x$.

$(0;\ 1)$, $\left(\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3};-\frac{1}{2}\right)$, $(\pi;\ -1)$ нүктелерін координаталық жазықтықта белгілеп, $y=\cos x$ функциясының $[0;\ \pi]$ кесіндісіндегі графигін саламыз (29-сурет).

$y=\cos x$ функциясы жұп функция болғандықтан, оның графигі ордината осіне қарағанда симметриялы қисық. Осы қасиетті қолданып, $[-\pi;\ 0]$ кесіндісінде графикті жалғастырып саламыз. Сонда $y=\cos x$ функциясының $[-\pi;\ \pi]$ кесіндісіндегі графигін аламыз (30-сурет).

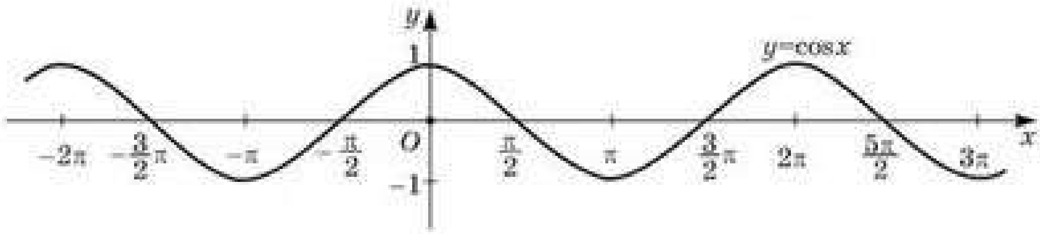


29-сурет



30-сурет

Енді периодты функцияның графигін салу қасиетін пайдаланып, барлық анықталу облысындағы функцияның графигін салуға болады (31-сурет).



31-сурет

5) $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$, кесінділерінде бірсарынды кемімелі және $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in Z$ кесінділерінде бірсарынды өспелі функция.

$y = \cos x$ функциясының графигін *косинусоида* деп атайды.

Сонымен қатар, $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ екенін ескеріп, $y = \cos x$ функциясының графигін $y = \sin x$ функциясының графигінен Ox осінің бойымен $\frac{\pi}{2}$ қашықтығына теріс бағытта параллель көшіру арқылы да алуға болады.

III. $y = \operatorname{tg} x$ функциясы.

Функцияның:

1) анықталу облысы $\{x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\}$ жиынынан басқа барлық нақты сандар жиыны, себебі $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

2) мәндер жиыны — барлық нақты сандар жиыны, яғни $\operatorname{tg} x \in R$;

3) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$ — функция периодты, ең кіші оң периоды π саны;

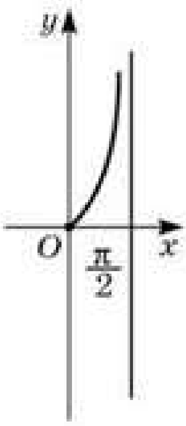
4) функция тақ, өйткені $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

Енді $\operatorname{tg} x$ функциясының графигін салайық.

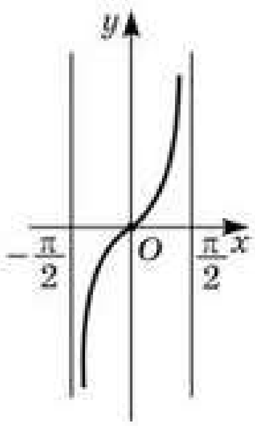
$(0; 0)$, $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{3}\right)$ нүктелерін координаталық жазықтыққа белгілеп, $[0; \frac{\pi}{2})$ аралығында $y = \operatorname{tg} x$ функциясының графигін саламыз (32-сурет).

$y = \operatorname{tg} x$ функциясы тақ функция болғандықтан, оның графигі бас нүктеге қарағанда симметриялы қисық екенін ескеріп, $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ аралығындағы графикті жалғастырамыз. Сонда $y = \operatorname{tg} x$ функциясының $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалындағы графигі шығады (33-сурет).

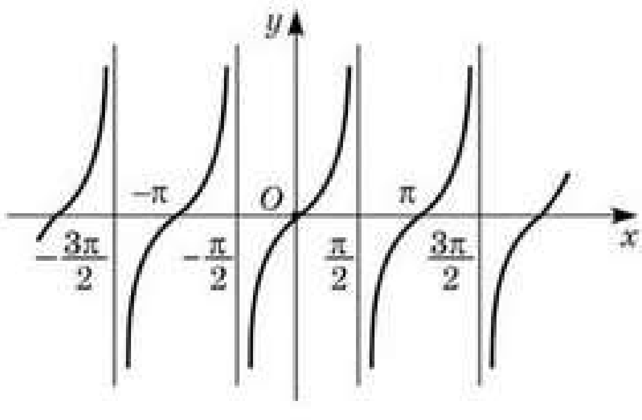
5) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$, интервалдарында функция бірсарынды өспелі.



32-сурет



33-сурет



34-сурет

Енді периодты функцияның қасиетін пайдаланып, барлық анықталу облысындағы функцияның графигін салуға болады (34-сурет).

$y = \operatorname{tg} x$ функциясының графигін *тангенсоида* деп атайды.

IV. $y = \operatorname{ctg} x$ функциясы.

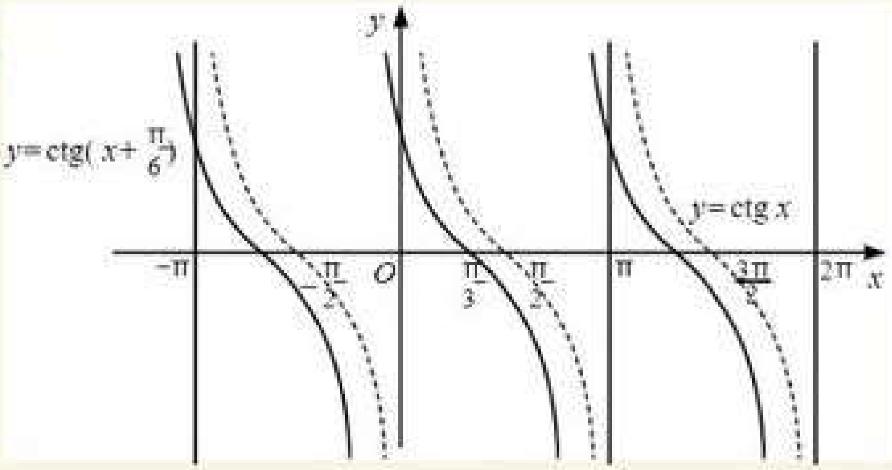
$y = \operatorname{ctg} x$ функциясының негізгі қасиеттерін қолданып, графигін салыңдар.

$y = \operatorname{ctg} x$ функциясының графигін *котангенсоида* деп атайды.

Тригонометриялық функциялардың графиктеріне қарапайым түрлендірулерді қолдануға мысал қарастырайық.

МЫСАЛ $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ функциясының графигін салайық.

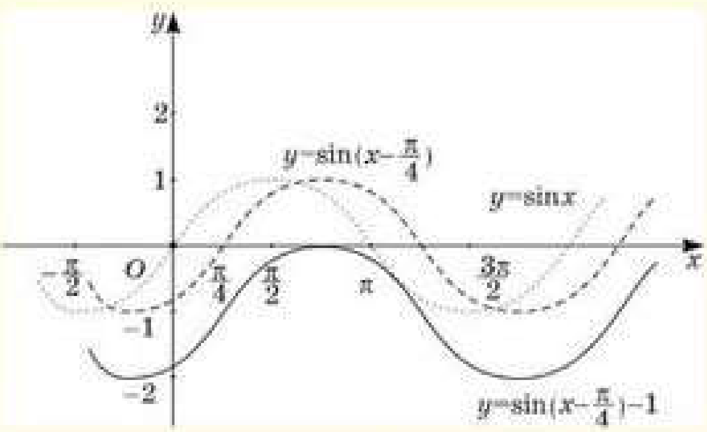
Шешуі. Алдымен $y = \operatorname{ctg} x$ функциясының графигін саламыз. Одан кейін графикті Ox осі бойымен $\frac{\pi}{6}$-ға тең аралыққа теріс бағытқа параллель көшіреміз (35-сурет).



35-сурет

ТҮСІНДІРІҢДЕР

36-суретте $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ функциясының графигі қалай салынған?



36-сурет

1. Синусоида қисығында бірсарынды өспелі немесе бірсарынды кемімелі бөліктер бар ма?
2. Неге $y = \cos x$ функциясының мәндері 1-ден аспайды?
3. 1 және –1 сандары $y = \sin x$ функциясының мәндері деген ұғымнан басқа қандай қасиетін көрсетеді?
4. $y = \cos x$ және $y = \sin x$ функцияларының айырмашылықтарын айқын көрсететін қасиеттерін атаңдар.
5. Неге барлық нақты сандар жиыны $y = \operatorname{tg} x$ және $y = \operatorname{ctg} x$ функцияларының анықталу облысының жиыны бола алмайды?

Жаттығулар

А

5.1. Функцияның жұп немесе тақ екенін анықтаңдар:

а) $y = x\cos x$; ә) $y = \dfrac{\cos 5x + 1}{x}$;

б) $y = \dfrac{\sin^2 x}{x^2 - 1}$; в) $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{4 - x^4}$.

5.2. Қарапайым түрлендірулерді қолданып, $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ функциясының графигін салыңдар. Осы графиктің $y = \sin x$ функциясының графигінен айырмашылығын көрсетіңдер.

5.3. $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар:

а) $y = 1 + \cos x$; ә) $y = \sin x - 3$; б) $y = \operatorname{tg} x - 1$; в) $y = -2 + \operatorname{ctg} x$.

5.4. Функцияның графигін салыңдар:

а) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; ә) $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right)$.

В

5.5. $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар:

а) $y = \sin 2x$; ә) $y = \cos 3x$; б) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

в) $y = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$; г) $y = 3 - \sin\dfrac{x}{2}$; ғ) $y = \cos 1{,}5x - 2$.

5.6. $y = f(x)$ функциясының ең кіші оң периодын анықтаңдар:

а) $f(x) = \sin 7x$; ә) $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{2x}{3}$; б) $f(x) = \cos\dfrac{x}{6}$;

в) $f(x) = \operatorname{ctg} 8x$; г) $f(x) = \sin 0{,}25x$; ғ) $f(x) = \cos 2{,}5x$.

5.7. Қарапайым түрлендірулерді қолданып, берілген функцияның графигін салыңдар:

а) $y = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2$; ә) $y = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{x}{2}\right) - 1$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, оның анықталу облысы, мәндер жиыны, қасиеттері, кері функция ұғымы, оны құру әдісі, тригонометриялық функциялардың қасиеттері, графиктері.

§6. АРКСИНУС, АРККОСИНУС, АРКТАНГЕНС, АРККОТАНГЕНС

Түйінді ұғымдар

Функция, кері функция, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс

Сендер арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс ұғымдарымен танысасыңдар, олардың мәндерін есептеуде, өрнектерді ықшамдауда, тепе-теңдіктерді дәлелдеуде қолдануды үйренесіңдер.

6-кестені толтырыңдар:

6-кесте

Функция	Берілген функцияға кері функция
$y = 2x$	
$y = x - 2$	
$y = -x + 3$	
$y = x^2 (x \geq 0)$	

ТҮСІНДІРІҢДЕР

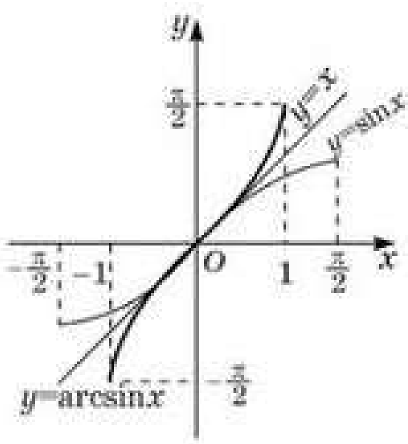
Неліктен кестедегі төртінші мысалда қосымша шарт берілген?

Кері функцияның анықтамасын және оның бар болу шартын қолданып, кері тригонометриялық функциялардың ұғымын енгізейік.

I. $y = \sin x$ функциясына кері функция.

$y = \sin x$ функциясы $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде анықталған, бірсарынды өспелі және өзінің барлық мәндерін $[-1; 1]$ кесіндісінде қабылдайды. Демек, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде $y = \sin x$ функциясына кері функция бар.

$y = \sin x$ функциясына кері функция $y = \arcsin x$ деп белгіленіп, *арксинус икс* деп оқылады.



37-сурет

Онда $y = \arcsin x$ функциясы $[-1;\ 1]$ кесіндісінде анықталған, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде өзгеретін бірсарынды өспелі функция.

$y = \arcsin x$ функциясының графигі $y = \sin x$ функциясының графигіне $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы қисық. Демек, $y = x$ түзуі симметрия осі болып табылады (37-сурет).

Енді $y = \arcsin x$ кері тригонометриялық функциясының қасиеттерін келтірейік:

1) функцияның анықталу облысы $[-1;\ 1]$ кесіндісі;
2) мәндер жиыны $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісі;
3) функция тақ, яғни $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;
4) функция бірсарынды өспелі.

Кез келген $x \in [-1;\ 1]$ үшін $\sin(\arcsin x) = x$ және $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$y = \sin x$ (мұндағы $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $(-1 \le \sin x \le 1)$ — тура функция.

$y = \arcsin x$ (мұндағы $x \in [-1;\ 1]$, $(-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2})$ — кері функция.

МЫСАЛ

1. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ мәнін табайық.

Шешуі. Анықтама бойынша $y = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ функциясын $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ түрінде жазамыз және $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Сондықтан $y = \frac{\pi}{4}$, осыдан $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

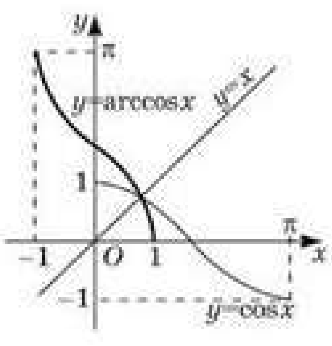
Жауабы: $\frac{\pi}{4}$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

II. $y = \cos x$ функциясына кері функция.

$y = \cos x$ функциясы $x \in [0;\ \pi]$ кесіндісінде анықталған, бірсарынды кемімелі және өзінің барлық мәндерін, $-1 \le \cos x \le 1$, қабылдайды. Ендеше, $x \in [0;\ \pi]$ кесіндісінде $y = \cos x$ функциясына кері функция бар.



38-сурет

$y = \cos x$ функциясына кері функция $\boldsymbol{y = \arccos x}$ деп белгіленіп, ***арккосинус икс*** деп оқылады.

$y = \arccos x$ функциясы $[-1;\ 1]$ кесіндісінде анықталған, $[0;\ \pi]$ кесіндісінде өзгеретін бірсарынды кемімелі функция.

$y = \arccos x$ функциясының графигі $y = \cos x$ функциясының графигіне $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы қисық. Демек, $y = x$ түзуі — симметрия осі (38-сурет).

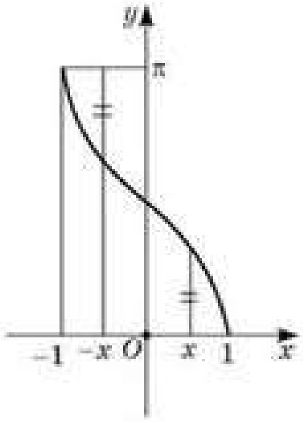
Енді $y = \arccos x$ кері тригонометриялық функциясының қасиеттеріне тоқталайық:

1) функцияның анықталу облысы $[-1; 1]$ кесіндісі;
2) мәндер жиыны $[0; \pi]$ кесіндісі;
3) функция жұп та, тақ та емес;
4) функция бірсарынды кемімелі.

Кез келген $x \in [-1; 1]$ үшін $x = \cos(\arccos x)$, $0 \leq \arccos x \leq \pi$ теңдігі орындалады.

Демек, $y = \cos x$ (мұндағы $x \in [0; \pi]$, $-1 \leq \cos x \leq 1$) — тура функция;

$y = \arccos x$ (мұндағы $x \in [-1; 1]$, $0 \leq \arccos x \leq \pi$) — кері функция.



39-сурет

Кез келген $x \in [-1; 1]$ үшін $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$ немесе

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \qquad (1)$$

тепе-теңдігін алуға болады. Осы тепе-теңдіктің орындалатынын $y = \arccos x$ функциясының графигінен көруге болады (39-сурет).

МЫСАЛ

2. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ мәнін табайық.

Шешуі. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ өрнегінің мәнін табу үшін (1) тепе-теңдікті қолданамыз:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Жауабы: $\frac{2\pi}{3}$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ болады?

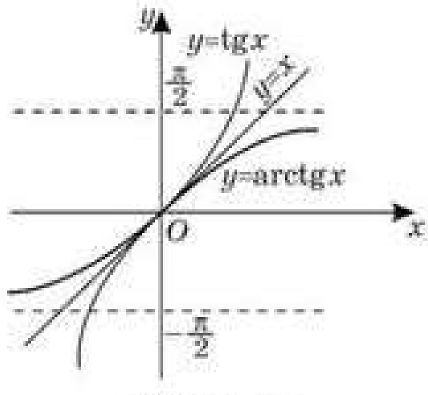
III. $y = \operatorname{tg} x$ функциясына кері функция.

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында $y = \operatorname{tg} x$ функциясы анықталған, бірсарынды өспелі және өзінің барлық мәндерін қабылдайды, $\operatorname{tg} x \in (-\infty; +\infty)$. Демек, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында $y = \operatorname{tg} x$ функциясына кері функция бар.

$y = \operatorname{tg} x$ функциясына кері функция $y = \operatorname{arctg} x$ деп белгіленіп, ***арктангенс икс*** деп оқылады.

$y = \operatorname{arctg} x$ функциясы $x \in R$ жиынында анықталған, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында өзгеретін бірсарынды өспелі функция.

$y = \operatorname{arctg} x$ функциясының графигі $y = \operatorname{tg} x$ функциясының графигіне $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы кісық (40, *а*-сурет). Демек, $y = x$ түзуі симметрия осі болып табылады.



40, *а*-сурет

Енді $y = \operatorname{arctg} x$ кері тригонометриялық функциясының қасиеттеріне тоқталайық:

1) функцияның анықталу облысы — барлық нақты сандар жиыны, яғни $x \in R$;

2) мәндер жиыны $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалы;

3) функция тақ, яғни кез келген x үшін $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;

4) функция бірсарынды өспелі.

Кез келген x үшін $x = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$.

МЫСАЛ

3. $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ мәнін есептейік.

Шешуі. Анықтама бойынша $\operatorname{tg} y = \sqrt{3}$ және $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Осыдан $y = \frac{\pi}{3}$. Сонымен, $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

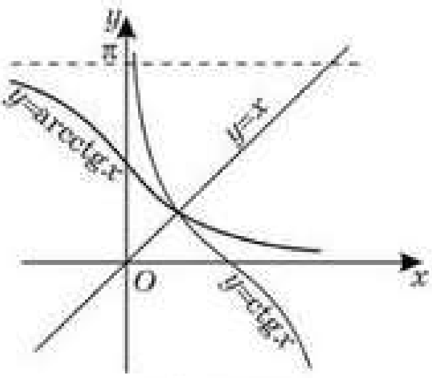
Жауабы : $\frac{\pi}{3}$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ болады?

IV. $y = \operatorname{ctg} x$ функциясына кері функция.

$y = \operatorname{ctg} x$ функциясы $(0; \pi)$ интервалында анықталған, бірсарынды кемімелі және сол аралықта R жиынындағы өзінің барлық мәндерін қабылдайды.



40, ә-сурет

Демек, осы интервалда $y = \operatorname{ctg} x$ функциясына кері функция бар.

$y = \operatorname{ctg} x$ функциясына кері функция $y = \operatorname{arcctg} x$ деп белгіленіп, ***арккотангенс икс*** деп оқылады.

Онда $y = \operatorname{arcctg} x$ функциясы $x \in R$ жиынында анықталған, $(0; \pi)$ интервалында өзгеретін бірсарынды кемімелі функция.

$y = \operatorname{arcctg} x$ функциясының графигі $y = \operatorname{ctg} x$ функциясының графигіне $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы қисық (40, ә-сурет). Демек, $y = x$ түзуі — симметрия осі.

$y = \operatorname{arcctg} x$ кері тригонометриялық функциясының қасиеттеріне тоқталайық. Функцияның:

1) анықталу облысы — барлық нақты сандар жиыны, яғни $x \in R$;

2) мәндер жиыны $(0; \pi)$ аралығы;

3) функция жұп та, тақ та емес;

4) функция бірсарынды кемімелі.

Кез келген x үшін $x = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$, $0 < \operatorname{arcctg} y < \pi$;

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x \qquad (2)$$

тепе-теңдігі орындалад ы.

МЫСАЛ **4.** $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$ мәнін есептейік.

Шешуі. $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$ тепе-теңдігі бойынша, $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Жауабы: $\frac{5\pi}{6}$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$ болады?

Өрнектер ді ықшамдау, есептеу, теңдеулерді шешу, тепе-теңдіктерді дәлелдеу кезінде кері тригонометриялық функциялардың қолданылуына мысалдар келтірейік.

МЫСАЛ **5.** Егер x аргументі $[-1;\ 1]$ кесіндісінде өзгерсе, онда $\cos(\arcsin x)$-ты табайық.

Шешуі. $\arcsin x = y$ деп алайық. Онда $x = \sin y$ және $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Енді $\cos y$-ті анықтау үшін $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ тепе-теңдігін қолданамыз. Сонда $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$, демек, $\cos^2 y = 1 - x^2$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде $\cos y \geq 0$. Сондықтан $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, яғни $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Жауабы: $\sqrt{1 - x^2}$.

МЫСАЛ **6.** $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$ өрнегінің мәнін есептейік.

Шешуі. Алдымен $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = \varphi$ деп белгілейік. Сонда $\cos\varphi = -\frac{3}{5}$ және $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. Енді жарты бұрыштың формуласына сәйкес $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{8}{2} = 4$. Сонда $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \pm 2$ болады. Есептің шарты бойынша $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, демек, $\frac{\pi}{4} < \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$, ал $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ интервалында $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = 2$. Демек, $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = 2$.

Жауабы: 2.

ЕСТЕ САҚТАҢДАР:

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, мұндағы $x \in [-1;\ 1]$.
2. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

?

1. Неге $y = \sin x$ функциясына кері функцияны $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде ғана қарастырамыз?
2. $y = \operatorname{ctg} x$ функциясына кері функция болу үшін қандай шарттар орындалуы керек?

Жаттығулар

A

6.1. Есептеңдер:

а) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\mathrm{arcctg}\, \frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; ғ) $\mathrm{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6.2. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\mathrm{arctg}(-1) - \mathrm{arctg} 1$; ә) $\arcsin(-1) - \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) - \mathrm{arctg}\, \sqrt{3}$; в) $\arcsin 1 + \mathrm{arctg}\, \sqrt{3}$.

6.3. Салыстырыңдар:

а) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ және $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; ә) $\arcsin \frac{1}{2}$ және $\mathrm{arctg} 1$;

б) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ және $\mathrm{arctg}\, \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\mathrm{arcctg}\, (-1)$ және $\mathrm{arctg}(-1)$.

Өрнектердің мәндерін табыңдар (**6.4—6.7**):

6.4. а) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; ә) $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\right)\right)$;

б) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6.5. а) $\mathrm{arcctg} 1 - \mathrm{arctg}\, \sqrt{3} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

ә) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $- \mathrm{arcctg}\, \sqrt{3}$;

б) $\arcsin(-1) - \frac{3}{2} \arccos \frac{1}{2} + 3\mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

в) $-4\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 8\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 15\mathrm{arctg}\, \frac{\sqrt{3}}{3}$.

B

6.6. а) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$; ә) $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $\cos\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$; в) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

6.7. а) $\mathrm{tg}\left(\pi + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; ә) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\sqrt{3}\right)$;

б) $\cos(\pi - \arcsin(-1))$; в) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \arccos(-1)\right)$.

Калькулятордың немесе кестенің көмегімен өрнектердің мәнін табыңдар **(6.8-6.9)**:

6.8. а) arcsin0,5005; ә) arccos0,8091.

6.9. а) arctg3,5; ә) arccos0,2184.

6.10. Теңдеуді шешіңдер:

а) $\operatorname{arctg}2x = \frac{\pi}{6}$; ә) $\operatorname{arcctg}(-3x) = \frac{\pi}{4}$;

б) $2\arcsin(5x - 1) = -\frac{\pi}{2}$; в) $3\arccos(2x + 3) = \frac{5\pi}{2}$.

6.11. Келесі өрнектердің мағынасы бар ма:

а) $\arcsin\sqrt{5}$; ә) $\operatorname{arctg}\sqrt{7}$;

б) $\arccos\sqrt{3}$; в) arcctg 0?

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $y = \frac{x}{\cos x}$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

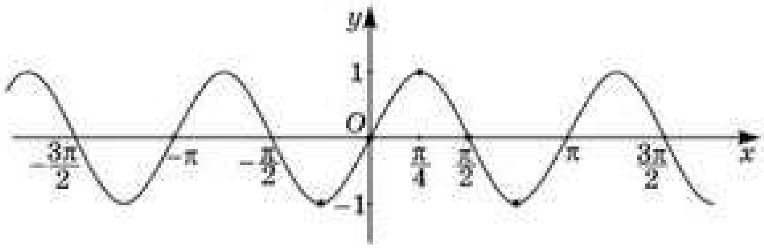
A) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; B) $x \neq 2\pi n,\ n \in Z$;

C) $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$; D) $x \neq \pi n,\ n \in Z$.

2. $y = 3 + 2\cos x$ функциясының мәндер жиынын табыңдар:

A) [–1; 3]; B) [–5; 0]; C) [1; 5]; D) [3; 5].

3. Суретте қай функцияның графигі кескінделген:



A) $y = \sin 2x$; B) $y = \cos\frac{x}{2}$; C) $y = \cos 2x$; D) $y = \sin\frac{x}{2}$?

4. $y = \sin 4x + \frac{1}{x-3}$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

A) $(-\infty; 3)$; B) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; C) [0; 3]; D) $(-3; +\infty)$.

5. $y = 3\cos^2 x - 1$ функциясының мәндер жиынын анықтаңдар:

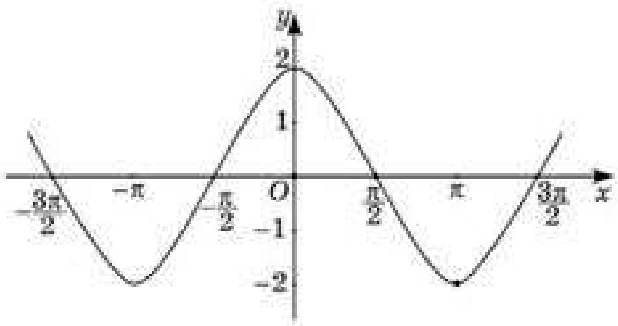
A) [1; 2]; B) [–1; 3]; C) [–1; 2]; D) [0; 3].

6. $\arcsin\frac{1}{2} - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ өрнегінің мәні неге тең:

A) $\frac{\pi}{3}$; B) $\frac{\pi}{6}$; C) $\frac{\pi}{4}$; D) 0?

7. Суретте қай функцияның графигі кескінделген:

A) $y = \cos 2x$;
B) $y = -2\cos x$;
C) $y = 2\cos x$;
D) $y = 2\sin x$?



8. $\arcsin 1 - \arccos 0 - 2\text{arctg}\,0$ өрнегінің мәнін есептеңдер:

A) 0; B) –1; C) 1; D) 2.

9. $\arcsin\frac{1}{2}$ және $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ сандарын салыстырыңдар :

A) $\arcsin\frac{1}{2} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; B) $\arcsin\frac{1}{2} > \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

C) $\arcsin\frac{1}{2} < \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; D) $\arcsin\frac{1}{2}$ m $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

10. $y = \cos x$ функциясының графигіне қанша түрлендіру жасау арқылы $y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$ функциясының графигін алуға болады:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5?

11. $\text{arctg}0 - \arccos\frac{1}{2} - \arcsin\frac{1}{2} + \text{arcctg}0$ өрнегі мәнінің квадраты неге тең:

A) 2; B) 1; C) 4; D) 0?

Математикалық сауаттылық бойынша тапсырмалар

12. Шаршының ауданы 81 $см^2$. Қабырғасының ұзындығы берілген шаршы қабырғасының 25%-ын құрайтын екінші шаршының периметрін табыңдар:

A) 18; B) 10; C) 4; D) 9; E) 15.

13. 15 кг алмұрт пен 6 кг алманың құны 5 кг алмұрт пен 18 кг алманың құнымен бірдей. 1 кг алмұрттың бағасы 1 кг алманың бағасынан қанша есе артық:

A) 2 есе; B) 3 есе; C) 25 есе; D) 1,5 есе; E) 1,2 есе?

14. 25 санына бөлгенде қалдықта бір санын беретін ең үлкен үштаңбалы санды табыңдар:

A) 976; B) 975; C) 974; D) 966; E) 964.

15. Кестедегі сандар қандай да бір заңдылықпен құрастырылған. Белгісіз санды табыңдар:

3	5
4	60

2	6
5	60

4	7
5	?

A) 150; B) 160; C) 140; D) 130; E) 170.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Тригонометриялық функциялардың анықтамалары, қасиеттері, графиктері, формулалары, кері тригонометриялық функциялар, теңбе-тең түрлендірулер.

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР

3

§7. ҚАРАПАЙЫМ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Түйінді ұғымдар

Теңдеу, тригонометрия, теңдеудің шешімі

Сендер қарапайым тригонометриялық теңдеулер ұғымымен танысасыңдар және қарапайым тригонометриялық теңдеулерді шығаруды үйренесіңдер.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Сендер тригонометриялық тепе-теңдіктерді, формулаларды, тригонометриялық функциялардың қасиеттерін, алгебралық теңдеулерді шешу әдістерін білесіңдер.

Айнымалысы тригонометриялық функцияның аргументі ретінде (немесе аргументінің құрамында) берілген теңдеуді ***тригонометриялық теңдеу*** *деп атайды.*

Мысалы, $2\sin x = 1$; $\operatorname{ctg} x = 1$; $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -2$; $3\cos x = 7\sin x$; $4\sin^2 x + 2\cos^2 x = 3\sin^2 x$; $\cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x \cdot \cos 2x$ т.с.с.

$$\sin x = a,\ \cos x = a,\ \operatorname{tg} x = a,\ \operatorname{ctg} x = a \qquad (1)$$

(мұндағы a — кез келген нақты сан) түрінде берілген тригонометриялық теңдеулерді ***қарапайым тригонометриялық теңдеулер*** деп атайды.

Берілген теңдеуді дұрыс тепе-теңдікке айналдыратын аргументтің мәндерін табу ***тригонометриялық теңдеуді шешу*** *деп аталады.*

Тригонометриялық теңдеулерді шешудің өзіне тән ерекше әдістері бар:

1) тригонометриялық теңдеудің бір түбірі бар болса, онда оның шексіз түбірлері болады;

2) басқа теңдеулер тәрізді тригонометриялық теңдеуді оның екі жақ бөлігіне ортақ көбейткіш болатын тригонометриялық функцияға бөлуге болмайды, себебі теңдеудің ең болмағанда бір шешімі жоғалады.

Кез келген тригонометриялық теңдеу тепе-тең түрлендірулерден кейін (1) түріндегі теңдеулердің біреуіне келеді.

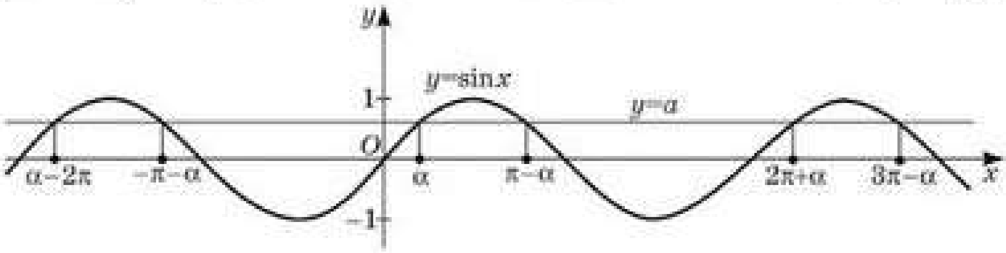
Енді қарапайым теңдеулерді шешуді қарастырайық.

I. $\sin x = a$ теңдеуін шешейік.

$y = \sin x$ функциясының анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны, яғни $x \in R$. Мәндер жиыны $[-1; 1]$ кесіндісі, яғни $|\sin x| \leq 1$, функция шектелген.

Сондықтан $\sin x = a$ теңдеуінің $|a| \le 1$ шарты орындалғанда ғана шешімі болады. Ал, егер a саны модулі бойынша бірден үлкен, яғни $|a| > 1$ болса, онда $\sin x = a$ теңдеуінің шешімі болмайды.

Енді $\sin x = a$, мұнда ғы $|a| \le 1$, теңдеуінің шешуін қарастырамыз. $\sin x = a$ теңдеуін шешу үшін $y = \sin x$ және $y = a$ функцияларының графиктерін бір координаталық жазықтықта салайық (41-сурет).



41-сурет

Абсциcса осіне параллель $y = a$ түзуі синусоида қисығымен шексіз көп нүктелерде қиылысады. Қиылысу нүктелерінің абсциссалары $\sin x = a$ теңдеуінің шешімдері болып табылады. $y = \sin x$ функциясы периодты функция болғандықтан, $\sin x = a$ теңдеуінің бір период ішіндегі барлық шешімдерін тапсақ жеткілікті. Қалған шешімдер функцияның периодтылық қасиетімен анықталады. Аргумент $[0;\ 2\pi]$ кесіндісінде өзгергенде, $\sin x = a$ теңдеуінің $y = a$ түзуімен қиылысу нүктелерінің абсциссалары $x_1 = \alpha$, $x_2 = \pi - \alpha$ болады.

Енді $\sin x$ функциясының периоды 2π-ге тең екенін ескеріп, теңдеудің барлық шешімдерін жазу үшін мынадай формулалар шығарып аламыз:

$$x = \alpha + 2\pi k,\ k \in Z. \qquad (2)$$

$$x = \pi - \alpha + 2\pi k,\ k \in Z. \qquad (3)$$

Осы шешімдерді бір формуламен беруге болады:

$$x = (-1)^n\alpha + \pi n;\ n \in Z. \qquad (4)$$

(4)-формуладан (2) және (3) формулалармен жазылған шешімдерді алуға болатынына көз жеткізейік.

Егер $n = 2k$ болса, онда (4)-формуладан

$$x = (-1)^{2k} \cdot \alpha + 2\pi k = \alpha + 2\pi k,\ \ k \in Z.$$

Бұл (2)-формуланы береді.

Енді $n = 2k + 1$ болса, онда (4) формуладан

$$x = (-1)^{2k+1} \cdot \alpha + \pi(2k + 1) = -\alpha + 2\pi k + \pi = \pi - \alpha + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Бұл (3)-формуланы береді.

$\sin\alpha = a$ болса, онда $\alpha = \arcsin a$ екенін ескеріп, (4)-формуланы былай жазамыз:

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n,\ n \in Z. \qquad (5)$$

(5)-*формула* $\sin x = a$ *теңдеуі шешімінің жалпы түрі болып табылады*.

$\sin x = a$ теңдеуінің дербес шешімдері төмендегі 7-кестеде көрсетілген.

7-кесте

$\sin x = 1$	$\sin x = -1$	$\sin x = 0$
$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = \pi n,\ n \in Z$

МЫСАЛ

1. $2\sin x = \sqrt{3}$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^n \cdot \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

Енді $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$ екенін ескерсек, онда $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$. Бұл теңдеудің радиандық шешімдері, градустық шешімдері $x = (-1)^n \cdot 60° + 180° \cdot n,\ n \in Z.$

Жауабы : $(-1)^n \dfrac{\pi}{3} + \pi n$ немесе $(-1)^n \cdot 60° + 180° \cdot n,\ n \in Z.$

Тригонометриялық теңдеулердің шешімін радиандық немесе градустық түрде көрсетуге болады. Алдағы уақытта шешімді бір ғана түрмен береміз.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$2\sin(2x - 1) = 1$ теңдеуінің шығарылуын түсіндіріңдер.

Шешуі. $\sin(2x - 1) = \dfrac{1}{2}$;

$2x - 1 = (-1)^n \arcsin\dfrac{1}{2} + \pi n;\ n \in Z;$

$2x = 1 + (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi \cdot n;\ n \in Z;$

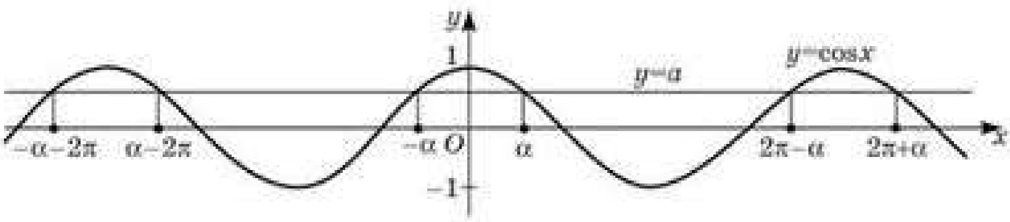
$x = \dfrac{1}{2} + (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2} n,\ n \in Z.$

Жауабы : $\dfrac{1}{2} + (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2} n,\ n \in Z.$

II. $\cos x = a$ теңдеуінің шешімдерін анықтайық.

$y = \cos x$ функциясының анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны ($x \in R$), функцияның мәндер жиыны $[-1;\ 1]$ кесіндісі, яғни $|\cos x| \leq 1$ функция шектелген. Егер теңдіктің оң жағындағы сан $|a| > 1$ болса, онда $\cos x = a$ теңдеуінің шешімі жоқ. Сондықтан теңдіктің оң жағындағы a саны $|a| \leq 1$ шартын қанағаттандыруы керек.

Енді $\cos x = a$ (мұндағы $|a| \leq 1$) теңдеуінің шешімін табу үшін косинусоида қисығын және ордината осіне параллель $y = a$ түзуінің графиктерін бір координаталық жазықтықта салайық (42-сурет).



42-сурет

Косинусоида мен $y = a$ түзуі шексіз көп нүктелерде қиылысады. Қиылысу нүктелерінің абсциссалары $\cos x = a$ теңдеуінің шешімдері болады.

$y = \cos x$ периодты функция, оның ең кіші оң периоды 2π. Сондықтан $\cos x = a$ теңдеуінің бір период ішіндегі барлық шешімдерін тапсақ жеткілікті. Қалған шешімдер функцияның периодтылығымен анықталады. Сонымен қатар, функция жұп болғандықтан, $[-\pi; \pi]$ кесіндісінде $y = \cos x$ функциясы мен $y = a$ $(0 < a < 1)$ түзуінің қиылысу нүктелерінің абсциссалары симметриялы сандар болады. Демек, α саны $\cos x = a$ теңдеуінің бір шешімі болса, онда екінші шешімі $(-\alpha)$.

Енді $\cos x$ функциясының периоды 2π-ге тең екенін ескеріп,

$$x = \alpha + 2\pi n;\ n \in Z. \tag{6}$$

$$x = -\alpha + 2\pi n;\ n \in Z. \tag{7}$$

Осы формулаларды біріктіріп жазуға болады, яғни

$$x = \pm\alpha + 2\pi n;\ n \in Z. \tag{8}$$

Енді $\cos\alpha = a$ болса, онда $\alpha = \arccos a$ екенін ескерсек, (8)-формуланы мына түрде жазуға болады:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n;\ n \in Z. \tag{9}$$

(9)-формула $\cos x = a$ теңдеуі шешімінің жалпы түрі.

$\cos x = a$ теңдеуінің дербес шешімдері 8-кестеде көрсетілген.

8-кесте

$\cos x = 1$	$\cos x = -1$	$\cos x = 0$
$x = 2\pi n,\ n \in Z$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

МЫСАЛ

2. $2\cos x = -1$ теңдеуінің шешімін табайық.

Шешуі. Берілген теңдеуді шешу үшін екі жақ бөлігін де 2-ге бөлеміз: $\cos x = -\frac{1}{2}$, онда $x = \pm\arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi n,\ n \in Z;$

$x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{2}) + 2\pi n,\ n \in Z;$

$x = \pm(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi n,\ n \in Z;$

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

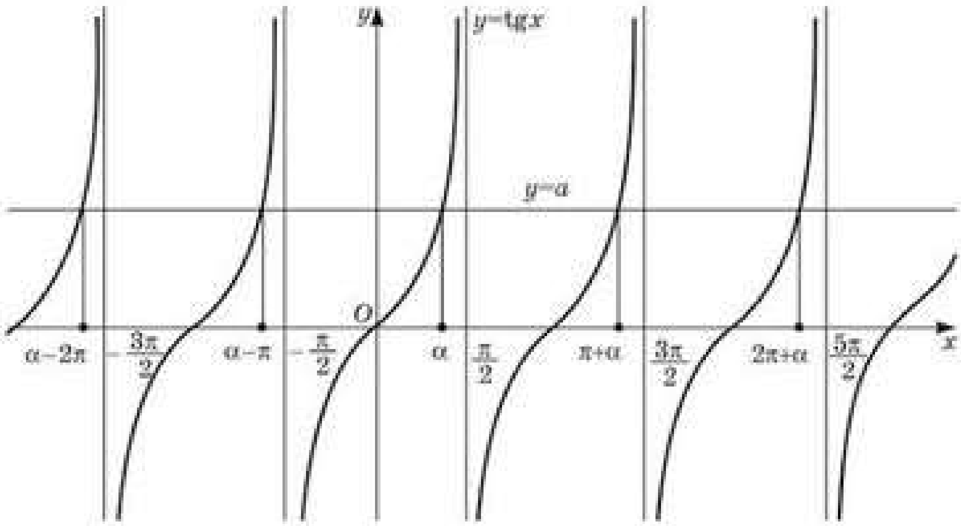
Жауабы : $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $3\cos x = 4$ теңдеуінің шешімі болмайды?

III. $\operatorname{tg} x = a$ және $\operatorname{ctg} x = a$ теңдеулерінің шешімін табайық.

Барлық нақты сандар жиыны $y = \operatorname{tg} x$ функциясының мәндер жиыны екені белгілі, яғни $\operatorname{tg} x \in R$. Сондықтан $\operatorname{tg} x = a$ теңдеуінің a-ның кез келген мәнінде шешімі бар.



43-сурет

$y = \operatorname{tg} x$ функциясының графигі тангенсоида қисығы $y = a$ түзуімен, кез келген период ішінде, бір ғана нүктеде қиылысады. Сол қиылысу нүктесінің абсциссасы $\operatorname{tg} x = a$ теңдеуінің шешімі (43-сурет).

Қалған шешімдер функцияның периодтылық қасиетімен анықталады.

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында $\operatorname{tg} x = a$ теңдеуінің шешімін α деп ұйғарсақ, онда теңдеудің барлық шешімдері $x = \alpha + \pi n,\ n \in Z$ формуласымен анықталады. $\operatorname{tg} \alpha = a$, ал $\alpha = \operatorname{arctg} a$ болғандықтан, соңғы формула мына түрге келеді:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z. \qquad (10)$$

(10) формула $\operatorname{tg} x = a$ теңдеуі шешімінің жалпы түрі. Тура осылай $\operatorname{ctg} x = a$ теңдеуінің шешімдері жалпы түрде берілген

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z \qquad (11)$$

формуласымен анықталады.

$\operatorname{tg} x = a$ және $\operatorname{ctg} x = a$ теңдеулерінің дербес шешімдері 9-, 10-кестелерде берілген:

9-кесте

$\operatorname{tg} x = 1$	$\operatorname{tg} x = -1$	$\operatorname{tg} x = 0$
$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = \pi n,\ n \in Z$

10-кесте

$\operatorname{ctg} x = 1$	$\operatorname{ctg} x = -1$	$\operatorname{ctg} x = 0$
$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

МЫСАЛ

3. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n,\ n \in Z$. Енді $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ екенін ескерсек, $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Жауабы: $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=1$ теңдеуі қалай шешілген?

Шешуі. $\frac{x}{2}=\operatorname{arcctg}1+n\pi$; $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+n\pi$, $n\in Z$;

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$.

Жауабы: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$.

МЫСАЛ **4.** $2\sin x=\sqrt{3}$ теңдеуінің $[-\pi;\ \pi]$ аралығына тиісті шешімдерін табайық.

Шешуі: Алдымен берілген теңдеудің жалпы шешімін анықтаймыз.

$2\sin x=\sqrt{3}$; $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

$x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

Енді n-нің орнына мән беру арқылы теңдеудің берілген аралыққа тиісті шешімін табамыз.

$n=0$, $x=(-1)^0\cdot\frac{\pi}{3}+\pi\cdot 0=\frac{\pi}{3}$;

$n=1$, $x=(-1)^1\cdot\frac{\pi}{3}+\pi\cdot 1=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$;

$n=-1$, $x=(-1)^{-1}\frac{\pi}{3}+\pi\cdot(-1)=-\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{4\pi}{3}$ және т.с.с.

Сонда $\frac{\pi}{3}\in[-\pi;\ \pi]$; $\frac{2\pi}{3}\in[-\pi;\ \pi]$; $-\frac{4\pi}{3}\notin[-\pi;\ \pi]$.

Жауабы: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$.

?

1. Тригонометриялық теңдеулер мен алгебралық теңдеулердің арасында қандай айырмашылық бар?
2. Тригонометриялық теңдеулер шешімінің шексіз көп болу себебі неде? Алгебралық теңдеулерде осындай жағдайлар кездесе ме? Жауабын түсіндіріңдер.
3. Тригонометриялық теңдеудің екі жақ бөлігіндегі бірдей көбейткіш тригонометриялық функция болған жағдайда қандай түрлендіру қолданылады?
4. $2\sin x+\cos x=3$ теңдеуі қарапайым тригонометриялық теңдеуге жата ма?

Жаттығулар

A

Теңдеуді шешіңдер (7.1—7.4):

7.1. а) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ә) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x=\frac{1}{2}$; в) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.2. а) $\operatorname{tg}x=2$; ә) $\operatorname{ctg}x=-3$; б) $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$; в) $\operatorname{ctg}x=\sqrt{3}$.

7.3. а) $\sin\frac{x}{3}=0$; ә) $\cos 2x=0$;

б) $5\cos 3x-5=0$; в) $6\sin 5x+6=0$.

7.4. а) $\operatorname{tg}(x-2)=0$; ә) $\operatorname{ctg}(x+3)=0$;

б) $2\sin 3x+1=0$; в) $\cos\frac{x}{2}-0{,}5=0$.

Берілген аралыққа тиісті теңдеудің шешімдерін табыңдар **(7.5-7.6)** :

7.5. а) $\sin\varphi=-1,\ \varphi\in[0;\ 2\pi]$; ә) $\operatorname{ctg}\varphi=1,\ \varphi\in[-\pi;\ \pi]$;

б) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3},\ \varphi\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$; в) $\cos\varphi=-1,\ \varphi\in[0;\ 2\pi]$.

7.6. а) $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \varphi\in[-\pi;\ \pi]$; ә) $2\cos\varphi=\sqrt{3},\ \varphi\in[-\pi;\ \pi]$;

б) $\operatorname{tg}\varphi=-\sqrt{3},\ \varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; в) $\operatorname{ctg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \varphi\in(0;\ \pi)$.

B

Теңдеуді шешіңдер **(7.7—7.12)** :

7.7. а) $3\operatorname{tg}2x-\sqrt{3}=0$; ә) $-\sqrt{3}\operatorname{ctg}4x+3=0$;

б) $2\sin 2x-\sqrt{2}=0$; в) $-2\cos 2x+\sqrt{3}=0$.

7.8. а) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1=0$; ә) $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-1=0$;

б) $\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{x}{3}\right)-1=0$; в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)=\sqrt{3}$.

7.9. а) $3\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3}+2\right)=-4$; ә) $4\operatorname{ctg}\left(\frac{3x}{2}-1\right)-3=0$;

б) $2\sin\left(\frac{2x}{5}+3\right)=\sqrt{3}$; в) $\sqrt{3}\cos\left(\frac{5x}{2}-1\right)+2=0$.

7.10. а) $\sin 3x\cdot\cos 3x=-\frac{1}{2}$; ә) $\sin^2 2x-\cos^2 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\frac{2\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}^2 2x}=\sqrt{3}$; в) $2\sin^2 4x-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.11. а) $\sin 6x-\sin 4x=0$; ә) $\cos 5x+\cos 3x=0$.

7.12. а) $\cos 7x-\cos 5x=0$; ә) $\sin 9x-\sin 13x=0$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Тригонометриялық теңдеулер, теңдеулер жүйесі, оларды шешу әдістері, тригонометриялық тепе-теңдіктер, формулалар, теңдеудің түбірлері .

§8. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ

Түйінді ұғымдар

Теңдеу, тригонометриялық теңдеу, теңдеуді шешу әдістері

Сендер тригонометриялық теңдеулерді шешу әдістерімен танысасыңдар.

Алдыңғы параграфта қарапайым тригонометриялық теңдеулерді шешу жолдарымен таныстыңдар. Енді кейбір тригонометриялық теңдеулердің түрлерін шешудің жалпы жағдайын қарастырамыз. Тригонометриялық теңдеулерді шешу үшін оларды тепе-тең түрлендірулер арқылы қарапайым тригонометриялық теңдеулерге келтіру керек екендігі жоғарыда айтылған.

Бір ғана тригонометриялық функцияға байланысты берілген алгебралық теңдеулерге келтірілетін тригонометриялық теңдеулерді шешуді үйренесіңдер.

МЫСАЛ

1. $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Берілген теңдеу $\cos x$ функциясына қатысты квадраттық теңдеу болып табылады. Сондықтан $\cos x = u$ алмастыруын жасасақ, онда $2u^2 + 3u - 2 = 0$ квадраттық теңдеуін аламыз, оның түбірлері $u_1 = -2$; $u_2 = \frac{1}{2}$.

Сонда берілген теңдеу $\cos x$ функциясына қатысты $\cos x = -2$ және $\cos x = \frac{1}{2}$ түріндегі қарапайым екі теңдеуге келеді.

$\cos x = -2$ теңдеуінің шешімі жоқ, себебі $|-2| > 1$.

$\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Жауабы : $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Тригонометриялық формулаларды қолдану арқылы шешілетін тригонометриялық теңдеулерді шешуді үйренесіңдер.

МЫСАЛ

2. $\sin 2x = \frac{3}{2}\sin x$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ формуласын пайдаланып, берілген функцияны аргументтері бірдей тригонометриялық функцияға келтіреміз: $2\sin x\cos x = \frac{3}{2}\sin x$, осыдан $2\sin x\cos x - \frac{3}{2}\sin x = 0$; $\sin x(2\cos x - \frac{3}{2}) = 0$. Теңдеу екі қарапайым теңдеуге келді: $\sin x = 0$, $2\cos x - \frac{3}{2} = 0$.

Сонымен, $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$;

$2\cos x = \frac{3}{2}$ немесе $\cos x = \frac{3}{4}$. Бұдан $x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Жауабы : πn, $n \in Z$; $\pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

МЫСАЛ

3. $3\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$ формуласынан алынған $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ өрнегін берілген теңдеуге қоямыз: $3 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} x} - \operatorname{ctg} x = 0$, $3 - \operatorname{ctg}^2 x = 0$, $\operatorname{ctg}^2 x = 3$; $\operatorname{ctg} x = \pm\sqrt{3}$, яғни $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

Берілген теңдеу екі қарапайым теңдеуге келді. Олардың шешімдері:

1) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$, $x = \frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

Жауабы : $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; $\frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

МЫСАЛ

4. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Берілген теңдеуді шешу үшін қосылғыштарды топтаймыз: $(\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 0$. Жақша ішіндегі өрнекке косинустардың қосындысының формуласын қолданамыз: $2\cos\frac{x+3x}{2} \cdot \cos\frac{x-3x}{2} + \cos 2x = 0$; $2\cos 2x \cdot \cos(-x) + \cos 2x = 0$. Енді ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығарамыз: $\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$. Сонда $\cos 2x = 0$ және $2\cos x + 1 = 0$ теңдеулерін аламыз. Бұдан $\cos 2x = 0$; $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$.

$$2\cos x + 1 = 0;\ 2\cos x = -1;\ \cos x = -\frac{1}{2};$$

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k \text{ немесе } x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Жауабы : $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

МЫСАЛ

5. $\cos 4x \cos 2x = \cos 5x \cos x$ теңдеуін шешейік.

Шешуі . Тригонометриялық формулаларды қолданып, көбейтінді түрінде берілген өрнектерді қосындымен алмастырамыз:

$\cos 4x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)$, ал $\cos 5x \cos x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x)$. Онда берілген теңдеу былай жазылады:

$$\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x),$$
$$\cos 6x + \cos 2x - \cos 6x - \cos 4x = 0,$$
$$\cos 2x - \cos 4x = 0.$$

Енді косинустардың айырымының формуласын қолданамыз:

$$2\sin 3x \cdot \sin x = 0.$$

Егер $\sin 3x = 0$ болса, онда $3x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{3}n$, $n \in Z$.
Егер $\sin x = 0$ болса, онда $x = \pi k$, $k \in Z$.

Шешімдердің екі тобын бір формулаға біріктіруге болады, яғни $x = \frac{\pi}{3}n$, $n \in Z$.

Жауабы : $\frac{\pi}{3}n$, $n \in Z$.

! Біртекті тригонометриялық теңдеулерді шешуді үйренесіңдер.

***Біртекті тригонометриялық теңдеулер** деп әрбір қосылғыштың дәреже көрсеткіштері өзара тең болатын теңдеулерді айтады.*

МЫСАЛ

6. $10\sin^2 x = 1 + 3\cos^2 x$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Теңдеудің оң жақ бөлігіндегі 1 санын бірінші тригонометриялық тепе-теңдікпен алмастырайық.

$10\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x + 3\cos^2 x$ немесе $9\sin^2 x - 4\cos^2 x = 0$.

Осы шыққан теңдеудің сол жағында тұрған қосылғыштардың әрқайсысының дәрежесі 2-ге тең. Демек, берілген теңдеу — екінші дәрежелі біртектес теңдеу. Бұл теңдеуді шешу үшін теңдіктің екі жағын мүшелеп $\cos^2 x \neq 0$ немесе $\sin^2 x \neq 0$ функциясына бөлеміз.

Егер $\cos^2 x \neq 0$-ге бөлсек, онда $\operatorname{tg} x$, ал $\sin^2 x \neq 0$ бөлсек, онда $\operatorname{ctg} x$ функциясына қатысты квадрат теңдеуге келеміз. Бірінші жағдайды қарастырайық:

$\dfrac{9\sin^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{4\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$; $9\operatorname{tg}^2 x - 4 = 0$.

Осыдан $(3\operatorname{tg} x - 2)\cdot(3\operatorname{tg} x + 2) = 0$.

$3\operatorname{tg} x - 2 = 0$; $3\operatorname{tg} x + 2 = 0$.

Сонымен, $3\operatorname{tg} x = 2$; $\operatorname{tg} x = \dfrac{2}{3}$, $x_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} + \pi k$, $k \in Z$;

$3\operatorname{tg} x = -2$; $\operatorname{tg} x = -\dfrac{2}{3}$, $x_2 = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{2}{3}\right) + \pi n$, $n \in Z$;

$\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$ болғандықтан, $x_2 = -\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Жауабы: $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} + \pi k$, $k \in Z$; $-\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

?

1. Тригонометриялық теңдеулердің шешімдері неге шексіз көп?
2. Тригонометриялық теңдеулерді шешудің алгебралық теңдеулерді шешуден қандай айырмашылығы бар?

Жаттығулар

А

Теңдеулерді шешіңдер **(8.1—8.4):**

8.1. а) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$; ә) $2\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$;
б) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; в) $6\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

8.2. а) $3\cos^2 x + 10\cos x + 3 = 0$; ә) $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$;
б) $2 + \cos^2 x = 2\sin x$; в) $3 - 3\cos x = 2\sin^2 x$.

8.3. а) $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 4$; ә) $\operatorname{tg} x - 4\operatorname{ctg} x = 3$;
б) $\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$; в) $\operatorname{ctg}^2 x - 3 = 0$.

8.4. а) $\cos 7x + \cos x = 0$; ә) $\sin 7x - \sin x = 0$;
б) $\sin^2 x + \sin 2x = 1$; в) $\cos^2 x - \sin 2x = 1$.

Теңдеудің түбірлерін табыңдар **(8.5-8.6):**

8.5. а) $3\sin^2 x + \sin x\cdot\cos x = 2\cos^2 x$;
ә) $2\cos^2 x - 3\sin x\cdot\cos x + \sin^2 x = 0$.

8.6. а) $9\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 2\sin^2 x$;
ә) $2\sin^2 x - \sin x\cos x = \cos^2 x$.

B

Теңдеулерді шешіңдер **(8.7—8.12):**

8.7. а) $5\sin^2 x + 4\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = 4;$ ә) $6\cos^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 7.$

8.8. а) $4\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 3;$ ә) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos x - 1.$

8.9. а) $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0;$ ә) $\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x = 0.$

8.10. а) $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x;$ ә) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x - \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x = 2;$
б) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1;$ в) $3\sin 2x + \cos 2x = 2\cos^2 x;$
г) $\cos^2 x + 4\sin^2 x = 2\sin 2x.$

8.11. а) $6\sin^2 x = 4 + \sin 2x;$ ә) $3\sin 2x + 8\cos^2 x = 7.$

8.12. а) $\sin 2x \cdot \cos 4x = \sin 7x \cdot \sin 9x;$
ә) $\cos 10x \cdot \cos 7x - \cos 2x \cdot \cos 15x = 0;$
б) $\sin 5x \cdot \sin 3x + \cos 7x \cdot \cos x = 0;$
в) $\cos x \cdot \sin 5x = \cos 2x \cdot \sin 4x;$
г) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0;$
ғ) $\sin 3x \cdot \sin^2 x = \sin 3x \cdot \cos^2 x.$

Теңдеудің түбірлерін табыңдар **(8.13-8.14):**

8.13. а) $2\sin^2 2x + 3\cos^2 2x = 5\sin 2x \cdot \cos 2x;$
ә) $3\sin^2 2x - \sin 2x \cdot \cos 2x - 4\cos^2 2x = 0.$

8.14. а) $3\sin^2\frac{x}{3} + 2\cos^2\frac{x}{3} - 7\sin\frac{x}{3} \cdot \cos\frac{x}{3} = 0;$
ә) $2\cos^2 3x + \sin^2 3x - 3\sin 3x\cos 3x = 0.$

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Тригонометриялық функциялар, олардың анықталу облысы, мәндер жиыны, қасиеттері, графиктері, тригонометриялық формулалары, кері тригонометриялық функциялар.

§9. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ШЕШУ

Түйінді ұғымдар

Теңсіздік, тригонометриялық теңсіздік, функция графигі

Сендер тригонометриялық теңсіздіктер ұғымымен танысасыңдар, тригонометриялық теңдеулерді шешуді үйренесіңдер.

Алдыңғы параграфта тригонометриялық теңдеулерді шешуді қарастырдық. Кез келген тригонометриялық теңдеулер тепе-тең түрлендіру арқылы қарапайым тригонометриялық теңдеулерге келтіріліп шешілетініне көз жеткіздік.

Енді тригонометриялық теңсіздіктерді шешуге тоқталамыз. Тригонометриялық теңсіздіктерді шешуді қарапайым тригонометриялық теңсіздіктерді шешуден бастаймыз. Себебі, кез келген тригонометриялық теңсіздіктер тепе-тең түрлендірілгеннен кейін мына теңсіздіктердің ең болмағанда біреуіне келеді:

$$\sin x \le a;\ \sin x \ge a;\ \sin x < a;\ \sin x > a;$$
$$\cos x \le a;\ \cos x \ge a;\ \cos x < a;\ \cos x > a;$$
$$\operatorname{tg} x \le a;\ \operatorname{tg} x \ge a;\ \operatorname{tg} x < a;\ \operatorname{tg} x > a; \qquad (1)$$
$$\operatorname{ctg} x \le a;\ \operatorname{ctg} x \ge a;\ \operatorname{ctg} x < a;\ \operatorname{ctg} x > a,$$

мұндағы $a \in R$.

(1) *түрінде берілген теңсіздіктер* ***қарапайым тригонометриялық теңсіздіктер*** *деп аталады*.

Қарапайым тригонометриялық теңсіздіктер графиктік тәсілмен шығарылады. Атап айтқанда, қарапайым тригонометриялық теңсіздіктерді шешу үшін тригонометриялық функцияның графигі немесе бірлік шеңбер қолданылады.

АЛГОРИТМ

Тригонометриялық теңсіздіктерді функцияның графигі арқылы шешу алгоритмі:

1) тригонометриялық теңсіздікті қарапайым тригонометриялық (1) түріндегі теңсіздікке келтіру;

2) бір координаталық жазықтықта теңсіздіктің құрамында берілген тригонометриялық функцияның графигін салу және $y = a$ түзуін жүргізу;

3) функциялар графиктерінің қиылысу нүктелерін белгілеу;

4) берілген теңсіздікті қанағаттандыратын қисықтың бөлігін, сосын Ox осіндегі негізгі аралықты (координаталар басына жақын орналасқан аралықты) анықтау;

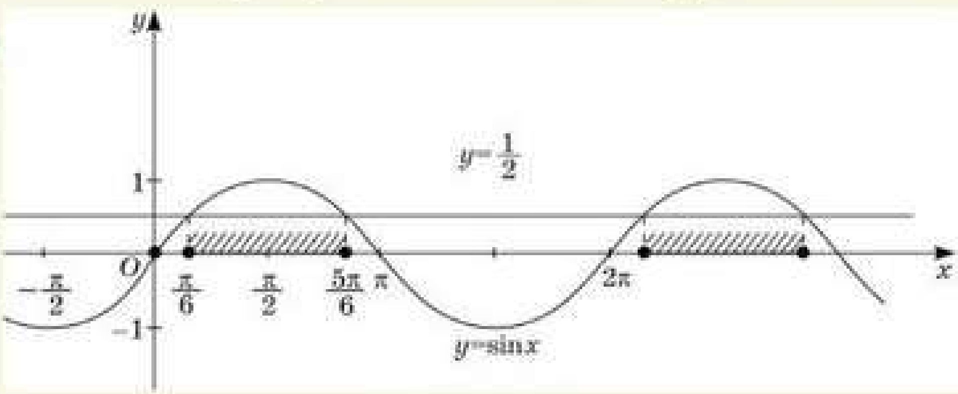
5) берілген теңсіздікте көрсетілген функцияға кері тригонометриялық функцияның мәнін ескеріп, негізгі аралықтың шеткі нүктелерінің абсциссаларының мәнін табу;

6) тригонометриялық функцияның периодтылық қасиетін пайдаланып, теңсіздіктің жалпы шешімін жазу.

МЫСАЛ

1. $\sin x \ge \frac{1}{2}$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. Теңсіздікті шешу үшін $y = \sin x$ функциясының графигі синусоида қисығы мен $y = \frac{1}{2}$ түзуін координаталық жазықтықта салсақ, $y = \frac{1}{2}$ түзуі синусоиданы шексіз көп нүктелерде қиып өтеді (44.1-сурет).



44.1-сурет

Берілген теңсіздікті қанағаттандыратын синусоида қисығының бөліктері $y=\frac{1}{2}$ түзуінен жоғары орналасқан. Абсцисса осінің оң жағында орналасқан бірінші кесіндінің ұштарын x_1, x_2 деп белгілеп, олардың мәндерін анықтайық. Ол үшін $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ екенін ескереміз. Сонда $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ шығады.

Демек, $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5\pi}{6}$. Берілген теңсіздіктің толық шешімін жазу үшін $y=\sin x$ функциясының периодтылық қасиетін пайдаланамыз: $\frac{\pi}{6}+2\pi n\le x\le\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$.

Жауабы : $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$.

АЛГОРИТМ Қарапайым тригонометриялық теңсіздікті бірлік шеңбер арқылы шығару алгоритмі:

1) Бірлік шеңбер салу;

2) теңсіздіктің оң жақ бөлігіндегі аргументтің аркфункциясының мәнін шеңбер доғасында белгілеу;

3) аркфункцияның мәні арқылы Ox (Oy) өсіне параллель түзу жүргізу;

4) тригонометриялық теңсіздіктің шешімдер жиыны болатын шеңбер доғасының бөлігін көрсету;

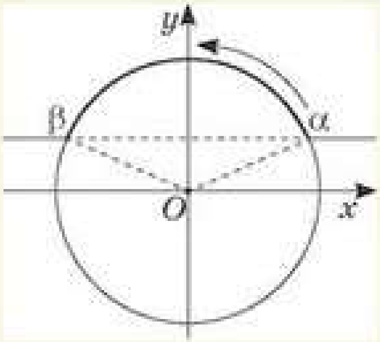
5) жауабын жазу.

МЫСАЛ **2.** $\sin x\ge\frac{1}{2}$ теңсіздігін бірлік шеңбер арқылы шығарайық.

Шешуі . $\alpha=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$; $\beta=\pi-\arcsin\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

Демек, $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5\pi}{6}$ (44.2-сурет). Енді функцияның периодтылығын ескерсек, $\frac{\pi}{6}+2\pi n\le x\le\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$, аламыз.

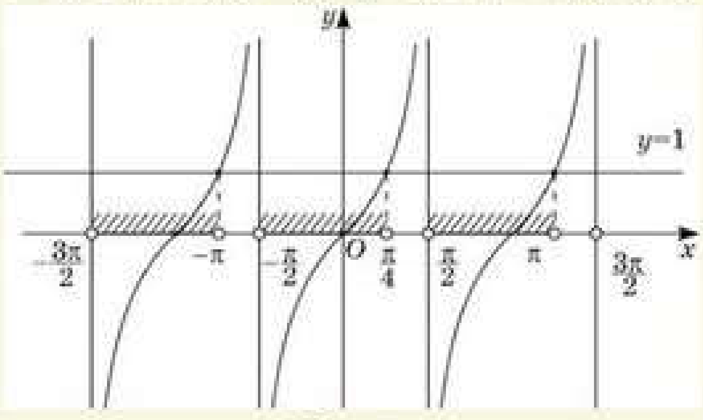
Жауабы : $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$.



44.2-сурет

МЫСАЛ **3.** $\operatorname{tg}x<1$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі . $\operatorname{tg}x<1$ теңсіздігін шешу үшін $y=\operatorname{tg}x$ функциясының графигі мен $y=1$ түзуін бір координаталық жазықтықта салсақ, $y=1$ түзуі тангенсоиданы шексіз көп нүктелерде (әрбір периодта бір рет) қияды (45-сурет).



45-сурет

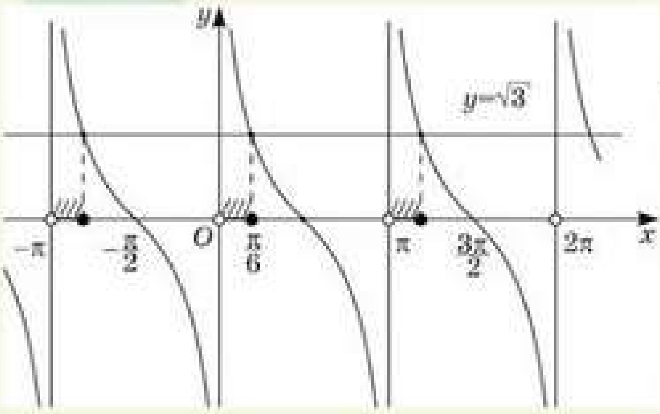
Берілген теңсіздікті қанағаттандыратын тангенсоиданың бөліктері $y = 1$ түзуінен төмен орналасқан. Енді $\mathrm{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$ екенін ескерсек, онда графиктердің $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалындағы қиылысу нүктесінің абсциссасы $x = \frac{\pi}{4}$. Демек, берілген теңсіздік шешімін ің негізгі аралығы $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$, яғни $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$ енді $y = \mathrm{tg}\,x$ функциясының периодтылығын ескеріп, берілген теңсіздіктің барлық шешімдерін анықтаймыз: $-\frac{\pi}{2} + \mathrm{T}n < x < \frac{\pi}{4} + \mathrm{T}n$, $n \in Z$.

Жауабы : $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

МЫСАЛ

4. $\mathrm{ctg}\ x\ \mathrm{l}\ \sqrt{3}$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. Теңсіздікті шешу үшін $y = \mathrm{ctg}\,x$ функциясының графигін және $y = \sqrt{3}$ түзуінің графигін бір координаталық жазықтыққа салсақ, $y = \sqrt{3}$ түзуі котангенсоида қисығын шексіз көп нүктелерде (әр периодта бір рет) қиып өтеді (46-сурет).



46-сурет

Берілген теңсіздікті қанағаттандыратын котангенсоиданың бөліктері $y = \sqrt{3}$ түзуінен жоғары жатады.

$\mathrm{arcctg}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ екенін ескерсек, берілген теңсіздікті қанағаттандыратын негізгі ара лық $\left(0; \frac{\pi}{6}\right]$ немесе $0 < x\ \mathrm{m}\ \frac{\pi}{6}$ болады.

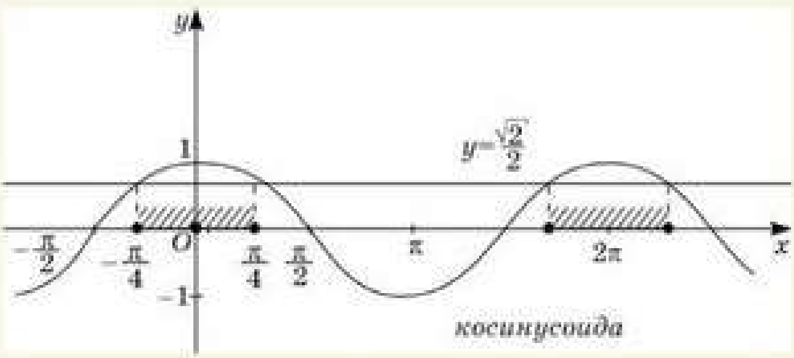
$\mathrm{ctg}\,x\ \mathrm{l}\ \sqrt{3}$ теңсіздігінің толық шешімін анықтау үшін $y = \mathrm{ctg}\,x$ функциясының периодтылық қасиетін қолданамыз, яғни $\mathrm{T}n < x\ \mathrm{m}\ \frac{\pi}{6} + \mathrm{T}n$, $n \in Z$.

Жауабы : $\left(\pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right]$, $n \in Z$.

МЫСАЛ

5. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. Теңсіздікті шешу үшін косинусоида мен $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ түзуін бір координаталық жазықтыққа салсақ, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ түзуі косинусоиданы шексіз көп нүктелерде қиып өтеді (47-сурет).



47-сурет

Берілген теңсіздікті қанағаттандыратын косинусоиданың бөліктері $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ түзуінен жоғары орналасқан. Ендеше, негізгі аралық $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Демек, $-\frac{\pi}{4} \le x + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{4}$. Енді $y = \cos x$ функциясының периодтылығын пайдаланып, мына теңсіздікті аламыз: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \le x + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. Соңғы теңсіздіктің әрбір бөлігінен $\frac{\pi}{6}$-ны шегерсек, $-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Жауабы : $\left[-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n, \frac{\pi}{12} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

1. Тригонометриялық теңсіздіктерді шешу мен алгебралық теңсіздіктерді шешудің қандай айырмашылығы бар?
2. Тригонометриялық теңсіздікті шешу мен тригонометриялық теңдеуді шешудің арасында ұқсастық бар ма? Жауабын түсіндіріңдер.
3. Тригонометриялық теңсіздіктерді шешкенде тригонометриялық функциялардың қасиеттері пайдаланыла ма?

Жаттығулар

A

Теңсіздіктерді шешіңдер **(9.1-9.2)** :

9.1. а) $\sin x > 0$; ә) $\cos x \le 0$;

б) $\operatorname{tg} x \le 0$; в) $\operatorname{ctg} x > 0$.

9.2. а) $\sin x \ge 0,5$; ә) $2\cos x \ge -\sqrt{3}$;

б) $\sin x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-3\operatorname{tg} x \le \sqrt{3}$;

г) $\sin 3x > -\frac{1}{2}$; ғ) $\cos 2x < -\frac{1}{2}$;

д) $\operatorname{tg} 5x \ge -1$; е) $\operatorname{ctg} 4x \le -1$.

Теңсіздіктің көрсетілген аралықтағы шешімдерін табыңдар **(9.3-9.4)** :

9.3. а) $\cos 2x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-\pi; \pi]$; ә) $\sin\frac{x}{3} < \frac{1}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

9.4. а) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \ge 1$, $x \in (0; \pi)$; ә) $\operatorname{tg} 4x > -\sqrt{3}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

B

9.5. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

а) $y = \sqrt{\cos\frac{x}{4} + 2}$; ә) $y = \sqrt{\sin\frac{x}{3} - 2}$.

Теңсіздіктерді шешіңдер **(9.6—9.8)** :

9.6. а) $\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin x - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ә) $\sin x \cdot \sin\frac{\pi}{5} - \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{5} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;
б) $\sin 4x \cdot \cos 4x \leq 0{,}25$;
в) $\sin^2 3x - \cos^2 3x > -0{,}5$.

9.7. а) $2\cos 2x > -1$; ә) $2\sin 4x < -1$;
б) $-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$; в) $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geq 1$.

9.8. а) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \leq 1$; ә) $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leq \sqrt{2}$;
б) $3\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > \sqrt{3}$; в) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) < -1$.

9.9. а) $4\sin x - 2 \geq 0$; ә) $2\,\mathrm{tg}\,2x + 2 > 0$; б) $5\cos 3x + 2 \leq 7$ теңсіздігінің шешімі бар ма?

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $y = \sqrt{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

A) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$;

B) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$;

C) $-\frac{\pi}{3} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$;

D) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

2. $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1$ теңсіздігін шешіңдер:

A) $2\pi n,\ n \in Z$; B) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

C) $-\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; D) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

3. $\cos\frac{x}{2} = 0$ теңсіздігін шешіңдер:

A) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$; B) $\pi + 2\pi n,\ n \in Z$;

C) $\pi + 4\pi n,\ n \in Z$; D) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

4. $y = \sqrt{\mathrm{tg}\,x}$ функцияның анықталу облысын табыңдар:

A) $0 \leq x < \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$; B) $0 < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;

C) $\pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; D) $0 \leq x \leq \pi n,\ n \in Z$.

5. $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ теңдеуінің түбірін табыңдар:

A) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$; B) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

C) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$; D) $\frac{\pi}{2} + 3\pi n,\ n \in Z$.

6. $\mathrm{tg}\ x \le \sqrt{3}$ теңсіздігін шешіңдер:

A) $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right],\ n \in Z$; B) $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z$;

C) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right],\ n \in Z$; D) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in Z$.

7. $\mathrm{ctg}\,x = 7$ теңдеуін шешіңдер:

A) $-\mathrm{arctg}\ 7 + \pi k,\ k \in Z$; B) $\mathrm{arcctg}\ 7 + \pi k,\ k \in Z$;

C) $\mathrm{arctg}\ 7$; D) $-\mathrm{arcctg}\ 7 + \pi k,\ k \in Z$.

8. $y = \mathrm{tg}\,x$ функциясы графигінің Oy осімен қиылысу нүктелерін анықтаңдар:

A) 0; B) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; C) $\pi n,\ n \in Z$; D) $-\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

9. $\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ теңдеуін шешіңдер:

A) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$; B) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$;

C) $\frac{7\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z$; D) $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

10. $\cos x = \frac{1}{2}$ теңдеуінің $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінің аралығында неше түбірі бар:

A) 4; B) 3; C) 2; D) 1?

11. $4\sin^2 x = \cos^2 x$ теңдеуін шешіңдер:

A) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; B) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

C) $\pm\,\mathrm{arctg}2 + \pi n,\ n \in Z$; D) $\pm\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

12. $\sin x + \cos x = 0$ теңдеуін шешіңдер:

A) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; B) -1; C) 1; D) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

13. $0 \le \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ теңсіздігін шешіңдер:

A) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in Z$;

B) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z$;

C) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in Z$;

D) $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z$.

14. $\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ теңдеуін шешіңдер:

A) $\pm\frac{\pi}{2}+4\pi k,\ k\in Z$; B) $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$;

C) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+4\pi k,\ k\in Z$; D) $\pm\frac{\pi}{8}+2\pi k,\ k\in Z$.

Математикалық сауаттылық бойынша тапсырмалар

15. 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20 сандар тізбегінде 5-ке бөлінетін сандар қанша пайызды құрайды:

A) 50%; B) 75%; C) 20%; D) 25%; E) 30%?

16. 400 тетіктің 15-і жарамсыз. Кездейсоқ алынған тетіктің жарамсыз болу ықтималдығын табыңдар:

A) $\frac{1}{20}$; B) $\frac{3}{300}$; C) $\frac{3}{80}$; D) $\frac{1}{80}$; E) $\frac{1}{100}$.

17. $x^2-6x+5=0$ теңдеуінің түбірлері қайсы аралыққа тиісті болады:

A) (0; 5); B) [2; 3]; C) (0; 5]; D) (1; 6); E) (2; 3)?

18. Сандар қандай да бір заңдылықпен құрастырылған. Белгісіз санды табыңдар:

5	10	30	80	?

A) 100; B) 200; C) 150; D) 240; E) 220.

ТАРИХИ МАҒЛҰМАТТАР

XVII ғ. áàñûìààrû òðèãîíîìåòðèÿíûң äàìó êåçåңi ìåí æàңà äîìåéòèëåëік ààrûò қàëûïòàñà ààñòààû. XVII ғасырға äåéií òðèãîíîìåòðèÿ үоàұðûòòàðàû òàóó, äåîìåòðèÿëûқ òèåóðàëàðäûң үêìåíòòåðií åñåïòåó үшін қолданылған äiëñà, XVII—XIX ғғ. òðèãîíîìåòðèÿ ìàòåìàòèêàëық анализдің бір бөлігі ретінде қарастырыла бастады. Îë ìåõàíèêà, òèçèêà ìåí òåõíèêàäà әñіðåñå òåðáåëiñ қiçғàëûñòàð ìåí äàңқà äà ïåðèîäòû ïðîöåñòåðäi çåðòòåóäå êåңiíåí қîëäàíылғàí. Ô. Âèåò өçiíің àëғàшқû ìàòåìàòèêàëық çåðòòåóëåðiíäå òðèãîíîìåòðèÿëûқ òóíêöèÿëàðäûң ïåðèîäылық қàñèåòi òóðàëû àéòқàí. Øâåéöàðèÿëûқ ìàòåìàòèê È. Áåðíóëëè (1667—1748) ñîë êåçäің өçiíäå-ақ òðèãîíîìåòðèÿëûқ òóíêöèÿëàðäûң áåëãiëåðii қîëäàíäû. Àíàð àëãåáðàëûқ áåëãiëåóëåðäiң äàìóû қàðàìà-қàðñû ñàíääð ìåí äàrûòòàëғàí êàñiìäiëåðäi àíàëèçó, àұðûо ìåí äiғà ұғûìäàðûíûң êåңiíåí äàìóûíà êåëåñå, ìåà òåðáåëiñòåði қiçғàëûñòàð, äûáûñ, æàðûқ æәíå үëåêòðîìàãíèòòi òîëқûíäàð òóðàëû iëiiің äàìóû òðèãîíîìåòðèÿ ìàçiұíûң ìåíåçi — òåðáåëiñòåði ïðîöåñòåðäi çåðòòåó ìåí äàìûòóғà êåëäi. Ãàðìîíèêàëûқ òåðáåëiñòiң (ìàòåðèàëäû, ìàÿòíèêòiң, áåéñòàëü үëåêòð òîêûíың òåðáåëiñi) òåңäåói

$$y=A\sin(\omega t+\alpha) \tag{1}$$

àëäû òóçåëà ê òóðûíäà áåëãiëi.

Ãàðìîíèêàëûқ òåðáåëiñòåðäің ãðàôèêi ñèíóñîèäàëàð äåïғандықòàí, òóçåëà ìåí òåðìèíäåð ãàðìîíèêàëûқ òåðáåëiñòåðäi *ñèíóñîèäàëü òåðáåëiñòåð* äåï àòàëäû.

arcsin ìåí arctg áåëãiëåóëåðii 1792 æ. Вåíàëûқ ìàòåìàòèê Г.М. Òåðòåð ìåí àòàқòû òðàíöóç ғàëûìû Æ.Ë. Ëàãðàíæ өç åңáåêòåðiíäå ïàéäàëàíғàí. Ä. Áåðíóëëè ìû áåëãiëåóëåðäi åòòåðåêòå äàñқàòà қàðàñòûðғàí åäi. Àëàéäà, әçë áåëãiëåóëåð XVII ғаñûðäà кіëäàíûëà äàñòàäû. "Àðê" кіñûìòàñû ëàòûíûң arcus — "äîғà" äåãåí ñөçiíåí øûққàí. arcsin x ñөçi (äîғà äåé àéòñàқ òà áîëàäû) ñèíóñû x-êå òåң áîëàòûí äұðûñ ұғûìûí ñəéêåñ êåëåäi.

Òðèãîíîìåòðèÿëûқ ôóíêöèÿëàð òóðàëû êөçқàðàñòàðäûң äàìóû æəíå äàìûòûëûқ áàçàñûң қàëûïòàñóûíà êåëäi. Үғië òðèãîíîìåòðèÿëûқ ôóíêöèÿëàð äåãåíäåðìғà òəóåëñiç äəðåæåñiíå қàòàðëàð ìåí ìàòåìàòèêàëûқ àíàëèçäің äàңқà äà ұғûìäàðûíûң êөìåãiìåí àíûқòàëàäû.

Òðèãîíîìåòðèÿëûқ ôóíêöèÿëàðäûң àíàëèòèêàëûқ òåîðèÿñûíûң íåãiçii қàëà-ғà үëåñ қîñқàíäàð Ë. Ýéëåð. Àéðûқ àүë òåîðèÿíûң íåãiçii қàëàғàí Ë. Ýéëåð äåãåí áîëàäû. XIX ғ. àүë òåîðèÿíû äàìûòóäû əði қàðàé Н.И. Ëîáà÷åâñêèé æəíå äàңқà äà ғàëûìäàð æàëғàñòûðғàí.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Оқиға, элементар оқиға, жиілік, салыстырмалы жиілік, ықтималдық, статистика, статистикалық ықтималдық, ықтималдықтың классикалық анықтамасы.

4 ЫҚТИМАЛДЫҚ

§ 10. ОҚИҒАНЫҢ ЫҚТИМАЛДЫҒЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Түйінді ұғымдар

Ықтималдық, оқиға, оқиға түрлері, ықтималдықтың қасиеттері

Сендер кездейсоқ оқиға ұғымымен, кездейсоқ оқиғаның түрлерімен танысасыңдар; ықтималдықтың қасиеттерін қолданып кездейсоқ оқиғаның ықтималдығын табуды үйренесіңдер.

Оқиға дегеніміз — қандай да бір тәжірибенің нәтижесі.

Тәжірибе нәтижесінде орындалатын немесе орындалмайтын оқиға ***кездейсоқ оқиға*** *деп аталады.*

Кездейсоқ оқиғаның белгіленуі: A, B, C,...

Тәжірибе нәтижесінде міндетті түрде орындалатын оқиға ***ақиқат оқиға*** *деп аталады.*

Тәжірибе нәтижесінде орындалмайтын оқиға ***мүмкін емес оқиға*** *деп аталады.*

A оқиғасының орындалуы нәтижесінде B оқиғасы да орындалса, онда *A оқиғасы B оқиғасының дербес түрі* деп аталады.

Егер A және B оқиғалары бір-бірінің дербес түрі болса, онда оқиғалар *тең оқиғалар* деп аталады.

A және B оқиғаларының теңдігінің жазылуы: $A = B$.

A оқиғасына қарама-қарсы оқиға деп A оқиғасы орындалмағанда орындалатын $\bar{A}$ оқиғасын айтады.

Тәжірибе барысында екі оқиға бірдей орындалатын болса, онда мұндай оқиғалар *үйлесімді оқиғалар* деп аталады.

Тәжірибе барысында екі оқиғаның біреуі екіншісінің орындалуын жоққа шығарса, онда мұндай оқиғалар *үйлесімсіз оқиғалар* деп аталады.

Іс жүзінде бір жағдайда бір емес бірнеше тәжірибе жүргізіледі. Тәжірибелер саны көп болуы мүмкін. Қандай да бір оқиғаның пайда болуы жиілігін анықтау үшін тәжірибелер санын ұлғайтады.

A оқиғасының ықтималдығы $P(A)$ символымен белгіленеді.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

A оқиғасының ықтималдығы төмендегі формуламен есептеледі:

$P(A) = \frac{m}{n}$, мұндағы m — тәжірибенің A оқиғасына қолайлы нәтижелер саны, n – барлық нәтижелер саны.

Мысалы, тиынды лақтырғанда A — "елтаңба жағының түсуі" және B — "сан жағының түсуі" болса, онда $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}5$ немесе $P(A) = 50\%$, $P(B) = 50\%$.

Ықтималдықтың қасиеттері

1-қасиет. Ақиқат оқиғаның ықтималдығы 1-ге тең.

2-қасиет. Мүмкін емес оқиғаның ықтималдығы 0-ге тең.

3-қасиет. Толық топты құрайтын оқиғаның ықтималдығы 1-ге тең.

4-қасиет. Қарама-қарсы оқиғаның ықтималдығы 1 мен берілген оқиғаға ықтималдығының айырмасына тең, яғни $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Оқиғаның ықтималдығының маңыздылығы – оқиғаның ықтималдығын тәжірибе жасамай-ақ, логикалық талдаулар жасау арқылы табуға болады.

1. Қандай жағдайларда оқиғаның ықтималдығын тәжірибе жасамай-ақ табуға болады?
2. Оқиғаның ықтималдығы қандай мәндерге тең бола алады?

Жаттығулар

А

10.1. Ойын сүйегін лақтырған кезде 1-ден 6-ға дейінгі сандар түседі. Төмендегі оқиғалардың ықтималдықтарын табыңдар:
а) 3 санының түсуі; ә) 2 немесе 3 санының түсуі;
б) 1 немесе 5 санының түсуі; в) тақ санның түсуі.

10.2. Қорапшада 3 ақ және 7 қызыл шар бар. Қорапшадан кездейсоқ алынған бір шардың: а) ақ; ә) қызыл болуының ықтималдығын табыңдар.

10.3. Қорапшада 2 қызыл және 6 көк шар бар. Қорапшадан кездейсоқ алынған бір шардың: а) қызыл; ә) көк болуының ықтималдығын табыңдар.

10.4. Сыныпта 30 оқушы бар. Олардың ішінде 6 оқушы өте жақсы, 16 оқушы жақсы баға алды. Сыныптан кездейсоқ таңдап алынған бір оқушы бағасының: а) өте жақсы болуының; ә) жақсы болуының; б) өте жақсы болмауының ықтималдығын табыңдар.

В

10.5. Бір тиын екі рет лақтырылды. Ең болмаса бір рет "елтаңба" түсуінің ықтималдығын табыңдар.

10.6. Үш рет тиын лақтырылды. Екі рет "елтаңба" түсуінің ықтималдығын табыңдар.

10.7. Кездейсоқ екітаңбалы сан таңдап алынды. Төмендегі оқиғалардың ықтималдықт арын табыңдар: ә) алынған сан 0-мен аяқталады;

ә) алынған сан бірдей цифрлардан құралған; б) алынған сан бүтін санның квадраты болмайды.

10.8. Ербол екітаңбалы санды ойлады. Ойлаған санның 2 мен 5 сандарына еселік болуының ықтималдығын табыңдар.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Тәжірибе, оқиға, кездейсоқ оқиға жиілігі, ықтималдық, статистика, статистикалық мәліметтер, басты жиынтық, таңдау, статистикалық қорытынды.

§ 11. ЫҚТИМАЛДЫҚТАРДЫ ҚОСУ ЖӘНЕ КӨБЕЙТУ ЕРЕЖЕЛЕРІ

Түйінді ұғымдар

Ықтималдық, оқиға, қосу ережесі, көбейту ережесі

Сендер оқиғалар қосындысы, оқиғалардың көбейтіндісі ұғымдарымен, сонымен қатар ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремаларымен танысасыңдар; оларды қолданып есептер шығаруды үйренесіңдер.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Сендер ықтималдықтың қандай да бір оқиғаның белгілі жағдайда пайда болу мүмкіндігінің сипаттамасы екенін білесіңдер.

Мына тұжырымдарды еске түсірейік:

1) егер оқиға мүмкін болмаса, онда оның ықтималдығы нөлге тең;

2) егер оқиғаның орындалуы мүмкін болса, онда оның ықтималдығы бірге тең;

3) егер бір оқиғаның орындалуы мүмкін, бірақ түсуі абсолют ақиқат болмаса, онда оның ықтималдығы 0 және 1 сандарының арасында орналасқан сан.

Мысалы, тиынды лақтырғанда оның "елтаңба" және "сан" жағымен түсуі үйлесімсіз оқиғалар.

***A және B оқиғаларының A + B қосындысы** деп A оқиғасының немесе B оқиғасының, немесе екеуінің орындалуынан тұратын оқиғаны айтады.*

Жеке жағдайда, егер A, B оқиғалары үйлесімсіз болса, онда $A + B$ осы екі оқиғаның біреуінің орындалуының оқиғасы.

Тура осылай бірнеше оқиғаның қосындысы анықталады.

A және B оқиғалары үйлесімсіз болсын. A оқиғасының орындалу ықтималдығын $P(A)$, B оқиғасының пайда болуын $P(B)$ деп белгілейік. A оқиғасының немесе B оқиғасының $P(A + B)$ ықтималдығын қалай табуға болады? Бұл сұраққа жауапты төмендегі қосу теоремасы береді.

1-теорема (*үйлесімсіз оқиғалардың ықтималдығын қосу*).

Үйлесімсіз екі оқиғаның кез келген біреуінің орындалуының ықтималдығы осы оқиғалардың ықтималдықтарының қосындысына тең:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

МЫСАЛ

1. Жәшікте 30 шар бар, оның 15-і қызыл, 10-ы көк және 5-еуі жасыл. Жәшіктен алынған кез келген шардың жасыл болмауының (A оқиғасы) ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. Жәшіктен алынған шар қызыл (B оқиға) немесе көк (C оқиға) болған жағдайда A оқиғасының орындалуы мүмкін, яғни A оқиғасы үйлесімсіз B және C оқиғаларының қосындысына тең. Сондықтан 1-теоремаға сәйкес мынаны аламыз:

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Жауабы: $\frac{5}{6}$.

Бір тәжірибенің қорытындысы үшін топтың тек қана бір оқиғасы болатын

$$A_1, A_2, ..., A_n \qquad (1)$$

оқиғалар жүйесі ***оқиғалардың толық тобы*** *деп аталады.*

Басқаша айтқанда, (1) толық топ оқиғалары үшін мына шарттар орындалады:

1) 1-ден n-ге дейінгі кез келген i үшін A_i оқиғасы ақиқат;

2) A_i және A_j $(i \neq j)$ оқиғалар жұбы үйлесімсіз, яғни $A_i A_j = 0$ $(i \neq j)$, мұндағы 0 — мүмкін емес оқиға. Оқиғалардың толық тобына $\bar{A}$ және A оқиғалары мысал болады. Мұндағы A оқиғасы — $\bar{A}$ оқиғасына қарама-қарсы оқиға.

2-теорема. ***Толық топ оқиғаларының ықтималдығының қосындысы 1-ге тең.***

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1. \qquad (2)$$

A және B оқиғасының көбейтіндісі *деп осы екі оқиғаның қатар орындалуынан тұратын AB оқиғасын айтады.*

Мысалы, жәшікте №1 және №2 зауыттар дайындаған тетіктер бар, A — стандартты тетіктердің түсуі, B — №1 зауыт дайындаған тетік, онда $A \cdot B$ — №1 зауыт дайындаған тетіктер.

A және B үйлесімсіз оқиғалар және олардың ықтималдықтары $P(A)$ және $P(B)$ белгілі болсын. A және B оқиғаларының үйлесімділігін қалай табуға болады?

3-теорема (*тәуелсіз оқиғалардың ықтималдықтарының көбейтіндісі*).

А және В тәуелсіз оқиғаларының бірдей орындалу ықтималдығы осы оқиғалардың көбейтіндісіне тең:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

МЫСАЛ

2. Егер ойын сүйегі мен тиынды лақтырса, тиынның "елтаңба" жағымен және ойын сүйегіндегі 5 санының түсу ықтималдығы қандай?

Шешуі. $\frac{1}{2}$ — тиындағы "елтаңбаның" және $\frac{1}{6}$ — ойын сүйегіндегі 5 санының түсу ықти малдығы. Онда 3-теорема бойынша:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Жауабы: $\frac{1}{12}$.

Ықтималдықтарды көбейту теоремасы оқиғалар саны екіден артық болған жағдайда да карастырылады.

МЫСАЛ

3. Тиынды 10 рет лақтырғанда 10 рет "елтаңба" жағымен түсу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Әрбір лақтыру кезінде "елтаңбаның" түсуі алдыңғы қорытындыға байланысты емес. Сондықтан бұл жерде 10 үйлесімсіз оқиғалардың үйлесімділігі туралы айтылған. Бір рет лақтыру кезінде "елтаңбаның" түсу ықтималдығы $\frac{1}{2}$-ге тең. Сондықтан ізделінді ықтималдық $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$-іне тең, яғни $\frac{1}{1024}$.

Жауабы : $\frac{1}{1024}$.

Бұл жерде ықтималдық — өте аз шама, себебі тиынды 10 рет лақтырғанда 10 рет "елтаңбаның" түсуі мүмкін емес.

А оқиғасы орындалғаннан кейін анықталған В оқиғасының ықтималдығын $P_A(B)$ ***шартты ықтималдық*** *деп аталады.*

A, B — тәуелді оқиғалар және $P(A)$, $P_A(B)$ ықтималдықтары белгілі болсын. Осы оқиғалардың үйлесімділігін қалай табуға болады?

4-теорема. ***Тәуелді екі оқиғаның орындалу ықтималдығы бірінші оқиғаның ықтималдығын бірінші оқиға орындалғаннан кейін анықталған екінші оқиғаның шартты ықтималдығына көбейткенге тең*** **:**

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Бұл теорема тәуелді оқиғалар саны екіден артық болғанда да орындалады. Мысалы, үш тәуелді оқиға үшін

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$$

орындалады. $P_{AB}(C)$ белгісі A және B оқиғалары орындалғаннан кейінгі C оқиғасының ықтималдығын береді.

МЫСАЛ

4. Техникалық лицейдің шеберханасындағы үш станокта тетіктер жасалады. Тетікті бірінші станокта жасау ықтималдығы 0,6-ға тең. Бірінші станокта жарамды тетікті жасау ықтималдығы 0,8. Жарамды тетіктің бірінші станокта жасалуының ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. A — "бірінші станокта жасалған тетік", B — "жарамды тетік" болсын. Есептің шарты бойынша $P(A) = 0,6$ және $P_A(B) = 0,8$.

Енді 4-теореманы қолданамыз:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48.$$

Жауабы: 0,48.

?

1. Тәуелді оқиғаның тәуелсіз оқиғадан қандай айырмашылығы бар?
2. Үйлесімсіз оқиғалар ықтималдықтарының қосындысы мен тәуелсіз оқиғалар ықтималдықтарының көбейтіндісін есептеу арасында қандай ұқсастық бар?

Жаттығулар

А

11.1. Нысана (I) дөңгелек және (II және III) екі сақинадан құралған үш концентрлік дөңгелектен тұрады. Оқтың I, II және III аймақтарға түсу ықтималдықтары сәйкесінше 0,45; 0,30; 0,15. Оқтың нысанаға тию ықтималдығын анықтаңдар.

11.2. Күннің ашық болу ықтималдығы $P(A) = 0,75$. Күннің бұлтты болу ықтималдығын табыңдар.

11.3. Университеттің сырттай оқу бөліміне бақылау жұмыстары A, B және C қалаларынан келіп түседі. Олардың A қаласынан келу ықтималдығы 0,6, B қаласынан келу ықтималдығы 0,1. Кезекті жұмыстың C қаласынан келіп түсу ықтималдығын табыңдар.

11.4. Екі ойын сүйегі лақтырылған. Түскен сандардың қосындысы бестен артық болуының ықтималдығы қандай?

11.5. Екі мерген бір нысананы көздеді. Бірінші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,9, екіншісінікі 0,8. 1) Екі мергеннің де; 2) ең болмағанда бір мергеннің нысанаға дәл тигізу ықтималдығы қандай?

В

11.6. Екі ойын сүйегі бірдей лақтырылған. Екі төрт санының бір мезгілде түсу ықтималдығы қандай?

11.7. Кездейсоқ алынған фабрика өнімінің жарамдылық ықтималдығы $\frac{92}{100}$, кездейсоқ алынған жарамды өнімнің бірінші сорт болу ықтималдығы $\frac{72}{100}$. Алынған фабрика өнімінің бірінші сортты болу ықтималдығы қандай?

11.8. 1) Жәшікте өлшемдері бірдей 2 ақ, 3 қызыл және 5 көк шар бар. Жәшіктен кездейсоқ алынған шардың боялған (ақ емес) болу ықтималдығын табыңдар.

2) Жәшікте 7 ақ және 3 қара шар бар. Жәшіктен ақ (*B* оқиға) немесе қара (*C* оқиға) шар алынғаннан кейін екінші рет алынған шардың ақ болу ықтималдығын табыңдар.

11.9. Жәшікте 4 ақ және 7 қара шар бар. Жәшікке кері қайтарылмай екі шар кезекпен алынған. Бірінші шардың ақ, екінші шардың қара болу ықтималдығы қандай?

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Нақты сандар жиыны, функция, анықталу облысы, мәндер жиыны, графигі, функцияның шегі, үзіліссіздігі, нүктенің аймағы.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Тәжірибе нәтижесінде бір мезетте орындалатын оқиғалар:
A) ақиқат; B) мүмкін емес; C) үйлесімсіз;
D) қарама-қарсы; E) теңмүмкіндікті.

2. Тәжірибе нәтижесінде міндетті түрде орындалатын оқиғалар:
A) ақиқат; B) мүмкін емес; C) үйлесімсіз;
D) қарама-қарсы; E) теңмүмкіндікті.

3. Тәжірибе нәтижесінде бір оқиғаның орындалуы екінші оқиғаның орындалуын жоққа шығаратын оқиғалар:
A) ақиқат; B) мүмкін емес; C) үйлесімсіз;
D) қарама-қарсы; E) теңмүмкіндікті.

4. Мүмкін емес оқиғаның орындалуының ықтималдығы:
A) 1-ге тең; B) 0-ге тең; C) –1-ге тең;
D) оң емес санға тең; E) теріс санға тең.

5. Жәшікте 3 ақ және 12 қызыл шар бар. Жәшіктен бір шар алынды. Алынған шардың қызыл түсті болуының ықтималдығын табыңдар:
A) 0,7; B) 0,2; C) 0,8; D) 0,75; E) 0,4.

6. Жәшікте 3 ақ және 12 қызыл шар бар. Жәшіктен бір шар алынды. Алынған шардың ақ түсті болуының ықтималдығын табыңдар:
A) 0,7; B) 0,2; C) 0,8; D) 0,75; E) 0,4.

7. Жәшікте 9 сары, 9 ақ және 12 қызыл шар бар. Жәшіктен бір шар алынды. Алынған шардың ақ түсті болмауының ықтималдығын табыңдар:
A) 0,7; B) 0,2; C) 0,8; D) 0,75; E) 0,4.

8. Тиын мен ойын сүйегін лақтырғанда тиынның "елтаңба" жағымен және ойын сүйегінің 12 санының бөлінгіші болатын "сан" жағымен түсуінің ықтималдығын табыңдар:

A) $\frac{5}{6}$; B) $\frac{5}{6}$; C) 1; D) 0,75; E) 0,5.

9. Ойын сүйегі екі рет лақтырылды. Бірінші рет бес санының, екінші рет жұп санның түсуінің ықтималдығын табыңдар:

A) $\frac{7}{6}$; B) $\frac{1}{12}$; C) 1; D) 0,75; E) 0,5.

Математикалық сауаттылық бойынша тапсырмалар

10. Инфузория қарапайым жәндігі екіге бөліну арқылы көбейеді. Егер төрт рет бөлінгеннен кейін олардың саны 96-ға тең болса, онда алғашқыда қанша инфузория болған:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

11. 2 кг алма және 5 кг алмұрт 3100 тг тұрады. 20 кг алмұрт пен 8 кг алма қанша тұрады:

A) 12 000 тг; B) 9300 тг; C) 12 400 тг; D) 15 500 тг; E) 16 000 тг?

12. 165; 175; 385 сандарының қайсыларын үш санынан үлкен әртүрлі жай сандардың көбейтіндісі түрінде жазуға болады:

A) 165; 175; B) 175; 385; C) 165; D) 175; E) 385?

13. Цифрлары қайталанатын болса, онда 6; 9; 0 цифрларынан қанша екітаңбалы сан құрастыруға болады:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

14. Шаршы периметрі 5 см болатын бірдей төрт шаршыға бөлінген. Берілген шаршының периметрі кіші шаршының периметрінен қанша пайызға артық:

A) 20%-ға; B) 100%-ға; C) 25%-ға; D) 50%-ға; E) 150%-ға?

15. Сыныптағы бес оқушының есімі "А" әрпімен басталады. Егер сыныпта 35 оқушы болса, онда тақтаға шыққан оқушының есімі "А" әрпіне басталмауының ықтималдығын табыңдар:

A) $\frac{7}{6}$; B) $\frac{6}{7}$; C) 1; D) $\frac{1}{7}$; E) 0,5.

5 ТУЫНДЫ

§ 12. ФУНКЦИЯНЫҢ НҮКТЕДЕГІ ШЕГІ. ФУНКЦИЯНЫҢ ҮЗІЛІССІЗДІГІ

Түйінді ұғымдар

Функция, функция шегі, функцияның үзіліссіздігі, үзіліс нүктесі

Сендер функцияның нүктедегі шегі, функцияның үзіліссіздігі мен үзіліссіз нүктелері, үзіліссіз функция және оның қасиеттерімен танысасыңдар;

функцияның шегін табу, оны үзіліссіздікке зерттеуге есептер шығаруды үйренесіңдер.

Математикалық анализде функционалды тәуелділік ұғымымен қатар маңызды ұғымдарға функцияның шегі ұғымы жатады.

МЫСАЛ

1. $y = f(x)$ функциясының x нүктесі 2-ге ұмтылғандағы $(x \to 2)$ шегін анықтайық: а) $f(x) = 1 + x^2$; ә) $f(x) = \frac{x+2}{x}$.

Шешуі. $x = 2$ нүктесі функцияның анықталу облысына тиісті болғандықтан, оның $x = 2$ нүктесіндегі шегін табу үшін функцияның осы нүктедегі мәнін есептейміз: а) $f(2) = 1 + 2^2 = 5$; ә) $f(2) = \frac{2+2}{2} = 2$.

Сонымен, x аргументі ұмтылатын сан $f(x)$ функциясының анықталу облысына тиісті болса, онда оның сол нүктедегі мәні функцияның шектік мәні болып табылады.

Осы тұжырымды былай жазуға болады:

$$\text{егер } x \to x_0 \text{ болса, онда } f(x) \to f(x_0).$$

Функцияның шегін оның анықталу облысына тиісті емес нүктелерде табу қажет болатын жағдайлар да кездеседі. Бұл жағдайда $x \to x_0$, $f(x) \to a$, мұндағы a — нақты сан.

a саны табылмауы да мүмкін, онда функцияның $x = x_0$ нүктесінде шегі жоқ дейді.

$f(x_0)$ және a мәндері x_0 нүктедегі *функцияның шектік мәндері* деп айтылады.

*Егер x аргументі a санына (оң жағынан, не сол жағынан) ұмтылғанда $f(x)$ функциясының мәні b санына ұмтылса, онда b саны $f(x)$ функциясының x аргументі a санына ұмтылғандағы (a нүктесіндегі) **шегі** деп аталады.*

*Алдын ала берілген кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, айнымалы x-тің $|x - a| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық мәндері үшін $|f(x) - b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда b саны $f(x)$ функциясының x аргументі a санына ұмтылғандағы (a нүктесіндегі) **шегі** деп аталады.*

МЫСАЛ

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ функциясының $x \to 2$ нүктесіне ұмтылғандағы шектік мәнін табайық.

Шешуі. $x = 2$ нүктесі функциялардың анықталу облыстарына тиісті емес. Сондықтан $x \to 2$ ұмтылғандағы функциялардың шегін табу үшін оларды түрлендіреміз:

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$, осыдан $f(2) = 2 + 2 = 4$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$x \to 2$ ұмтылғанда функцияның шегі қалай табылған?

$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \dfrac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \dfrac{x + 3}{x + 2}$, $f(2) = \dfrac{2 + 3}{2 + 2} = \dfrac{5}{4}$.

Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталған және $x \to x_0$ ұмтылғанда функцияның шектік мәні x_0 нүктесіндегі мәніне тең болса, онда функция ***x_0 нүктесінде үзіліссіз функция*** *деп аталады.*

Анықтамадағы x_0 нүктесін функцияның *үзіліссіздік нүктесі* деп атайды.

Үзіліссіз функцияның анықтамасынан шығатын үш жағдайға тоқталайық:

1) $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталған болады;

2) x_0 нүктесінде функцияның шегі болуы керек;

3) функцияның шектік мәні x_0 нүктесіндегі мәніне тең, яғни $x \to x_0$ ұмтылғанда $f(x) \to f(x_0)$.

Егер осы шарттардың біреуі орындалмаса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзілісті болады. Бұл жағдайда x_0 нүктесі функцияның ***үзіліс нүктесі*** *деп аталады.*

Егер $y = f(x)$ функциясы үзіліссіз болса, онда оның графигі тұтас қисық болады.

Нүктедегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері:

егер $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары x_0 нүктесінде үзіліссіз функциялар болса, онда олардың қосындысы $f(x) + \varphi(x)$, көбейтіндісі $f(x) \cdot \varphi(x)$ және бөліндісі $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ $(\varphi(x_0) \neq 0)$ x_0 нүктесінде үзіліссіз функциялар болады.

Егер $f(x)$ функциясы X жиынының кез келген нүктесінде үзіліссіз болса, онда оны осы X жиынында (кесіндіде) ***үзіліссіз функция*** *деп атайды.*

Кесіндідегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері:

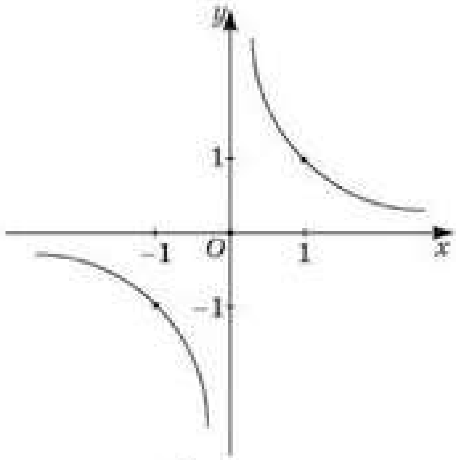
1) *егер* $[a; b]$ *кесіндісінде функция үзіліссіз және нөлге айналмайтын болса, онда ол осы интервалда тұрақты таңбасын сақтайды*;

2) *егер* $y = f(x)$ *функциясы* $x \in [a; b]$ *кесіндісінде үзіліссіз функция болса, онда*: *а) осы кесіндіде шектелген функция болады; ә) осы кесіндіде функция өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін қабылдайды, яғни* $m \le f(x) \le M$, *мұндағы* m — *функцияның ең кіші, ал* M — *функцияның ең үлкен мәні*;

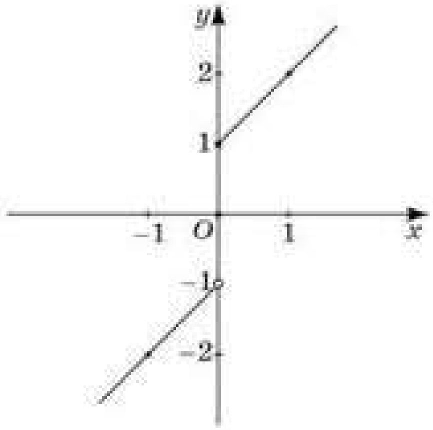
3) *егер* $y = f(x)$ *функциясы* $x \in [a; b]$ *кесіндісінде үзіліссіз функция болса және оның шеткі нүктелерінде әртүрлі таңбалы мәндер қабылдаса, онда* $[a; b]$ *кесіндісінің ішінде функция ең болмағанда бір нүктеде нөлге айналады*.

МЫСАЛ

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясын алайық. Бұл функция сендерге белгілі кері пропорционалдық тәуелділік. Функцияның анықталу облысы нөлден басқа барлық нақты сандар жиыны. Демек, $x = 0$ нүктесі функцияның үзіліс нүктесі, яғни функция — үзілісті функция. Оны функцияның графигінен көруге болады (48-сурет).



48-сурет



49-сурет

МЫСАЛ

4. $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ егер } x \ge 0, \\ x - 1, \text{ егер } x < 0 \end{cases}$ функциясының графигін салып, $x = 0$ нүктесінде функцияның үзіліссіз болмайтынын анықтайық.

Шешуі. Функция екі формуламен берілген: $g(x) = x + 1$, $x \ge 0$ және $\varphi(x) = x - 1$, $x < 0$. Бұл екі функцияның графигі де түзу болады. Сондықтан $g(x) = x + 1$ функциясы үшін $x \ge 0$, ал $\varphi(x) = x - 1$, $x < 0$ болғанда екі нүктенің координатасын анықтаймыз. Сонда бірінші жағдайда (0; 1), (1; 2) және екінші жағдайда (–1; –2), (–0,5; –1,5) нүктелері арқылы өтетін түзулерді саламыз (49-сурет). Суреттен көріп отырғанымыздай, берілген функцияның графигі тұтас қисық емес. Демек, $x = 0$ нүктесінде функция үзілісті болады.

?

1. Функцияның нүктедегі шегі мен нүктедегі үзіліссіздігінің айырмашылығы бар ма?
2. Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясы үзілісті болса, онда осы нүктеде функцияның шегі болмайды деген қорытынды дұрыс па? Жауабын түсіндіріңдер.

3. Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясы үзіліссіз, ал $g(x)$ функциясы үзілісті болса, онда олардың қосындысының, көбейтіндісінің, бөліндісінің осы нүктедегі үзіліссіздігі туралы не айтуға болады?

Жаттығулар

А

12.1. $y = f(x)$ функциясының $x \to x_0$ ұмтылғандағы шегін табыңдар:

а) $f(x) = 3x + 2,\ x \to 2;$ ә) $f(x) = 4x^3 - 3x,\ x \to -1;$

б) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3},\ x \to -3;$ в) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4},\ x \to 2.$

12.2. а) $f(x) = 4x - 5$; ә) $f(x) = 5x - 2$ функциясының $x_0 = -2$; $x_0 = -0{,}5$ нүктелеріндегі шегін табыңдар.

12.3. $y = f(x)$ функциясының графигін салып, оның x_0 нүктесіндегі үзіліссіздігін анықтаңдар:

а) $y = \begin{cases} x, \text{ егер } x \geq 0, \\ x+1, \text{ егер } x < 0, \end{cases}$ $x_0 = 0;$ ә) $y = \begin{cases} x+1, \text{ егер } x \geq 0, \\ -x, \text{ егер } x < 0, \end{cases}$ $x_0 = 0.$

12.4. $y = f(x)$ функциясын үзіліссіздікке зерттеңдер:

а) $y = \dfrac{6}{x - 3};$ ә) $y = \dfrac{x}{2{,}5 + x};$ б) $y = \dfrac{5}{x(x + 1)};$ в) $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}.$

12.5. $y = f(x)$ функциясын үзіліссіздікке зерттеңдер:

а) $y = \dfrac{5}{\cos x};$ ә) $y = -\dfrac{2}{\sin x}.$

В

12.6. $y = f(x)$ функциясының $x \to x_0$ ұмтылғандағы шегін табыңдар:

а) $f(x) = \dfrac{2x - x^2}{x - 2},\ x \to 2;$ ә) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x + 1},\ x \to -1;$

б) $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x - 3},\ x \to 3;$ в) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^4 - 16},\ x \to 2;$

г) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 5x + 4},\ x \to 1;$ ғ) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x - 4}{3x^2 - 7x - 6},\ x \to -\dfrac{2}{3};$

д) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4},\ x \to 4;$ е) $f(x) = \dfrac{4x - x^3}{2x^2 + 3x - 2},\ x \to -2.$

12.7. Функцияның графигін салып, үзіліс нүктесін анықтаңдар:

а) $f(x) = \begin{cases} -3, \text{ егер } x < 0, \\ x, \text{ егер } x \geq 0; \end{cases}$ ә) $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ егер } x < 0, \\ x^2 + 2, \text{ егер } x \geq 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ егер } 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ x - 4, \text{ егер } x \leq 0; \end{cases}$ в) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, \text{ егер } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{4}, \\ x - \dfrac{\pi}{4}, \text{ егер } x \geq \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

12.8. $y = f(x)$ функциясын үзіліссіздікке зерттеңдер:

а) $y = \dfrac{25}{3x^2 + 25}$; ә) $y = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 4}$; б) $y = \dfrac{4x}{x^2 + x}$; в) $y = \dfrac{x}{1 - \cos x}$.

12.9. Сан түзуінің кез келген нүктесінде: а) $x = 0$ нүктесінен басқа нүктелерде; ә) $x = 0$ және $x = 1$ нүктелерінен басқа нүктелерде үзіліссіз болатын функцияға мысалдар келтіріңдер.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Аргумент, функция, функцияның анықталу облысы, функцияның нүктедегі шегі, нүктедегі үзіліссіздігі.

§ 13. ТУЫНДЫНЫҢ АНЫҚТАМАСЫ

Түйінді ұғымдар

Функция, туынды, өсімше, дифференциал

Сендер туындының анықтамасын білесіңдер, туындының анықтамасын қолданып туынды табуды үйренесіңдер.

Функцияны қарапайым қозғалыстар, құбылыстар мен процестердің математикалық моделі тұрғысынан қарастыру мақсатында қолданады.

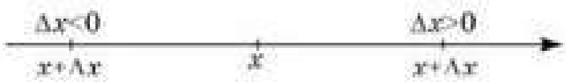
Алдымен аргумент және функция өсімшелері ұғымдарын анықтап алайық.

Үзіліссіз $y = f(x)$ функциясы берілсін. Аргументтің x_1 және x_2 мәндері функцияның анықталу облысынан алынсын.

$x_2 - x_1$ айырымын ***аргументтің x_1 нүктесіндегі өсімшесі*** *деп атайды.*

Өсімше Δx таңбасымен белгіленіп, **"дельта икс"** деп оқылады.

Функцияның аргументі x-ке Δx өсімшесін берейік. Δx өсімшесін қабылдағаннан кейін аргументтің мәні $x + \Delta x$ болады. Өсімшенің таңбасы оң да, теріс те болуы мүмкін. Егер $\Delta x > 0$ болса, онда $x + \Delta x$ нүктесі x нүктесінің оң жағына, $\Delta x < 0$ болса, онда $x + \Delta x$ нүктесі x нүктесінің сол жағы на орналасады (50-сурет).



50-сурет

Сонымен, аргумент өсімшесін

$$\Delta x = (x + \Delta x) - x \tag{1}$$

теңдігімен өрнектеуге болады.

Демек, аргументтің өсімшесі оның екі нүктедегі мәндерінің айырымына тең.

Аргумент x-ке Δx өсімшесін бергенде $y = f(x)$ функциясы да өсімше қабылдайды. Бұл функцияның өсімшесі Δy деп белгіленіп,

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y$$

немесе

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (2)$$

теңдігімен анықталады.

Сонда функция өсімшесі функцияның екі нүктедегі мәндерінің айырымына тең.

МЫСАЛ **1.** $y = x^3$ функциясының аргументі x мәнінен $x + \Delta x$ мәніне ауысқандағы өсімшесін табайық.

Шешуі. $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$.

Сонымен, $\Delta y = (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)\Delta x$.

Функцияның туындысының анықтамасын берейік. Ол үшін функция өсімшесін аргумент өсімшесіне бөлеміз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (3)$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ *өрнегінің аргумент өсімшесі $\Delta x \to 0$ ұмтылғандағы шегі бар болса, онда ол шекті* ***$y = f(x)$ функциясының x нүкте сіндегі туындысы*** *деп атайды.*

Туындының белгіленуі: $y' = f'(x)$.

$$\Delta x \to 0 \text{ ұмтылғанда } \frac{\Delta y}{\Delta x} \to y' \text{ немесе } \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \to f'(x). \qquad (4)$$

Оқылуы: $f'(x)$ — "x-тен эф штрих".

Функцияның туындысын табу амалын *функцияны дифференциалдау* деп атайды.

x нүктесінде функцияның туындысы бар болса, онда $f(x)$ функциясын осы ***нүктеде дифференциалданатын функция*** *деп атайды. Егер функция аралықтың барлық нүктелерінде дифференциалданатын болса, онда оны* ***аралықта дифференциалданатын функция*** *деп атайды.*

$y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде туындысы бар болса, онда осы нүктеде функция үзіліссіз болады. Кері тұжырым барлық жағдайда дұрыс бола бермейді.

АЛГОРИТМ Анықтама бойынша туынды табу алгоритмі:

1) аргументке Δx өсімшесін беру;

2) Δx өсімшеге сәйкес $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ функция өсімшесін анықтау;

3) функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасын табу, яғни $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

4) аргумент өсімшесі Δx нөлге ұмтылғандағы қатынастың шегін яғни $\Delta x \to 0$ жағдайдағы $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ мәнін табу.

Алгоритмді қолданып, туынды табуға мысалдар қарастырайық.

МЫСАЛ **2.** а) $f(x) = x^2$; ә) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясының x нүктесіндегі туындысын табайық.

Шешуі : а) $f(x) = x^2$ функциясының туындысын табайық. Алгоритм бойынша:
1) $x + \Delta x$;
2) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$;
3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;
4) $\Delta x \to 0$ жағдайда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x$, олай болса $f'(x) = 2x$, яғни $(x^2)' = 2x$;

ә) $f(x) = \sqrt{x}$ функциясының туындысын табайық. Алгоритм бойынша:
1) $x + \Delta x$;
2) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} =$
$= \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{x + \Delta x - x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$;
3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} : \Delta x = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$;
4) $\Delta x \to 0$ жағдайда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$, онда $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, яғни $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясының туындысын табайық. Алгоритм бойынша:
1) $x + \Delta x$;
2) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$;
3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)} : \Delta x = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$;
4) $\Delta x \to 0$ жағдайда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to -\frac{1}{x^2}$, олай болса, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, яғни $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Осы қарастырылған мысалдардан мына қорытындыны аламыз:

$(x^2)' = 2x$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Жауабы : а) $2x$; ә) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $-\frac{1}{x^2}$.

Тура осылай $f(x) = C$ (C — тұрақты) және $f(x) = x$ функцияларының туындылары сәйкесінше $C' = 0$, $(x)' = 1$ болады.

?

1. Аргумент пен функцияның өсімшелері арасында қандай байланыс бар? Жауабын түсіндіріңдер.
2. Функцияның нүктедегі және аралықтағы дифференциалдануы деген ұғымдардың айырмашылығы неде?
3. Функцияның нүктедегі дифференциалдануы мен үзіліссіздігінің арасындағы байланысты қалай түсіндіруге болады?

Жаттығулар

А

13.1. $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі өсімшесін табыңдар:
а) $f(x) = 1 + 2x$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}01$;
ә) $f(x) = -5x + 1{,}6$, $x_0 = -5$, $\Delta x = -0{,}1$;

б) $f(x) = 3x^2 - 1$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$;
в) $f(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = -3$, $\Delta x = -0{,}3$.

13.2. а) Тіктөртбұрыштың қабырғалары 5 см және 12 см. Оның енін 0,8 см-ге, ұзындығын 0,6 см-ге арттырған кездегі тіктөртбұрыштың периметрі мен ауданының өсімшесін анықтаңдар. ә) Тіктөртбұрышты үшбұрыштың катеттері 3 см, 4 см. Егер катеттерін сәйкесінше 0,4 см және 0,2 см-ге арттырса, оның ауданының өсімшесі қандай болады ?

13.3. Функцияның x_0 нүктесіндегі Δx және Δf өсімшелерін табыңдар:

а) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{3}$;

ә) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{4}$.

B

13.4. $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі өсімшесін Δx және x_0 арқылы өрнектеңдер:

а) $f(x) = x^2 + x$; ә) $f(x) = 2x^2 - x$.

13.5. Алгоритмді пайдаланып, $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысын табыңдар:

а) $f(x) = 3x^2 + 1$, $x_0 = -2$; ә) $f(x) = x^2 - 2$, $x_0 = -1$.

13.6. Функцияның x_0 нүктесіндегі Δx және Δf өсімшелерін табыңдар:

а) $f(x) = \frac{1}{2} + \sin x$; $x_0 = \frac{3\pi}{4}$; $x = \frac{2\pi}{3}$;

ә) $f(x) = \operatorname{ctg} x - \sqrt{3}$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{3}$.

13.7. Функцияның аргументі Δx өсімшесін қабылдағанда x_1-ге тең. Функцияның өсімшесін табыңдар:

а) $f(x) = \sqrt{x}$, $\Delta x = 0{,}29$, $x_1 = 2{,}25$;

ә) $f(x) = \sqrt{x}$, $\Delta x = 0{,}25$, $x_1 = 1{,}69$.

13.8. Бір елдің тұрғындарының саны t уақытында $f(t)$-ға тең. t_0-ден $t_0 + \Delta t$ дейінгі уақыт аралығындағы функцияның өсімшесінің мағынасы қандай болады?

13.9. Сырықтың сол жақ шетінен x қашықтықтағы нүктенің температурасы $f(x)$-қа тең. x_0 нүктесі $x_0 + \Delta x$ нүктесіне ауысқанда $f(x)$ функциясы өсімшесінің физикалық мағынасы қандай?

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның шегі, аргументтің және функцияның өсімшесі, туынды, дәрежелік функция.

§14. ТУЫНДЫНЫ ТАБУ ЕРЕЖЕЛЕРІ

Түйінді ұғымдар

Функция, туынды, туынды табу ережелері

Сендер туындыны табу ережелерімен дәрежелік функцияның туындысын табу формуласымен танысасыңдар;

ережелерді қолданып туынды табуды үйренесіңдер.

$u(x)$ және $v(x)$ функцияларының x нүктесіндегі мәндерін қысқаша былай белгілейік: $u(x) = u$, $v(x) = v$, $u'(x) = u'$, $v'(x) = v'$.

1-ереже. *Егер x нүктесінде u және v функцияларының u', v' туындылары бар болса, онда осы нүктеде олардың қосындыларының да туындысы бар болады және ол*

$$(u + v)' = u' + v' \tag{1}$$

формуласымен анықталады.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін туындының анықтамасы мен туындыны табу алгоритмін қолданамыз.

Ол үшін екі функцияның қосындысы $u(x) + v(x) = F(x)$ функциясын алайық және аргумент x-ке Δx өсімшесін берейік. Сонда $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = u(x + \Delta x) - u(x) + v(x + \Delta x) - v(x)$ аламыз. Функцияның өсімшесін аргументтің өсімшесі Δx-ке бөлсек,

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Енді $\Delta x \to 0$ функцияның шегін табамыз және туындының анықтамасы бойынша $F'(x) = u' + v'$ аламыз. Сонда $(u + v)' = u' + v'$.

2-ереже. *Егер x нүктесінде u және v функцияларының u', v' туындылары бар болса, онда осы нүктеде олардың айырымдарының туындысы бар болады және ол*

$$(u - v)' = u' - v' \tag{2}$$

формуласымен анықталады.

(2)-формуланың дәлелдеуін өздерің қарастырыңдар.

МЫСАЛ **1.** $f(x) = x^2 - x + 5$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі. $f'(x) = (x^2 - x + 5)' = (x^2)' - (x)' + (5)' = 2x - 1 + 0 = 2x - 1.$

Жауабы: $2x - 1$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$(10 + x - x^2)' = 1 - 2x$ функциясының туындысы қалай табылған?

3-ереже. *Егер x нүктесінде u және v функцияларының туындылары бар болса, онда осы нүктеде олардың көбейтінділерінің де туындысы бар болады және ол*

$$(u \cdot v)' = u'v - v'u \qquad (3)$$

формуласымен анықталады.

Салдар. *Егер v функциясының x нүктесінде туындысы бар, ал C тұрақты сан болса, онда Cv функциясының да осы x нүктесінде туындысы бар және ол*

$$(Cv)' = C \cdot v' \qquad (4)$$

формуласымен анықталады .

(4)-формуланы үшінші ережені қолданып дәлелдеңдер.

МЫСАЛ **2.** $y = 15x^2$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі : Мұндағы $C = 15$, $v = x^2$, демек, (4) формуланы пайдаланамыз:

$$y' = (15x^2)' = 15 \cdot (x^2)' = 15 \cdot 2x = 30x .$$

Жауабы : $30x$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$y = 6x^2 - 3x + 1$ функциясының туындысы $12x - 3$ болатынын түсіндіріңдер.

4-ереже. *Егер x нүктесінде u және v функцияларының туындылары бар және $v \neq 0$ болса, онда осы нүктеде олардың бөліндісінің де туындысы бар болады және ол*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (5)$$

формуласы арқылы анықталады .

МЫСАЛ **3.** $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ функциясының туындысын есептейік.

Шешуі: $$y' = \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Жауабы : $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

1-ден үлкен кез келген $n \in N$ үшін $y = x^n$ дәрежелік функцияның туындысы

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (6)$$

формуласымен есептелінеді.

МЫСАЛ **4.** а) $y = x^6$; ә) $y = 5x^4 + x^9$; б) $y = \frac{1}{2}x^8 - \frac{3}{x^7}$ функцияларының туындысын табайық.

Шешуі . а) $y' = (x^6)' = 6 \cdot x^{6-1} = 6x^5$;

ә) $y' = (5x^4 + x^9)' = 5(x^4)' + (x^9)' = 5 \cdot 4x^3 + 9x^8 = 20x^3 + 9x^8$;

б) $y' = \left(\frac{1}{2}x^8 - \frac{3}{x^7}\right)' = \frac{1}{2} \cdot (x^8)' - 3 \cdot (x^{-7})' = \frac{1}{2} \cdot 8x^7 - 3 \cdot (-7) \cdot x^{-7-1} = 4x^7 + \frac{21}{x^8}$.

Жауабы : а) $6x^5$; ә) $20x^3 + 9x^8$; б) $4x^7 + \frac{21}{x^8}$.

?

1. Қосылғыштарының саны екіден артық болатын қосындының туындысын қалай табуға болады?
2. Бөліндінің туындысын есептегенде қандай шарт орындалуы тиіс?
3. Бөліндінің туындысын екі функцияның көбейтіндісінің туындысы ретінде қарастыруға бола ма?

Жаттығулар

А

14.1. Функциялардың туындысын табыңдар:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4$; ә) $f(x) = 4x^8 + \sqrt{x}$;

б) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^4$; в) $f(x) = 4x^6 + 7x^5 + 1$;

г) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3x - 4$; ғ) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x$;

д) $f(x) = 2\sqrt{x} - 2$; е) $f(x) = -5x^2 + x + 1$.

14.2. $f'(x) = 0$ теңдеуін шешіңдер:

а) $f(x) = 4x^2 + 2x$; ә) $f(x) = 3x^2 - 4x$;

б) $f(x) = x^2 + x - 1$; в) $f(x) = -0{,}5x^2 - 4x + 0{,}1$.

14.3. $y = f(x)$ функцияларының x_0 нүктесіндегі туындысын табыңдар:

а) $f(x) = x^2(x - 1)$, $x_0 = -1$; ә) $f(x) = \frac{2x + 1}{x}$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = 3x(x + 1)$, $x_0 = -\frac{2}{3}$; в) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$, $x_0 = 1$.

14.4. $f'(x) > 0$ теңсіздігін шешіңдер:

а) $f(x) = 18x^2 - 7x + 1$; ә) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 5x + 2$;

б) $f(x) = 1 + 3x - x^2$; в) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{6}{7}$.

14.5. Функциялардың туындысын табыңдар:

а) $f(x) = (x + 5)(x - 4)$;

ә) $f(x) = \sqrt{2}\,x^2 - (3x - 2)(5x + 1)$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 1}$; в) $f(x) = \dfrac{3x - x^2}{x + 2}$.

В

14.6. Функциялардың туындысын табыңдар:

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{3 + x^2}$; ә) $f(x) = \dfrac{16 - x^4}{x^2 + 4}$;

б) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 1}{x^3}$; в) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$.

14.7. $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысының мәнін есептеңдер:

а) $f(x) = 4x^4 - 5x^2$, $x_0 = 1$;

ә) $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 1$, $x_0 = -2$.

14.8. $y = f(x)$ функциясының $x = -1$ болғандағы туындысының мәнін табыңдар:

а) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$; ә) $f(x) = \dfrac{x}{2x - 1}$;

б) $f(x) = \dfrac{3}{2x + 2}$; в) $f(x) = \dfrac{x + 4}{2x - 1}$.

14.9. $f'(x) = 0$ теңдеуін шешіңдер:

а) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;

ә) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$.

14.10. $f'(x) > 0$ теңсіздігін шешіңдер:

а) $f(x) = 12x^3 + 18x^2 - 7$;

ә) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$.

14.11. $f'(x)$ m 0 теңсіздігін шешіңдер:

а) $f(x) = x^3 + 0{,}5x^2 - 4x + 2$;

ә) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 0{,}5x^2 + 2x$.

14.12. Егер $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ және $g(x) = x^4 - 3x^3 - 3x$ болса, онда $f'(0)$ және $g'(0)$ мәндерін салыстырыңдар.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның графигі, функция мен аргументтің өсімшесі, туынды, жанама, туынды табу ережелері.

§ 15. ТУЫНДЫНЫҢ ФИЗИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ МАҒЫНАСЫ. ФУНКЦИЯ ГРАФИГІНЕ ЖҮРГІЗІЛГЕН ЖАНАМАНЫҢ ТЕҢДЕУІ

Түйінді ұғымдар

Функция, туынды, функция графигі, жанама

Сендер туындының физикалық және геометриялық мағынасын білесіңдер; жанаманың теңдеуімен танысасыңдар, туындының физикалық және геометриялық мағынасын қолданып, есептер шығаруды үйренесіңдер.

Туындының физикалық мағынасы

Түзу сызық бойымен қозғалған физикалық дененің t уақыт ішінде жүріп өткен жолы $s(t)$ функциясымен берілсін. Қозғалыстағы дененің $t+\Delta t$ уақыт өткеннен кейінгі жолы $s(t+\Delta t)$ функциясымен анықталады. Ал уақыт t-дан $t+\Delta t$ шамасына өзгергендегі жолдың шамасы

$$s(t+\Delta t)-s(t)$$

айырымына тең. Енді осы айырымды Δt уақытқа бөлсек, қозғалыстағы дененің орташа жылдамдығын аламыз:

$$\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}, \text{ немесе } v_{орт}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

Соңғы өрнектен Δt нөлге ұмтылғандағы шекке көшсек, орташа жылдамдық t уақытындағы жылдамдыққа ұмтылады $v_{орт}\to v(t)$ немесе

$$v(t)=s'(t) \qquad (1)$$

теңдігін аламыз.

Мұндағы $s(t)$ — қозғалыстағы дененің t уақыт ішіндегі жүрген жолы, ал $v(t)=s'(t)$ — қозғалыстағы дененің t уақыт мезетіндегі *лездік жылдамдығы* .

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Биіктіктен еркін құлаған дененің t уақыт ішіндегі жүрген жолы $h(t)=g\frac{t^2}{2}$ функциясымен анықталатыны физика курсынан белгілі.

t уақыт мезетіндегі дененің құлау жылдамдығы $v(t)=h'(t)=\left(g\frac{t^2}{2}\right)'=$ $=g\frac{2t}{2}=gt$, яғни $h'(t)=v(t)=gt$, мұндағы $g=9{,}81$ м/с^2 — еркін құлаған дененің үдеуі.

Демек, $v(t)=gt$ өрнегі берілген $h(t)=\frac{g}{2}t^2$ теңдеуіне сәйкес қозғалатын дененің (функцияның) лездік жылдамдығын береді.

Жалпы, $y=f(x)$ функциясының x нүктесіндегі туындысы оның x нүктесіндегі өзгеру жылдамдығын анықтайды. Бұл туындының физикалық мағынасы.

Егер $v(t)$ жылдамдығынан туынды табатын болсақ, онда $v'(t)=$ $=(gt)'=g$ шығады. Демек, жылдамдықтан алынған туынды үдеуге тең.

МЫСАЛ

1. Қозғалыстағы дененің жүрген жолы $s(t) = t^2 + 2$ формуласымен берілген. Осы дененің $t = 5$ с мезетіндегі лездік жылдамдығы мен үдеуін табайық.

Шешуі. Лездік жылдамдық $s(t) = t^2 + 2$ функциясының $t = 5$ аргумент мәніндегі туындысына тең: $v(t) = s'(t) = 2t$, $v(5) = 2 \cdot 5 = 10$.

Үдеуді есептеу үшін лездік жылдамдықтан туынды аламыз, сонда $a(t) = v'(t) = (2t)' = 2$, $a(5) = 2$.

Жауабы : 10 м/с; 2 м/с^2.

Туындының геометриялық мағынасы

$y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде $y' = f'(x)$ туындысы бар деп ұйғарып, оның геометриялық мағынасын анықтайық. 51-суреттегі AB қисығы $y = f(x)$ функциясының графигі болсын. N_0 және N нүктелері — AB қисығының бойында жатқан нүктелер. Осы екі нүкте арқылы жүргізілген TT' — қиюшы түзу. Ox осінің оң бағытымен TT' түзуінің арасындағы бұрышты β деп белгілейік. Ox осіне параллель N_0E, ал N нүктесі арқылы Oy осіне параллель NE түзулерін жүргізейік. Сонда N_0EN тікбұрышты үшбұрышы шығады. $\angle N_0EN = 90°$, $\angle EN_0N = \beta$, $MN_0 = E_1E = f(x_0)$, себебі $N_0(x_0, f(x_0))$ және $MN_0 \parallel E_1E$.

$$N_0E = \Delta x,\ E_1N = f(x_0 + \Delta x),\ EN = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y.$$

$\dfrac{EN}{N_0E} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\,\beta$. AB қисығының бойындағы N_0 жылжымайтын нүкте болсын, ал N нүктесін қисықтың бойымен жылжытқанда N_0 нүктесімен беттессін деп ұйғарайық.

Сонда қиюшы TT' қисықтың N_0 нүктесіндегі жанамасы, яғни FF' түзуіне айналады. Қиюшы мен Ox осінің оң бағытының арасындағы β бұрышы жанама мен Ox осінің оң бағытының арасындағы α бұрышына айнала ды, яғни $\Delta x \to 0$ ұмтылғанда $\beta \to \alpha$ (51-сурет).

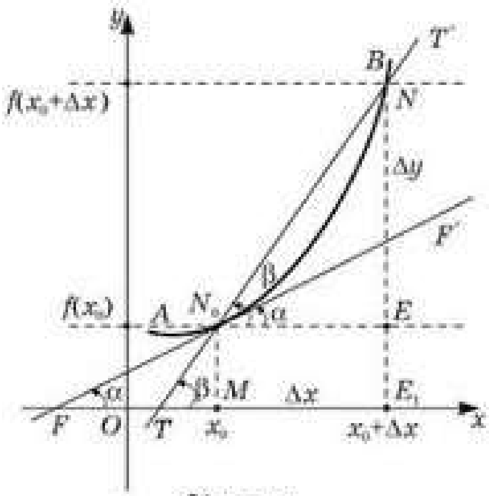
Осы жоғарыда айтылғандарды мына теңдеумен жазуға болады, $\Delta x \to 0$ болғанда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$. Олай болса, $\beta \to \alpha$ ұмтылғанда $\mathrm{tg}\,\beta \to \mathrm{tg}\,\alpha = k$.

Демек, $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы $f'(x_0)$ осы функция графигінің $(x_0; f(x_0))$ нүктесі арқылы өтетін жанамасының бұрыштық коэффициентіне тең:

$$f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha = k. \quad (2)$$

(2)-формула туындының геометриялық мағынасын береді.

Туындының геометриялық мағынасы — функцияның графигіне жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті .



51-сурет

МЫСАЛ **2.** $y = x^2$ параболасына $N_0(1;\ 1)$ нүктесінде жүргізілген жанама мен Ox осінің оң бағытының арасындағы бұрышын табайық.

Шешуі. $y = x^2$ функциясының туындысы $y' = 2x$. (2)-формула бойынша $f'(1) = \mathrm{tg}\,\alpha = 2 \cdot 1 = 2$. ал жанама мен Ox осінің оң бағытының арасындағы бұрыш $\alpha = \mathrm{arctg}2$.

Жауабы : arctg2.

Функцияның графигіне берілген нүктеде жүргізілген жанама мен Ox осінің оң бағытының арасындағы бұрыш:

а) сүйір болса, онда берілген нүктедегі туынды оң;

ә) доғал болса, онда берілген нүктедегі туынды теріс;

б) нөлге тең болса, онда берілген нүктедегі туынды нөлге тең болады.

Берілген нүктеде функция графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуі

$y = f(x)$ функциясы және оның графигіне тиісті $N_0(x_0;\ y_0)$ нүктесіндегі $f'(x_0)$ туындысының мәні берілсін.

Жанама түзу болғандықтан, жанаманың теңдеуін $y = kx + b$ сызықтық функция түрінде іздейміз. Мұндағы $k = \mathrm{tg}\,\alpha = f'(x_0)$, ендеше $y = f'(x_0)x_0 + b$. Осы теңдеуге $N_0(x_0;\ f(x_0))$ нүктесінің координаталарын қоямыз: $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$, осыдан $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

Соңғы өрнекті $y = f'(x_0)x + b$ теңдеуіне қойсақ, $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ шығады.

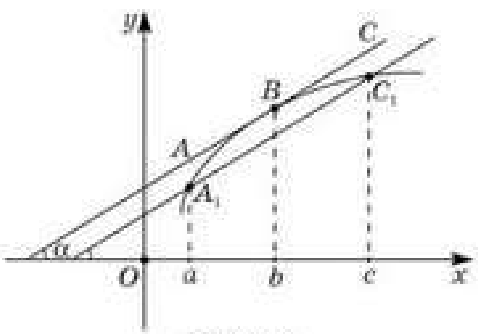
Демек,

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{3}$$

(3)-теңдеу *жанаманың теңдеуі* болып табылады.

$A_1(a;\ f(a))$, $C_1(c;\ f(c))$ нүктелері арқылы өтетінін қиюшысына параллель болатын $f(x)$ функциясының графигіне $(a;\ c)$ интервалынан алынған абсциссасы b-ға тең B нүктесінде жүргізілген AC жанаманың бар болуын түсіндіру үшін туындының геометриялық мағынасын пайдаланайық .

$y = f(x)$ функциясының B нүктесі арқылы өтетін AC жанамасына параллель A_1C_1 түзуін жүргізейік (52-сурет). Сонда α бұрышы A_1C_1 қиюшының көлбеулік бұрышына тең, яғни $f'(b) = \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.



52-сурет

Сонымен, егер $f(x)$ функциясы $(a;\ c)$ аралығында дифференциалданатын болса, онда

$$f'(b) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}. \tag{4}$$

теңдігі орындалатындай $b \in (a;\ c)$ нүктесі табылады.

Бұл формула *Лагранж формуласы* деп аталады.

АЛГОРИТМ $f(x)$ функциясының графигіне абсциссасы x_0-ге тең нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазу алгоритмі:

1) x_0-ге сәйкес $f(x_0)$-ді есептеу;
2) $f(x)$ функциясының туындысын табу;
3) x_0-дегі туындының мәнін $f'(x_0)$ есептеу;
4) табылған мәндерді (3)-формулаға қойып, жанаманың теңдеуін жазу.

МЫСАЛ **3.** $y = x^2 - 2x - 1$ функциясына абсциссасы $x_0 = 3$ болатын нүкте арқылы жүргізілген жанаманың теңдеуін жазайық.

Шешуі. Жанаманың теңдеуін жазу алгоритмін қолданамыз:

1) $x_0 = 3$, онда $f(3) = 3^2 - 3 \cdot 2 - 1 = 2$;
2) $f'(x) = (x^2 - 2x - 1)' = 2x - 2$;
3) $f'(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$;
4) енді табылған мәндерді (2) теңдеуге қоямыз: $y = 2 + 4(x - 3) = 2 + 4x - 12 = 4x - 10$. Демек, жанаманың теңдеуі $y = 4x - 10$ болады.

Жауабы: $y = 4x - 10$.

МЫСАЛ **4.** $y = 2x^2 - 4x + 5$ параболасына $(0; 5)$ және $(2; 5)$ нүктелері арқылы жүргізілген жанамалардың қандай нүктеде қиылысатынын анықтайық.

Шешуі. 1) Берілген функция графигінің $(0; 5)$ нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың теңдеуін жазамыз.

$x_0 = 0$, $f(0) = 5$;

$f'(x) = (2x^2 - 4x + 5)' = 4x - 4$; $f'(0) = 4 \cdot 0 - 4 = -4$.

Енді табылған мәндерді (2)-теңдеуге қоямыз: $y = 5 + (-4) \cdot (x - 0) = 5 - 4x$. Демек, графикке $(0; 5)$ нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың теңдеуі $4x + y = 5$ болады.

2) Берілген функция графигіне $(2; 5)$ нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың теңдеуін жазамыз. $x_0 = 2$, $f(2) = 5$;

$f'(x) = (2x^2 - 4x + 5)' = 4x - 4$; $f'(2) = 4 \cdot 2 - 4 = 4$.

Енді табылған мәндерді (3)-теңдеуге қоямыз. Сонда $y = 5 + 4(x - 2) = 4x - 3$. Демек, $(2; 5)$ нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың теңдеуі $4x - y = 3$ болады.

3) Енді жанамалардың $4x + y = 5$ және $4x - y = 3$ теңдеулерінен теңдеулер жүйесін құрып және оны шешіп, $x = 1$ және $y = 1$ аламыз. Демек, жанамалардың қиылысу нүктесі $(1; 1)$.

Жауабы : $(1; 1)$.

?

1. Туындының физикалық мағынасы лездік жылдамдық па, әлде орташа жылдамдық па?
2. Функцияның кез келген нүктесі арқылы өтетін жанама мен туынды ұғымының арасында қандай байланыс бар?

Жаттығулар

A

15.1. а) $x(t) = 2t^2 + 3$ заңы бойынша қозғалған дененің $t = 2$ с мезетіндегі қозғалыс жылдамдығын табыңдар.

ә) Нүкте $x(t) = 15t^2 + 6t$ заңы бойынша қозғалады. Кез келген t уақыт мезетіндегі жылдамдықты есептеуге арналған формула арқылы нүктенің $t = 1$ с мезетіндегі жылдамдығын және үдеуін табыңдар.

б) Дене $x(t) = t^2 + 4t - 1$ заңы бойынша қозғалады. Қозғалыс басталғаннан 1 с өткеннен кейінгі дененің жылдамдығын табыңдар.

15.2. $y = f(x)$ функциясы графигінің берілген A нүктесінен өтетін жанамасының абсцисса осіне көлбеулік бұрышының тангенсін табыңдар:

а) $f(x) = 2x^2 + 2$, $A(0;\ 2)$;

ә) $f(x) = 3x^2 - 1$, $A(2;\ 11)$;

б) $f(x) = 4x^2 + 3x$, $A(1;\ 7)$.

15.3. $y = f(x)$ функциясының графигіне абсциссасы x_0 болатын нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

а) $f(x) = 4x^2 - 2$, $x_0 = -1$;

ә) $f(x) = 3x^2 + 1$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = 1 - 5x^2$, $x_0 = 1$.

15.4. $y = f(x)$ функциясы графигіне берілген A нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$, $A(0;\ 1)$; ә) $f(x) = 3 - x^2$, $A(-1;\ 2)$.

B

15.5. $y = f(x)$ функциясының графигіне абсциссасы x_0 болатын нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

а) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 5$, $x_0 = -1$; ә) $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + 3$, $x_0 = 1$.

15.6. Берілген $f(x)$ функциясы графигіне абсциссасы $x = a$ болатын нүктеде жүргізілген жанаманың абсцисса осіне көлбеулік бұрышының мәнін табыңдар:

а) $f(x) = x^2 - 0{,}5\ x + 1$, $a = 1$;

ә) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{7}$, $a = 1{,}5$.

15.7. $y = f(x)$ функциясының графигіне $(x_0;\ f(x_0))$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

а) $f(x) = 3x + 2x^2$, $x_0 = 1$;

ә) $f(x) = 4x^2 + x - 1$, $x_0 = 2$.

15.8. $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанама абсцисса осіне параллель болатындай түзудің теңдеуін жазыңдар:

а) $y = 2 + x^2$; ә) $y = -x^2$;

б) $y = x^2 - 3$; в) $y = x^2 - 2x$.

15.9. $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2$ параболасына $(-1;\ 2)$ және $(2;\ 0{,}5)$ нүктелері арқылы жүргізілген жанамалар қандай нүктеде қиылысады?

15.10. $y = f(x)$ функциясы графигінің ордината осімен қиылысу нүктесі арқылы өтетін жанаманың теңдеуін жазыңдар:

а) $y = -2x + x^2$; ә) $y = \frac{1}{2}x^2 - x$.

15.11. $y = x + 1$ түзуіне параллель болатын $y = 3 - x^2$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, анықталу облысы, мәндер жиыны, туынды, туынды табу ережелері.

§ 16. КҮРДЕЛІ ФУНКЦИЯНЫҢ ТУЫНДЫСЫ

Түйінді ұғымдар

Функция, күрделі функция, туынды

Сендер күрделі функцияның туындысын табу формуласымен таныcасыңдар;

формуланы қолданып күрделі функцияның туындысын табуды үйренесіңдер.

ЕСКЕ ТҮСІРЕЙІК!

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$ болса, онда $f(g(x))$, $g(f(x))$ функцияларын құрастырыңдар.

2) $y = 3 + \sqrt{x}$ болса, онда $f(x)$ және $g(x)$ жазыңдар.

Егер $y = f(u)$ функциясының u нүктесінде, $u = g(x)$ функциясының x нүктесінде туындылары бар болса, онда күрделі функцияның x аргументі бойынша туындысы бар болып және ол туынды

$$y' = f'(g(x))\, g'(x) \qquad (1)$$

формуласымен анықталады.

МЫСАЛ

1. а) $y = (6x - 13)^5$; ә) $y = \sqrt{1 - x^3}$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі. а) Мұндағы $f(u) = u^5$, $u(x) = 6x - 13$. Онда $f'(u) = 5u^4$, $u'(x) = 6$. Сонда $y' = 5u^4 u' = 5(6x - 13)^4 \cdot 6 = 30(6x - 13)^4$;

ә) Мұндағы $f(u) = \sqrt{u}$, $u(x) = 1 - x^3$, онда $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$, $u'(x) = -3x^2$;

Сонда $y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}(-3x^2) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}$.

Жауабы: а) $30(6x - 3)^4$; ә) $-\frac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$(x^5 + 3x - \sqrt{x+1})' = 5x^4 + 3 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ күрделі функциясының туындысы қалай табылған?

1. $y = x^n$, $y = (3x + 5)^n$, $y = \cos x$, $y = \cos(1 + 3x^2)$ функциялары күрделі функция бола ма?

Жаттығулар

А

16.1. $y = f(g(x))$ күрделі функциясын құрайтын f және g функцияларын анықтаңдар:

а) $y = (2x - 1)^2$; ә) $y = \sqrt{3x+2}$; б) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = \operatorname{tg} 4x$.

16.2. $y = f(g(x))$, $y = g(f(x))$ күрделі функцияларын жазыңдар:

а) $f(x) = \cos x$, $g(x) = 2x$; ә) $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x + 1$;

б) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 4x - 1$; в) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{2}{x+1}$.

Функцияның туындысын табыңдар **(16.3-16.4)** :

16.3. а) $f(x) = \sqrt{x+15}$; ә) $f(x) = \sqrt{7-8x}$;

б) $f(x) = (-x^2 + 5)^3$; в) $f(x) = (-8x^2 + 1)^4$.

16.4. а) $f(x) = 5(3x + x^3 - 4x^4)^3$; ә) $f(x) = (4x^2 - x^4)^2$;

б) $f(x) = (3\sqrt{x} - 2x^2 + x^5)^5$; в) $f(x) = (4\sqrt{x} + 6x^2 - 5x)^5$.

В

16.5. $y = f(g(x))$, $y = g(f(x))$ күрделі функцияларын жазыңдар:

а) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{2}{x^3 - 1}$; ә) $f(x) = 3x^3 + 2x^2$, $g(x) = \operatorname{tg} x$.

16.6. Функцияның туындысын табыңдар:

а) $f(x) = (7x^5 - 3x^7)^{17} + (6 - 3x^3)^{13}$;

ә) $f(x) = \left(\frac{1}{3} - 9x^3\right)^{27} - \left(\frac{1}{5}x - 9\right)^{30}$;

б) $f(x) = (4 - 5x)^{10} - (5 - 4x)^{20}$;

в) $f(x) = (x^5 - 4x)^{13} + \left(\frac{1}{6} - 9x^6\right)^{14}$.

Функцияның туындысын табыңдар (**16.7—16.9**):

16.7. а) $f(x) = \left(4 + \frac{1}{x^2}\right)^3$; ә) $f(x) = \left(5 - \frac{4}{x}\right)^2$.

16.8. а) $f(x) = \frac{12}{x - \sqrt{x}} - (x - 6)^2$; ә) $f(x) = \frac{10}{x + \sqrt{x}} + \left(\sqrt{x} - 1\right)^3$.

16.9. а) $f(x) = \sqrt{1 - 3x^2} + \frac{1}{x^2 + 4}$; ә) $f(x) = (8 - 3x^6)^3 - \frac{x^2}{5 - x^2}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Туынды, туындының анықтамасы, туындыны табу ережелері, күрделі функцияның туындысы, тригонометриялық функциялар, тригонометрия формулалары.

§17. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ТУЫНДЫЛАРЫ

Түйінді ұғымдар

Функция, туынды, тригонометриялық функциялар

Сендер тригонометриялық функциялардың туындысын табу формуласымен танысасыңдар;

формулаларды қолданып тригонометриялық функциялардың туындысын табуды үйренесіңдер.

I. $y = \sin x$ функциясының туындысы.

Аргумент x-ке Δx өсімше берсек, функция аргументтің өсімшесіне сәйкес өсімше алады, $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$.

$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos\frac{x + \Delta x + x}{2} = 2 \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} \times$
$\times \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

Енді функция өсімшесін аргумент өсімшесіне бөлеміз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = 2 \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Соңғы теңдіктен аргумент өсімшесі Δx нөлге ұмтылғандағы шекке көшсек, онда $y' = 1 \cdot \cos x = \cos x$ аламыз, себебі $\Delta x \to 0$ болғанда, $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$ ($x \to 0$ болғандағы $\frac{\sin x}{x} \to 1$ формуласы бойынша. Бұл формула жоғары математика курсында қарастырылады), ал $\Delta x \to 0$ жағдайында $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos(x + 0) = \cos x$.

Демек,

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x.} \qquad (1)$$

II. $y = \cos x$ функциясының туындысы.

Ол үшін $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ формуласын және күрделі функцияның туындысын табу формуласын қолданамыз: $y' = (\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right)' =$
$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} + x\right)' = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$.

Демек,

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x.} \qquad (2)$$

III. $y = \operatorname{ctg} x$ функциясының туындысы.

$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\sin x \neq 0$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$ екені белгілі, демек, үшінші ережені пайдаланамыз.

$$(\text{ctg}\,x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Сонда

$$\boxed{(\text{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.} \qquad (3)$$

IV. $y = \text{tg}\,x$ функциясының туындысы.

$$\boxed{(\text{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.} \qquad (4)$$

(4)-формуланың дәлелдеуін өздерің қарастырыңдар.

Алынған формулаларға мысалдар қарастырайық.

МЫСАЛ

1. а) $y = 3\sin x$; ә) $y = 7{,}5 - \cos 4x$; б) $y = 2\sin^2 x$; в) $y = \text{ctg}3x - \text{tg}3x$ функциясының туындысын есептейік.

Шешуі.

а) $y' = (3\sin x)' = 3\cos x$;

ә) $y' = (7{,}5 - \cos 4x)' = (7{,}5)' - (\cos 4x)'(4x)' = 0 - (-\sin 4x) \cdot 4 = 4\sin 4x$;

б) $y' = (2\sin^2 x)' = 2(\sin^2 x)' = 2 \cdot 2\sin x(\sin x)' = 4\sin x\cos x = 2(2\sin x\cos x) = 2\sin 2x$;

в) $y' = (\text{ctg}3x - \text{tg}3x)' = (\text{ctg}3x)' - (\text{tg}3x)' = -\frac{1}{\sin^2 3x} \cdot (3x)' - \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot (3x)' = -\frac{3}{\sin^2 3x} -$

$-\frac{3}{\cos^2 3x} = -\frac{3(\cos^2 3x + \sin^2 3x)}{\sin^2 3x\cos^2 3x} = -\frac{3}{\frac{1}{4}4\sin^2 3x\cos^2 3x} = -\frac{12}{\sin^2 6x}.$

Жауабы: а) $3\cos x$; ә) $4\sin 4x$; б) $2\sin 2x$; в) $-\frac{12}{\sin^2 6x}$.

ЕСТЕ САҚТАҢДАР!

$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$;

$(\text{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(\text{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

?

1. $y = \sin x$ және $y = \cos x$ функцияларының анықталу облысының кез келген нүктесінде туындысы бар деп айтуға бола ма?
2. $y = \text{tg}\,x$ және $y = \text{ctg}\,x$ функцияларының анықталу облысының кез келген нүктесінде туындысы бар деп айтуға бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.
3. $y = \sin x$ функциясы туындысының бар болуының геометриялық мағынасын қалай түсінесіңдер?

Жаттығулар

A

Функцияның туындысын табыңдар (17.1—17.4):

17.1. а) $f(x) = 3\sin x + 2\cos x$; ә) $f(x) = \operatorname{ctg} x - 1$;
б) $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x$; в) $f(x) = 2\cos x - \operatorname{tg} x$.

17.2. а) $f(x) = 2x + 2\operatorname{tg} x$; ә) $f(x) = 4x\operatorname{ctg} x$;
б) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; в) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

17.3. а) $f(x) = -\cos 2x + \sin 2x$; ә) $f(x) = 3x + \cos 4x$;
б) $f(x) = x^3 - 2\sin 2x$; в) $f(x) = 2\operatorname{tg} 2x$.

17.4. а) $f(x) = -3\operatorname{ctg} x - 4x^3$; ә) $f(x) = \sin 2x + \operatorname{tg} x$;
б) $f(x) = 4 - \frac{1}{4}\operatorname{tg} x$; в) $f(x) = x^2 \operatorname{ctg} x$.

17.5. Функцияның туындысының берілген нүктедегі мәнін есептеңдер:
а) $f(x) = \cos x + 1,\ x = \frac{\pi}{6}$; ә) $f(x) = \operatorname{tg} x - 2,\ x = \frac{\pi}{3}$;
б) $f(x) = \frac{2\sin x}{3},\ x = \frac{\pi}{3}$; в) $f(x) = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg} x,\ x = \frac{\pi}{3}$.

17.6. $f'(x) = 0$ теңдеуін шешіңдер:
а) $f(x) = -\sin x - 1$; ә) $f(x) = \cos 4x + 1$.

17.7. $f(x)$ функциясының графигіне абсциссасы x_0 болатын нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:
а) $f(x) = \sin x;\ x_0 = \frac{2\pi}{3}$; ә) $f(x) = \operatorname{tg} x;\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

17.8. $f'(x) = 0$ теңдеуін шешіңдер:
а) $f(x) = 3\sin 2x$; ә) $f(x) = 4\cos 2x$.

B

Функцияның туындысын табыңдар (17.9—17.11):

17.9. а) $f(x) = \cos x \cdot (\cos x - 1)$; ә) $f(x) = \operatorname{tg} x\ (\cos x + 2)$;
б) $f(x) = \sin x\ (\operatorname{ctg} x - 1)$; в) $f(x) = (4x - 1) \cdot \sin x$.

17.10. а) $f(x) = \cos^2 x - 1$; ә) $f(x) = 3\sin^2 2x + 2x$;
б) $f(x) = (\sin 2x + 1)^2$; в) $f(x) = (\cos 2x + \sin 2x)^3$.

17.11. а) $f(x) = \frac{3x + 4}{\cos x}$; ә) $f(x) = \frac{5x - 2}{\sin x}$;
б) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{3 + x}$; в) $f(x) = \frac{x - 2}{\operatorname{ctg} x}$.

17.12. $f'(x) = 0$ теңдеуін шешіңдер:
а) $f(x) = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{2}x$; ә) $f(x) = \sqrt{2}(x - 1) + \cos 2x$.

17.13. $f'(x) > 0$ теңсіздігін шешіңдер:
а) $f(x) = \cos x + \frac{x}{2}$; ә) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$.

17.14. Функция туындысының анықталу облысын табыңдар:

а) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$; ә) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \sin x}$.

17.15. $f(x)$ функциясы туындысының $x_0 = 0$ нүктесіндегі мәнін есептеңдер:

а) $f(x) = \sin\left(x^2 + x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; ә) $f(x) = \dfrac{4}{3}\operatorname{tg}(x^3 + x)$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ ҚАЖЕТТІ ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның мәні, шама, нүктенің аймағы, туынды, туындының ережелері мен формулалары, жанаманың теңдеуі, градустық және радиандық өлшем.

§ 18. ЖУЫҚТАП ЕСЕПТЕУ

Түйінді ұғымдар

Функция, функцияның мәні, жуық мән, өсімше

Сендер функцияның мәнін жуықтап есептеу формулаларымен танысасыңдар, функцияның мәнін жуықтап есептеуді үйренесіңдер.

Жуықтап есептеу формулаларын беруді мысал қарастырудан бастайық.

МЫСАЛ

1. $f(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^2 - x + 15$ функциясының $x = 1{,}98$ нүктесіндегі мәнін есептеу керек.

Шешуі. 1,98 мәні $x_0 = 2$ нүктесінің аймағына тиісті. Функцияның $f(2) = -11$ мәні оңай есептеледі. $x_0 = 2$ нүктесінің аймағында графигі оның $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ жанамасына жақын орналасады. Сондықтан $f(1{,}98) \approx y(1{,}98)$.

Онда $f'(x) = 6x^5 - 15x^4 + 4x - 1$. $f'(x_0) = f'(2) = -41$ және $f(x) \approx y(x) = -11 + (-41) \cdot (-0{,}02) = -10{,}16$.

Калькулятордың көмегімен есептегенде $f(1{,}98) \approx -10{,}1795$.

Жауабы: $\approx -10{,}1795$.

Жалпы жағдайда x_0 нүктесінде дифференциалданатын $f(x)$ функциясының аргументінің Δx өсімшесі мәнінің нөлден айырмашылығы аз болғанда, оның графигі абсциссасы x_0-ге тең нүктесінде оған жүргізілген жанамаға жақын өтеді, яғни өте аз Δx шамасында

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \tag{1}$$

Егер x_0 нүктесінде $f(x_0)$ және $f'(x_0)$ мәнін табу қиындық туғызбаса, онда (1)-формула x_0-ге өте жақын x нүктесіндегі $f(x)$ функциясының жуық мәнін табуға мүмкіндік береді.

Енді (1)-формуланы қолданып,

$$\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x \tag{2}$$

жуықтап есептеу формуласын қорытып шығарайық.

$f(x) = \sqrt{x}$ болсын. $x_0 = 1$ деп алсақ, $x = x_0 + \Delta x = 1 + \Delta x$ болады.

Онда $f(x_0) = \sqrt{1} = 1$ және $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, осыдан $f'(x_0) = f'(1) = \dfrac{1}{2}$. Сонда (1) формула бойынша, $f(x) = \sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \dfrac{1}{2}\Delta x$ аламыз.

МЫСАЛ

2. а) $\sqrt{0,98}$; ә) $\sqrt{25,5}$ мәндерін есептейік.

Шешуі. а) $\sqrt{0,98} = \sqrt{1+(-0,02)} \approx 1 + \frac{1}{2}(-0,02) = 0,99$;

ә) $\sqrt{25,5} = \sqrt{25+0,5} = \sqrt{25(1+0,02)} = 5\sqrt{(1+0,02)} \approx 5(1 + \frac{1}{2}\cdot 0,02) = 5,05$.

Жауабы: а) 0,99; ә) 5,05.

Жуықтап есептеудің жалпы формуласы:

$$(1+\Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x, \text{ мұндағы } n - \text{бүтін сан.} \quad (3)$$

Дәлелдеуі. $f(x) = x^n$ болсын. $x_0 = 1$ деп алсақ, $x = x_0 + \Delta x = 1 + \Delta x$ шығады. Онда $f(x_0) = f(1) = 1$ және $f'(x) = nx^{n-1}$. Бұдан $f'(x_0) = f'(1) = n$.

(1)-формула бойынша $f(x) = (1+\Delta x)^n \approx 1 + n\cdot\Delta x$ аламыз.

МЫСАЛ

3. $(1,007)^{200}$ мәнін табайық.

Шешуі. $(1,007)^{200} = (1+0,007)^{200} \approx 1 + 200\cdot 0,007 = 2,4$.

Жауабы: 2,4.

МЫСАЛ

4. $\sin 33°$ өрнегінің мәнін табайық.

Шешуі. (1)-формула бойынша $\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot (x - x_0)$. Енді градустық өлшемді радиандық өлшеммен ауыстырайық.

$$33° = 30° + 3° = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\cdot 3° = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60} \text{ ендеше } x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60};\ x_0 = \frac{\pi}{6}.$$

Осыдан $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60}\right) = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{60} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{60} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{60}\right) \approx \frac{1}{2}\cdot 1,0907 = 0,5454$.

Жауабы: 0,5454.

1. Жуықтап есептеу формулаларын алу қандай формулаға негізделген?
2. Жуықтап есептеу формуласы неге бірнеше түрде берілген? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

18.1. (1)-формуланың көмегімен аргументтің берілген x_1 және x_2 мәндеріне сәйкес $f(x)$ функциясының мәнін есептеңдер:

а) $f(x) = x^3 + 3x$, $x_1 = 1,998$, $x_2 = 6,002$;

ә) $f(x) = x^2 - x^3$, $x_1 = 3,03$, $x_2 = 2,997$;

б) $f(x) = 2x - x^4$, $x_1 = 5,002$, $x_2 = 3,995$;

в) $f(x) = 3x^2 + 2x^3$, $x_1 = 4,996$, $x_2 = 7,02$.

18.2. (2) және (3)-формулаларды қолданып, өрнектердің жуық мәндерін табыңдар:

а) $1,003^{100}$; ә) $0,996^{16}$;

б) $0{,}997^{40}$; в) $1{,}002^{200}$;
г) $\sqrt{1{,}003}$; ғ) $\sqrt{1{,}004}$; д) $\sqrt{4{,}008}$.

B

(1) — (3) формулаларды қолданып, өрнектердің жуық мәндерін есептеңдер **(18.3-18.4):**

18.3. а) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0{,}004\right)$; ә) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+0{,}02\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-0{,}05\right)$.

18.4. а) $\frac{1}{1{,}002^{40}}$; ә) $\frac{1}{0{,}015^{50}}$; б) $\frac{1}{0{,}996^{6}}$.

18.5 а) $\sqrt{9{,}27}$; ә) $\sqrt{4{,}16}$; б) $\sqrt{16{,}32}$.

18.6. а) $\cos 35°$; ә) $\operatorname{tg}46°$; б) $\operatorname{ctg}87°$.

18.7. $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының x_0 нүктесіндегі жуық мәндерін салыстырыңдар:
а) $f(x) = x^2 - 4x^5$, $g(x) = x^3 - 3x^4$, $x_0 = 3{,}998$;
ә) $f(x) = x^5 - 1$, $g(x) = 1 - x^4$; $x_0 = 1{,}999$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $y = 3x^3 - 4x^2$ функциясының туындысын табыңдар:
A) $\frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3$; B) $9x - 9$; C) $9x^2 - 9x$; D) $9x^2 - 8x$.

2. $y = x - 2$ түзуі $y = f(x)$ функциясының графигін $x_0 = -1$ абсциссасында жанайды. $f(-1)$-ді табыңдар:
A) –3; B) 2; C) 3; D) –2.

3. $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$ функциясының туындысын тауып, $f'(0) + f'(-1)$ өрнегінің мәнін есептеңдер:
A) –40; B) 20; C) 25; D) –10.

4. $y(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ функциясының туындысын табыңдар:
A) $\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; B) $\frac{1}{2\sqrt{(x^2+1)^3}}$; C) $-\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; D) $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$.

5. $y = \left(\frac{1}{2}x+5\right)^{10}$ функциясының туындысын табыңдар:
A) $10\left(\frac{1}{2}x+5\right)^{11}$; B) $5\left(\frac{1}{2}x+5\right)^{9}$; C) $\left(\frac{1}{2}x-6\right)^{9}$; D) $8\left(\frac{1}{2}x-6\right)^{9}$.

6. $y(x) = \operatorname{ctg} x$ функциясының $x = \frac{\pi}{6}$ нүктесіндегі туындысының мәнін есептеңдер:
A) $\frac{3}{4}$; B) $\frac{4}{3}$; C) –4; D) 4.

7. $f(x) = 3x^3 - 4x$ функциясының графигіне $M(1; 1)$ нүктесінде жүргізілген жанаманың көлбеулік бұрышының тангенсін табыңдар:

A) $\operatorname{tg}\alpha = 5$; B) $\operatorname{tg}\alpha = 1$; C) $\operatorname{tg}\alpha = 13$; D) $\operatorname{tg}\alpha = -1$.

8. $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)$ функциясының туындысын табыңдар:

A) $2x^8$; B) $4x^3$; C) $8x^2$; D) $4x^5$.

9. $y = \sin 3x$ функциясының туындысын табыңдар:

A) $\sin 3x$; B) $3\cos 3x$; C) $-\sin 3x$; D) $-3\sin 3x$.

10. $f(x) = (1 - 2x) \cdot (2x + 1)$ функциясы туындысының $x = 1$ болғандағы мәнін табыңдар:

A) -8; B) -4; C) 2; D) 0.

11. Абсциссасы $x_0 = -1$ болатын нүктеде $y = x^4 + x$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін көрсетіңдер:

A) $y = 3x + 3$; B) $y = -3x - 3$; C) $y = 3x + 7$; D) $y = x - 7$.

12. Абсциссасы $x = 1$ болатын нүктеде $f(x) = \sqrt{x}$ функциясының графигіне жанама жүргізілген. Ординатасы $y = 8{,}5$ болатын жанама нүктесінің абсциссасын табыңдар:

A) 17; B) 19; C) 16; D) 15.

13. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ функциясының туындысы:

A) $2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; B) $2x^2 + 2\sqrt{x}$; C) $-2x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; D) $2x^2 + \dfrac{1}{x}$.

14. $f(x) = -2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$ функциясы туындысының $x = -\dfrac{3}{4}\pi$ болғандағы мәнін есептеңдер:

A) мәні жоқ; B) $-\dfrac{3}{4}$; C) 2; D) -2.

15. Нүкте түзу бойымен $s = t^3 + 2t^2 - 4$ заңы бойынша қозғалады. $t = 2$ кезіндегі нүктенің жылдамдығын анықтаңдар:

A) 10; B) 20; C) 34; D) 16.

16. $f(x) = \dfrac{1}{\cos 5x}$ функциясының туындысын табыңдар:

A) $\dfrac{5\operatorname{tg} 5x}{\cos 5x}$; B) $\operatorname{tg} 5x + 1$; C) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 5x}$; D) $-\dfrac{\sin 5x}{5\cos^2 5x}$.

17. $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{4}$ функциясының туындысын табыңдар:

A) $\dfrac{4}{\cos^2\dfrac{x}{4}}$; B) $\dfrac{4}{\sin^2\dfrac{x}{4}}$; C) $\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{x}{4}}$; D) $\dfrac{1}{4\cos^2\dfrac{x}{4}}$.

18. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 10$ функциясы берілген. $f'(x) = 0$ теңдеуін шешіңдер:

A) -3; -1; B) -3; 1; C) 3; -1; D) 2; -3.

19. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$ функциясы берілген. $f'(x) \geq 0$ теңсіздігін шешіңдер:

A) $(-2;\ 2)$; B) $(-\infty;\ -2]$; C) $(2;\ +\infty)$; D) $[2;\ +\infty)$.

20. $f(x) = \cos 10x\ \cos 6x + \sin 10x\ \sin 6x$ функциясының туындысын табыңдар:

A) $-4\cos 4x$; B) $-4\sin 4x$; C) $4\sin 4x$; D) $4\cos 4x$.

Математикалық сауаттылық бойынша тапсырмалар

21. Цифрлары қайталанбайтындай 2; 3; 8 цифрларынан қанша үштаңбалы жұп сан құрастыруға болады:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

22. Сатып алушы тауарды 10%-ды жеңілдікпен алып 9045 тг төледі. Тауардың алғашқы бағасын табыңдар:

A) 10 050 тг; B) 10 500 тг; C) 15 000 тг;

D) 10 005 тг; E) 10 550 тг.

23. Егер $x \cdot y = x^3 - y^2$ болса, онда $5 \cdot (4 \cdot 8)$ өрнегінің мәнін табыңдар:

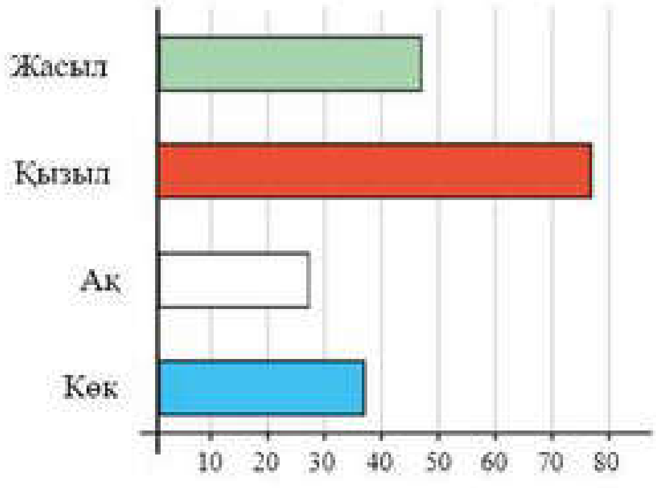
A) –61; B) 253; C) 61; D) –3; E) 125.

24. Жәшікте 9 сары, 9 ақ және 12 қызыл шар бар. Жәшіктен бір шар алынды. Алынған шардың сары түсті болмауының ықтималдығын табыңдар:

A) 0,7; B) 0,2; C) 0,8; D) 0,75; E) 0,4.

25. Диаграммада мерекеге сатып алынған төрт түрлі шардың саны көрсетілген (53-сурет). Жасыл түсті шарлар саны қызыл түсті шарлар санынан қанша пайызға кем:

A) 50%; B) 25%; C) 15%; D) 40%; E) 65%?



53-сурет

ТАРИХИ МАҒЛҰМАТТАР

Àëòû äèôôåðåíöèàëäûқ åñåïòåóäің íåãіçãі ұғûìû — òóûíäû òóðàëû, ìàòåìàòèêà æəíå ìàòåìàòèêà åñåïòåðі, àòàï àéòñàқ, óүçіëіñçіқòі àíқàëûìûç қіçғàëûñòûң æûëäàìäûғû íå êåç êåëãåí қèñûққà æàíàìà æүðãіçóãå áàéëàíûñòû åñåïòåðãå òàëó êåçіíäå XVII ғàñûðäà ïàéäà áîëғàí. XV—XVII ғàñûðëàðäà êåç êåëãåí іүêòåãå æàíàìà æүðãіçóäің æàëïû əäіñі òààó іəñåëåñі êөïòåãåí ìàòåìàòèêòåðäі қàòòû іëãàíäûðғàí.

Æàëïû åñåïòåðäі øåøóäің êåéіíãі äàìóûíà æàғäàéëàðû áæàëãàí çàìàíäà áåðіëãåí åäі. Ìûñàëû, Àðõèìåäòің "Ñïèðàëüäàð" åңáåãіíäå ñïèðàëüãà æàíàìà æүðãіçó əäіñі áåðіëãåí. Àïîëëîíèé өç àòûìåí àòàëàòûí шыңыршықка æàíàìà æүðãіçñå, àë Äèîôàíò æàíàìàíû үéðåíіï, äèôôåðåíöèàëäàғà æүðãіçãåí. Àëàéäà áæàëãàí óàқûòòàðäà ғàëûìäàðäû åñåïòі àÿғûíà äåéіí øåøóãå æәð, үðіï қàëàóûí äà áір қèñûқòûң êåç êåëãåí íүêòåñіíå æàíàìà æүðãіçóäің òèіìäі æàëïû əäіñі òàáûëғàí.

XVII ғ. áàñûíäà êåéіíãі ғàëûìäàð, ñîíûң іøіíäå Э. Òîððè÷åëëè, В. Âèâèàíè, Ж. Ðîáåðâàëü, И. Áàððîó áұë ñұðàқòûң øåøіìií êèíåìàòèêàëûқ òұðғûäà іçäåï áàñòàäû. Àëãåáðàëûқ қèñûққà æàíàìà æүðãіçóäің àíûқ æàëïû əäіñі Р. Äåêàðòòûң "Ãåîìåòðèÿ" àòòû åңáåãіíäå êөðñåòіëãåí. П. Ôåðìàíûң æàíàìàëàð æүðãіçó əäіñі äèôôå-ðåíöèàëäûқ åñåïòåóëåðäі äàìûòóäàғû æàëïû æəíå ìаңûçäû əäіñ áîëûï òàáûëàäû. П. Ôåðìàíûң ìəòèæåëåðі íåí êåéіíãі äàñқà äà қîðûòûíäûëàðғà íåãіçäåé îòûðûï Г.В. Ëåéáíèö ñèëàñ àëãîðèòì құðғàí æəíå åñåïòі àëãûңғû ғàëûìäàðғà қàðàғàíäà òîëûғûðàқ øåøêåí .

Қàçіðãі êåçäå қîëäàíûï æүðãåí $\frac{dy}{dx}$ òóûíäû ñèìâîëûí Г.В. Ëåéáíèö êөðñåòêåí. Áіðàқ íë íåãіçãі ұғûìû òóûíäû åìåñ, äèôôåðåíöèàë äåï àòàëãàí.

XVIII ғ. îðòàñûíäà Л. Ýéëåð àéûìäàëû òàìàíûң өñіìøåëåðіí áåëãіëåó үøіí ãðåêòің Δ əðïіí қîëäàíғàí, ìүíäå $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$ æəíå ò.ñ.ñ. Áұë áåëãіëåó қàçіðãå äåéіí ñàқòàëғàí.

Òóûíäûíûң y' æəíå $f'(x)$ áåëãіëåóëåðіí Ж.Л. Ëàãðàíæ åíãіçãåí.

Òóûíäû ұғûìûíûң ғûëûì ìåí òåõíèêàäà қîëäàíó үëêåí ðөë àòқàðàòûíûí êөðñåòóãå ìûñàëäàð êөïòåï êåëòіðóãå áîëàäû. Ìûñàëû, үäåó — òàқûð áîéûíøà æûëäàìäûқòûң òóûíäûñû, äåíåíің æûëó ñûéûìäûëûғû — òåìïåðàòóðà áîéûíøà æûëó êөëåìіíің òóûíäûñû, ðàäèîàêòèâòі ûäûðàó æûëäàìäûғû — òàқûð áîéûíøà ðàäèîàêòèâòі çàò ìàññàñûíûң òóûíäûñû áîëûï òàáûëàäû æəíå ò.ñ.ñ. Òóûíäûëàðäû åñåïòåó əäіñòåði ìåí қàñèåòòåðіí êàäð æəíå ìàòåðèàë òóïëèêàòûìåí çåðòòåóäå қîëäàíó äèôôåðåíöèàëäûқ åñåïòåóäің ìàçìұíû құðàéäû.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ ҚАЖЕТТІ ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның анықталу облысы және мәндер жиыны, туынды, координаталық түзу, сан аралықтары, интервалдар әдісі.

6 ТУЫНДЫНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

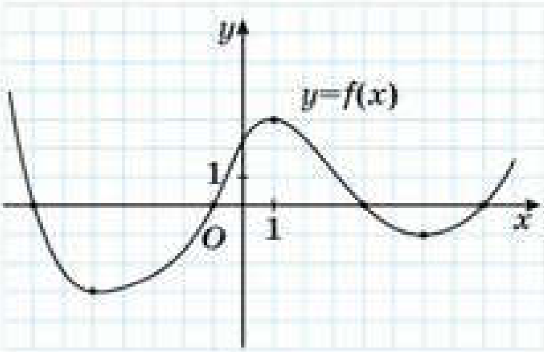
§ 19. ФУНКЦИЯНЫҢ ӨСУ ЖӘНЕ КЕМУ БЕЛГІЛЕРІ

Түйінді ұғымдар

Функция, өсу аралығы, кему аралығы, туынды

Сендер функцияның өсу және кему белгілерімен танысасыңдар, туындының көмегімен функцияның өсу және кему аралықтарын табуды үйренесіңдер.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Функцияның геометриялық кескіні, оның графигі, координаталық жазықтықтағы $(x; y)$ нүктелердің геометриялық орнын құрайтын қисық екенін білеміз. Өспелі және кемімелі функциялардың анықтамаларын қолданып, графиктер бойынша оның өсу және кему аралықтарын табуды білесіңдер.



54-сурет

$y = f(x)$ функциясының графигі берілген (54-сурет).

График бойынша функцияның:
1) анықталу облысын;
2) мәндер жиынын;
3) өсу аралықтарын;
4) кему аралықтарын табыңдар.

Функцияның өсу және кему аралықтарын туындының көмегімен табуды қарастырамыз. Ол үшін алдымен функцияның аралықтағы өсуі мен кемуінің жеткілікті шарттарын берейік.

Егер дифференциалданатын $f(x)$ функциясының туындысы X аралығының әрбір нүктесінде оң таңбалы, яғни $f'(x) > 0$ (теріс таңбалы, яғни $f'(x) < 0$) болса, онда функция сол аралықта өспелі (кемімелі) болады.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін Лагранж формуласын қолданамыз.

X аралығынан кез келген x_1 және x_2 (мұндағы $x_1 < x_2$) нүктелерін алайық. Лагранж формуласы бойынша

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(a) \qquad (1)$$

теңдігі орындалатын $(x_1; x_2)$ аралығына тиісті a санын алуға болады. x_1, x_2 нүктелері X аралығына тиісті болғандықтан, a саны да осы аралыққа тиісті, яғни $x_1 < a < x_2$.

Егер X аралығына тиісті кез келген x үшін $f'(x) > 0$ болса, онда $f'(a) > 0$ болады және алуымыз бойынша $x_2 - x_1 > 0$ болғандықтан, (1) теңдіктің сол жағындағы $f(x_2) - f(x_1) > 0$ немесе $f(x_1) < f(x_2)$ шығады, яғни $f(x)$ — өспелі функция.

Ал егер X аралығындағы кез келген x үшін $f'(x) < 0$ болса, онда $f'(a) < 0$, ал (1) формуладағы $f(x_1) > f(x_2)$ болады, өйткені $x_2 - x_1 > 0$. Демек, X аралығын да $f(x)$ функциясы кемімелі.

Сонымен, туындысының көмегімен $f(x)$ функция өспелі (кемімелі) болатынын дәлелдеп, оның өсу және кему аралықтарын анықтауға болады.

АЛГОРИТМ

Функцияның өсу және кему аралықтарын табу алгоритмі:
1) функцияның анықталу облысын табу;
2) функцияның туындысын табу;
3) $f'(x) > 0$ немесе $f'(x) < 0$ теңсіздігін шешу;
4) берілген теореманың тұжырымдамасы бойынша функцияның өсу және кему аралықтарын жазу, яғни соңғы теңсіздіктер шешімдері функцияның өсу, кему аралықтары болады.

Ескерту. Егер $f(x)$ функциясы аралықтың шеткі нүктелерінде үзіліссіз болса, онда ол нүктелер сол аралыққа тиісті нүктелер болады.

МЫСАЛ

1. $f(x) = 3x^2 - 12x$ функциясының өсу және кему аралықтарын табайық.

Шешуі. 1) Функцияның анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны.
2) $f'(x) = (3x^2 - 12x)' = 6x - 12$.
3) $f'(x) > 0$, яғни $6x - 12 > 0$, $6x > 12$, $x > 2$. Онда анықталу облысының $x < 2$ бөлігінде $f'(x) < 0$ болатыны айқын.
4) Теорема бойынша $(2; +\infty)$ аралығында функция өспелі, ал $(-\infty; 2)$ аралығында функция кемімелі.

Жауабы : $(-\infty; 2)$ — кемиді, $(2; +\infty)$ — өседі.

МЫСАЛ

2. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x + 2$ функциясының өсу және кему аралықтарын табайық.

Шешуі. 1) $D(f) = R$; 2) $f'(x) = \left(\dfrac{1}{3}x^3 - 4x + 2\right)' = x^2 - 4$;
3) $f'(x) > 0$, $x^2 - 4 > 0$.

Алынған теңсіздікті интервалдар әдісімен шешейік. Сонда $x^2 - 4 = 0$, $x_{1,2} = \pm 2$. Енді ± 2 нүктелері арқылы координаталар түзуін үш интервалға бөліп, әрқайсысындағы туынды таңбасын анықтаймыз. Ол үшін $x = 3$ деп алып, туындының таңбасын анықтаймыз. $f'(3) = 3^2 - 4 = 5 > 0$, яғни $x > 2$ болғанда, $f'(x) > 0$. Демек, $x = 3$ саны тиісті интервалда туынды таңбасы оң болады, ал қалған интервалдарда оң және теріс таңбалар кезекпен қойылады (55, *a*-сурет). Демек, $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ аралығында $f'(x) > 0$, ал $[-2; 2]$ аралығында $f'(x) < 0$.

55. *a*-сурет

Жауабы : $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ — өседі, $[-2; 2]$ — кемиді.

МЫСАЛ

3. $f(x) = 0{,}25\,x^4 - x$ функциясының өсу және кему аралықтарын табайық.

Шешуі. 1) Функцияның анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны.

2) $f'(x) = (0{,}25\,x^4 - x)' = x^3 - 1$.

3) $f'(x) > 0$, $x^3 - 1 > 0$, $x^3 - 1 = 0$, $x^3 = 1$, $x = 1$. Сан түзуін $x = 1$ нүктесі арқылы екі аралыққа бөлеміз. $x = 0$ болғанда $f'(0) = 0^3 - 1 = -1$.

Интервалдардағы туындының таңбасын сан түзуіне саламыз (55, *ә*-сурет).

4) $(-\infty;\ 1]$ аралығында функция кемімелі, $[1;\ +\infty)$ — функция өспелі.

55, *ә*-сурет

Жауабы : $(-\infty;\ 1]$ — кемиді; $[1;\ +\infty)$ — өседі.

МЫСАЛ

4. $f(x) = \sin x - 2x$ функциясының бірсарынды өспелі, бірсарынды кемімелі аралықтарын табайық.

Шешуі. 1) Функцияның анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны.

2) $f'(x) = (\sin x - 2x)' = \cos x - 2$.

3) Туындының таңбасын анықтаймыз. $|\cos x| \le 1$ болғандықтан, $\cos x - 2$ өрнегінің мәні x-тің кез келген мәнінде 0-ден кіші. Сондықтан $x \in R$ болғанда $f'(x) < 0$. Демек, берілген функция — барлық нақты сандар жиынында бірсарынды кемімелі функция.

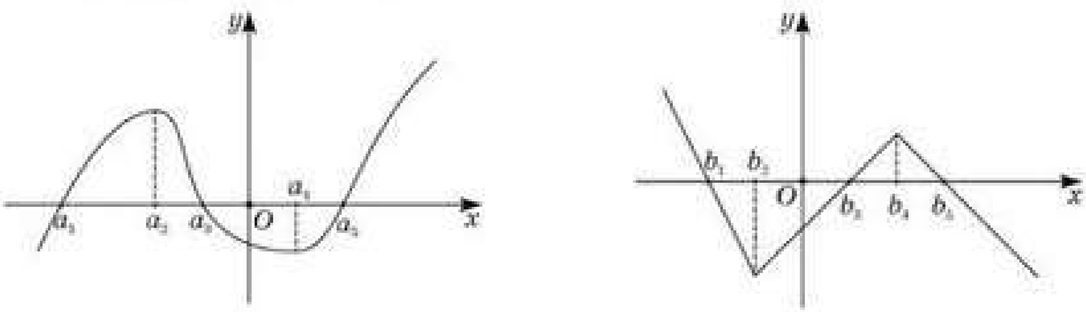
Жауабы : функция R жиынында кемімелі.

1. Неге $y = \operatorname{ctg} x$ функциясы $(0;\ \pi)$ аралығында кемиді? Жауабын түсіндіріңдер.
2. Қайсыбір аралықта функция бірсарынды өспелі болсын. Осы аралықта функцияның туындысы оң таңбалы бола ма?
3. Нақты сандар жиынында туындысы 1-ге тең болатын функцияның графигі қандай болады? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

19.1. 56, *а*-суретте $y = f(x)$ функциясының графигі берілген. Функцияның туындысы: а) оң таңбалы; ә) теріс таңбалы болатын аралықтарды көрсетіңдер.



а) ә)

56-сурет

19.2. 56, ә-суретте $y = f(x)$ функциясы туындысының графигі берілген. Суретті пайдаланып, $y = f(x)$ функциясының: а) өсу; ә) кему; аралықтарын табыңдар.

19.3. $f(x)$ функциясының бірсарынды өспелі және бірсарынды кемімелі аралықтарын табыңдар:

а) $f(x) = x + 4$; ә) $f(x) = 3x + x^2$;

б) $f(x) = 2x^2 - x$; в) $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

19.4. Берілген функцияның анықталу облысында өспелі болатынын дәлелдеңдер:

а) $y = \frac{1}{5} + 3{,}1x$; ә) $y = -\frac{4}{x}$; б) $y = 2x^3 + 1{,}4$; в) $y = 3 - \frac{2}{x}$.

19.5. $y = f(x)$ функциясы анықталу облысында кемімелі болатынын дәлелдеңдер:

а) $y = 7 - 5x$; ә) $y = 2 - 3x^3$; б) $y = \frac{2}{x}$; в) $y = 6 + \frac{3}{x}$.

B

19.6. Функцияның өсу (кему) аралықтарын табыңдар:

а) $f(x) = x^3 + 4x - 7$; ә) $f(x) = 5x^2 - 3x - 8$;

б) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$; в) $f(x) = 3x^3 - x - 2$.

19.7. $y = f(x)$ функциясының өспелі функция екенін дәлелдеңдер:

а) $y = x^3 + x$; ә) $y = -\frac{4}{x}$.

19.8. $f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын анықтаңдар:

а) $f(x) = x^3 - 3x + 5$; ә) $f(x) = x^3 - 4x + 7$;

б) $f(x) = x^5 + 5$; в) $f(x) = x^4 - 4x$.

19.9. Барлық нақты сандар жиынында $f(x)$ функциясының кемімелі, ал $g(x)$ өспелі функция болатынын дәлелдеңдер:

а) $f(x) = 5 - x^7$; ә) $g(x) = 4 + \frac{2}{3}x^3$;

б) $f(x) = -8x - \sin 2x$; в) $g(x) = -\cos 6x + 7x$.

19.10. a-ның қандай мәнінде $f(x) = \frac{x^3}{3} + ax^2 + x$ функциясы нақты сандар жиынында өспелі болады?

19.11. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ функциясының бірсарынды кемімелі аралығындағы x-тің бүтін мәндерінің санын табыңдар.

19.12. Туындысы $f'(x) = (x-3)(x-1)(x-2)^2$ болатын функцияның кему аралықтарының ұзындықтарының қосындысын табыңдар .

19.13. $y = f(x)$ функциясының туындысы $f'(x) = (x^2-1)(x^2-9)(x^2-16)$ түрінде берілген. Функцияның бірсарынды кемімелі аралықтарының ұзындықтарының қосындысын есептеңдер .

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ ҚАЖЕТТІ ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның анықталу облысы, туынды, туынды табу ережелері, туынды табу формулалары, функцияның өсу және кему белгілері.

§ 20. ФУНКЦИЯНЫҢ СЫНДЫҚ НҮКТЕЛЕРІ МЕН ЭКСТРЕМУМ НҮКТЕЛЕРІ

Түйінді ұғымдар

Функция, функцияның анықталу облысы, сындық нүктелер, функция экстремумы

Сендер функцияның сындық нүктелері анықтамасымен, функция экстремумының бар болу шартымен танысасыңдар;

сындық және экстремум нүктелерін табуды үйренесіңдер.

ЕСКЕ ТҮСІРІҢДЕР!

55-56-суреттерді қолданып, экстремум нүктелерін көрсетіңдер, минимум және максимум нүктелерін көрсетіңдер.

Функцияны зерттеу және графигін салу барысында өсу және кему аралықтарымен қатар функцияның сындық және экстремум нүктелерін таба білу керек.

*Функцияның туындысы нөлге тең немесе туындысы болмайтын анықтау облысының ішкі нүктелері **сындық нүктелер** деп аталады.*

Сындық нүктелер ғана экстремум нүктелері болуы мүмкін.

Функцияның экстремум болуының қажетті шарты .

Теорема. *Егер x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының экстремумы және осы нүктенің аймағында $f'(x)$ туындысы бар болса, онда туындының x_0 нүктесіндегі мәні нөлге тең, яғни $f'(x_0) = 0$.*

Әрбір сындық нүкте экстремум нүктесі бола бермейді.

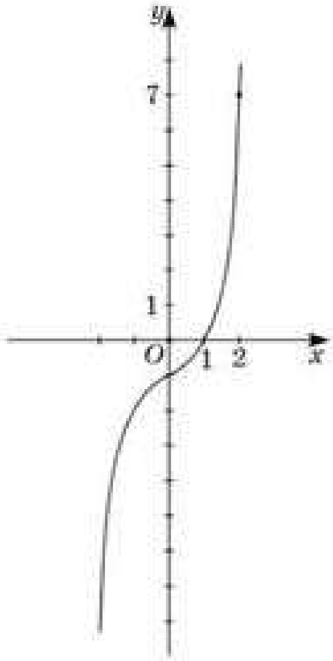
МЫСАЛ

1. $y = x^3 - 1$ функциясын алайық. Бұл функцияның туындысы $f'(x) = 3x^2$. $f'(x) = 0$ теңдеуін шешейік, яғни $3x^2 = 0$ немесе $x = 0$. Сонымен, $f'(x) = 3 \cdot 0 = 0$.

Бірақ бұл нүктеде функцияның экстремумы болмайды (57-сурет).

Экстремумның максимум және минимум болуының жеткілікті шарты .

Теорема. *Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ үзіліссіз, ал $(a;\ x_0)$ аралығында $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) және $(x_0;\ b)$ аралығында $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) болса, онда x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының максимум (минимум) нүктесі болады.*



57-сурет

Көп жағдайда бұл теореманың жеңілдетілген тұжырымын қолданған ыңғайлы, яғни егер x_0 нүктесінде туынды таңбасын плюстен минуске (минустен плюске) ауыстырса, онда x_0 *нүктесі максимум* (*минимум*) нүктесі болады.

Дәлелдеуі: Теореманы максимум нүктесі үшін дәлелдейік. Интервалдар әдісін қолданып, әр аралықтағы туындының таңбасын анықтаймыз.

Теореманың шарты бойынша $(a;\ x_0)$ аралығында $f'(x) > 0$, x_0 нүктесінде үзіліссіз болғандықтан, $(a;\ x_0]$ аралығында өседі, сондықтан осы аралықта барлық x үшін $f(x) < f(x_0)$. Тура осылай $[x_0;\ b)$ аралығында $f(x)$ кемиді, туынды $f'(x) < 0$, сондықтан $[x_0;\ b)$ аралығында барлық x үшін $f(x) < f(x_0)$ теңсіздігі орындалады. Демек, x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының максимум нүктесі.

x_0 нүктесі минимум нүктесі болатынын өздерің дәлелдеңдер.

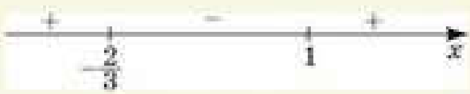
АЛГОРИТМ Функцияның экстремум нүктелерін табу алгоритмі:
1) функцияның туындысын табу;
2) функцияның сындық нүктелерін табу, яғни $f'(x) = 0$ теңдеуін шешу;
3) сындық нүктелер аймағындағы $f'(x)$ туындысының таңбасын интервалдар әдісімен анықтау;
4) экстремум нүктелерінің бар болуының жеткілікті шартын қолданып, максимум және минимум нүктелерін табу.

МЫСАЛ **2.** $y = 2x^3 - x^2 - 4x + 5$ функциясының экстремум нүктелерін табайық.

Шешуі. 1) Функцияның туындысы:
$$y' = (2x^3 - x^2 - 4x + 5)' = 6x^2 - 2x - 4 = 2(3x^2 - x - 2);$$
2) $2\,(3x^2 - x - 2) = 0$, $3x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 1$;

3) $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 1$ нүктелері арқылы сан түзуін интервалдарға бөліп, әр интервалдағы туындының таңбасын анықтайық. Мысалы, $\left[-\frac{2}{3};\ 1\right]$ аралығынан $x = 0$ нүктесін алайық. Сонда $f'(0) = 2 \cdot (3 \cdot 0^2 - 0 - 2) = -4 < 0$.

Функция туындысының таңбасын сан түзуінде көрсетейік (58-сурет).



58-сурет

4) Сонда $x_1 = -\frac{2}{3}$ — максимум, ал $x_2 = 1$ — функцияның минимум нүктесі.

Жауабы : $x_{max} = -\frac{2}{3}$; $x_{min} = 1$.

МЫСАЛ 3. $y = -\frac{2}{3}x^3 + 8x + 10$ функциясының экстремум нүктелерін табайық.

Шешуі. 1) $y'(x) = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 8x + 10\right)' = -2x^2 + 8 = -2(x^2 - 4)$;

2) $y'(x) = 0$, $-2(x^2 - 4) = 0$. Бұдан $x^2 = 4$, сонда $x_{1,2} = \pm 2$.

$[-2;\ 2]$ аралығынан $x = 0$ нүктесін алсақ, $f'(0) = -2 \cdot 0^2 + 8 = 8$. Туындының аралықтағы таңбаларын сан түзуіне орналастырамыз (59-сурет).

59-сурет

3) $x_1 = -2$ — минимум, $x_2 = 2$ — максимум нүктесі болады. Осы нүктелердегі функцияның экстремум мәндерін есептейміз:

$f(-2) = -\frac{2}{3} \cdot (-2)^3 + 8 \cdot (-2) + 10 = \frac{16}{3} - 6 = \frac{16-18}{3} = -\frac{2}{3}$ — функцияның минимумы,

ал $f(2) = -\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 8 \cdot 2 + 10 = -\frac{16}{3} + 26 = \frac{-16+78}{3} = \frac{62}{3}$ — максимумы.

Жауабы : $\min f(x) = f(-2) = -\frac{2}{3}$; $\max f(x) = f(2) = \frac{62}{3}$.

МЫСАЛ 4. $[0;\ 1]$ кесіндісінде $-12x^4 + 16x^3 - 3 = 0$ теңдеуінің қанша нақты түбірлері бар екенін анықтайық.

Шешуі. $f(x) = -12x^4 + 16x^3 - 3$ функциясын қарастырайық. Функцияның анықталу облысы — барлық нақты сандар жиыны. Функцияның сындық нүктелерін іздейміз.

Алдымен туындыны табамыз: $f'(x) = -48x^3 + 48x^2 = -48x^2(x - 1)$. Енді $f'(x) = 0$ теңдеуін шешеміз: $-48x^2(x - 1) = 0$. Туынды $x_1 = 0$ және $x_2 = 1$ нүктелерінде нөлге тең болады.

Сындық нүктелердегі функцияның мәндерін есептейміз:
$f(0) = -12 \cdot 0^4 + 16 \cdot 0^3 - 3 = -3$; $f(1) = -12 \cdot 1^4 + 16 \cdot 1^3 - 3 = -12 + 16 - 3 = 1$.

$[0;\ 1]$ кесіндісінде функция -3-тен 1-ге дейін өседі. Үзіліссіз функциялардың қасиеттері бойынша $[0;\ 1]$ кесіндісінде берілген функция бір нүктеде нөлге тең, яғни оның $[0;\ 1]$ кесіндісінде бір нақты түбірі бар.

Жауабы : нақты түбірі біреу.

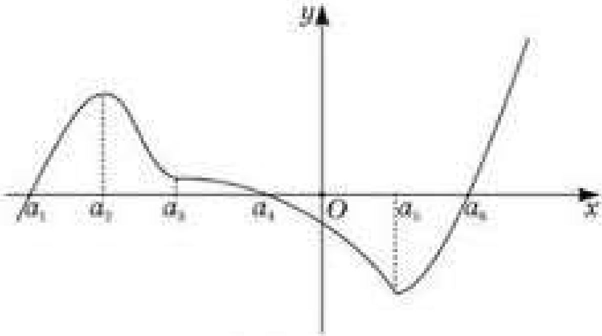
?

1. Егер $f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ аралығында анықталған болса, онда $x = a$ оның экстремум нүктесі бола ала ма?
2. Кемімелі функцияның экстремум нүктелері болуы мүмкін бе?
3. Жұп (тақ) функцияның: а) бір; ә) екі; б) үш экстремум нүктесі бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

20.1. 60-суретте берілген $f(x)$ функциясының графигі бойынша оның өсу, кему аралықтарын және экстремум нүктелерін табыңдар.



60-сурет

Функцияның сындық нүктелерін тауып, олардың қайсысы минимум, қайсысы максимум нүктелері болатынын анықтаңдар **(20.2-20.3)** :

20.2. а) $f(x) = 3x^2 - 2$; ә) $f(x) = 7x^2 + 3$;
б) $f(x) = 3x - x^2 + 1$; в) $f(x) = 5x^2 - 8x - 3$.

20.3. а) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$; ә) $f(x) = -4x^2 + 1$;
б) $f(x) = x^2 - \frac{x}{3}$; в) $f(x) = -x^2 + 3x$.

20.4. а) $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{9}{x}$; ә) $f(x) = \frac{1}{x} - 5x$

функциясының экстремум нүктелері болмайтынын дәлелдеңдер.

В

20.5. Функц иянын максимум және минимум нүктелерін табыңдар:
а) $f(x) = \frac{1}{5}\cos x + 1$; ә) $f(x) = x + 2\sin x$.

20.6. Функцияның сындық нүктелерін табыңдар. Максимум, минимум нүктелерін анықтаңдар:
а) $f(x) = \frac{1}{3}x - x^3$; ә) $f(x) = 2x^4 - 8x$;
б) $f(x) = x^4 - 32x^2 + 1$; в) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;
г) $y = x^2(x + 1)$; ғ) $y = 3x^4 + 4x^3$.

20.7. Қасиеттері бойынша функция графигінің кескінін салыңдар:
а) $D(f) = [-2;\ 4]$; $x \in (-2;\ 1)$, $f'(x) < 0$, ал $x \in (1;\ 4)$ аралығында $f'(x) > 0$;
ә) $D(f) = [-2;\ 4]$; $x \in (-2;\ -1)$ аралығында $f'(x) > 0$, ал $x \in (-1;\ 4)$ аралығында $f'(x) < 0$;

б) $D(f) = [a;\ b]$; x_1 — минимум нүктесі, x_2 — максимум нүктесі және $f(a) < f(b)$;

в) $D(f) = [a;\ b]$; x_1 — минимум нүктесі, x_2 — максимум нүктесі және $f(a) = f(b)$.

20.8. $f(x)$ функциясының сындық нүктелері болмайтынын дәлелдеңдер:
а) $f(x) = 15 + x$; ә) $f(x) = \operatorname{tg} x + 1$;
б) $f(x) = x^3 + 2$; в) $f(x) = x^5 + x$.

20.9. $y = f(x)$ функциясының экстремум нүктелерін табыңдар:
а) $f(x) = \frac{3}{x} - 12x^2$; ә) $f(x) = \frac{2}{x} - x^2$.

20.10. Берілген кесіндіде теңдеудің неше түбірі болатынын табыңдар.
а) $x^3 - 12x + 10 = 0$, $[-2;\ 2]$; ә) $x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$, $[-1;\ 1]$.

20.11. Функцияның сындық нүктелерін табыңдар:
а) $f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)^2$; ә) $f(x) = (x + 1)^2 (x - 2)^2$.

20.12. Шексіз көп экстремум нүктелері болатын функцияларға мысал келтіріңдер.

20.13. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ функциясының экстремум нүктелерінің ординаталарының қосындысын есептеңдер.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ ҚАЖЕТТІ ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, анықталу облысы, мәндер жиыны, функцияның графигі мен қасиеттері, туынды, туынды табу ережелері мен формулалары, функцияның өсу және кему белгілері, экстремум нүктелері.

§21. ТУЫНДЫНЫҢ КӨМЕГІМЕН ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУ ЖӘНЕ ОНЫҢ ГРАФИГІН САЛУ

Түйінді ұғымдар

Функция, функция қасиеттері, функцияны зерттеу, функция графигі

Сендер функцияны туындының көмегімен зерттеу алгоритмімен танысасыңдар;
алгоритмді қолдану арқылы функцияны зерттеуді және графигін салуды үйренесіңдер.

Сендер функция ның анықт алу облысын табу жолдарын, функцияның қасиеттерін, туындының көмегімен өсу, кему аралықтарын, экстремумдарын табу жолдарын оқып-үйрендіңдер. Енді осы алған білімдерінді жүйелеп, функцияны туындының көмегімен зерттеуді және соның негізінде оның графигі н салуды қарастырамыз.

АЛГОРИТМ Функцияны туындының көмегімен зерттеу және оның графигін салу алгоритмі:

1) функцияның анықталу облысын табу;
2) функцияның жұп, тақ және периодтылығын анықтау;
3) функция графигінің координаталар осьтерімен қиылысу нүктелерін анықтау;
4) таңбатұрақтылық аралықтарын табу;
5) өсу және кему аралықтарын, экстремумдарын табу;
6) зерттеу нәтижелерін кестеге енгізу;
7) функцияның графигін салу.

МЫСАЛ $y = x^3 + 3x^2$ функциясын зерттеп, графигін салайық.

Шешуі. Функцияны зерттеу алгоритмін қолданамыз.

1) Функция рационал функция болғандықтан, анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны, яғни $D(y) = R$;

2) Функция жұп та емес, тақ та емес, себебі $y(-x) = (-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 = -x^3 + 3x^2$. Функция периодты емес;

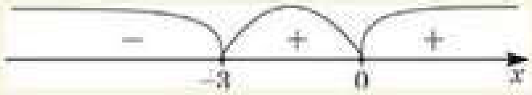
3) Функция графигінің координаталар осьтерімен қиылысу нүктесін табайық:

Oy осімен: $x = 0$, $y(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0$; $(0;\ 0)$;

Ox осімен: $y = 0$, $x^3 + 3x^2 = 0$,

$x^2(x + 3) = 0$, $(0;\ 0)$, $(-3;\ 0)$.

4) Функцияның таңбатұрақтылық аралығын анықтау үшін сан түзуін $x = 0$ және $x = -3$ нүктелері арқылы интервалдарға бөліп, функцияның әрбір интервалдағы таңбасын анықтаймыз: $x = 2$, $y(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 = 20 > 0$; $x = -2$, $y(-2) = 4 > 0$; $x = -4$, $y(-4) = -16 < 0$. Сан түзуінде интервалдардағы функцияның таңбасын белгілейміз (61-сурет).



61-сурет

Демек, $(-3;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ аралығында $f(x) > 0$, ал $(-\infty;\ -3)$ аралығында $f(x) < 0$;

5) $y' = (x^3 + 3x^2)' = 3x^2 + 6x$;

$3x^2 + 6x = 0$ немесе $3x(x + 2) = 0$, онда $x_1 = 0$; $x_2 = -2$ — сындық нүктелер.

$x_1 = 0$ және $x_2 = -2$ нүктелері арқылы функцияның анықталу облысын аралық-тарға бөліп, әр аралықтағы туындының таңбасын интервалдар әдісімен анықтаймыз: $x = 1$; $y'(1) = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 9 > 0$. Сан түзуінде функция туындысының таңбасын белгілейміз (62-сур ет).

62-сурет

Демек, $(-\infty;\ -2] \cup [0;\ +\infty)$ аралығында $f'(x) > 0$ — функция бірсарынды өспелі, $[-2;\ 0]$ аралығында $f'(x) < 0$ — функция бірсарынды кемімелі.

$x = -2$ — максимум нүктесі.

$x = 0$ — минимум нүктесі.

Экстремум нүктелеріндегі функцияның мәндерін есептейік:

$y(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 = 4$; $(-2;\ 4)$;

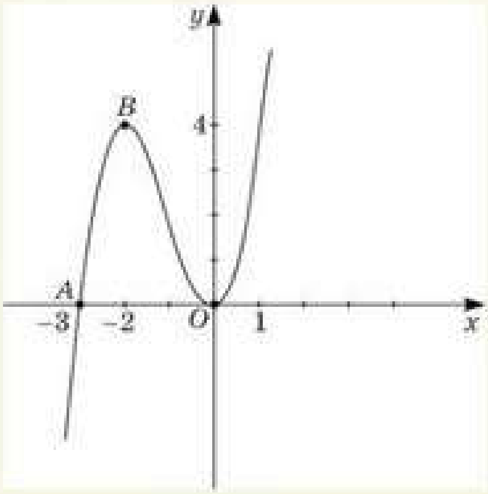
$y(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0$; $(0;\ 0)$.

6) Зерттеулер нәтижесін 11-кестеге енгіземіз:

11-кесте

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	+	9	+	0	–	0	+
$f(x)$	Теріс таңбалы бірсарынды өспелі	0	Оң таңбалы бірсарынды өспелі	4 max	Оң таңбалы бірсарынды кемімелі	0 min	Оң таңбалы бірсарынды өспелі

7) Графигін саламыз (63-сурет).



63-сурет

1. Алгоритмнің екінші жолындағы қасиеттердің қайсылары бір мезгілде орындалуы мүмкін? Жауабын түсіндіріңдер.
2. Функцияны зерттеу алгоритмінің 5-жолы қай кезде толығымен қарастырылмайды? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

21.1. Функцияны зерттеңдер және оның графигін салыңдар:
а) $y = 2x + 1$; ә) $y = 5 - x$; б) $y = x^2 + 3x - 5$; в) $y = (x - 2)^2$.

21.2. Функцияның өсу және кему аралықтарын, экстремумдарын табыңдар:

а) $y = -0{,}5\,x^2 + x$; ә) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$;

б) $y = 2x^2 - x + 3$; в) $y = 5x - 2x^2 - 2$.

21.3. Функцияны зерттеңдер және оның графигін салыңдар:

а) $y = 4x - x^2$; ә) $y = 8x - \frac{1}{4}x^2$; б) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$; в) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$;

г) $y = 3x^2 - 10x + 3$; ғ) $y = 2x^2 + 5x + 2$.

21.4. $f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңдар:

а) $f(x)=x^3+1$;   ә) $f(x)=x^3+3x-5$;

б) $f(x)=2x-\cos x$;   в) $f(x)=-3x+\sin x$.

B

Функцияларды зерттеңдер және олардың графиктерін салыңдар **(21.5— 21.7)**:

21.5. а) $y=x^2(x+3)$;   ә) $y=x^3+3x-5$.

21.6. а) $y=4x-x^4$;   ә) $y=x^4-8x^2$.

21.7. а) $y=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$;   ә) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ ҚАЖЕТТІ ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, анықталу облысы, мәндер жиыны, туынды, сындық нүктелер, кесіндідегі үзіліссіз функцияның қасиеттері.

§22. ФУНКЦИЯНЫҢ КЕСІНДІДЕГІ ЕҢ ҮЛКЕН ЖӘНЕ ЕҢ КІШІ МӘНДЕРІ

Түйінді ұғымдар

Функция, функцияның мәні, ең үлкен мән, ең кіші мән

Сендер берілген аралықтағы функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табуды, оларды геометриялық есептер шығаруда қолдануды үйренесіңдер.

Тәжірибеде, практикада функцияның берілген кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табу есептері жиі кездеседі. Функцияның ондай мәндерін туындының көмегімен табу жолын қарастырайық.

$y=f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде анықталған, үзіліссіз және кесіндінің ішкі нүктелерінде туындысы бар функция болсын. Мұндай функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерінің бар болуы туралы теорема V тараудың §12-ында берілген.

АЛГОРИТМ Функцияның берілген кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табу алгоритмі:

1) $f(x)$ функциясының туындысын табу;

2) $f'(x)=0$ теңдеуін шешіп, сындық нүктелерін анықтау;

3) осы кесіндіге тиісті сындық нүктелерді анықтау;

4) кесіндінің шеткі нүктелеріндегі және осы аралыққа тиісті сындық нүктелеріндегі функцияның мәнін есептеу;

5) функцияның табылған мәндерін салыстырып, ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтау.

МЫСАЛ **1.** $f(x)=x^3-3x^2$ функциясының $[-2;\ 4]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табайық.

Шешуі. Функцияның берілген аралықтағы ең кіші және ең үлкен мәндерін табу алгоритмін қолданамыз.

1) Функцияның туындысын табамыз: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

2) $f'(x) = 0$ теңдеуін шешеміз: $3x^2 - 6x = 0$, $3x(x-2) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

3) Сындық нүктелердің берілген кесіндіге тиісті болатынын анықтаймыз. $0 \in [-2;\ 4]$; $2 \in [-2;\ 4]$.

4) Енді функцияның мәндерін есептейміз: $f(0) = 0^3 - 3\cdot 0^2 = 0$,

$f(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 = -4$,

$f(4) = 4^3 - 3\cdot 4^2 = 16$,

$f(-2) = (-2)^3 - 3\cdot(-2)^2 = -20$.

5) Сонымен, $f(0) = 0$; $f(2) = -4$, $f(4) = 16$, $f(-2) = -20$. Функцияның ең кіші мәні $f(-2) = -20$; функцияның ең үлкен мәні $f(4) = 16$.

Жауабы : 16; –20.

МЫСАЛ **2.** $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ функциясының $x \in \left[\frac{1}{2};2\right]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табайық.

Шешуі. Функцияның берілген аралықтағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табу алгоритмін қолданамыз.

1) $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$.

2) $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4-3}{x^2} = \frac{3(x^2-1)(x^2+1)}{x^2} = 0$, $x \neq 0$.

Бұдан $x^2 + 1 \neq 0$; $x^2 - 1 = 0$, $x_{1,2} = \pm 1$.

3) $x_1 = -1 \notin \left[\frac{1}{2};2\right]$, сондықтан функцияның $x = 1$; $\frac{1}{2}$; 2 нүктелеріндегі мәндерін ғана табамыз.

4) $f(1) = 1^3 + \frac{3}{1} = 1 + 3 = 4$,

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + 6 = 6\frac{1}{8} = 6{,}125$, $\quad f(2) = 2^3 + \frac{3}{2} = 8 + 1{,}5 = 9{,}5$.

Сонымен, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6{,}125$, $f(1) = 4$, $f(2) = 9{,}5$. Демек, функцияның ең кіші мәні $f(1) = 4$, ең үлкен мәні $f(2) = 9{,}5$.

Жауабы: 9,5; 4.

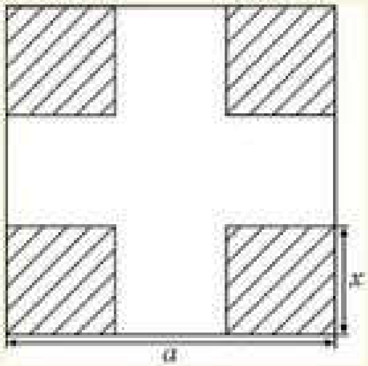
Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін есептеу практикалық есептерді шығару кезінде қажет. Осы жағдайда үзіліссіз функциялардың мына қасиеті қолданылады:

егер берілген аралықта функция үзіліссіз және оның бір ғана экстремумы болса, онда нүктенің минимумында ең кіші, ал максимумында ең үлкен мәні болады .

МЫСАЛ **3.** Қабырғасы a болатын квадрат қаңылтырдан табаны квадрат және төбесі ашық болып келген ең үлкен көлемді қорап дайындау үшін қиып алынған квадрат қабырғасының ұзындығы қандай болу керек?

Шешуі. Қаңылтырдан қорап дайындау үшін бұрыштарынан бірдей квадраттар қиып алу керек (64-сурет). Бүктеген кезде оның көлемі тең болу керек.

Қиып алынған квадрат қабырғасының ұзындығын x деп белгілейік. Сонда қораптың табанының қабырғасы $a - 2x$ болады. Ендеше, қораптың көлемі:



64-сурет

$V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x = (a^2 - 4ax + 4x^2) \cdot x = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$, мұндағы $x \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$.

Себебі $a - 2x \geq 0$, $a \geq 2x$ немесе $x \leq \frac{a}{2}$.

Енді $\left[0; \frac{a}{2}\right]$ кесіндісіндегі $V(x)$ функциясының ең үлкен мәнін табамыз.

$V'(x) = (a^2x - 4ax^2 + 4x^3)' = a^2 - 8ax + 12x^2$,

$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$, бұдан $x_1 = \frac{a}{6}$, $x_2 = \frac{a}{2}$. Табылған сындық нүктелер берілген кесіндіге тиісті: $\frac{a}{6} \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$; $\frac{a}{2} \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$. Енді $x_1 = \frac{a}{6}$, $x_2 = \frac{a}{2}$ нүктелеріндегі $V(x)$-тің мәндерін есептейміз: $V(0) = 0$, $V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$, $V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$.

Сонымен, қиып алынатын квадраттың қабырғасының ұзындығы $\frac{a}{6}$-ға тең болса, қорап көлемі ең үлкен болады.

Жауабы : $\frac{a}{6}$.

?

1. Функцияның ең үлкен мәні максимум нүктесіндегі функцияның мәніне тең болуы міндетті ме?
2. $f(x_0)$ функциясының $[a; b]$ кесіндісінде ең үлкен (ең кіші) мәні болсын. Бұдан x_0 нүктесін функцияның максимум (минимум) нүктесі болады деп айта аламыз ба?
3. а) Қандай да бір кесіндіде; ә) қандай да бір шектелген аралықта үзіліссіз функцияның ең үлкен немесе ең кіші мәнінің болуы мүмкін бе? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

A

$y = f(x)$ функцияларының берілген кесінділердегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар **(22.1—22.3):**

22.1. а) $f(x) = 2x - 3$, $[-1;\ 1]$; ә) $f(x) = 5 - 3x$, $[-2;\ 1]$.

22.2. а) $f(x) = 2x^2 - 8x$, $[-2;\ 1]$; ә) $f(x) = x - \frac{4}{x}$, $[1;\ 4]$.

22.3. а) $f(x) = \frac{x-1}{3x}$, $[-2;\ 0]$; ә) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, $[-2;\ 0]$.

22.4. а) 7 санын қандай екі қосылғышқа жіктегенде олардың көбейтіндісі ең үлкен мәнге тең болады?

ә) 10 санын қандай екі қосылғышқа жіктегенде олардың кубтарының қосындысы ең кіші болады?

22.5. а) 64 саны екі оң көбейткіштерге жіктелген. Көбейткіштердің қосындысы ең кіші сан болу үшін көбейткіштер қандай сандар болу керек?

ә) 100 саны екі оң көбейткіштерге жіктелген. Қосындылары ең үлкен сан болу үшін көбейткіштер қандай сандар болу керек?

22.6. а) Материалдық нүкте $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t + 3$ заңы бойынша түзусызықты қозғалады. Алғашқы 2 с ішіндегі $x(t)$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

ә) Дене $x(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 - 3t + 10$ заңына сәйкес қозғалады. Функцияның алғашқы 4 с ішіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

B

Берілген кесінділердегі $y = f(x)$ функцияларының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар **(22.7—22.10):**

22.7. а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 2$, $[-4;\ 2]$;

ә) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$, $[1;\ 4]$.

22.8. а) $f(x) = 2x^2 - \frac{8}{x} + 3$, $[-5;\ 1]$; ә) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2} - 5$, $[\frac{1}{2};\ 3]$.

22.9. а) $f(x) = \sin x + x$, $[-\pi;\ \pi]$; ә) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$, $[0;\ 2\pi]$.

22.10. а) $f(x) = \frac{1}{x} + x^2$, $[0{,}5;\ 1]$; ә) $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$, $[-1;\ 0]$.

22.11. а) 75 санын қандай екі натурал қосылғышқа жіктегенде олардың біреуінің екінші қосылғыштың квадрат түбіріне көбейтіндісі ең үлкен болады?

ә) 32 санын қандай екі натурал қосылғышқа жіктегенде олардың біреуінің екінші қосылғыштың квадрат түбіріне қосындысы ең кіші болады?

22.12. а) 18 санын қандай екі қосылғышқа жіктегенде екі еселенген бірінші қосылғыш пен екінші қосылғыштың квадратының қосындысы ең кіші болады?
ә) 16 санын қандай екі қосылғышқа жіктегенде олардың квадраттарының қосындысы ең кіші болады?

22.13. а) Радиусы 1 см болатын шеңберге іштей сызылған тіктөртбұрыштардың арасынан ауданы ең үлкенін анықтаңдар;
ә) ұзындығы 12 см кесіндіден жасауға болатын тіктөртбұрыштардың ішінен ауданы ең кіші тіктөртбұрышты табыңдар.

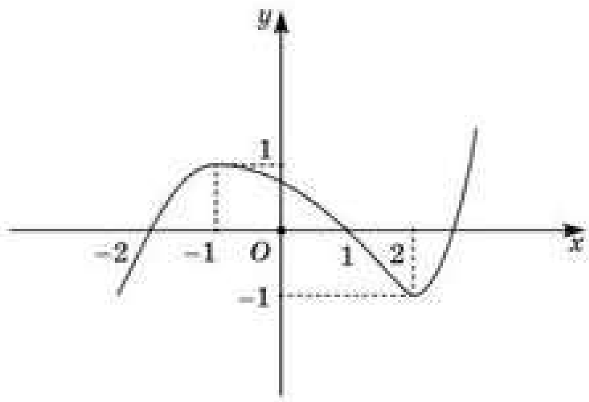
22.14. а) Ауданы ең үлкен болатындай етіп тіктөртбұрышты аланды жалпы ұзындығы 80 м дуалмен қоршау керек. Аланның өлшемдерін табыңдар;
ә) ауданы ең үлкен болатындай етіп тіктөртбұрышты бақшаны жалпы ұзындығы 16 м дуалмен қоршау қажет. Бақшаның өлшемдерін табыңдар.

22.15. а) Гипотенузасы мен бір катетінің қосындысы 21-ге тең барлық тікбұрышты үшбұрыштардың ішінен ауданы ең үлкен болатын тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарын табыңдар;
ә) гипотенузасы $c=\sqrt{2}$ болатын барлық тікбұрышты үшбұрыштардың ішінен периметрі ең үлкен үшбұрышты табыңдар.

22.16. Пішіні тіктөртбұрыш, ауданы 400 га егістік алқабының айналасына ені $l = 10$ м болып келетін жолаққа ағаштар отырғызу керек. Қоршаған ағаштар алқабының ауданы ең кіші болу үшін егістік алқабының сызықтық өлшемдері қандай болу керек?

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Төмендегі берілген график бойынша функцияның өспелі және кемімелі аралықтарын анықтаңдар:



A) $(-1;\ 2)$ — өседі; $(-\infty;\ -1)$ және $(2;\ +\infty)$ — кемиді;
B) $(-2;\ 1)$ — кемиді; $(1;\ +\infty)$ — өседі;
C) $(-\infty;\ -1]$ және $[2;\ +\infty)$ — өседі; $[-1;\ 2]$ — кемиді;
D) $(-\infty;\ -1)$ және $(2;\ +\infty)$ — кемиді; $(-1;\ 2)$ — өседі.

2. 1-тапсырмадағы график бойынша функцияның экстремум нүктелерін табыңдар:

A) $x_{min} = -2,\ x_{max} = 1$; B) $x_{min} = -1,\ x_{max} = 2$;
C) $x_{min} = 2,\ x_{max} = -1$; D) $x_{min} = 1,\ x_{max} = 1$.

3. $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$ функциясының кему аралығын табыңдар :

A) $[-1;\ 0)$; B) $[1;\ +\infty)$; C) $[-1;\ 0]$; D) $(-\infty;\ -1]$.

4. $f(x) = 0{,}5x^4 - 2x$ функциясының экстремум нүктелерін табыңдар:
A) $x_{max} = 1,\ x_{min} = -1$; B) $x_{max} = -1,\ x_{min} = 1$;
C) $x_{min} = 1$; D) $x_{max} = -1$.

5. $f(x) = x + 5$ функциясының өсу аралығын табыңдар:
A) $(-\infty; +\infty)$; B) $(-\infty; 5)$; C) $(5; +\infty)$; D) жоқ.

6. $\frac{x^2-1}{x}$ функциясының сындық нүктелерінің санын анықтаңдар:
A) жоқ; B) 5; C) 2; D) -5.

7. $y = x^3 - 3x$ функциясының $[0;\ 1]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:
A) 2; 0; B) 0; -2; C) 3; 0; D) -3; 0.

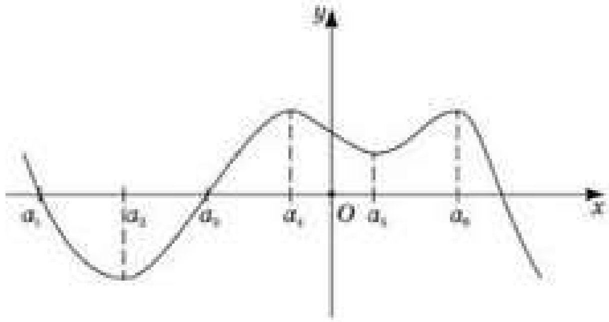
8. $y = 3x^2 - x^3$ функциясының өсу аралықтарын табыңдар:
A) $(-\infty; -2]$ және $[0; +\infty)$; B) $(-\infty; -2]$ және $[0; +\infty)$;
C) $(-\infty; 0]$ және $[2; +\infty)$; D) $[0;\ 2]$.

9. $y = \sqrt{3}x + \sin 2x$ функциясының $[0;\ \pi]$ кесіндісіндегі ең кіші және ең үлкен мәндерін табыңдар:
A) $\frac{\pi}{6}$; π; B) $\pi\sqrt{3}$; π;
C) 0; $\pi\sqrt{3}$; D) 0; π.

10. $f(x) = -x^3 - 2$ функциясының максимум нүктесін анықтаңдар:
A) 2; B) -2; C) 0; D) жоқ.

11. $f(x) = x^2 - 1$ функциясының минимум нүктесін табыңдар:
A) $x_{min} = -3$; B) $x_{min} = -1$; C) $x_{min} = 1$; D) $x_{min} = 0$.

12. Функцияның суретте берілген графигі бойынша экстремум нүктелерін анықтаңдар:
A) a_1; a_3; a_6;
B) a_1; a_4;
C) a_2; a_4; a_5; a_6;
D) a_1; a_4; a_6.



13. $f(x) = x^2 - 8x$ функциясының $[-2;\ 1]$ аралығындағы ең кіші мәнін табыңдар:
A) 2; B) -7; C) 3; D) 1.

14. $y = 1 - x^2$ функциясының кему аралықтарын анықтаңдар:
A) $[-1;\ 1]$; B) $[-\infty; 0)$ және $(0; +\infty)$;
C) $(-\infty; 0]$; D) $[0; +\infty)$.

15. Туындысы $f'(x) = x(4 - x)$ болатын $f(x)$ функциясының өсу аралықтарының ұзындығының қосындысын табыңдар:
A) 3; B) 4; C) 6; D) 5.

16. $g(x) = \frac{1}{3}\sin 3x$ функциясының $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтаңдар:
A) 9; 1; B) -1; 0; C) $\frac{1}{3}$; 0; D) 0; $-\frac{1}{3}$.

17. $y(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$ функциясының кему аралықтарын анықтаңдар :

A) жоқ; B) $[-3;\ 3]$;

C) $(-\infty;\ -3]$ және $[0;\ 3)$; D) $(-\infty;\ -3)$ және $(0;\ +\infty)$.

18. $y = x^2 - 2$ функциясының $[2;\ 3]$ аралығындағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар :

A) 4; 1; B) –4; 7; C) 2; 7; D) 6; 12.

19. $y = \frac{3}{x} - \frac{x}{3}$ функциясының нөлдерін табыңдар:

A) –3; 0; 3; B) 3; –3; C) –3; 0; D) 0; 3.

20. $f(x) = 4\sin^2 x + 5\cos^2 x$ функциясының ең үлкен мәнін табыңдар:

A) –2; B) 0; C) 5; D) 2.

21. $f(x) = \sqrt{2}x + \cos 2x$ функциясының $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$ кесіндісіндегі ең кіші және ең үлкен мәндерін табыңдар :

A) $1;\ \frac{\sqrt{2}}{2};\left[\frac{\pi}{4} + 1\right]$; B) $0;\ \pi\sqrt{2}$; C) $\frac{\pi}{4};\ \pi$; D) $\pi\sqrt{2};\ \pi$.

Математикалық сауаттылық бойынша тапсырмалар

22. Цифрлары қайталанбайтындай 2; 3; 5 цифрларынан қанша үш-таңбалы тақ сан құрастыруға болады:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

23. Екі бригада барлығы 40 км жол жөндеді. Бірінші бригада күніне 9,5 км, ал екінші бригада күніне 7 км жол жөндеген. Егер бірінші бригада екіншіге қарағанда бір күн кем жұмыс жасаса, онда келесі тұжырымдардың қайсысы ақиқат болады:

A) бірінші бригада үш күн, ал екінші бригада төрт күн жұмыс атқарған;

B) бірінші бригада төрт күн, ал екінші бригада үш күн жұмыс атқарған;

C) бірінші бригада екінші бригадаға қарағанда 3 км жол артық жөндеген;

D) екінші бригада бірінші бригадаға қарағанда 2 км жол артық жөндеген;

E) екінші бригада бірінші бригадаға қарағанда 3 км жол артық жөндеген?

24. $[209;\ 245)$ аралығына тиісті 7-ге еселік болатын қанша натурал сан бар:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

25. Егер бірінші санды 25%-ға, екінші санды 40%-ға кемітсе, онда осы сандардың көбейтіндісі қанша пайызға кемиді:

A) 40%-ға кемиді; B) 45%-ға кемиді;

C) 20%-ға кемиді; D) 50%-ға кемиді; E) 35%-ға кемиді?

ТАРИХИ МАҒЛҰМАТТАР

Maximum æəíà *minimum* ñөçäåðii ëàòûí òiëiíäåí àóäàðғàíäà, ñəéêåñiíøå "åң үëêåí" æəíà "åң êiøi" äåãåíi íàғûíà áåðåäi. Âåðíåòðèÿëûқ òàïàëàðäûң åң үëêåí æəíà åң êiøi ìəíäåðií òàáóäûң êåéáið äåðåêñ ñүðàқòàðûíàí áæåëäi àðäå ìàòåìàòèêòåði äå àéíàëûñқàí.

Åæåëäi àðåê ìàòåìàòèêi Àðõèìåä өçiíiң "Äàñòàìàëàðû" àòòû åңáåãiíäå ìàғûíàñû ìûíàäàé ұғûìäû áiëäiðåòii ñөéëåìäi äəëåëäåäi (òàçà äåíåòðèÿëûқ òұðғûäà): áåðiëãåí үøáұðûøòûқ iøòåé ñûçûëғàí áàðëûқ ïàðàëëåëîãðàììäàðäûң àðàñûíàí òàáàíû үøáұðûøòûң òàáàíûíà æàðòûñûíà òåң ïàðàëëåëîãðàììíûң àóäàíû åң үëêåí áîëûï òàáûëàäû.

Æàңà ғàñûðäûң áàñûíäà æàðàòûëûñòàíó, ғûëûì ìåí òåõíèêà åñåïòåði òàìàëàðäûң åң үëêåí æəíà åң êiøi ìəíäåðií òàáó үøií æәêiëû əäiñòi қàæåò åòòi. Ñîë êåçäåң өçiíäå ìiíñ ìàòåìàòèêi È. Êåïëåð (1615 æ.) òàìàøûң ìàêñèìóì ìəңäiíäåãi өçãåðiñi òàìàëû ғàíà äåé íөëäiðï, ýêñòðåìóìäû òàáó êàçiíäå òóûíäûíû íөëäå òåңåñòiðó òóðàëû èäåÿ àéòқàí. Ôðàíöóç ìàòåìàòèêi Ï. Ôåðìà өçiíiң "Ìàêñèìóìäàð ìåí ìèíèìóìäàðäû çåðòòåó əäiñi" äåï àòàëàòûí åңáåãiíäå òåê æəíà òóûíäû ұғûìäàðûí қîëäàíáàғàí, îíûң ýêñòðåìóìäàðäû àíûқòàó əäiñi áiç қîëäàíûï æүðãåí æəíà ìåäiçiíäå òóûíäûñû íөëãå òåңåñòiðó áîëûï òàáûëàòûí Ã. Ëåéáíèö ïåí È. Íüþòîíûң əäiñòåðiíå ñəéêåñ êåëåäi.

Ï. Ôåðìà áåðiëãåí øàðғà êөëåìi åң үëêåí êîíóñòû, áåòi åң үëêåí áîëàòûí öèëèíäðäi iøòåé ñûçó åñåïòåðiíi áàñқà åñåïòåðäå äå өç əäiñiíi қîëäàíғàí. Ñîíûìåí қàòàð, өç əäiñii òåê áүòií àëãåáðàëûқ ôóíêöèÿëàðғà ғàíà қîëäàíûï, àë ýêñòðåìóìäàðäû àæûðàòó (ìàêñèìóì ìèíèìóìíàí) êðèòåðèéi қîëäàí-áàғàíûí àéòà êåòåéi æөi. 1958 æ. äîêëàäàèÿëûқ ìàòåìàòèê Á. Õóääåíiң äå áåðãåí ìàêñèìóìäàð ìåí ìèíèìóìäàðäû òàáó åðåæåñi òóðàëû äà îñûíû àéòóғà áîëàäû.

È. Íüþòîí (1671 æ.) òàìàëàðäûң åң үëêåí æəíà åң êiøi ìəíäåðií áîëқàòóäû, ұғûì êiàäðó ïðèíöèïií áûëàé òұæûðûìäàғàí: "Åãåð òàìà àðòûëûқ ìүìêií áîëàòûí ìəíäåðiң åң үëêåíi íåìåñå åң êiøiñi áîëñà, îíäà îñû ìåçåòòå îë өçãåðìåéäi". È. Íüþòîí өç åðåæåñii èððàöèîíàëäûққà äà қîëäàíóғà áîëàòûíäûқòàí, Õóääå åðåæåñiíiң æàëïû òүði áîëàòûíûí äåï íûñàëìåí êөðñåòêåí.

Ìàêñèìóìäàð æəíà ìèíèìóìäàð ïðîáëåìàëàðûí çåðòòåóäå Ã. Ëåéáíèö òà ìàңûçäû үëåñ қîñқàí. Өçiíiң "Æàңà əäiñ" (1684 æ.) àòòû åңáåãiíäå îë ôóíêöèÿíûң өñó æəíà êåìó àðàëûғûí çåðòòåóäå äèôôåðåíöèàë ұғûìûí ïàéäàëàíûï æəíà ìåäiçiíäå áiç қîëäàíûï æүðãåí, åãåð $y(x)$ *ôóíêöèÿñûíûң òóûíäûñû қàíäàé äà áið àðàëûқòà ôóíêöèÿ àðãóìåíòiíiң өçãåðiñi êåçiíäå îң áîëñà, îíäà àðãóìåíò өñêåíäå ôóíêöèÿ өñåäi, àë òóûíäû òåðiñ áîëñà, ôóíêöèÿ êåìèäi* äåãåí òåîðåìàíû òұæûðûìäàғàí. Ôóíêöèÿíûң (ýêñòðåìóì áîëғàí æàғäàéäà) åң үëêåí íåìåñå åң êiøi ìəíäåðiíäå æàíàìàíûң êөëåìå áîëìàéòûí òàðòûíäà, үøií äèôôåðåíöèàë $dy = 0$ òàðòûíäà áîëқàòàëäû. Áұë æàғäàéäà ïðåíåàòåëåð "ñûïàéû, êàëìåéäi, áið қàëûïòà òұðàäû".

Ë. Ýéëåð (1755 æ.) өçiíiң "Äèôôåðåíöèàëäû åñåïòåó" àòòû åңáåãiíäå ôóíêöèÿíûң íөë, ìүñäëû, ìàêñèìóì íүêòåñiíäå îíû ôóíêöèÿíûң åң үëêåí íåìåñå íүëåëi ñəéêåñ êåëiìåéòiíi åñêåðå îòûðûï, åñêåðþ ýêñòðåìóìäàðäû "ìàêñèçäi ñëîìàòòàëàñû" äåï àòàëàòûí ñàëûñòûðìàëû ýêñòðåìóìäàðäàí àæûðàòòû. Ñîíäàé-àқ, ìë êөï àéíûìàëû $f(x, y, z, \ldots, n)$ òóíêöèÿñûíың ìàêñèìói æəíå ìèíèìóìäàðûí қàðàñòûðàäû. Óóíêöèÿëàðäû ìàêñèìói ìåí ìèíèìóìғà çåðòòåó үøií Л.Ýéëåð áiðiíøi æəíå åêiíøi òóûíäûëàðûíàí ғàíà øåêòåëìåé, æîғàðû ðåòòi òóûíäûëàðäû äà қîëäàíäû.

Ìàêñèìóìäàð ìåí ìèíèìóìäàð òóðàëû ìëií áiçäiң çàìàíûìûçäà óàқûòòû òèiìäi ïàéäàëàíó, өíäiðiñòi қàæåòòi øèêiçàòïåí қàìòàìàñûç åòiï, әңáåê өiiiäiëiäii àðòòûðó, æàëïû ýêiíîìèêàíû äàìûòó ìәñåëåëåði қазіргі қоғамда ìàңûçäû ðîëü àòàðàäû.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ ҚАЖЕТТІ ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Кездейсоқ оқиғалар және олардың түрлері, оқиға ықтималдығының классикалық формуласы, тәуелді және тәуелсіз оқиғалар, олардың ықтималдығын есептейтін формулалар.

7 КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

§ 23. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ТҮРЛЕРІ. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАНЫҢ ҮЛЕСТІРІМ ЗАҢЫ

Түйінді ұғымдар

Кездейсоқ шама, үлестірім заңы, дискретті кездейсоқ шама, үзіліссіз кездейсоқ шама

Сендер кездейсоқ шама мен оның түрлері туралы түсінік аласыңдар; кездейсоқ шамалардың үлестірім заңымен танысасыңдар;

оларды қолданып есептер шығаруды үйренесіңдер.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Ықтималдықтар теориясында белгілі шарттар орындалатын жағдайда тәжірибе жасалады. Тәжірибе қорытындысын оқиға деп қабылдайды. Оқиғалар үш топқа бөлінеді: 1) ақиқат оқиғалар; 2) мүмкін емес оқиғалар; 3) кездейсоқ оқиғалар.

Мысалы, "атмосфералық қысымда 20°C температурада су өзінің сұйық қалпын сақтауы", "күн мен түн жыл мезгіліне байланысты белгілі бір уақыт ішінде алмасып отырады", "күн мен түннің алмасуы, күндіз жарық, түнде қараңғы болуы" — ақиқат оқиғалар.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Кездейсоқ оқиғалар үйлесімді, үйлесімсіз, мүмкіндіктері бірдей, қарама-қарсы оқиғалар болып төрт топқа бөлінеді. Сонымен қатар, толық оқиғалар тобы, бір ғана мүмкіндікті оқиғалар, тәуелді және тәуелсіз оқиғалар түсініктері сендерге төменгі сыныптардан белгілі.

Кездейсоқ оқиғаларды зерттегенде оның сандық қасиеттеріне де тоқталып, оларды бағалау қажет. Сандарға сипаттама беру үшін ықтималдықтар теориясында *кездейсоқ шама* деп аталатын ұғым енгізіледі.

Алдын ала белгісіз, тек тәжірибе нәтижесінде анықталатын бір мәнді шаманы ықтималдық теориясында ***кездейсоқ шама*** *деп атайды.*

Кездейсоқ шамаларға мысалдар:

1) бір тәулік ішінде Алматы қаласының перзентханаларында дүниеге келген перзенттер саны;

2) нысананы дәл көздеп атып түсіргенше атылатын оқтар саны;

3) артиллериялық снарядтың ұшу қашықтығы;

4) кез келген өндіріс орнының немесе кез келген жанұяның электр энергиясын пайдалану мөлшері (белгілі бір уақыт бірлігінде, айталық, ай, жыл т. б.).

Жоғарыда көрсетілген кездейсоқ шамаларды тәжірибе жасамай дәл анықтау мүмкін емес.

Ықтималдықтар теориясында кездейсоқ шамаларды латынның бас әріптерімен (X; Y; Z; ...), ал олардың мәндерін латынның кіші әріптерімен (x_1; y_1; z_1; ...) белгілейді.

Ықтималдығының мәндері көрсетілген жеке мүмкін мәндерді қабылдайтын кездейсоқ шаманы ***дискретті кездейсоқ шама*** *деп атайды.*

Жоғарыда келтірілген 1) және 2) мысалдар дискретті кездейсоқ шамаларға жатады.

Мәндері үзіліссіз [a; b] кесіндісінде (мұндағы $a < b$, a және b — тиянақты нақты сандар) орналасқан кездейсоқ шамаларды ***үзіліссіз кездейсоқ шамалар*** *деп атайды .*

Жоғарыда келтірілген 3- және 4-мысалдар үзіліссіз кездейсоқ шамаларды береді.

Ескерту . Оқулық бағытына сәйкес дискретті кездейсоқ шамалардың мәндерін жеке-дара тиянақты сандармен, ал үзіліссіз кездейсоқ шамалардың мәндерін шектелген кесіндіде қарастырады.

X кездейсоқ шамасын алайық. Оның қабылдайтын мүмкін мәндері $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n$ және оларға сәйкес ықтималдықтары $p_1, p_2, p_3, ..., p_{n-1}, p_n$ болсын. Сонда 12-кестені құруымызға болады.

12-*кесте*

X	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-2}	p_{n-1}	p_n

12-кест еде кездейсоқ шама $X = x_1$ оқиғасының ықтималдығы p_1, ал $X = x_2$ оқиғасының ықтималдығы p_2, $X = x_3$ оқиғасының ықтималдығы p_3 т.с.с. $X = x_{n-1}$ оқиғасының ықтималдығы p_{n-1}, ал $X = x_n$ оқиғасының ықтималдығы p_n болу сәйкестігі орындалған.

12- *кестеде берілген заңдылықты* X ***кездейсоқ шамасы ның үлестірім заңы*** *деп атайды* .

Кездейсоқ ша ма өзінің мүмкін мәндерін міндетті түрде қабылдайтын болғандықтан,

$$p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_{n-1} + p_n = 1 \qquad (1)$$

теңдігі орындалады.

МЫСАЛ

1. Лотореяда 10 000 билет бар. Бір ұтыста 5000 тг, жүз ұтыста 1000 тг, мың ұтыста 100 тг-ден ұтыс бар, ал қалған билеттерде ұтыс жоқ. Бір билет сатып алған адамның ұтыс алу мүмкіндігі X кездейсоқ шамасы болса, онда кездейсоқ шаманың үлестірім заңының кестесін құрайық.

Шешуі . Есептің шарты бойынша ұтыс мөлшері 5000 тг болатын бір билет, 1000 тг ұтатын жүз билет, 100 тг ұтатын мың билет бар. Әрқайсысының ықтималдығын анықтайық.

$x_1 = 5000,\ \ p_1 = \frac{1}{10000} = 0{,}0001;$

$x_2 = 1000,\ \ p_2 = \frac{100}{10000} = 0{,}01;$

$x_3 = 100,\ \ p_3 = \frac{1000}{10000} = 0{,}1.$

Онда ұтыс жоқ билеттердің ықтималдығы (1) формула бойынша есептелінеді. $p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 = 1 - 0{,}0001 - 0{,}01 - 0{,}1 = 0{,}8899$. Демек, кездейсоқ шаманың үлестірім заңы 13-кестеде берілген.

13- кесте

X	5000	1000	100	0
P	0,0001	0,01	0,1	0,8899

МЫСАЛ **2.** Бірінші мергеннің нысананы дәл көздеу ықтималдығы 0,8. Екінші мергеннің нысананы дәл көздеу ықтималдығы 0,75. Әрқайсысы нысананы бір-бірден атты. X кездейсоқ шамасы — нысанаға тигізу саны. Нысананы дәл көздеудің үлестірім заңын анықтайық.

Шешуі . Кездейсоқ шаманың қабылдайтын мүмкін мәндері: 1) $x_1 = 0$ — екі мергеннің екеуінің де тигізе алмауы. Осы оқиғаға сәйкес ықтималдық: $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05$.

2) $x_2 = 1$ (мергендердің біреуінің ғана дәл көздеуі). Осы оқиғаға сәйкес келетін ықтималдық: $P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0{,}75 = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35$.

3) $x_3 = 2$ (мергендердің екеуінің де дәл көздеуі). Осы оқиғаға сәйкес келетін ықтималдық: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}75 = 0{,}6$.

X кездейсоқ шамасының үлестірім заңы 14-кестеде берілген.

14- кесте

X	0	1	2
P	0,05	0,35	0,6

?

1. Кезде йсоқ оқиғалар түрінің кездейсоқ шамаларға әсері қандай?
2. Кездейсоқ оқиғалар мен кездейсоқ шамалардың айырмашылығын қалай түсіндіруге болады?
3. X кездейсоқ шамасының үлестірім заңын жазу үшін қандай элементтер қажет?
4. Неге кезде йсоқ шаманы тәжірибе жасамай-ақ анықтауға болмайды?

Жаттығулар

A

23.1. 15-кестеде кездейсоқ шаманың толық емес үлестірім заңы берілген:

15-кесте

X	4	7	10	13	17
P	0,05	?	?	?	0,05

Белгісіз ықтималдықтардың үлестері бірдей деп ұйғарып, кездейсоқ шаманың толық үлестірім заңын жазыңдар.

23.2. Кестеде кездейсоқ шаманың үлестірім заңы берілген (16-кесте):

16-кесте

X	2	?	?	?	?	12
P	0,05	?	?	?	?	0,05

Кездейсоқ шаманың белгісіз мәндері берілген мүшелермен бірге өспелі арифметикалық прогрессия құрады, ал олардың сәйкес ықтималдықтары 1 : 3,5 : 3,5 : 1 пропорция заңдылығын береді деп есептеп, кездейсоқ шаманың толық үлестірім заңын жазыңдар.

23.3. Орта мүшелері 8-ге, 12-ге тең төрт мүшеден ғана тұратын арифметикалық прогрессия берілген. Егер орта мүшелердің ықтималдықтары шеткі екі мүшенің ықтималдықтарынан төрт есе үлкен болса, онда кездейсоқ шаманың толық үлестірім заңын жазыңдар.

23.4. Мерген нысананы 3 рет атады. Нысананы дәл көздеу ықтималдығы 0,9. Мергеннің нысананы дәл көздеуінің үлестірім заңын табыңдар.

B

23.5. Төрт патроны бар мерген нысанаға тигізгенше атады. Мергеннің нысананы дәл көздеу ықтималдығы 0,6-ға тең. Мергеннің нысананы дәл көздеуі үшін шығарған патрондарының үлестірім заңын табыңдар.

23.6. 100 лотерея билеті сатылған. Оларда 500 тг-ден бір ұтыс, 100 тг-ден он ұтыс, 50 тг-ден елу ұтыс бар, ал қалған билеттерде ұтыс жоқ. Бір лотерея билетін сатып алған адам үшін ұтыстың үлестірім заңын табыңдар.

23.7. Бір рет лақтырылған тиынның "елтаңба" жағымен түсуінің үлестірім заңын табыңдар.

23.8. Екі мерген нысананы көздейді. Олардың нысананы дәл көздеуінің ықтималдығы сәйкесінше 0,9 және 0,8. Мергендер бір-бірден нысананы атты. X кездейсоқ шамасы — нысанаға дәл тигізу саны. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім заңын жазыңдар.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ ҚАЖЕТТІ ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Кездейсоқ оқиға, кездейсоқ шама, олардың түрлері, кездейсоқ шаманың үлестірім заңы .

§ 24. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

Түйінді ұғымдар

Кездейсоқ шама, математикалық күтім, дисперсия, орташа квадраттық ауытқу

Сендер математикалық күтім, дисперсия, орташа квадраттық ауытқу ұғымдары мен олардың қасиеттері және формулаларымен танысасыңдар;

кездейсоқ шаманың сандық сипаттамаларын қолдануға есептер шығаруды үйренесіңдер.

Үлестірім заңы кездейсоқ шаманың толық сипаттамасын береді. Кейбір жағдайда кездейсоқ шаманың сандық сипаттамасын анықтау қажет. Сондықтан кездейсоқ шаманың математикалық күтімі, дисперсиясы және орташа квадраттық ауытқу ұғымдарын енгізіп, кездейсоқ шаманың белгісіз мәндерін табуды немесе кездейсоқ шаманы зерттеуді қарастырамыз.

I. Математикалық күтім

Дискретті кездейсоқ шаманың үлестірім заңы 17-кестеде берілген:

17-кесте

X	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-2}	p_{n-1}	p_n

*X кездейсоқ шамасы мәндерінің сәйкес ықтималдық мәндеріне көбейтінділерінің қосындысын X кездейсоқ шамасының **математикалық күтімі** деп атайды.*

Математикалық күтімінің белгіленуі: $M(X)$.

Математикалық күтімді есептеу формуласы:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_{n-1} \cdot p_{n-1} + x_n \cdot p_n. \tag{1}$$

МЫСАЛ

1. Таралу заңдылығы 18- және 19-кестелерде берілген кездейсоқ шаманың математикалық күтімін есептеңдер.

18-кесте

X	3	7	11	13	16
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

19-кесте

Y	2	5	8	9	12
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Шешуі. Әрқайсының математикалық күтімін есептеу үшін (1)-формуланы қолданамыз:

1) $M(X) = 3 \cdot 0,1 + 7 \cdot 0,2 + 11 \cdot 0,4 + 13 \cdot 0,2 + 16 \cdot 0,1 = 10,3;$

2) $M(Y) = 2 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,2 + 8 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,2 + 12 \cdot 0,1 = 7,4.$

Жауабы: 1) 10,3; 2) 7,4.

Мысалдағы әрбір жағдай үшін арифметикалық ортаның мәнін анықтайық.

$$\bar{x} = \frac{3+7+11+13+16}{5} = 10; \qquad \bar{y} = \frac{2+5+8+9+12}{5} = 7,2.$$

Осы қарастырылған мысалдан мынадай қорытынды жасауға болады:
1) математикалық күтім — кездейсоқ шама мәндерінің арифметикалық ортасына жақын орналасатын шама:

$$M(X) \approx \bar{x},\ M(Y) \approx \bar{y}.$$

2) кездейсоқ шамалардың мәндері өспелі тізбек болған жағдайда математикалық күтімнен кіші кездейсоқ шаманың мәндері оның үлестірім заңы кестесінің сол жақ бөлігінде, үлкен мәндері оң жақ бөлігінде орналасады.

Енді заңды сұрақ туады: "Не себепті $M(X)$ арифметикалық ортаға жақын орналасады?"

n рет тәжірибе жасалған деп ұйғарайық. Осы тәжірибенің нәтижесінде x кездейсоқ шамасы x_1 мәнін m_1 рет, x_2 мәнін m_2 рет, x_k-мәнін m_k рет қабылдасын.

Сонда X кездейсоқ шамасының n рет тәжірибе жасалғанда $(m_1 + m_2 + \dots + m_k = n)$ қабылдаған барлық мәндерінің қосындысы мына қосындыға тең:

$$m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k.$$

Әрбір тәжірибеге сәйкес келетін кездейсоқ шаманың мәні:

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k}{n} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2\frac{m_2}{n} + \dots + x_k \cdot \frac{m_k}{n}, \qquad (2)$$

мұндағы $\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \dots, \frac{m_k}{n}$ мәндері $x_1, x_2, \dots, x_k$ болған жағдайдағы салыстырмалы жиілікт ер.

Тәжірибенің саны n артқан сайын $\frac{m_1}{n} \to p_1,\ \frac{m_2}{n} \to p_2,\ \dots,\ \frac{m_k}{n} \to p_k$ ұмтылады. Сонда математикалық күтімге тең шаманы аламыз.

МЫСАЛ **2.** 10 адам жұмыс істейтін компанияда жалақы төмендегідей бөлінген: екі адам 20 мың теңге; үш адам 40 мың теңге; төрт адам 80 мың теңге; бір адам 100 мың теңге алады. Ай сайын жалақыға 580 мың теңге бөлінеді. Барлық жұмыскерге бірдей еңбекақы төлесе, әрқайсысы айына қанша жалақы алған болар еді?

Шешуі. Жалақы мөлшері кездейсоқ шама болсын. Жалақының үлестірім заңын жазамыз (20-кесте).

20-кесте

20 мың теңге	40 мың теңге	80 мың теңге	100 мың теңге
$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$

Компаниядағы барлық адамдарға бірдей жалақы төленсе, олардың әрқайсысы айына 58 мың теңге алған болар еді. Бұл — орташа айлық жалақының шамасы. Математикалық күтім осы орташа жалақының шамасын беруі керек.

$$M(X) = 20000 \cdot \frac{2}{10} + 40\,000 \cdot \frac{3}{10} + 80\,000 \cdot \frac{4}{10} + 100\,000 \cdot \frac{1}{10} = 58\,000.$$

Демек, орташа жалақының шамасы математикалық күтімге тең.

Жауабы : 58 мың теңге.

ЕСТЕ САҚТАҢДАР:

Математикалық күтімнің қасиеттері:

1) егер C —тұрақты, X — кездейсоқ шама болса, онда

$$M(C) = C, \tag{3}$$

$$M(CX) = CM(X); \tag{4}$$

2) X, Y, Z — кездейсоқ шамалар болса, онда

$$M(X + Y + Z) = M(X) + M(Y) + M(Z). \tag{5}$$

МЫСАЛ

3. Бірінші мысалда есептелген X және Y кездейсоқ шамаларының математикалық күтімін қолданып, 1) $M(2X)$; 2) $M(4Y)$; 3) $M(5X - 3Y)$ мәндерін табайық.

Шешуі. 1-мысалдың шешуі бойынша $M(X) = 10{,}3$; $M(Y) = 7{,}4$. Онда 1) (4)-формула бойынша $M(2X) = 2 \cdot M(X) = 2 \cdot 10{,}3 = 20{,}6$; 2) $M(4Y) = 4M(Y) = 4 \cdot 7{,}4 = 29{,}6$; 3) (5) және (4) формулалар ын қолданып $M(5X - 3Y) = 5M(X) - 3M(Y) = 5 \cdot 10{,}3 - 3 \cdot 7{,}4 = 51{,}5 - 22{,}2 = 29{,}3$ аламыз.

Жауабы: 1) 20,6; 2) 29,6; 3) 29,3.

Математикалық күтім кездейсоқ шаманың арифметикалық ортасына жақын орналасқан шаманың сандық сипаттамасы болатынын анықтадық. Арифметикалық ортадан қандай қашықтықта орналасатыны белгісіз болғандықтан кездейсоқ шаманың басқа мәндерін табудың тәжірибелік мәні зор. Мысалы, көптеген зауыттардың республика бойынша орташа еңбек өнімділігі белгілі болғанымен, әр зауыттың өз еңбек өнімділігі белгісіз, ескерусіз күйде қала береді. Кооперативтік шаруашылықтарда орташа өнім жағдайына көңіл бөлінеді. Жеке кооператив шаруашылықтарының өнімділігі көп жағдайда ескерусіз қалады.

Демек, кездейсоқ шаманың мүмкін болатын мәндері оның орташа мәндеріне қатысты қалай орналасқанын зерттеу үшін кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары, яғни дисперсия, орташа квадраттық ауытқу ұғымдарына тоқталамыз.

$\{X - M(X)\}$ кездейсоқ шамасының математикалық күтімін есептейік. $X - M(X)$ айырымы кездейсоқ шаманың мүмкін болатын мәні мен орташа мәнінің арасындағы айырым, осы айырымды ықтималдықтар теориясында *ауытқу* деп атайды.

Ауытқудың үлестірім заңын жа зайық (21-кесте):

21-*кесте*

$X - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	...	$x_n - M(X)$
P	p_1	p_2	...	p_n

Енді ауытқудың орташа мәнін немесе оның математикалық күтімін есептейік. $M(X)$ — тұрақты шама, сондықтан $M[M(X)]$, яғни тұрақтының математикалық күтімі өзіне тең:

$$M[X - M(X)] = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) \equiv 0.$$

Соны мен, кез келген кездейсоқ шаманың ауытқуының орташа мәні нөлге тең. Демек, ауытқудың орташа мәні кездейсоқ шама мәндерінің бір-біріне жақын немесе алыс орналасуының заңдылығын зерттей алмайды. Сондықтан ықтималдықтар теориясында кездейсоқ шаманың таралу заңдылығын зерттеу үшін ауытқудың екінші дәрежесінің математикалық күтімі қарастырылады.

II. Дисперсия

Ауытқудың екінші дәрежесінің математикалық болжамы X кездейсоқ шамасының ***дисперсиясы*** *деп аталады.*

Дисперсияның белгіленуі: $D(X)$.

Дисперсияны есептеу формуласы:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \quad (6)$$

ЕСТЕ САҚТАҢДАР:

Дисперсияның қасиеттері :

1) егер C — тұрақты, X — кездейсоқ шама болса, онда

$$D(C) = 0; \quad (7)$$

$$D(CX) = C^2D(X); \quad (8)$$

2)
$$D(X) = M(X^2) - M^2(X); \quad (9)$$

3) X және Y кездейсоқ шамалар болса,

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y). \quad (10)$$

(6) және (9) формулаларының өзара тең екенін математикалық күтімнің қасиеттерін қолданып дәлелдейік.

Дәлелдеуі . $M[X - M(X)]^2 = M\ [X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] = M(X^2) - 2M(X)\cdot M(M(X)) + M^2(X) = M(X^2) - 2M(X)\cdot M(X) + M^2(X) = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$. Демек, (9) формула *дисперсияны есептеу формуласы* болып табылады ■.

МЫСАЛ

4. 22-кестені қолданып X кездейсоқ шамасының дисперсиясын есептейік:

22-кесте

X	5	7	10	15
P	0,2	0,5	0,2	0,1

Шешуі. Алдымен математикалық күтімін табамыз.

$$M(X) = 5 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,2 + 15 \cdot 0,1 = 8.$$

$[X - M(X)]^2$ шамасының үлестірім заңын құрайық. Ол үшін x_1-ді есептеп көрсетейік: $[X - M(X)]^2 = (5 - 8)^2 = (-3)^2 = 9$. Тура осылай есептеп, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, $x_4 = 49$ аламыз (23-кесте).

23-кесте

$[X - M(X)]^2$	9	1	4	49
P	0,2	0,5	0,2	0,1

Демек, (6)-формуланы қолданып дисперсияны табамыз:

$D(X) = M\ [X - M(X)]^2 = 9 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2 + 49 \cdot 0,1 = 8.$

Жауабы : 8.

III. Орташа квадраттық ауытқу

Дисперсия ұғымы — квадрат өлшемді ұғым, оның өлшемі кездейсоқ шаманың квадратына тең.

*Дисперсиядан алынған квадрат түбір **орташа квадраттық ауытқу** деп аталады.*

Орташа квадраттық ауытқудың белгіленуі: $\sigma(X)$.

Орташа квадраттық ауытқуды есептеу формуласы:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(x)}. \qquad (11)$$

Орташа квадраттық ауытқудың өлшемі — сызықтық өлшем.

МЫСАЛ

5. Жоғарыдағы мысалдағы кездейсоқ шаманың орташа квадраттық ауытқуын есептейік.

Шешуі. Есептеу бойынша $D(X) = 8$. Енді (11)-формуланы қолданамыз: $\sigma(X)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Жауабы: $2\sqrt{2}$.

Енді кездейсоқ шаманың сандық сипаттамасын беретін математикалық күтім, дисперсия, орташа квадраттық ауытқуды есептеуге мысал қарастырайық.

МЫСАЛ

6. X және Y кездейсоқ шамаларының үлестірім заңдары 24-, 25-кестелерде берілген:

25-кесте

X	3	5	8	10	12
P	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

24-кесте

Y	2	5	8	12	14
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

1) $M(X)$, $M(Y)$; 2) $D(X)$, $D(Y)$; 3) $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$; 4) $D(3X-2Y)$ мәндерін есептейік.

Шешуі. 1) $M(X)=3\cdot0{,}1+5\cdot0{,}3+8\cdot0{,}3+10\cdot0{,}2+12\cdot0{,}1=7{,}4$;

$M(Y)=2\cdot0{,}1+5\cdot0{,}2+8\cdot0{,}3+12\cdot0{,}3+14\cdot0{,}1=8{,}6$.

2) Дисперсияларды анықтау үшін 26-, 27-кестелерді толтырамыз:

26-кесте

X^2	9	25	64	100	144
P	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

27-кесте

Y^2	4	25	64	144	196
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

$M(X^2)=9\cdot0{,}1+25\cdot0{,}3+64\cdot0{,}3+100\cdot0{,}2+144\cdot0{,}1=62$,

$M(Y^2)=4\cdot0{,}1+25\cdot0{,}2+64\cdot0{,}3+144\cdot0{,}3+196\cdot0{,}1=87{,}4$.

$D(X)=62-7{,}4^2=62-54{,}76=7{,}24$,

$D(Y)=87{,}4-8{,}6^2=87{,}4-73{,}96=13{,}44$.

3) $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{7{,}24}\approx2{,}7$, $\sigma(X)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{13{,}44}\approx3{,}7$;

4) $D(3X-2Y)=9D(X)+4D(Y)=9\cdot7{,}24+4\cdot13{,}44=65{,}16+53{,}76=118{,}92$.

Жауабы: 1) 7,4; 8,6; 2) 7,24; 13,44; 3) ≈2,7; ≈3,7; 4) 118,92.

1. Математикалық күтім арқылы кездейсоқ шаманың қандай қасиетін анықтайды?
2. Арифметикалық орта кездейсоқ шаманың қандай сандық сипаттамасына сәйкес келеді?
3. Орташа квадраттық ауытқу және дисперсия ұғымдарының геометриялық қасиеттерін қалай түсіндіруге болады?
4. $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$-ті табу үшін кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдарынан басқа қосымша мәліметтер қажет пе? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

24.1. X кездейсоқ шамасының үлестірім заңы 28-кестеде берілген:

28-кесте

X	2	4	7	9	12
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Математикалық күтімді есептеңдер.

24.2. Кездейсоқ шаманың берілген үлестірім заңы бойынша оның дисперсиясын табыңдар (29-кесте):

29-кесте

X	3	8	12	16	18
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

24.3. Кездейсоқ шаманың үлестірім заңы бойынша ауытқудың шамасын табыңдар (30-кесте):

30-кесте

X	2	5	7	10
P	0,2	0,4	0,2	0,2

24.4. Кестеде X кездейсоқ шамасының толық емес таралу заңдылығы берілген. Үлестірім заңы бойынша дисперсия мен орташа квадраттық ауытқуды табыңдар (31-кесте):

31-кесте

X	3	21	30	50
P	0,25	?	0,25	0,25

24.5. Кездейсоқ шама X-тің таралу заңдылығын пайдаланып $M(X)$ мәнін есептеңдер (32-, 33-кестелер):

1) *32-кесте*

X	1	2	3
P	0,7	0,1	0,2

2) *33-кесте*

Y	–1	1	2
P	0,4	0,1	0,5

24.6. Кездейсоқ шама Y-тің таралу заңдылығын пайдаланып дисперсияны табыңдар (34-, 35-кестелер):

34- кесте

1)

Y	–2	–1	1	2	3
P	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

35- кесте

2)

Y	–2	–1	1	2
P	0,1	0,2	0,5	0,2

24.7. 24.5- және 24.6-жаттығуларда берілген таралу заңдылығын пайдаланып орташа квадраттық ауытқуды есептеңдер.

B

24.8. Белгісіз ықтималдықтардың үлестері бірдей болған жағдайда X кездейсоқ шамасының толық емес үлестірім заңы кестесін толтырыңдар. 36-кестені қолданып $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ есептеңдер.

36- кесте

X	3	7	12	15	18	21
P	0,1	0,1	?	?	0,1	0,1

24.9. X және Y кездейсоқ шамаларының үлестірім заңы арқылы $M(X + Y)$, $D(X + Y)$ мәндерін табыңдар (37-, 38-кестелер):

37- кесте

X	6	10	14	20
P	$\frac{1}{4}$	0,2	0,3	$\frac{1}{4}$

38- кесте

Y	3	8	11	16
P	0,2	0,3	0,3	0,2

24.10. 24.9-жаттығудағы 37, 38-кестелерді қолданып $\sigma(X + Y)$, $\sigma(X + 2Y)$ мәндерін есептеңдер.

24.11. Кестеде берілген X және Y кездейсоқ шамаларының толық емес заңдылықтары бойынша $M(X)$, $M(Y)$, $M(X - M(X))$, $M(Y - M(Y))$, $D(X)$, $D(Y)$ шамаларын табыңдар (39-, 40-кестелер):

39- кесте

X	3	21	30
P	0,25	?	0,45

40- кесте

Y	24	26	28
P	0,25	0,25	?

Сәйкес шамаларды салыстырып, қай шамалардың жақын орналасқанын көрсетіңдер.

24.12. Екі мергеннің нысананы бір рет атқанда оқтың нысанаға дәл тиюінің үлестірім заңдары берілген (41-, 42-кестелер):

41- кесте

X	8	8	10
P	0,4	0,1	0,5

42- кесте

Y	8	9	10
P	0,2	0,5	0,3

Екі мергеннің қайсысы нысанаға дәлірек тигізген?

24.13. Кездейсоқ шама X-тің үлестірім заңы бойынша $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $M(2X+5)$, $D(2X+5)$ шамаларын есептеңдер (43-кесте):

43-кесте

X	2	3	4	5
P	0,3	0,1	0,5	0,1

24.14. $X(-1;\ 0;\ 1)$ және $M(X) = 0,1$; $M(X^2) = 0,9$ берілген. Кездейсоқ шаманың мәндеріне сәйкес ықтималдықтарды табыңдар және кездейсоқ шаманың үлестірім заңын жазыңдар.

24.15. X және Y бір-біріне тәуелсіз кездейсоқ шамалар және $D(X) = 2$, $D(Y) = 5$. $D(3X+Y)$ және $D(3Y-2X)$ мәндерін табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Төртеуі жарамды, біреуі жарамсыз тетіктер бар. Осы тетіктерден кездейсоқ заңдылықпен екі тетік алынған. Алынған тетіктердің екеуінің де жарамды тетік болу ықтималдығын табыңдар:

A) 0,4; B) 0,6; C) 0,5; D) 0,7.

2. 44-кестеде X кездейсоқ шамасының толық емес үлестірім заңы берілге н:

44-кесте

X	5	8	12	15	18
P	0,2	?	?	?	0,2

Белгісіз ықтималдықтардың үлестері 1 : 2 : 1 пропорциясымен берілген деп алып, үлестірім заңының кестесін толтырыңдар (45—48-кестелер):

A) *45-кесте*

X	5	8	12	15	18
P	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2

B) *46-кесте*

X	5	8	12	15	8
P	0,2	0,2	0,5	0,2	0,2

C) *47-кесте*

X	5	8	12	15	18
P	0,2	0,15	0,3	0,15	0,2

D) *48-кесте*

X	5	8	12	15	8
P	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

3. 49-кестеде X кездейсоқ шамасының толық емес үлестірім заңы берілген:

49-кесте

X	5	?	?	?	17
P	0,05	?	?	?	0,05

Белгісіз ықтималдықтардың үлестері бірдей, ал оларға сәйкес келетін мәндері берілген мәндермен бірге өспелі арифметикалық прогрессия құрайды деп алып, кездейсоқ шаманың үлестірім заңының кестесін толты рыңдар (50—53-кестелер):

A) 50-*кесте*

X	5	8	11	14	17
P	0,05	0,3	0,3	0,3	0,05

B) 51-*кесте*

X	5	8	12	15	17
P	0,02	0,3	0,3	0,3	0,8

C) 52-*кесте*

X	5	8	11	14	17
P	0,05	0,2	0,3	0,4	0,05

D) 53-*кесте*

X	5	8	12	15	18
P	0,05	0,3	0,3	0,3	0,5

4. X кездейсоқ шамасы 54-кестедегі үлестірім заңымен берілген:

54-*кесте*

X	1	3	5	8	12
P	0,125	0,25	0,25	0,25	0,125

$M(X)$; $M\,[X - M(X)]$; $M(5X)$ мәндерін табыңдар:

A) 5,625; 0; 28,25;
B) 28,125; 5,65; 0;
C) 5,625; 0; 28,125;
D) 5,65; 0; 28,25.

5. X кездейсоқ шамасы 55-кестедегідей үлестірім заңымен берілген:

55-*кесте*

X	3	7	11	16	18
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Осы таралу заңдылығын қолданып дисперсия мен орташа квадраттық ауытқуды есептеңдер:

A) $D(X) = 20{,}25$, $\sigma(X) = 4{,}5$; B) $D(X) = 4{,}4$, $\sigma(X) = 19{,}49$;
C) $D(X) = 12{,}25$, $\sigma(X) = 3{,}5$; D) $D(X) = 19{,}49$, $\sigma(X) \approx 4{,}4$.

6. X кездейсоқ шамасының үлестірім заңы мына 56-кестеде көрсетілген:

56-*кесте*

X	3	4	7	9	18
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ мәндерін табыңдар:

A) $M(X) = 6{,}7$, $D(X) = 6{,}61$, $\sigma(X) \approx 2{,}57$;
B) $M(X) = 6$, $D(X) = 5$, $\sigma(X) \approx \sqrt{5}$;
C) $M(X) = 6{,}61$, $D(X) = 6{,}7$, $\sigma(X) = 2{,}57$;
D) $M(X) = 6$, $D(X) = 4$, $\sigma(X) = 2$.

7. X және Y кездейсоқ шамаларының үлестірім заңы 57-, 58-кестелерде берілген:

57-*кесте*

X	1	3	5	7	9
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

58-*кесте*

Y	3	5	8	12	15
P	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

Көрсетілген сандық сипаттамаларды табыңдар: 1) $M(3X - 4Y)$; 2) $D(2X + 3Y)$.

A) 7,5; 60,59; B) 2,3; 60,59;
C) 7,5; 139,33; D) 2,3; 139,33.

8. Бірінші мергеннің бір рет атқанда нысанаға тигізу ықтималдығы 0,9. Екінші мергеннің дәл осындай жағдайдағы ықтималдығы 0,95. X кездейсоқ шамасы — нысанаға дәл тигізу саны. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім заңын табыңдар (59—62-кестелер):

59-кесте

A)

X	0	1	2
P	0,14	0,855	0,005

60-кесте

B)

X	0	1	2
P	0,14	0,005	0,855

61-кесте

C)

X	0	1	2
P	0,855	0,14	0,005

62-кесте

D)

X	0	1	2
P	0,005	0,14	0,855

9. Емтихан билеттері үш сұрақтан тұрады. Оқушының кез келген сұраққа жауап беру ықтималдығы 0,8. Кездейсоқ шама X — оқушы жауап бере алатын сұрақтар саны. Кездейсоқ шаманың үлестірім заңын анықтаңдар (63—66-кестелер):

63-кесте

A)

X	0	1	2	3
P	0,008	0,096	0,384	0,512

64-кесте

B)

X	0	1	2	3
P	0,512	0,096	0,384	0,008

65-кесте

C)

X	0	1	2	3
P	0,096	0,384	0,008	0,512

66-кесте

D)

X	0	1	2	3
P	0,384	0,008	0,512	0,096

Математикалық сауаттылық бойынша тапсырмалар

10. Сатып алушыда 20 000 тг бар. Сатылым акциясына дейін осы ақшаға ол бірдей тауар алды. Ал жеңілдік кезінде төрт бірдей тауар алды. Акция кезінде тауардың бағасы қанша пайызға төмендеген:

A) 20%; B) 30%; C) 25%; D) 50%; E) 75%?

11. (111; 123] аралығына тиісті 3-ке еселік болатын қанша натурал сан бар:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

12. 9; 1; 0; 8 цифрларынан құрастырылған ең үлкен төрттаңбалы сан мен ең кіші төрттаңбалы санның айырымынан 1279-ға артық санды табыңдар:

A) 9000; B) 9090; C) 10 000; D) 9990; E) 9900.

13. Жөндеу жұмыстарын жасау үшін тұсқағаз алу керек. Үш дүкенде тұсқағаздың бағасы әртүрлі, бірақ әрқайсысында жеңілдіктер бар (67-кесте).

67-кесте

	Тауардың бағасы (бір орам)	Жеңілдік (%)
Бірінші дүкен	8600 тг	10%
Екінші дүкен	7000 тг	5%
Үшінші дүкен	8000 тг	15%

Ақиқат тұжырымды көрсетіңдер:

A) үшінші дүкендегі бір орамның бағасы басқа дүкендердегі бір орамның бағасынан артық;

B) үшінші дүкендегі бір орамның бағасы басқа дүкендердегі бір орамның бағасынан кем;

C) жеңілдікті ескеріп тұсқағазды бірінші дүкеннен алған тиімді;

D) екінші дүкендегі екі орамның құны үшінші дүкендегі екі орамның құнынан артық;

E) екінші дүкендегі екі орамның құны қалған екі дүкендегі бір орамның бағаларының қосындысынан кем.

10-СЫНЫПТАҒЫ АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

I. Есептеулер

1. Берілген нүктелердегі $y = f(x)$ функциясының мәнін табыңдар:

а) $f(x) = 0{,}5x - 4{,}9$, $x = 0;\ 2;\ 9;$

ә) $f(x) = x - x^2$, $x = \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 7;$

б) $f(x) = x^2 + 2$, $x = 1;\ -1;\ -3;$

в) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 5}$, $x = -4;\ -6;\ 0.$

2. а) $f(x) = \sin 3x - x$; ә) $f(x) = 5\operatorname{tg} x - 5\sqrt{3}$;

б) $f(x) = \cos 2x - \sin x$; в) $f(x) = \frac{x}{\cos x}$ функциялары берілген. $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f(-\pi)$ мәндерін табыңдар.

3. Өрнектің мәнін табыңдар:

а) $\arccos(-1) - 5\operatorname{arctg}1 - \arcsin(-1)$;

ә) $\arcsin 1 + 6\operatorname{arctg}1 - \arccos(-\frac{1}{2})$;

б) $\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arcctg}(-1) - 6\arccos 0$;

в) $\operatorname{arcctg}1 \cdot \arccos 1 + \operatorname{arcctg}\sqrt{3} \cdot \arcsin 0$;

г) $\frac{6}{\pi}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(\sqrt{3})\right)$;

ғ) $-\frac{6}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.

4. $x \to x_0$ жағдайда $y = f(x)$ функциясының шегін табыңдар:

а) $f(x) = x^2 - 1$, $x \to 1$; ә) $f(x) = \sin^2 x$, $x \to \frac{3\pi}{2}$;

б) $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 6}$, $x \to 6$; в) $f(x) = \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 49}$, $x \to 7$.

5. Функцияның өсімшесінің жуық мәнін есептеңдер:

а) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 80$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}001$;

ә) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7}$, $x_0 = 3$ және $\Delta x = 0{,}1$.

6. Шаршының қабырғасының ұзындығы 5 см. Қабырғасының ұзындығын 0,01 см-ге ұзартқан кездегі аудан өсімшесінің жуық мәнін табыңдар.

7. Функцияның туындысын табыңдар:

а) $f(x) = x^2 + 0{,}5x$; ә) $f(x) = -3x^3 + 10x^2$;

б) $f(x) = x + 10\sqrt{x}$; в) $f(x) = \sin x - \cos x + 5$;

г) $f(x) = \frac{x^3}{x^3 + 1}$; ғ) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$.

8. Берілген нүктедегі $y = f(x)$ функциясының туындысының мәнін табыңдар:

а) $f(x) = x^2 - 6x$; $x = 0$; ә) $f(x) = x \cdot \operatorname{tg} x$; $x = \pi$;

б) $f(x) = \frac{x}{x+1}$; $x = 2$; в) $f(x) = \frac{x-1}{x}$; $x = -2$.

9. Функцияның туындысын табыңдар:

а) $f(x) = \frac{1}{7}x^7 + \cos x$; ә) $f(x) = \frac{1}{12}x^6 - \sin x$; б) $f(x) = x^6 \cdot (x^4 - 1)$;

в) $f(x) = x^{11} \cdot (x^7 + 2)$; г) $f(x) = \frac{2}{x^8} - x^8$; ғ) $f(x) = \frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^5}$.

10. Дене $s(t) = 3t^2 + 5$ заңы бойынша қозғалады. $t = 2$ с уақыт мезетіндегі дененің жылдамдығын есептеңдер.

11. Қозғалыс $s(t) = 4t^2 - 3$ заңымен берілген. $t = 5$ с мезетіндегі дененің жылдамдығын табыңдар.

12. $s(t) = t^2 - 4t + 5$ заңы бойынша қозғалатын нүктенің жылдамдығы қай уақытта нөлге тең болады?

13. а) $s(t) = t^3 - 6t + 8$, $t = 3$; ә) $s(t) = t^3 - 2t^2 + 1$ заңы бойынша қозғалатын дененің $t = 2$ с мезетіндегі жылдамдығы мен үдеуін табыңдар.

14. Күрделі функцияның туындысын табыңдар:

а) $f(x) = (x^3 - 6)^{110}$; ә) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$;

б) $f(x) = \sin^5(6x - 1)$; в) $f(x) = 2\cos^4\left(\frac{\pi}{3} - x^4\right)$.

15. Егер:

а) $f(x) = (x^6 + x)^3 - 15$, $x_0 = 1$; ә) $f(x) = \operatorname{tg}^4\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x_0 = 0$;

б) $f(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; в) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x^3$, $x_0 = 0$

болса, онда $f'(x_0)$ мәнін есептеңдер.

16. Дәреженің жуық мәнін есептеңдер:

а) $(1{,}012)^3$; ә) $(1{,}005)^{10}$; б) $(0{,}975)^4$; в) $(3{,}027)^4$.

17. Түбірдің жуық мәнін есептеңдер:

а) $\sqrt{1{,}006}$; ә) $\sqrt{24{,}84}$; б) $\sqrt{99{,}5}$; в) $\sqrt{1{,}3}$.

18. Берілген аралықтағы функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

а) $f(x) = x - x^2$, $[1;\ 2]$; ә) $f(x) = x^2 + x + 1$, $[0;\ 1]$;

б) $f(x) = x^3 - 3x + 7$, $[-3;\ 1]$; в) $f(x) = 3x^3 - x + 1$, $[-2;\ 3]$.

19. Қоршауының ұзындығы 50 м-ге тең тіктөртбұрышты жер телімінің ең үлкен ауданын табыңдар.

20. Ауданы 400 $м^2$ тіктөртбұрышты жер телімі қоршауының ең кіші ұзындығын анықтаңдар.

21. Кубтарының қосындысы ең кіші болу үшін 5 санын қандай екі қосылғышқа жіктеу керек?

22. Тікбұрышты үшбұрыштың табаны мен биіктігінің ұзындықтарының қосындысы 12 см. Үшбұрыштың ауданы ең үлкен болу үшін оның табанының ұзындығы қандай болуы керек?

II. Теңдеулер және теңдеулер жүйесі

Тригонометриялық теңдеулерді шешіңдер **(23—27):**

23. а) $\cos 5x \cdot \operatorname{tg} x = 0$; ә) $\sin 3x \cdot \operatorname{tg} x = 0$;
б) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3} = 0$; в) $3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sqrt{3} = 0$.

24. а) $\cos 5x = \cos 3x$; ә) $\sin 5x = \sin 3x$;
б) $\sin 6x + \sin 2x = \sin 4x$; в) $\cos 2x - \sin 4x = 0$.

25. а) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$; ә) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$;
б) $3\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$; в) $4\operatorname{ctg}^2 x - 6\operatorname{ctg} x + 2 = 0$.

26. а) $\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x = 0$; ә) $2 - \sin x = 2\cos^2 x$;
б) $\sin 2x = 2\sqrt{3}\sin^2 x$; в) $\cos^2 x + 3\sin^2 x - 3 = 0$.

27. а) $3\sin^2 x + \cos^2 x = 2\sin 2x$; ә) $\sqrt{3}\sin 2x - 6\cos^2 x = -3$;
б) $\sin^2 x + \frac{3}{2}\cos^2 x = \frac{5}{2}\sin x \cdot \cos x$;
в) $6\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 5\cos^2 x = 2$.

$f'(x) = 0$ теңдеулерін шешіңдер **(28—31):**

28. а) $f(x) = x^2 + 2x$; ә) $f(x) = x - x^2$;
б) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2{,}5x^2 + 6x$; в) $f(x) = 3x^3 - 15x^2 + 25x$.

29. а) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^3 + 20x$; ә) $f(x) = \frac{5}{2}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 3x$;
б) $f(x) = x^7 - 7x$; в) $f(x) = 0{,}25x^8 + 2x$.

30. а) $f(x) = \sin x + x$; ә) $f(x) = x - \cos x$.

31. а) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$; ә) $f(x) = x + \operatorname{ctg} x$.

III. Теңсіздіктер

Теңсіздікті шешіңдер **(32—36):**

32. а) $\sin 2x \;\mathrm{l}\; -\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \;\mathrm{m}\; \frac{\sqrt{2}}{2}$;
б) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 1$; в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) < 1$.

33. а) $\sin x\cos 2x + \cos x \sin 2x > \frac{1}{2}$;
ә) $\cos 6x\cos x - \sin 6x \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

34. а) $\frac{2\operatorname{tg}2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} \;\mathrm{m}\; \sqrt{3}$; ә) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 3x}{2\operatorname{tg}3x} > -\sqrt{3}$.

35. а) $\cos^2 x + \frac{1}{2} > \sin^2 x$; ә) $4\sin 2x\cos 2x - \sqrt{2} \;\mathrm{m}\; 0$.

36. а) $\frac{1}{\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \;\mathrm{l}\; \frac{\sqrt{3}}{3}$; ә) $\frac{1}{\operatorname{tg}x - \frac{\pi}{3}} \;\mathrm{m}\; -1$.

Теңсіздікт ер жүйесін шешіңдер **(37-38):**

37. а) $\begin{cases}\sin x \geqslant 0,\\ \cos x \leqslant 0;\end{cases}$ ә) $\begin{cases}2\sin x \leqslant 0,\\ 3\cos x > 0.\end{cases}$

38. а) $\begin{cases}\operatorname{tg} x < 0,\\ \operatorname{ctg} x < 0;\end{cases}$ ә) $\begin{cases}\operatorname{tg} x > 0,\\ \sin x \geqslant 0.\end{cases}$

39. $f'(x) < g'(x)$ теңсіздігін шешіңдер:

а) $f(x) = -x^2 + x$, $g(x) = x - 10$; ә) $f(x) = x^3 - x^2$, $g(x) = 3x - x^2$;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -x$; в) $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$, $g(x) = 6x + \frac{2}{x}$.

40. $f'(x)$ ǀ 0 тең сіздігін шешіңдер:

а) $f(x) = x^2 - 1$; ә) $f(x) = x + 2x^2$; б) $f(x) = 3x + x^3$; в) $f(x) = 6 + x^3$.

41. $f'(x)$ m 0 теңсіздігін шешіңдер:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$; ә) $f(x) = x^3 - 5{,}5x^2 - 20x$;

б) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 15$; в) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 20$.

42. $f'(x) > 0$ теңсіздігін шешіңдер:

а) $f(x) = -\cos(2\ x - 1) - \ x$; ә) $f(x) = -\sin(\ x + 1) + 0{,}5x$;

б) $f(x) = 2\sin\ x - \sqrt{3}x$; в) $f(x) = \frac{1}{4}\cos 8x + \sqrt{2}x$.

IV. Функция

43. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

а) $y = \sqrt{4 - x}$; ә) $y = \sin x + \sqrt{x}$; б) $y = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$; в) $y = \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 6}$.

44. Функ цияның мәндер жиынын табыңдар:

а) $y = x^2 + 2x - 10$; ә) $y = \frac{1}{x - 40}$; б) $y = 8\cos x$; в) $y = 3 + 2\sin x$.

45. $y = x^2$ функциясының $[0;\ 3]$ кесіндісіндегі графигі берілген. Егер функция: а) жұп; ә) тақ; б) тақ та, жұп та емес болса, онда графикті жалғастырып салыңдар.

46. Функцияның жұп немесе тақ екенін анықтаңдар:

а) $f(x) = x^5 - x^{21}$; ә) $f(x) = \sin x - \sin 3x$;

б) $f(x) = x^2 + \cos^3 x$; в) $f(x) = \sin^4 x - x$;

г) $f(x) = \frac{x}{\cos x} + \operatorname{tg} x$; ғ) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + \frac{x^3}{\sin x}$.

47. Периоды 3-ке тең болатын $y = f(x)$ пери одт ы функциясының $[0;\ 3]$ аралығындағы графигінің бөлігін салып, оны $[-3;\ 9]$ аралығына жалғастырыңдар.

48. Функцияның периодын табыңдар:

а) $y = 3\cos 3x$; ә) $y = 2\sin\frac{1}{x}$; б) $y = -4\operatorname{tg}(\ x + 2)$; в) $y = \operatorname{ctg}(3\ - 2x)$.

49. Сан түзуінде үзіліссіз және:

а) $(-\infty;\ -1] \cup [3;\ +\infty)$ аралықтарында өспелі, $[-1;\ 3]$ аралығында кемімелі және $f(-1) = 4$, $f(3) = -2$;

ә) $(-\infty;\ 2] \cup [4;\ +\infty)$ аралықтарында кемімелі, $[2;\ 4]$ аралығында өспелі және $f(2) = -1$, $f(4) = 3$;
б) $(-\infty;\ -5] \cup [3;\ 6]$ аралықтарында өспелі, $[-5;\ 3] \cup [6;\ +\infty)$ аралығында кемімелі және $f(-5) = 0$, $f(3) = -3$, $f(6) = 2$;
в) $(-\infty;\ -4] \cup [0;\ 2]$ аралықтарында кемімелі, $[-4;\ 0] \cup [2;\ +\infty)$ аралығында өспелі және $f(-4) = -2$, $f(0) = 2$, $f(2) = -5$ болатын $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар.

50. Қарапайым түрлендіруді қолданып функцияның графигін салыңдар:

а) $y = x^2 - 2x + 5$;
ә) $y = x^2 + 4$;
б) $y = 2 - \frac{1}{x}$;
в) $y = 1 + \frac{2}{x-3}$;
г) $y = 2\sin x$;
ғ) $y = 2 + \cos x$;
д) $y = 1 + 3\sin 2x$;
е) $y = 3\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$;
ж) $y = \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$;
з) $y = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - 1$.

51. Көрсетілген аралықта берілген функция үшін кері функцияны жазып, оның анықталу облысын табыңдар:

а) $f(x) = 2x + 3$, $x \in R$;
ә) $f(x) = (x - 1)^2$, $x \in [0;\ +\infty)$;
б) $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [0;\ +\infty)$.

52. Функцияның үзіліс нүктелерін табыңдар:

а) $f(x) = \frac{1}{x+1}$;
ә) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$;
б) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$;
в) $f(x) = \frac{x-3}{x(x+1)(x^2-25)}$;
г) $f(x) = \frac{x-1}{\cos x}$;
ғ) $f(x) = \frac{3}{\sin x}$.

53. $g(x) = x^3 + 1$; $\varphi(x) = \sqrt{x}$; $u(x) = \frac{2}{x}$. Күрделі функцияларды құрастырыңдар.

54. Абсциссасы x_0 болатын нүктеде $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

а) $y = x^2 - 3x + 4$, $x_0 = 1$;
ә) $y = 4 - x^2$, $x_0 = -1$;
б) $y = x^3 + 2x - 1$, $x_0 = 0$;
в) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$, $x_0 = 3$.

55. $y = x^2 - 3x + 5$ функциясы графигінің $M(2;\ 3)$ нүктесінен өтетін жанама абсцисса осімен қандай бұрыш жасайды? Осы жанаманың теңдеуін жазыңдар.

56. $y(x) = x^2 - 2x + 3$ параболасының абсциссасы $x_0 = 2$ болатын нүктеде жүргізілген жанама абсцисса осімен қандай бұрыш жасайды?

57. Абсциссасы x_0 болатын нүктеде $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

а) $y = \mathrm{ctg}\, x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;
ә) $y = \mathrm{tg}\, x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

58. Функцияның өсу және кему аралықтарын табыңдар:

а) $y = 2x - x^2$; ә) $y = x^2 + 7$;

б) $y = x^3 - 3x + 10$; в) $y = \frac{1}{3}x^3 - 9x - 11$;

г) $y = \frac{x}{x+1}$; ғ) $y = \frac{x+1}{x}$;

д) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$; е) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + 2$.

59. Функцияны экстремумға зерттеңдер:

а) $y = 8 - x^2$; ә) $y = x^3 + 6x$;

б) $y = x^4 - 2x^2 + 1$; в) $y = 4x - x^4$;

г) $y = x^3 + x^2 - 8x + 1$; ғ) $y = \frac{4}{3}x^3 + 24x - 3$;

д) $y = \frac{3x}{x^2+1}$; е) $y = 3x - \frac{27}{2-x^2}$.

60. Функцияны туындының көмегіме н зерттеп, графигін салыңдар:

а) $y = x^2 - 10x + 9$; ә) $y = x^3 + 9x$; б) $y = -x^2 + 4x$;

в) $y = 6x^2 - x^3$; г) $y = \frac{x}{x+1}$; ғ) $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Математикалық сауаттылық бойынша тапсырмалар

61. x пен y әртүрлі екі сан және әрқайсысы z санына бөлінеді. Ақиқат тұжырымды көрсетіңдер:

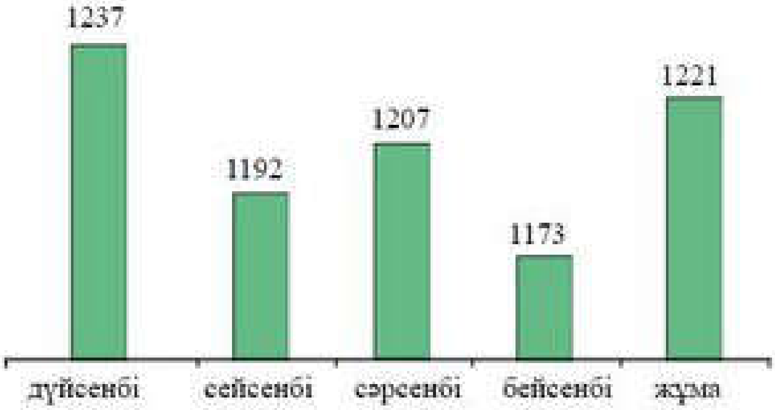
A) $\frac{x-y}{5x}$ өрнегі z санына бөлінеді; B) $\frac{6y}{x+y}$ өрнегі z санына бөлінеді;

C) $-4x + 3$ өрнегі z санына бөлінеді;

D) $-4x + 3x$ өрнегі z санына бөлінеді;

E) $\frac{x^3}{y^3}$ өрнегі z санына бөлінеді;

62. Диаграмманы қолданып кәсіпорынның бес күнде дайындаған тауарларының арифметикалық ортасы мен ауытқуын табыңдар (65-сурет):



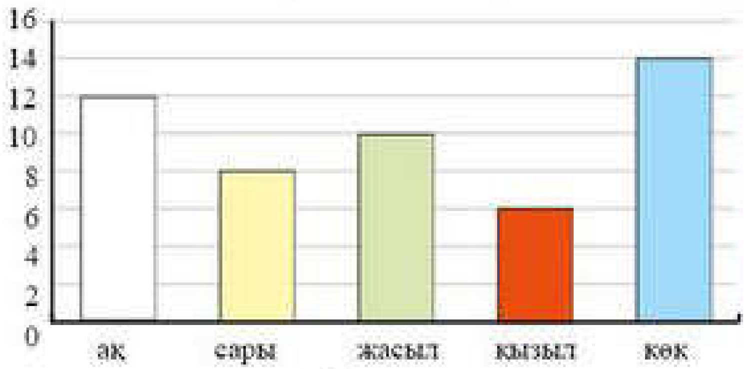
65-сурет

A) арифметикалық орта — 1208, ауытқу — 64;

B) арифметикалық орта — 1206, ауытқу — 66;

C) арифметикалық орта — 1206, ауытқу — 64;
D) арифметикалық орта — 1208, ауытқу — 70;
E) арифметикалық орта — 1208, ауытқу — 66.

63. Жәшіктегі шар саны диаграммада берілген (66-сурет).



66-сурет

Жәшіктен кездейсоқ алынған шардың жасыл болмауының ықтималдығын табыңдар:

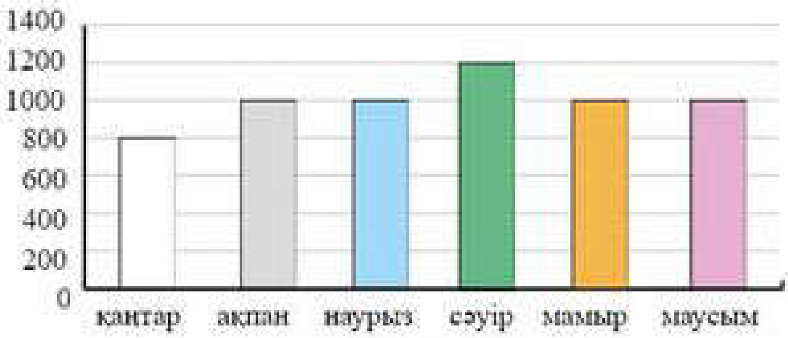
A) $\frac{6}{25}$; B) $\frac{7}{25}$; C) 0,8;
D) $\frac{3}{25}$; E) 0,5.

64. Мерекеге төрт түрлі гүлден 300 дана сатып алынды. Диаграммада гүлдердің атаулары және кейбіреулерінің саны пайызбен берілген (67-сурет). Қанша раушангүл сатып алынған:

67-сурет

A) 100; B) 120; C) 90; D) 75; E) 80?

65. Диаграммада алты айда дайындалған тетіктер саны көрсетілген (68-сурет):



68-сурет

A – I тоқсанда дайындалған тетіктер саны, B – II тоқсанда дайындалған тетіктер саны. Ақиқат тұжырымды көрсетіңдер:

A) $A > B$; B) $A < B$; C) $A - B > 200$;
D) $A + B < -200$; E) $A - B = 0$.

ГЛОССАРИЙ

a санының арккосинусы	a ($\lvert a\rvert \leq 1$) *санының арккосинусы* деп косинусы a-ға тең $[0; \pi]$ аралығындағы санды айтады
a санының арккотангенсі	a *санының арккотангенсі* деп котангенсі a-ға тең $(0; \pi)$ интервалындағы санды айтады
a санының арксинусы	a ($\lvert a\rvert \leq 1$) *санының арксинусы* деп синусы a-ға тең $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ аралығындағы санды айтады
a санының арктангенсі	a *санының арктангенсі* деп тангенсі a-ға тең $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ интервалындағы санды айта ды
Аргументінің өсімшесі	$x_2 - x_1$ айырымын *аргументтің* x_1 *нүктесіндегі өсімшесі* деп атайды
Арккосинус	$y = \cos x$ функциясына кері функция *арккосинус* деп аталады және $y = \arccos x$ деп белгіленеді
Арксинус	$y = \sin x$ функциясына кері функция *арксинус* деп аталады және $y = \arcsin x$ деп белгіленеді
Арккотангенс	$y = \mathrm{ctg}\, x$ функциясына кері функция *арккотангенс* деп аталады және $y = \mathrm{arcctg}\, x$ деп белгіленеді
Арктангенс	$y = \mathrm{tg}\, x$ функциясына кері функция *арктангенс* деп аталады және $y = \mathrm{arctg}\, x$ деп белгіленеді
Ақиқат оқиға	Тәжірибе нәтижесінде міндетті түрде орындалатын оқиға *ақиқат оқиға* деп аталады
Аркфункциялар	Тригонометриялық функцияларға кері функциялар *кері тригонометриялық функциялар* немесе *аркфункциялар* деп аталады
Біртекті тригонометриялық теңдеу	*Біртекті тригонометриялық теңдеулер* деп әрбір қосылғыштың дәреже көрсеткіштері өзара тең болатын теңдеулерді айтады
Дискретті (үзілісті) кездейсоқ шама	Бір-бірінен оқшау, бөлек мән қабылдайтын кездейсоқ шама *дискретті (үзілісті) кездейсоқ шама* деп аталады
Дисперсия	Ауытқудың екінші дәрежесінің математикалық күтімі X кездейсоқ шамасының *дисперсиясы* деп аталады және $D(X) = ((X - M(X))^2)$ формуласымен есептеледі
Дифференциалдау	Функцияның туындысын табу амалын *дифференциалдау* деп атайды
Дифференциалданатын функция	x нүктесінде функцияның туындысы бар болса, онда $f(x)$ функциясын осы нүктеде *дифференциалданатын функция* деп атайды. Егер функция аралықтың барлық нүктелерінде дифференциалданатын болса, онда осы аралықта *дифференциалданатын функция* деп атайды
Қарапайым тригонометриялық теңдеулер	$\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\, x = a$, $\mathrm{ctg}\, x = a$ (мұндағы a — кез келген нақты сан) түрінде берілген тригонометриялық теңдеулерді *қарапайым тригонометриялық теңдеулер* деп атайды

Жалғасы

Кездейсоқ оқиға	Тәжірибе нәтижесінде орындалатын немесе орындалмайтын оқиға *кездейсоқ оқиға* деп аталады
Кездейсоқ шаманың ауытқуы	Кездейсоқ шама мен оның математикалық күтімінің айырмасы, яғни $X - M(X)$ шамасы *кездейсоқ шаманың ауытқуы* деп аталады
Кездейсоқ шаманың үлестірімі	Кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері мен олардың ықтималдықтарын тізіп жазу *кездейсоқ шаманың үлестірімі* деп аталады
Кері функция	Егер $y = f(x)$ функциясы X анықталу облысында бірсарынды өспелі (немесе кемімелі) функция болса, онда осы функцияның Y мәндер жиынында анықталған бірсарынды өспелі (бірсарынды кемімелі) функция оның *кері функциясы* болады
Күрделі функция	$y = f(u)$ функциясы берілсін. Анықталу облысы X, функция мәндерінің жиыны Y болсын. Айнымалы u өз кезегінде айнымалы x-ке тәуелді функция болса, яғни $u = g(x)$, $x \in X$ онда $y = f(g(x))$ функциясы X жиынында анықталған *күрделі функция* деп аталады
Максимум нүктесі	a нүктесінің қандай да бір аймағында әрбір x $(x \neq a)$ үшін $f(x) < f(a)$ теңсіздігі орындалған жағдайда ғана a нүктесі $y = f(x)$ функциясының *максимум нүктесі* деп аталады
Математикалық күтім	X кездейсоқ шамасы мәндерінің сәйкес ықтималдық мәндеріне көбейтінділерінің қосындысын X кездейсоқ шамасының *математикалық күтімі* деп атайды, яғни $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$ саны дискретті кездейсоқ шамасының *математикалық күтімі* деп аталады
Минимум нүктесі	a нүктесінің қандай да бір аймағында әрбір x $(x \neq a)$ үшін $f(x) > f(a)$ теңсіздігі орындалған жағдайда ғана a нүктесі $y = f(x)$ функциясының *минимум нүктесі* деп аталады
Мүмкін емес оқиға	Тәжірибе нәтижесінде орындалмайтын оқиға *мүмкін емес оқиға* деп аталады
Оқиғалардың көбейтіндісі	*A және B оқиғасының көбейтіндісі* деп осы екі оқиғаның қатар орындалуынан тұратын AB оқиғасын айтады
Оқиғалардың қосындысы	*A және B оқиғаларының $A + B$ қосындысы* деп A оқиғасының немесе B оқиғасының немесе екеуінің орындалуынан тұратын оқиғаны айтады
Орташа квадраттық ауытқу	Дисперсиядан алынған квадрат түбір *орташа квадраттық ауытқу* деп аталады
Нүктеде үзіліссіз функция	Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталған және функцияның шектік мәні x_0 нүктесіндегі мәніне тең болса, онда функция *x_0 нүктесінде үзіліссіз функция* деп аталады
Нүктенің аймағы	Нүкте тиісті болатын кез келген интервал *нүктенің аймағы* деп аталады

Жалғасы

Синусоида	$y = \sin x$ және $y = \cos x$ функцияларының графигі *синусоида* деп аталады
Сындық нүкте	Функцияның туындысы нөлге тең немесе туындысы болмайтын анықталу облысының ішкі нүктелері *сындық нүктелер* деп аталады
Тангенсоида	$y = \operatorname{tg} x$ функциясының графигі *тангенсоида* деп аталады
Тригонометриялық теңдеу	Айнымалысы тригонометриялық функцияның аргументі ретінде (немесе аргументінің құрамында) берілген теңдеуді *тригонометриялық теңдеу* деп атайды
Тригонометриялық теңдеуді шешу	Берілген теңдеуді дұрыс тепе-теңдікке айналдыратын аргументтің мәндерін табу *тригонометриялық теңдеуді шешу* деп аталады
Тригонометриялық теңсіздік	Белгісізі (айнымалысы) тригонометриялық функцияның аргументі түрінде берілген теңсіздікті *тригонометриялық теңсіздік* деп атайды
Туындының геометриялық мағынасы	Туындының геометриялық мағынасы — функцияның графигіне жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті
Туындының физикалық мағынасы	$y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі $f'(x)$ туындысы оның x нүктесіндегі өзгеру жылдамдығын анықтайды. Бұл — туындының физикалық мағынасы
Үзіліс нүктесі	Егер осы шарттардың біреуі орындалмаса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзілісті болады. Бұл жағдайда x_0 нүктесі функцияның *үзіліс нүктесі* деп аталады
Үзіліссіз кездейсоқ шама	Мәндері үзіліссіз белгілі бір $[a; b]$ кесіндісінде (мұндағы $a < b$, a және b — тиянақты нақты сандар) орналасқан кездейсоқ шаманы үзіліссіз *кездейсоқ шама* деп атайды
Үзіліссіз функция	Егер $f(x)$ функциясы X жиынының кез келген нүктесінде үзіліссіз болса, онда оны осы X жиында (кесіндіде) *үзіліссіз функция* деп атайды
Шартты ықтималдық	A оқиғасы орындалғаннан кейін анықталған B оқиғасының ықтималдығын $P_A(B)$ *шартты ықтималдық* деп атайды
Функция максимумы	Функцияның максимум нүктесіндегі мәні функцияның максимумы деп аталады
Функция минимумы	Функцияның минимум нүктесіндегі мәні функцияның минимумы деп аталады
Функцияның өсімшесі	Аргумент x-ке Δx өсімшесін бергенде $y = f(x)$ функциясы да өсімше қабылдайды. Бұл *функцияның өсімшесі* Δy деп белгіленіп, $\Delta y = (y + \Delta y) - y$ немесе $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ теңдігімен анықталады
Функцияның туындысы	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ өрнегінің аргумент өсімшесі $\Delta x \to 0$ ұмтылғандағы шегі бар болса, онда ол шекті $y = f(x)$ *функциясының x нүктесіндегі туындысы* деп атайды

Жалғасы

Функцияның шегі	Алдын ала берілген кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, айнымалы x-тің $\|x - a\| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық мәндері үшін $\|f(x) - b\| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда b саны $f(x)$ *функциясының* x аргументі a санына ұмтылғандағы (a нүктесіндегі) *шегі* деп аталады
Функцияның экстремум нүктелері	Максимум және минимум нүктелері *функцияның экстремум нүктелері* деп аталады
Экстремум	Максимум және минимум нүктелері функцияның экстремум нүктелері, ал экстремум нүктесіндегі функцияның мәні функцияның *экстремумы* деп аталады

ЖАУАПТАРЫ

7—9-СЫНЫПТАРДАҒЫ АЛГЕБРА КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

1. а) –3; ә) 9; б) $\frac{2b}{3b+9}$; в) $\frac{a}{2-a}$; г) 2; ғ) 9. **2.** а) 0,5; ә) 8,25; б) ±1; в) $\pm\sqrt{5}$; г) 7; –2; ғ) –1; 6; д) 2; $\frac{2}{3}$; е) 1; $-\frac{3}{8}$. **3.** а) 2,6; ә) 0; –8; б) –2,5; в) –4; г) 1; –6; ғ) 0,5; д) 0. **4.** а) (5; 2), (–14; 21); ә) (1; 3), (–0,75; –0,5); б) (4; 3), $(-9; \frac{4}{3})$; в) (5; 0,5), $(-7,5; -\frac{1}{3})$. **6.** а) $(-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$; ә) (–8; 2); б) [2; 5]; в) $(-\infty; -\frac{5}{7}) \cup (1; +\infty)$. **7.** а) $(-9; 0] \cup [4; +\infty)$; ә) $[0; 2] \cup (6; +\infty)$; б) $(-\infty; -7) \cup (0; 3)$; в) $(-4; 0) \cup (5; +\infty)$. **8.** а) 0; ә) –3; б) –6; в) 2. **9.** а) 5; ә) –3; б) 3; в) –2. **10.** а) [5; 8); ә) $(-\infty; -6]$; б) $[1; 2] \cup [3; 4]$; в) [–3; 3]. **14.** а) $d = 0,8$; $a_9 = 9,6$; $S_{10} = 68$; ә) $a_1 = 37,6$; $S_{20} = 724$; б) $a_1 = 10$; $d = 5$; в) $a_1 = -60$. **15.** а) $q = 2$; $b_7 = 96$; $S_8 = 382,5$; ә) $b_5 = 54$; $S_6 = -121\frac{1}{3}$; б) $b_1 = 64$; $q = 0,5$; в) $b_1 = 27$. **18.** а) $2\sin 4\alpha$; г) $-2\cos\alpha$.

1-тарау. ФУНКЦИЯ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИГІ

1.1. а) 5; 15,5; 21; ә) $2\frac{5}{6}$; 0; $\frac{1}{3}$; б) 7; 4,5; 0; в) 2; 1; $\frac{10}{9}$. **1.2.** ә) –2; –2; 1; в) $\frac{1}{4}$; 4; 1. **1.3.** а) $D(g) = R$; ә) $D(g) = R$; б) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **1.8.** ә) 3; $\sqrt{3}$; 3; в) $g(x_1) = \frac{2}{t^2} + 3t$; $g(x_2) = \frac{t^3+12}{2t}$. **1.9.** а) $[3; +\infty)$; ә) $(-\infty; 1] \cup [2,5; +\infty)$; в) $(-\infty; -1,5) \cup (-1,5; 0) \cup (0; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$. **1.10.** а) $D(f) = R$; $E(f) = [0; +\infty)$; ә) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$; б) $D(f) = R$; $E(f) = \left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$; в) $D(f) = R$; $E(f) = [-5; 5]$.

1.11. а) –18; ә) –12,5; б) $\frac{10}{17}$; в) $\frac{25+8a-6a^3}{a}$. **2.3.** а) Парабола; ә) гипербола; б) кубтық парабола; в) түзу. **2.9.** а) Бір; ә) бір. **3.6.** а) Жұп; ә) жұп; б) жұп; в) жұп та, тақ та емес. **3.7.** а) $\frac{4\pi}{5}$; ә) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{5}$; в) 2π. **3.9.** а) $(-\infty; 1]$ — өседі; $[1; +\infty)$ — кемиді, $x = 1$ — максимум нүктесі, (0; 2) — $f(x) > 0$, $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ — $f(x) < 0$; ә) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ — кемиді, экстремум нүктесі жоқ, $(-\infty; -2) \cup \left(-\frac{5}{3}; +\infty\right)$ — $f(x) < 0$, $\left(-2; -\frac{5}{3}\right)$ — $f(x) > 0$. **4.1.** а) $y = \frac{x-2}{7}$; ә) $y = \frac{3x}{2}$; б) $y = 5 - x$.

2-тарау. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР

5.1. а) Тақ; ә) тақ; б) жұп; в) жұп. **5.6.** а) $\frac{2\pi}{7}$; ә) $1,5\pi$; б) 12π; в) $0,125\pi$. **6.2.** а) $-\frac{\pi}{2}$; ә) $-\frac{5\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{5\pi}{6}$. **6.4.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.6.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ә) 0,5; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.7.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; ә) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) 0; в) 1. **6.10.** а) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; ә) $-\frac{1}{3}$; б) $\frac{2-\sqrt{2}}{10}$; в) $-\frac{6+\sqrt{3}}{4}$.

3-тарау. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР

7.3. а) $3\pi k$, $k \in Z$; ә) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **7.4.** б) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; в) $\pm\frac{2\pi}{3} + 4k\pi$, $k \in Z$. **7.5.** а) $\frac{3\pi}{2}$. **7.7.** а) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$; б) $(-1)^k\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$.

7.8. ә) $-\frac{3\pi}{4}+6\pi k,\ k\in Z$; в) $\frac{\pi}{24}-\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$. **7.9.** а) $-3-\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}+\frac{3\pi k}{2},\ k\in Z$; ә) $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$. **7.11.** а) $\pi n,\ n\in Z$; $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5},\ k\in Z$. **7.12.** ә) $\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$; $\frac{\pi}{22}+\frac{\pi n}{11},\ n\in Z$. **8.2.** а) $\pm(\pi-\arccos\frac{1}{3})+2\pi k,\ k\in Z$; ә) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z$; б) $\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\in Z$; в) $2\pi n,\ n\in Z$; $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k,\ n\in Z$. **8.3.** а) $\frac{\pi}{4}+n\pi$, $\mathrm{arctg}3+k\pi,\ k,\ n\in Z$; ә) $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $\mathrm{arctg}4+k\pi,\ k,\ n\in Z$; б) $\frac{\pi}{4}+n\pi$, $-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k,\ n\in Z$; в) $\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z$; $\frac{5\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z$. **8.4.** а) $\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$, $k,\ n\in Z$; ә) $\frac{k\pi}{3}$; $\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4}$, $k,\ n\in Z$; б) $\frac{n\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z$; $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+k\pi,\ k,\ n\in Z$; в) $k\pi,\ k\in Z$; $-\mathrm{arctg}2+n\pi,\ n\in Z$. **8.5.** а) $\mathrm{arctg}\,\frac{2}{3}+n\pi$, $-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k,\ n\in Z$. **8.7.** а) $2k\pi$, $\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{5}\right)+2n\pi,\ k,\ n\in Z$; ә) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$; $(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+k\pi$, $k,\ n\in Z$. **8.8.** а) $\mathrm{arctg}3+n\pi$, $-\frac{k}{4}+k\pi,\ k,\ n\in Z$. **8.9.** а) $n\pi$; $-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k,\ n\in Z$; ә) $\frac{\pi}{2}+n\pi$, $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k,\ n\in Z$. **8.10.** а) $\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in Z$; $n\pi,\ n\in Z$; в) $\mathrm{arctg}(3\pm2\sqrt{2})+n\pi,\ n\in Z$. **8.11.** а) $-\frac{n}{4}+n\pi$, $\mathrm{arctg}2+k\pi,\ k,\ n\in Z$; ә) $\frac{k}{4}+n\pi$, $-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{7}+k\pi,\ k,\ n\in Z$. **8.13.** а) $\frac{n}{8}+\frac{n\pi}{2}$, $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2}+\frac{k\pi}{2}$, $k,\ n\in Z$; ә) $-\frac{n}{8}+\frac{n\pi}{2}$, $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}+\frac{k\pi}{2}$, $k,\ n\in Z$. **8.14.** а) $3\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}+3n\pi$, $3\mathrm{arctg}2+3k\pi,\ k,\ n\in Z$; ә) $\frac{n}{12}+\frac{n\pi}{3}$, $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}2+\frac{k\pi}{3}$, $k,\ n\in Z$. **9.2.** в) $\left[-\frac{\pi}{6}+n\pi;\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$, $n\in Z$.

4-тарау. ЫҚТИМАЛДЫҚ

11.1. 0,9. **11.2.** 0,25. **11.3.** 0,3. **11.4.** ≈0,72. **11.5.** 1) 0,72; 2) 0,98. **11.6.** ≈0,0278. **11.7.** ≈0,6. **11.9.** ≈0,2545.

5-тарау. ТУЫНДЫ

12.1. б) –6; в) $\frac{1}{4}$. **12.3.** а) Функция үзіліссіз болмайды; ә) функция үзіліссіз болмайды. **12.6.** а) –2; ә) –4; б) 27; в) $\frac{1}{8}$; г) $-\frac{4}{3}$; ғ) $\frac{8}{11}$; д) $\frac{1}{4}$; е) $\frac{8}{5}$. **13.2.** ә) 1,14. **13.6.** ә) $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}-1$. **13.7.** а) 0,1; ә) 0,1. **14.1.** а) x^2+4x; ә) $32x^3+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) x^2+8x^3; в) $24x^3+35x^4$; г) $-\frac{2}{3}x+3$; ғ) x^2+1; д) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; е) $-10x+1$. **14.2.** б) $-\frac{1}{4}$; в) $\frac{2}{3}$. **14.3.** а) 5; ә) –1; б) –1. **14.4.** а) $\left(\frac{7}{36};+\infty\right)$; ә) $(5;+\infty)$. б) $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **14.5.** б) $\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$; в) $\frac{6-4x-x^2}{(x+2)^2}$. **14.6.** б) $\frac{3}{x^4}$; в) $\frac{2x(1-x^4)}{(x^4+1)^2}$. **14.9.** а) –1; ә) 2. **14.10.** а) $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$; ә) $(-1;3)$. **15.1.** ә) $v=36$ м/с; $a=30$ м/с^2; б) 6 м/с; **15.2.** а) 0. **15.3.** а) $y=-8x-6$; ә) $y=6x-2$; б) $y=-10x+5$. **15.6.** а) arctg1,5; ә) arctg2. **15.7.** а) $y=-2x+4$; ә) $y=17x-17$. **15.8.** а) $y=2$; ә) $y=0$; в) $y=-1$. **15.9.** (0,5; –1). **16.1.** а) $f(x)=x^2$; $g(x)=2x-1$; ә) $g(x)=3x+2$; $f(x)=\sqrt{x}$; б) $g(x)=x-\frac{\pi}{6}$; $f(x)=\sin x$; в) $g(x)=4x$; $f(x)=\mathrm{tg}\,x$. **16.2.** а) $y=f(g(x))=\cos 2x$; $y=g(f(x))=2\cos x$; ә) $y=f(g(x))=(3x+1)^3$; $y=g(f(x))=3x^3+1$; б) $y=f(g(x))=\sin(4x-1)$; $y=g(f(x))=4\sin x-1$; в) $y=f(g(x))=\sqrt{\frac{2}{x+1}}$; $y=g(f(x))=\frac{2}{\sqrt{x}+1}$. **16.5.** а) $y=f(g(x))=\sin\left(\frac{2}{x^3-1}\right)$; $y=f(g(x))=\frac{2}{\sin^3x-1}$; ә) $y=f(g(x))=3\mathrm{tg}^3x+2\mathrm{tg}^2x$; $y=g(f(x))=\mathrm{tg}(3x^3+2x^2)$. **16.7.** а) $-\frac{6}{x^3}\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^2$; ә) $\frac{8}{x^2}\left(5-\frac{4}{x}\right)$. **17.1.** а) $3\cos x-2\sin x$; ә) $-\frac{1}{\sin^2x}$; б) $\frac{1}{\cos^2x}+\cos x$; в) $-2\sin x-\frac{1}{\cos^2x}$. **17.2.** а) $2+\frac{2}{\cos^2x}$; ә) $4\mathrm{ctg}\,x-\frac{4x}{\sin^2x}$. **17.3.** а) $2\sin 2x+2\cos 2x$; ә) $3-4\sin 4x$; б) $3x^2-4\cos 2x$.

17.4. а) $\frac{3}{\sin^2 x} - 12x^2$; ә) $2\cos 2x + \frac{1}{\cos^2 x}$; б) $\frac{1}{4\cos^2 x}$. **17.5.** а) $\frac{1}{2}$; ә) 4; б) $\frac{1}{3}$; в) 0. **17.6.** а) $\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$; ә) $\frac{\pi n}{4}, n \in Z$. **17.7.** ә) $y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$. **17.8.** а) $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z$; ә) $\frac{n\pi}{2}, n \in Z$. **17.9.** а) $-\sin 2x + \sin x$; ә) $\cos x + \frac{2}{\cos^2 x}$; б) $-\sin x - \cos x$; в) $4\sin x + (4x - 1)\cos x$. **17.10.** а) $-\sin 2x$; ә) $6\sin 4x + 2$; б) $4\cos 2x(\sin 2x + 1)$; в) $6(\cos 2x + \sin 2x)^2 \cdot (-\sin 2x + \cos 2x)$. **17.12.** а) $\pm\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$. **17.15.** ә) $\frac{4}{3}$. **18.2.** ә) $\approx 0{,}936$; д) $\approx 2{,}002$. **18.4.** ә) $\approx 1{,}33$. **18.5.** б) $\approx 4{,}04$.

6-тарау. ТУЫНДЫНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

19.3. а) $(-\infty; +\infty)$ — өседі; ә) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$ — кемиді, $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$ — өседі; б) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$ — кемиді, $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$ — өседі; в) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ — кему аралығы. **19.6.** а) $(-\infty; +\infty)$ — өседі; ә) $\left(-\infty; \frac{3}{10}\right]$ — кемиді, $\left[\frac{3}{10}; +\infty\right)$ — өседі; б) $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ — өседі, $[-2; 1]$ — кемиді; в) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$ — өседі, $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$ — кемиді. **19.8.** а) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ — өсу аралығы, $[-1; 1]$ — кему аралығы ; ә) $\left(-\infty; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$ — өседі, $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ — кемиді; б) $(-\infty; +\infty)$ — өседі. **19.10.** $a = 0$ болғанда. **20.2.** а) $x = 0$ — минимум нүктесі; ә) $x = 0$ — минимум нүктесі. б) $x = \frac{3}{2}$ максимум нүктесі; в) $x = \frac{4}{5}$ — минимум нүктесі. **20.3.** а) $x = 2$ — минимум нүктесі; ә) $x = -1$ — минимум нүктесі. **20.6.** а) $x = -\frac{1}{3}$ — минимум нүктесі, $x = \frac{1}{3}$ — максимум нүктесі; ә) $x = 1$ — минимум нүктесі; г) $x = -\frac{2}{3}$ — максимум нүктесі, $x = 0$ — минимум нүктесі; ғ) $x = -1$ — минимум нүктесі. **20.10.** а) Бір; ә) бір. **20.11.** а) -2; $-\frac{1}{2}$; 1; ә) -1; $\frac{1}{2}$; 2. **21.2.** а) $(-\infty; 1]$ — өсу аралығы, $[1; +\infty]$ — кему аралығы, $\max y = y(1) = 0{,}5$; ә) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$ — кему аралығы, $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$ — өсу аралығы, $\min y = y\left(\frac{1}{4}\right) = 2\frac{7}{8}$; в) $\left(-\infty; \frac{5}{4}\right]$ — кему аралығы, $\left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$ — кему аралығы, $\max y = y\left(\frac{5}{4}\right) = 1\frac{1}{8}$. **22.1.** а) -1; -5; ә) 11; 2. **22.2.** а) 24; -6; ә) 3; -3. **22.3.** ә) 4; 0. **22.5.** а) 8; 8, ә) 1; 100. **22.6.** а) $\frac{23}{3}$; 3; ә) 10; 1. **22.11.** а) 50; 25; ә) 2; 16; **22.14.** а) 20 м; 20 м; ә) 4 м; 8 м.

7-тарау. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

23.6.

68-кесте

X	500	100	50	0
P	0,01	0,1	0,5	0,39

23.8

69-кесте

X	0	1	2
P	0,02	0,26	0,72

24.1. $M(X) = 7$. **24.2.** $D(X) = 18{,}01$. **24.3.** $\sigma(X) = 2{,}64$. **24.9.** $M(X+Y) = 22{,}2$; $D(X+Y) = 44{,}76$.

10-СЫНЫПТАҒЫ АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

1. а) $-4{,}9$; $-3{,}9$; $-0{,}4$; ә) $\frac{1}{4}$; $-\frac{3}{4}$; -42; б) 3; 3; 11; в) 15; -35; $-\frac{1}{5}$. **2.** а) 0; $-\frac{\pi}{3}$; π; ә) $-5\sqrt{3}$; 0; $-5\sqrt{3}$; б) 1; $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; 1; в) 0; $\frac{2\pi}{3}$; π. **3.** а) $\frac{\pi}{4}$; ә) $\frac{5\pi}{3}$; б) -4π; в) 0;

г) 5. **4.** а) 0; ә) 1; б) 5; в) $\frac{5}{14}$. **6.** $\approx$0,1 см^2. **7.** а) $2x + 0,5$; ә) $-9x^2 + 20x$; б) $1 + \frac{5}{\sqrt{x}}$; в) $\cos x + \sin x$; г) $\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}$; ғ) $\frac{8x^3}{(x^4+1)^2}$. **8.** а) -6; ә) π; б) $\frac{1}{9}$; в) $\frac{1}{4}$. **9.** а) $x^6 - \sin x$; ә) $\frac{1}{2}x^5 - \cos x$; б) $10x^9 - 6x^5$; в) $18x^{17} + 22x^{10}$; г) $-\frac{16}{x^9} - 8x^7$; д) $-\frac{9}{x^4} - \frac{15}{x^6}$. **10.** 12 м/с. **11.** 40 м/с. **12.** $t = 2$. **13.** а) 21; 18; ә) 4; 8. **14.** а) $330x^2(x^3-6)^{109}$; ә) $\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+2}}$; б) $30\cos(6x-1)\cdot\sin^4(6x-1)$; в) $32x^3\cos^3\left(\frac{\pi}{3} - x^4\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3} - x^4\right)$. **15.** а) 84; ә) $-48\sqrt{3}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) 0. **16.** а) $\approx 1,036$; ә) $\approx 1,05$; б) $\approx 0,9$; в) $\approx 83,9$; **17.** а) $\approx 1,003$; ә) $\approx 4,984$; б) $\approx 9,975$; в) $\approx 1,15$. **18.** а) -2; 0; ә) 1; 3; б) -11; 9. **19.** 156,25 м^2. **20.** 80 м. **21.** 2,5 және 2,5. **22.** 6 см. **23.** а) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$; πn, $n \in Z$; ә) $\frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; πn, $n \in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; в) $-\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **24.** а) $\frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; ә) πk; $k \in Z$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **25.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k, n \in Z$; ә) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in Z$; б) $2\pi n$; $\pm\arccos\frac{2}{3} + 2\pi k$, $k, n \in Z$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **26.** а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; ә) πn, $n \in Z$; $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k, n \in Z$; в) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **27.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, $k, n \in Z$; ә) $-\frac{\pi}{3} + \pi n$, $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k, n \in Z$; б) $\operatorname{arctg} 1,5 + \pi n$; $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k, n \in Z$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{7}{4} + \pi k$, $k, n \in Z$. **28.** а) -1; ә) $\frac{1}{2}$; б) 2; 3; в) $\frac{5}{3}$. **29.** а) ± 2; $\pm\sqrt{5}$; ә) ± 1; $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$; б) ± 1; в) -1. **30.** а) $(1 + 2n)\pi$, $n \in Z$. ә) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; **31.** а) $2\pi n$, $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$; ә) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **32.** а) $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n\right]$, $n \in Z$; ә) $\left(\frac{7\pi}{12} + 2\pi n; \frac{25\pi}{12} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; б) $\left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$; в) $\left(\pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$. **33.** а) $\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}\right)$, $n \in Z$; ә) $\left(-\frac{\pi}{42} + \frac{2\pi n}{7}; \frac{\pi}{42} + \frac{2\pi n}{7}\right)$, $n \in Z$. **34.** а) $\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}\right)$, $n \in Z$. **35.** а) $\left(-\frac{\pi}{3} + n\pi; \frac{\pi}{3} + n\pi\right)$, $n \in Z$; ә) $\left[-\frac{5\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}\right]$, $n \in Z$. **39.** а) $(0; +\infty)$; ә) $(-1; 1)$; б) $(-1; 0) \cup (0; 1)$; в) $(-\infty; 0) \cup (0; 3)$. **40.** а) $[0; +\infty)$; ә) $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$. **41.** а) $[-3; 2]$; ә) $\left[-\frac{4}{3}; 5\right]$; б) $[-2; 0]$; в) $(-\infty; -2] \cup [0; 2]$. **42.** а) $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$. **43.** а) $(-\infty; 4]$; ә) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$; в) $(-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$. **44.** а) $[-11; +\infty)$; ә) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $[-8; 8]$; в) $[1; 5]$. **46.** а) Тақ; ә) тақ; б) жұп; в) жұп та емес, тақ та емес; г) тақ; ғ) жұп. **48.** а) $\frac{2\pi}{3}$; ә) 10π; б) π; в) $\frac{\pi}{2}$. **51.** а) $y = 0,5x - 1,5$, $x \in R$; ә) $y = 1 + \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$; б) $y = \sqrt{x+1}$, $x \in [-1; +\infty)$. **52.** а) $x = -1$; ә) $x = \pm 2$; б) $x = \pm 3$; в) $x = 0$; -1; ± 5. **54.** а) $y = 3 - x$; ә) $y = 2x + 5$; б) $y = 2x - 1$; в) $y = 1$. **55.** 45°; $y = x + 1$. **56.** $\operatorname{arctg} 2$. **57.** а) $y = -4x + \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}$; ә) $y = 4x + \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$. **58.** а) $(-\infty; 1]$ — өседі, $[1; +\infty)$ — кемиді; ә) $(-\infty; 0]$ — кемиді, $[0; +\infty)$ — өседі; б) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ — өседі, $[-1; 1]$ — кемиді; в) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ — өседі, $[-3; 3]$ — кемиді; г) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ — өседі; ғ) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ — кемиді. д) $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$ — өседі, $[-3; 2]$ — кемиді; е) $(-\infty; 1] \cup [6; +\infty)$ — кемиді, $[1; 6]$ — өседі. **59.** а) $x = 0$ — максимум нүктесі; ә) экстремум нүктелері жоқ.

МАЗМҰНЫ

Учебное издание

Àáûëêàñûìîâà Àëìà Åñèìáåêîâíà
Æóìàãóëîâà Çàóðå Àáäûêåíîâíà

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Учебник для 10 классов
общественно-гуманитарного направления
общеобразовательных школ
(*на казахском языке*)

Редакторы *Ж. Өміржанова*
Көркемдеуші редакторы *А. Сланова*
Техникалық редакторы *И. Таранунец*
Корректоры *С. Дәуірхан*
Компьютерде беттеген *Ж. Бекбосынова*

Баспаға Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің № 0000001 мемлекеттік лицензиясы 2003 жылы 7 шілдеде берілген

ИБ № 5871

Басуға 31.05.19 қол қойылды. Пішімі 70 · 100 1/16. Офсеттік қағаз.
Қаріп түрі "SchoolBook Kza". Офсеттік басылыс. Шартты баспа табағы 12,26 + 032 қосарбет. Шартты бояулы беттаңбасы 50,38. Есептік баспа табағы 6,71 + 0,54 қосарбет.
Таралымы 55 000 дана. Тапсырыс №

«Мектеп» баспасы, 050009, Алматы қаласы, Абай даңғылы, 143- үй
Факс: 8(727) 394-37-58, 394-42-30
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz