В.А. Смирнов, Е.А. Тұяқов

ГЕОМЕТРИ

10

Жалпы білім беретін мектептің
қоғамдық-гуманитарлық бағытындағы
10-сыныбына арналған оқулық

*Қазақстан Республикасының
Білім және ғылым министрлігі бекіткен*

Алматы "Мектеп" 2019

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151я72
С53

Шартты белгілер:

? — жаңа білімді меңгеру барысында шешілетін мәселе

— теориялық материалды өзіндік оқып-үйренуге қажетті тапсырмалар

— теорема дәлелдеуінің аяқталуы

A — барлық оқушыға міндетті жаттығулар

B — орта деңгейлі жаттығулар

Смирнов В.А., Тұяқов Е.А.
С53 **Геометрия:** Жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманитарлық бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық. — Алматы: Мектеп, 2019. — 144 б., сур.

ISBN 978—601—07—1141—9

С $\frac{4306020502—007}{404(05)\ —19}$ 31(1)—19

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151я72

ISBN 978—601—07—1141—9

АЛҒЫ СӨЗ

Сендер геометрияның ең қызықты және маңызды бөлімдерінің бірі стереометрия курсын оқып білесіңдер. Ол курс не үшін қажет? Біріншіден, курс әртүрлі кеңістіктік формалар мен кеңістіктік фигуралардың кескіндері және олардың заңдылықтарымен таныстырып, қажетті кеңістіктік түсініктерді қалыптастырады. Екіншіден, стереометрия ғылыми таным әдісін үйретіп, логикалық ойлауды дамытуға ықпал етеді.

Сонымен қатар стереометрияны оқу кеңістіктік фигураларды кескіндеуге, модельдеуге және құрастыруға, негізгі геометриялық шамаларды (ұзындықтар, бұрыштар, аудандар, көлемдер) өлшеуге қажетті практикалық дағдыларды игеруге мүмкіндік береді.

Ақпараттық технологиялардың дамуы тек геометрияның рөлін күшейтеді, яғни материалды графикалық ұсынумен компьютерлік модельдеу мүмкіндіктері айтарлықтай кеңейтіледі.

Оқулықтағы барлық материалдар тараулар мен параграфтарға бөлінген. Олар теориялық материалды, өздігінен орындауға арналған тапсырмаларды, пысықтау сұрақтарын, күрделілігі әртүрлі деңгейлі жаттығуларды қамтиды.

Теореманы дәлелдеудің аяқталуы (□) белгісімен белгіленген.

Оқулықта деңгейлері әртүрлі жаттығулар: **A** (міндетті деңгей), **B** (күрделілігі орта деңгей) берілген.

(*) жұлдызшамен белгіленген параграфтар оқу бағдарламасына енбейтін ғылыми-танымдық және қолданбалы сипаттағы қосымша материалды қамтиды. Оларды негізгі сабақтарда немесе қосымша сабақтарда (үйірмелерде, таңдау курстарында және т.б.) пайдалануға болады. Оқулықтың соңында есептердің жауаптары келтірілген.

Геометрияны оқып білуде сәттілік тілейміз!

7–9-СЫНЫПТАРДАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Планиметрияның негізгі ұғымдары

Планиметрияның (жазықтықтағы геометрия) негізгі ұғымдары **нүкте, түзу** және **жазықтық** болып табылады. Олардың өзара орналасуының негізгі қасиеттері (аксиомалары):

1. *Кез келген екі нүкте арқылы тек бір ғана түзу өтеді.*

2. *Бір түзудің бойында жатпайтын кем дегенде үш нүкте бар болады.*

Сәуле немесе *жарты түзу* деп берілген нүктеден және сол нүктенің бір жағында жататын барлық нүктелерден тұратын түзудің бөлігін айтады. Мұнда берілген нүкте *сәуленің төбесі* немесе *сәуленің басы* деп аталады.

Кесінді деп берілген екі нүктеден және осы нүктелердің арасында орналасқан барлық нүктелерден тұратын түзудің бөлігін айтады. Мұнда берілген нүктелер *кесіндінің ұштары* деп аталады.

Кесіндінің ұзындығы — берілген кесіндіде бірлік кесінді және оның бөліктері неше рет орналасатынын көрсететін оң сан.

AB кесіндісінің ұзындығын, сонымен қатар *A* және *B* нүктелерінің *арақашықтығы* деп те атайды.

Ортақ төбесі бар екі сәуледен және осы сәулелермен шектелген жазықтықтың бір бөлігінен құрылған фигура *бұрыш* деп аталады. Сәулелердің ортақ төбесі *бұрыштың төбесі*, ал сәулелер *бұрыштың қабырғалары* деп аталады.

Бұрыштың градустық өлшемі бір градусқа тең бұрыш және оның бөліктері осы бұрышқа неше рет орналасатынын көрсетеді.

Егер бұрыштың қабырғалары бірігіп түзуді құрайтын болса, онда ол бұрыш *жазыңқы бұрыш* деп аталады. Керісінше жағдайда, бұрыш *жазыңқы емес бұрыш* деп аталады.

Егер екі бұрыштың бір қабырғасы ортақ, ал қалған екі қабырғасы бірігіп түзуді құрайтын болса, онда ол бұрыштар *сыбайлас* бұрыштар деп аталады.

Егер бір бұрыштың қабырғалары екінші бұрыш қабырғаларының толықтауыш жарты түзулері болса, онда ол екі бұрыш *вертикаль бұрыштар* деп аталады.

Өзінің сыбайлас бұрышына тең бұрыш *тік бұрыш* деп аталады.

Тік бұрыштан кіші бұрыш *сүйір бұрыш* деп аталады.

Тік бұрыштан үлкен, бірақ жазыңқы бұрыштан кіші бұрыш *доғал бұрыш* деп аталады.

Берілген бұрышты тең екі бұрышқа бөлетін ішкі сәуле *биссектриса* деп аталады.

Қиылысқан екі түзудің арасындағы бұрыш деп осы түзулердің қиылысу нүктесі арқылы құрылған сәулелердің арасындағы ең кіші бұрышты айтады.

Егер қиылысқан екі түзудің арасындағы бұрыш тік бұрыш болса, онда олар *перпендикуляр түзулер* деп аталады.

Егер екі түзу қиылыспайтын болса, яғни ортақ нүктелері болмаса, онда олар *параллель түзулер* деп аталады.

Аксиома ретінде келесі қасиет қабылданады.

Берілген түзудің бойында жатпайтын бір нүкте арқылы осы түзуге параллель болатын бір ғана түзу жүргізуге болады.

Қандай да бір түзу A нүктесі арқылы өтіп, b түзуіне перпендикуляр болсын және B осы түзулердің қиылысу нүктесі болсын. AB кесіндісі A нүктесінен b түзуіне түсірілген *перпендикуляр* деп аталады. B нүктесі *перпендикулярдың табаны* деп аталады. *Перпендикулярдың ұзындығы* деп A нүктесінен b түзуіне дейінгі қашықтықты айтады.

b түзуінің бойында жатқан B нүктесінен басқа C нүктесі үшін AC кесіндісі A нүктесінен b түзуіне жүргізілген *көлбеу* деп аталады. C нүктесі *көлбеудің табаны* деп аталады. BC кесіндісі b түзуіне түсірілген *көлбеудің проекциясы* деп аталады.

Екі параллель түзулердің арасындағы *қашықтық* деп бір түзудің бойында жатқан нүктеден екінші түзуге түсірілген перпендикулярдың ұзындығын айтады.

Пропорционал кесінділер туралы теорема. ***Бұрыштың қабырғаларын қиып өтетін параллель түзулер бұрыштың қабырғаларынан пропорционал кесінділерді кесіп өтеді*** .

Есептер

1. Қос-қостан алғанда он қиылысу нүктесі болатындай бес түзуді кескіндеңдер.
2. Түзудің бойында: а) 3 нүкте; ә) 4 нүкте; б) 5 нүкте; в)* n нүкте белгіленген. Төбелері осы нүктелерде болатын неше кесінді бар болады?
3. Түзудің бойында $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см болатындай тізбектелген үш кесінді орналастырылған. AB және CD кесінділерінің орта нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.
4. Бір нүктеде қиылысатын n түзу жазықтықты неше бөлікке бөледі?
5. Қиылысқан екі түзу арқылы құрылған үш бұрыштың қосындысы 306°-қа тең. Олардың ішіндегі ең үлкен бұрыштың мәнін табыңдар.
6. OC сәулесі AOB бұрышының ішінде орналасқан және AOB бұрышы 120°-қа тең. Егер AOC бұрышы BOC бұрышынан 30°-қа кем болса, онда оның мәнін табыңдар.
7. Егер екі сыбайлас бұрыштардың біреуі екіншісінен екі есе артық болса, онда олардың градустық өлшемдерін табыңдар.

8. Бұрыштары сәйкесінше 60° және 90° болатын AOB және COD бұрыштарының арасындағы BOC бұрышының мәні 30°-қа тең. OC сәулесі AOB бұрышының ішінде орналасқан болса, AOD бұрышын табыңдар.
9. Дөңгелектің: а) 10 шабағы; ә) 12 шабағы бар. Екі көршілес шабақтың арасындағы бұрышының шамасын (градуспен) табыңдар.
10. Сағаттың минуттық тілі: а) 20 мин-та; ә) 10 мин-та; б) 50 мин-та неше градусқа бұрылады?
11. Екі параллель түзулермен және қиюшымен құрылған екі ішкі айқыш бұрыштардың қосындысы 150°. Осы бұрыштарды табыңдар.
12. Егер қандай да бір түзу екі параллель түзулердің біреуін қиып өтсе, онда ол екіншісін де қиып өтетінін дәлелдеңдер.

Үшбұрыштар

Үшбұрыш деп бір түзудің бойында жатпайтын үш нүктеден және осы нүктелерді қос-қостан қосатын үш кесіндіден құралған фигураны айтады. Нүктелер үшбұрыштың *төбелері* , ал кесінділер үшбұрыштың *қабырғалары* деп аталады.

Егер үшбұрыштың барлық бұрыштары сүйір болса, онда ол *сүйір бұрышты үшбұрыш* деп аталады.

Егер үшбұрыштың тік бұрышы бар болса, онда ол *тікбұрышты үшбұрыш* деп аталады.

Тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышына қарама-қарсы жатқан қабырғасы *гипотенуза* деп, ал қалған екі қабырғасы *катеттер* деп аталады.

Егер үшбұрыштың доғал бұрышы бар болса, онда ол үшбұрыш *доғал бұрышты* үшбұрыш деп аталады.

Үшбұрыштың төбелері, қабырғалары және бұрыштарынан басқа келесі элементтерін атап өтуге болады:

- үшбұрыштың *медианасы* — үшбұрыштың төбесі мен оған қарсы жатқан қабырғасының ортасын қосатын кесінді;
- үшбұрыштың *биссектрисасы* — үшбұрыштың төбесіндегі бұрышын қақ бөлетін және осы төбесін қарсы жатқан қабырғасымен қосатын кесінді;
- үшбұрыштың *биіктігі* — үшбұрыштың төбесінен оған қарсы жатқан қабырғаға немесе оның жалғасына түсірілген перпендикуляр.

Үшбұрыштың *периметрі* деп үшбұрыштың барлық қабырғалары ұзындықтарының қосындысын айтады.

Қабырғаларының арасындағы қатынастарға байланысты үшбұрыштар: а) әртүрлі қабырғалы; ә) теңбүйірлі; б) теңқабырғалы болып бөлінеді.

Егер үшбұрыштың қабырғалары қос-қостан бір-біріне тең болмаса, онда ол *әртүрлі қабырғалы үшбұрыш* деп аталады.

Екі қабырғасы өзара тең болатын үшбұрыш *теңбүйірлі* үшбұрыш деп аталады. Осы тең қабырғалары үшбұрыштың *бүйір* қабырғалары деп, ал үшінші қабырғасы оның *табаны* деп аталады.

Егер үшбұрыштың барлық қабырғалары өзара тең болса, онда ол *теңқабырғалы* үшбұрыш деп аталады.

Үшбұрыштардың теңдігінің бірінші белгісі. *Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкесінше екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады .*

Үшбұрыштардың теңдігінің екінші белгісі. *Егер бір үшбұрыштың бір қабырғасы мен оған іргелес жатқан бұрыштары екінші үшбұрыштың сәйкесінше бір қабырғасы мен оған іргелес жатқан бұрыштарына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады .*

Үшбұрыштардың теңдігінің үшінші белгісі. *Егер бір үшбұрыштың үш қабырғасы екінші үшбұрыштың сәйкесінше үш қабырғасына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады .*

Теңбүйірлі үшбұрыштың белгісі. *Егер үшбұрыштың екі бұрышы өзара тең болса, онда ол теңбүйірлі үшбұрыш болады .*

Планиметрияның негізгі теоремаларының бірі — үшбұрыштың бұрыштары туралы теорема.

Теорема. ***Үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болады .***

Үшбұрыштың екі қабырғасының орталарын қосатын кесінді үшбұрыштың *орта сызығы* деп аталады.

Теорема . ***Үшбұрыштың орта сызығы оның қабырғаларының біреуіне параллель және оның жартысына тең болады .***

Үшбұрыштың тамаша нүктелеріне келесілер жатады:

а) биссектрисалардың қиылысу нүктесі (*іштей сызылған шеңбердің центрі*);

ә) үшбұрыштың қабырғаларына жүргізілген орта перпендикулярлардың қиылысу нүктесі (*сырттай сызылған шеңбердің центрі*);

б) медианалардың қиылысу нүктесі (*центроид*);

в) биіктіктердің немесе олардың созындыларының қиылысу нүктесі (*ортоцентр*).

Теорема (Пифагор). ***Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасының квадраты катеттерінің квадраттарының қосындысына тең болады .***

Сонымен егер тікбұрышты үшбұрыштың катеттері a, b, ал гипотенузасы c-ға тең болса, онда келесі формула орынды болады:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Үшбұрыштардың ұқсастығының бірінші белгісі. *Егер бір үшбұрыштың екі бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкесінше екі бұрышына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар ұқсас болады.*

Үшбұрыштард ың ұқсастығының екінші белгісі. *Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы екінші үшбұрыштың сәйкесінше екі қабырғасына пропорционал және осы қабырғалардың арасындағы бұрыштары тең болса, онда мұндай үшбұрыштар ұқсас болады .*

Үшбұрыштардың ұқсастығының үшінші белгісі. *Егер бір үшбұрыштың үш қабырғасы екінші үшбұрыштың сәйкесінше үш қабырғасына пропорционал болса, онда мұндай үшбұрыштар ұқсас болады .*

Есептер

13. а) ABC сүйір бұрышты үшбұрышты; ә) ABC тікбұрышты үшбұрышты; б) ABC доғал бұрышты үшбұрышты салыңдар. Осы үшбұрыштардың медиана, биссектриса және биіктіктерін жүргізіңдер.

14. Үшбұрыштың периметрі 54 см. Оның қабырғаларының қатынасы 2 : 3 : 4 болса, олардың ұзындықтарын табыңдар.

15. Тең үшбұрыштардың: а) медианалары; ә) биссектрисалары; б) биіктіктері тең болатынын дәлелдеңдер.

16. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 15,6 м. Егер: а) табаны бүйір қабырғасынан 3 м-ге қысқа; ә) табаны бүйір қабырғасынан 3 м-ге ұзын болса, онда оның қабырғаларын табыңдар.

17. Егер ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, CM медианасы C_1M_1 медианасына тең болса, ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары тең екенін дәлелдеңдер.

18. ABC үшбұрышында A бұрышы 40°-қа тең және $AC = BC$ болса, C бұрышын табыңдар.

19. Үшбұрыштың бұрыштары 1 : 2 : 3 қатынасындай. Олардың ең кішісін табыңдар.

20. ABC үшбұрышында $AB = BC$. B төбесіндегі сыртқы бұрыш 138°. C бұрышын табыңдар.

21. Үшбұрыштың периметрі 15 см. Осы үшбұрыштың бір орта сызығы қиып түскен үшбұрыштың периметрін табыңдар.

22. Қабырғасы 1-ге тең теңқабырғалы үшбұрыштың биіктігін табыңдар.

23. Бірінші үшбұрыштың қабырғалары 16 см, 8 см және 10 см. Осы үшбұрышқа ұқсас екінші үшбұрыштың ең кіші қабырғасы 6 см. Екінші үшбұрыштың қалған қабырғаларын табыңдар.

24. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасына түсірілген биіктік оны бастапқы үшбұрышқа ұқсас екі үшбұрышқа бөлетінін дәлелдеңдер.

Сынық сызықтар және көпбұрыштар

Сынық сызық деп біріншісінің ұшы екіншісінің басы, екіншісінің ұшы үшіншісінің басы және т.с.с. болып орналасқан саны шектеулі кесінділерден тұратын фигураны айтады. Кесінділер *сынық сызықтың буындары* , ал олардың ұштары *сынықтың төбелері* деп аталады.

Сынық сызықтың буындарының ұзындықтарының қосындысы *сынықтың ұзындығы* деп аталады. Сынық сызық оның төбелерін тізбектей көрсету арқылы белгіленеді. Мысалы, $ABCDE$, $A_1A_2\ldots A_n$ сынық сызықтары.

Егер сынық сызықтың буындары өзара қиылыспайтын болса, онда ол *жай сынық сызық* деп аталады.

Егер сынық сызықтың бірінші буынының басы мен соңғы буынының ұшы беттесетін болса, онда ол *тұйық сынық сызық* деп аталады.

Егер тұйық сынық сызық өзін-өзі қимайтын болса, онда ол *жай тұйық сынық сызық* деп аталады.

Көпбұрыш деп жай тұйық сынық сызықпен құрылған және оның ішкі аймағымен шектелген фигураны айтады.

Сынық сызықтың төбелері — *көпбұрыштың төбелері*, сынық сызықтың буындары — *көпбұрыштың қабырғалары*, ал көршілес қабырғаларының арасындағы бұрыштар *көпбұрыштың бұрыштары* деп аталады. Көпбұрыштың қабырғаларында жатпайтын нүктелері *ішкі нүктелері* деп аталады.

Көпбұрыштың периметрі деп оның барлық қабырғаларының ұзындықтарының қосындысын айтады.

Көпбұрыштар үшбұрыштарға (үш бұрышы бар көпбұрыштар), төртбұрыштарға (төрт бұрышы бар көпбұрыштар) және т.с.с. болып бөлінеді. n бұрышы бар көпбұрыш *n-бұрышты* деп аталады.

Егер көпбұрыштың барлық қабырғалары және барлық бұрыштары тең болса, онда ол *дұрыс көпбұрыш* деп аталады.

Егер көпбұрыштың төбелері кез келген қабырғасы арқылы жүргізілген түзудің бір жағында жатса, онда ол *дөңес көпбұрыш* деп аталады.

Теорема. ***Дөңес n-бұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы $180°(n-2)$-ге тең болады.***

Есептер

25. Жай тұйық сынықтың 20 буыны бар. Оның неше төбесі болады?

26. а) Екі рет өзін-өзі қиятын; ә) үш рет өзін-өзі қиятын; б) бес рет өзін-өзі қиятын тұйық бес сынық сызықты салыңдар.

27. Дұрыс үшбұрыш; төртбұрыш; бесбұрыш; алтыбұрыш салыңдар. Сызғыш пен транспортирдің көмегімен салынған көпбұрыштардың дұрыстығын тексеріңдер.

28. Дөңес: а) төртбұрыш; ә) бесбұрыш; б) алтыбұрыш; в) n-бұрыш бір төбесінен жүргізілген диагональдарымен неше үшбұрыштарға бөлінеді?

29. а) Төртбұрыштың; ә) бесбұрыштың; б) алтыбұрыштың неше диагоналі болады?

30. Дөңес: а) төртбұрыштың; ә) бесбұрыштың; б) алтыбұрыштың; в) жетібұрыштың; г) сегізбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысын табыңдар.

31. Дөңес көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 900°-қа тең. Оның қабырғаларының санын табыңдар.

32. Дұрыс: а) төртбұрыштың; ә) бесбұрыштың; б) алтыбұрыштың; в) сегізбұрыштың сыртқы бұрыштарын табыңдар.

Төртбұрыштар

Қарама-қарсы қабырғалары қос-қостан параллель болатын төртбұрыш *параллелограмм* деп аталады.

Параллелограмның бірінші белгісі. *Егер төртбұрыштың екі қабырғасы тең және параллель болса, онда мұндай төртбұрыш параллелограмм болады .*

Параллелограмның екінші белгісі. *Егер төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары қос-қостан тең болса, онда ол параллелограмм болады .*

Барлық бұрыштары тік болатын параллелограмм *тіктөртбұрыш* деп аталады.

Тіктөртбұрыштың белгісі. *Егер параллелограмның диагональдары тең болса, онда ол тіктөртбұрыш болады .*

Барлық қабырғалары тең болатын параллелограмм *ромб* деп аталады.

Ромбының белгісі. *Ромбының диагональдары өзара перпендикуляр және олар сәйкесінше бұрыштарының биссектрисалары болып табылады .*

Барлық қабырғалары тең болатын тіктөртбұрыш *квадрат* деп аталады.

Квадраттың белгісі. *Егер тіктөртбұрыштың диагональдары перпендикуляр болса, онда ол квадрат болады .*

Екі қабырғасы параллель, басқа екі қабырғасы параллель емес төртбұрыш *трапеция* деп аталады.

Трапецияның параллель қабырғалары оның *табандары* , ал параллель емес қабырғалары *бүйір қабырғалары* деп аталады.

Трапецияның төбесінен оған қарсы жатқан табанына немесе табанының жалғасына түсірілген перпендикуляр оның *биіктігі* деп аталады.

Егер трапецияның бүйір қабырғалары тең болса, онда ол *теңбүйірлі трапеция* деп аталады.

Егер трапецияның бір бұрышы тік болса, онда ол *тікбұрышты трапеция* деп аталады.

Трапецияның орта сызығы деп оның бүйір қабырғаларының орталарын қосатын кесіндіні айтады.

Теорема. ***Трапецияның орта сызығы табандарына параллель және олардың қосындысының жартысына тең болады.***

Есептер

33. Паралл елограмның диагоналі оның екі қабырғасымен 25° және 35° бұрыштарын жасайды. Параллелограмның бұрыштарын табыңдар.

34. Егер параллелограмның екі бұрышының қосындысы: а) 80°; ә) 100°; б) 160° болса, параллелограмның бұрыштарын табыңдар.

35. Параллелограмның периметрі 48 см. Егер параллелограмның: а) бір қабырғасы екінші қабырғасынан 2 см ұзын; ә) екі қабырғасының айырымы 6 см; б) бір қабырғасы екінші қабырғасынан екі есе ұзын болса, онда оның қабырғаларын табыңдар.

36. Параллелограмның екі қабырғасы 3 : 4 қатынаста, ал оның периметрі 2,8 м. Параллелограмның қабырғаларын табыңдар.

37. Тіктөртбұрыштың диагональдарының арасындағы сүйір бұрышы 50°. Диагоналінің қабырғаларымен жасайтын бұрыштарын табыңдар.

38. Тіктөртбұрыштың кіші қабырғасы 5 см, ал диагональдары 60° бұрыш жасап қиылысады. Тіктөртбұрыштың диагональдарын табыңдар.

39. Егер тіктөртбұрыштың периметрі 34 см, ал диагоналімен бөлінгенде алынған үшбұрыштың біреуінің периметрі 30 см болса, осы тіктөртбұрыштың диагональдарын табыңдар.

40. Параллелограмның тең емес көршілес қабырғалары арасындағы бұрыштарының биссектрисалары тіктөртбұрыш құрайтынын дәлелдеңдер.

41. Тіктөртбұрыштың қабырғаларының орталары ромбтың төбелері екенін дәлелдеңдер.

42. Теңбүйірлі трапецияның қарама-қарсы бұрыштарының айырымы 40° болса, онда оның бұрыштары неге тең?

43. Трапецияның 3 см-ге тең кіші табанының ұшы арқылы оның бүйір қабырғасына параллель түзу жүргізілген. Бұл түзу трапециядан периметрі 15 см-ге тең үшбұрышты қиып түседі. Трапецияның периметрін табыңдар.

44. Трапецияның табандары 4 см және 10 см. Диагональдарының бірі орта сызығ ын қандай кесінділерге бөлетінін табыңдар.

Тригонометриялық функциялар

C тік бұрышы және *A* сүйір бұрышы болатын *ABC* тікбұрышты үшбұрышын қарастырайық.

Тікбұрышты үшбұрыштың *сүйір бұрышының синусы* деп осы бұрышқа қарсы жатқан катеттің гипотенузаға қатынасын айтады. *A* бұрышының синусы sin *A* арқылы белгіленеді. Анықтама бойынша

$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$

Тікбұрышты үшбұрыштың *сүйір бұрышының косинусы* деп осы бұрышқа іргелес жатқан катеттің гипотенузаға қатынасын айтады. A бұрышының косинусы $\cos A$ арқылы белгіленеді. Анықтама бойынша

$$\cos A = \frac{AC}{AB}.$$

Тікбұрышты үшбұрыштың *сүйір бұрышының тангенсі* деп осы бұрышқа қарсы жатқан катеттің іргелес жатқан катетке қатынасын айтады. A бұрышының тангенсі $\operatorname{tg} A$ арқылы белгіленеді. Анықтама бойынша

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}.$$

Тікбұрышты үшбұрыштың *сүйір бұрышының котангенсі* деп осы бұрышқа іргелес жатқан катеттің қарсы жатқан катетке қатынасын айтады. A бұрышының котангенсі $\operatorname{ctg} A$ арқылы белгіленеді. Анықтама бойынша

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

Осы анықтамалардан келесі теңдіктер шығады:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Синус, косинус, тангенс және котангенсті сүйір бұрыштың *тригонометриялық функциялары* деп атайды.

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3};$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60° = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}, \operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1.$$

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктер. A сүйір бұрышының синусы мен косинусы келесі негізгі тригонометриялық тепе-теңдікпен өзара байланысады:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

A сүйір бұрышының тангенсі мен косинусы келесі теңдікпен өзара байланысады:

$$\operatorname{tg}^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}.$$

A сүйір бұрышының котангенсі мен синусы келесі теңдікпен өзара байланысады:

$$\operatorname{ctg}^2 A + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}.$$

Теорема (синуста р теоремасы). ***Үшбұрыштың қабырғалары оларға қарсы жатқан бұрыштарының синустарына пропорционал болады. Үшбұры штың қабырғасының оған қарсы жатқан бұрышының***

синусына қатынасы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің диаметріне тең болады.

Сонымен егер ABC үшбұрышында $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ және R — оған сырттай сызылған шеңбердің радиусы болса, онда келесі теңдік орынды болады:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Косинустар теоремасы Пифагор теоремасының жалпыламасы болып табылады.

Теорема (косинустар теоремасы). ***Үшбұрыштың қабырғасының квадраты қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан осы қабырғалары мен олардың арасындағы бұрыштың косинусының екі еселенген көбейтіндісін азайтқанға тең болады.***

Сонымен егер ABC үшбұрышында $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болса, онда келесі теңдік орынды болады:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Есептер

45. ABC теңбүйірлі үшбұрышының ($AC = BC$) табаны 6-ға, бүйір қабырғалары 5-ке тең. A бұрышының тригонометриялық функцияларының мәндерін табыңдар.

46. ABC үшбұрышында C бұрышы $90°$, A бұрышы $30°$, $AC = 2$. CH биіктігін табыңдар.

47. ABC үшбұрышында $AC = BC = 2$, C бұрышы $120°$. AH биіктігін табыңдар.

48. Егер: а) $\sin A = \frac{1}{3}$; ә) $\sin A = \frac{3}{5}$ болса, онда $\cos A$ мәнін табыңдар.

49. Егер: а) $\cos A = \frac{2}{3}$; ә) $\cos A = \frac{5}{13}$ болса, онда $\operatorname{tg} A$ мәнін табыңдар.

50. Егер: а) $\operatorname{tg} A = \frac{1}{2}$; ә) $\operatorname{tg} A = 2$ болса, онда $\operatorname{ctg} A$ мәнін табыңдар.

51. Егер бұрыштың шамасы: а) $120°$; ә) $135°$; б) $150°$ болса, онда оның синусы неге тең?

52. Егер бұрыштың шамасы: а) $120°$; ә) $135°$; б) $150°$ болса, онда оның косинусы неге тең?

53. Үшбұрыштың бір бұрышының қандай мәнінде, осы бұрышқа қарсы жатқан қабырғаның квадраты: а) қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан кіші; ә) қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысына тең; б) қалған екі қабырғасының квадраттарының қосындысынан артық болады?

54. ABC үшбұрышында $AB = 12$, $AC = 8$, $\angle A = 60°$. Үшінші қабырғасын табыңдар.

55. ABC үшбұрышында $AC = BC = 1$, C бұрышы $150°$. AB қабырғасын табыңдар.

56. Үшбұрыштың үш қабырғасы берілген: $BC = 2$, $AC = 3$, $AB = 4$. A, B, C бұрыштарының косинустарын табыңдар.

Аудан

Фигураның ауданы жазықтықтағы осы фигура жататын бөлігінің шамасын сипаттайды.

Фигураның ауда нын өлшеу кесіндінің ұзындығын өлшеу сияқты осы фигураны аудан бірлігі болатын фигурамен салыстыруға негізделеді.

Ауданның өлшем бірлігі ретінде қабырғасы ұзындықтың өлшем бірлігіне тең квадрат алынады. Ол *бірлік квадрат* деп аталады.

Фигураның ауданы деп өлшеу нәтижесінде алынған және берілген фигурада неше рет бірлік квадраттар мен оның бөліктері қамтылатынын көрсететін санды айтады.

Егер екі фигураның аудандары бірдей болса, онда ол фигуралар *теңшамалы* деп аталады.

Қабырғалары a, b болатын тіктөртбұрыштың S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = a \cdot b.$$

Теорема. ***Параллелограмның ауданы оның қабырғасы мен осы қабырғаға жүргізілген биіктігінің көбейтіндісіне тең болады*** .

Сонымен қабырғасы a және осы қабырғаға түсірілген биіктігі h болатын параллелограмның S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = a \cdot h.$$

Теорема. ***Параллелограмның ауданы оның екі көршілес қабырғалары мен олардың арасындағы бұрыштың синусының көбейтіндісіне тең болады*** .

Сонымен көршілес қабырғалары a, b және олардың арасындағы C бұрышы болатын параллелограмның S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = ab \cdot \sin C.$$

Теорема. ***Үшбұрыштың ауданы оның қабырғасы мен осы қабырғаға жүргізілген биіктігінің көбейтіндісінің жартысына тең болады*** .

Сонымен қабырғасы c және осы қабырғаға түсірілген биіктігі h болатын үшбұрыштың S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h.$$

Теорема. ***Үшбұрыштың ауданы оның екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрыштың синусының көбейтіндісінің жартысына тең болады*** .

Сонымен қабырғалары a, b және олардың арасындағы бұрышы C болатын үшбұрыштың S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C.$$

Теорема. ***Трапецияның ауданы оның табандарының қосындысының жартысы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең болады*** .

Сонымен табандары a, b және биіктігі h болатын трапецияның S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h.$$

Теорема. ***Дөңес төртбұрыштың ауданы оның диагональдары мен олардың арасындағы бұрыштың синусының көбейтіндісінің жартысына тең болады*** .

Сонымен диагональдары d_1, d_2 және олардың арасындағы бұрышы C болатын дөңес төртбұрыштың S ауданы келесі формуламен есептеледі:

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \cdot \sin C.$$

Көпбұрыштың ауданын оны үшбұрыштарға бөлу арқылы табуға болады. Сонда көпбұрыштың ауданы осы үшбұрыштардың аудандарының қосындысына тең болады.

Есептер

57. Қабырғасы 6-ға, диагоналі 10-ға тең болатын тіктөртбұрыштың ауданын табыңдар.

58. Диагоналі a-ға тең квадраттың ауданын табыңдар.

59. Квадраттың ауданы 1-ге тең. Төбелері осы квадраттың қабырғаларының орталары болатын жаңа квадраттың ауданын табыңдар.

60. Қабырғалары 8 см, 10 см және олардың арасындағы бұрыш: а) 30°; ә) 45°; б) 60° болатын параллелограмның ауданын табыңдар.

61. Параллелограмның ауданы 40 см^2, қабырғалары 5 см және 10 см. Оның биіктігін табыңдар.

62. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы 5-ке, ал табаны 6-ға тең. Осы үшбұрыштың ауданын табыңдар.

63. Үшбұрыштың ауданы 30-ға, бір қабырғасы 10-ға тең. Осы қабырғаға түсірілген биіктікті табыңдар.

64. Екі қабырғасы 3 см және 8 см, ал олардың арасындағы бұрыш 30° болатын үшбұрыштың ауданын табыңдар.

65. Трапецияның орта сызығы 3-ке, биіктігі 2-ге тең. Оның ауданын табыңдар.

66. Трапецияның табаны 10 см және 35 см, ауданы 225 см^2. Оның биіктігін табыңдар.

67. Трапецияның биіктігі 20 см, ауданы 400 см^2. Трапецияның орта сызығын табыңдар.

68. Трапецияның ауданы 200 см^2. Оның бір табаны 26 см, ал биіктігі 10 см. Трапецияның екінші табанын табыңдар.

69. Қабырғасы 1-ге тең дұрыс алтыбұрыштың ауданын табыңдар.
70. Дөңес төртбұрыштың диагоналдары 6 және 8, ал олардың арасындағы бұрыш 30°. Осы төртбұрыштың ауданын табыңдар.

Векторлар

Вектор деп бағытталған кесіндіні айтады.

Егер нөлдік емес екі вектор бір түзудің бойында немесе параллель түзулердің бойында жатса, онда олар *коллинеар векторлар* деп аталады.

Егер AB немесе CD сәулелерінің біреуі екіншісінде жататын болса, онда бір түзудің бойында жатқан $\overline{AB}$ және $\overline{CD}$ векторлары *бірдей бағытталған* деп аталады.

Керісінше жағдайда, олар *қарама-қарсы бағытталған* деп аталады.

Егер бір түзудің бойында жатпайтын екі вектор параллель түзулердің бойында жатып бір жаққа (әртүрлі жаққа) бағытталса, онда олар *бірдей бағытталған* (*қарама-қарсы бағытталған*) деп аталады.

Бірдей бағытталған немесе қарама-қарсы бағытталған екі вектор *коллинеар векторлар* деп аталады.

Вектордың *ұзындығы* немесе *модулі* деп сәйкесінше кесіндінің ұзындығын айтады. $\overline{AB}$, $\vec{a}$ векторларының ұзындығы сәйкесінше $|\overline{AB}|$, $|\vec{a}|$ деп белгіленеді.

Егер екі вектордың бағыттары мен ұзындықтары бірдей болса, онда олар *тең векторлар* деп аталады.

Басы мен ұшы беттесетін *нөлдік векторлар* да қарастырылады. Мұндай векторлар $\vec{0}$ деп белгіленеді.

Нөлдік вектордың ұзындығы нөлге тең деп есептеледі.

Барлық нөлдік векторлар бір-біріне тең деп саналады.

Векторлар үшін кесінділерге ұқсас қосу амалы анықталған. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларын қосу үшін $\vec{b}$ векторын оның басы $\vec{a}$ векторының ұшымен беттесетіндей етіп орналастыру керек.

Басы $\vec{a}$ векторының басымен, ал ұшы $\vec{b}$ векторының ұшымен беттесетін вектор $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының *қосындысы* деп аталады және $\vec{a}+\vec{b}$ деп белгіленеді.

$\vec{a}$ векторының t санына *көбейтіндісі* деп ұзындығы $|t|\cdot|\vec{a}|$ болатын және бағыты $t>0$ болғанда өзгеріссіз қалатын, ал $t<0$ болғанда қарама-қарсы бағытта болатын векторды айтады. $\vec{a}$ векторының t санына көбейтіндісі $t\vec{a}$ деп белгіленеді. Анықтама бойынша $|t\vec{a}|=|t|\cdot|\vec{a}|$.

$\vec{a}$ векторының -1 санына көбейтіндісі $-\vec{a}$ деп белгіленеді және ол $\vec{a}$ векторына *қарама-қарсы вектор* деп аталады.

Анықтама бойынша $-\vec{a}$ векторының бағыты $\vec{a}$ векторының бағытына қарама-қарсы болады және $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$.

Теорема. ***Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ нөлдік емес коллинеар емес екі вектор болса, онда кез келген $\vec{c}$ векторы үшін $\vec{c}=t\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}$ теңдігі орындалатындай тек бір ғана t және s сандары табылады*** .

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ нөлдік емес екі вектор болсын. Оларды O нүктесінен $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$ болатындай етіп саламыз. Егер осы векторлар бірдей бағытталмаған болса, онда OA және OB сәулелерінің арасындағы бұрыш $\vec{a}$ және $\vec{b}$ *векторларының арасындағы бұрыш* деп аталады.

Бірдей бағытталған векторлардың арасындағы бұрыш 0°-қа тең деп есептеледі.

Арасындағы бұрыш тік бұрыш болатын екі вектор *перпендикуляр векторлар* деп аталады.

Берілген түзуге перпендикуляр вектор осы түзудің *нормаль векторы* деп аталады.

Нөлдік емес екі вектордың *скаляр көбейтіндісі* деп олардың ұзындықтары мен арасындағы бұрыштың косинусының көбейтіндісін айтады.

Егер бір вектор нөлдік вектор болса, онда осы векторлардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең деп есептеледі.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісі $\vec{a} \cdot \vec{b}$ деп белгіленеді. Анықтама бойынша

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos j\ ,$$

мұндағы j бұрышы — $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыш.

$\vec{a} \cdot \vec{a}$ көбейтіндісі *скаляр квадрат* деп аталады және $\vec{a}^2$ деп белгіленеді. Скаляр көбейтіндінің анықтамасынан $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ шығады.

Есептер

71. Қабырғалары 1-ге тең және диагональдары O нүктесінде қиылысатын $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышы берілген. а) $\overline{DE}$; ә) $\overline{OF}$; б) $\overline{BE}$; в) $\overline{FC}$ векторларын табыңдар .

72. $ABCD$ параллелограмында келесі векторларды көрсетіңдер: а) $\overline{AB} + \overline{AD}$; ә) $\overline{AC} + \overline{CD}$; б) $\overline{AD} + \overline{CB} + \overline{DC}$.

73. $ABCD$ тіктөртбұрышында $AB = 4$, $BC = 3$. AC және BD диагональдары O нүктесінде қиылысады және олар 5-ке тең. а) $|\overline{AB} + \overline{AD}|$; ә) $|\overline{AO} + \overline{BO}|$; б) $|\overline{OB} + \overline{OC}|$; в) $|\overline{AC} + \overline{BD}|$ векторларының қосындысының модулін табыңдар .

74. $ABCD$ ромбының O нүктесінде қиылысатын AC және BD диагональдары сәйкесінше 14-ке және 10-ға тең. Келесі векторлардың ұзындықтарын табыңдар: а) $\overline{AB} - \overline{AD}$; ә) $\overline{AB} - \overline{BC}$; б) $2\overline{AB} - \overline{AC}$; в) $\overline{BC} - \overline{OC}$.

75. Қабырғалары 1-ге тең және диагональдары O нүктесінде қиылысатын $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышы берілген. Келесі векторлардың ұзындықтарын табыңдар: а) $\overline{AO} - \overline{CD}$; ә) $\overline{AE} - \overline{OE}$; б) $\overline{AO} - \overline{FE}$.

76. $ABCD$ тіктөртбұрышында $AB = 4$, $AD = 3$, AC және BD диагональдары 5-ке тең. Келесі векторлардың ұзындықтарын табыңдар: а) $\frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AD}$; ә) $\frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}$.

77. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышы үшін келесі векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар: а) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AF}$; ә) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{EF}$; б) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{BE}$; ғ) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{DE}$.

78. Қабырғалары $AB = 8$, $AD = 6$ болатын $ABCD$ тіктөртбұрышы үшін келесі скаляр көбейтіндіні табыңдар: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; ә) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Координаталар

O нүктесі және оң бағытын көрсететін OE бірлік кесіндісі таңдап алынған түзу *координаталық түзу* немесе *координаталық ось* деп аталады. O нүктесі *координаталар басы* деп аталады.

Координаталық түзудегі *A нүктесінің координатасы* деп A нүктесінен O координаталар басына дейінгі x қашықтықты айтады. Егер A нүктесі оң жарты осьте жатса, ол "+" таңбасымен және егер A нүктесі теріс жарты осьте жатса, ол "–" таңбасымен алынады.

Теорема. ***Координаталық түзудегі координаталары сәйкесінше x_1, x_2 болатын A_1, A_2 нүктелерінің арақашықтығы келесі формуламен өрнектеледі:***

$$A_1A_2 = |x_2 - x_1|.$$

Жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесі деп ортақ координаталар басы болатын өзара перпендикуляр координаталық түзулердің жұбын айтады.

Координаталар басы O әрпімен, ал координаталық түзулер Ox, Oy арқылы белгіленеді және олар сәйкесінше *абсцисса осі*, *ордината осі* деп аталады.

Тікбұрышты координаталар жүйесімен берілген жазықтық *координаталық жазықтық* деп аталады.

Координаталық жазықтықтағы A нүктесін қарастырайық. Осы нүкте арқылы Ox осіне перпендикуляр түзу жүргіземіз және Ox осімен қиылысу нүктесін A_x арқылы белгілейміз. Нүктенің Ox осіндегі координатасын A нүктесінің *абсциссасы* деп атайды және x арқылы белгілейді. Осыған ұқсас A нүктесі арқылы Oy осіне перпендикуляр түзу жүргіземіз және Oy осімен қиылысу нүктесін A_y арқылы белгілейміз. Осы нүктенің Oy осіндегі координатасын A нүктесінің *ординатасы* деп атайды және y арқылы белгілейді.

Сонымен координаталық жазықтықтағы әрбір A нүктесіне $(x; y)$ жұбы сәйкес келеді және ол берілген координаталар жүйесіне қатысты *жазықтықтағы нүктенің координаталары* деп аталады. $(x; y)$ координаталары болатын A нүктесі $A(x; y)$ арқылы белгіленеді.

Координаталық жазықтықтағы $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ нүктелерінің арақашықтығы келесі формуламен өрнектеледі:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Центрі $(x_0; y_0)$ нүктесі және радиусы R болатын шеңбер келесі теңдеумен беріледі:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Түзу $ax + by + c = 0$ теңдеуімен беріледі, мұндағы a және b — бір уақытта нөлге тең емес сандар.

Басы координаталар басымен сәйкес келетіндей етіп қандай да бір векторды салайық. Сонда оның ұшының координаталары *вектордың координаталары* деп аталады.

Координаталары сәйкесінше (1; 0), (0; 1) болатын векторларды $\vec{i}$, $\vec{j}$ деп белгілейік. Бұл векторларды *координаталық векторлар* деп атаймыз және бастары координаталар басымен сәйкес келетіндей етіп саламыз.

Теорема. ***$\vec{a}$ векторын $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ түрінде көрсетуге болатын жағдайда ғана оның координаталары $(x; y)$ болады*** .

$A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ нүктелерімен берілген $\overline{A_1A_2}$ векторының ұзындығы келесі формуламен өрнектеледі:

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$\vec{a}_1(x_1; y_1)$ және $\vec{a}_2(x_2; y_2)$ векторларының скаляр көбейтіндісі келесі формуламен өрнектеледі:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Нормаль векторлары $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ болатын түзулердің арасындағы j бұрышының косинусы векторлардың скаляр көбейтіндісінің формуласымен есептеледі:

$$\cos j = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Дербес жағдайда, егер $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ векторларының скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, яғни

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

теңдігі орындалатын болса, онда екі түзу перпендикуляр болады.

Есептер

79. AB кесіндісінің ортасының координаталарын табыңдар, егер: а) $A(-2; 1)$, $B(6; 5)$; ә) $A(4; -3)$, $B(2; 1)$; б) $A(7; 5)$, $B(-5; -3)$.

80. $O(0; 0)$, $A(6; 2)$, $C(0; 6)$ және B нүктелері $OABC$ параллелограмының төбелері. B нүктесінің координаталарын табыңдар.

81. $O(0; 0)$, $A(8; 2)$, $B(10; 8)$, $C(2; 6)$ нүктелері параллелограмның төбелері. Осы параллелограмның диагональдарының қиылысу нүктесі болатын P нүктесінің координаталарын табыңдар.

82. Нүктелердің арақашықтығын табыңдар: а) $A_1(2; 1)$ және $A_2(1; -1)$; ә) $B_1(4; 3)$ және $B_2(-1; 3)$.

83. $A(3;\ 2)$ нүктесінен келесі осьтерге дейінгі қашықтықты табыңдар: а) Ox; ә) Oy.

84 $A(1;\ 2)$ немесе $B(1;\ -2)$ нүктелерінің қайсысы координаталар басына жақын орналасқан?

85. Келесі теңдеумен берілген шеңбердің C центрінің координаталарын және R радиусын табыңдар: а) $(x+5)^2+(y-2)^2=16$; ә) $x^2+(y-3)^2=9$.

86. а) Центрі $O(0;\ 0)$ нүктесі және радиусы 1-ге тең; ә) центрі $C(-2;\ 1)$ нүктесі және радиусы 3-ке тең болатын шеңбердің теңдеуін табыңдар.

87. Центрі координаталар басы болатын және $A(3;\ 3)$ нүктесі арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін табыңдар.

88. Келесі теңдеу шеңбердің теңдеуі болатынын дәлелдеңдер: а) $x^2-8x+y^2=0$; ә) $x^2+2x+y^2-6y+4=0$. Оның радиусы мен центрінің координаталарын табыңдар.

89. $\vec{a}_1(2;\ -1)$ және $\vec{a}_2(-1;\ 2)$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

90. Келесі теңдеулермен берілген түзулердің арасындағы бұрышты табыңдар: а) $2x+y-1=0$, $x-2y+3=0$; ә) $x+y+1=0$, $x-y-1=0$.

91. $A_0(2;\ 1)$ нүктесі арқылы өтетін және нормаль векторы $\vec{n}(1;\ -1)$ болатын түзудің теңдеуін табыңдар.

92. $M(-1;\ 3)$, $N(1;\ 4)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңдар. Осы түзудің нормаль векторының координаталарын табыңдар.

93. Келесі түзулер жұбының қайсысы: а) параллель; ә) перпендикуляр екенін анықтаңдар:

1) $x+y-2=0$, $x+y+3=0$;
2) $x+y-2=0$, $x-y-3=0$;
3) $-7x+y=0$, $7x-y+4=0$;
4) $4x-2y-8=0$, $-x-2y+4=0$.

94. Келесі түзулердің қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар:
а) $x-y-1=0$, $x+y+3=0$;
ә) $x-3y+2=0$, $2x-5y+1=0$.

95. $\vec{a}(-1;\ 2)$ және $\vec{b}(2;\ -4)$ векторлары берілген. $3\vec{a}-2\vec{b}$ векторының координаталарын табыңдар.

96. $\vec{a}_1(1;\ 3)$ және $\vec{a}_2(3;\ -1)$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

97. $\vec{a}_1(3;\ 4)$ және $\vec{a}_2(4;\ 3)$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

I тарау

СТЕРЕОМЕТРИЯ АКСИОМАЛАРЫ. КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

§ 1. Стереометрияның негізгі ұғымдары

Стереометрия немесе кеңістіктегі геометрия — әртүрлі кеңістіктік фигуралардың орнын, пішінін, өлшемдерін және қасиеттерін зерттейтін геометрияның бөлімі.

"Стереометрия" — грек сөзі, яғни "стереос" — қатты (дене) және "метрео" — өлшеу деген сөздерінен шыққан. "Стереометрия" сөзі денелерді өлшеу дегенді білдіреді.

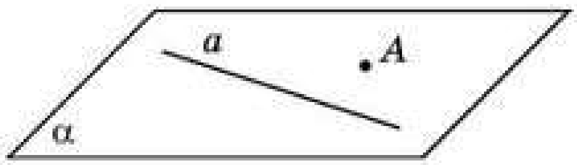
Стереометрияның негізгі ұғымдары кеңістіктегі объектілерді көрсететін *нүкте, түзу* және *жазықтық* болып табылады.

Нүкте — өте кішкентай, яғни өлшемдерін ескермеуге болатын объектілердің орны. Евклид өзінің белгілі "Бастамалары" кітабында нүктенің бөліктері жоқ деп жазды.

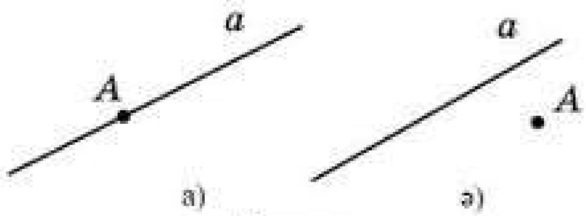
Түзу тіктөртбұрышты пішінді үстелдің қыры, керілген жіптің бейнесі болады. Түзудің бойымен жарықтың сәулесі таралады.

Жазықтық судың тегіс беті, үстел, тақта, айна және т.б. бетінің бейнесі болады.

Нүкте, түзу және жазықтықты 1.1-суретте көрсетілгендей кескіндейміз.



1.1-сурет



1.2-сурет

Нүктелер A, B, C, ... латынның бас әріптерімен белгіленеді.

Нүкте берілген түзудің бойында жатуы мүмкін (1.2, а-сурет) немесе жатпауы да мүмкін (1.2, ә-сурет).

Егер нүкте түзудің бойында жатса, онда түзу нүкте арқылы өтеді деп айтады.

Түзулер a, b, c, ... латынның кіші әріптерімен белгіленеді, сондай-ақ осы түзуде жататын екі нүктені көрсететін екі латынның әріптерімен белгіленеді, мысалы: AB түзуі, C_1D_1 түзуі және т.б.

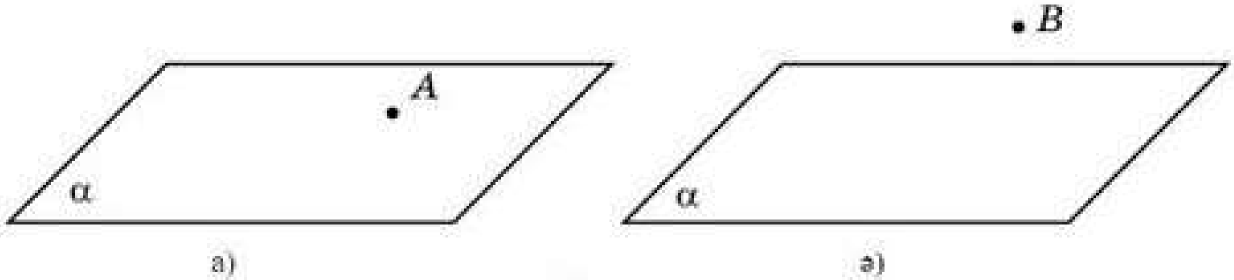
Математикада тиістілік қатынасы $\in$ белгісімен белгіленеді. Мысалы, A нүктесінің a түзуіне тиісті болуы $A \in a$ деп, ал B нүктесінің a түзуіне тиісті еместігі $B \notin a$ деп белгіленеді.

Кеңістікте екі түзудің бір ғана ортақ нүктесі бар болса, онда олар *қиылысқан түзулер* деп аталады.

C нүктесі a және b түзулерінің қиылысу нүктесі болуы $C = a \cap b$ деп белгіленеді.

Нүкте берілген жазықтықта жатуы (1.3, а-сурет) немесе жатпауы мүмкін (1.3, ә-сурет).

Егер нүкте жазықтықта жатса, онда жазықтық осы нүкте арқылы өтеді деп айтады.

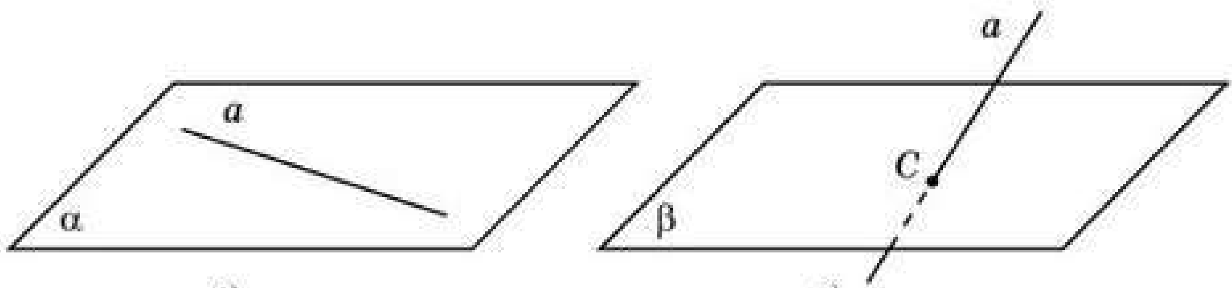


1.3-сурет

Жазықтық α, β, g ... грек әріптерімен, сонымен бірге осы жазықтықтағы бір түзудің бойында жатпайтын үш нүктені көрсететін латынның үш әрпімен белгіленеді. Мысалы, ABC жазықтығы, $D_1E_1F_1$ жазықтығы және т.б.

A нүктесінің a жазықтығында жатуы $A \in a$ деп, ал B нүктесінің a жазықтығында жатпауы $B \notin a$ деп белгіленеді.

Егер түзудің әрбір нүктесі жазықтықта жатса, онда түзу жазықтықта жатады немесе жазықтық түзу арқылы өтеді деп айтады (1.4, а-сурет).



1.4-сурет

a түзуінің a жазықтығында жатуы $a \in a$ деп белгіленеді.

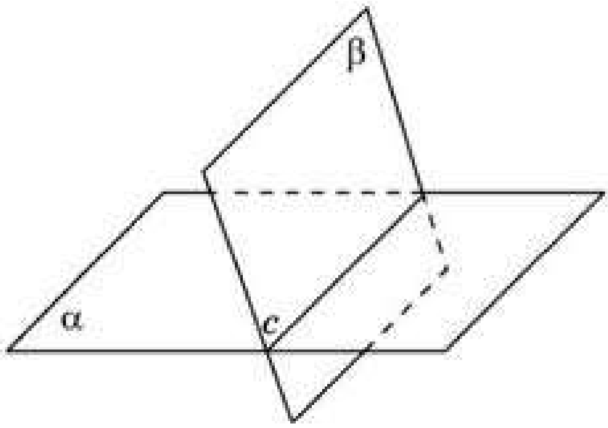
Егер түзу мен жазықтықтың бір ғана ортақ нүктесі бар болса, онда түзу жазықтықты қиып өтеді дейді (1.4, ә-сурет).

C нүктесі a түзуі мен b жазықтығының қиылысу нүктесі болуы $C = a \cap b$ деп белгіленеді (1.4, ә-сурет).

Жазықтықты қиып өтпейтін түзуді салып көріңдер.

Егер екі жазықтықтың ортақ нүктелері бір түзудің нүктелері болса, онда осы жазықтықтар осы түзудің бойымен қиылысады деп айтамыз (1.5-сурет).

c түзуі a жазықтығы мен b жазықтығының қиылысу сызығы болуы $c = a \cap b$ деп белгіленеді.



1.5-сурет

Қиылыспайтын екі жазықтықты салып көріңдер.

Тарихи мәліметтер

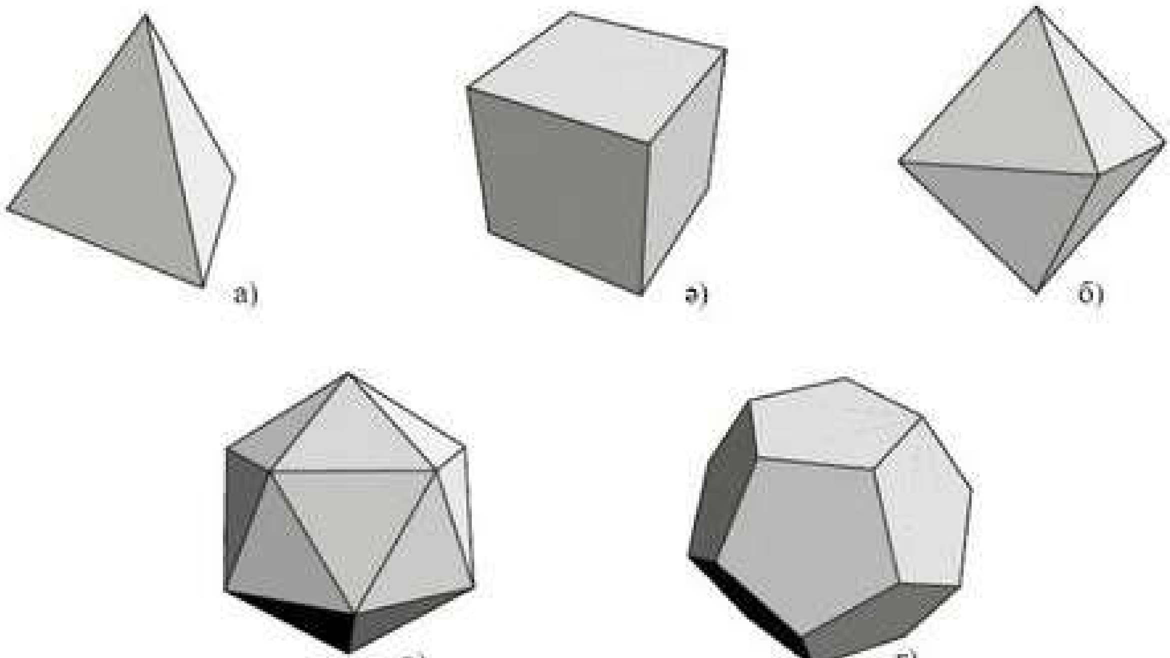
Стереометрия планиметрия курсы сияқты адамның практикалық іс-әрекетінің қажеттілігіне байланысты туындап, дамыды. Ежелгі Мысырда геометрияның пайда болуы туралы б.з.д. 2000 жыл бұрын Ежелгі грек ғалымы Геродот былай деп жазды: "Мысырлық фараон Сеозоострис әрбір мысырлыққа жер телімін жеребе арқылы бөліп беріп, әрбір жер теліміне тиісті салық алып отырды. Ніл өзені тасып, жерді су басқан кезде зардап шеккендер патшаға барды, осы кезде патша салықты тиісті етіп азайту үшін жер телімі қаншаға азайғанын анықтауға жер өлшеушілерді жібереді. Осылайша Мысырда геометрия пайда болды, кейін Грекияға ауысты".

Қарапайым ғимараттарды салу кезінде де құрылысқа қанша материал қажет екенін есептеу, кеңістіктегі нүктелердің арақашықтығын, түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрышты есептеу, қарапайым геометриялық фигуралардың қасиеттерін қолдану қажет болды. Б.з.д. 2, 3 және 4 мың жыл бұрын салынған мысырлық пирамидалар өзінің метрикалық қатынастарының дәлдігімен таңғалдырады. Бұл сол замандағы құрылысшылардың стереометрияны жақсы білгенін көрсетеді.

Теңізде жүзу мен сауданы дамыту уақыт пен кеңістікте бағдарлау біліктігін талап етті, яғни жыл маусымдарының ауысу мерзімін білу, картада өзінің тұрған жерін анықтау, қозғалыс бағытын табу және қашықтықты өлшеу. Күн, Ай, жұлдыздарды бақылау және кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтардың өзара орналасуы заңдылықтарын зерттеу осы есептерді шешуге мүмкіндік берді және жаңа ғылымның бастамасы — астрономияға жол ашты.

Б.з.д. VII ғасырдан бастап Ежелгі Грекияда практикалық геометриядан теориялық геометрияға біртіндеп ауысуы жүзеге асатын философиялық мектептер құрылды. Бұл мектептерде тұжырымдар орын алып, олардың көмегімен жаңа геометриялық деректер алуға мүмкіндік болды.

Алғашқы танымал мектептердің бірі Пифагор мектебі және ол негізін қалаушы Пифагордың құрметіне аталған (б.з.д. VI—V ғғ.). Пифагорлықтар өздерінің философиялық теорияларына дұрыс көпжақтарды қолданған, олар фигуралардың пішіндерін тұрмыстағы элементтермен салыстырған, яғни от — дұрыс тетраэдр (1.6, а-сурет), жер — гексаэдр (1.6, ә-сурет); ауа — октаэдр (1.6, б-сурет); су — икосаэдр (1.6, в-сурет); жержүзі — додекаэдр (1.6, г-сурет).



1.6-сурет

Дұрыс көпжақтардың атауында грек тілінен аударғанда: "тетра" — төрт, тетраэдрдың жақтары — төрт дұрыс үшбұрыштар; "гекса" — алты, гексаэдрдің (куб) алты квадрат жағы бар; "окто" — сегіз, октаэдрдің жақтары — сегіз дұрыс үшбұрыштар; "икоси" — жиырма, икосаэдрдің жақтары — жиырма дұрыс үшбұрыштар, "додека" — он екі, додекаэдрдің жақтары — он екі дұрыс бесбұрыштар, ал "эдра" — "жақ" дегенді білдіреді.

Кейінгі философиялық мектеп — Александрия мектебі б.з.д. 300 жыл бұрын әлемге белгілі ғалым Евклидті әкелуімен қызықты. Өкінішке орай, оның өмірі туралы мәліметтер аз. Өзінің бір шығармаларында Папп математик (б.з. III ғ.) Евклидті абырой мен өзімшілдіктен аулақ, адал, сабырлы және сыпайы адам ретінде сипаттаған. Евклид әйгілі "Бастамалар" кітабын жазды, онда геометрия алғашқы ғылыми тұрғыда баяндалды және геометрияның дұрыс аксиоматикалық құрылуы ұсынылды. Екі мың жылдан бері бұл кітап геометрияның жүйелі курсын оқуға негіз болды.

Бірде Птоломей патшасы Евклидтен: "Геометрияны оның "Бастамасынан" басқа қысқаша оқу жолы бар ма?" — деп сұрағанда Евклид: "Геометрияда патшалыққа жол жоқ" — деп жауап береді.

Соңғы жүзжылдықта жаңа әдістер, соның ішінде геометриялық есептерді алгебра тіліне және керісінше көшіруге мүмкіндік беретін координаталық және векторлық әдістер пайда болды. Геометриялық зерттеулердің жаңа бағыттары дамып келеді, атап айтсақ: Лобачевский геометриясы, проективтік геометрия, топология, компьютерлік геометрия және т.б. Геометриялық әдістер басқа да ғылымдарда, мысалы, салыстырмалылық теориясы, кванттық механика, кристаллография және басқа көптеген ғылымдарда кеңінен қолданылады.

Сұрақтар

1. Стереометрия нені зерттейді?
2. "Стереометрия" сөзі грек тілінен қалай аударылады?
3. а) Нүкте; ә) түзу; б) жазықтық қандай объектілердің орны болады?
4. а) Нүкте; ә) түзу; б) жазықтық қалай белгіленеді?
5. A нүктесінің a түзуіне тиісті болуы қалай белгіленеді?
6. B нүктесінің a түзуіне тиісті еместігі қалай белгіленеді?
7. Кеңістікте қандай екі түзу қиылысқан түзулер деп аталады?
8. C нүктесі a және b түзулерінің қиылысу нүктесі болуы қалай белгіленеді?
9. A нүктесінің a жазықтығында жатуы қалай белгіленеді?
10. B нүктесінің a жазықтығында жатпауы қалай белгіленеді?
11. Қандай жағдайда түзу: а) жазықтықта жатыр; ә) жазықтықты қиып өтеді деп айтады?
12. a түзуінің a жазықтығында жатуы қалай белгіленеді?
13. C нүктесі a түзуі мен b жазықтығының қиылысу нүктесі болуы қалай белгіленеді?
14. Қандай жағдайда екі жазықтық түзудің бойымен қиылысады деп айтады?
15. c түзуі a жазықтығы мен b жазықтығының қиылысу сызығы болуы қалай белгіленеді?
16. Геометрия қашан және қайда пайда болды?
17. 1.6-суретте кескінделген көпжақтар қалай аталады? Олардың неше жағы бар?

Есептер

А

1.1. Сыныптың қабырғаларын жазықтықтың бөліктері деп қарастырыңдар.
а) Қиылысатын екі жазықтықты;
ә) қиылыспайтын екі жазықтықты;
б) жазықтықты және онымен қиылыспайтын түзуді;
в) қиылысатын екі түзуді;
г) қиылыспайтын екі түзуді көрсетіңдер.

1.2. Кескіндеңдер:

ә) қиылысатын екі түзуді;

ә) жазықтықты және онымен қиылыспайтын түзуді;

б) қиылыспайтын екі жазықтықты.

1.3. A, B, C нүктелері бір түзудің бойында жатпайды. Осы нүктелердің әртүрлі жұптары арқылы өтетін түзулерді жазыңдар.

1.4. A, B, C, D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. Осы нүктелердің әртүрлі үшеуі арқылы өтетін жазықтықтарды жазыңдар.

B

1.5. A, B, C, D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. AD түзуімен: а) ABC; ә) BCD жазықтығының қиылысу нүктесін көрсетіңдер.

1.6. A, B, C, D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. ABC жазықтығымен: а) ABD; ә) BCD; б) ACD жазықтығының қиылысу түзуін көрсетіңдер.

1.7. Бір түзудің бойында үшеуі жатпайтын: а) үш нүктенің; ә) төрт нүктенің; б) бес нүктенің әртүрлі жұбы арқылы неше түзу өтеді?

1.8. Бір жазықтықта жатпайтын төрт нүктенің әртүрлі үшеуі арқылы неше жазықтық өтеді?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

1.9. Жазықтықтағы геометрияның аксиомаларын тұжырымдаңдар.

§ 2. Стереометрия аксиомалары

Планиметрия курсындағыдай кеңістікте нүктелердің, түзулер мен жазықтықтардың кейбір қасиеттері дәлелдеусіз қабылданады, олар *аксиомалар* деп аталады. Грек тілінен аударғанда "аксиома" — "лайықты мойындау", яғни дәлелдеуді талап етпейтін тұжырымды білдіреді.

Стереометрияның келесі аксиомаларын тұжырымдайық.

1. *Кеңістіктегі кез келген екі нүкте арқылы бір ғана түзу өтеді.*

Белгілеулерді пайдаланып, бұл аксиоманы келесі түрде тұжырымдауға болады.

Кеңістіктегі кез келген A_1, A_2 нүктелері үшін $A_1 \in a$ және $A_2 \in a$ болатындай жалғыз a түзуі табылады.

2. *Кеңістіктегі бір түзудің бойында жатпайтын кез келген үш нүкте арқылы бір ғана жазықтық өтеді.*

Белгілеулерді пайдаланып, бұл аксиоманы келесі түрде тұжырымдауға болады.

Кеңістіктегі бір түзудің бойында жатпайтын кез келген A_1, A_2, A_3 нүктелері үшін $A_1 \in \alpha$ және $A_2 \in \alpha$, $A_3 \in \alpha$ болатындай жалғыз α жазықтығы табылады.

3. *Егер екі жазықтықтың ортақ нүктесі бар болса, онда олар осы нүкте арқылы өтетін түзудің бойымен қиылысады* .

Белгілеулерді пайдаланып, бұл аксиоманы өздерің тұжырымдаңдар.

4. *Бір жазықтықта жатпайтын кем дегенде төрт нүкте бар болады* .

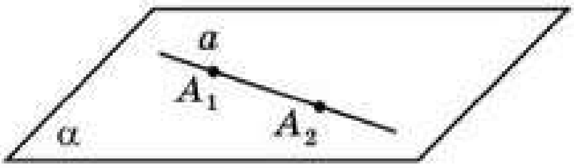
Белгілеулерді пайдаланып, бұл аксиоманы өздерің тұжырымдаңдар.

5. *Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтар үшін планиметрияның барлық аксиомалары орындалады* .

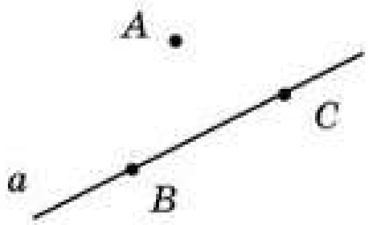
Стереометрияның аксиомаларын қолданып, логикалық тұжырымдардың көмегімен басқа қасиеттердің дұрыстығы дәлелденеді. Олардың кейбіреуін қарастырайық.

1-қасиет. *Егер түзу мен жазықтықтың екі ортақ нүктесі бар болса, онда түзу сол жазықтықта жатады* .

Дәлелдеуі. a түзуінің α жазықтығымен A_1 және A_2 екі ортақ нүктесі бар болсын (2.1-сурет).



2.1-сурет



2.2-сурет

α жазықтығында планиметрияның аксиомалары орындалғандықтан, осы жазықтықта A_1, A_2 нүктелері арқылы бір ғана түзу өтеді. Егер ол a түзуімен сәйкес келмесе, онда біз берілген екі нүкте арқылы өтетін екі түзуді алар едік, ал бұл 1-аксиомаға қайшы келеді. Демек, бұл түзулер беттеседі. Осыдан, a түзуі α жазықтығында жатады. ◻

2-қасиет. *Түзу және осы түзуде жатпайтын нүкте арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады* .

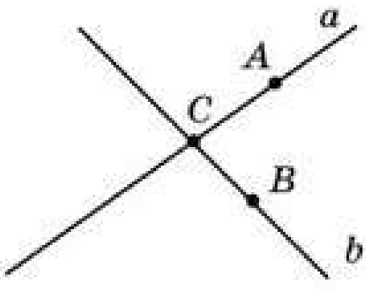
Дәлелдеуі. A нүктесі a түзуінің бойында жатпайтын болсын. Планиметрия аксиомалары орындалатындықтан, a түзуінің бойынан B, C нүктелері табылады (2.2-сурет) .

2-аксиома бойынша бір түзудің бойында жатпайтын A, B, C нүктелері арқылы бір ғана α жазықтығы өтеді. 1-қасиет бойынша a түзуі α жазықтығында жатады. Демек, α жазықтығы a түзуі мен A нүктесі арқылы өтеді.

Осы жазықтықтың біреу ғана болатынын дәлелдейік. Расында да, a түзуі мен A нүктесі арқылы өтетін жазықтық A, B, C нүктелері арқылы да өтеді. 2-аксиома бойынша ол α жазықтығымен беттеседі. ◻

Қалай ойлайсыңдар, кеңістіктегі екі нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

3-қасиет. Қиылысқан екі түзу арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады.



2.3-сурет

Дәлелдеуі. a және b түзулері C нүктесінде қиылысқан болсын. a және b түзулерінде планиметрияның аксиомалары орындалғандықтан, олардың бойынан C нүктесінен өзгеше сәйкесінше A және B нүктелері табылады (2.3-сурет).

A, B, C нүктелері бір түзудің бойында жатпайды, сондықтан 2-аксиома бойынша олар арқылы бір ғана жазықтық өтеді. A және C нүктелері осы жазықтықта жатқандықтан 1-қасиет бойынша a түзуі осы жазықтықта жатады. Осыған ұқсас B және C нүктелері осы жазықтықта жатқандықтан, 1-қасиет бойынша b түзуі осы жазықтықта жатады. Демек, жазықтық берілген екі түзу арқылы өтеді.

Осы жазықтықтың біреу ғана болатынын дәлелдейік. Расында да, a және b түзулері арқылы өтетін жазықтық бір түзудің бойында жатпайтын A, B, C нүктелері арқылы өтеді. 2-аксиома бойынша мұндай жазықтық біреу ғана болады ▢

Кез келген жазықтық үшін онда жатпайтын нүкте табылатынын өздерің дәлелдеңдер.

Сұрақтар

1. "Аксиома" сөзі нені білдіреді?
2. Стереометрияның аксиомаларын тұжырымдаңдар.
3. Белгілеулерді пайдаланып, стереометрияның аксиомаларын тұжырымдаңдар.
4. Түзу мен жазықтықтың екі ортақ нүктесі бар болса, онда түзу мен жазықтық қалай орналасады?
5. Түзу мен оның бойында жатпайтын нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?
6. Қиылысқан екі түзу арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

Есептер

А

2.1. Бір нүкте арқылы неше түзу жүргізуге болады?

2.2. Бір түзу арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

2.3. Берілген үш нүкте арқылы неше жазықтық өтуі мүмкін? Үш нүкте қалай орналасқанда олар арқылы шексіз көп жазықтықтар жүргізуге болады?

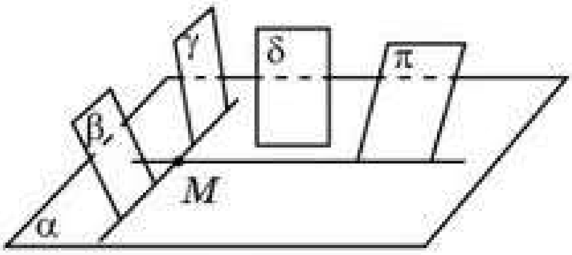
2.4. Бір жазықтықта жатпайтын төрт нүкте берілген. Олардың үшеуі бір түзуде жатуы мүмкін бе?

2.5. Екі жазықтықтың: а) бір ортақ нүктесі; ә) екі ортақ нүктесі болуы мүмкін бе?

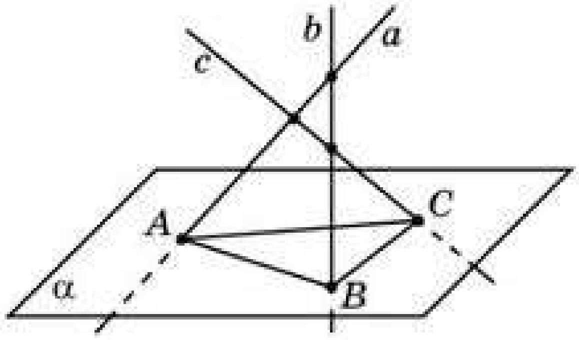
2.6. Екі жазықтықтың екі ортақ түзулері болуы мүмкін бе?

B

2.7. M нүктесі α жазықтығында жатыр. 2.4-суреттен M нүктесі қандай жазықтықтарда жататынын анықтаңдар.



2.4-сурет



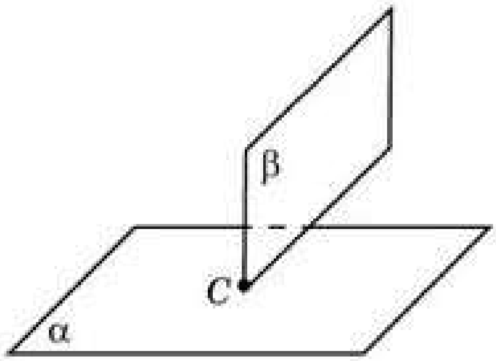
2.5-сурет

2.8. 2.5-суретте қос-қостан қиылысатын a, b, c түзулері жазықтықты сәйкесінше A, B, C нүктелерінде қиып өтеді. Сурет дұрыс салынған ба?

2.9. Параллелограмның екі төбесі және диагональдарының қиылысу нүктесі бір жазықтықта жатыр. Параллелограмның басқа екі төбесі де осы жазықтықта жатады ма?

2.10. 2.6-суретте кескінделген екі жазықтықтың қиылысуы нені береді?

2.11. Қиылысқан екі жазықтық кеңістікті неше бөлікке бөледі?



2.6-сурет

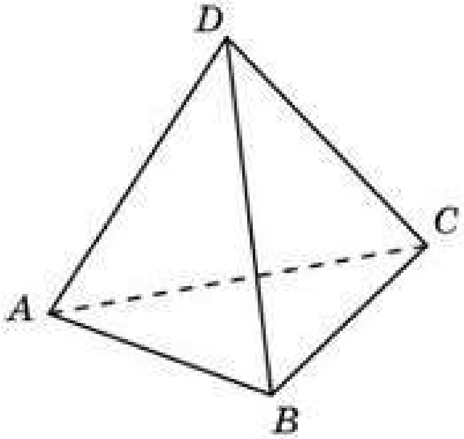
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

2.12. Көпбұрыштың анықтамасын қайталаңдар.

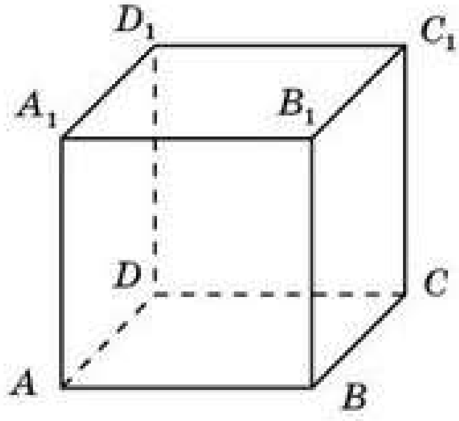
§ 3*. Кеңістіктегі фигуралар. Тетраэдр, куб, параллелепипед

Кеңістіктік фигуралардың ішінде *көпжақ* — бетінің саны шектеулі көпбұрыштардан тұратын дене. Осы көпбұрыштар көпжақтың *жақтары*, ал көпбұрыштың қабырғалары мен төбелері көпжақтың сәйкесінше *қырлары* мен *төбелері* деп аталады.

Көпжақтың бір жағында жатпайтын екі төбесін қосатын кесіндіні оның *диагоналі* деп атайды. Қарапайым көпжақтардың бірі — беті төрт дұрыс үшбұрыштан тұратын тетраэдр (3.1-сурет). Әдетте, тетраэдр оның төбелерін көрсету арқылы белгіленеді, мысалы, $ABCD$.



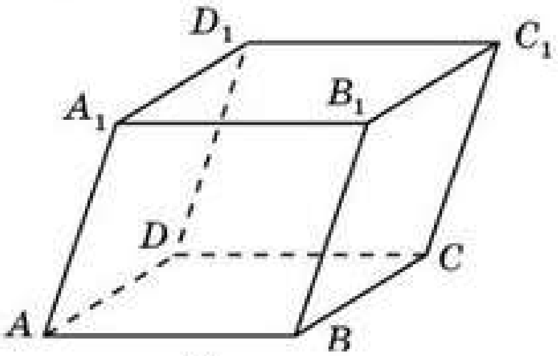
3.1-сурет



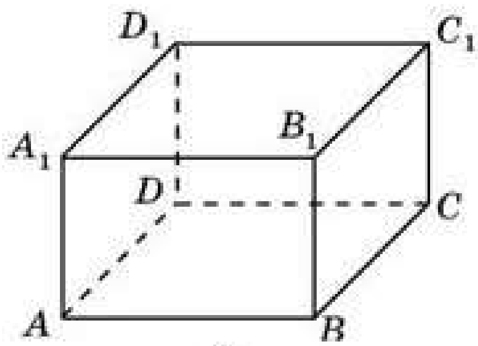
3.2-сурет

Куб деп алты жағы да квадрат болып келетін көпжақты айтады (3.2-сурет). Әдетте, куб оның төбелерін көрсету арқылы белгіленеді, мысалы $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Қыры 1-ге тең куб *бірлік куб* деп аталады.

Параллелепипед деп қарама-қарсы жақтары қос-қостан өзара параллель болатын көпжақты (алтыжақ) айтады (3.3-сурет). Параллелепипед оның төбелерін көрсету арқылы белгіленеді, мысалы, $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



а)

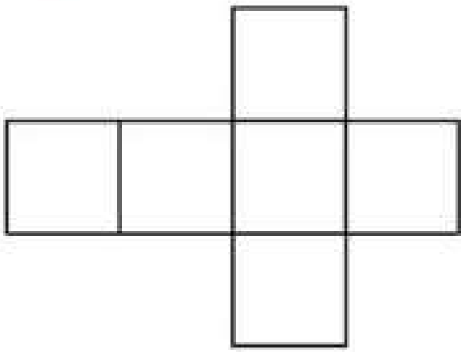


ә)

3.3-сурет

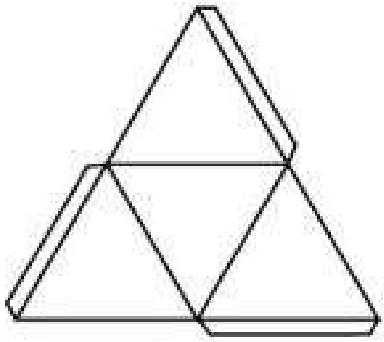
Барлық жақтары тіктөртбұрыштар болатын параллелепипедті *тікбұрышты параллелепипед* деп атайды (3.3, ә-сурет). Басқаша жағдайда ол *көлбеу параллелепипед* деп аталады (3.3, а-сурет).

Қалай ойлайсыңдар, куб параллелепипед бола ма?


3.4-сурет

Егер көпжақтың бетін барлық көпбұрыштары бір жазықтықта жататындай етіп кейбір қырлары бойынша кесіп, жазықтыққа жазса, онда пайда болған фигура *көпжақтың жазбасы* деп аталады. Мысалы, 3.4-суретте кубтың жазбасы кескінделген.

Қатты қағаздан, картоннан немесе басқа материалдан көпжақтың моделін жасау үшін алдымен оның жазбасын дайындап, кейін сәйкесінше қырларын желімдеп жапсырған жөн. Ыңғайлы болу үшін көпжақтың жазбасын желімдеп жапсыруға арналған қалпақтармен жасайды. 3.5-суретте тетраэдрдің жазбасы қалпақтарымен кескінделген.



3.5-сурет

Жазықтықтағы сияқты кеңістік үшін де қозғалыс, теңдік және ұқсастық ұғымдары анықталады.

Қозғалыс деп нүктелердің арақашықтығын сақтайтын кеңістіктегі түрлендіруді айтады.

Яғни, егер қозғалыс кез келген екі A, B нүктелерін A', B' нүктелеріне көшірсе, онда $A'B' = AB$ орындалады.

Егер кеңістікте бір фигураны екінші фигураға көшіретін қозғалыс бар болса, онда осы *екі фигура тең* деп аталады.

Ұқсастық деп нүктелердің арақашықтығы сол бір санға ғана өзгеретін кеңістіктегі түрлендіруді айтады.

Яғни қозғалыс кез келген екі A, B нүктелерін A', B' нүктелеріне көшірсе, онда $A'B' = kAB$ орындалады, мұндағы k — *ұқсастық коэффициенті* деп аталатын оң сан.

Егер кеңістікте бір фигураны екінші фигураға көшіретін ұқсастық бар болса, онда осы екі фигура *ұқсас* деп аталады.

Қалай ойлайсыңдар, а) екі куб; ә) екі параллелепипед ұқсас бола ма?

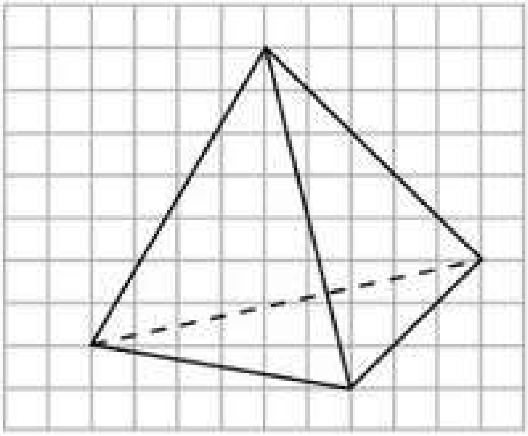
Сұрақтар

1. Кеңістіктегі қандай фигура көпжақ деп аталады?
2. Көпжақтың диагоналі дегеніміз не?
3. Қандай көпжақ: а) куб; ә) параллелепипед; б) тетраэдр деп аталады?
4. Қандай параллелепипед тікбұрышты деп аталады?
5. а) Куб; ә) параллелепипед; б) тетраэдр қалай белгіленеді?
6. Қоршаған әлемнен: а) куб; ә) параллелепипед; б) тетраэдр пішіндес денелерге мысалдар келтіріңдер.
7. Көпжақтың жазбасы дегеніміз не?
8. Кеңістіктегі қандай түрлендіру *қозғалыс* деп аталады?
9. Кеңістікте қандай фигуралар *тең* деп аталады?
10. Кеңістікте қандай фигуралар *ұқсас* деп аталады?

Есептер

А

3.1. а) Тетраэдр; ә) куб; б) параллелепипедтің неше төбесі (Т), қыры (Қ) және жағы (Ж) болады?



3.6-сурет

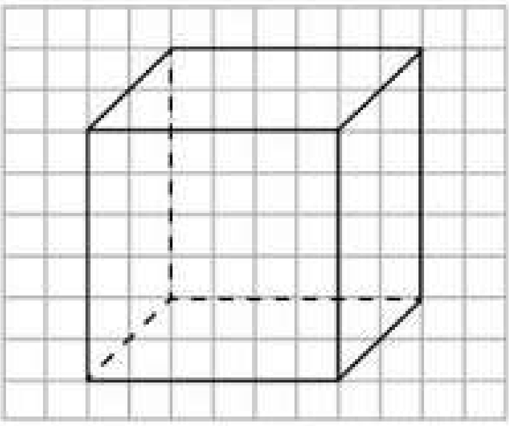
3.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қыры болатын және ABC жазықтығын қиып өтетін түзулерді көрсетіңдер.

3.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының жағы болатын және BCC_1 жазықтығымен қиылысатын жазықтықты көрсетіңдер.

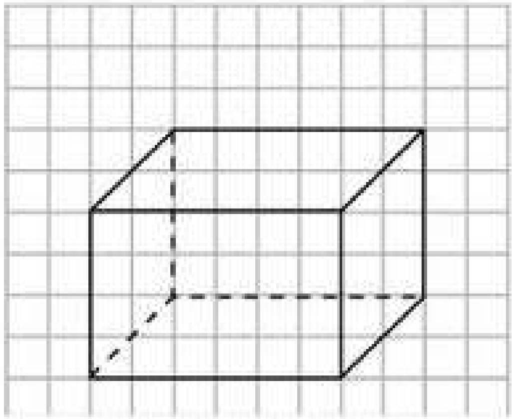
3.4. Торкөз қағазда 3.6-суреттегіге ұқсас тетраэдрді салыңдар.

3.5. Торкөз қағазда 3.7-суреттегіге ұқсас кубты салыңдар.

3.6. Торкөз қағазда 3.8-суреттегіге ұқсас тікбұрышты параллелепипедті салыңдар.



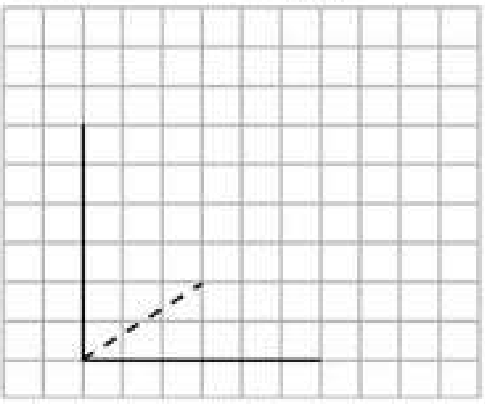
3.7-сурет



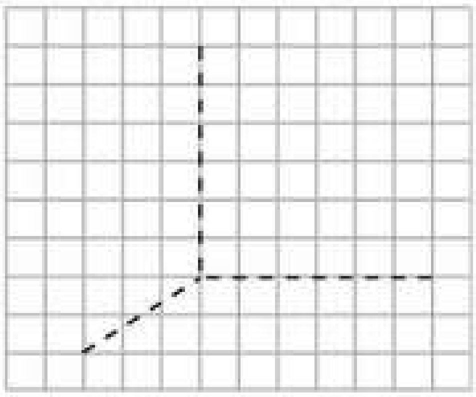
3.8-сурет

B

3.7. Торкөз қағазда кубтың үш қыры кескінделген (3.9-сурет). Кубтың толық кескінін салыңдар.



а)

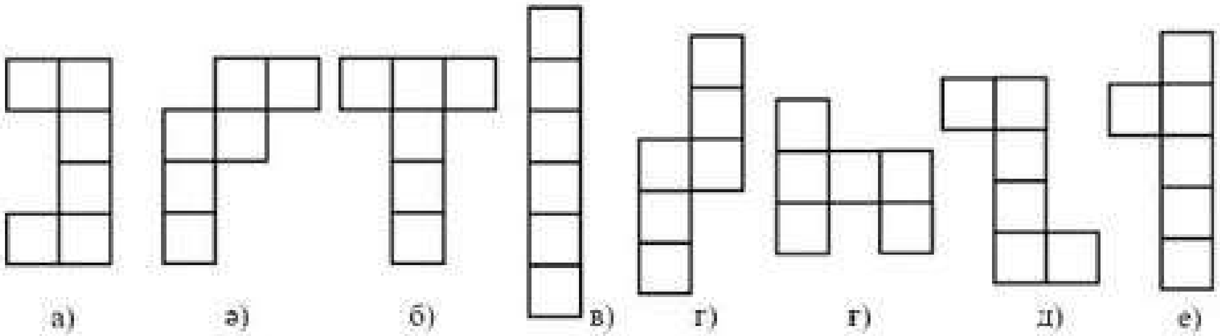


ә)

3.9-сурет

3.8. а) Тетраэдрдің; ә) кубтың; б) параллелепипедтің неше диагоналі болады?

3.9. 3.10-суретте кескінделген фигуралардың қайсысы кубтың жазбалары болады?



3.10-сурет

3.10. Тетраэдрдің және тікбұрышты параллелепипедтің жазбаларын салыңдар.

3.11. Тетраэдрдің, кубтың және параллелепипедтің жазбаларын дайындап, олардың модельдерін құрастырыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

3.12. Қоршаған әлемнен: а) тетраэдр; ә) куб; б) параллелепипед пішіндес нысандарға мысалдар келтіріңдер.

§ 4*. Кеңістіктегі фигуралар. Призма, пирамида

Призма деп беті екі тең көпбұрыштардан және әрбір табанымен ортақ қабырғалары бар параллелограмдардан тұратын көпжақты айтады. Көпбұрыштар призманың *табандары* , ал параллелограмдар призманың *бүйір жақтары* деп аталады. Призманың табандарында жатпайтын қырлары оның *бүйір қырлары* деп аталады.

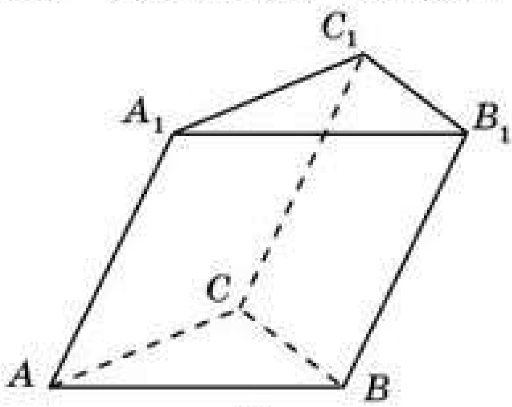
Призмалар табандарында жатқан көпбұрыштарға (үшбұрыштар, төртбұрыштар, бесбұрыштар және т.б.) байланысты сәйкесінше үшбұрышты, төртбұрышты, бесбұрышты және т.б. болып бөлінеді.

Егер призманың табандары n-бұрыштар болса, онда ол *n-бұрышты призма* деп аталады.

Призма оның төбелерін көрсету арқылы белгіленеді, мысалы: $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призмасы, $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыбұрышты призмасы.

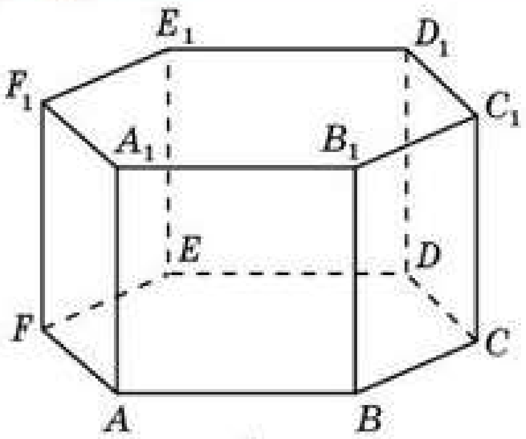
4.1-суретте үшбұрышты және алтыбұрышты призмалар кескінделген.

Бүйір жақтары тіктөртбұрыштар болатын призма *тік* деп аталады. Басқаша жағдайда ол *көлбеу призма* деп аталады. 4.1, а-суретте үшбұрышты көлбеу призма кескінделген.



а)

4.1-сурет



ә)

4.1-сурет

4.1, ә-суретте тік алтыбұрышты призма кескінделген.

Табандары дұрыс көпбұрыштар болатын тік призма *дұрыс* деп аталады. 4.1, ә-суретте дұрыс алтыбұрышты призма кескінделген.

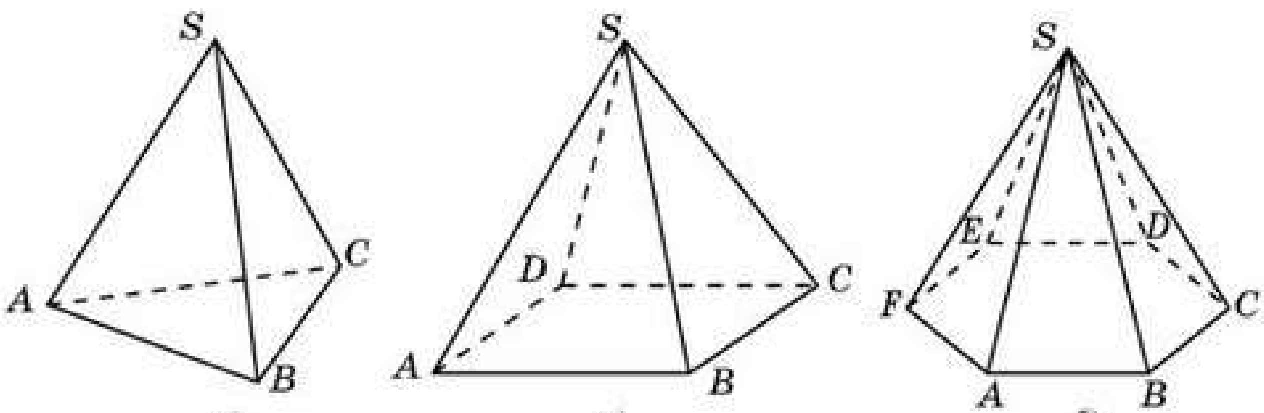
Қалай ойлайсыңдар, параллелепипед төртбұрышты призма бола ма?

Пирамида деп көпбұрыштан және ортақ төбесі бар үшбұрыштардан тұратын көпжақты айтады. Көпбұрыш пирамиданың *табаны*, ал үшбұрыштар пирамиданың *бүйір жақтары* деп аталады. Бүйір жақтарының ортақ төбесі пирамиданың *төбесі*, ал төбесінен шығатын қырлары пирамиданың *бүйір қырлары* деп аталады.

Пирамидалар табанында жатқан көпбұрыштарға (үшбұрыштар, төртбұрыштар, бесбұрыштар және т.б.) байланысты сәйкесінше үшбұрышты, төртбұрышты, бесбұрышты және т.б. болып бөлінеді.

Егер пирамиданың табаны n-бұрышты болса, онда ол *n-бұрышты пирамида* деп аталады.

4.2-суретте үшбұрышты, төртбұрышты және алтыбұрышты пирамидалар кескінделген.



а) ә) б)

4.2-сурет

Пирамида оның төбелерін көрсету арқылы белгіленеді, мысалы: $SABC$ үшбұрышты пирамида (4.2, а-сурет), $SABCD$ төртбұрышты пирамида (4.2, ә-сурет), $SABCDEF$ алтыбұрышты пирамида (4.2, б-сурет).

Табанында дұрыс көпбұрыш жататын және барлық бүйір қырлары өзара тең болатын пирамида *дұрыс* деп аталады.

Қалай ойлайсыңдар, тетраэдр үшбұрышты пирамида бола ма?

Сұрақтар

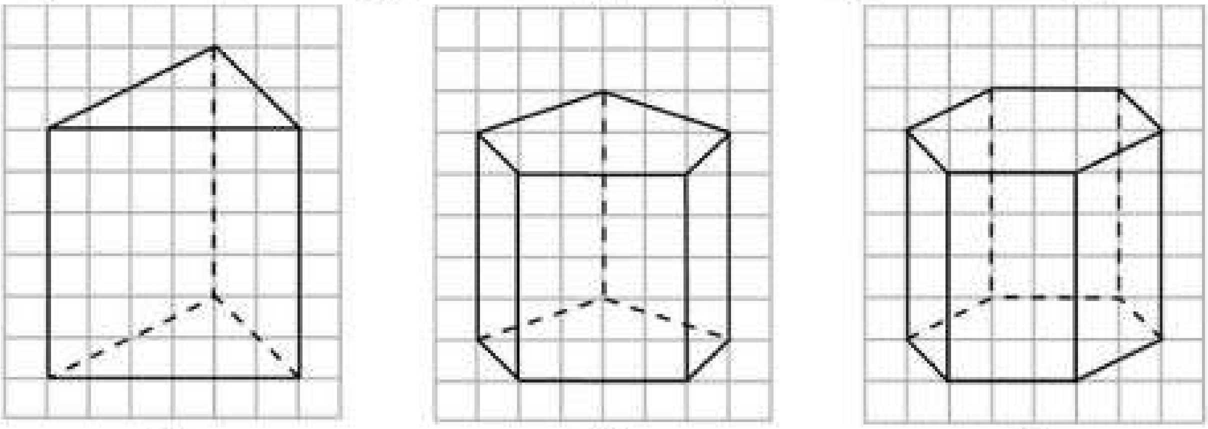
1. Қандай көпжақ призма деп аталады?
2. Қандай призма тік деп аталады?
3. Қандай призма дұрыс деп аталады?
4. Призма қалай белгіленеді?
5. Қандай көпжақ пирамида деп аталады?
6. Қандай пирамида дұрыс деп аталады?
7. Пирамида қалай белгіленеді?

Есептер

A

4.1. а) n-бұрышты призманың; ә) n-бұрышты пирамиданың неше төбесі (Т), қыры (Қ) және жағы (Ж) болады?

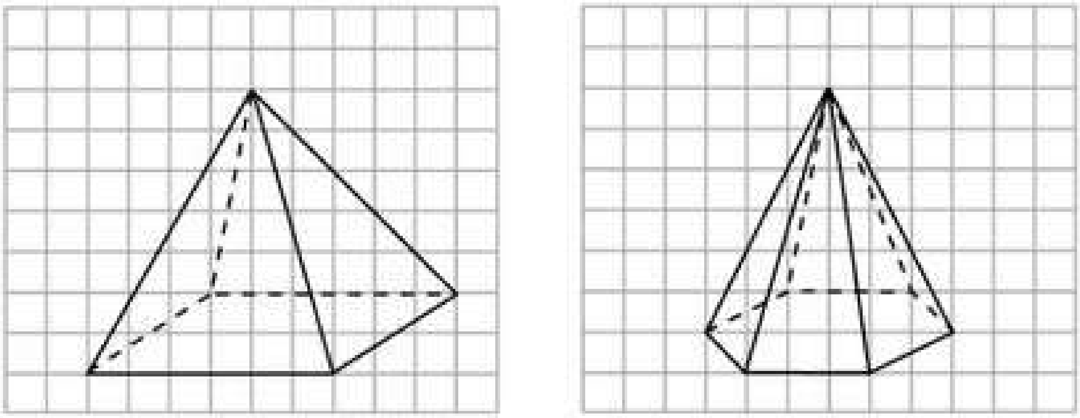
4.2. Торкөз қағазда 4.3-суреттегіге ұқсас призмаларды салыңдар.



а) ә) б)

4.3-сурет

4.3. Торкөз қағазда 4.4-суреттегіге ұқсас пирамидаларды салыңдар.



а) ә)

4.4-сурет

B

4.4. Призманың: а) 9 төбесі; ә) 16 төбесі болуы мүмкін бе?

4.5. а) 20 төбесі; ә) 10 төбесі бар призманың табанында қандай көпбұрыш жатады?

4.6. а) 10 төбесі; ә) 18 қыры; б) 8 жағы бар призманың түрін анықтаңдар.

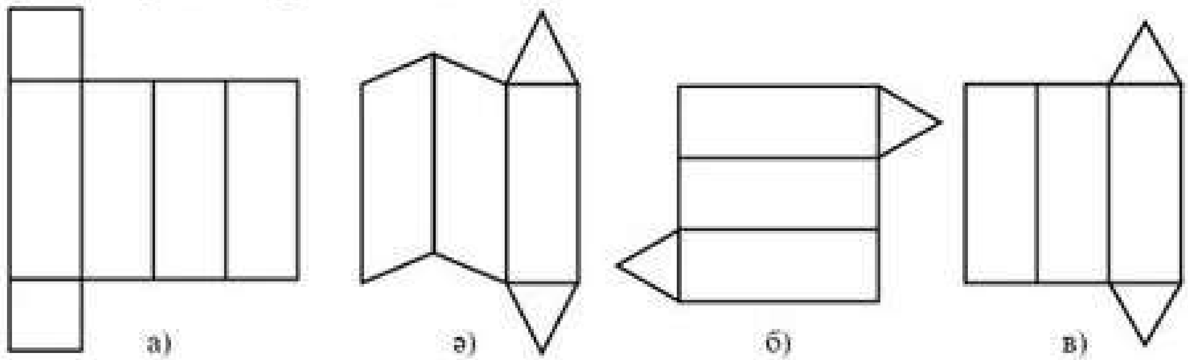
4.7. Пирамиданың: а) 9 қыры; ә) 16 қыры болуы мүмкін бе?

4.8. а) 32 қыры; ә) 15 жағы бар пирамиданың табанында қандай көпбұрыш жатады?

4.9. а) 10 төбесі; ә) 18 қыры; б) 8 жағы бар пирамиданың түрін анықтаңдар.

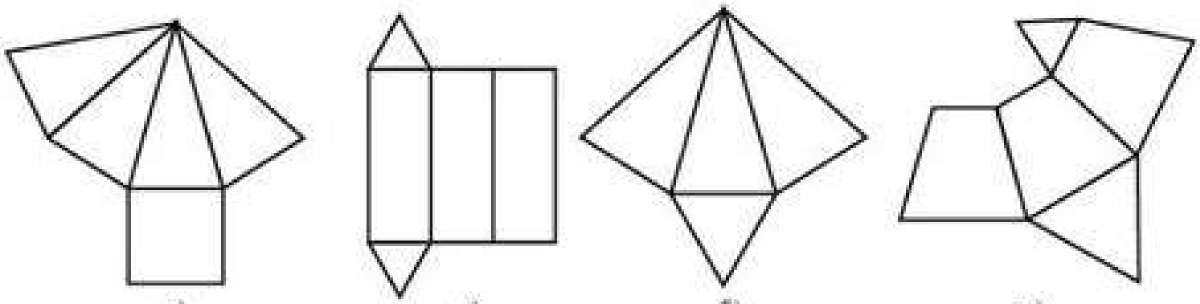
4.10. *SABCD* төртбұрышты пирамиданың жақтары жататын жазықтықтардың қиылысқан жұптарын көрсетіңдер (4.2, ә-сурет).

4.11. 4.5-суреттен призманың жазбалары болатын нұсқаларды табыңдар. Олардың түрін анықтаңдар.

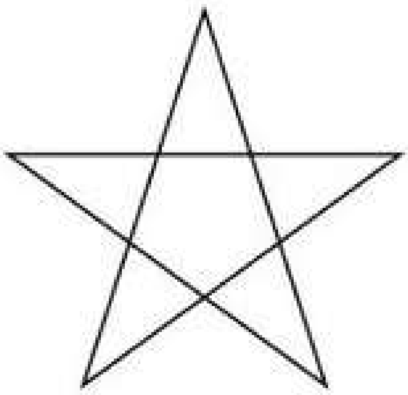


4.5-сурет

4.12. 4.6-суреттен пирамиданың жазбалары болатын нұсқаларды табыңдар. Олардың түрін анықтаңдар.



4.6-сурет



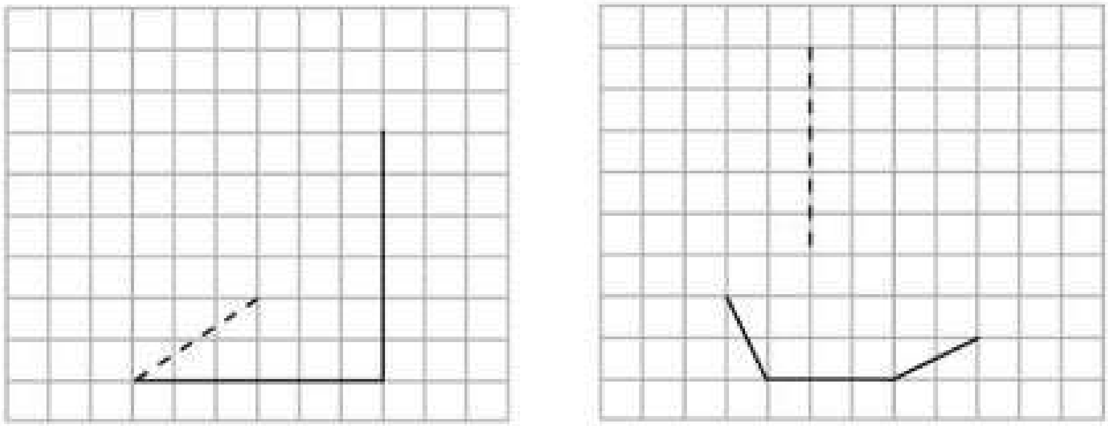
4.7-сурет

4.13. 4.7-суретте кескінделген фигура қандай көпжақтың жазбасы болады?

4.14. Дұрыс алтыбұрышты: а) призманың; ә) пирамиданың жазбасын салыңдар және олардың моделін құрастырыңдар.

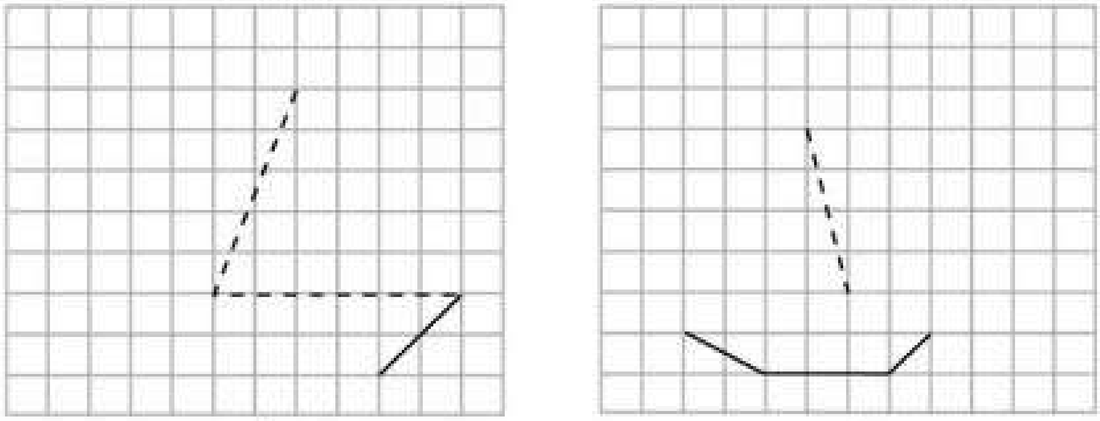
4.15. Торкөз қағазда: а) үшбұрышты; ә) алтыбұрышты призмалардың қырлары кескінделген (4.8-сурет). Призмаларды салыңдар.

4.16. Торкөз қағазда: а) төртбұрышты; ә) алтыбұрышты пирамидалардың қырлары кескінделген (4.9-сурет). Пирамидаларды салыңдар.



а) ә)

4.8-сурет



а) ә)

4.9-сурет

4.17. а) n-бұрышты пирамиданың; ә) n-бұрышты призманың неше диагоналі болады?

4.18. Қоршаған әлемнен: а) призма; ә) пирамида пішіндес нысандарға мысалдар келтіріңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

4.19. Жазықтықтағы екі түзудің параллельдігінің анықтамасын қайталаңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Кеңістіктің бір нүктесі арқылы неше түзу жүргізуге болады?

A. Жүргізуге болмайды. B. Бір.
C. Екі. D. Шексіз көп.

2. Кеңістіктің бір нүктесі арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

A. Жүргізуге болмайды. B. Бір.
C. Екі. D. Шексіз көп.

3. Кеңістіктің екі нүктесі арқылы неше түзу жүргізуге болады?

A. Жүргізуге болмайды. B. Бір.
C. Екі. D. Шексіз көп.

4. Кеңістікте бір түзудің бойында жатпайтын үш нүктенің әртүрлі жұптары арқылы неше түзу жүргізуге болады?

A. Жүргізуге болмайды. B. Үш.
C. Алты. D. Шексіз көп.

5. Кеңістіктегі төрт нүктенің әртүрлі жұптары арқылы ең көп дегенде неше түзу жүргізуге болады?

A. Төрт. B. Бес. C. Алты. D. Сегіз.

6. Қиылысатын екі жазықтықтың неше ортақ нүктесі болады?

A. Бір. B. Екі. C. Үш. D. Шексіз көп.

7. Кеңістіктің екі нүктесі арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

A. Жүргізуге болмайды. B. Бір.
C. Екі. D. Шексіз көп.

8. Кеңістікте бір түзуде жатпайтын үш нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

A. Жүргізуге болмайды. B. Бір.
C. Екі. D. Шексіз көп.

9. Кубтың үш төбесі арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

A. Бір. B. Үш. C. Алты. D. Шексіз көп.

10*. Тікбұрышты параллелепипед диагональдарының санын табыңдар.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

11*. 6-бұрышты призма диагональдарының санын табыңдар.

A. 6. B. 12. C. 9. D. 18.

12*. 12 қыры бар пирамиданың табаны қандай фигура?

A. Үшбұрыш. B. Төртбұрыш.
C. Алтыбұрыш. D. 12-бұрыш.

13*. 36 қыры бар призманың табаны қандай фигура?

A. Алтыбұрыш. B. Тоғызбұрыш.
C. 12-бұрыш. D. 36-бұрыш.

14*. 18 төбесі бар призманың табаны қандай фигура?

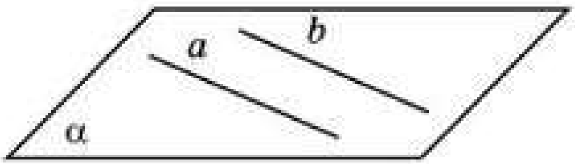
A. Үшбұрыш. B. Алтыбұрыш.
C. Тоғызбұрыш. D. 18-бұрыш.

15*. 10 төбесі бар пирамиданың табаны қандай фигура?

A. Бесбұрыш. B. Алтыбұрыш.
C. Сегізбұрыш. D. Тоғызбұрыш.

§ 5. Кеңістіктегі түзулердің параллельдігі

Жазықтықта қиылыспайтын, яғни бірде-бір ортақ нүктесі болмайтын екі түзу параллель түзулер деп аталатынын еске түсірейік. Осыған ұқсас, кеңістіктегі бір жазықтықта жататын және өзара қиылыспайтын екі түзу *параллель түзулер* деп аталады (5.1- сурет).



5.1-сурет

a және b түзулерінің параллельдігі $a \parallel b$ арқылы белгіленеді.

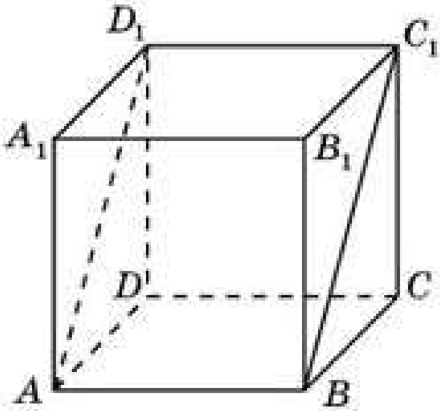
Демек, кеңістіктегі екі түзу параллель болуы үшін бұл түзулер қиылыспауы және бір жазықтықта жатуы тиіс.

Параллель түзулердің бойында жатын екі кесіндіні параллель кесінділер деп айтамыз.

Кеңістіктегі түзулер үшін жазықтықтағы түзулердің параллельдік белгісіне ұқсас келесі параллельдік белгісі орынды болады.

Егер екі түзудің әрқайсысы үшінші түзуге параллель болса, онда бұл екі түзу өзара параллель болады .

Мысалы , $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AB және C_1D_1 түзулері A_1B_1 түзуіне параллель болады . Демек, AB және C_1D_1 түзулері өзара параллель (5.2- сурет).



5.2-сурет

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AD_1 және BC_1 түзулері параллель екендігін дәлелдейік. Расында да, жоғарыда көрсетілгендей, AB және C_1D_1 түзулері параллель және тең болады . Онда ABC_1D_1 төртбұрышы — параллелограмм . Осыдан AD_1 және BC_1 түзулері параллель болады .

Кеңістіктегі берілген түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге параллель бір ғана түзу жүргізуге болатынын өздерің дәлелдеп көріңдер.

Тарихи мәліметтер

Берілген нүкте арқылы өтетін және берілген түзуге параллель болатын түзулердің саны туралы мәселенің ежелден келе жатқан тарихы бар. Евклидтің "Бастамалары" кітабындағы бесінші постулат өзінің мазмұны бойынша 7-сыныпта танысқан параллельдік аксиомасымен сәйкес келеді, яғни "Берілген түзуден тыс жатқан нүкте арқылы сол түзуге тек бір ғана параллель түзу жүргізуге болады".

Евклидтен кейін екі мың жыл бойы математиктер осы постулатты дәлелдеуге тырысты, алайда олардың барлық талпыныстары сәтсіздікпен аяқталды , ерте ме, кеш пе олардың тұжырымдарында қателіктер анықтал ды . Тек 1926 жылы Қазан университетінің профессоры, ұлы математик Н.И. Лобачевский (1792—1856) осы постулатты Евклидтің басқа постулаттарынан (аксиомаларынан) логикалық жолмен шығарып алуға, яғни дәлелдеуге болмайтындығын , сондықтан оны аксиома ретінде қабылдау керек екенін, не болмаса аксиома ретінде берілген нүкте арқылы осы түзуге параллель бірнеше түзу бар болатыны тұжырымын қабылдау қажет екенін ұсынды . Осы параллельдік аксиомасын геометрияның негізі деп алып, Лобачевский жаңа, евклидтік емес геометрияны құрды және ол Лобачевский геометриясы деп аталды.

Лобачевскийдің идеялары бірегей болды және сол кездегі адам санасына қарама-қайшылығы соншалықты, оны тіпті белгілі математиктер де түсінбеді. Осыған қарамастан, Лобачевский өз идеяларынан бас тартпады. Ол өзі ұсынған жаңа геометрияны нақты физикалық кеңістік ті зерттеуге қолдануға болатындығына сенімді болды . Осы мақсатта Лобачевский күрделі астрономиялық бақылаулар мен өлшеулер жүргізді, алайда өлшеу аспаптарының жеткілікті дәлдікке не болмауы, оның болжамының дұрыстығын дәлелдеуге мүмкіндік бермеді.

Лобачевский геометриясын мойындау ол дүниеден өткеннен кейін ғана жүзеге асты . Лобачевскийдің еңбектері көптеген тілдерге аударылып, бүкіл әлем математиктерімен зерттелді . Қазіргі уақытта Лобачевский геометриясы заманауи математиканың ажырамас бөлігі және адам зат білімінің көптеген салаларында қолданыс тауып, қоршаған әлемді тереңірек танып-білуге жағдай жасауда.

Сұрақтар

1. Кеңістіктегі қандай екі түзу параллель деп аталады ?
2. Кеңістіктегі қандай екі кесінді параллель деп аталады ?
3. Кеңістіктегі параллель түзулердің қасиетін тұжырымдаңдар.

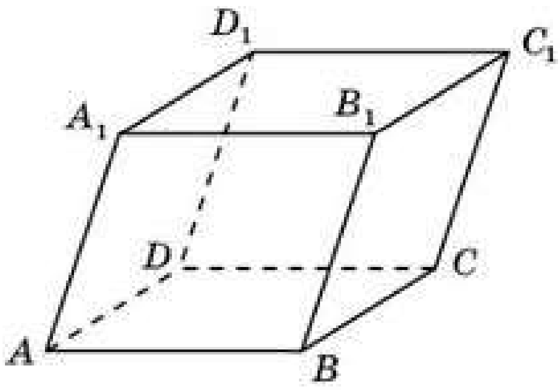
Есептер

А

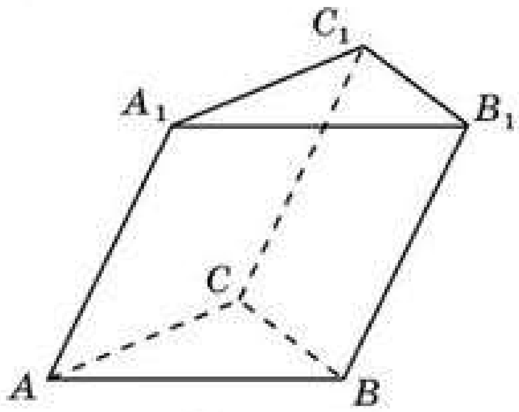
5.1. Жазықтықта параллель түзулердің біреуін қиып өтетін түзу екіншісін де қиып өтетіні белгілі. Осы тұжырым кеңістік үшін де орындала ма?

5.2. Жазықтықта берілген түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуді қимайтын тек бір ғана түзу өтетіні белгілі. Осы тұжырым кеңістік үшін де орындала ма?

5.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің : а) AB; ә) AA_1 қырларына параллель қырларын жазыңдар (5.3- сурет).



5.3-сурет



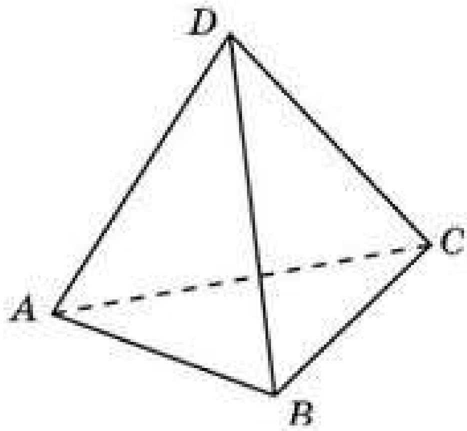
5.4-сурет

5.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің AB және B_1C_1 қырлары параллель бола ма (5.3- сурет)?

5.5. $ABCA_1B_1C_1$ призмасының параллель қырларының жұбын жазыңдар (5.4- сурет).

5.6. $ABCA_1B_1C_1$ призмасының AB және CC_1 қырлары параллель бола ма (5.4- сурет)?

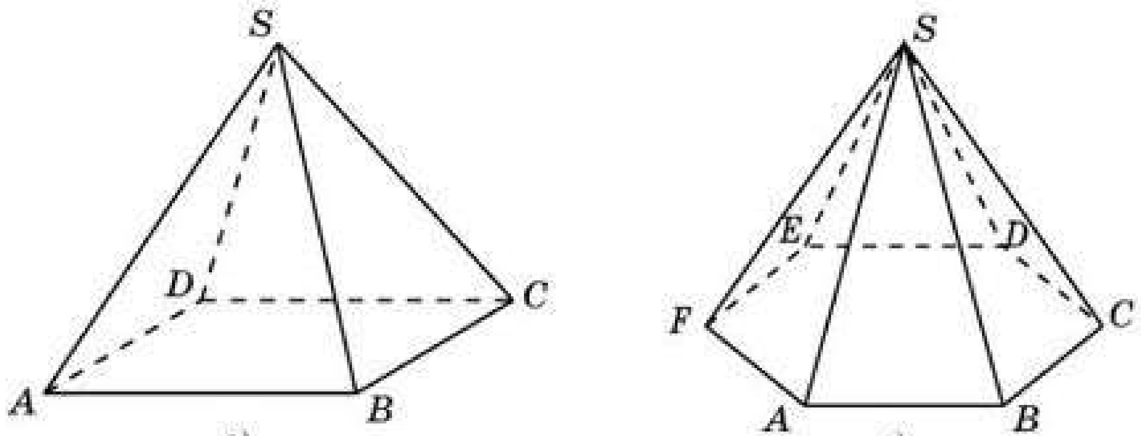
5.7. $ABCD$ тетраэдрінің қарама-қарсы жатқан AB және CD қырлары параллель бола ма (5.5- сурет)?



5.5-сурет

B

5.8. а) $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың (5.6, а-сурет); ә) $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың (5.6, ә-сурет) параллель қырларының жұбын жазыңдар.

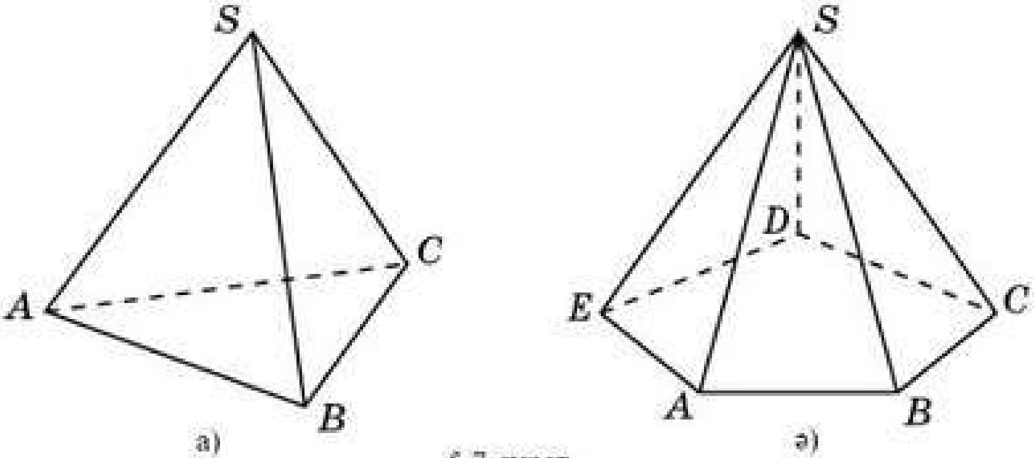


а) ә)

5.6-сурет

5.9. а) $SABCD$ пирамидасының (5.6, а-сурет); ә) $SABCDEF$ пирамидасының (5.6, ә-сурет) AB және SC қырлары параллель бола ма?

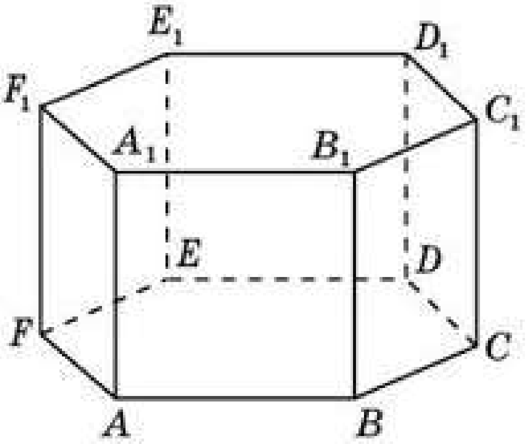
5.10. а) Дұрыс үшбұрышты пирамиданың (5.7, а-сурет), дұрыс бесбұрышты пирамиданың (5.7, ә-сурет) параллель қырлары бола ма?



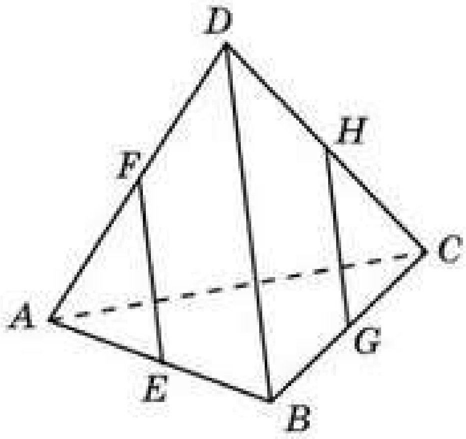
5.7-сурет

5.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыбұрышты призмасы үшін келесі түзулер параллель екендігін дәлелдеңдер: а) AA_1 және CC_1; ә) AA_1 және DD_1 (5.8- сурет).

5.12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының келесі қырларына параллель қырларын жазыңдар : а) AA_1; ә) AB (5.8-сурет).



5.8-сурет



5.9-сурет

5.13. $ABCD$ тетраэдрінде E, F, G, H нүктелері сәйкесінше AB, AD, BC, CD қырларының орталары (5.9-сурет). EF және GH түзулері параллель екендігін дәлелдеңдер.

5.14. Қоршаған әлемнен параллель түзулерді көрсететін нысандарға мысалдар келтіріңдер.

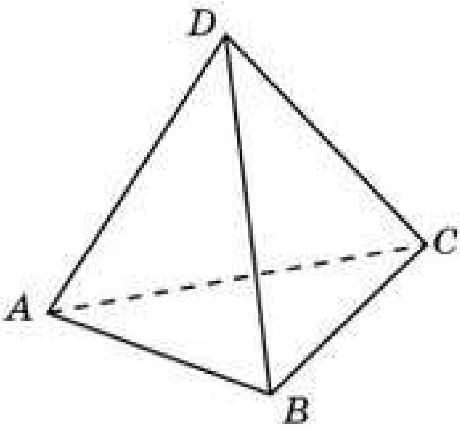
§ 6. Кеңістіктегі түзулердің өзара орналасуы

Кеңістіктегі екі түзудің қиылысуы немесе параллель болуы мүмкін екенін білеміз . Алайда кеңістікте екі түзу қиылыспауы және бір-біріне параллель емес болуы да мүмкін .

Кеңістікте бір жазықтықта жатпайтын екі түзу *айқас түзулер* деп аталады.

Сондай-ақ екі кесінді айқас түзулердің бойында жатса, оларды *айқас кесінділер* деп атайды .

Мысалы, $ABCD$ тетраэдрінде AB және CD қырлары айқас (6.1-сурет).



6.1-сурет

AB және CD қырлары айқасатынын өздерің дәлелдеп көріңдер (6.1-сурет).

Айқас түзулердің көрнекі көріністері ретінде көпір бойымен және оның астынан өтетін екі жолды (6.2, а-сурет); балалар төбешігін, мұндағы айқас түзулердің біреуі — баспалдақтың ең төменгі сатысы, ал екіншісі — сырғыма жақтауын (6.2, ә-сурет) айтуға болады.


а)

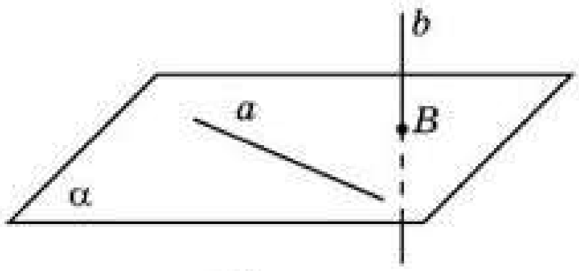

ә)

6.2-сурет

Сонымен қатар айқас түзулерді, мысалы бөлменің қабырғалары, едені мен төбесінің қиылысу сызықтарынан көруге болады.

Теорема . (Айқас түзулердің белгісі) ***Егер бір түзу жазықтықта жатса, ал екінші түзу осы жазықтықты бірінші түзуде жатпайтын нүктеде қиып өтсе , онда бұл түзулер айқас болады .***

Дәлелдеуі . a түзуі а жазықтығында жатсын, ал b түзуі а жазықтығын a түзуіне тиісті емес B нүктесінде қиып өтсін (6.3- сурет). Егер a және b түзулері бір жазықтықта жататын болса, онда бұл жазықтықта a түзуі мен B нүктесі де жатқан болар еді. Түзу арқылы және осы түзуден тыс жатқан нүкте арқылы тек бір ғана жазықтық өтетін болатындықтан, бұл жазықтық а жазықтығы болады. Бұл жағдайда b түзуі а жазықтығына тиісті болар еді, ал бұл шартқа қайшы келеді. Демек, a және b түзулері бір жазықтықта жатпайды, яғни олар айқас болады.



6.3-сурет

Кеңістіктегі екі түзудің өзара орналасуының әртүрлі жағдайларын сұлба түрінде көрсетейік.

6.1- сұлба

Үшінші түзумен айқас екі түзу өзара айқас болатыны дұрыс па? Мысал келтіріңдер.

Сұрақтар

1. Кеңістіктегі қандай екі түзу айқас деп аталады?
2. Кеңістіктегі қандай екі кесінді айқас деп аталады?
3. Айқас түзулердің белгісін тұжырымдаңдар.

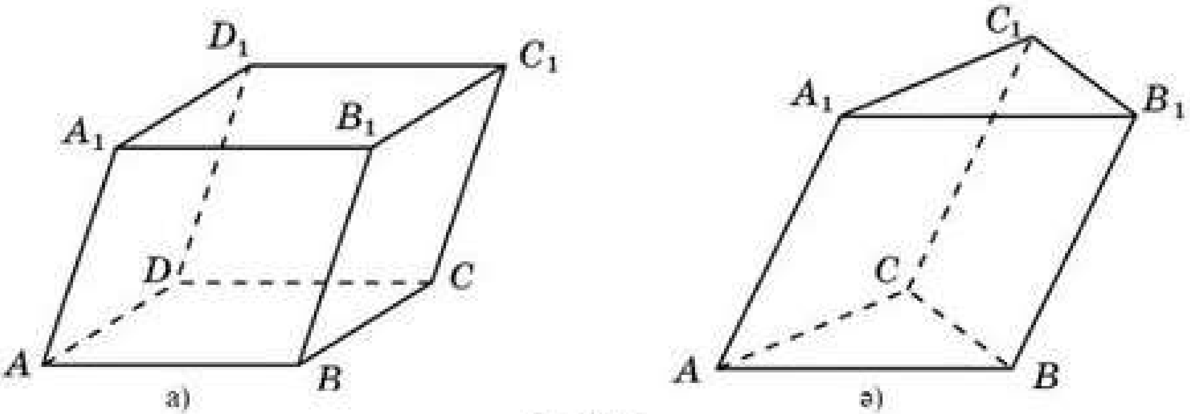
Есептер

A

6.1. Егер екі түзу әртүрлі жазықтықтарда жатса, онда олар айқас болатыны ақиқат па?

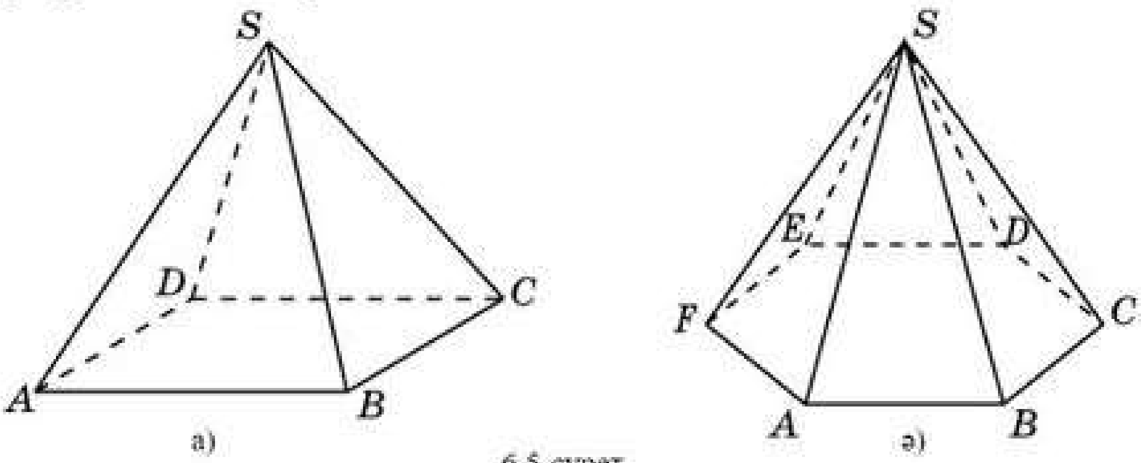
6.2. Берілген түзуден тыс жатқан нүкте арқылы осы түзумен айқас болатын неше түзу өтеді?

6.3. а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді; ә) $ABCA_1B_1C_1$ призмасы үшін AB қырымен айқас қырларды жазыңдар (6.4, а, ә-суреттер).



6.4-сурет

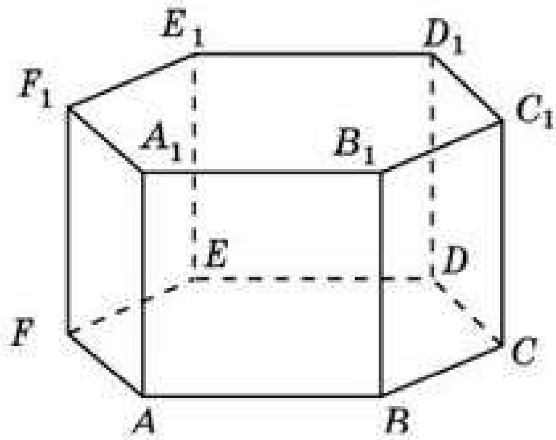
6.4. ә) $SABCD$ төртбұрышты пирамиданың (6.5, а-сурет); ә) $SABCDEF$ алтыбұрышты пирамиданың (6.5, ә-сурет) SA қырымен айқас қырларын жазыңдар.



6.5-сурет

6.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыбұрышты призманың : а) AA_1; ә) AB қырларымен айқас қырларын жазыңдар (6.6- сурет).

6.6. Тетраэдрдің айқас қырларының жұбы нешеу болады ?

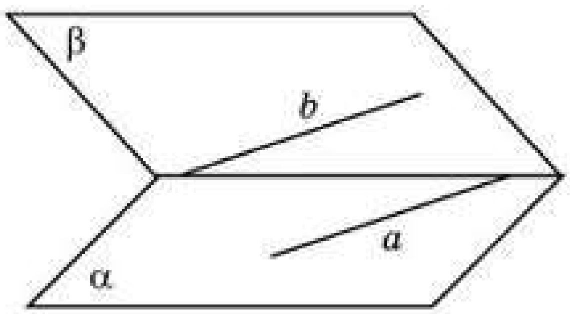


6.6-сурет

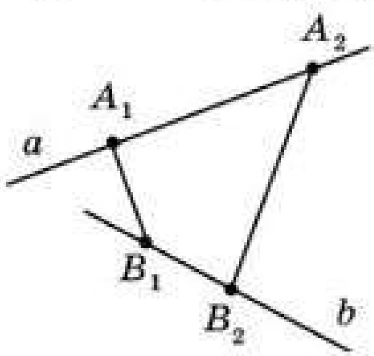
B

6.7. a түзуі b түзуімен, ал b түзуі c түзуімен айқасады. Осыдан a түзуі мен c түзуі айқас түзулер бола ма?

6.8. Кеңістіктегі a және b жазықтықтарында жүргізілген a және b түзулері қалай орналасқан (6.7-сурет)? Жауапты түсіндіріңдер.



6.7-сурет

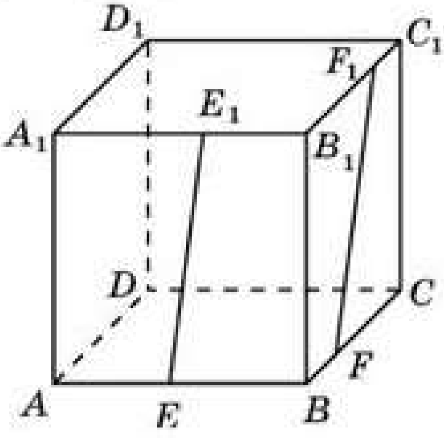


6.8-сурет

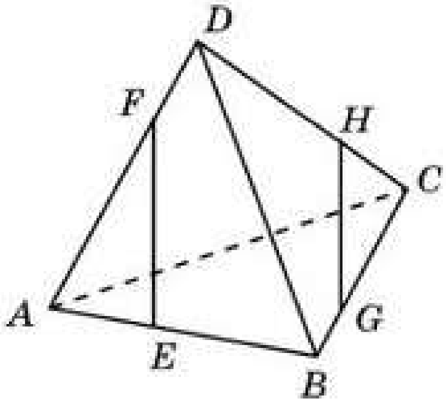
6.9. a және b айқас түзулер болсын (6.8- сурет). A_1B_1 және A_2B_2 түзулері a және b түзулерін қиып өтеді . A_1B_1 және A_2B_2 түзулері айқас немесе параллель болуы мүмкін бе?

6.10. Төртбұрышты пирамиданың айқас қырларының жұбы нешеу болады?

6.11. EE_1 және FF_1 түзулері өзара қалай орналасқан (6.9- сурет)? Жауапты түсіндіріңдер.



6.9-сурет

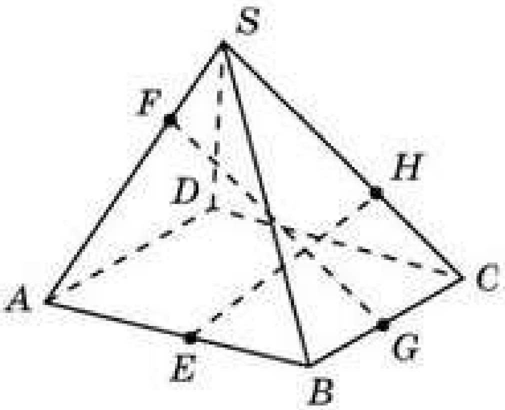


6.10-сурет

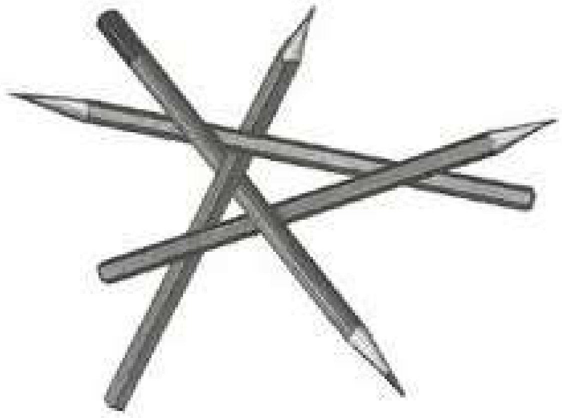
6.12. EF және GH түзулері өзара қалай орналасқан (6.10- сурет)? Жауапты түсіндіріңдер.

6.13. EH және FG кесінділері қиылыса ма (6.11- сурет)? Жауапты түсіндіріңдер.

6.14. Қарындаштардың 6.12- суреттегідей орналасуы мүмкін бе? Жауапты түсіндіріңдер.



6.11-сурет



6.12-сурет

6.15. Қоршаған әлемнен айқас түзулерді көрсететін нысандарға мысалдар келтіріңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

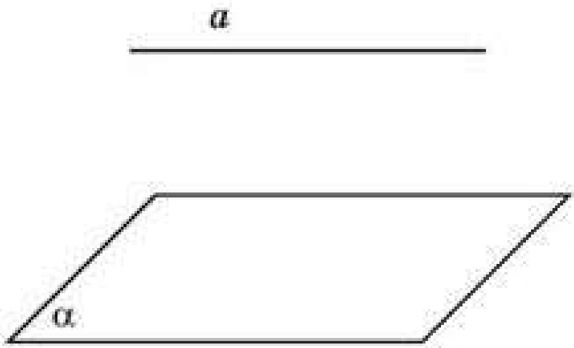
6.16. Түзу мен жазықтықтың параллельдігі ұғымын анықтап көріңдер.

§ 7. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы

Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуының жағдайларын қарастырайық.

Түзу жазықтықта жатады, яғни түзудің барлық нүктелері жазықтыққа тиісті болады. Түзу жазықтықты қиып өтеді, яғни түзу мен жазықтықтың бір ғана ортақ нүктесі бар болады. Түзу мен жазықтық қиылыспайды, яғни түзудің жазықтықпен бірде-бір ортақ нүктесі болмайды.

Егер түзудің жазықтықпен бірде-бір ортақ нүктесі болмаса, онда бұл түзу жазықтыққа *параллель* деп аталады (7.1- сурет).



7.1-сурет

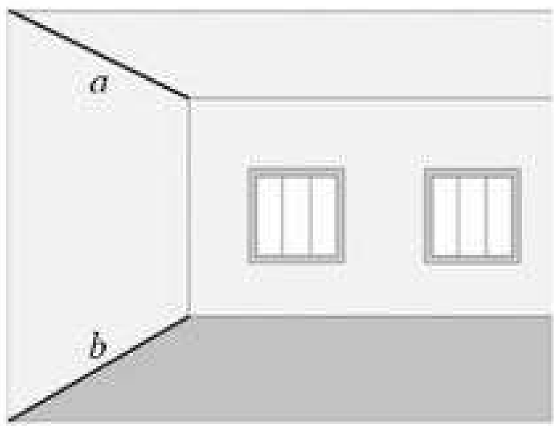
a түзуі мен а жазықтығының параллельдігі $a \parallel$ а арқылы белгіленеді.

Жазықтыққа параллель түзулердің көрнекі көріністері ретінде троллейбустың немесе трамвайдың тартылған сымдарын айтуға болады, олар жер бетіндегі жазықтыққа параллель болады (7.2-сурет).

а) ә)

7.2-сурет

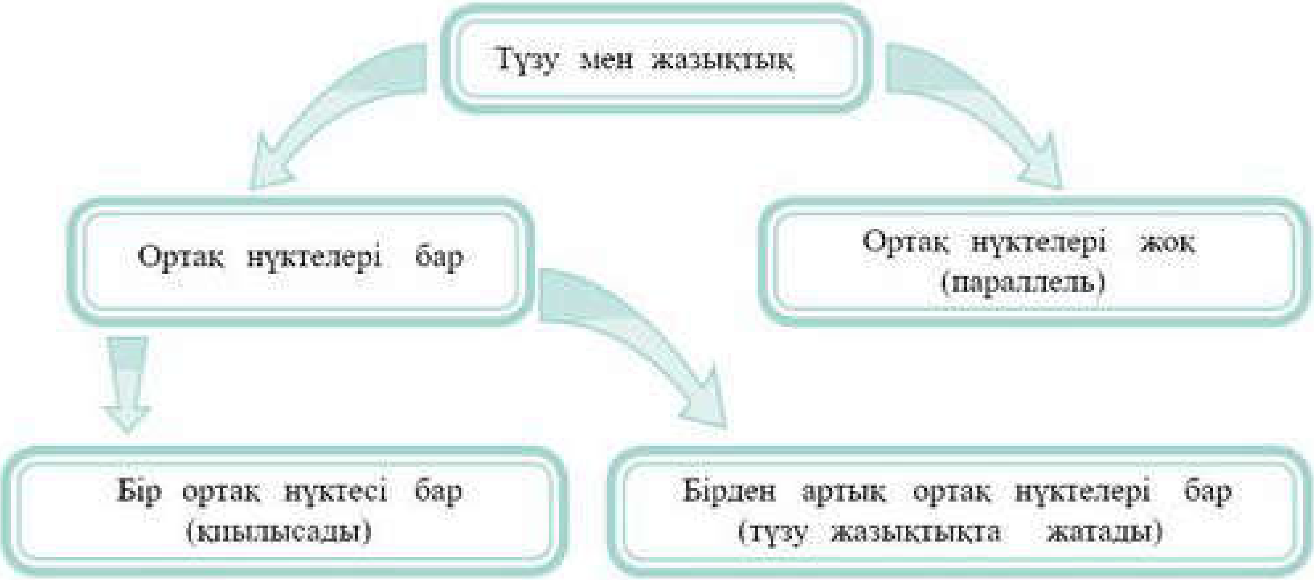
Сонымен қатар бөлменің қабырғалары мен төбесінің қиылысу сызықтары еден жазықтығына параллель болады (7.3-сурет). Еден жазықтығында осы сызыққа параллель түзу бар екенін байқауға болады. Бұл түзу еденнің сол қабырғамен қиылысу сызығы болып табылады.



7.3-сурет

Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуының әртүрлі жағдайларын сұлба көмегімен көрсетейік.

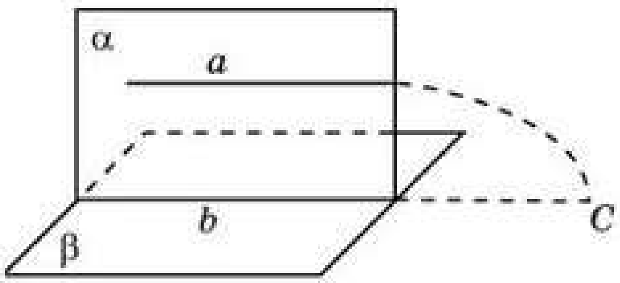
7.1- *сұлба*



Егер көпжақтың қыры көпжақтың жағының жазықтығына параллель түзудің бойында жатса, онда осы қыр көпжақтың осы жағына параллель деп аталады.

Келесі теорема түзу мен жазықтықтың параллельдігінің жеткілікті шартын береді.

Теорема (**түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі**). ***Егер берілген жазықтықта жатпайтын түзу осы жазықтықтағы қандай да бір түзуге параллель болса, онда бұл түзу сол жазықтықтың өзіне де параллель болады.***



7.4-сурет

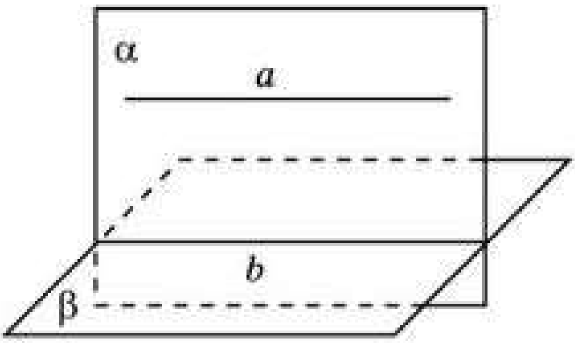
Дәлелдеуі. a түзуі α жазықтығында жатсын және осы жазықтықтағы b түзуіне параллель болсын (7.4- сурет).

a түзуі b жазықтығына параллель екендігін дәлелдейік. Керісінше a түзуі b жазықтығын қандай да бір C нүктесінде қиып өтсін делік. a және b түзулері арқылы өтетін a жазықтығын қарастырайық (шарт бойынша $a \parallel b$). C нүктесі b жазықтығына да, a жазықтығына да тиісті, яғни олардың қиылысу сызығы b түзуіне тиісті. Демек, a және b түзулері қиылысады, ал бұл шартқа қайшы. Сонымен $a \parallel b$. ◻

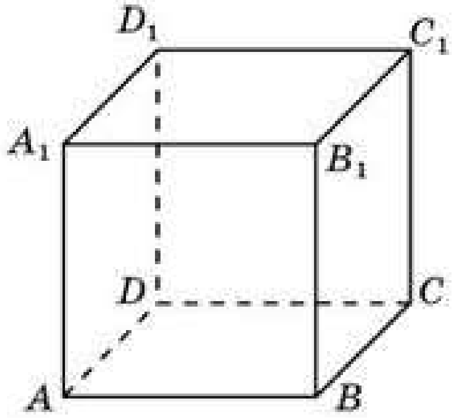
Берілген жазықтықта жатпайтын нүкте арқылы осы жазықтыққа параллель неше түзу жүргізуге болады?

Теорема. ***Егер бір жазықтық екінші жазықтыққа параллель түзу арқылы өтсе және ол жазықтықпен қиылысса, онда жазықтықтардың қиылысу түзуі бірінші түзуге параллель болады.***

Дәлелдеуі . a жазықтығы b жазықтығына параллель a түзуі арқылы өтетін болсын және осы жазықтықты b түзуінің бойымен қиып өтсін (7.5- сурет). a түзуі мен b жазықтығының ортақ нүктелері болмағандықтан, a және b түзулерінің де ортақ нүктелері болмайды. Бұл түзулер бір жазықтықта жатқандықтан, олар параллель болып табылады.



7.5-сурет



7.6-сурет

Мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы (7.6- сурет) үшін AA_1 түзуі BCC_1 жазықтығына параллель екендігін дәлелдеңдер .

Шешуі . AA_1 түзуі BCC_1 жазықтығындағы BB_1 түзуіне параллель және сол жазықтықта жатпайды. Демек, AA_1 түзуі BCC_1 жазықтығына параллель болады.

Сұрақтар

1. Түзу мен жазықтық өзара қалай орналасуы мүмкін?
2. Қандай түзу жазықтыққа параллель деп аталады?
3. Түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісін тұжырымдаңдар.

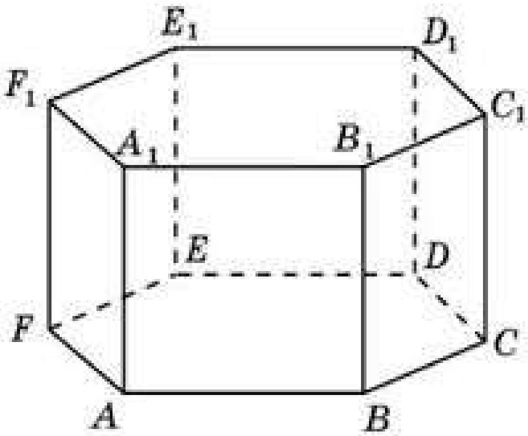
Есептер

A

7.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының $ABCD$ жағына параллель қырларды көрсетіңдер (7.6 -сурет).

7.2. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың келесі қырларына параллель жақтарын көрсетіңдер : а) AB ; ә) AA_1 (7.7 -сурет).

7.3. Бір жазықтыққа параллель екі түзу өзара параллель болатыны ақиқат па?



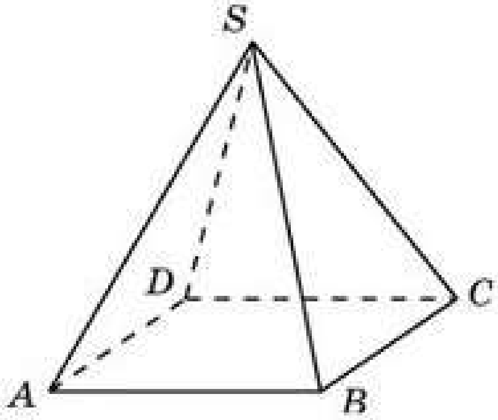
7.7-сурет

7.4. Егер түзу жазықтықта жатқан қандай да бір түзуге параллель болса, онда бұл түзу жазықтықтың өзіне де параллель болатыны ақиқат па?

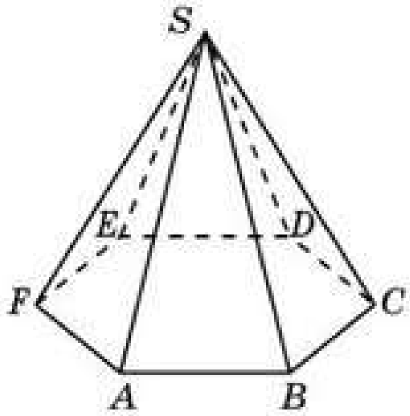
7.5. Екі параллель түзулердің біреуі жазықтыққа параллель. Екінші түзу осы жазықтыққа параллель болатыны ақиқат па?

B

7.6. *SABCD* дұрыс төртбұрышты пирамиданың параллель қырлары мен жақтарын көрсетіңдер (7.8 -сурет).



7.8-сурет



7.9-сурет

7.7. *SABCDEF* дұрыс алтыбұрышты пирамиданың параллель қырлары мен жақтарын көрсетіңдер (7.9- сурет).

7.8. *ABCD* параллелограмы берілген . *AB* қабырғасы арқылы параллелограмм жазықтығымен беттеспейтін a жазықтығы жүргізілген . *CD* || a екенін дәлелдеңдер.

7.9. *ABCDEF* дұрыс алтыбұрышының *AF* қабырғасы алтыбұрыш жазықтығымен беттеспейтін a жазықтығында жатыр. a жазықтығымен параллель болатын алтыбұрыштың қабырғасын көрсетіңдер.

7.10. Үшбұрыштың екі қабырғасының орталары арқылы үшбұрыш жазықтығымен беттеспейтіндей жазықтық жүргізілген . Осы жазықтық үшбұрыштың үшінші қабырғасына параллель болатынын дәлелдеңдер .

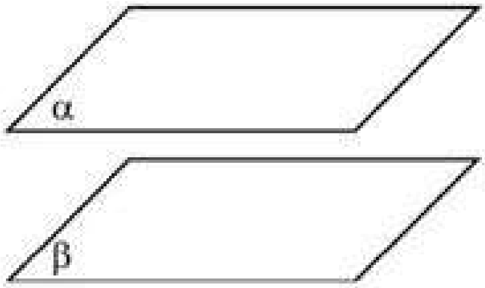
7.11. Қоршаған әлемнен өзара параллель түзу мен жазықтықты көрсететін нысандарға мысал келтіріңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

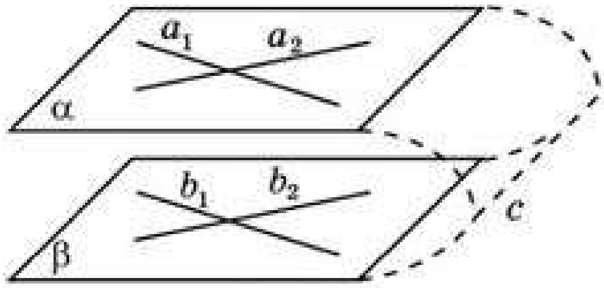
7.12. Екі жазықтықтың параллельдігі ұғымын анықтап көріңдер.

§ 8. Жазықтықтардың параллельдігі

Қиылыспайтын, яғни бірде- бір ортақ нүктесі болмайтын екі жазықтық *параллель жазықтықтар* деп аталады (8.1 -сурет).



8.1-сурет



8.2-сурет

Екі жазықтықтың өзара орналасуының әртүрлі жағдайларын сұлба көмегімен көрсетейік.

8.1- сұлба

Екі жазықтық

Ортақ түзуі бар (түзудің бойымен қиылысады)

Ортақ түзуі жоқ (параллель)

Келесі теорема екі жазықтықтың параллельдігінің жеткілікті шартын береді.

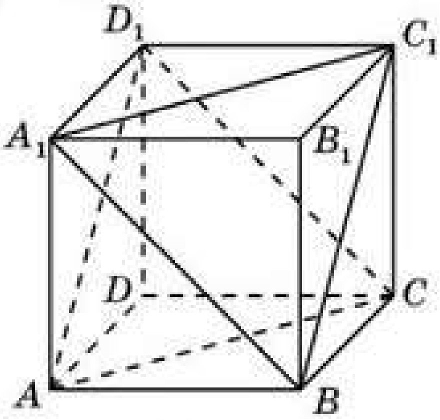
Теорема. (Екі жазықтықтың параллельдік белгісі). ***Егер бір жазықтықтағы қиылысқан екі түзу екінші жазықтықтағы сәйкесінше екі түзуге параллель болса, онда бұл жазықтықтар параллель болады.***

Дәлелдеуі. a жазықтығында қиылысқан a_1, a_2 түзулері b жазықтығындағы сәйкесінше b_1, b_2 түзулеріне параллель болсын (8.2-сурет). a және b жазықтықтары параллель болатынын дәлелдейік.

Керісінше a және b жазықтықтары c түзуі бойымен қиылысады деп есептейік. Түзу мен жазықтықтың параллельдігінің белгісі бойынша a_1 түзуі b жазықтығына параллель болады. Демек, ол c түзуіне де параллель (a_1 мен c түзулері бір жазықтықта жатады және қиылыспайды). Осыған ұқсас a_2 түзуі c түзуіне де параллель болады. Сонымен a жазықтығында бір түзуге параллель болатын қиылысқан екі түзуді аламыз, ал бұл мүмкін емес. Алынған қайшылық, біздің a және b жазықтықтары қиылысатыны туралы ұйғарымның дұрыс еместігін көрсетеді. Олай болса, олар — параллель жазықтықтар.

Берілген жазықтықта жатпайтын нүкте арқылы осы жазықтыққа параллель неше жазықтық жүргізуге болады?

Көпжақтың екі жағы параллель жазықтықтарда жатса, онда оларды параллель деп айтамыз.



8.3-сурет

Мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында ACD_1 және BA_1C_1 жазықтықтары параллель болатынын дәлелдеңдер (8.3 -сурет).

Шешуі . AC түзуі A_1C_1 түзуіне және CD_1 түзуі BA_1 түзуіне параллель болады. Сонымен ACD_1 жазықтығында жатқан қиылысқан екі түзу BA_1C_1 жазықтығындағы сәйкесінше екі түзуге параллель болады. Демек, ACD_1 және BA_1C_1 жазықтықтары параллель болады.

Сұрақтар

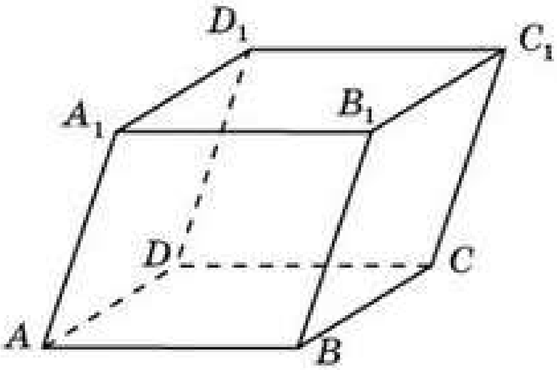
1. Қандай екі жазықтық параллель деп аталады?
2. Екі жазықтықтың өзара орналасуының жағдайларын айтыңдар.
3. Екі жазықтықтың параллельдік белгісін тұжырымдаңдар.

Есептер

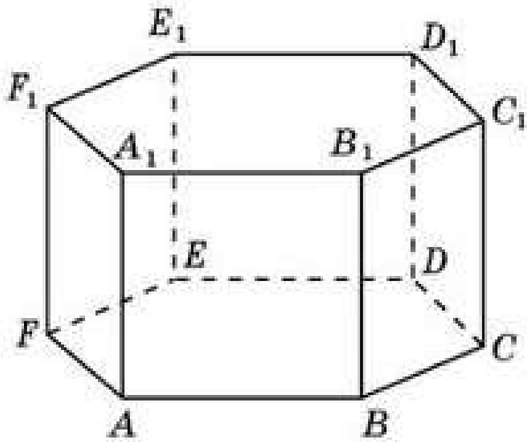
А

8.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің жақтары жатқан параллель жазықтықтарды көрсетіңдер (8.4 -сурет).

8.2. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың жақтары жатқан параллель жазықтықтарды көрсетіңдер (8.5 -сурет).



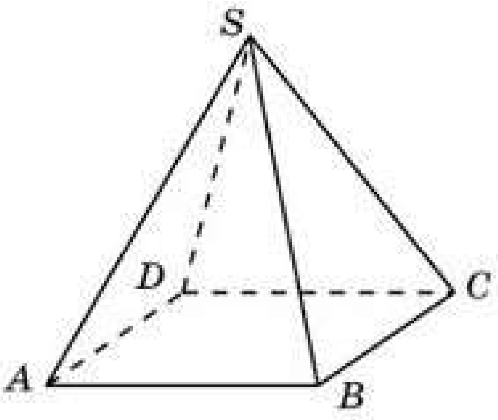
8.4-сурет



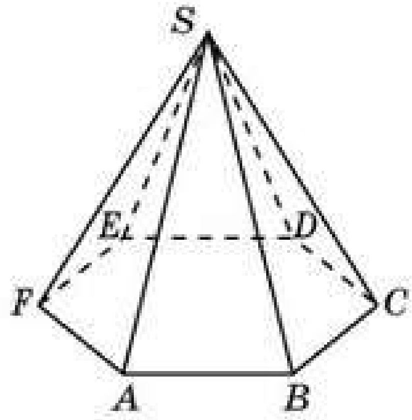
8.5-сурет

8.3. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың параллель жақтары бар ма (8.6-сурет)?

8.4. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың параллель жақтары бар ма (8.7-сурет)?



8.6-сурет



8.7-сурет

В

8.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде келесі жазықтықтар параллель болатынын дәлелдеңдер: а) ABB_1 және CDD_1; ә) AB_1D_1 және BDC_1.

8.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада келесі жазықтықтар параллель болатынын дәлелдеңдер: а) ABC және $A_1B_1C_1$; ә) ABB_1 және DEE_1; б) ABB_1 және CFF_1; в) ACC_1 және DFF_1.

8.7. Келесі тұжырым дұрыс па: "Егер бір жазықтықта жатқан түзу екінші жазықтықтағы түзуге параллель болса, онда бұл жазықтықтар параллель болады"?

8.8. Келесі тұжырым дұрыс па: "Егер бір жазықтықта жатқан екі түзу екінші жазықтықтағы екі түзуге параллель болса, онда бұл жазықтықтар параллель болады"?

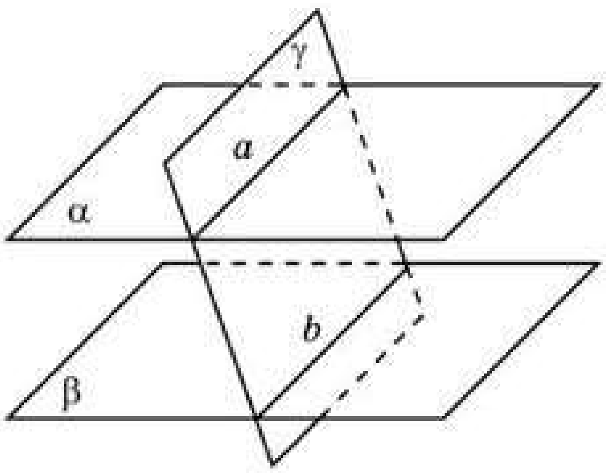
8.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында ABC_1 және BCD_1 жазықтықтарының қиылысу сызығын көрсетіңдер.

8.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада ABC_1 және BCD_1 жазықтықтарының қиылысу сызығын көрсетіңдер.

8.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада ABC_1 және CD_1E_1 жазықтықтарының параллель болатынын дәлелдеңдер.

8.12. Егер параллель екі жазықтық үшінші жазықтықпен қиылысса, онда олардың қиылысу түзулері параллель болатынын дәлелдеңдер (8.8-сурет).

8.13. Қоршаған әлемнен параллель жазықтықтарды көрсететін нысандарға мысалдар келтіріңдер.



8.8-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

8.14. Жазықтықтағы бұрыштың анықтамасын қайталаңдар.
8.15. Кеңістіктегі бұрыш ұғымын анықтап көріңдер.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. a және b түзулері берілген. a түзуі арқылы берілген түзулер жататын жазықтықтан өзге α жазықтығы өтеді. b түзуі мен α жазықтығы өзара қалай орналасады?

A. b түзуі α-да жатады.
B. b түзуі α-ны қияды.
C. b түзуі α-ға параллель.
D. Анықтау мүмкін емес.

2. Бір жазықтықта жатпайтын үш параллель түзулердің әртүрлі жұптары арқылы қанша жазықтық жүргізуге болады?

A. Бір.
B. Екі.
C. Үш.
D. Алты.

3. Екі параллель түзудің әрқайсысы арқылы жазықтықтар жүргізілген. Бұл екі жазықтық қиылысады. Олардың қиылысу сызығы берілген түзулерге қатысты қалай орналасқан?

A. Параллель.
B. Оларды қияды.
C. Олардың біреуімен беттеседі.
D. Оларға айқас.

4. Айқас a, b түзулері және a түзуінде жататын A нүктесі берілген. a түзуі мен A нүктесі және b түзуі арқылы өтетін жазықтық өзара қалай орналасқан?

A. a түзуі жазықтықты қияды.
B. a түзуі жазықтыққа параллель.
C. a түзуі жазықтықта жатады.
D. Анықтау мүмкін емес.

5. α жазықтығы β жазықтығына параллель болатын a түзуімен қиылысады. α және β жазықтықтары өзара қалай орналасқан?

A. Параллель.
B. Беттеседі.
C. Қиылысады.
D. Анықтау мүмкін емес.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB қырына параллель болатын қырын көрсетіңдер.

A. CC_1.
B. DD_1.
C. B_1C_1.
D. C_1D_1.

7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың B_1C_1 қырына параллель болатын қырын көрсетіңдер.

A. AA_1. B. EF.
C. C_1D_1. D. DE.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AA_1 қырына айқас болатын қырын көрсетіңдер.

A. BC. B. BB_1.
C. AB. D. A_1D_1.

9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың AB қырына айқас болатын қырын көрсетіңдер.

A. CD. B. EF.
C. DD_1. D. D_1E_1.

10. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың SA қырына айқас болатын қырын көрсетіңдер.

A. AB. B. SC.
C. SD. D. BC.

11. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың BC қырына айқас болатын қырын көрсетіңдер.

A. DE. B. SB.
C. SA. D. AF.

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының CC_1 қырына параллель болатын жазықтықты көрсетіңдер.

A. ABC. B. ABC_1.
C. BDA_1. D. BDD_1.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BC_1 қырына параллель болатын жазықтықты көрсетіңдер.

A. ACD_1. B. ACB_1.
C. ADB_1. D. CDA_1.

14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыбұрышты призманың AF қырына параллель болатын жазықтықты көрсетіңдер.

A. BEE_1. B. BDD_1.
C. BCC_1. D. CEE_1.

15. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың CD қырына параллель болатын жазықтықты көрсетіңдер.

A. SAB. B. SAF.
C. SBC. D. SEF.

II тарау

КЕҢІСТІКТЕГІ БҰРЫШ. КЕҢІСТІКТЕГІ АРАҚАШЫҚТЫҚ

§ 9. Кеңістіктегі түзулердің арасындағы бұрыш

Кеңістіктегі бұрыштың анықтамасы жазықтықтағы бұрыштың анықтамасына ұқсас анықталады.

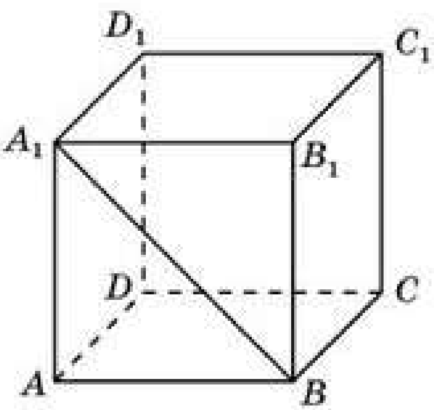
Кеңістіктегі бұрыш деп төбелері ортақ екі сәуледен және олармен шектелген жазықтықтың бір бөлігінен (осы сәулелер жататын) тұратын кеңістіктегі фигураны айтады.

Кеңістіктегі қиылысқан екі түзудің арасындағы бұрыш деп қиылысу нүктесіндегі осы түзулердің сәулелерінен жасалған бұрыштардың кішісін айтады.

Кеңістікте тік бұрыш жасап қиылысқан екі түзу *перпендикуляр түзулер* деп аталады.

Қиылысқан екі кесінді перпендикуляр түзулерде жататын болса, онда оларды перпендикуляр дейді. Қиылысқан екі кесіндінің арасындағы бұрыш деп оларға сәйкес түзулердің арасындағы бұрышты айтады.

Мысалы, кубтың қиылысқан қырлары өзара перпендикуляр, кубтың жағының диагоналі осы жақтың қырларымен $45°$ бұрыш жасайды (9.1-сурет).



9.1-сурет

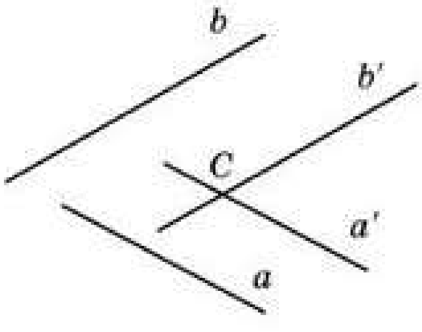
Жазықтықтағы сияқты, егер кеңістікте екі сәуленің бірі екіншісін қамтыса немесе олардың төбелерінен өтетін түзуге қарағанда бір бетінде (жағында) параллель түзулерде жатса, онда олар *бірдей бағытталған* (*бағыттас*) деп аталады.

Жазықтықтағы бұрыштың қасиетіне ұқсас кеңістіктегі бұрыштың келесі қасиеттері орынды болады.

1-қасиет. *Сәйкес қабырғалары бағыттас екі бұрыш тең болады.*

2-қасиет. *Сәйкес параллель түзулермен жасалған екі бұрыш тең болады.*

Қалай ойлайсыңдар, сәйкес қабырғалары параллель болатын екі бұрыш әрдайым тең бола ма? Мысал келтіріңдер.



9.2-сурет

Енді айқас түзулердің арасындағы бұрыш ұғымын анықтайық.

a мен b айқас түзулер болсын (9.2-сурет). Кеңістікте қандай да бір C нүктесін алып, осы нүкте арқылы a мен b түзулеріне сәйкес параллель a', b' түзулерін жүргіземіз.

Айқас түзулердің арасындағы бұрыш деп сәйкесінше оларға параллель қиылысқан түзулердің арасындағы бұрышты айтады.

Параллель қабырғалардың арасындағы бұрыштар тең болғандықтан, бұл анықтама C нүктесін таңдаудан тәуелсіз. Дербес жағдайда C нүктесі a немесе b түзуінде жатуы да мүмкін. Бұл жағдайда a' немесе b' түзуі үшін сәйкесінше a немесе b түзуінің өзін алуға болады.

Егер екі айқас түзулердің арасындағы бұрыш тік болса, онда олар *перпендикуляр* деп аталады.

Берілген түзуде : а) жататын ; ә) жатпайтын нүкте арқылы берілген түзуге перпендикуляр неше түзу жүргізуге болады ?

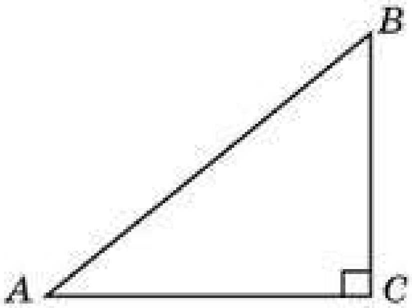
Егер екі кесінді перпендикуляр түзулерде жатса, онда оларды перпендикуляр деп атайды.

Кеңістіктегі *екі кесіндінің арасындағы бұрыш* деп осы кесінділер жатқан түзулердің арасындағы бұрышты айтады.

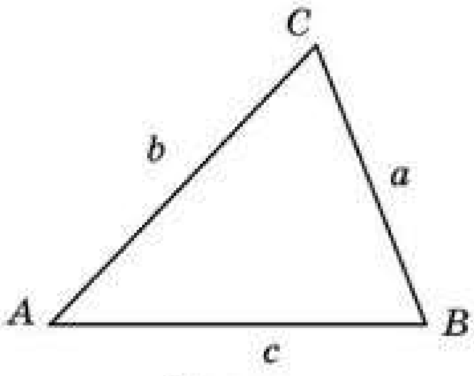
Үшбұрыштың бұрыштарын табу үшін тригонометриялық функцияларды қолдануға болатынын еске салайық.

Мысалы, C тік бұрышы болатын ABC үшбұрышының қабырғалары белгілі болса (9.3-сурет), онда оның A сүйір бұрышын келесі тригонометриялық функциялардың біреуін қолданып табуға болады:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \ \cos A = \frac{AC}{AB}, \ \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}, \ \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$



9.3-сурет



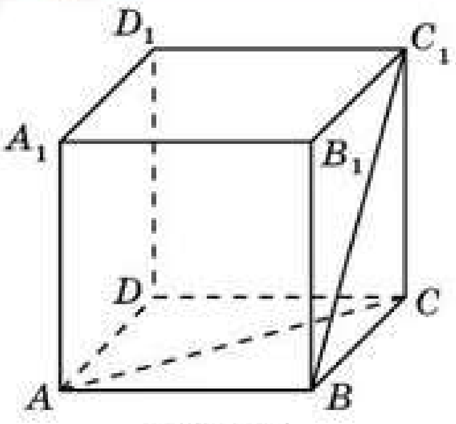
9.4-сурет

Қабырғалары $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болатын кез келген ABC үшбұрышының C бұрышын табу үшін косинустар теоремасын қолдануға болады (9.4-сурет):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

онда

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

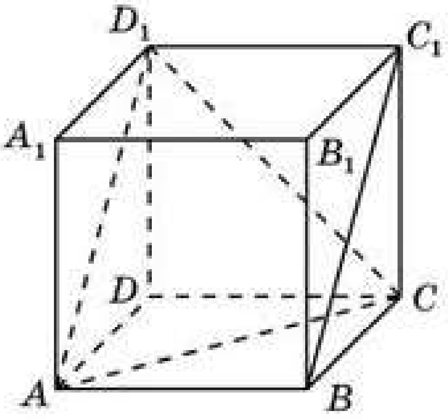


9.5-сурет

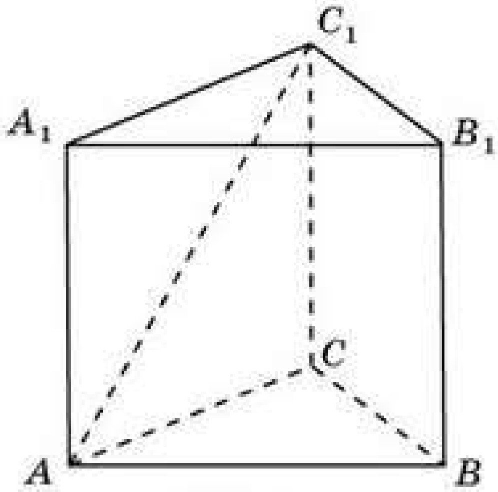
1-мыса л. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AC және BC_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар (9.5-сурет).

Шешуі . BC_1 түзуіне параллель AD_1 түзуін жүргіземіз. AC мен BC_1 түзулерінің арасындағы бұрыш AC мен AD_1 түзулерінің арасындағы бұрышқа тең болады. Осы бұрышты табу үшін ACD_1 үшбұрышын қарастырайық (9.6-сурет). Ол теңқабырғалы үшбұрыш болады. Демек, ізделінді CAD_1 бұрышы 60°-қа тең.

2-мысал. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең (9.7-сурет). AC_1 мен A_1B_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.



9.6-сурет



9.7-сурет

Шешуі . A_1B_1 түзуі AB түзуіне параллель болғандықтан, ізделінді бұрыш BAC_1 бұрышына тең болады. ABC_1 үшбұрышында $AB = 1$, $AC_1 = BC_1 = \sqrt{2}$. Косинустар теоремасы бойынша

$$BC_1^2 = AB^2 + AC_1^2 - 2AB \cdot AC_1 \cdot \cos\angle BAC_1.$$

AB, AC_1, BC_1 ұзындықтарының мәндерін қоя отырып, табамыз: $\cos\angle BAC_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Сұрақтар

1. Кеңістіктегі бұрыш дегеніміз не?
2. Кеңістіктегі қиылысқан екі түзудің арасындағы бұрыш дегеніміз не?
3. Екі айқас түзулердің арасындағы бұрыш дегеніміз не?
4. Кеңістіктегі қандай екі түзу перпендикуляр деп аталады?
5. Кеңістіктегі бұрыштар үшін қандай қасиеттер орынды болады?
6. Қабырғалары берілген тікбұрышты үшбұрыштың бұрыштарын қалай табуға болады?
7. Қабырғалары берілген кез келген үшбұрыштың бұрыштарын қалай табуға болады?

Есептер

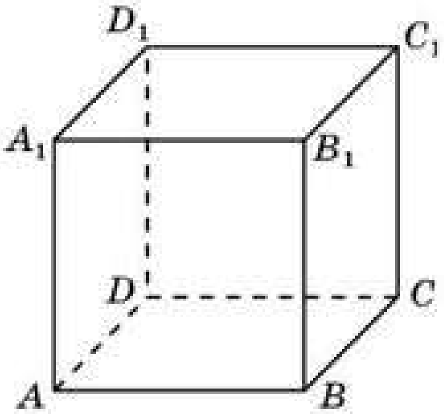
A

9.1. Кеңістікте түзу берілген және оның бойынан нүкте алынған. Осы нүкте арқылы өтіп, берілген түзуге перпендикуляр болатын неше түзу жүргізуге болады?

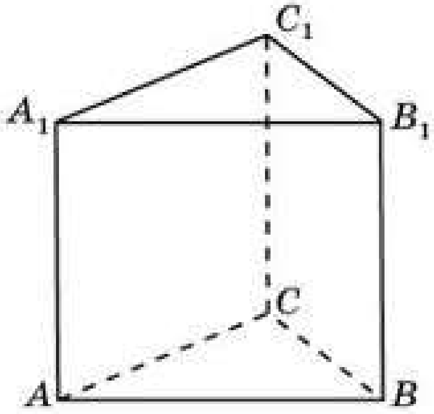
9.2. Түзу және одан тыс жатқан нүкте берілген. Осы нүкте арқылы өтіп, берілген түзуге перпендикуляр болатын неше түзу салуға болады?

9.3. Жазықтықта үшінші түзуге перпендикуляр болатын екі түзу параллель болады. Осы тұжырым кеңістік үшін орындала ма?

9.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB қырына перпендикуляр болатын қырларды көрсетіңдер (9.8-сурет).



9.8-сурет



9.9-сурет

9.5. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың BB_1 қырына перпендикуляр болатын қырларын көрсетіңдер (9.9 -сурет).

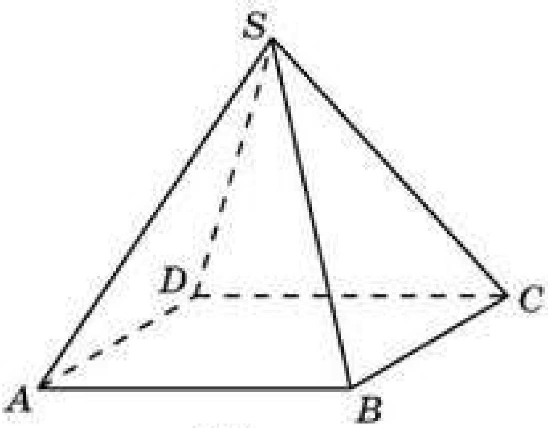
B

9.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының келесі түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар: а) AC және B_1D_1; ә) AB және B_1C_1; б) AB_1 және BC_1.

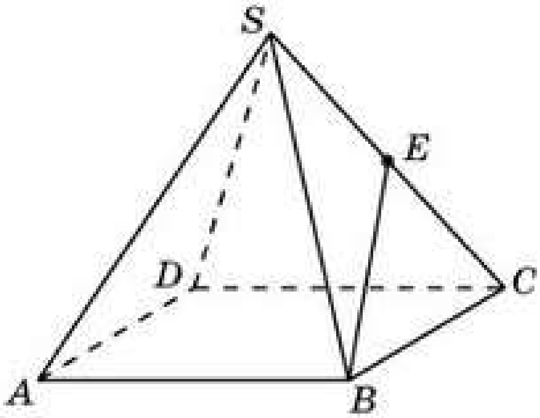
9.7. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың келесі түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар: а) AB және CC_1; ә) AB және B_1C_1.

9.8. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең (9.10 -сурет). Келесі түзулердің арасындағы бұрышты табыңдар: а) AB және SC; ә) SB және SD.

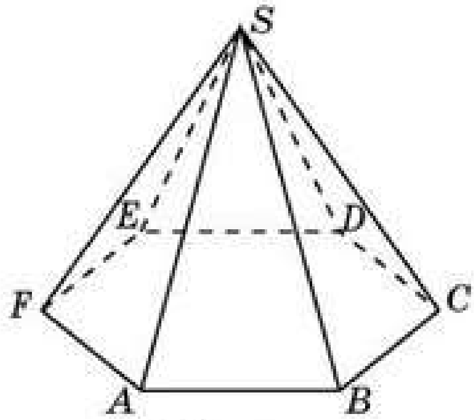
9.9. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең және E нүктесі — SC қырының ортасы (9.11 -сурет). AD мен BE түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар .



9.10-сурет

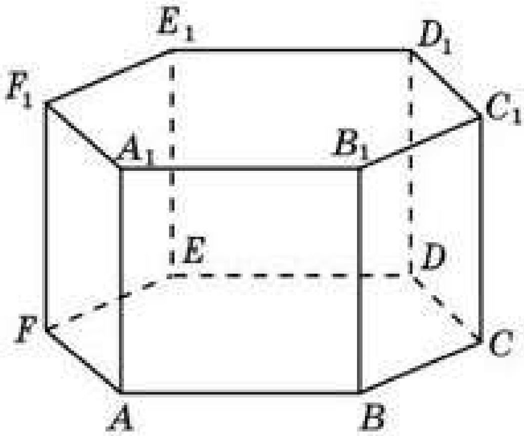


9.11-сурет



9.12-сурет

9.10. *SABCDEF* дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең (9.12-сурет). *SA* мен *BC* түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.



9.13-сурет

9.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (9.13 -сурет). Келесі түзулердің арасындағы бұрышты табыңдар: а) AA_1 және BC_1; ә) AA_1 және DE_1; б) AB және B_1C_1; в) AB және C_1D_1; г) AC және B_1C_1; ғ) AC және B_1D_1; д) AC және B_1E_1.

9.12. *SABCDEF* дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы 1-ге, ал бүйір қырлары 2-ге тең (9.12-сурет) . Келесі түзулердің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар: а) *SA* және *CD*; ә) *SA* және *BD*.

9.13. Қоршаған әлемнен перпендикуляр түзулерді көрсететін нысандарға мысалдар келтіріңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

9.14. Берілген нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықтың анықтамасын қайталаңдар.

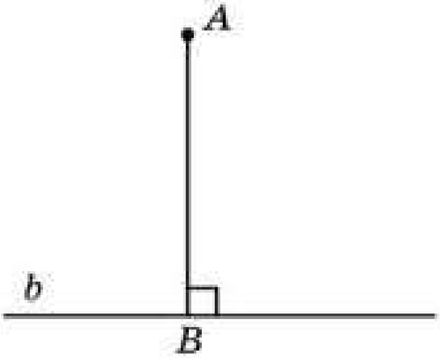
9.15. Кеңістіктегі нүктеден түзуге дейінгі қашықтық ұғымын анықтаңдар.

§ 10. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

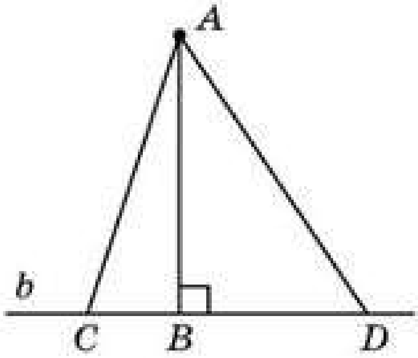
Жазықтықтағы *нүктеден түзуге дейінгі қашықтық* деп берілген нүктеден берілген түзуге түсірілген перпендикулярдың ұзындығын айтатынын еске салайық.

Нүкте мен түзу бір жазықтықта жатқандықтан нүктеден түзуге дейінгі қашықтықтың анықтамасы кеңістік үшін де орынды болады.

Кеңістіктегі *нүктеден түзуге дейінгі қашықтық* деп берілген нүктеден берілген түзуге түсірілген перпендикулярдың ұзындығын айтады (10.1-сурет).



10.1-сурет



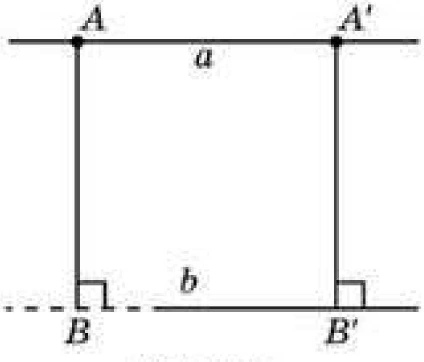
10.2-сурет

Берілген нүктеден берілген түзуге дейінгі қашықтық осы нүктеден берілген түзудің кез келген басқа нүктесіне дейінгі қашықтықтан кіші болатынын дәлелдеңдер.

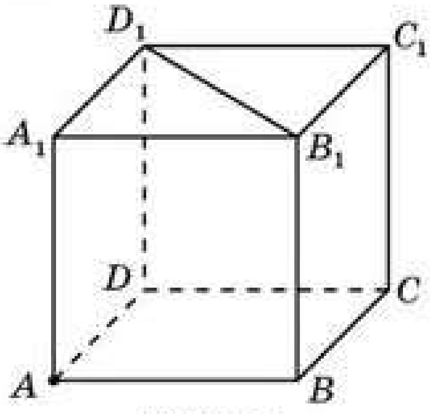
A нүктесінен b түзуіне дейінгі қашықтықты табу үшін, алдымен A нүктесінен b түзуіне түсірілген перпендикулярдың B табанын табамыз. Егер AB перпендикулярдың ұзындығын табу есептің шартынан тікелей шықпаса, онда b түзуінің бойынан қандай да бір C, D нүктелерін алып, биіктігі AB болатын ACD үшбұрышын қарастырамыз (10.2-сурет). AB биіктігін табу үшін Пифагор теоремасы немесе басқадай белгілі теоремалар мен формулалар қолданылады.

Егер перпендикулярдың B табаны 10.3-суреттегідей b түзуінің аумағынан тыс жатса, онда A нүктесі арқылы b түзуіне параллель a түзуін жүргіземіз және оның бойынан перпендикулярдың B' табаны b түзуінде жататындай A' нүктесін таңдап аламыз. $A'B'$ кесіндісінің ұзындығы ізделінді A нүктесінен b түзуіне дейінгі қашықтыққа тең болады.

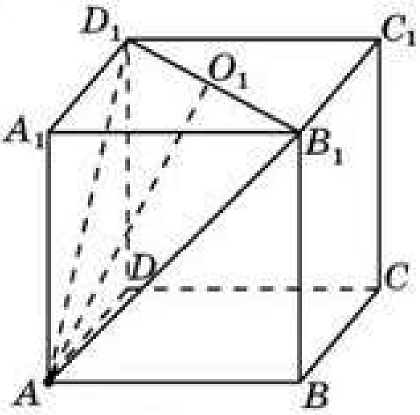
Мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен B_1D_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар (10.4-сурет).



10.3-сурет



10.4-сурет


10.5-сурет

Шешуі. AB_1D_1 үшбұрышын қарастырайық. Ол теңқабырғалы үшбұрыш және қабырғасы $\sqrt{2}$-ге тең. A төбесінен B_1D_1 түзуіне түсірілген перпендикулярдың табаны B_1D_1 кесіндісінің O_1 ортасы болады (10.5-сурет). AO_1 перпендикуляры $\frac{\sqrt{6}}{2}$-ге тең.

Сонымен $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен B_1D_1 түзуіне дейінгі қашықтық $\frac{\sqrt{6}}{2}$-ге тең болады.

Сұрақтар

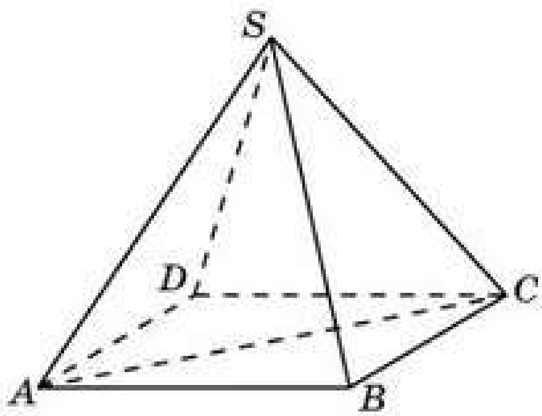
1. Кеңістіктегі нүктеден түзуге дейінгі қашықтық дегеніміз не?
2. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтықты табу үшін қандай деректер қолданылады?

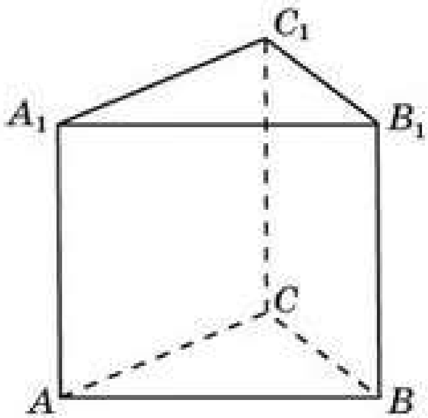
Есептер

А

10.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен келесі түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар: а) BC; ә) BD; б) C_1D_1.

10.2. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең (10.6-сурет). S төбесінен келесі түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар: а) AB; ә) AC.

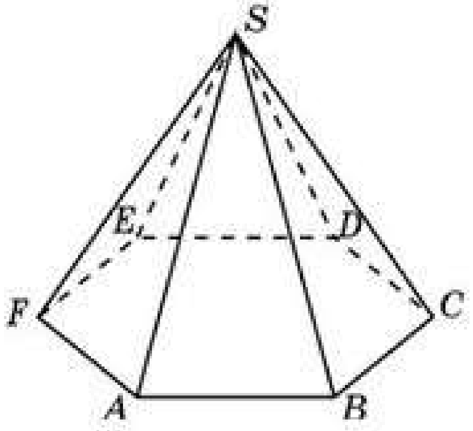

10.6-сурет


10.7-сурет

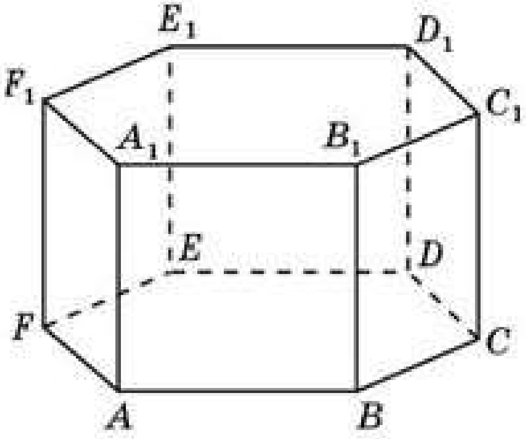
10.3. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (10.7-сурет). A нүктесінен келесі түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар: а) BB_1; ә) BC; б) BA_1.

10.4. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы 1-ге, ал бүйір қырлары 2-ге тең (10.8-сурет). S төбесінен AD түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

10.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (10.9-сурет). A нүктесінен келесі түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар: а) BB_1; ә) BA_1; б) BC; в) CD; г) DE; ғ) BD; д) BE; е) BF; ж) CE; з) CF; и) A_1B_1.



10.8-сурет

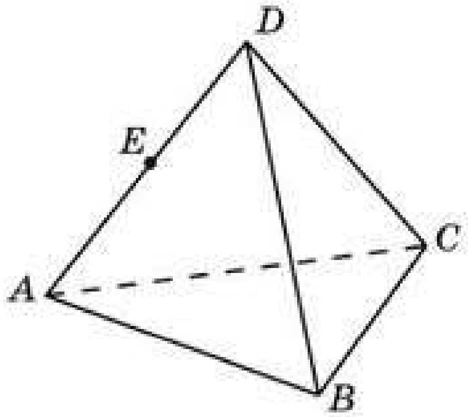


10.9-сурет

В

10.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A нүктесінен CB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

10.7. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең (10.10-сурет). Оның AD қырының E ортасынан BC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.



10.10-сурет

10.8. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (10.7-сурет). A нүктесінен B_1C_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

10.9. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы 1-ге, ал бүйір қырлары 2-ге тең (10.8-сурет). S төбесінен AC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

10.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (10.9-сурет). A нүктесінен B_1F_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

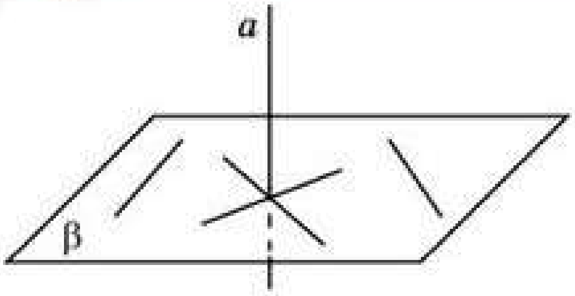
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

10.11. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы ұғымына анықтама беріп көріңдер.

§ 11. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы

Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы ұғымын анықтайық.

Егер түзу жазықтықтағы түзулердің кез келгеніне перпендикуляр болса, онда осы *түзу жазықтыққа перпендикуляр* деп аталады (11.1-сурет).



11.1-сурет

a түзуі мен β жазықтығының перпендикулярлығы $a \perp \beta$ арқылы белгіленеді.

Жазықтыққа перпендикуляр түзудің немесе кесіндінің көрнекі көріністері ретінде тігінен тұрған телеграф бағандарын, "Қазақ елі" монументін (11.2, а-сурет), Қазақстанның Тәуелсіздігінің монументін (11.2, ә-сурет), теледидар мұнарасын (11.2, б-сурет) айтуға болады, олар жер бетіндегі жазықтыққа перпендикуляр болады. Сонымен қатар бөлменің бұрышының қыры еденге перпендикуляр болады. Еденнің бұрышынан еденді бойлай жүргізілген кез келген түзу оның қырына перпендикуляр болып табылады.


а)


ә)


б)

11.2-сурет

Жазықтыққа перпендикуляр түзудің бойында жататын кесінді де осы жазықтыққа перпендикуляр болады.

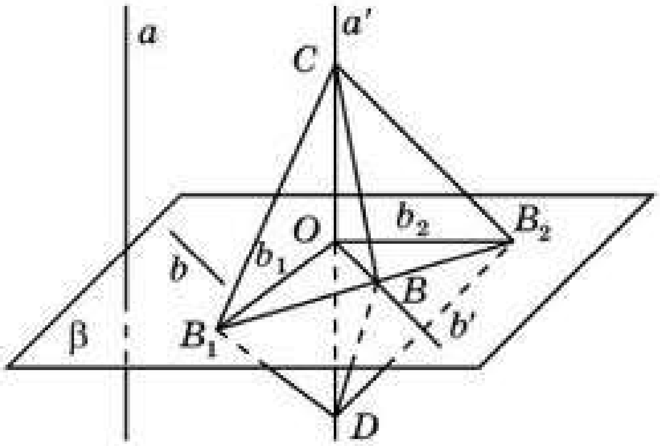
Жазықтыққа перпендикуляр түзудің осы жазықтықты қиып өтетінін байқаймыз. Расында да, егер түзу жазықтықта жатса немесе оған параллель болса, онда осы жазықтықта оған параллель түзу табылады. Осыдан бастапқы түзу берілген жазықтыққа перпендикуляр болмас еді.

Берілген жазықтықта: а) жататын; ә) жатпайтын нүкте арқылы берілген жазықтыққа перпендикуляр неше түзу жүргізуге болады?

Келесі теорема түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының жеткілікті шартын береді.

Теорема (түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі). ***Егер түзу жазықтықта жататын өзара қиылысқан екі түзуге перпендикуляр болса, онда бұл түзу жазықтыққа перпендикуляр болады.***

Дәлелдеуі. a түзуі β жазықтығында жататын O нүктесінде қиылысқан b_1, b_2 түзулеріне перпендикуляр болсын (11.3-сурет).



11.3-сурет

β жазықтығының кез келген b түзуін қарастырайық. O нүктесі арқылы a, b түзулеріне параллель сәйкесінше a', b' түзулерін жүргіземіз. a, b түзулерінің перпендикулярлығын дәлелдеу үшін a', b' түзулерінің перпендикулярлығын дәлелдеу жеткілікті.

Ол үшін β жазықтығында b_1, b_2, b' түзулерін сәйкесінше B_1, B_2, B нүктелерінде қиып өтетін түзуді жүргіземіз. a' түзуінің бойынан O нүктесінен бастап OC, OD тең кесінділерін аламыз және C, D нүктелерін B_1, B_2, B нүктелерімен қосамыз. OB_1C және OB_1D тікбұрышты үшбұрыштары тең (катеттері бойынша) болады. Демек, $B_1C = B_1D$.

Осыған ұқсас OB_2C және OB_2D тікбұрышты үшбұрыштарының теңдігінен $B_2C = B_2D$ шығады. B_1B_2C және B_1B_2D үшбұрыштары тең (үш қабырғасы бойынша) болады. Демек, $\angle CB_1B = \angle DB_1B$.

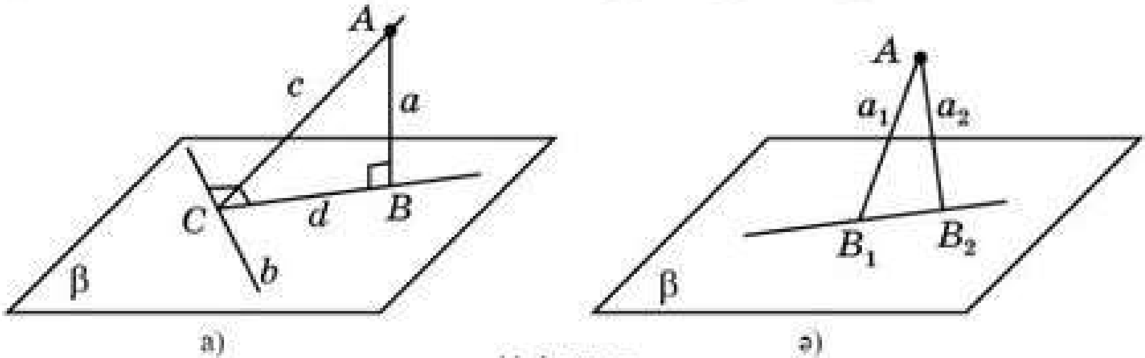
B_1BC және B_1BD үшбұрыштары тең (екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы бойынша) болады. Сонымен $BC = BD$. OBC және OBD үшбұрыштары тең (үш қабырғасы бойынша), ендеше $\angle BOC = \angle BOD = 90°$, яғни a' пен b' түзулері өзара перпендикуляр.

Демек, a түзуі β жазықтығына перпендикуляр болады. ◻

Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының кейбір қасиеттерін қарастырайық.

1-қасиет. *Берілген жазықтықтан тыс жатқан нүкте арқылы осы жазықтыққа перпендикуляр бір ғана түзу жүргізуге болады.*

Дәлелдеуі. A нүктесін және β жазықтығын қарастырайық (11.4, а-сурет). β жазықтығында қандай да бір b түзуін жүргіземіз.



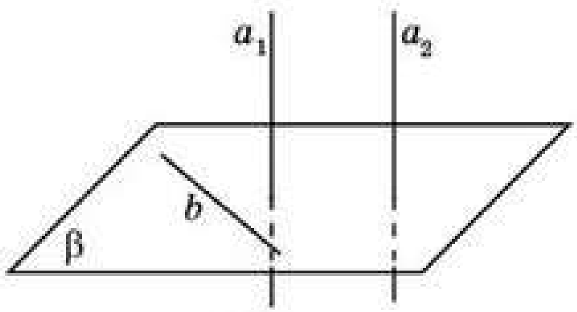
11.4-сурет

A нүктесі және b түзуімен анықталған жазықтықта b түзуіне перпендикуляр c түзуін жүргіземіз. b және c түзулерінің қиылысу нүктесін C арқылы белгілейік. β жазықтығында C нүктесі арқылы b түзуіне перпендикуляр d түзуін жүргіземіз. b түзуі c мен d түзулерімен анықталған β жазықтығына перпендикуляр болатынын байқаймыз.

A нүктесі және d түзуімен анықталған жазықтықта d түзуіне перпендикуляр a түзуін жүргіземіз. Осы түзу β жазықтығына перпендикуляр ізделінді түзу болады. Расында да, a түзуі d түзуіне перпендикуляр болады. Сондай-ақ ол β жазықтығында жатады, ендеше b түзуіне перпендикуляр болады. Сонымен a түзуі β жазықтығындағы қиылысқан екі b мен d түзулеріне перпендикуляр болады, демек, ол осы жазықтыққа да перпендикуляр болады.

Жалғыздығын дәлелдейік. A нүктесі арқылы β жазықтығына перпендикуляр a_1 және a_2 екі түзу өтсін деп ұйғарайық (11.4, ә-сурет). Олардың β жазықтығымен сәйкесінше қиылысу нүктелерін B_1, B_2 деп белгілейік. Сонда AB_1B_2 жазықтығында A нүктесі арқылы өтетін және B_1B_2 түзуіне перпендикуляр болатын екі түзу бар болады. Ал бұл жазықтықтағы перпендикуляр түзулердің сәйкес қасиетіне қайшы келеді. Ендеше A нүктесі арқылы β жазықтығына перпендикуляр біреуден артық түзу өтуі мүмкін емес. Демек, мұндай түзу біреу ғана болады. ☐

2-қасиет. *Егер түзу жазықтыққа перпендикуляр болса, онда бұл түзуге параллель болатын кез келген түзу осы жазықтыққа перпендикуляр болады .*



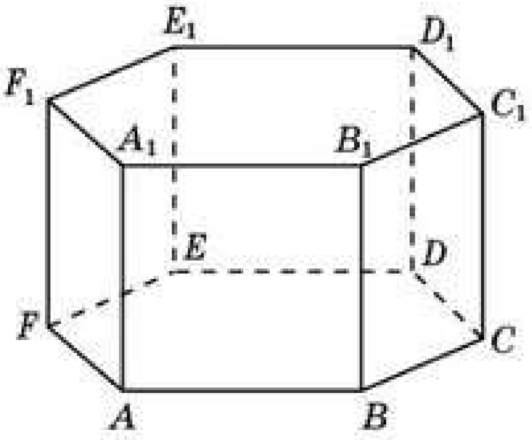
11.5-сурет

Дәлелдеуі . a_1 түзуі β жазықтығына перпендикуляр және a_2 түзуі a_1 түзуіне параллель болсын (11.5 -сурет). a_1 түзуі β жазықтығында жатқан кез келген түзуге перпендикуляр болғандықтан, a_1 түзуіне параллель a_2 түзуі де осы жазықтықта жатқан кез келген түзуге перпендикуляр болады. Демек, ол β жазықтығына перпендикуляр болады. ☐

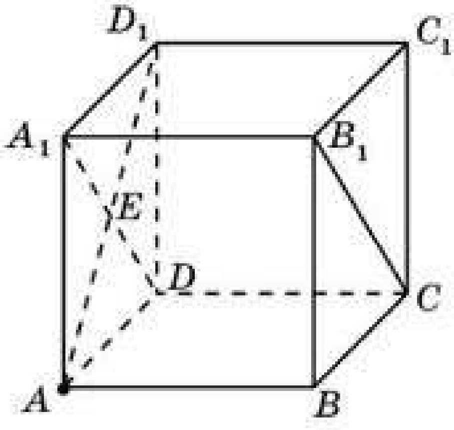
3-қасиет. *Бір жазықтыққа перпендикуляр екі түзу өзара параллель болады .*

Дәлелдеуі . a_1 және a_2 түзулері β жазықтығына перпендикуляр болсын. a_2 түзуінің бойында жатқан қандай да бір A_2 нүктесі арқылы a_1 түзуіне параллель түзу жүргіземіз. 2-қасиет бойынша ол β жазықтығына перпендикуляр болады. 1-қасиет бойынша ол a_2 түзуімен сәйкес келуі керек. Демек, a_2 түзуі a_1 түзуіне параллель болады. ☐

1-мысал. Тік призманың бүйір қырлары оның табанына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер (11.6-сурет).



11.6-сурет



11.7-сурет

Шешуі . Тік призманың бүйір жақтары тіктөртбұрыштар болады. Сондықтан әрбір бүйір қыры призманың табанының екі іргелес жатқан қабырғаларына перпендикуляр болады. Демек, табанына перпендикуляр болады.

2-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AD_1 түзуі CDA_1 жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

Шешуі . AD_1 түзуі DA_1 түзуіне перпендикуляр болады (11.7 -сурет). Сонымен қатар ол CD түзуі перпендикуляр болатын ADD_1 жазықтығында жатыр. Демек, AD_1 түзуі CDA_1 жазықтығына перпендикуляр болады.

Сұрақтар

1. Қандай түзу жазықтыққа перпендикуляр деп аталады?
2. Қандай кесінді жазықтыққа перпендикуляр деп аталады?
3. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісін тұжырымдаңдар.

Есептер

А

11.1. Түзу жазықтыққа параллель. Ол осы жазықтықта жатқан кандай да бір түзуге перпендикуляр болуы мүмкін бе?

11.2. Үшбұрыштың екі қабырғасына перпендикуляр болатын түзу үшбұрыш жазықтығына қатысты қалай орналасады?

11.3. Егер түзу дөңгелектің: а) диаметріне; ә) екі диаметріне перпендикуляр болса, онда олардың центрінен өтетін осы түзу дөңгелек жазықтығына перпендикуляр болатыны ақиқат па?

11.4. a түзуі α жазықтығын қиып өтеді және оған перпендикуляр емес. α жазықтығында a түзуімен перпендикуляр болатын түзулер бар ма?

11.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында келесі түзу мен жазықтық перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер (11.8-сурет) : а) AA_1 және ABC; ә) AB және BCC_1; б) AB_1 және BCD_1.

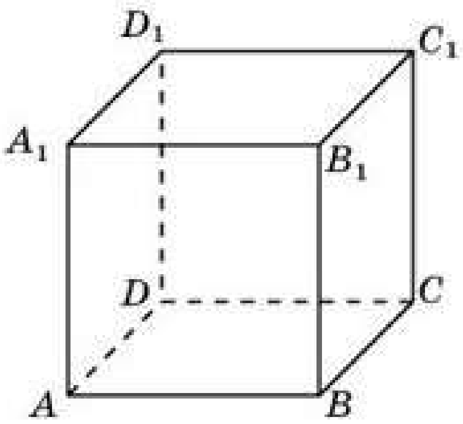
В

11.6. Егер түзу жазықтықтың қандай да бір екі түзуіне перпендикуляр болса, онда түзу осы жазықтыққа перпендикуляр болатыны ақиқат па?

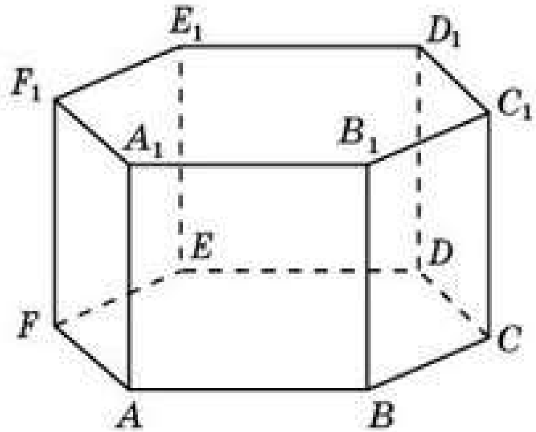
11.7. Екі түзу қалай орналасқанда біреуі арқылы екіншісіне перпендикуляр болатындай жазықтықты жүргізуге болады?

11.8. Үшбұрыштың бір қабырғасы арқылы екінші қабырғасына перпендикуляр жазықтық жүргізілген болса, онда үшбұрыштың түрін анықтаңдар.

11.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында келесі түзулердің перпендикулярлығын дәлелдеңдер (11.8-сурет): а) AA_1 және AC; ә) AA_1 және BD; б) AB және BC_1.



11.8-сурет



11.9-сурет

11.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада келесі түзу мен жазықтық перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер (11.9-сурет) : а) AA_1 және ABC; ә) AB және BDD_1; б) AC және CDD_1; в) AC және BEE_1; г) AD және CEE_1; ғ) AB_1 және BDE_1.

11.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада келесі түзулердің перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер (11.9-сурет): а) AA_1 және AC; ә) AA_1 және AD; б) AA_1 және AE; в) AA_1 және BF; г) AB және BD_1; ғ) AB және EA_1; д) AC және DC_1.

11.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында BD_1 түзуі AC және AB_1 түзулеріне перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

11.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында BD_1 түзуі ACB_1 жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

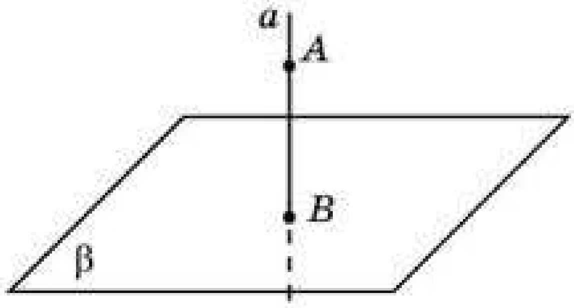
11.14. Қоршаған әлемнен өзара перпендикуляр түзу мен жазықтықты көрсететін нысандарға мысалдар келтіріңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

11.15. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық ұғымын анықтап көріңдер.

§ 12. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

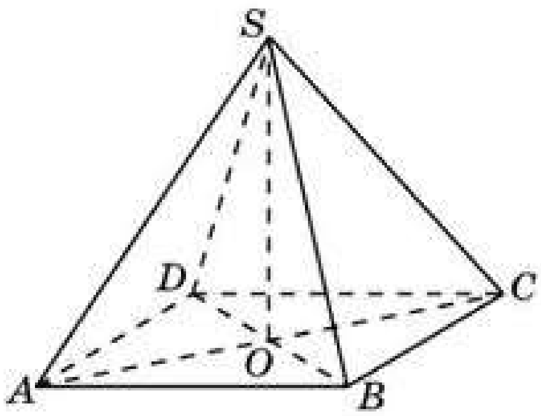
b жазықтығында жатпайтын A нүктесі арқылы осы жазықтыққа перпендикуляр түзу жүргіземіз және оның жазықтықпен қиылысу нүктесін B деп белгілейік (12.1 -сурет). AB кесіндісі A нүктесінен b жазықтығына түсірілген *перпендикуляр* деп аталады. Бұл кесіндінің ұзындығы A *нүктесінен* b *жазықтығына дейінгі қашықтық* деп аталады.



12.1-сурет

Мысалы, көшедегі жарық бағандарының шамы жерден белгілі бір биіктікте тұрсын. Сонда шамнан жер бетінің жазықтығына дейінгі қашықтық осы шамнан жерге түсірілген перпендикуляр арқылы өлшенеді (12.2-сурет).


12.2-сурет



12.3-сурет

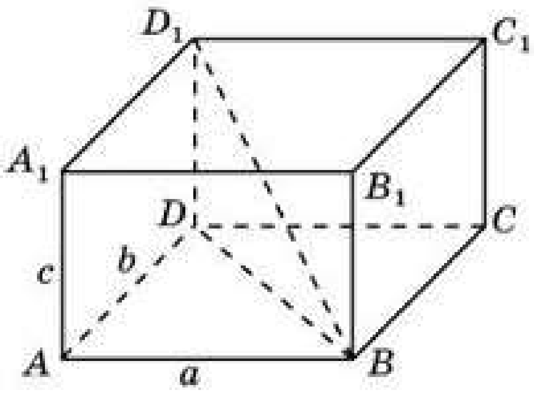
Берілген нүктеден берілген жазықтыққа дейінгі қашықтық осы нүктеден берілген жазықтықтың кез келген басқа нүктесіне дейінгі қашықтықтан кіші болатынын дәлелдеңдер.

Пирамиданың төбесінен оның табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр *пирамиданың биіктігі* деп аталады.

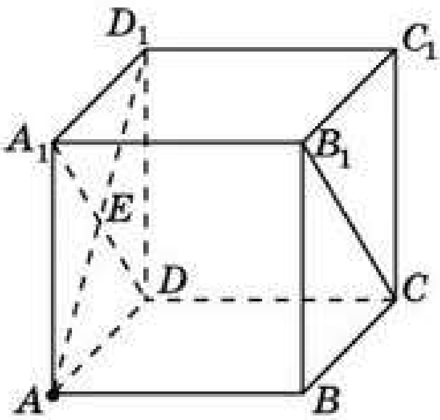
12.3- суретте $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың SO биіктігі көрсетілген.

Қашықтықтарды табуға мысалдар қарастырайық.

1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедтің B және D_1 төбелерінің арақашықтығын (диагонал ін) табыңдар (12.4 -сурет), мұндағы $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$.



12.4-сурет



12.5-сурет

Шешуі . DD_1 түзуі DA мен DC түзулеріне перпендикуляр. Ендеше ол ABC жазықтығына перпендикуляр. Демек, ол түзу DB түзуіне де перпендикуляр болады .

BDD_1 тікбұрышты үшбұрышында $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$, $DD_1 = c$. Пифагор теоремасы бойынша гипотенузасын табамыз: $BD_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесінен CDA_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар (12.5 -сурет).

Шешуі . AD_1 кесіндісін жүргіземіз. Оның DA_1 кесіндісімен қиылысу нүктесін E деп белгілейік. AE түзуі DA_1 және DC түзулеріне перпендикуляр. Демек, ол CDA_1 жазықтығына да перпендикуляр болады. AE кесіндісі A нүктесінен CDA_1 жазықтығына түсірілген ізделінді перпендикуляр болады. Оның ұзындығы $\frac{\sqrt{2}}{2}$-ге тең. Демек, бірлік кубтың A төбесінен CDA_1 жазықтығына дейінгі қашықтық $\frac{\sqrt{2}}{2}$-ге тең болады.

Сұрақтар

1. Нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикуляр дегеніміз не?
2. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық дегеніміз не?

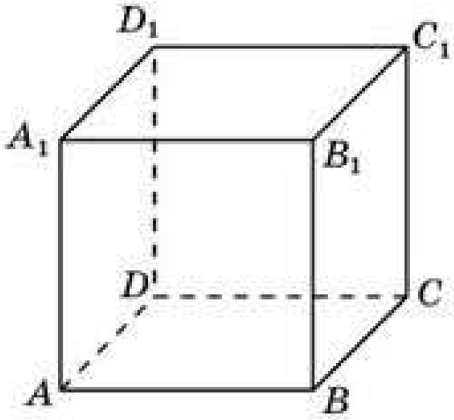
Есептер

A

12.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. AC_1 диагоналін табыңдар.

12.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы A төбесінен келесі жазықтықтарға дейінгі қашықтықты табыңдар: а) BCC_1; ә) BCD_1 (12.6- сурет).

12.3. Барлық қырлары 1-ге тең $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігін табыңдар (12.3 -сурет).



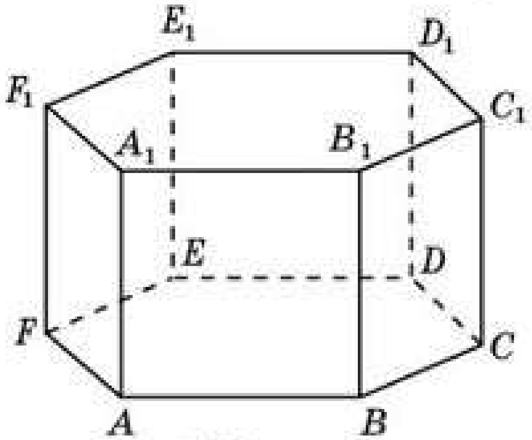
12.6-сурет

В

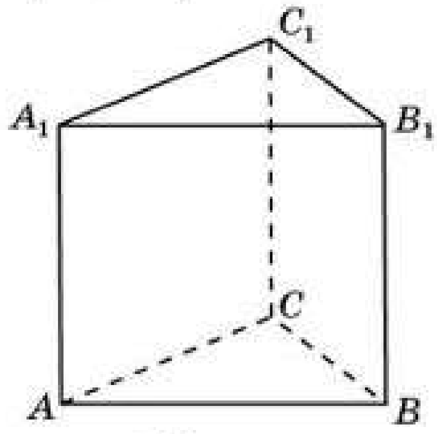
12.4. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (12.7 -сурет). A төбесінен келесі жазықтықтарға дейінгі қашықтықты табыңдар : а) BDD_1; ә) BEE_1; б) BFF_1; в) BCC_1; г) CDD_1; ғ) CEE_1; д) CFF_1.

12.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (12.7 -сурет). Келесі төбелердің аракашықтығын табыңдар: а) A және C_1; ә) A және D_1.

12.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (12.7 -сурет). A төбесінен келесі түзулерге дейінгі қашықтықты табыңдар : а) BD_1; ә) CD_1.



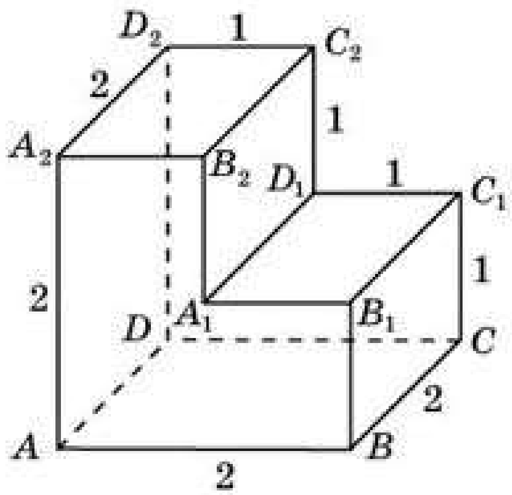
12.7-сурет



12.8-сурет

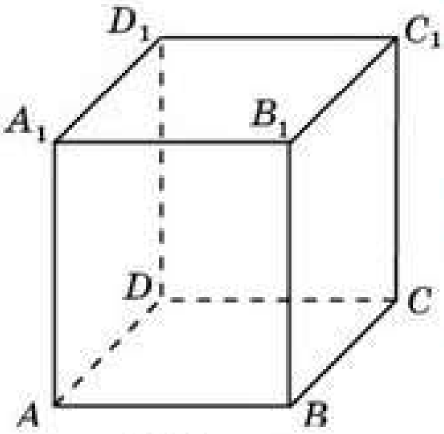
12.7. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың табанының қабырғалары 1-ге тең (12.8-сурет). Осы призманың A төбесінен BCC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар .

12.8. Көпжақтың жақтары тік бұрыштары бар көпбұрыштар болады (12.9-сурет). Келесі төбелердің арақашықтығын табыңдар: а) A және C_1; ә) A және D_1; б) A және C_2; в) B және D_1; г) B және D_2.



12.9-сурет

12.9. Көпжақтың жақтары тік бұрыштары бар көпбұрыштар болады (12.9-сурет). A төбесінен келесі түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар: а) B_1C_1; ә) A_1D_1; б) B_2C_2.

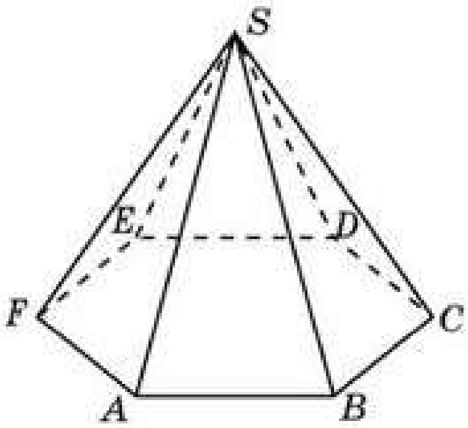


12.10-сурет

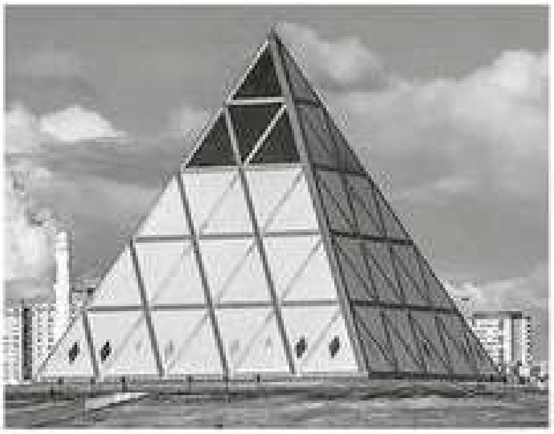
12.10. Тіктөртбұрышты призманың табаны ромб, оның қабырғасы 3-ке және сүйір бұрышы 60°-қа тең. Призманың бүйір қыры 4-ке тең. Призманың кіші диагоналін табыңдар (12.10-сурет).

12.11. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың биіктігін салыңдар (12.11-сурет).

12.12. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. Оның биіктігін табыңдар (12.11-сурет).



12.11-сурет


12.12-сурет

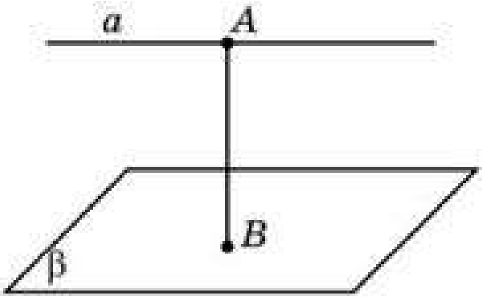
12.13. Нұр-Сұлтан қаласындағы Бейбітшілік пен келісім сарайы дұрыс төртбұрышты пирамида пішіндес болып табылады (12.12-сурет). Оның биіктігі табанының қабырғасына, яғни 62 м-ге тең. Осы пирамиданың бүйір қырының ұзындығын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

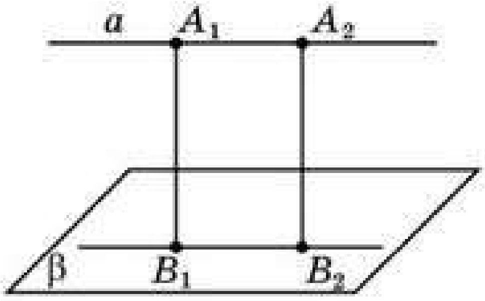
12.14. Параллель түзу мен жазықтықтың арақашықтығын анықтап көріңдер.

§ 13. Параллель түзу мен жазықтықтың және параллель екі жазықтықтың арақашықтықтары

Түзу және оған параллель жазықтық берілсін. *Параллель түзу мен жазықтықтың арақашықтығы* деп түзудің қандай да бір нүктесінен жазықтыққа дейінгі қашықтықты айтады (13.1-сурет).



13.1-сурет

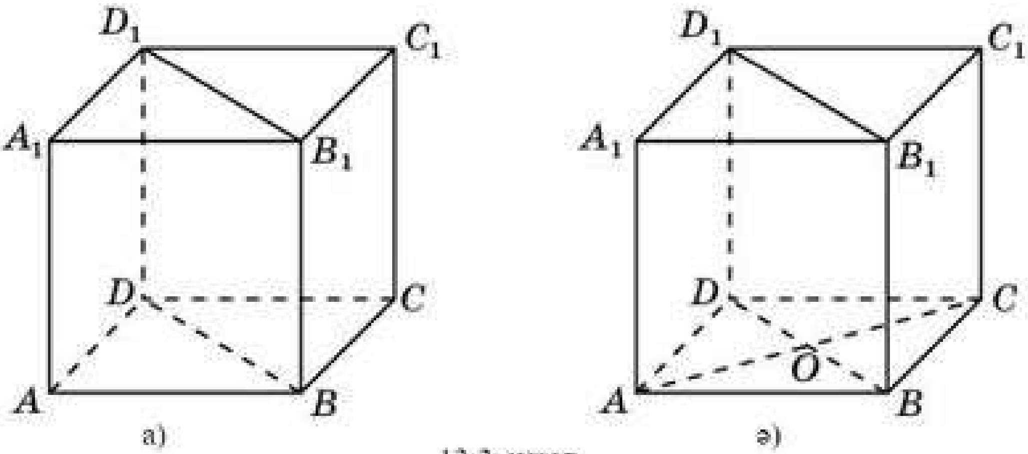


13.2-сурет

Теорема. ***Параллель түзу мен жазықтықтың арақашықтығы түзудің бойындағы нүктені таңдап алуға байланысты болмайды*** .

Дәлелдеуі . A_1, A_2 нүктелері — b жазықтығына параллель a түзуінде жатқан екі нүкте (13.2-сурет), B_1, B_2 нүктелері осы нүктелерден жазықтыққа түсірілген перпендикулярлардың табандары болсын. 11-параграфтағы 3-қасиет бойынша A_1B_1 және A_2B_2 перпендикулярлары параллель. B_1B_2 түзуі b жазықтығының осы перпендикулярлармен анықталған жазықтықпен қиылысу сызығы. Ендеше B_1B_2 түзуі a түзуіне параллель. Сонымен $A_1A_2B_2B_1$ төртбұрышы — параллелограмм (тіктөртбұрыш). Демек, $A_1B_1 = A_2B_2$.

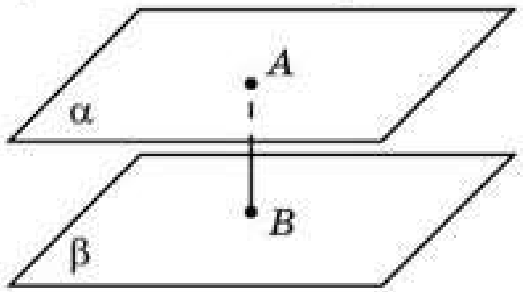
1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы AA_1 түзуі мен BDD_1 жазықтығының арақашықтығын табыңдар (13.3, а-сурет).



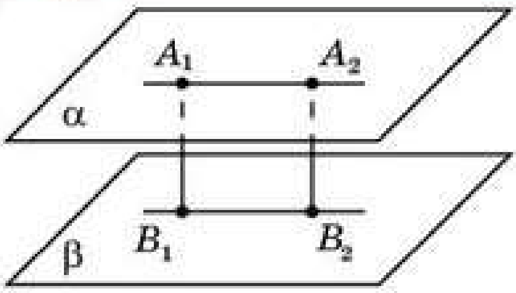
13.3-сурет

Шешуі . Кубтың $ABCD$ жағының AC диагоналі BDD_1 жазықтығына перпендикуляр . AC диагоналінің BDD_1 жазықтығымен қиылысу нүктесін O деп белгілейік (13.3, ә-сурет). AA_1 түзуі мен BDD_1 жазықтығының арақашықтығы AO кесіндісінің ұзындығына, яғни $\frac{\sqrt{2}}{2}$-ге тең болады .

Параллель екі жазықтықтың арақашықтығы деп олардың біреуінің қандай да бір нүктесінен екінші жазықтыққа дейінгі қашықтықты айтады (13.4-сурет).



13.4-сурет

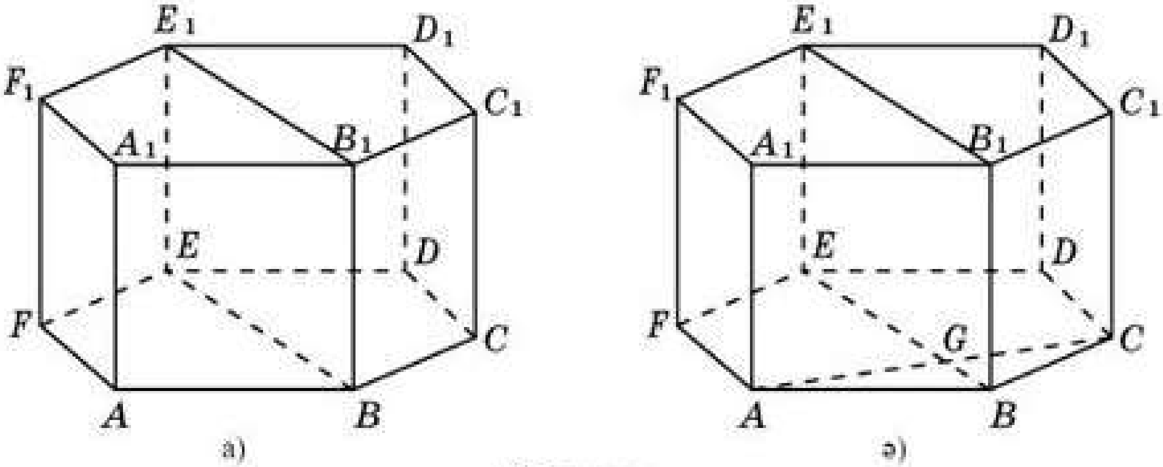


13.5-сурет

Теорема. ***Параллель екі жазықтықтың арақашықтығы жазықтықтағы нүктені таңдап алуға байланысты болмайды.***

Дәлелдеуі. A_1, A_2 — b жазықтығына параллель a жазықтығындағы нүктелер (13.5-сурет), B_1, B_2 осы нүктелерден b жазықтығына түсірілген сәйкесінше перпендикулярлардың табандары болсын. 11-параграфтағы 3-қасиет бойынша A_1B_1 және A_2B_2 перпендикулярлары параллель болады. B_1B_2 түзуі b жазықтығының осы перпендикулярлармен анықталған жазықтықпен қиылысу сызығы болады. Ендеше B_1B_2 түзуі A_1A_2 түзуіне параллель. Сонымен $A_1A_2B_2B_1$ төртбұрышы — параллелограмм (тіктөртбұрыш). Демек, $A_1B_1 = A_2B_2$ болады.

2-мысал. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AFF_1 және BEE_1 жазықтықтарының арақашықтығын табыңдар (13.6, а-сурет).



13.6-сурет

Шешуі. Призманың $ABCDEF$ жағының AC диагоналі BEE_1 жазықтығына перпендикуляр. Осы диагональдің BEE_1 жазықтығымен қиылысу нүктесін G деп белгілейік (13.6, ә-сурет). AFF_1 және BEE_1 жазықтықтарының арақашықтығы AG кесіндісінің ұзындығына, яғни $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ге тең болады.

Сұрақтар

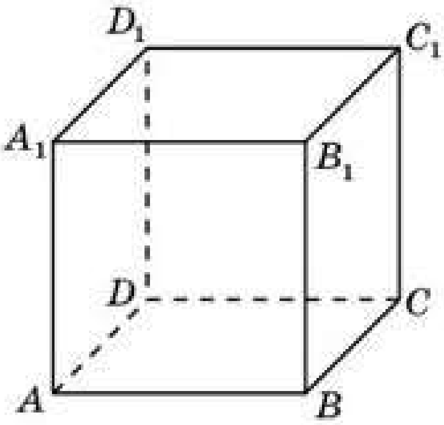
1. Параллель түзу мен жазықтықтың арақашықтығы дегеніміз не?
2. Параллель түзу мен жазықтықтың арақашықтығын қалай табуға болады?
3. Параллель екі жазықтықтың арақашықтығы дегеніміз не?

Есептер

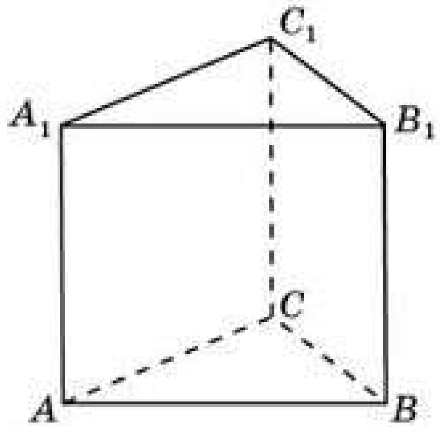
A

13.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында : а) AA_1 түзуі мен BCC_1 жазықтығының арақашықтығын ; ә) AB_1 түзуі мен CDD_1 жазықтығының арақашықтығын табыңдар (13.7-сурет).

13.2. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (13.8-сурет). AA_1 түзуі мен BCC_1 жазықтығының арақашықтығын табыңдар .

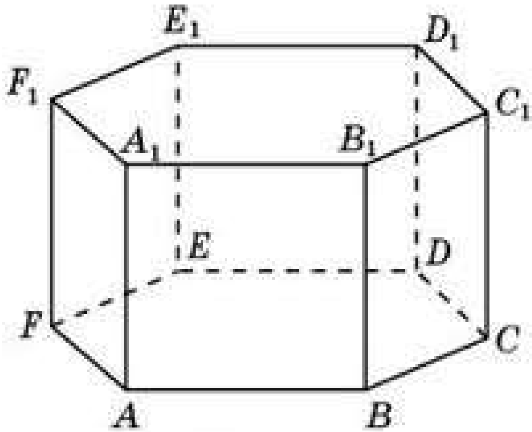


13.7-сурет

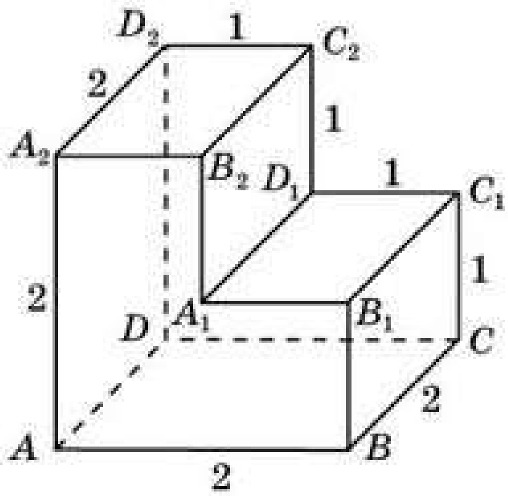


13.8-сурет

13.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (13.9-сурет). AA_1 түзуі мен келесі жазықтықтың арақашықтығын табыңдар: а) BCC_1; ә) CDD_1; б) DEE_1; в) BDD_1; г) BEE_1; ғ) BFF_1; д) CEE_1; е) CFF_1.



13.9-сурет



13.10-сурет

13.4. Көпжақтың жақтары тік бұрышы бар көпбұрыштар болады (13.10-сурет). Келесі жазықтықтардың арақашықтығын табыңдар: а) ABB_1 және CDD_2; ә) ADD_2 және BCC_1; б) ADD_2 және $A_1D_1C_2$; в) ABC және $A_1B_1C_1$.

В

13.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында : а) BB_1 түзуі мен ACC_1 жазықтығының арақашықтығын; ә) AB түзуі мен CDA_1 жазықтығының арақашықтығын табыңдар.

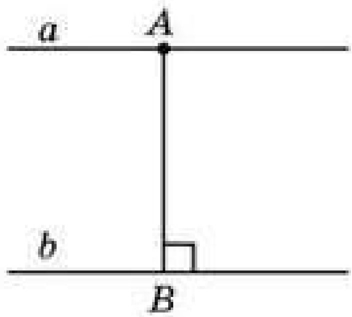
13.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Келесі жазықтықтардың арақашықтығын табыңдар: а) ABB_1 және DEE_1; ә) ABB_1 және CFF_1; б) ACC_1 және FDD_1.

§ 14. Екі түзудің арақашықтығы

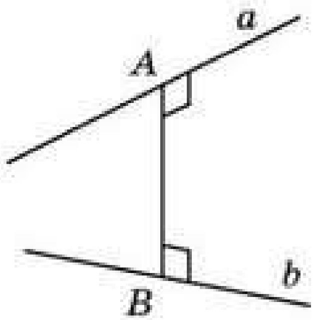
Планиметрия курсында *параллель екі түзудің арақашықтығы* деп олардың біреуінің қандай да бір нүктесінен екінші түзуге дейінгі қашықтықты айтатынын еске салайық.

Параллель екі түзу бір жазықтықта жатқандықтан бұл анықтама кеңістік үшін де орынды болады.

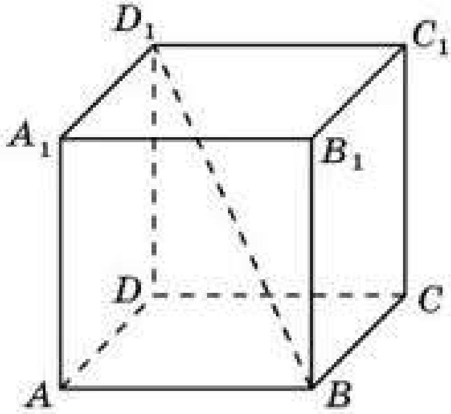
Кеңістіктегі параллель екі түзудің арақашықтығы деп олардың біреуінің қандай да бір нүктесінен екінші түзуге дейінгі қашықтықты айтады (14.1-сурет).



14.1-сурет



14.2-сурет



14.3-сурет

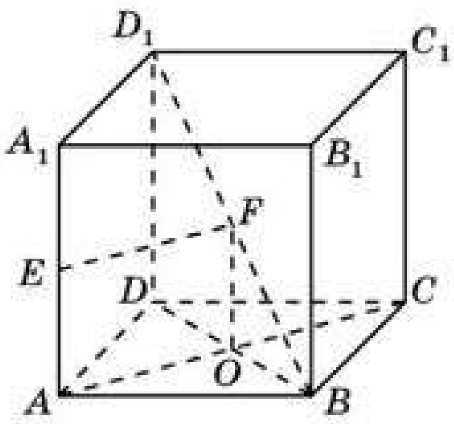
Енді кеңістіктегі айқас екі түзудің арақашықтығы ұғымын анықтайық.

Айқас түзулердің ортақ перпендикуляры деп осы түзулердің қайсысына да перпендикуляр болатын, ұштары осы түзулерде жататын кесіндіні айтады. Ортақ перпендикулярдың ұзындығын *айқас түзулердің арақашықтығы* деп атайды (14.2-сурет).

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында AA_1 және BC айқас түзулеріне ортақ перпендикуляр түзуді көрсетіңдер (14.3-сурет).

1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы AA_1 мен BD_1 айқас түзулерінің арақашықтығын табыңдар (14.3-сурет).

Шешуі. Берілген түзулер үшін ортақ перпендикуляр AA_1 және BD_1 кесінділерінің орталарын қосатын EF кесіндісі болады (14.4-сурет).

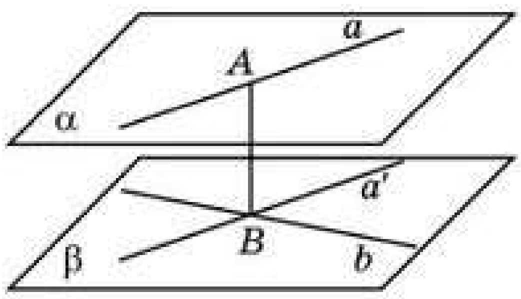


14.4-сурет

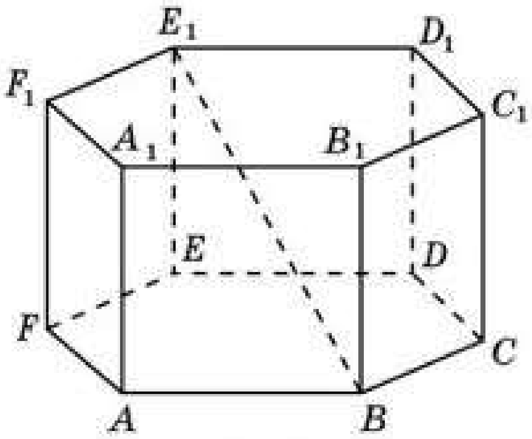
Расында да, EF кесіндісі AA_1 түзуіне және BDD_1 жазықтығына перпендикуляр болатын AC түзуіне параллель болады. Ендеше ол осы жазықтықта жатқан BD_1 түзуіне де перпендикуляр. EF ортақ перпендикуляры AO кесіндісіне тең, демек, $\frac{\sqrt{2}}{2}$-ге тең болады.

Параллель түзу мен жазықтықтың арақашықтығы ұғымын айқас екі түзудің арақашықтығын табуда қолдануға болады.

a және b — айқас екі түзу болсын. b түзуінің қандай да бір нүктесі арқылы a түзуіне параллель a' түзуін жүргіземіз. Осы түзу және b түзуі a түзуіне параллель болатын b жазықтығын анықтайды (14.5- сурет). Берілген айқас түзулерге AB ортақ перпендикуляры b жазықтығына перпендикуляр болады. Демек, оның ұзындығы a түзуі мен b жазықтығының арақашықтығына тең болады.



14.5-сурет



14.6-сурет

2-мысал. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (14.6 -сурет). AA_1 және BE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

Шешуі. AA_1 түзуі BEE_1 жазықтығына параллель. Ендеше AA_1 және BE_1 түзулерінің арақашықтығы AA_1 түзуі мен BEE_1 жазықтығының арақашықтығына тең болады. Алдыңғы параграфта көрсетілгендей, бұл қашықтық $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ге тең болады.

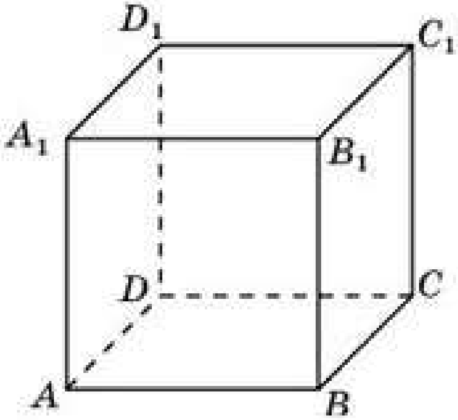
Сұрақтар

1. Параллель екі түзудің арақашықтығы дегеніміз не?
2. Айқас екі түзудің ортақ перпендикуляры дегеніміз не?
3. Айқас екі түзудің арақашықтығы дегеніміз не?

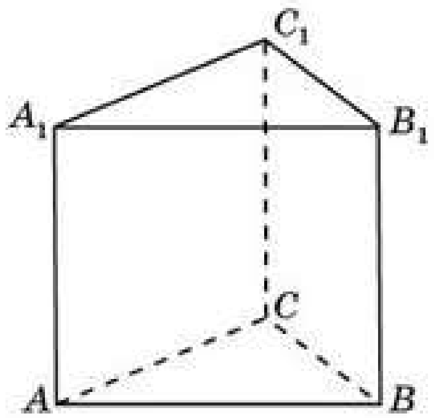
Есептер

A

14.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы келесі түзулердің арақашықтығын табыңдар: а) AA_1 және BB_1; ә) AA_1 және CC_1; б) AA_1 және BC; в) AA_1 және CD; г) AA_1 және BC_1; ғ) AA_1 және CD_1; д) AA_1 және BD; е) AB_1 және CD_1 (14.7 -сурет).



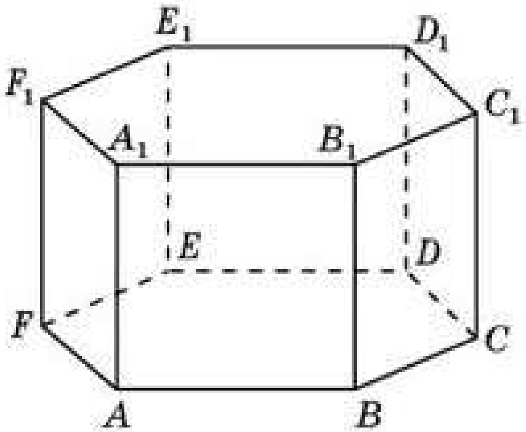
14.7-сурет



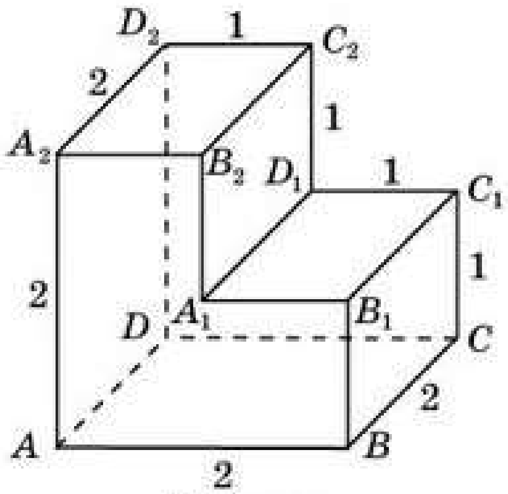
14.8-сурет

14.2. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (14.8 -сурет). Келесі түзулердің арақашықтығын табыңдар: а) AA_1 және BC; ә) AB және A_1C_1.

14.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (14.9 -сурет). Келесі түзулердің арақашықтығын табыңдар: а) AB және A_1B_1; ә) AB және B_1C_1; б) AA_1 және CC_1; в) AA_1 және DD_1.



14.9-сурет



14.10-сурет

14.4. Көпжақтың жақтары тік бұрышы бар көпбұрыштар болады (14.10 -сурет). Келесі түзулердің арақашықтығын табыңдар: а) AB және C_1D_1; ә) AB және C_2D_2; б) AA_2 және CC_1; в) AA_2 және D_1C_2.

В

14.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы AC_1 және BC түзулерінің арақашықтығын табыңдар (14.7 -сурет) .

14.6. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (14.8 -сурет). AA_1 және BC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

14.7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (14.9 -сурет). Келесі түзулердің арақашықтығын табыңдар: а) AA_1 және B_1C_1; ә) AA_1 және C_1D_1; б) AA_1 және CD_1; в) AA_1 және DE_1; г) AA_1 және BD_1.

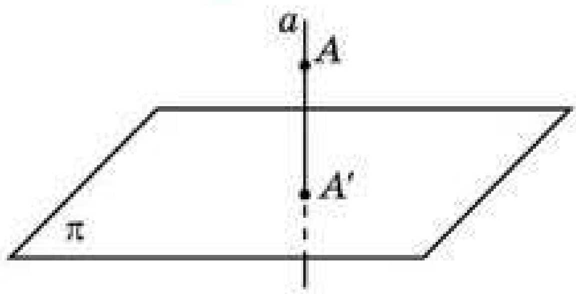
14.8. Көпжақтың жақтары тік бұрышты бар көпбұрыштар болады (14.10 -сурет). Келесі түзулердің арақашықтығын табыңдар: а) AA_2 және B_1C_1; ә) AA_2 және A_1D_1; б) AB_1 және CC_1; в) AB және D_1C_2; г) A_2B_2 және CC_1.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

14.9. Жазықтықтағы түзуге жүргізілген көлбеу ұғымына ұқсас кеңістіктегі жазықтыққа жүргізілген көлбеу ұғымын анықтап көріңдер.

§ 15. Үш перпендикуляр туралы теорема

Қандай да бір ρ жазықтығы берілсін . Кеңістіктің кез келген A нүктесі арқылы осы жазықтыққа перпендикуляр a түзуін жүргіземіз . Осы түзудің берілген жазықтықпен қиылысуы A' нүктесі A нүктесінің жазықтықтағы *ортогональ проекциясы* деп аталады (15.1 -сурет).



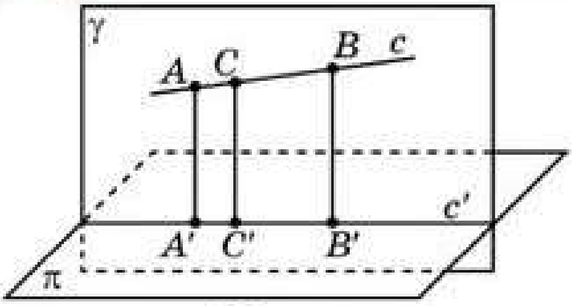
15.1-сурет

Кеңістіктің нүктелеріне олардың берілген жазықтықтағы ортогональ проекцияларын сәйкестендіруді осы *жазықтыққа ортогональ проекциялау* деп атайды. Жазықтықтың өзі *проекциялау жазықтығы* деп аталады.

Ортогональ проекциялаудың кейбір қасиеттерін қарастырайық.

1-қасиет . *Ортогональ проекциялау жазықтыққа перпендикуляр емес түзулерді түзулерге , ал перпендикуляр түзулерді нүктелерге көшіреді .*

Дәлелдеуі . c түзуі ρ проекциялау жазықтығына перпендикуляр емес болсын (15.2 -сурет). c түзуіне тиісті қандай да бір A, B нүктелерін қарастырайық. Осы нүктелер арқылы ρ жазықтығына перпендикуляр



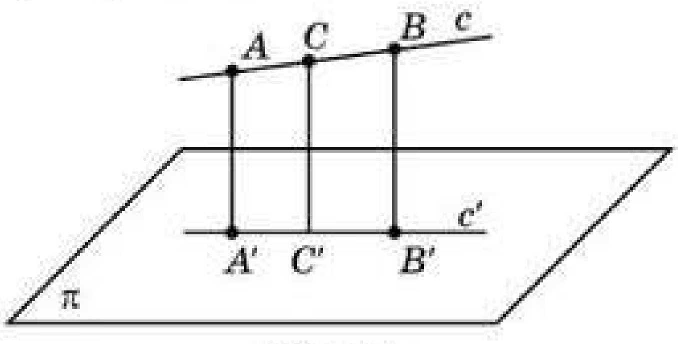
15.2-сурет

түзулер жүргізейік. Олардың р жазықтығымен қиылысу нүктелерін сәйкесінше A', B' деп белгілейміз . Жүргізілген түзулер параллель болғандықтан, олар бір жазықтықта жатады. Бұл жазықтықты g деп белгілейік. c' — осы жазықтықтың р жазықтығымен қиылысу сызығы болсын. c' түзуі c түзуінің ортогональ проекциясы екенін дәлелдейік. Расында да, c түзуінде жататын кез келген C нүктесі үшін осы нүкте арқылы өтетін және р жазықтығына перпендикуляр түзу g жазықтығында жатады. Демек, оның р жазықтығымен қиылысу нүктесі c' түзуіне тиісті болады. Осыдан C нүктесінің ортогональ проекциясы c' түзуінде жатады . Керісінше, егер C' нүктесі c' түзуіне тиісті болса, онда осы нүкте арқылы өтетін және р жазықтығына перпендикуляр түзу g жазықтығында жататын болады. Демек, ол c түзуін қандай да бір C нүктесінде қиып өтеді. Оның ортогональ проекциясы C' нүктесі болады.

Егер түзу р жазықтығына перпендикуляр болса (15.1 -сурет), онда оның ортогональ проекциясы нүкте болатыны анық.

Қалай ойлайсыңдар, ортогональ проекциялау кесінділердің ұзындықтарын сақтайды ма?

2-қасиет . *Ортогональ проекциялау жазықтыққа перпендикуляр емес түзуде жататын кесінділердің қатынасын сақтайды. Дербес жағдайда, кесіндінің ортасы осы кесіндінің проекциясының ортасына проекцияланады* .



15.3-сурет

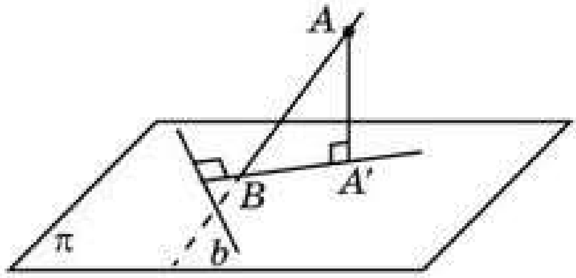
Дәлелдеуі . A, B, C нүктелері π жазықтығына перпендикуляр емес c түзуіне тиісті болсын. A', B', C' олардың сәйкесінше c түзуінің жазықтығындағы c' ортогональ проекциясында жататын ортогональ проекциялары болсын (15.3- сурет). AA', BB', CC' түзулері параллель болғандықтан, пропорционал кесінділер туралы теорема бойынша келесі қатынастар теңдігі орындалады:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}.$$

Жазықтыққа перпендикуляр емес түзуді *көлбеу* деп атаймыз.

Сонымен қатар *көлбеу* деп жазықтықтан тыс жатқан нүктені осы жазықтықтағы нүктемен қосатын және жазықтыққа перпендикуляр емес кесіндіні айтамыз.

Теорема (**үш перпендикуляр туралы**). *Егер жазықтықта жатқан түзу осы жазықтыққа жүргізілген көлбеудің ортогональ проекциясына перпендикуляр болса, онда ол көлбеудің өзіне де перпендикуляр болады.*



15.4-сурет

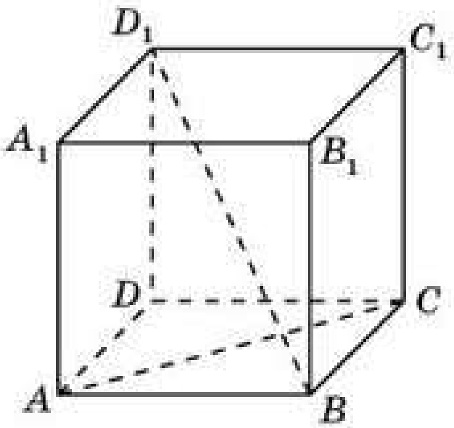
Дәлелдеуі. AA' — ρ жазықтығына перпендикуляр, AB — көлбеу, $A'B$ көлбеудің ортогональ проекциясы болсын (15.4-сурет).

AA' түзуі ρ жазықтығына перпендикуляр болғандықтан, ρ жазықтығында жататын кез келген b түзуі AA' түзуіне перпендикуляр болады.

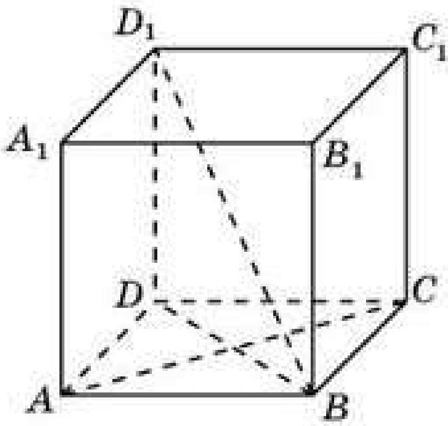
Егер сонымен қатар b түзуі $A'B$ түзуіне перпендикуляр болса, онда ол түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі бойынша $AA'B$ жазықтығына перпендикуляр болады. Демек, ол осы жазықтықта жатқан кез келген түзуге, яғни AB көлбеуіне де перпендикуляр болады.

Кері тұжырым да дұрыс. Яғни, егер жазықтықта жататын түзу осы жазықтыққа жүргізілген көлбеуге перпендикуляр болса, онда осы түзу көлбеудің ортогональ проекциясына да перпендикуляр болады. Осыны өздерің дәлелдеңдер.

Мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AC және BD_1 түзулері перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер (15.5-сурет).



15.5-сурет



15.6-сурет

Шешуі. BD_1 түзуінің ABC жазықтығындағы ортогональ проекциясы BD түзуі болады (15.6-сурет). AC түзуі BD түзуіне перпендикуляр, демек, ол BD_1 түзуіне де перпендикуляр болады.

Сұрақтар

1. Нүктенің жазықтықтағы ортогональ проекциясы дегеніміз не?
2. Жазықтыққа ортогональ проекциялау дегеніміз не?
3. Ортогональ проекциялаудың қасиеттерін тұжырымдаңдар.

4. Көлбеу дегеніміз не?
5. Үш перпендикуляр туралы теореманы тұжырымдаңдар.

Есептер

А

15.1. A нүктесінен берілген жазықтыққа AA' перпендикуляры және AB көлбеуі жүргізілген. Егер $AB = 37$ см, $AA' = 35$ см болса, онда AB кесіндісінің ортогональ проекциясын табыңдар.

15.2. A нүктесінен берілген жазықтыққа AA' перпендикуляры және AB көлбеуі жүргізілген. Егер $AA' = 6$ см, $\angle A'AB = 60°$ болса, онда AB кесіндісін табыңдар.

15.3. A нүктесінен берілген жазықтыққа AA' перпендикуляры және AB көлбеуі жүргізілген. Егер $AB = 2\sqrt{10}$ см, $A'B = 3AA'$ болса, онда AA' кесіндісін табыңдар.

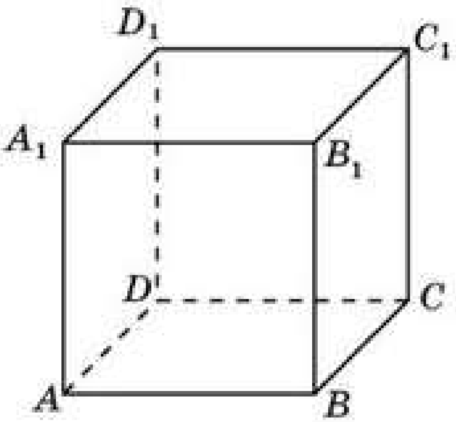
15.4. Ұзындығы 13 м болатын сатының жоғарғы ұшы жерден 12 м биіктікте орналасуы үшін оның төменгі ұшын үй қабырғасынан қандай қашықтықта орналастыру керек?

15.5. Сатының төменгі ұшы үйден 6 м қашықтықта болып, жоғарғы ұшы жерден 8 м биіктіктегі үй терезесіне жетуі үшін сатының ұзындығы қандай болуы керек?

В

15.6. Бір нүктеден жазықтыққа жүргізілген екі көлбеудің кесінділерінің ұзындықтары 15 см және 20 см. Осы кесінділердің біреуінің ортогональ проекциясы 16 см. Екінші кесіндінің ортогональ проекциясын табыңдар.

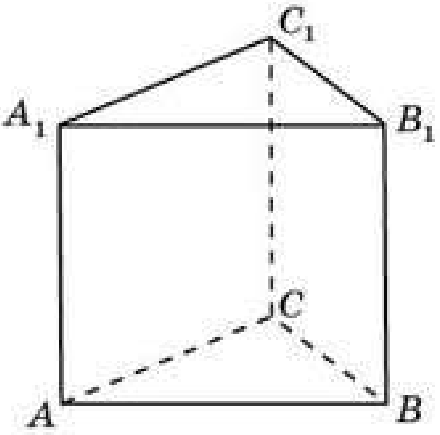
15.7. A, B, C нүктелері бір түзудің бойында орналасқан және A', B', C' — осы нүктелердің сәйкесінше ортогональ проекциялары, $AB = 5$, $BC = 10$, $A'C' = 12$. $A'B'$ және $B'C'$ кесінділерінің ұзындықтарын табыңдар.



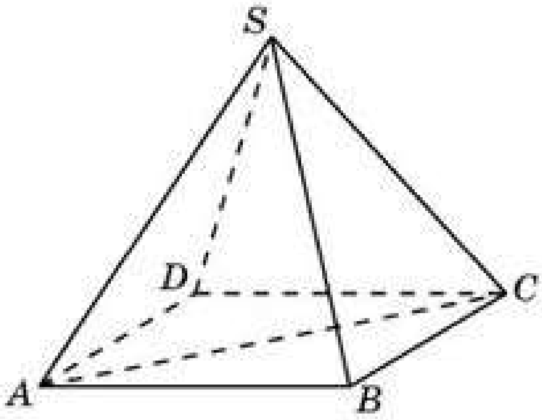
15.7-сурет

15.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының (15.7-сурет) ACC_1 жазықтығына келесі кесінділердің ортогональ проекцияларын салыңдар: а) BB_1; ә) BC_1; б) BD_1.

15.9. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың (15.8-сурет) ACC_1 жазықтығына келесі кесінділердің ортогональ проекцияларын салыңдар: а) BB_1; ә) BC; б) BC_1.



15.8-сурет

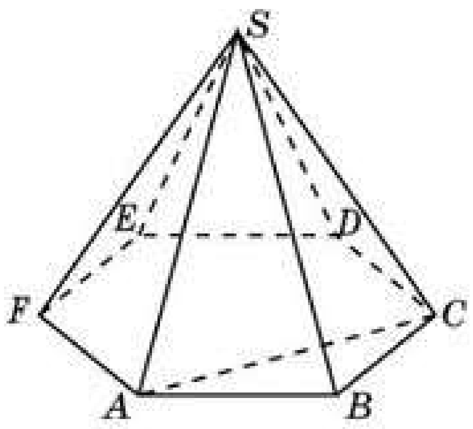


15.9-сурет

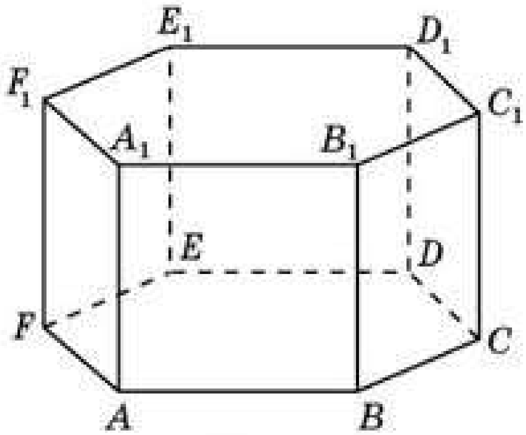
15.10. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамидасының табанының AC диагоналі онымен айқас SB қырына перпендикуляр екенін дәлелдеңдер (15.9 -сурет).

15.11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында келесі түзулер перпендикуляр екенін дәлелдеңдер (15.7 -сурет): а) AB_1 және BD_1; ә) AC_1 және BD; б) AD_1 және CA_1.

15.12. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамидасының табанының AC диагоналі онымен айқас SB қырына перпендикуляр екенін дәлелдеңдер (15.10 -сурет).



15.10-сурет



15.11-сурет

15.13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасында келесі түзулер перпендикуляр екенін дәлелдеңдер (15.1 1-сурет) : а) AC_1 және BE; ә) AD_1 және CE; б) AB_1 және BE_1.

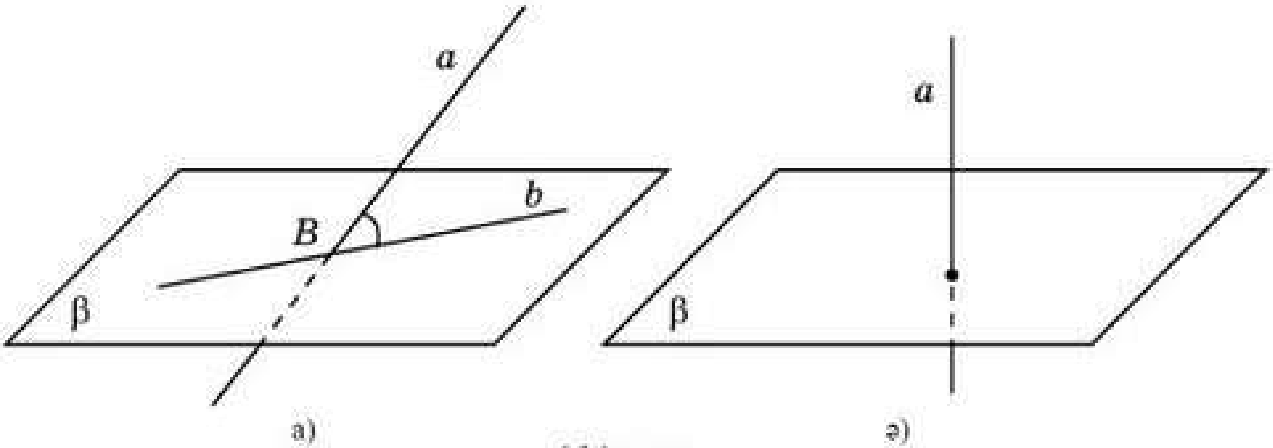
15.14. Берілген екі нүктеден бірдей қашықтықта жатқан нүктелердің геометриялық орнын табыңдар .

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

15.15. Көлбеу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш ұғымын анықтап көріңдер .

§ 16. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

Ортогональ проекциялау түзулерді проекциялау жазықтығына перпендикуляр емес түзулерге (көлбеулер), ал жазықтыққа перпендикуляр түзулерді нүктелерге көшіретінін еске салайық (16.1 -сурет).



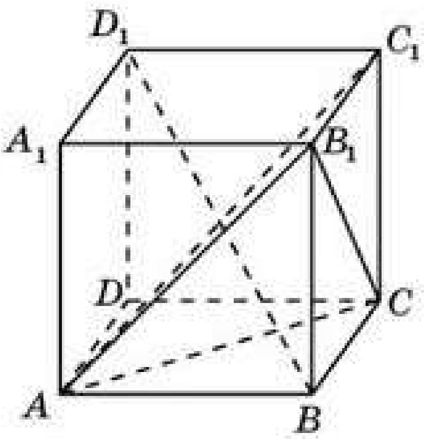
16.1-сурет

Көлбеу мен жазықтық тың арасындағы бұрыш деп осы көлбеу мен оның жазықтықтағы ортогональ проекциясы арасындағы бұрышты айтады (16.1, а-сурет).

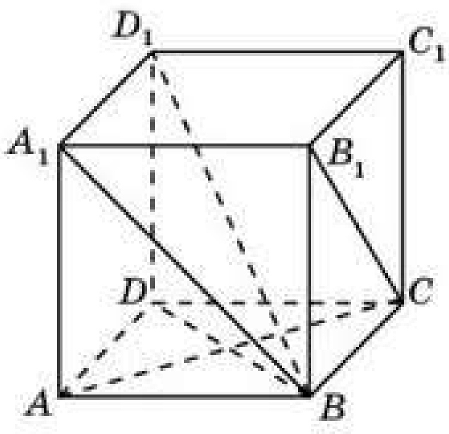
Жазықтық пен оған перпендикуляр түзу арасындағы бұрыш 90°-қа тең деп есептеледі (16.1, ә-сурет).

Кесінді мен жазықтықтың арасындағы бұрыш деп осы кесінді жататын түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрышты айтады.

Мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында BD_1 түзуінің ACB_1 жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер (16.2 -сурет).



16.2-сурет



16.3-сурет

Шешуі . BD_1 түзуіні ң ABC жазықтығындағы ортогональ проекциясы AC түзуіне перпендикуляр BD түзуі болады (16.3 -сурет).

Сонымен BD_1 түзуі ACB_1 жазықтығындағы қиылысқан AC және AB_1 түзулеріне перпендикуляр болады. Демек, BD_1 түзуі ACB_1 жазықтығына перпендикуляр болады.

Сұрақтар

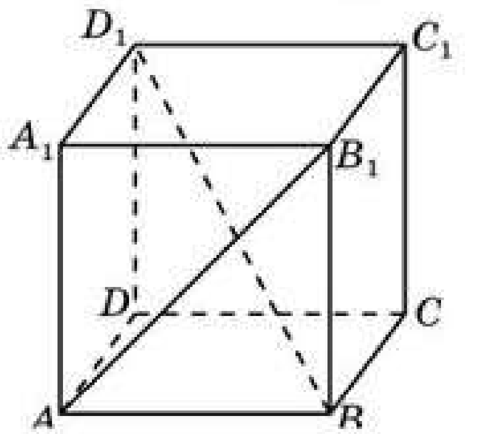
1. Көлбеу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш дегеніміз не?
2. Жазықтық пен оған перпендикуляр түзу арасындағы бұрыш неге тең?
3. Кесінді мен жазықтықтың арасындағы бұрыш дегеніміз не?

Есептер

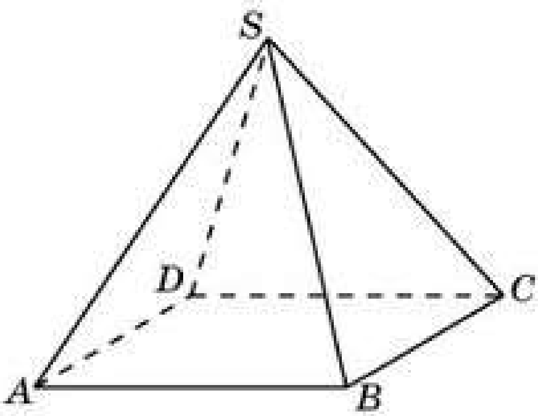
А

16.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы (16.4-сурет) AB_1 түзуі мен келесі жазықтықтың арасындағы бұрышты табыңдар: а) ABC; ә) BCC_1; б) BCD_1.

16.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы BD_1 түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар (16.4-сурет).



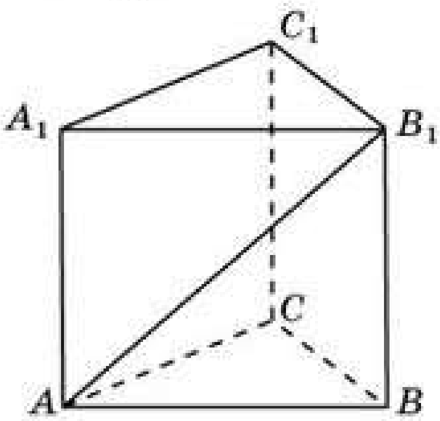
16.4-сурет



16.5-сурет

16.3. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең (16.5-сурет). SA түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

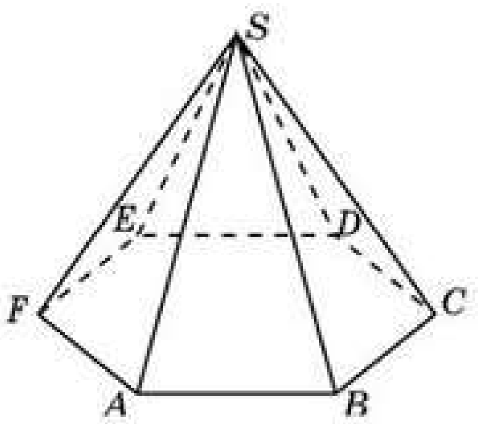
16.4. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (16.6-сурет). а) AB_1 түзуі мен ABC жазықтығының; ә) AB түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.



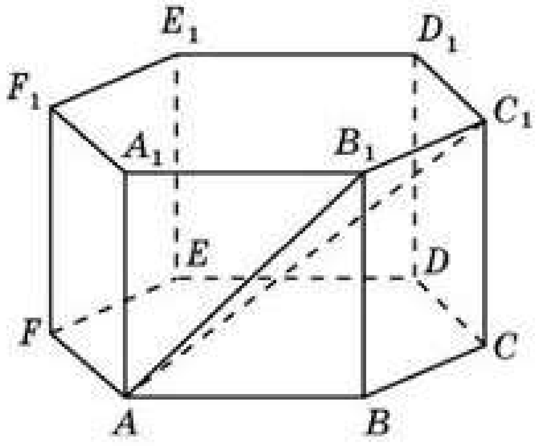
16.6-сурет

16.5. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең (16.7-сурет). SA түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

16.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (16.8-сурет). а) AB_1 түзуі мен ABC жазықтығының; ә) AC_1 түзуі мен ABC жазықтығының; б) AA_1 түзуі мен ACD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.



16.7-сурет



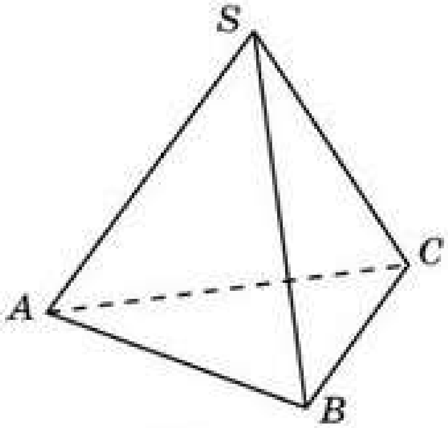
16.8-сурет

B

16.7. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең (16.5 -сурет). AB түзуі мен SBC жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар .

16.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы CC_1 түзуі мен AB_1D_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар .

16.9. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең . AB_1 түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар .



16.9-сурет

16.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең . AB_1 түзуі мен келесі жазықтықтың арасындағы бұрыштың синусын табыңдар : а) BCC_1; ә) CDD_1.

16.11. $SABC$ дұрыс үшбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең (16.9 -сурет). SA түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар .

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

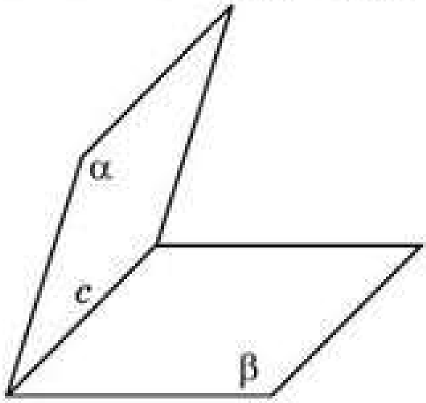
16.12. Қиылысқан екі жазықтықтың арасындағы бұрыш ұғымын анықтап көріңдер .

§ 17. Екіжақты бұрыш. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

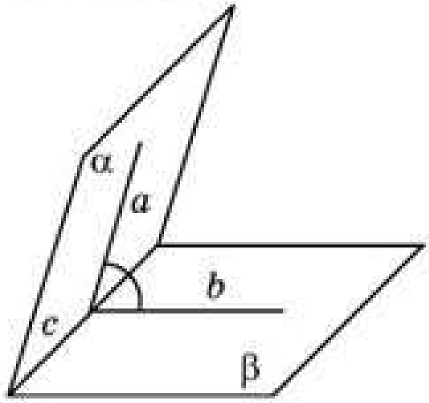
Жазықтықтағы бұрыштың кеңістіктік аналогі болатын екіжақты бұрыш ұғымын анықтайық.

Екіжақты бұрыш деп ортақ бір түзумен шектелген екі жартыжазықтықтан және кеңістікті ң осы жартыжазықтықтармен шектелген бөлігінен тұратын фигураны айтады (17.1 -сурет).

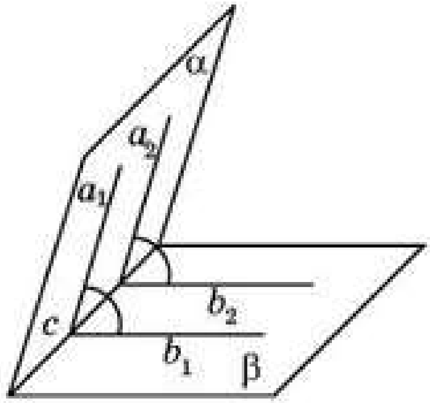
Жартыжазықтықтарды екіжақты бұрыштың *жақтары* , ал оларды шектейтін түзуді *қыры* деп атайды .



17.1-сурет



17.2-сурет



17.3-сурет

a және b — ортақ түзумен шектелген жартыжазықтықтар (17.2 -сурет). c түзуіне перпендикуляр g жазықтығын қарастырайық және оның a және b жартыжазықтықтарымен қиылысу сызықтарын сәйкесінше a мен b деп белгілейміз. Осы сәулелердің арасындағы бұрыш екіжақты бұрыштың *сызықтық бұрышы* деп аталады.

Сызықтық бұрыштың шамасы g жазықтығын таңдаудан тәуелсіз болатынын дәлелдейік.

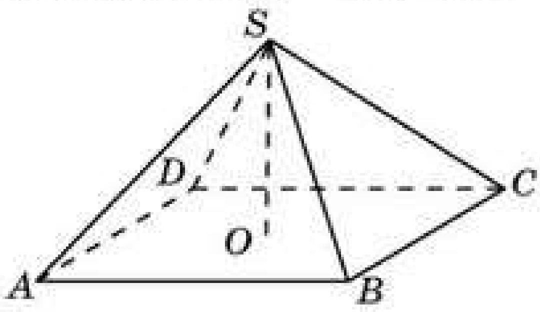
Шындығында, айталық , g_1, g_2 жазықтықтары c түзуіне перпендикуляр және олар a мен b жартыжазықтықтарын сәйкесінше a_1, a_2 және b_1, b_2 сәулелері бойымен қиып өтсін (17.3 -сурет). c түзуіне перпендикуляр болғандықтан, a_1 мен a_2 және b_1 мен b_2 сәулелері бағыттас. Сондықтан олардан жасалған бұрыштар тең .

Екіжақты бұрыштың шамасы деп оның сызықтық бұрышының шамасын айтады (17.2-сурет).

Екіжақты бұрыштың шамасы (0°; 180°] аралығында жатады.

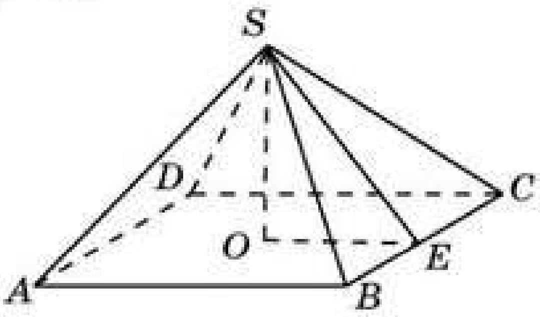
Екіжақты бұрыш оның сызықтық бұрышының түріне (сүйір, тік немесе доғал) сәйкес *сүйір, тік, доғал* деп аталады.

1-мысал . $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамида табанының қабырғалары 2-ге , SO биіктігі 1-ге тең (17.4 -сурет). Пирамиданың бүйір жағы мен табанының арасындағы екіжақты бұрышты табыңдар.



17.4-сурет

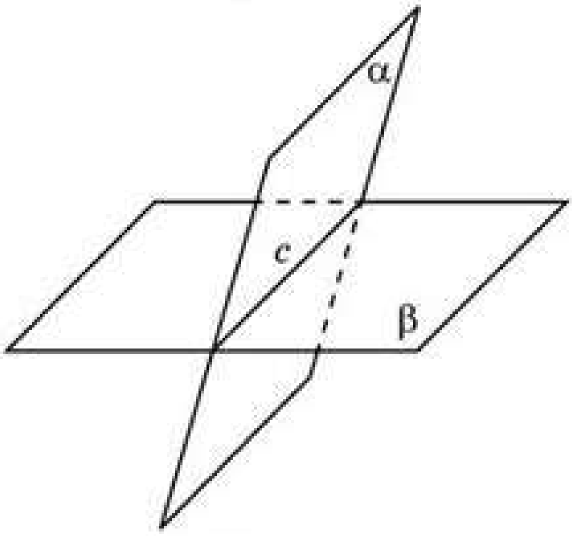
Шешуі . SBC үшбұрышының SE биіктігін жүргіземіз (17.5 -сурет). SEO бұрышы ізделінді екіжақты бұрыштың сызықты бұрышы болады. SEO тікбұрышты үшбұрышында SO және EO катеттері 1-ге тең . Осыдан SEO бұры-



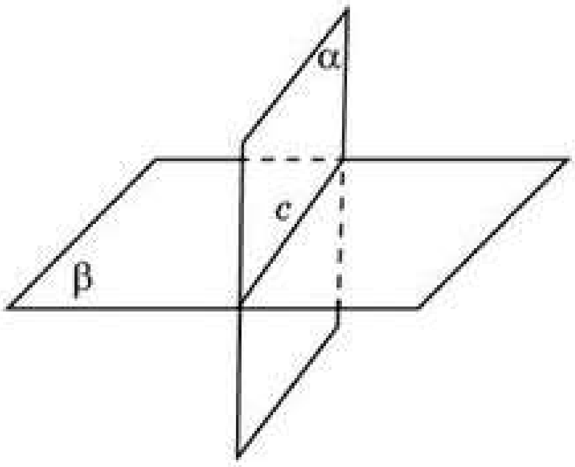
17.5-сурет

шы 45°. Демек, ізделінді екіжақты бұрыш 45°-қа тең болады.

Қиылысқан екі жазықтықтың арасындағы бұрыш деп сәйкес екі жартыжазықтықтармен жасалған екіжақты бұрыштардың ең кішісінің шамасын айтады (17.6 -сурет).



17.6-сурет



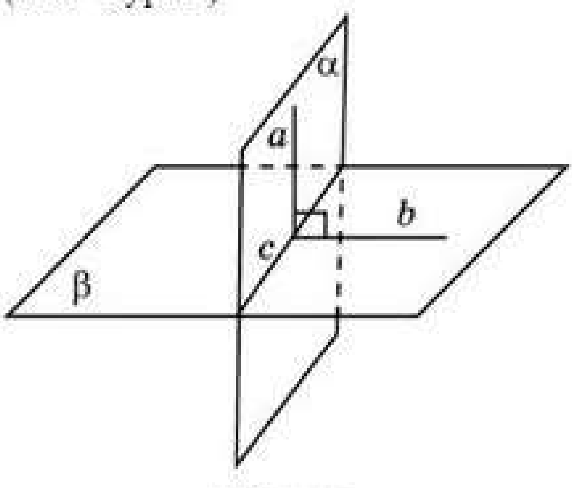
17.7-сурет

Екі жазықтық тік екіжақты бұрыш жасаса, онда оларды *перпендикуляр жазықтықтар* деп атайды (17.7 -сурет).

Келесі теорема екі жазықтықтың перпендикулярлығының жеткілікті шартын береді.

Теорема (екі жазықтықтың перпендикулярлығының белгісі). ***Екі жазықтықтың бірі екіншісіне перпендикуляр түзу арқылы өтетін болса, мұндай жазықтықтар өзара перпендикуляр болады .***

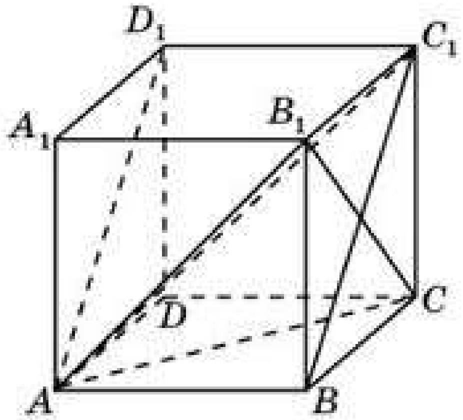
Дәлелдеуі . a жазықтығы b жазықтығына перпендикуляр *a* түзуі арқылы өтсін. *c* — a және b жазықтықтарының қиылысу сызығы (17.8 -сурет).



17.8-сурет

a және b жазықтықтарының перпендикуляр екенін дәлелдейміз. b жазықтығында *a* түзуі мен b жазықтығының қиылысу нүктесі арқылы *c* түзуіне перпендикуляр *b* түзуін жүргіземіз. *a* түзуі b жазықтығына перпендикуляр болғандықтан, ол осы жазықтықта жатқан кез келген түзуге перпендикуляр болады. Демек, *a* және *b* түзулерінің арасындағы бұрыш тік. Ол сәйкесінше екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы болады. Осыдан a және b жазықтықтары перпендикуляр болады. ◻

2-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында ABC_1 және ACB_1 жазықтықтарының перпендикуляр екенін дәлелдеңдер (17.9 -сурет).



17.9-сурет

17.10-сурет

Шешуі . ACB_1 жазықтығында BC_1 түзуі мен ABC_1 жазықтығының AB түзуіне перпендикуляр CB_1 түзуі жатыр . Демек, ABC_1 және ACB_1 жазықтықтары перпендикуляр болады.

Жазықтықтардың перпендикулярлық белгісінің қарапайым практикалық маңыздылығы бар. Мысалы, еденге перпендикуляр ұзбеге ілінген есіктің жазықтығы оның барлық ашылу мен жабылу жағдайында еден жазықтығына перпендикуляр болады (17.10-сурет); жұмысшы қандай да бір плитаны сүйімен немесе басқадай шінтіректен көтеріп тігінен орналастыру үшін шінтіректі плита жатқан еденге немесе жерге перпендикуляр болғанша көтереді.

Берілген жазықтықта: а) жататын; ә) жатпайтын нүкте арқылы берілген жазықтыққа перпендикуляр неше жазықтық жүргізуге болады?

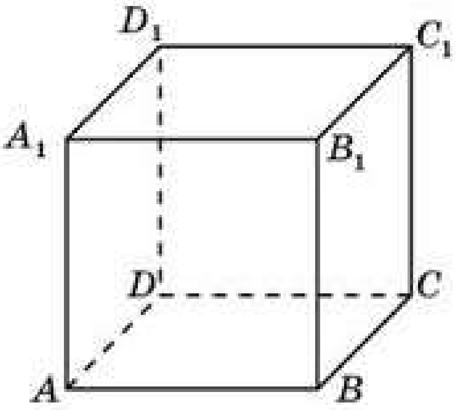
Сұрақтар

1. Екіжақты бұрыш дегеніміз не?
2. а) Екіжақты бұрыштың жағы; ә) екіжақты бұрыштың қыры дегеніміз не?
3. Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы дегеніміз не?
4. Екіжақты бұрыштың шамасы дегеніміз не?
5. Қандай екіжақты бұрыш тік деп аталады?
6. Қиылысқан екі жазықтықтың арасындағы бұрыш дегеніміз не?
7. Қандай қиылысқан екі жазықтық перпендикуляр деп аталады?
8. Екі жазықтықтың перпендикулярлық белгісін тұжырымдаңдар.

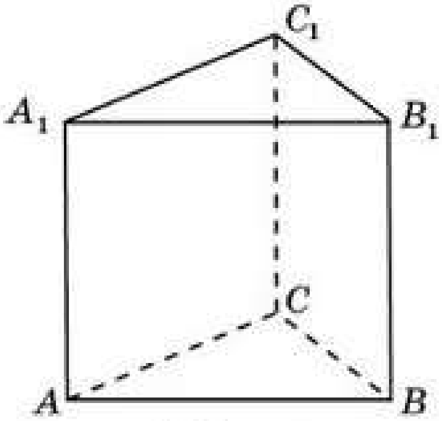
Есептер

A

17.1. Кубтың көршілес жақтарының арасындағы екіжақты бұрыштарды табыңдар (17.11 -сурет).

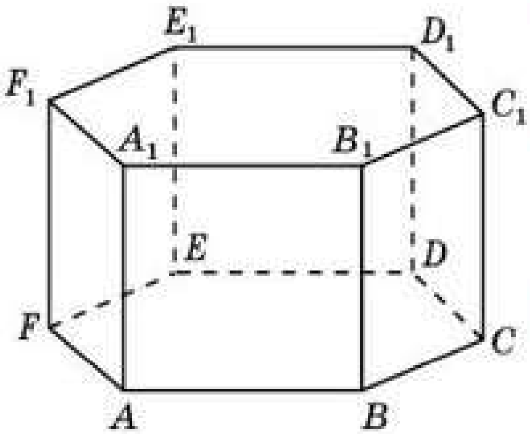


17.11-сурет



17.12-сурет

17.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында : а) ABC және BDD_1; ә) ACC_1 және BDD_1 жазықтықтарының перпендикуляр екенін дәлелдеңдер.



17.13-сурет

17.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы ABC және CDA_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар .

17.4. Дұрыс үшбұрышты призманың көршілес екі бүйір жағының арасындағы екіжақты бұрышты табыңдар (17.12 -сурет).

17.5. Дұрыс алтыбұрышты призманың көршілес екі бүйір жағының арасындағы екіжақты бұрышты табыңдар (17.13 -сурет).

В

17.6. Үшінші жазықтыққа перпендикуляр екі жазықтық өзара перпендикуляр бола ма?

17.7. Берілген нүкте арқылы берілген жазықтыққа перпендикуляр неше жазықтық жүргізуге болады?

17.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы келесі жазықтықтардың арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар : а) ABC және AB_1D_1; ә) ABC және ACB_1.

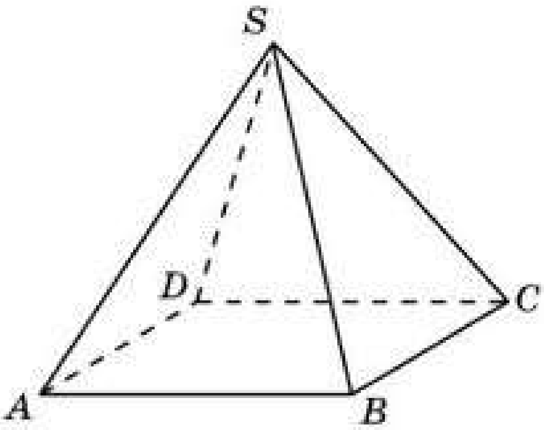
17.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы ACB_1 және ACD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар .

17.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. Келесі жазықтықтардың арасындағы бұрышты табыңдар : а) ABB_1 және CDD_1; ә) ACC_1 және CDD_1; б) ACC_1 және DEE_1; в) ACC_1 және CEE_1; г) ABC және BDE_1; ғ) CDF_1 және AFD_1.

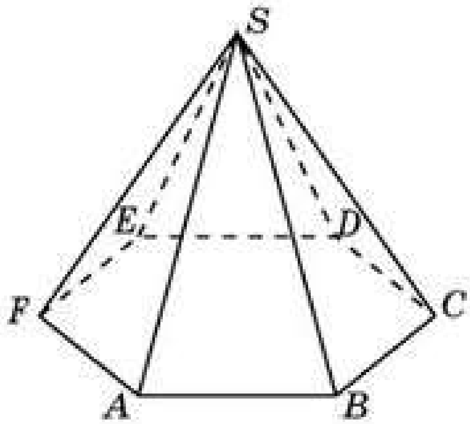
17.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың келесі жазықтықтары перпендикуляр екенін дәлелдеңдер: а) ABC және

ABB_1; ә) ABC және ACC_1; б) ABC және ADD_1; в) ACC_1 және BEE_1; г) ADD_1 және BFF_1.

17.12. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қабырғалары тең (17.14 -сурет). Пирамиданың бүйір жағы мен табанының арасындағы екіжақты бұрыштың тангенсін табыңдар.



17.14-сурет

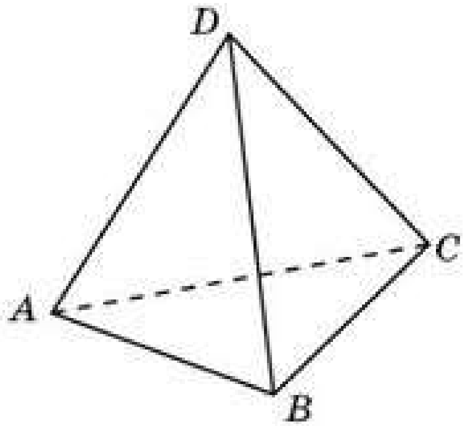


17.15-сурет

17.13. Дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең (17.15 -сурет). Пирамиданың бүйір жағы мен табанының арасындағы екіжақты бұрыштың тангенсін табыңдар.

17.14. Хеопс пирамидасы — табанының қабырғалары 230 м, биіктігі шамамен 138 м болатын дұрыс төртбұрышты пирамида (17.16-сурет) . Оның бүйір жағы мен табанының арасындағы екіжақты бұрыштың тангенсін табыңдар. Тригонометриялық функциялардың кестесін пайдаланып, бұрыштың жуық мәнін табыңдар.


17.16-сурет



17.17-сурет

17.15. Дұрыс тетраэдрдің көршілес екі жағының арасындағы екіжақты бұрыштың косинусын табыңдар (17.17 -сурет).

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы AD_1 және CB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы AA_1 және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың айқас қырларының арасындағы бұрышты табыңдар.

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

4. Барлық қырлары 1-ге тең болатын дұрыс төртбұрышты пирамиданың айқас қырларының арасындағы бұрышты табыңдар.

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың BC және C_1D_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 120°.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы BD_1 түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

7. Жазықтыққа жүргізілген көлбеудің ортогональ проекциясының ұзындығы екі есе кем болатын кесіндісін табыңдар.

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

8. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. SAD және SBC жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. A және D_1 төбелерінің арақашықтығын табыңдар.

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{5}$.

10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы B_1 төбесінен AC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B төбесінен E_1F_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

12. Жазықтықта жатпайтын нүкте арқылы жазықтыққа перпендикуляр және көлбеу жүргізілген. Егер перпендикуляр 12 см, көлбеу 15 см болса, онда көлбеудің проекциясының ұзындығын табыңдар.

A. 3 см. B. 9 см. C. 27 см. D. 81 см.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында CC_1 және DB_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

14. $ABCD$ бірлік тетраэдрында AD және BC түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында B төбесінен ACC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

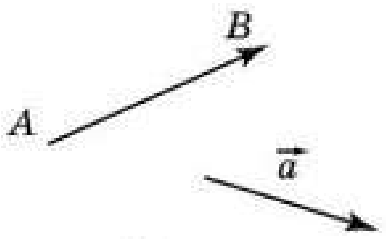
III тарау КЕҢІСТІКТЕГІ ТІКБҰРЫШТЫ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕСІ ЖӘНЕ ВЕКТОРЛАР

§ 18. Кеңістіктегі векторлар

Кеңістіктегі вектордың анықтамасы жазықтықтағы вектордың анықтамасына ұқсас болып келеді .

Кеңістіктегі *вектор* деп бағытталған кесіндіні, яғни басы мен ұшы көрсетілген кесіндіні айтады .

Басы мен ұшы беттесетін векторлар *нөлдік векторлар* деп аталады.



18.1-сурет

Басы A нүктесінде және ұшы B нүктесінде болатын вектор $\overline{AB}$ деп белгіленеді және нұсқама кесіндімен бейнеленеді (18.1-сурет). Сонымен бірге вектор латынның кіші әріпімен үстіне нұсқама қойылып белгіленеді, мысалы $\vec{a}$, $\vec{b}$ және т.б. Нөлдік вектор $\vec{0}$ деп белгіленеді .

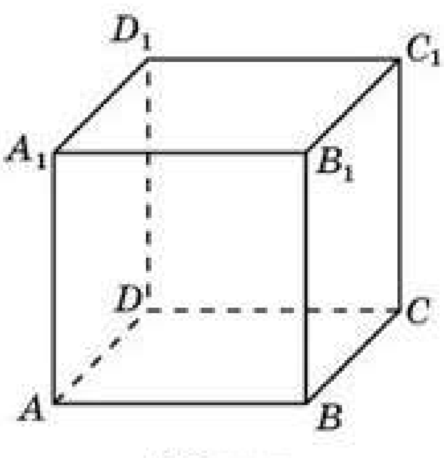
Егер нөлдік емес екі вектор бір түзудің бойында немесе параллель түзулердің бойында жатса, онда олар *коллинеар векторлар* деп аталады.

Егер кеңістіктегі екі вектор бір жазықтықта жатса және сол жазықтықта бірдей (қарама-қарсы) бағытталса, онда оларды *бірдей бағытталған* немесе *бағыттас* (*қарама-қарсы бағытталған*) *векторлар* деп атайды.

Егер кеңістіктегі нөлдік емес екі векторды бір нүктеден салғанда бір түзудің бойында жатса, онда олар коллинеар векторлар болатынын дәлелдеңдер.

Коллинеар векторлар бірдей бағытталған немесе қарама-қарсы бағытталған болуы мүмкін.

Вектордың *ұзындығы* немесе *модулі* деп осы векторды кескіндеп тұрған кесіндінің ұзындығын айтады. Оны $|\overline{AB}|$ немесе $|\vec{a}|$ деп белгілейді.



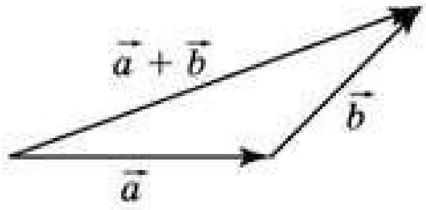
18.2-сурет

Нөлдік вектордың ұзындығы нөлге тең.

Егер екі вектор бірдей бағытталса және ұзындықтары тең болса, онда олар *тең векторлар* деп аталады.

Барлық нөлдік векторлар өзара тең болады.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында төбелері арқылы $\overline{AA_1}$ векторына тең векторларды көрсетіңдер (18.2 -сурет).



18.3-сурет

Жазықтықтағы векторлар сияқты кеңістіктегі векторлар үшін де векторларды қосу, санға көбейту амалдары орындалады.

Екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларын қосу үшін $\vec{b}$ векторын оның басы $\vec{a}$ векторының ұшымен беттесетіндей етіп орналастыру керек (18.3-сурет).

Басы $\vec{a}$ векторының басымен, ал ұшы $\vec{b}$ векторының ұшымен беттесетін вектор *$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының қосындысы* деп аталады және $\vec{a}+\vec{b}$ деп белгіленеді.

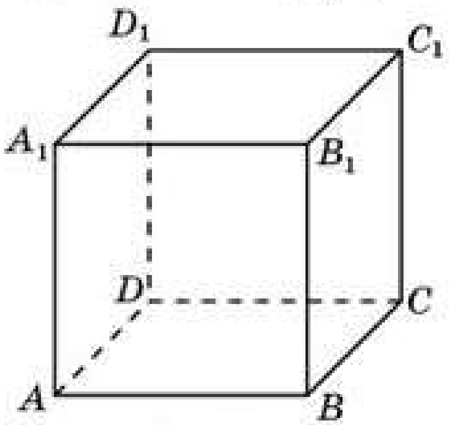
Векторларды қосу амалы үшін сандарды қосудың қасиеттеріне ұқсас келесі қасиеттер орынды болады:

1-қасиет. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*орын ауыстырымдылық заңы*).

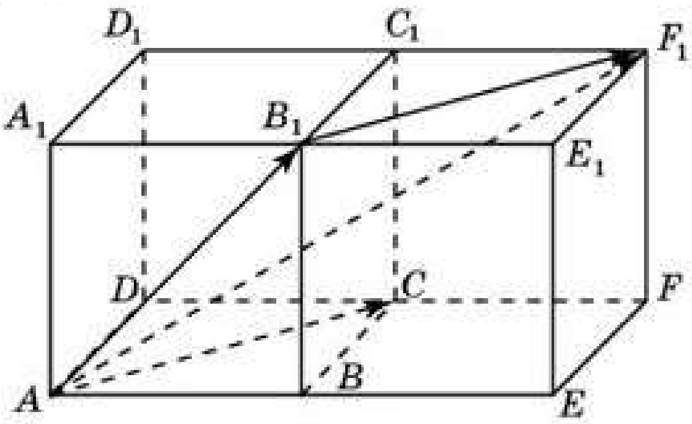
2-қасиет. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (*терімділік заңы*).

Бұл қасиеттердің дәлелдемелері жазықтықтағы векторларға ұқсас болады.

1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}$ векторының ұзындығын табыңдар (18.4-сурет).



18.4-сурет



18.5-сурет

Шешуі. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубына $BEFCB_1E_1F_1C_1$ бірлік кубын қосып, $AEFDA_1E_1F_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедке дейін толықтырамыз (18.5-сурет). $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}$ қосындысы $\overrightarrow{AF_1}$ векторына тең. Оның ұзындығы $\sqrt{6}$-ға тең болады.

$\vec{a}$ векторының t санына көбейтіндісі деп ұзындығы $|t|\cdot|\vec{a}|$ болатын және бағыты $t>0$ болғанда өзгеріссіз қалатын, ал $t<0$ болғанда қарама-қарсы бағытта болатын векторды айтады. Вектордың нөлге көбейтіндісі нөлдік вектор болып есептеледі.

$\vec{a}$ векторының t санына көбейтіндісі $t\vec{a}$ деп белгіленеді. Анықтама бойынша $|t\vec{a}|=|t|\cdot|\vec{a}|$.

$\vec{a}$ векторының -1 санына көбейтіндісі $-\vec{a}$ деп белгіленеді және ол $\vec{a}$ векторына *қарама-қарсы бағытталған вектор* деп аталады.

Анықтама бойынша $-\vec{a}$ векторының бағыты $\vec{a}$ векторының бағытына қарама-қарсы болады және $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$.

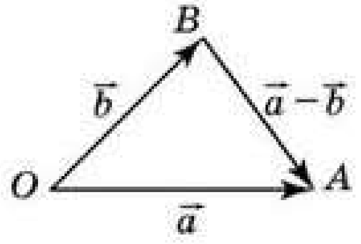
$\vec{b} = t\vec{a}$ теңдігі орындалатындай t нақты саны табылса ғана нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар болады.

Векторды санға көбейту амалы үшін сандарды көбейтудің қасиеттеріне ұқсас келесі қасиеттер орынды болады:

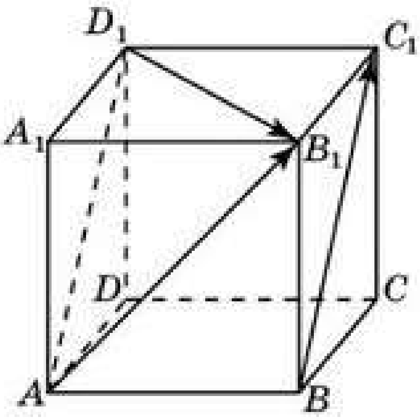
1-қасиет. $(ts)\vec{a} = t(s\vec{a})$ (*терімділік заңы*).

2-қасиет. $(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$ (*бірінші үлестірімділік заңы*).

3-қасиет. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$ (*екінші үлестірімділік заңы*).



18.6-сурет



18.7-сурет

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының *айырымы* деп $\vec{a} + (-\vec{b})$ векторын айтады және $\vec{a} - \vec{b}$ деп белгіленеді.

$\vec{a} - \vec{b}$ айырымын табу үшін $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының бастары сәйкес келетіндей салу кажет (18.6-сурет).

Басы $\vec{b}$ векторының ұшымен, ал ұшы $\vec{a}$ векторының ұшымен сәйкес келетін вектор ізделінді векторлардың айырымы болады.

2-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында $\overline{AB_1} - \overline{BC_1}$ векторының ұзындығын табыңдар (18.7-сурет).

Шешуі. $\overline{AB_1} - \overline{BC_1} = \overline{AB_1} - \overline{AD_1} = \overline{D_1B_1}$. $\overline{D_1B_1}$ векторының ұзындығы $\sqrt{2}$-ге тең.

Сұрақтар

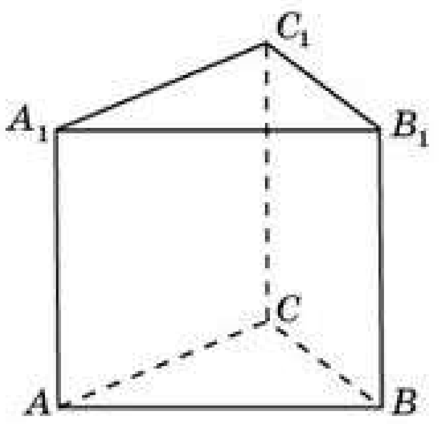
1. Вектор дегеніміз не?
2. Қандай вектор нөлдік вектор деп аталады?
3. Вектордың ұзындығы (модулі) дегеніміз не?
4. Қандай екі вектор тең деп аталады?
5. Векторларды косу амалы қалай анықталады?
6. Векторларды косудың орын ауыстырымдылық заңын тұжырымдаңдар.
7. Векторларды косудың терімділік заңын тұжырымдаңдар.
8. Векторды санға көбейту амалы қалай анықталады?
9. Векторды санға көбейту қалай белгіленеді?
10. Қандай вектор берілген векторға карама-карсы вектор деп аталады? Ол қалай белгіленеді?
11. Екі вектордың айырымы дегеніміз не? Ол калай белгіленеді?
12. Векторды санға көбейтудің терімділік заңын тұжырымдаңдар.
13. Векторды санға көбейтудің бірінші үлестірімділік заңын тұжырымдаңдар.
14. Векторды санға көбейтудің екінші үлестірімділік заңын тұжырымдаңдар.

Есептер

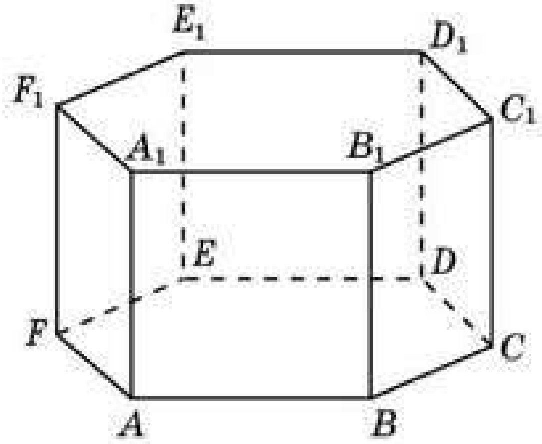
A

18.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында төбелері арқылы $\overrightarrow{AB}$ векторына тең векторларды көрсетіңдер (18.4 -сурет).

18.2. $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призмасында төбелері арқылы $\overrightarrow{AA_1}$ векторына тең векторларды көрсетіңдер (18.8-сурет) .



18.8-сурет



18.9-сурет

18.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада төбелері арқылы келесі векторларға тең векторларды көрсетіңдер (18.9 -сурет): а) $\overrightarrow{AB}$; ә) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AB_1}$; г) $\overrightarrow{AC_1}$.

18.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы келесі векторлардың ұзындығын табыңдар: а) $\overrightarrow{AB}$; ә) $\overrightarrow{AB_1}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$.

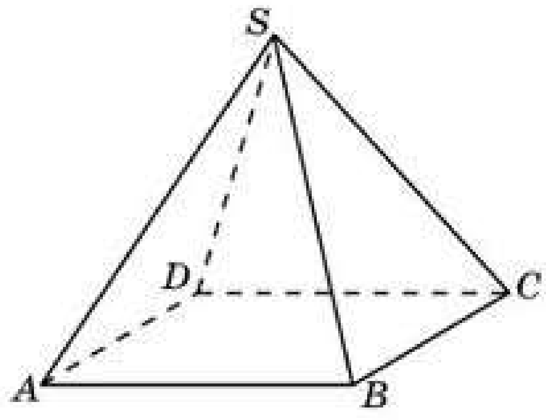
18.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (18.9 -сурет). Келесі векторлардың ұзындығын табыңдар: а) $\overrightarrow{AB}$; ә) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AB_1}$; г) $\overrightarrow{AC_1}$; ғ) $\overrightarrow{AD_1}$.

18.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында төбелері арқылы келесі векторларға тең векторларды табыңдар : а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1}$; ә) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

B

18.7. Келесі көпжақтардың қырлары әртүрлі неше векторды береді: а) куб; ә) үшбұрышты призма ; б) дұрыс төртбұрышты пирамида (18.10 -сурет)?

18.8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада төбелері арқылы келесі векторларға тең



18.10-сурет

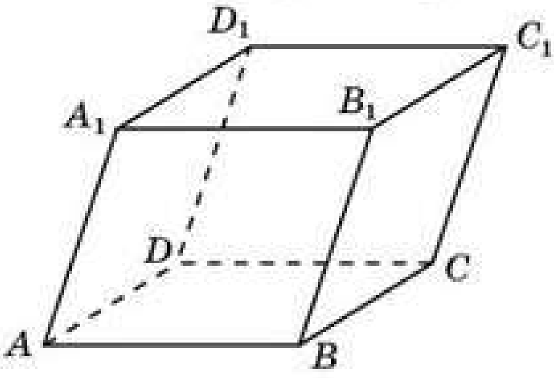
векторларды көрсетіңдер: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$; ә) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE_1}$.

18.9. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қабырғалары 1-ге тең (18.8 -сурет). $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$ векторының ұзындығын табыңдар .

18.10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында келесі векторлардың ұзындығын табыңдар : а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; ә) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

18.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қабырғалары 1-ге тең. Келесі векторлардың ұзындықтарын табыңдар: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$; ә) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE_1}$.

18.12. Қандай жағдайда векторлардың қосындысының ұзындығы қосылғыштардың ұзындықтарының қосындысына тең болады ?



18.11-сурет

18.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде келесі векторды көрсетіңдер (18.11- сурет): а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}$; ә) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DD_1}$; б) $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1}$; в) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_1}$.

18.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында келесі вектордың ұзындығын табыңдар : а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}$; ә) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DD_1}$; б) $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1}$; в) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_1}$.

§ 19. Компланар векторлар

Егер кеңістіктегі үш вектор бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда жатса, онда олар *компланар векторлар* деп аталады.

Мысалы, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ және $\overrightarrow{B_1C_1}$ векторлары компланар болады.

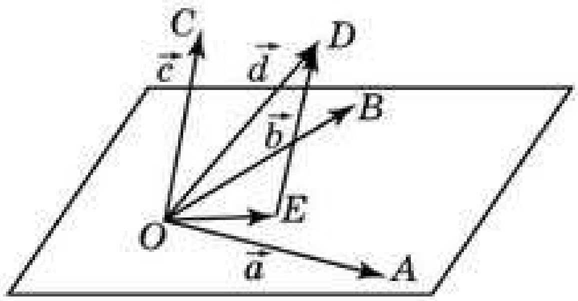
Егер кеңістіктегі нөлдік емес үш векторды бір нүктеден салғанда бір жазықтықта жатса, онда олар компланар векторлар болатынын дәлелдеңдер.

Планиметрия курсында "егер жазықтықтағы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар емес болса, онда осы жазықтықтағы кез келген $\vec{c}$ векторын бір ғана $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ түрінде көрсетуге болады, мұндағы x және y — қандай да бір нақты сандар" деген тұжырым дәлелденген болатын.

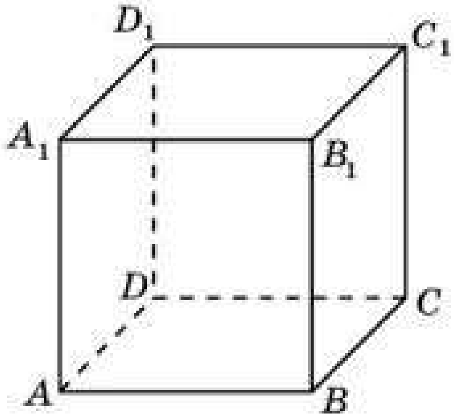
Кеңістікте осыған ұқсас векторды үш компланар емес векторлар бойынша жіктеу туралы теорема орын алады .

Теорема . ***Егер $\vec{a}$, $\vec{b}$, және $\vec{c}$ векторлары компланар емес болса , онда кез келген $\vec{d}$ векторын бір ғана $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ түрінде көрсетуге болады, мұндағы x, y, z — қандай да бір нақты сандар .***

Дәлелдеуі . $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ және $\vec{d}$ векторларын O нүктесінен бастап саламыз және олардың ұштарын сәйкесінше A, B, C, D деп белгілейміз. D нүктесі арқылы OC түзуіне параллель түзу жүргіземіз және оның AOB жазықтығымен қиылысу нүктесін E деп белгілейміз (19.1 -сурет).



19.1-сурет



19.2-сурет

Егер D нүктесі OC түзуінде жатса, онда E нүктесі ретінде O нүктесін аламыз. $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OB}$ векторлары компланар . Ендеше $\overrightarrow{OE} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ теңдігі орындалатындай x және y сандары бар болады. $\overrightarrow{ED}$ және $\overrightarrow{OC}$ векторлары коллинеар . Ендеше $\overrightarrow{ED} = z\overrightarrow{OC}$ теңдігі орындалатындай z саны бар болады. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED}$ болғандықтан, $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ теңдігі орындалады, яғни $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Енді осы теңдіктің жалғыздығын дәлелдейік. Егер алынған теңдіктен басқа $\vec{d} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}$ теңдігі орындалатын болса, мұндағы x' саны x-тен өзгеше немесе y' саны y-тен өзгеше, онда $\vec{0} = (x'-x)\vec{a} + (y'-y)\vec{b} + (z'-z)\vec{c}$ теңдігі орындалатын еді, мұндағы $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ нөлден өзгеше сандар. Демек, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары компланар болады, бұл шартқа қайшы келеді. ◻

$ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призманың төбелерінде басы мен ұшы болатын компланар емес үш векторға мысал келтіріңдер .

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында $\overrightarrow{BD_1}$ векторын $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{AA_1}$ векторлары арқылы өрнектеңдер (19.2 -сурет).

Сұрақтар

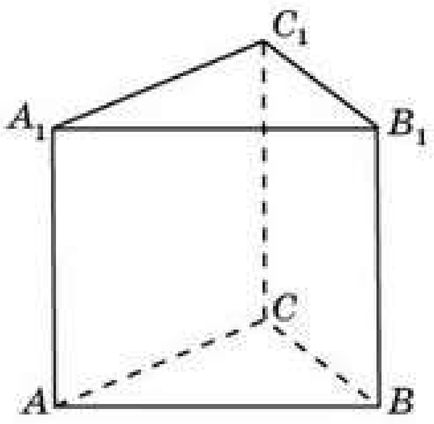
1. Кеністіктегі қандай үш вектор коллинеар деп аталады ?
2. Кеністіктегі қандай үш вектор компланар деп аталады ?
3. Векторды үш компланар емес векторлар бойынша жіктеу туралы теореманы тұжырымдаңдар.

Есептер

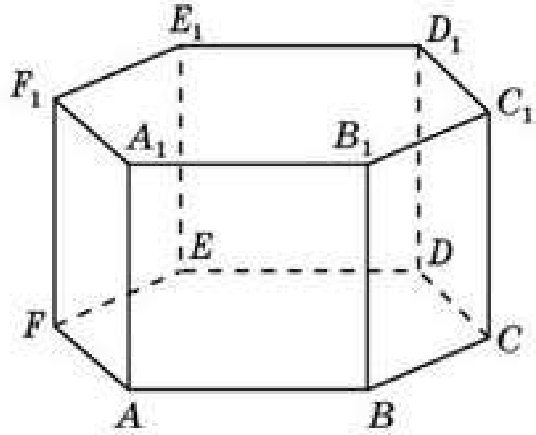
А

19.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында төбелері арқылы $\overrightarrow{AB}$ векторына коллинеар векторларды көрсетіңдер (19.2 -сурет).

19.2. $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призмада төбелері арқылы $\overrightarrow{AA_1}$ векторына коллинеар векторларды көрсетіңдер (19.3-сурет).



19.3-сурет



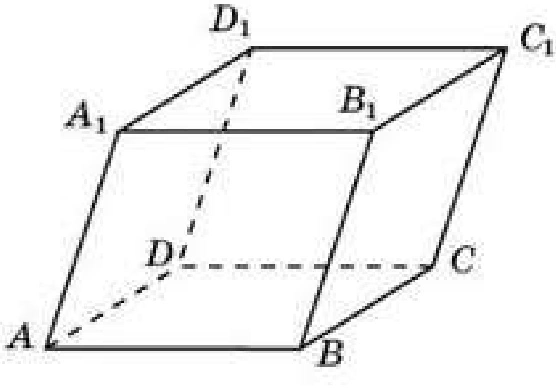
19.4-сурет

19.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада төбелері арқылы $\overrightarrow{AB_1}$ векторына коллинеар векторларды көрсетіңдер (19.4- сурет).

19.4. $\vec{a}$ және $\vec{b}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары коллинеар . $\vec{a}$ және $\vec{c}$ векторлары коллинеар бола ма?

19.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада $\overrightarrow{AD_1}$ және $\overrightarrow{BC_1}$ векторлары коллинеар бола ма (19.4- сурет)?

В



19.5-сурет

19.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінен: а) компланар үш векторды ; ә) компланар емес үш векторды көрсетіңдер (19.5- сурет).

19.7. $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призмада : а) компланар үш векторды ; ә) компланар емес үш векторды көрсетіңдер (19.3- сурет).

19.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{AA_1}$ векторлары арқылы келесі векторды өрнектеңдер: а) $\overrightarrow{AC_1}$; ә) $\overrightarrow{BD_1}$ (19.2 -сурет).

19.9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасында $\overline{AB}$, $\overline{AF}$ және $\overline{AA_1}$ векторлары арқылы келесі векторды өрнектеңдер: а) $\overline{AD_1}$; ә) $\overline{AC_1}$ (19.4-сурет).

19.10. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар. $\vec{a}+\vec{b}$ және $\vec{a}-\vec{b}$ векторлары коллинеар бола ма?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

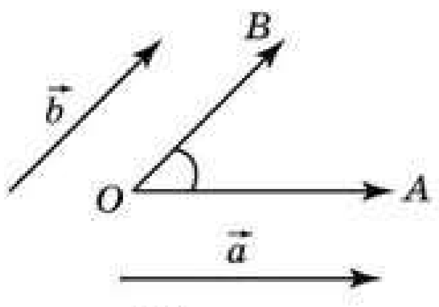
19.11. Жазықтықтағы векторлардың арасындағы бұрыштың анықтамасын қайталаңдар.

19.12. Жазықтықтағы векторлардың арасындағы бұрыштың анықтамасына сәйкес кеңістіктегі векторлардың арасындағы бұрыш ұғымын анықтаңдар.

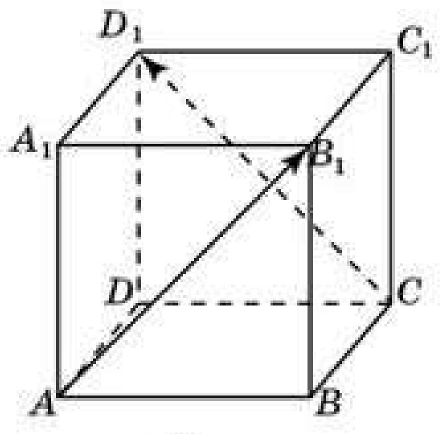
§ 20. Векторлардың арасындағы бұрыш. Векторлардың скаляр көбейтіндісі

Кеңістіктегі векторлардың арасындағы бұрыш жазықтықтағы сияқты анықталады.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ — нөлдік емес екі вектор болсын. Оларды O нүктесінен $\overline{OA}=\vec{a}$, $\overline{OB}=\vec{b}$ болатындай етіп саламыз (20.1-сурет). OA және OB сәулелерінің арасындағы бұрыш $\vec{a}$ және $\vec{b}$ *векторларының арасындағы бұрыш* деп аталады.



20.1-сурет



20.2-сурет

Бірдей бағытталған векторлардың арасындағы бұрыш 0°-қа тең деп есептеледі.

Егер екі вектордың арасындағы бұрыш тік болса, онда *екі вектор перпендикуляр* деп аталады.

1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында (20.2-сурет) $\overline{AB_1}$ және $\overline{CD_1}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

Шешуі. $\overrightarrow{AB_1}$ және $\overrightarrow{CD_1}$ векторларының арасындағы бұрыш $\overrightarrow{AB_1}$ және $\overrightarrow{BA_1}$ векторларының арасындағы бұрышқа тең. Демек, 90°-қа тең болады.

Кеңістіктегі векторлардың скаляр көбейтіндісі жазықтықтағы сияқты анықталады.

Нөлдік емес екі вектордың *скаляр көбейтіндісі* деп олардың ұзындықтары мен арасындағы бұрыштың косинусына көбейтіндісін айтады.

Егер екі вектордың біреуі нөлдік вектор болса, онда осы векторлардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең деп есептеледі.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісі $\vec{a}\cdot\vec{b}$ деп белгіленеді. Анықтама бойынша

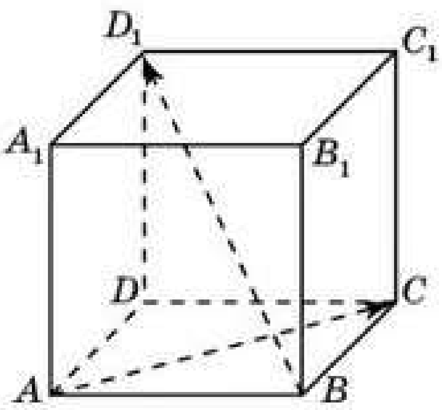
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,$$

мұндағы φ — $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш.

$\vec{a}\cdot\vec{a}$ көбейтіндісі *скаляр квадрат* деп аталады және $\vec{a}^2$ деп белгіленеді. Скаляр көбейтіндінің анықтамасынан $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ шығады.

Нөлдік емес екі вектордың арасындағы бұрыш 90°-қа тең болса, онда олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болатыны айқын, өйткені бұл жағдайда осы векторлардың арасындағы бұрыштың косинусы нөлге тең болады.

Қарама-қарсы бағытталған $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін олардың ұзындықтары арқылы өрнектеңдер.



20.3-сурет

Векторлардың скаляр көбейтіндісінің қарапайым физикалық мағынасы бар, яғни жұмыс күштің орын ауыстыруға скаляр көбейтіндісіне тең болады:

$$A = \vec{F}\cdot\vec{a} = |\vec{F}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\varphi.$$

2-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында (20.3-сурет) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{BD_1}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

Шешуі. $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{BD_1}$ векторлары перпендикуляр. Демек, олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады.

Сұрақтар

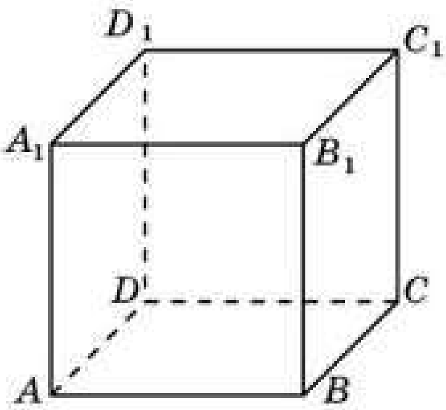
1. Векторлардың арасындағы бұрыш дегеніміз не?
2. Қандай екі вектор перпендикуляр деп аталады?
3. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі дегеніміз не?
4. Скаляр көбейтінді қалай белгіленеді?
5. Скаляр квадрат дегеніміз не?
6. Қандай жағдайда екі вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады?
7. Скаляр көбейтіндінің физикалық мағынасы қандай?

Есептер

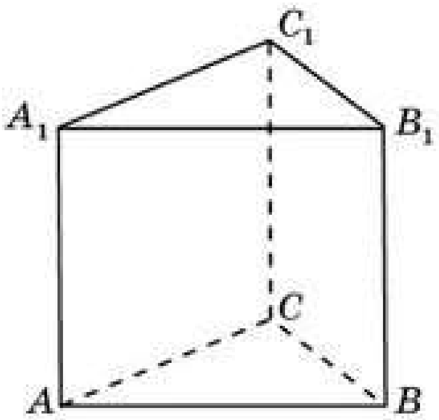
А

20.1. Векторлардың арасындағы бұрыш: а) сүйір ; ә) доғал болса, олардың скаляр көбейтіндісінің таңбасы қандай болады ?

20.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында келесі векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар (20.4- сурет): а) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{B_1D_1}$; ә) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{B_1C_1}$; б) $\overrightarrow{AB_1}$ және $\overrightarrow{BC_1}$.



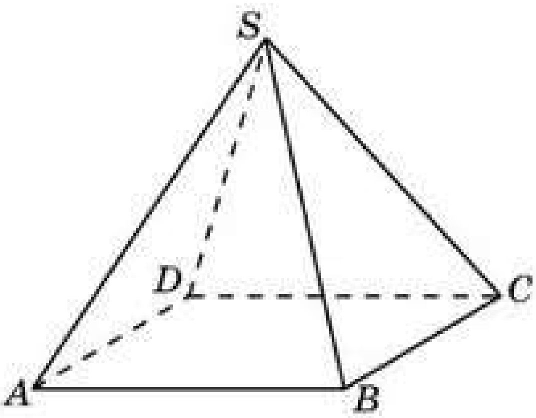
20.4-сурет



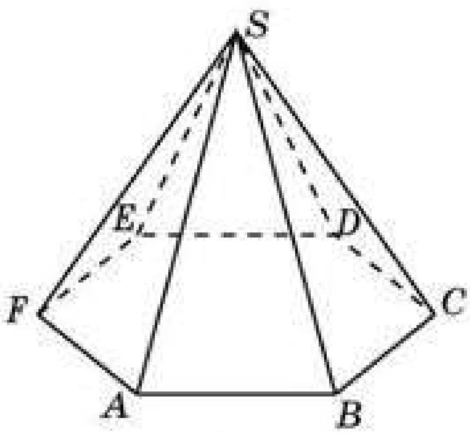
20.5-сурет

20.3. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призмада келесі векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар (20.5- сурет): а) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CC_1}$; ә) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{B_1C_1}$.

20.4. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең (20.6- сурет). Келесі векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар : а) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{SC}$; ә) $\overrightarrow{SB}$ және $\overrightarrow{SD}$.

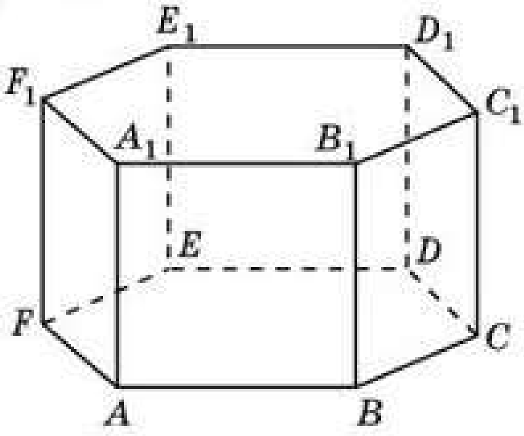


20.6-сурет



20.7-сурет

20.5. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғасы 1-ге тең, ал бүйір қырлары 2-ге тең (20.7- сурет). Келесі векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар : а) $\overrightarrow{SA}$ және $\overrightarrow{SD}$; ә) $\overrightarrow{SA}$ және $\overrightarrow{BC}$.



20.8-сурет

20.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (20.8 -сурет). Келесі векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар : а) $\overline{AA_1}$ және $\overline{BC_1}$; ә) $\overline{AA_1}$ және $\overline{DE_1}$; б) $\overline{AB}$ және $\overline{B_1C_1}$; в) $\overline{AB}$ және $\overline{C_1D_1}$; г) $\overline{AC}$ және $\overline{B_1C_1}$; ғ) $\overline{AC}$ және $\overline{B_1D_1}$; д) $\overline{AC}$ және $\overline{B_1E_1}$.

B

20.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында келесі векторлардың скаляр көбейтіндісін табыңдар (20.4 -сурет): а) $\overline{AC}$ және $\overline{B_1D_1}$; ә) $\overline{AB}$ және $\overline{B_1C_1}$; б) $\overline{AB_1}$ және $\overline{BC_1}$.

20.8. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (20.5-сурет). Келесі векторлардың скаляр көбейтіндісін табыңдар: а) $\overline{AB}$ және $\overline{CC_1}$; ә) $\overline{AB}$ және $\overline{B_1C_1}$.

20.9. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең (20.6-сурет). Келесі векторлардың скаляр көбейтіндісін табыңдар: а) $\overline{AB}$ және $\overline{SC}$; ә) $\overline{SB}$ және $\overline{SD}$.

20.10. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, ал бүйір қырлары 2-ге тең (20.7-сурет). Келесі векторлардың скаляр көбейтіндісін табыңдар: а) $\overline{SA}$ және $\overline{SD}$; ә) $\overline{SA}$ және $\overline{BC}$.

20.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең (20.8- сурет). Келесі векторлардың скаляр көбейтіндісін табыңдар: а) $\overline{AA_1}$ және $\overline{BC_1}$; ә) $\overline{AA_1}$ және $\overline{DE_1}$; б) $\overline{AB}$ және $\overline{B_1C_1}$; в) $\overline{AB}$ және $\overline{C_1D_1}$; г) $\overline{AC}$ және $\overline{B_1C_1}$; ғ) $\overline{AC}$ және $\overline{B_1D_1}$; д) $\overline{AC}$ және $\overline{B_1E_1}$.

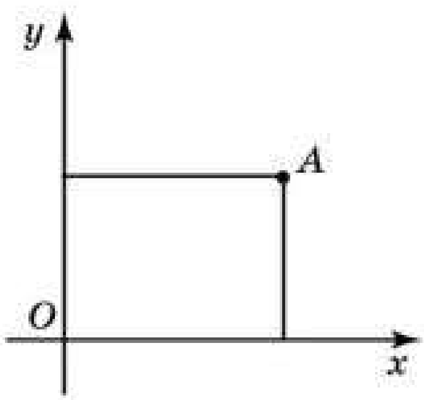
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

20.12. Жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесі ұғымын қайталаңдар.

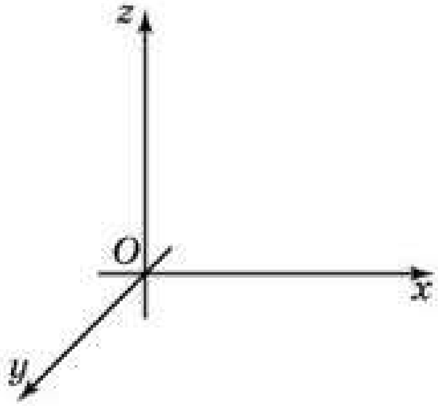
§ 21. Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі

Планиметрия курсында біз жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесімен таныстық. Координаталар басы деп аталатын O нүктесі және оң бағытын көрсететін $\overline{OE}$ бірлік векторы арқылы таңдап алынған түзу *координаталық түзу* деп аталатынын еске салайық.

Жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесі деп ортақ координаталар басы болатын өзара перпендикуляр координаталық түзулердің жұбын айтады. Координаталар басы O әрпімен, ал координаталық түзулер Ox, Oy арқылы белгіленеді және олар сәйкесінше *абсцисса осі*, *ордината осі* деп аталады (21.1 -сурет).



21.1-сурет



21.2-сурет

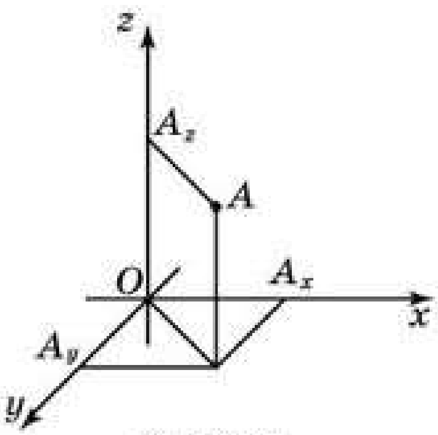
Координаталық түзудегі әрбір нүктеге осы нүктенің координатасы деп аталатын сан сәйкес келеді, ал жазықтықтағы координаталар жүйесіндегі әрбір нүктеге осы нүктенің координаталары деп аталатын $(x\,;\,y)$ сандар жұбы сәйкес келеді.

Тікбұрышты координаталарды алғашқы рет Р. Декарт енгізген, сондықтан тікбұрышты координаталар жүйесін *декарттық координаталар жүйесі*, ал координаталарды *декарттық координаталар* деп атайды.

Жазықтықтағы және кеңістіктегі тікбұрышты координаталарды енгізу көптеген геометриялық есептерді алгебралық есептерге, керісінше алгебралық есептерді геометриялық есептерге көшіруге мүмкіндік берді. Осыған негізделген әдіс *координаталар әдісі* деп аталады.

Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі деп ортақ координаталар басы болатын өзара перпендикуляр координаталық түзулердің үштігін айтады. Координаталар басы O әрпімен, ал координаталық түзулер Ox, Oy, Oz арқылы белгіленеді және олар сәйкесінше *абсцисса осі*, *ордината осі*, *аппликата осі* деп аталады (21.2 -сурет). Координаталық түзулер жұбы арқылы өтетін жазықтықтар *координаталық жазықтықтар* деп аталады және Oxy, Oxz, Oyz деп белгіленеді.

Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесінде кез келген A нүктесін қарастырайық. Осы нүкте арқылы Ox осіне перпендикуляр түзу жүргіземіз және Ox осімен қиылысу нүктесін A_x арқылы белгілейміз (21.3 -сурет). Осы нүктенің Ox осіндегі координатасы



21.3-сурет

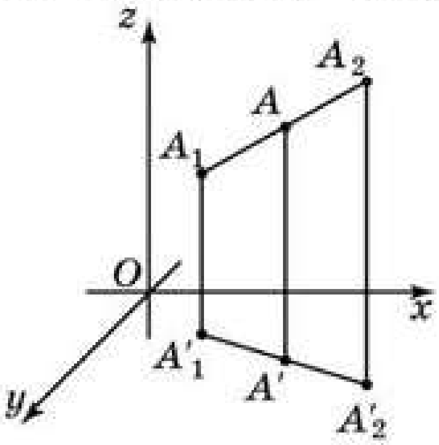
A нүктесінің *абсциссасы* деп аталады және x арқылы белгіленеді. Осыған ұқсас Oy, Oz осьтерінде A_y және A_z нүктелері анықталады, олар сәйкесінше A нүктесінің *ординатасы* мен *аппликатасы* деп аталады және сәйкесінше y пен z арқылы белгіленеді. $(x;\ y;\ z)$ сандарының үштігі кеңістіктегі *A нүктесінің координаталары* деп аталады.

$A(x;y;z)$ нүктесінің Oxy, Oxz, Oyz координаталық жазықтықтардағы ортогональ проекцияларының сәйкесінше координаталары $(x;\ y;\ 0)$, $(x;\ 0;\ z)$, $(0;\ y;\ z)$ болатынын байқаймыз.

Планиметрияда $A_1(x_1;\ y_1)$ және $A_2(x_2;\ y_2)$ нүктелері н қосатын кесіндінің ортасының координаталары $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ екені дәлелденген болатын . Кеңістікте осыған ұқсас келесі теорема орынды болады.

Теорема . ***$A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ нүктелерін қосатын кесіндінің ортасының координаталары $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right)$ болады*** .

Дәлелдеуі . $A(x;\ y;\ z)$ нүктесі A_1A_2 кесіндісінің ортасы болсын. Осы кесіндіні Oxy жазықтығына проекциялаймыз, яғни A_1, A_2 нүктелері арқылы Oxy жазықтығына перпендикуляр түзулер жүргіземіз (21.4-сурет) . Oxy жазықтығында сәйкесінше $A'_1(x_1;\ y_1;\ 0)$, $A'(x;\ y;\ 0)$, $A'_2(x_2;\ y_2;\ 0)$ нүктелерін аламыз. Ортогональ проекциялау бір түзудің бойында жатқан кесінділердің қатынасын сақтайтындықтан, A' нүктесі — $A'_1A'_2$ кесіндісінің ортасы болады. Жазықтықтағы геометрияның сәйкесінше теоремасы бойынша оның координаталары $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};0\right)$ болады. Осыған ұқсас A_1A_2 кесіндісінің Oxz (немесе Oyz) жазықтығындағы ортогональ проекциясын қарастыра отырып, аламыз: $z=\frac{z_1+z_2}{2}$. Сонымен A_1A_2 кесіндісінің ортасы болатын A нүктесінің координаталары $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right)$ болады . □



21.4-сурет

Осы теоремаға сәйкес суретті өздерің салыңдар.

Тарихи мәліметтер

Рене Декарт — XVII ғасырдағы белгілі ғалым математиктердің бірі. Оның зерттеу салаларының кеңдігі таң қалдырады. Р. Декарт философия, математика, физика, биология, медицина және т.б. ғылым салаларынан зерттеу нәтижелерін алған. Ол философияны шынайы әлемдегі көптеген құбылыстарға жауап беретін, табиғатты және адамның санасын басқаратын заңдылықтарды ашатын әмбебап ғылым ретінде қарастырады.

Декарт батыстың қазіргі замандық философиялық-ғылыми ойлауының негізін қалаушы тұлға ретінде толық философиялық жүйе жасады. Ол философияда дуализм (коснегіз) мен рационализм (зердешілдік) бағытын дамытты.

Декарт картезиандық философия ілімдерінің (Картезий — Декарттың латынша есімі) негізін қалаушы болды. Ол мұнда жаратылыстану ғылымы теориясын дамытуға өзіндік көзқарасын ұсынған. Атап айтсақ, ол Күн жүйесінің пайда болуын ғылыми түрде түсіндіру мәселесін зерттеп, өзіндік болжамын берді.

1637 жылы жарық көрген кітабы Р. Декартты танымал етіп, белгілі атақ әкелді (Декарт ол кезде 41 жаста болатын). Сол кездегі әдет-ғұрыптарға сәйкес оның атауы ұзақ болған, яғни: "Ақыл-ойды бағыттауға және ғылымдағы шындықты іздеуге мүмкіндік беретін әдістер туралы ойлар. Сонымен қатар, осы әдістің қосымшасы болатын Диоптрика, Метеорлар және Геометрия". Бұл шығармада Декарт "Әдістің негізгі ережелерін" жазған, атап айтсақ:

Біріншіден, кез келген нәрсенің шындық екеніне көзің жетпей, шындық деп қабылдамау керек, яғни шапшаң шешім қабылдаудан және қате түсініктерден аулақ бол және өз пікіріңді тек қана ақылға салып, ойланып, күдік туғызбайтындай анық тұжырымда.

Екіншіден, қарастырылатын өзіндік қиындықтарды тиімді шешу үшін оларды қажетінше әртүрлі бөліктерге бөліп шешу ұсынылады.

Үшіншіден, өзіндік ойлау дағдысын қадағалау, яғни қарапайымнан (жеңіл танып-білетіннен) бастап кезең-кезеңмен күрделі танымдық деңгейге дейін көтерілу, өз ойларыныңың бағытын басқаруға, тіпті бір-біріне қарсы келмейтіндер арасында тәртіпті сақтауға мүмкіндік беру.

Төртіншіден, күнделікті мәселелердің толық тізімін және жалпы шолулардың бәрін қалдырмай ештеңе жоқ екеніне сенімді етіп жасау.

Декарт "Ғылыми теорияның негізінде анық және қарапайым қағидалар болуы керек. Табиғат құбылыстарын зерделеу, сипаттау, топтастыру, эксперименттер мен математикалық есептеулерді жүргізу қажет. Табиғатты зерттеуде басқа біреуден көмек күтпей, тек өзіңнің күшіңе сенім арту керек", — деп баса айтқан.

Р. Декарт қазіргі заман математикасының дамуына зор үлес қосқан. Оның геометрияға қосымша болатын "...әдістер туралы ойлар" ғылыми жазбасы сол уақыттағы геометрия ғылымына жаңалықтар енгізді. Қысқа мерзімде "Геометрия" төрт басылымнан өтіп, XVII ғасырдағы әрбір математиктің қолдан түсірмейтін кітабы болды. Ол геометриялық координаталар жүйесін формулаға айналдыруы арқылы "Аналитикалық геометрияның атасы" деп аталды.

XVIII—XIX ғасырларда Декарттың координаталар әдісі негізінде көпөлшемді, кейін шексіз өлшемді геометрия пайда болды. Бүгінгі күні координаталар әдісінсіз математиканы да, физиканы да елестету мүмкін емес.

Сұрақтар

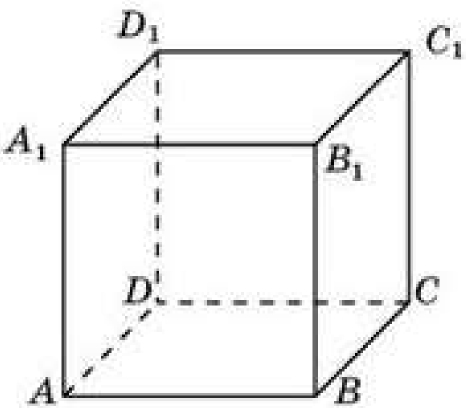
1. Қандай түзу координаталық түзу деп аталады?
2. а) Жазықтықтағы; ә) кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі дегеніміз не?
3. а) Абсцисса; ә) ордината; б) аппликата осі дегеніміз не?
4. Қандай жазықтықтарды координаталық жазықтықтар деп атайды?
5. Нүктенің: а) абсциссасы; ә) ординатасы; б) аппликатасы дегеніміз не?

Есептер

А

21.1. Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесінде координаталары берілген келесі нүктелерді кескіндеңдер: (1; 2; 3), (2; –1; 1), (–1; 3; 2).

21.2. $A(1;\ 3;\ 4)$ және $B(5;\ -6;\ 2)$ нүктелерінің: а) Oxy; ә) Oxz; б) Oyz жазықтықтарындағы ортогональ проекцияларының координаталарын табыңдар.

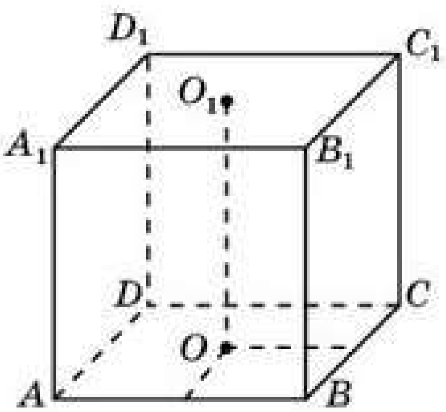


21.5-сурет

21.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубы берілген (21.5-сурет). Координаталар басы D нүктесінде жатыр. Координаталар осінің оң сәулелері сәйкесінше DC, DA және DD_1. Кубтың барлық төбелерінің координаталарын табыңдар.

21.4. Келесі кесінділердің орталарының координаталарын табыңдар: а) AB, мұндағы $A(1;\ 2;\ 3)$ және $B(-1;\ 0;\ 1)$; ә) CD, мұндағы $C(3;\ 3;\ 0)$ және $D(3;\ -1;\ 2)$.

B

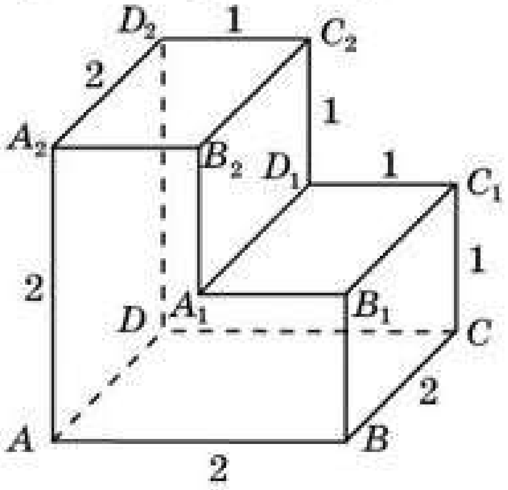


21.6-сурет

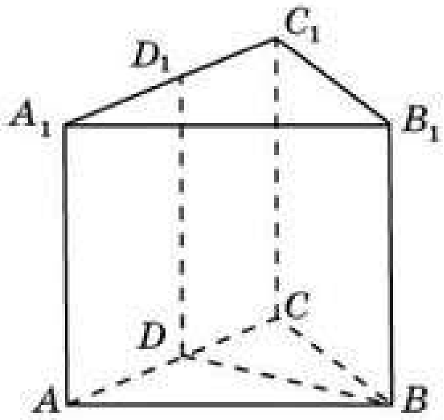
21.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы тікбұрышты координаталар жүйесіне салынған және $ABCD$ жағының центрі координаталар басы (21.6-сурет), қырлары сәйкесінше координаталар осіне параллель, A төбесінің координаталары (–1; 1; 0). Кубтың қалған төбелерінің координаталарын табыңдар.

21.6. Көпжақтың жақтары тік бұрышы бар көпбұрыштар болады (21.7-сурет).

D төбесі — координаталар басы, DC, DA, DD_2 кесінділері сәйкесінше Ox, Oy және Oz координаталар осінде жатыр. Көпжақтың төбелерінің координаталарын табыңдар.



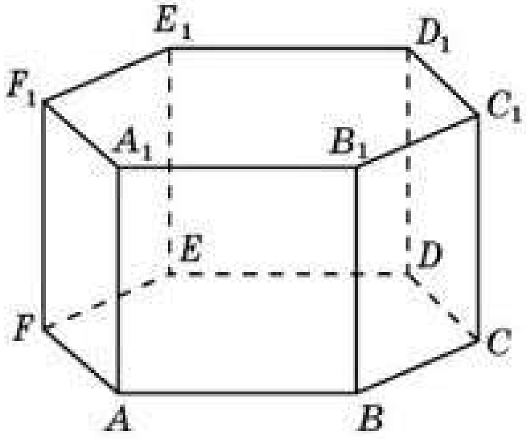
21.7-сурет



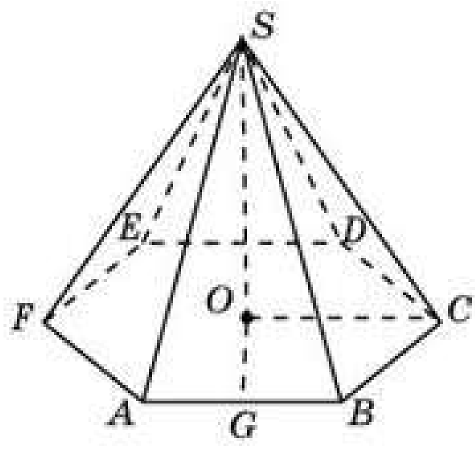
21.8-сурет

21.7. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. D және D_1 — сәйкесінше AC және A_1C_1 қырларының орталары (21.8- сурет). D нүктесі — координат алар басы, DB, DA, DD_1 кесінділері сәйкесінше Ox, Oy және Oz координаталар осінде жатыр. Призманың төбелерінің координаталарын табыңдар.

21.8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. E төбесі — координаталар басы, ED, EA, EE_1 кесінділері сәйкесінше Ox, Oy және Oz координаталар осінде жатыр (21.9-сурет). Призманың төбелерінің координаталарын табыңдар .



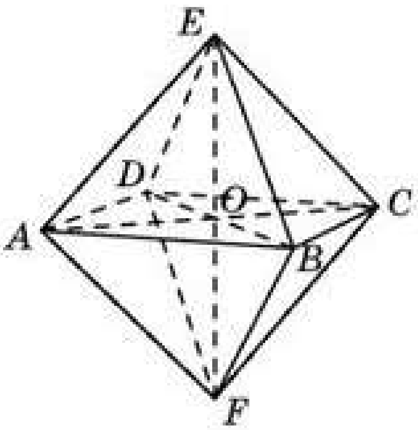
21.9-сурет



21.10-сурет

21.9. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. O нүктесі — табанының центрі, G нүктесі — AB қырының ортасы , OC, OG, OS кесінділері сәйкесінше Ox , Oy және Oz координаталар осінде жатыр (21.10-сурет). Пирамида ның төбелерінің координаталарын табыңдар.

21.10. Кеңістіктегі: а) бірінші координатасы нөлге тең; ә) екінші координатасы нөлге тең; б) үшінші координатасы нөлге тең; в) бірінші және екінші координаталары нөлге тең; г) бірінші және үшінші координаталары нөлге тең; ғ) екінші және үшінші координаталары нөлге тең; д) барлық координаталары нөлге тең нүктелердің геометриялық орны нені береді?



21.11-сурет

21.11. $A(-1;\ 2;\ 3)$ нүктесінен келесі жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар : а) Oxy ; ә) Oxz ; б) Oyz .

21.12. Октаэдрдің O центрі координаталар бас нүктесі болады. Оның екі төбесінің координаталары $A(0;\ 1;\ 0)$ және $B(1;\ 0;\ 0)$ (21.11 -сурет). Октаэдрдің қалған төбелерінің координаталарын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

21.13. Координаталық жазықтықтағы нүктелердің арақашықтығын табу формуласын қайталаңдар.

21.14. Координаталық жазықтықтағы нүктелердің арақашықтығын табудың формуласын пайдаланып, кеңістіктегі $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нүктелерінің арақашықтығының формуласын жазыңдар.

§ 22. Екі нүктенің арақашықтығы. Сфераның теңдеуі

Планиметрия курсында жазықтықтағы $A_1(x_1;\ y_1)$ және $A_2(x_2;\ y_2)$ нүктелерінің арақашықтығы келесі формуламен өрнектелетіні дәлелденген болатын:

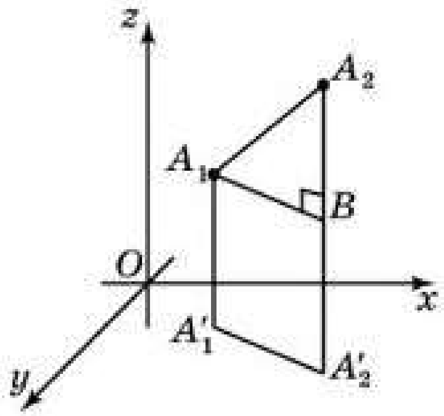
$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Кеңістікте осыған ұқсас формула бар болады .

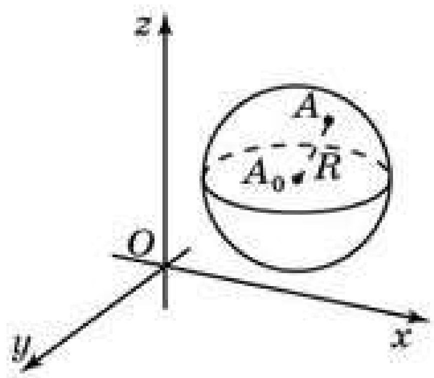
Теорема . ***Кеңістіктегі*** $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ***нүктелерінің арақашықтығы келесі формуламен өрнектеледі*** :

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Дәлелдеуі . Кеңістіктегі $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нүктелері үшін A_1A_2 түзуін қарастырайық. Ол барлық координаталық осьтерге бір уақытта параллель бола алмайды. Мысалы, ол Oz осіне параллель емес делік және A_1', A_2' — Oxy жазықтығындағы сәйкес A_1, A_2 нүктелерінің ортогональ проекциялары болсын (22.1-сурет).



22.1-сурет



22.2-сурет

Бұл проекциялардың сәйкесінше $(x_1; y_1; 0)$, $(x_2; y_2; 0)$ координаталары бар. A_1', A_2' нүктелерінің аракашықтығы келесі формуламен өрнектеледі:

$$A_1'A_2' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

A_1 нүктесі арқылы $A_1'A_2'$ түзуіне параллель түзу жүргіземіз және оның $A_2'A_2$ түзуімен қиылысу нүктесін B деп белгілейміз. Сонда A_1A_2B үшбұрышы тікбұрышты болады және $A_1B = A_1'A_2'$, $A_2B = |z_2 - z_1|$. Пифагор теоремасы бойынша:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \ \square$$

Сфераның анықтамасынан центрі $A_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесінде және радиусы R болатын сфераның нүктелерінің координаталары келесі теңдікті қанағаттандыратыны шығады:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Бұл теңдік центрі $A_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесінде және радиусы R болатын *сфераның теңдеуі* деп аталады (22.2-сурет).

Сәйкесінше, шардың нүктелерінің координаталары келесі теңсіздікті қанағаттандырады:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \le R^2.$$

Центрі $A_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесінде және радиусы R болатын шарға тиісті емес нүктелердің координаталарын қанағаттандыратын теңсіздікті жазыңдар.

Сұрақтар

1. Кеңістіктегі екі нүктенің аракашықтығы қандай формуламен өрнектеледі?
2. Сфера нүктелерінің координаталары қандай теңдікті қанағаттандырады?
3. Қандай теңдеу сфераның теңдеуі деп аталады?
4. Шардың нүктелерінің координаталары қандай теңсіздікті қанағаттандырады?

Есептер

A

22.1. Келесі нүктеден координаталар басына дейінгі қашықтықты табыңдар : а) $A(3;\ 4;\ 0)$; ә) $B(1;\ -2;\ 2)$.

22.2. $A(3;\ 1;\ 5)$ немесе $B(1;\ -1;\ 6)$ нүктелерінің қайсысы координаталар басына жақын орналасқан?

22.3. Келесі нүктелердің аралықтығын табыңдар : а) $A_1(1;\ 2;\ 3)$ және $A_2(-1;\ 1;\ 1)$; ә) $B_1(3;\ 4;\ 0)$ және $B_2(3;\ 1;\ -4)$.

22.4. Келесі теңдеумен берілген сфераның C центрінің координаталарын және R радиусын табыңдар: а) $(x-2)^2+(y+5)^2+z^2=9$; ә) $x^2+(y-6)^2+(z+1)^2=4$.

22.5. а) Центрі $O(0;\ 0;\ 0)$ нүктесінде және радиусы 1-ге тең; ә) центрі $O(1;\ -2;\ 3)$ нүктесінде және радиусы 4-ке тең сфераның теңдеуін жазыңдар.

B

22.6. Үшбұрыш төбелерінің координаталары берілген: $A(0;\ 0;\ 2)$, $B(0;\ 2;\ 0)$, $C(2;\ 0;\ 0)$. Оның түрін анықтаңдар .

22.7. $A(1;\ -2;\ 3)$ нүктесі: а) Ox; ә) Oy; б) Oz координаталық түзуден қандай қашықтықта жатады ?

22.8. Келесі координаталық жазықтықты жанайтын центрі $O(1;\ 2;\ -1)$ нүктесін деге сфераның теңдеуін жазыңдар: а) Oxy ; ә) Oxz ; б) Oyz .

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

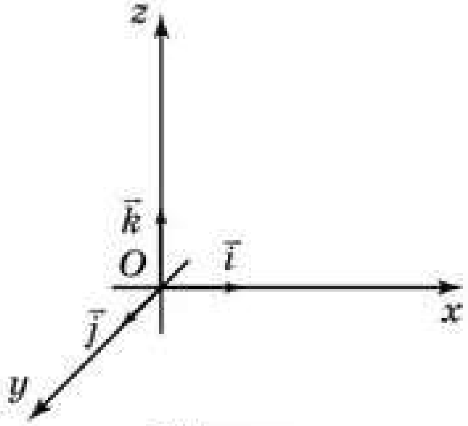
22.9. Координаталық жазықтықтағы вектордың координаталары анықтамасын қайталаңдар.

22.10. Координаталық жазықтықтағы вектордың координаталары ұғымының анықтамасына ұқсас кеңістіктегі вектордың координаталары ұғымын анықтаңдар.

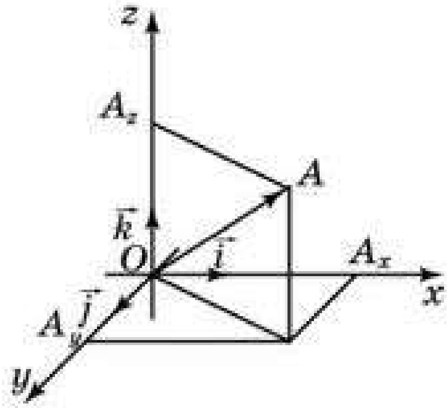
§ 23. Вектордың координаталары

Тікбұрышты координаталар жүйесінде берілген кеңістіктегі вектордың координаталары ұғымын анықтайық. Ол үшін вектордың басы координаталар басымен сәйкес келетіндей саламыз . Сонда оның ұшының координаталары *вектордың координаталары* деп аталады.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторларын сәйкесінше $(1;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 1;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 1)$ координаталарымен белгілейік. Олардың ұзындықтары 1-ге тең, ал бағыттары сәйкес координаталар осьтерінің бағытына дәл келеді. Бұл векторларды координаталар басынан бастап саламыз және оларды *координаталық векторлар* деп атаймыз (23.1-сурет).



23.1-сурет



23.2-сурет

Теорема. *$\vec{a}$ векторын $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ түрінде көрсетуге болатын жағдайда ғана оның координаталары $(x; y; z)$ болады.*

Дәлелдеуі. $\vec{a}$ векторын координаталар басынан бастап саламыз және оның ұшын A нүктесі арқылы белгілейміз. $\overline{OA} = \overline{OA_x} + \overline{OA_y} + \overline{OA_z}$ теңдігі орындалады (23.2-сурет). Сонда $\overline{OA_x} = x\vec{i}$, $\overline{OA_y} = y\vec{j}$, $\overline{OA_z} = z\vec{k}$ теңдігі орындалған жағдайда ғана A нүктесінің координаталары $(x; y; z)$ болады. Демек, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. ◻

Теорема. *$\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ векторларының $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ қосындысының координаталары $(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ болады.*

Дәлелдеуі. $\vec{a}_1$ және $\vec{a}_2$ векторларын координаталық векторлар бойынша жіктейміз:

$$\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Сонда $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ қосындысы үшін келесі теңдік орындалады:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

осыдан $(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ сандарының үштігі $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ векторының координаталары болып табылады. ◻

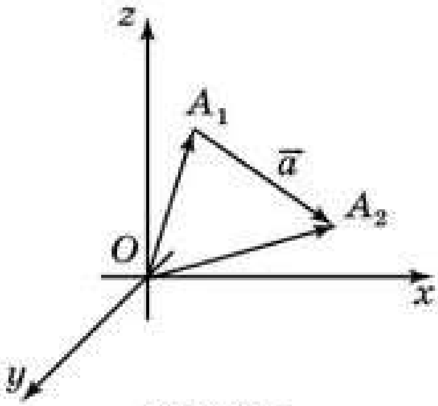
Сонымен векторларды қосу барысында олардың сәйкес координаталары қосылады.

Векторды санға көбейткенде оның барлық координаталары сол санға көбейтілетінін өздерің дәлелдеңдер.

Осы қасиеттерден $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ векторларының $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$ айырмасының координаталары $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ болады.

Енді басы мен ұшының координаталары берілген вектордың координаталары қалай табылатынын қарастырайық.

$\vec{a}$ векторының басы $A_1(x_1; y_1; z_1)$ және ұшы $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелері нде болсын (23.3-сурет).



23.3-сурет

Сонда оны $\vec{a} = \overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1}$ векторларының айырмасы ретінде көрсетуге болады, яғни координаталары: $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

$\vec{a}(x; y; z)$ векторының ұзындығы координаталары арқылы келесі формуламен өрнектеледі:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Егер $\overline{A_1A_2}$ векторының басы мен ұшының координаталары $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелерінде берілсе, онда оның ұзындығы келесі формуламен өрнектеледі :

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Нөлдік емес *екі вектордың скаляр көбейтіндісі* деп олардың ұзындықтары мен арасындағы бұрыштың косинусына көбейтіндісін айтатынын еске салайық.

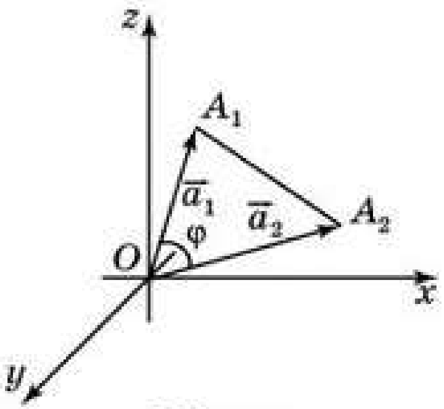
Егер бір вектор нөлдік вектор болса, онда осы векторлардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең деп есептеледі.

$\vec{a}_1$ және $\vec{a}_2$ векторларының скаляр көбейтіндісі $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$ деп белгіленеді . Анықтама бойынша

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot \cos j,$$

мұндағы j бұрышы $\vec{a}_1$ және $\vec{a}_2$ векторларының арасындағы бұрыш.

$\vec{a} \cdot \vec{a}$ көбейтіндісі *скаляр квадрат* деп аталады және $\vec{a}^2$ деп белгіленеді. Скаляр көбейтіндінің анықтамасынан $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ шығады.



23.4-сурет

Векторлардың скаляр көбейтіндісін олардың координаталары арқылы өрнектейік . $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ векторлары берілсін. Вектордың басын координаталар басынан бастап саламыз , ал ұштарын A_1, A_2 деп белгілейміз (23.4-сурет).

Косинустар теоремасы бойынша келесі теңдікті аламыз :

$$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2OA_1 \cdot OA_2 \cdot \cos j,$$

яғни $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1^2 + \vec{a}_2^2 - 2\,\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$.

Соңғы теңдіктен скаляр көбейтіндіні өрнектейміз және келесі теңдіктерді пайдаланамыз:

$$\vec{a}_1^2 = |\vec{a}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2;\ \vec{a}_2^2 = |\vec{a}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$
$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Сонда

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 -$$
$$- (z_1 - z_2)^2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Сонымен келесі формуланы аламыз:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Алынған скаляр көбейтіндінің формуласы координаталары берілген $\vec{a}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ және $\vec{a}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ векторлардың арасындағы бұрышты табуға мүмкіндік береді. Демек, келесі формуланы алуға болады:

$$\cos j = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Сұрақтар

1. Вектордың координаталары дегеніміз не?
2. Қандай векторлар координаталық векторлар деп аталады?
3. Вектордың ұзындығы координаталары арқылы қалай өрнектеледі?
4. Вектордың ұзындығы оның басы мен ұшының координаталары арқылы қалай өрнектеледі?
5. Векторлардың скаляр көбейтіндісі қалай белгіленеді?
6. Векторлардың скаляр көбейтіндісі қалай анықталады?
7. Вектордың скаляр квадраты дегеніміз не?
8. Векторлардың скаляр көбейтіндісі олардың координаталары арқылы қалай өрнектеледі?
9. Векторлардың арасындағы бұрыш олардың координаталары арқылы қалай өрнектеледі?

Есептер

А

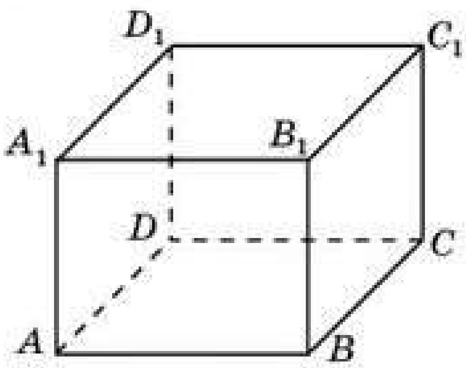
23.1. Келесі векторлардың координаталарын табыңдар: а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$; ә) $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$; б) $\vec{c} = -3\vec{j} + \vec{k}$; в) $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{k}$.

23.2. $\overline{AB}$ векторының координаталарын табыңдар: а) $A(2;\ -3;\ 4)$, $B(-5;\ 2;\ -6)$; ә) $A(1;\ 3;\ -4)$, $B(6;\ -5;\ -8)$; б) $A(-3;\ 1;\ -10)$, $B(5;\ 2;\ -1)$.

23.3. $\overline{AB}$ векторының координаталары $(a;\ b;\ c)$. $\overline{BA}$ векторының координаталарын табыңдар.

23.4. $\vec{a}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ және $\vec{a}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ векторлары коллинеар. Олардың координаталары өзара қалай байланысады?

23.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде D төбесі — координаталар басы, DC, DA, DD_1 қабырғалары сәйкесінше Ox, Oy, Oz координаталар осьтерінде жатыр және $DC = 4$, $DA = 3$, $DD_1 = 2$ (23.5-сурет). Келесі вектордың координаталарын табыңдар: а) $\overline{DB}$; ә) $\overline{DA_1}$; б) $\overline{DC_1}$; в) $\overline{DB_1}$; г) $\overline{AB}$; ғ) $\overline{AC}$; д) $\overline{AB_1}$; е) $\overline{AD_1}$; ж) $\overline{AC_1}$.



23.5-сурет

23.6. Вектордың координаталарын табыңдар: а) $\vec{a}+\vec{b}$; ә) $\vec{a}-\vec{b}$, мұндағы $\vec{a}(1;\ 0;\ 3)$, $\vec{b}(0;\ -2;\ 4)$.

23.7. Егер $\overline{MN}$ векторының координаталары $(2;\ -1;\ 0)$ және $M(1;\ -3;\ -5)$ болса, онда N нүктесінің координаталарын табыңдар.

23.8. Келесі вектордың ұзындығын табыңдар: а) $\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$; ә) $3\vec{j}+\vec{k}$; б) $-\vec{i}+2\vec{k}$.

23.9. $\vec{a}_1(-1;\ 2;\ 3)$ және $\vec{a}_2(2;\ -1;\ 4)$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

B

23.10. $\vec{a}(-1;\ 2;\ 5)$, $\vec{b}(2;\ -3;\ 4)$ векторлары берілген. Келесі векторлардың координаталарын табыңдар: а) $3\vec{a}+2\vec{b}$; ә) $-\vec{a}+3\vec{b}$.

23.11. а) Oxy координаталық жазықтығына перпендикуляр; ә) Ox координаталық түзуіне параллель болу үшін вектордың координаталары қандай шартты қанағаттандыруы керек?

23.12. Вектордың ұзындығы 3-ке тең. Вектордың координаталары өзара тең болса, онда оларды табыңдар.

23.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде D төбесі — координаталар басы, DC, DA, DD_1 қабырғалары сәйкесінше Ox, Oy, Oz координаталар осьтерінде жатыр және $DC=4$, $DA=3$, $DD_1=2$ (23.5-сурет). Келесі векторлардың координаталарын табыңдар: а) $\overline{DB}$; ә) $\overline{DA_1}$; б) $\overline{DC_1}$; в) $\overline{DB_1}$; г) $\overline{AB}$; ғ) $\overline{AC}$; д) $\overline{AB_1}$; е) $\overline{AD_1}$; ж) $\overline{AC_1}$.

23.14. $\vec{a}_1(-1;\ 2;\ 2)$ және $\vec{a}_2(3;\ 0;\ 4)$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

23.15. $\vec{e}(1;\ 1;\ 1)$ векторының координаталық векторлармен жасайтын бұрыштарының косинустарын табыңдар.

23.16. Дене $M(5;\ -1;\ 2)$ орыннан $N(2;\ 1;\ 3)$ орынға түзу сызықты қозғала отырып, орын ауыстырғанда $\vec{F}(-3;\ 4;\ 7)$ күшінің орындайтын A жұмысын есептеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

23.17. Координаталық жазықтықтағы түзудің теңдеуін қайталаңдар.

23.18. Координаталық жазықтықтағы түзудің теңдеуіне ұқсас координаталық кеңістіктегі түзудің теңдеуін жазыңдар.

§ 24*. Кеңістіктегі жазықтықтың теңдеуі

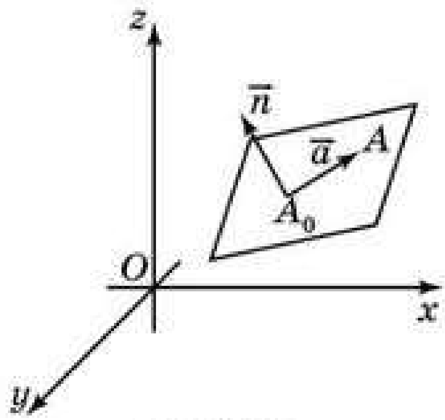
Планиметрия курсында жазықтықтағы түзу $ax+by+c=0$ теңдеуімен берілетіні дәлелденген, мұндағы a, b, c — нақты сандар және a, b сандары бір уақытта нөлге тең емес. Кеңістікте осыған ұқсас теорема орын алады.

Теорема . ***Кеңістіктегі жазықтық***

$$ax + by + cz + d = 0$$

теңдеуімен беріледі, мұндағы a, b, c, d — нақты сандар . a, b, c сандары бір уақытта нөлге тең емес және олар осы жазықтыққа перпендикуляр $\vec{n}$ векторы ның координаталары болады . $\vec{n}$ вектор ы *нормаль вектор* деп аталады.

Дәлелдеуі . $A_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{n}(a; b; c)$ векторына перпендикуляр жазықтықты қарастырайық (24.1-сурет). Жазықтықта жатқан кез келген $A(x; y; z)$ нүктесі үшін $\overline{A_0A}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ векторы $\vec{n}$ векторын а перпендикуляр болады , яғни $\vec{n} \cdot \overline{A_0A}$ скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады . Скаляр көбейтіндіні осы векторлардың координаталары арқылы жазып, берілген жазықтықты беретін келесі теңдеуді аламыз:



24.1-сурет

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

$-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$ деп белгілеп, теңдеуді түрлендіру арқылы жазықтықтың теңдеуін аламыз:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Кеңістіктегі жазықтықтардың өзара орналасуын олардың теңдеулері арқылы қарастырайық.

Кеңістіктегі екі жазықтықтың $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ нормаль векторлары коллинеар болса, онда олар параллель немесе беттеседі. Сондықтан қандай да бір t саны үшін келесі теңдік орындалады:

$$\vec{n}_2 = t \cdot \vec{n}_1.$$

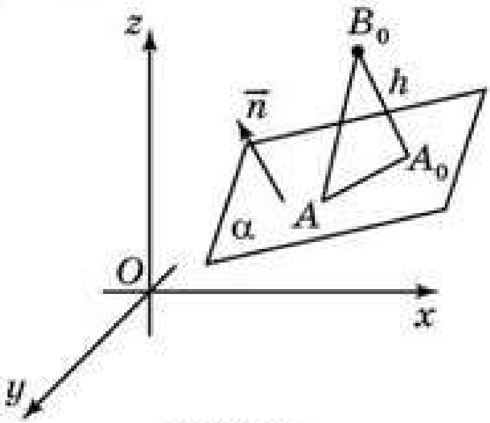
Ал

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \; a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \; (*)$$

теңдеулерімен берілген жазықтықтардың нормаль векторларының координаталары $(a_1; b_1; c_1)$, $(a_2; b_2; c_2)$ болады. Демек, қандай да бір t саны үшін $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$, $c_2 = tc_1$ теңдіктері орындалса, онда бұл жазықтықтар параллель немесе беттесетін болады.

Егер $d_2 = td_1$ болса, онда (*) теңдеулері сол бір жазықтықты анықтайды. Егер $d_2 \neq td_1$ болса, онда бұл теңдеулер параллель жазықтықтарды анықтайды. Егер жазықтықтар параллель болмаса, онда олар түзудің бойымен қиылысады және олардың арасындағы бұрышты нормаль векторлардың арасындағы бұрыш арқылы есептеуге болады.

Егер нормаль векторлар арасындағы бұрыш сүйір немесе тік болса, онда ол жазықтықтар арасындағы бұрышқа тең, ал егер нормаль векторлар арасындағы бұрыш доғал болса, онда ол 180° пен жазықтықтар арасындағы бұрыштың айырымына тең болатынын өздерің тексеріңдер.



24.2-сурет

Сонымен, жазықтықтардың арасындағы j бұрышының косинусын нормаль векторлардың скаляр көбейтіндісінің формуласы арқылы есептеуге болады:

$$\cos j = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Дербес жағдайда жазықтықтар өзара перпендикуляр болады, егер $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ векторларының скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, яғни келесі теңдік орындалса,

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

$B_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесінен $ax + by + cz + d = 0$ теңдеуімен берілген жазықтыққа дейінгі қашықтықты табуға арналған формуланы шығарайық .

B_0 нүктесінен *жазықтыққа дейінгі қашықтық* деп берілген нүктеден берілген жазықтыққа түсірілген B_0A_0 перпендикулярының ұзындығын айтамыз. $\overline{A_0B_0}$ векторы $\vec{n}(a;\ b;\ c)$ нормаль векторына коллинеар (24.2-сурет).

$A(x\,;\ y;\ z)$ — a жазықтығының қандай да бір нүктесі болсын. Сонда

$$\cos\angle AB_0A_0 = \frac{\vec{n} \cdot \overline{B_0A}}{|\vec{n}| \cdot |\overline{B_0A}|} = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot |\overline{B_0A}|}.$$

$-ax - by - cz = d$ екенін және ізделінді h қашықтығы $|\overline{B_0A}| \times$ $\times \cos\angle AB_0A_0$ тең екенін ескеріп, аламыз:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Сұрақтар

1. Кеңістіктегі жазықтық қандай теңдеумен беріледі?
2. Қандай вектор жазықтықтың нормаль векторы деп аталады?
3. Қандай жағдайда екі теңдеу кеңістіктегі параллель жазықтықтарды анықтайды?
4. Қандай жағдайда екі теңдеу кеңістіктегі бір жазықтықты анықтайды?
5. Қандай жағдайда екі теңдеу кеңістіктегі перпендикуляр жазықтықтарды анықтайды?
6. Теңдеулері берілген екі жазықтықтың арасындағы бұрышты қалай табуға болады ?

Есептер

A

24.1. Жазықтықтың нормаль векторының координаталарын табыңдар :

а) $5x - y - 1 = 0$;

ә) $3x + 18z - 6 = 0$;

б) $15x + y - 8z + 14 = 0$;
в) $x - 3y + 15z = 0$.

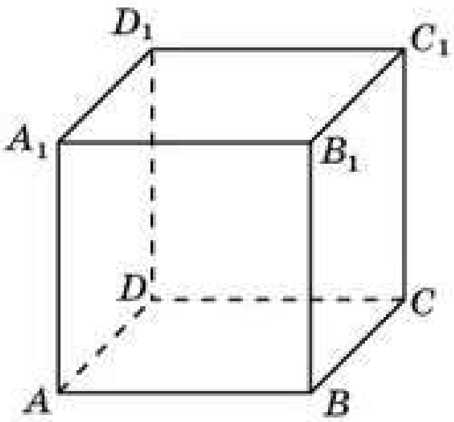
24.2. Координаталық жазықтықтың теңдеуін жазыңдар: а) Oxy; ә) Oxz; б) Oyz.

24.3. $A(3; 2; 5)$, $B(-1; -2; 2)$, $C(7; 0; -9)$ нүктелері берілген. $2x - 3y + z - 5 = 0$ жазықтығына тиісті нүктелерді анықтаңдар.

24.4. $x + 2y - 3z - 1 = 0$ жазықтығы берілген. Оның координаталар осьтерімен қиылысу нүктелерін табыңдар.

24.5. $M(-1; 2; 1)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{n}$ нормаль векторының координаталары берілген жазықтықтың теңдеуін табыңдар: а) $(0; -5; 2)$; ә) $(6; -1; 3)$; б) $(-4; -2; -1)$; в) $(-3; -8; 0)$.

24.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында D төбесі — координаталар басы, DC, DA, DD_1 қырлары сәйкесінше Ox, Oy, Oz координаталар осьтерінде жатыр (24.3-сурет). Кубтың жақтары жататын жазықтықтардың теңдеулерін жазыңдар.



24.3-сурет

B

24.7. $M(1; -2; 4)$ нүктесі арқылы өтетін және келесі координаталық жазықтыққа параллель жазықтықтың теңдеуін жазыңдар: а) Oxy; ә) Oxz; б) Oyz.

24.8. Келесі жазықтықтардың қайсысы өзара параллель екенін анықтаңдар:
а) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$;
ә) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;
б) $-7x + y + 2z = 0$, $7x - y - 2z - 5 = 0$;
в) $2x + 4y + 6z - 8 = 0$, $-x - 2y - 3z + 4 = 0$.

24.9. Келесі жазықтықтар өзара перпендикуляр бола ма:
а) $y + z + 1 = 0$ және $y - z + 1 = 0$;
ә) $2x - 5y + z + 4 = 0$ және $3x + 2y + 4z - 1 = 0$;
б) $7x - y + 9 = 0$ және $y + 2z - 3 = 0$?

24.10. Теңдеулермен берілген жазықтықтардың арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар:
а) $x + y + z + 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;
ә) $2x + 3y + 6z - 5 = 0$, $4x + 4y + 2z - 7 = 0$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$ векторының ұзындығын табыңдар.

A. 1. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

2. $A(-5; 6; -7)$ нүктесінің Oyz жазықтығындағы ортогональ проекциясының координаталарын табыңдар.

A. $(0; 6; -7)$. B. $(-5; 0; -7)$.
C. $(-5; 6; 0)$. D. $(-5; 0; 0)$.

3. $B(3; -8; -11)$ нүктесінен Oxy жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

A. -11. B. 11. C. 3. D. 8.

4. Oz осі мен $C(1; -5; 6)$ нүктесі нің арақашықтығын табыңдар.

A. 5. B. $2\sqrt{13}$. C. 6. D. $\sqrt{26}$.

5. $E(-1; 0; 4)$ және $F(2; -5; 1)$ нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

A. $5\sqrt{18}$. B. $\sqrt{51}$. C. $\sqrt{43}$. D. $\sqrt{59}$.

6. Егер $G(3; -2; 0)$ және $H(0; -12; 5)$ болса, онда GH кесіндісінің ортасының координаталарын табыңдар.

A. $(\frac{3}{2}; -5; 5)$. B. $(3; -7; -\frac{5}{2})$.
C. $(\frac{3}{2}; -7; \frac{5}{2})$. D. $(-3; 7; -\frac{5}{2})$.

7. $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z + 1 = 0$ теңдеуімен берілген сфераның центрінің координаталарын табыңдар.

A. $(1; -1; 2)$. B. $(1; 2; -1)$.
C. $(0; -1; 2)$. D. $(0; 1; -2)$.

8. Егер $I(5; -1; 2)$ және $J(3; -2; 0)$ болса, онда $\overline{IJ}$ векторының координаталарын табыңдар.

A. $(2; -1; 2)$. B. $(-2; -1; 2)$.
C. $(2; -3; 2)$. D. $(-2; -1; -2)$.

9. Егер $K(0; -1; 2)$ және $L(-3; 5; 0)$ болса, онда $\overline{KL}$ векторының ұзындығын табыңдар.

A. $\sqrt{29}$. B. 7. C. 5. D. $2\sqrt{7}$.

10*. $5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ векторының ұзындығын табыңдар:

A. 36. B. 6. C. $\sqrt{30}$. D. $2\sqrt{7}$.

11*. $\vec{a}(-5; 6; 1)$ және $\vec{b}(0; -9; 7)$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

A. –52. B. 47. C. –47. D. –56.

12*. Егер $\vec{a}(0;\ 1;\ -2)$ және $\vec{b}(2;\ 0;\ 1)$ болса, онда k-ның қандай мәнінде $2\vec{a} - k\vec{b}$ және $\vec{a} + \vec{b}$ векторлары перпендикуляр болады ?

A. 2. B. $3\frac{1}{2}$.
C. $-3\frac{1}{2}$. D. Шешімі жоқ.

13*. $M(2;\ 1;\ m)$ нүктесі $3x - y + 2z - 1 = 0$ жазықтығында жатыр. m-ді табыңдар.

A. 3. B. –3. C. 2. D. –2.

14*. $P(3;\ -2;\ -4)$ нүктесі арқылы өтетін және $4x - 5y + 2z + 11 = 0$ жазықтығына параллель болатын жазықтықтың теңдеуін табыңдар.

A. $4x - 5y + 2z - 10 = 0$. B. $8x - 10y + 4z + 22 = 0$.
C. $4x - 5y + 2z + 14 = 0$. D. $4x - 5y + 2z - 14 = 0$.

15*. Кеңістікте қандай фигура $y^2 + z^2 = 0$ теңдеуімен беріледі ?

A. Oyz жазықтығы. B. Ox осі.
C. Oy және Oz осьтері. D. Oxy және Oxz жазықтықтары.

10-СЫНЫПТЫҢ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Түзулердің арасындағы бұрыш

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB және CB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB және DA_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BA_1 және CB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BA_1 және B_1D_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BA_1 және AC түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BA_1 және AD_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AC және BD_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AC және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BC_1 және CA_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BC_1 және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының CA_1 және DC_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BD_1 және DC_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BA_1 және AC_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BA_1 және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AD_1 және CA_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AD_1 және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының A_1C_1 және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының A_1C_1 және BD_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

19. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің AB және CD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

20. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің AC және BD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

21. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің E және F нүктелері — сәйкесінше BC және BD қырларының орталары. AB және EF түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

22. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің E және F нүктелері — сәйкесінше BD және CD қырларының орталары. AD және EF түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

23. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің E, F, G нүктелері — сәйкесінше BC, BD, AD қырларының орталары. EFG бұрышын табыңдар.

24. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің E, F, G нүктелері — сәйкесінше AB, AD, CD қырларының орталары. EFG бұрышын табыңдар.

25. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. D нүктесі — BC қырының ортасы BB_1 және AD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

26. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. D нүктесі — BC қырының ортасы. A_1C_1 және AD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

27. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. D нүктесі — BC қырының ортасы. B_1C_1 және AD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

28. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. D нүктесі — BC қырының ортасы. CB_1 және AD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

29. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AC_1B бұрышының косинусын табыңдар.

30. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. SB және AC түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

31. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E, F нүктелері — сәйкесінше AB, BC қырларының орталары. SA және EF түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

32. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — SC қырының ортасы. AD және BE түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ABD_1 бұрышын табыңдар.

34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ABE_1 бұрышының тангенсін табыңдар.

35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AC және B_1F_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AC және B_1D_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

37. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB және CF_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ACD_1 бұрышын табыңдар.

39. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AC_1D_1 бұрышын табыңдар.

40. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. CC_1 және BE_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

41. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BF_1 және CC_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

42. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және B_1E түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

43. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AC және DF_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

44. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SA және BC түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

45. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. G нүктесі — SD қырының ортасы. AG және BC түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

46. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SA және BF түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

47. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SA және CE түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

48. Октаэдрдің айқас қырларының арасындағы бұрышты табыңдар.

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AC түзуі мен BCD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BD түзуі мен BCD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының DA_1 түзуі мен BCD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар .
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AD_1 түзуі мен BCD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының A_1C_1 түзуі мен BCD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар .
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BC_1 түзуі мен BCD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB_1 түзуі мен ABC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AC түзуі мен ABC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB_1 түзуі мен BDD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BC_1 түзуі мен BDD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының CA_1 түзуі мен AB_1D_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BD_1 түзуі мен ACB_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
13. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — AD қырының ортасы. AD түзуі мен BCE жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
14. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — AD қырының ортасы. AB түзуі мен BCE жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
15. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. SA түзуі мен SBD жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
16. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. AB түзуі мен SBD жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
17. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. SH — биіктігі. SH түзуі мен SBC жазықтығының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BE_1 түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар .

19. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BD_1 түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

20. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

21. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AF түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

22. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BF түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

23. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BE түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BD түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. FB_1 түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB түзуі мен BDD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 түзуі мен BDD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. FB түзуі мен BDD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AF түзуі мен BDD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB түзуі мен BEE_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AD түзуі мен BEE_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 түзуі мен BCE_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BF түзуі мен BCE_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. CC_1 түзуі мен BDE_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB түзуі мен BDE_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

Жазықтықтардың арасындағы бұрыш

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы ABC_1 және BCC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы CDD_1 және BCD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубындағы AB_1C_1 және BCD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
4. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінде E нүктесі — AD қырының ортасы. ACD және BCE жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
5. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — SC қырының ортасы. ABC және BDE жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
6. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың SAD және SBE жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
7. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың AFF_1 және ACC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
8. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың ABB_1 және AEE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар .
9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың ACC_1 және AEE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың AFF_1 және BCC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың AFF_1 және DEE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың AFF_1 және BDD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ABC және BDE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың ACC_1 және BFF_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың ADD_1 және BFF_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. ABC және BCE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BCE_1 және BCC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен AC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен AB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен CB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен A_1D_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен C_1D_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен DD_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен A_1C_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен DA_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен DC_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
10. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
11. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

12. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен A_1C_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

13. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CD түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

14. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. S нүктесінен BC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

15. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен SA түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

16. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен SC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

17. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

18. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен SD түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

19. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. S нүктесінен AC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

20. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. S нүктесінен AB түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

21. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен AF түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

22. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. B нүктесінен EF түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

23. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AF түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен FE түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DE түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен EE_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен E_1F_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен D_1E_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AE түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CE түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DF түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AD түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CF түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
37. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AE_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CE_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен ACC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен AB_1C_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B нүктесінен CDA_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
4. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінің E нүктесі — CD қырының ортасы. D нүктесінен ABE жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
5. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен ACC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
6. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. S нүктесінен ABC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
7. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен SAC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
8. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. E нүктесі — SB қырының ортасы. B нүктесінен ACE жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DEE_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен EFF_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CDD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AFF_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CFF_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен ADD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен ACC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен DFF_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен AED_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. B нүктесінен CEF_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

Түзулердің арақашықтығы

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және CD_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және DC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және A_1C_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және B_1D_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және C_1D_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және CB_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB және DA_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BA_1 және DC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
9. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1-ге, бүйір қырлары 2-ге тең. BC және EF түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
10. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. AB және B_1C_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
11. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC және A_1C_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC және C_1D_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC және D_1E_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC және E_1F_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC және A_1F_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC және A_1B_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC және EF түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және DD_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

19. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BB_1 және EE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

20. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BA_1 және DE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

21. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1-ге тең. BC_1 және FE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

ПӘНДІК АТАУ КӨРСЕТКІШТЕРІ

ЖАУАПТАРЫ

7—9-СЫНЫПТАРДАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

2. а) 3; ә) 6; б) 10; в)* $\frac{n(n-1)}{2}$. **3**. 8,5 см. **4**. $2n$. **5**. 126°. **6**. 45°. **7**. 120° және 60°. **8**. 120°. **9**. а) 36°; ә) 30°. **10**. а) 120°; ә) 60°; б) 300°. **11**. 75°. **14**. 12 см, 18 см және 24 см. **16**. а) 3,2 м, 6,2 м, 6,2 м; ә) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **18**. 100°. **19**. 30°. **20**. 69°. **21**. 7,5 см. **22**. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **23**. 7,5 см және 12 см. **25**. 20. **28**. а) 2; ә) 3; б) 4; в) $n-2$. **29**. а) 2; ә) 5; б) 9. **30**. а) 360°; ә) 540°; б) 720°; в) 900°; г) 1080°. **31**. 7. **32**. а) 90°; ә) 72°; б) 60°; в) 45°. **33**. 60°, 60°, 120°, 120°. **34**. а) 40°, 40°, 140°, 140°; ә) 50°, 50°, 130°, 130°; б) 80°, 80°, 100°, 100°. **35**. а) 11 см және 13 см; ә) 9 см және 15 см; б) 8 см және 16 см. **36**. 60 см және 80 см. **37**. 25° және 65°. **38**. 10 см. **39**. 13 см. **42**. 70° және 110°. **43**. 21 см. **44**. 2 см және 5 см. **45**. $\sin A = 0{,}8$; $\cos A = 0{,}6$; $\operatorname{tg} A = 1\frac{1}{3}$; $\operatorname{ctg} A = 0{,}75$. **46**. 1. **47**. $\sqrt{3}$. **48**. а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; ә) 0,8. **49**. а) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; ә) 2,4. **50**. а) 2; ә) 0,5. **51**. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **52**. а) $-\frac{1}{2}$; ә) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **53**. а) 90°-тан кіші; ә) 90°-қа тең; б) 90°-тан үлкен. **54**. $4\sqrt{7}$. **55**. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **56**. $\cos A = \frac{7}{8}$, $\cos B = \frac{11}{16}$, $\cos C = -\frac{1}{4}$. **57**. 48. **58**. $\frac{a^2}{2}$. **59**. 0,5. **60**. а) 40 см^2; ә) $40\sqrt{2}$ см^2; б) $40\sqrt{3}$ см^2. **61**. 8 см және 4 см. **62**. 12. **63**. 6. **64**. 6 см^2. **65**. 6. **66**. 10 см. **67**. 20 см. **68**. 14 см. **69**. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. **70**. 12. **71**. а) 1; ә) 1; б) 2; в) 2. **72**. а) $\overline{AC}$; ә) $\overline{AD}$; б) $\overline{AB}$. **73**. а) 5; ә) 3; б) 4; в) 6. **74**. а) 10; ә) 10; б) 10; в) 5. **75**. а) 1; ә) 1; б) 0. **76**. а) 2,5; ә) 1,5. **77**. а) 120°; ә) 120°; б) 120°; в) 60°; г) 90°; ғ) 150°. **78**. а) 0; ә) 64; б) 0; в) 36. **79**. а) (2; 3); ә) (3; –1); б) (1; 1). **80**. $B(6;\ 8)$. **81**. (5; 4). **82**. а) $\sqrt{5}$; ә) 5. **83**. а) 2; ә) 3. **84**. Нүктелер координаталар басынан бірдей қашықтықта жатыр. **85**. (–5; 2), 4; ә) (0; 3), 3. **86**. а) $x^2 + y^2 = 1$; ә) $(x+2)^2 + (x-1)^2 = 9$. **87.** $x^2 + y^2 = 18$. **88**. а) 4, (4; 0); ә) $\sqrt{6}$, (–1; 3). **89**. –4. **90**. а), ә) 90°. **91**. $x - y - 1 = 0$. **92**. $x - 2y + 7 = 0$, $\vec{n}(1;\ -2)$. **93**. а) 1, 3; ә) 2, 4. **94**. а) (–1; –2); ә) (7; 3). **95**. (–7; 14). **96**. 0. **97**. 0,96.

I тарау. СТЕРЕОМЕТРИЯ АКСИОМАЛАРЫ. КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

§ 1

3. AB, AC, BC. **4.** ABC, ABD, ACD, BCD. **5.** а) A; ә) D. **6.** а) AB; ә) BC; б) AC. **7.** а) 3; ә) 6; б) 10. **8.** 4.

§ 2

1. Шексіз көп. **2.** Шексіз көп. **3.** Егер үш нүкте бір түзудің бойында жатса, онда сол нүктелер арқылы шексіз көп жазықтықтар жүргізуге болады; егер үш нүкте бір түзудің бойында жатпайтын болса, онда сол нүктелер арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады. **4.** Жоқ, бұл жағдайда нүктелер бір жазықтыққа тиісті болар еді. **5.** а), ә) жоқ. **6.** Жоқ. **7.** b, g, p. **8.** Жоқ. **9.** Жоқ. **10.** Түзу. **11.** 4.

§ 3

1. а) Т = 4, Қ = 6, Ж = 4; ә) Т = 8, Қ = 12, Ж = 6; б) Т = 8, Қ = 12, Ж = 6. **2.** AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. **3.** ABC, ABB_1, CDD_1, $A_1B_1C_1$. **8.** а) 0; ә) 4; б) 4. **9.** б), г), д). **12.** ABC, BCD_1, ABB_1, BDD_1, CDD_1, ACC_1, $A_1B_1C_1$, AB_1C_1, ABC_1, CDA_1.

§ 4

1. а) Т = $2n$, Қ = $3n$, Ж = $n + 2$; ә) Т = $n + 1$, Қ = $2n$, Ж = $n + 1$. **4.** а) Жоқ; ә) иә. **5.** а) Онбұрыш; ә) бесбұрыш. **6.** а) Бесбұрышты; ә), в) алтыбұрышты. **7.** а) Жоқ; ә) иә. **8.** а) 16-бұрыш; ә) 14-бұрыш. **9.** а), ә) 9-бұрышты; б) 7-бұрышты. **10.** ABC және SAB, ABC және SBC, ABC және SCD, ABC және SAD, SAB және SBC, SAB және SAD, SAB

және SCD, SBC және SCD, SBC және SAD, SAD және SCD. **11.** а) Төртбұрышты; ә), б), в) үшбұрышты. **12.** а) – төртбұрышты; б) – үшбұрышты пирамида. **13.** Бесбұрышты пирамида. **17.** а) 0; ә) $n(n-3)$.

Өзіңді тексер!

Сұрақ нөмірі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Дұрыс нұсқа	D)	D)	B)	B)	C)	D)	D)	B)	A)	B)	D)	C)	C)	C)	D)

§ 5

1. Жоқ. **2.** Жоқ. **3.** а) CD, A_1B_1, C_1D_1; ә) BB_1, CC_1, DD_1. **4.** Жоқ. **5.** AB және A_1B_1, AC және A_1C_1, BC және B_1C_1, AA_1 және BB_1, AA_1 және CC_1, BB_1 және CC_1. **6.** Жоқ. **7.** Жоқ. **8.** а) AB және CD, AD және BC; ә) AB және DE, BC және EF, AF және CD. **9.** а), ә) Жоқ. **10.** а), ә) Жоқ. **12.** а) A_1B_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1, FF_1; ә) DE, D_1E_1.

§ 6

1. Жоқ. **2.** Шексіз көп. **3.** а) CC_1, DD_1, A_1D_1, B_1C_1; ә) CC_1, A_1C_1, B_1C_1. **4.** а) BC, CD; ә) BC, CD, DE, EF. **5.** а) BC, CD, DE, EF, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1; ә) CC_1, DD_1, EE_1, FF_1, B_1C_1, C_1D_1, E_1F_1, F_1A_1. **6.** 3. **7.** Жоқ. **8.** Айқас болады. **9.** Жоқ. **10.** 8. **11.** Айқас болады. **12.** Айқас болады. **13.** Жоқ. **14.** Жоқ.

§ 7

1. A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1. **2.** а) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$; ә) BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1, EFF_1E_1. **3.** Жоқ. **4.** Иә. **5.** Жоқ. **6.** AB және SCD, BC және SAD, CD және SAB, AD және SBC. **7.** AB және SDE, BC және SEF, CD және SAF, DE және SAB, EF және SBC, AF және SCD. **9.** AB, BC, DE және EF түзулері жазықтықпен қиылысады, CD түзуі жазықтыққа параллель болады.

§ 8

1. ABC және $A_1B_1C_1$, BCC_1 және ADD_1, CDD_1 және ABB_1. **2.** ABC және $A_1B_1C_1$, ABB_1 және DEE_1, BCC_1 және EFF_1, CDD_1 және AFF_1. **3.** Жоқ. **4.** Жоқ. **7.** Жоқ. **8.** Жоқ. **9.** BD_1. **10.** BO_1.

Өзіңді тексер!

Сұрақ нөмірі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Дұрыс нұсқа	C)	C)	A)	A)	C)	D)	B)	A)	C)	D)	C)	D)	A)	A)	B)

II тарау. КЕҢІСТІКТЕГІ БҰРЫШ. КЕҢІСТІКТЕГІ АРАҚАШЫҚТЫҚ

§ 9

1. Шексіз көп. **2.** Шексіз көп. **3.** Жоқ. **4.** AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, AD, BC, A_1D_1, B_1C_1. **5.** AB, BC, AC, A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1. **6.** а), ә) 90°; б) 60°. **7.** а) 90°; ә) 60°. **8.** а) 60°; ә) 90°. **9.** 30°. **10.** 60°. **11.** а), ә) 45°; б) 60°; в) 60°; г) 30°; ғ) 60°; д) 90°. **12.** а) $\frac{1}{4}$; ә) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

§ 10

1. а) 1; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sqrt{2}$. **2.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** а) 1; ә) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** а) 1; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sqrt{3}$; г) $\sqrt{3}$; ғ) 1; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\frac{1}{2}$; ж) $\frac{3}{2}$; з) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; и) 1. **6.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

§ 11

1. Жоқ. **2.** Перпендикуляр. **3.** а) Жоқ; ә) иә. **4.** Иә. **6.** Жоқ. **7.** Түзулер перпендикуляр. **8.** Тікбұрышты.

§ 12

1. $5\sqrt{2}$. **2.** а) 1; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** а) 1; ә) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sqrt{3}$; ғ) $\frac{3}{2}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** а) 2; ә) $\sqrt{5}$. **6.** а) 1; ә) $\sqrt{3}$. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** а) 3; ә) $\sqrt{6}$; б) 3; в) $\sqrt{6}$; г) $2\sqrt{3}$. **9.** а) $\sqrt{5}$; ә) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5}$. **10.** 5. **12.** $\sqrt{3}$.

§ 13

1. а), ә) 1. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) 1; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ғ) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{3}{2}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.** а) 2; ә) 2; б) 1; в) 1. **5.** а), ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** а) $\sqrt{3}$; ә) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 1.

§ 14

1. а) 1; ә) $\sqrt{2}$; б), в), г), ғ) 1; д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) 1. **2.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) 1. **3.** а), ә) 1; б) $\sqrt{3}$; в) 2. **4.** а) $\sqrt{5}$; ә), б) $2\sqrt{2}$; в) $\sqrt{5}$. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **7.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә), б), в) $\sqrt{3}$; г) 1. **8.** а) $\sqrt{5}$; ә) $\sqrt{2}$; б), в), г) 2.

§ 15

1. 12 см. **2.** 12 см. **3.** 2 см. **4.** 5 м. **5.** 10 м. **6.** 9 см. **7.** $A'B' = 4$, $B'C' = 8$. **14.** Берілген нүктелерді қосатын кесіндінің ортасынан өтетін және осы кесіндіге перпендикуляр болатын жазықтық.

§ 16

1. а), ә) 45°; б) 90°. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** 45°. **4.** а) 45°; ә) 60°. **5.** 60°. **6.** а) 45°; ә) 30°; б) 45°. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **8.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **10.** а) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; ә) $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

§ 17

1. 90°. **3.** 45°. **4.** 60°. **5.** 120°. **6.** Жоқ. **7.** Шексіз көп. **8.** а), ә) $\sqrt{2}$. **9.** $\frac{1}{3}$. **10.** а) 60°; ә) 90°; б) 30°; в) 60°; г) 45°; ғ) 60°. **12.** $\sqrt{2}$. **13.** 2. **14.** 1,2; ≈ 50°. **15.** $\frac{1}{3}$.

Өзіңді тексер!

Сұрақ нөмірі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Дұрыс жауап	D)	B)	D)	C)	C)	B)	C)	A)	D)	C)	A)	B)	A)	A)	A)

III тарау. КЕҢІСТІКТЕГІ ТІКБҰРЫШТЫ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕСІ ЖӘНЕ ВЕКТОРЛАР

§ 18

1. $\overline{DC}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{D_1C_1}$. **2.** $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$. **3.** а) $\overline{A_1B_1}$, $\overline{ED}$, $\overline{E_1D_1}$; ә) $\overline{A_1C_1}$, $\overline{FD}$, $\overline{F_1D_1}$; б) $\overline{A_1D_1}$; в) $\overline{ED_1}$; г) $\overline{FD_1}$. **4.** а) 1; ә) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$. **5.** а) 1; ә) $\sqrt{3}$; б) 2; в) $\sqrt{2}$; г) 2; ғ) $\sqrt{5}$. **6.** а) $\overline{AB_1}$; ә) $\overline{AC}$; б) $\overline{AC_1}$; в) $\overline{AA_1}$; г) $\overline{AC_1}$. **7.** а) 6; ә) 8; б) 12. **8.** а) $\overline{AC}$; ә) $\overline{FB}$; б) $\overline{AC_1}$; в) $\overline{AF_1}$. **9.** 2. **10.** а) $\sqrt{2}$; ә) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$; в) 1; г) $\sqrt{3}$. **11.** а) $\sqrt{3}$; ә) $\sqrt{3}$; б) 2; в) $\sqrt{2}$. **12.** Егер векторлар бірдей бағытталған болса. **13.** а) $\overline{A_1B}$; ә) $\overline{A_1C}$; б) $\overline{DB}$; в) $\overline{AC_1}$. **14.** а) $\sqrt{2}$; ә) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}$.

§ 19

1. $\overline{BA}$, $\overline{DC}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{D_1C_1}$, $\overline{CD}$, $\overline{B_1A_1}$, $\overline{C_1D_1}$. **2.** $\overline{A_1A}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{B_1B}$, $\overline{C_1C}$. **3.** $\overline{B_1A}$, $\overline{ED_1}$, $\overline{D_1E}$. **4.** Иә. **5.** Жоқ. **6.** а) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{A_1C_1}$; ә) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AA_1}$. **7.** а) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{B_1C_1}$;

ә) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA_1}$. **8.** а) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}$; ә) $\overrightarrow{BD_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$. **9.** а) $\overrightarrow{AD_1} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AA_1}$; ә) $\overrightarrow{AC_1} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AA_1}$.

§ 20

1. а) Плюс; ә) минус. **2.** а), ә) 90°; б) 60°. **3.** а) 90°; ә) 120°. **4.** а) 60°; ә) 60°. **5.** а) 60°; ә) 120°. **6.** а), ә) 45°; б) 60°; в) 120°; г) 30°; ғ) 60°; д) 90°. **7.** а), ә) 0; б) 1. **8.** а) 0; ә) $\frac{1}{2}$. **9.** а) $\frac{1}{2}$; ә) 0. **10.** а) 2; ә) –1. **11.** а), ә) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; ғ) $1\frac{1}{2}$; д) 0. **12.** а) $\frac{1}{2}$; ә) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $-\frac{1}{4}$; ғ) 0. **14.** 1.

§ 21

2. а) (1; 3; 0) және (5; –6; 0); ә) (1; 0; 4) және (5; 0; 2); б) (0; 3; 4) және (0; –6; 2). **3.** $A(0; 1; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $A_1(0; 1; 1)$, $B_1(1; 1; 1)$, $C_1(1; 0; 1)$, $D_1(0; 0; 1)$. **4.** а) (0; 1; 2); ә) (3; 1; 1). **5.** $A(-1; 1; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(1; -1; 0)$, $D(-1; -1; 0)$, $A_1(-1; 1; 2)$, $B_1(1; 1; 2)$, $C_1(1; -1; 2)$, $D_1(-1; -1; 2)$. **6.** $A(0; 2; 0)$, $B(2; 2; 0)$, $C(2; 0; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $A_1(1; 2; 1)$, $B_1(2; 2; 1)$, $C_1(2; 0; 1)$, $D_1(1; 0; 1)$, $A_2(0; 2; 2)$, $B_2(1; 2; 2)$, $C_2(1; 0; 2)$, $D_2(0; 0; 2)$. **7.** $A(0; \frac{1}{2}; 0)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0)$, $C(0; -\frac{1}{2}; 0)$, $A_1(0; \frac{1}{2}; 1)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 1)$, $C_1(0; -\frac{1}{2}; 1)$. **8.** $A(0; \sqrt{3}; 0)$, $B(1; \sqrt{3}; 0)$, $C(1{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $D(1; 0; 0)$, $E(0; 0; 0)$, $F(-0{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $A_1(0; \sqrt{3}; 1)$, $B_1(1; \sqrt{3}; 1)$, $C_1(1{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$, $D_1(1; 0; 1)$, $E_1(0; 0; 1)$, $F_1(-0{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$. **9.** $A(-0{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $B(0{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $D(0{,}5; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $E(-0{,}5; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $F(-1; 0; 0)$, $S(0; 0; \sqrt{3})$. **10.** а) Oyz жазықтығы; ә) Oxz жазықтығы; б) Oxy жазықтығы; в) Oz осі; г) Oy осі; ғ) Ox осі; д) координаталар басы. **11.** а) 3; ә) 2; б) 1. **12.** $C(0; -1; 0)$, $D(-1; 0; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $F(0; 0; -1)$.

§ 22

1. а) 5; ә) 3. **2.** A. **3.** а) 3; ә) 5. **4.** а) $C(2; -5; 0)$, $R = 3$; ә) $C(0; 6; -1)$, $R = 2$. **5.** а) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; ә) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. **6.** Теңқабырғалы. **7.** а) $\sqrt{13}$; ә) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt{5}$. **8.** а) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$; ә) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$; б) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$.

§ 23

1. а)(–2; 6; 1); ә) (1; 0; 2); б) (0; –3; 1); в) (5; 0; –4). **2.** а) (–7; 5; –10); ә) (5; –8; –4); б) (8; 1; 9). **3.** $(-a; -b; -c)$. **4.** $x_2 = tx_1$, $y_2 = ty_1$, $z_2 = tz_1$. **5.** а) (4; 3; 0); ә) (0; 3; 2); б) (4; 0; 2); в) (4; 3; 2); г) (4; 0; 0); ғ) (4; –3; 0); д) (4; 0; 2); е) (0; –3; 2); ж) (4; –3; 2). **6.** а) (1; –2; 7); ә) (1; 2; –1). **7.** (3; –4; –5). **8.** а) $\sqrt{6}$; ә) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt{5}$. **9.** 8. **10.** а) (1; 0; 23); ә) (7; –11; 7). **11.** а) Вектордың координатасы $(0; 0; z)$; ә) вектордың координатасы $(x; 0; 0)$. **12.** $(\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}; -\sqrt{3})$. **13.** а) 5; ә) $\sqrt{13}$; б) $2\sqrt{5}$; в) $\sqrt{29}$; г) 4; ғ) 5; д) $2\sqrt{5}$; е) $\sqrt{13}$; ж) $\sqrt{29}$. **14.** $\frac{1}{3}$. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **16.** 24.

§ 24*

1. а) (5; –1; 0); ә) (3; 0; 18); б) (15; 1; –8), в) (1; –3; 15). **2.** а) $z = 0$; ә) $y = 0$; б) $x = 0$. **3.** A және C. **4.** (1; 0; 0), $(0; \frac{1}{2}; 0)$, $(0; 0; -\frac{1}{3})$. **5.** а) $-5y + 2z + 8 = 0$; ә) $6x - y + 3z + 5 = 0$; б) $-4x - 2y - z + 1 = 0$; в) $-3x - 8y + 13 = 0$. **6.** $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$. **7.** а) $z = 4$; ә) $y = -2$; б) $x = 1$. **8.** а), ә), б). **9.** а), ә) Иә; б) жоқ. **10.** а) $\frac{1}{3}$; ә) $\frac{16}{21}$.

Өзіңді тексер!

Сұрақ нөмірі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Дұрыс нұсқа	D)	C)	B)	D)	C)	C)	C)	D)	B)	C)	C)	A)	D)	D)	B)

10-СЫНЫПТЫҢ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Түзулердің арасындағы бұрыш

1. 90°. **2.** 90°. **3.** 60°. **4.** 60°. **5.** 60°. **6.** 60°. **7.** 90°. **8.** 90°. **9.** 90°. **10.** 90°. **11.** 90°. **12.** 90°. **13.** 90°. **14.** 90°. **15.** 90°. **16.** 90°. **17.** 90°. **18.** 90°. **19.** 90°. **20.** 90°. **21.** 90°. **22.** 90°. **23.** 90°. **24.** 90°. **25.** 90°. **26.** 30°. **27.** 90°. **28.** 90°. **29.** 0,75. **30.** 90°. **31.** 45°. **32.** 30°. **33.** 90°. **34.** 2. **35.** 60°. **36.** 60°. **37.** 0,5. **38.** 90°. **39.** 90°. **40.** 2. **41.** 60°. **42.** 90°. **43.** 30°. **44.** 60°. **45.** 30°. **46.** 90°. **47.** 90°. **48.** 60°.

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

1. 30°. **2.** 30°. **3.** 30°. **4.** 30°. **5.** 30°. **6.** 30°. **7.** 30°. **8.** 30°. **9.** 30°. **10.** 30°. **11.** 90°. **12.** 90°. **13.** 90°. **14.** 30°. **15.** 45°. **16.** 45°. **17.** 0,5. **18.** 0,5. **19.** 30°. **20.** 60°. **21.** 60°. **22.** 90°. **23.** 60°. **24.** 30°. **25.** 60°. **26.** 90°. **27.** 45°. **28.** 60°. **29.** 30°. **30.** 60°. **31.** 60°. **32.** 60°. **33.** 30°. **34.** 45°. **35.** 45°.

Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

1. 90°. **2.** 90°. **3.** 90°. **4.** 90°. **5.** 45°. **6.** 60°. **7.** 90°. **8.** 90°. **9.** 60°. **10.** 60°. **11.** 60°. **12.** 30°. **13.** 45°. **14.** 60°. **15.** 90°. **16.** 30°. **17.** 60°.

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** $\sqrt{2}$. **5.** $\sqrt{2}$. **6.** $\sqrt{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **8.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **11.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **16.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **17.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **18.** 1. **19.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **20.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$. **21.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **22.** $\sqrt{3}$. **23.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **24.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **25.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **26.** $\sqrt{3}$. **27.** $\sqrt{3}$. **28.** 2. **29.** 2. **30.** 2. **31.** 1. **32.** 1. **33.** 0,5. **34.** 1,5. **35.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **36.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **37.** 1. **38.** 1.

Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** 0,5. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** 0,5. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** $\sqrt{3}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **15.** 0,5. **16.** 1,5. **17.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **18.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Түзулердің арақашықтығы

1. 1. **2.** 1. **3.** 1. **4.** 1. **5.** $\sqrt{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** 1. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** 1. **11.** 1. **12.** 1. **13.** 1. **14.** 2. **15.** 1. **16.** 1. **17.** $\sqrt{3}$. **18.** $\sqrt{3}$. **19.** 2. **20.** $\sqrt{3}$. **21.** $\sqrt{3}$.

МАЗМҰНЫ

Учебное издание

Смирнов Владимир Алексеевич
Туяков Есенкельды Алыбаевич

ÀÀÏÀÓÐÈß

Учебник для 10 классов общественно-гуманитарного направления общеобразовательных школ

Редакторы *Ж. Өміржанова*
Көркемдеуші редакторы *Л. Уралбаеâà*
Техникалық редакторы *Л. Садықова*
Корректоры *С. Дәуірхан*
Компьютерде беттеген *Б. Нөкер*

Баспаға Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің № 0000001 мемлекеттік лицензиясы 2003 жылы 7 шілдеде берілген

ИБ № 5855

Басуға 21.05.19 қол қойылды. Пішімі $70 \times 100\ ^{1}/_{16}$. Офсеттік қағаз. Қаріп түрі "SchoolBook Kza". Офсеттік басылыс. Шартты баспа табағы 11,61 + 0,32 қосарбет. Шартты боялы беттанбасы 24,51. Есептік баспа табағы 6,96 + 0,54 қосарбет. Таралымы 60 000 дана. Тапсырыс №

"Мектеп" баспасы, 050009, Алматы қаласы, Абай даңғылы, 143
Факс: 8(727) 394-42-30, 394-37-58
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz