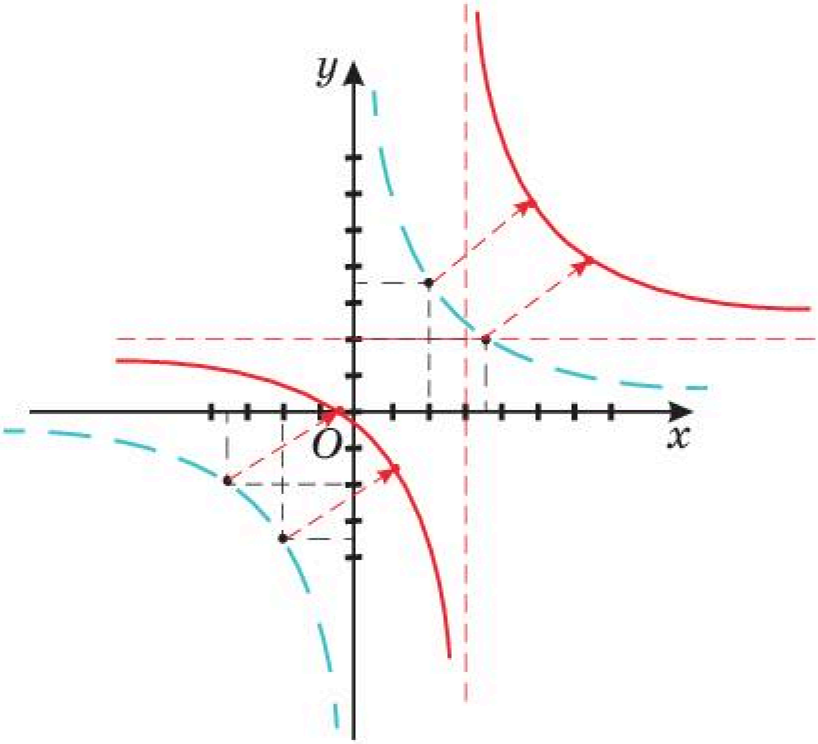


АЛГЕБРА

и начала анализа

Часть 1

Учебник для учащихся 10 класса общеобразовательной школы общественно-гуманитарного направления

Рекомендовано Министерством образования и науки Республики Казахстан

О. В. Пак
Д. Ардақұлы
Е. В. Ескендирова

АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ
2019

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72
П 13

Данный учебник рассчитан как на работу в классе, так и на самостоятельное изучение материала. Теоретический материал учебника содержит примеры и упражнения. Решение примеров можно рассматривать сразу при первом чтении. Упражнения предназначены для самостоятельного решения. Цель упражнений: либо подготовить учащихся к более эффективному восприятию новой темы, либо закрепить полученные навыки. В любом случае требуется сначала попытаться справиться с упражнениями самостоятельно, и только затем обращаться к их решениям, которые обычно расположены ниже по тексту. Курсивом даны авторские ремарки, поясняющие основной текст.

Задачи на закрепление навыков расположены в конце каждого теоретического раздела и разделены на две части. Часть 1 предназначена для работы в классе. Часть 2 содержит задания, аналогичные по своему идейному содержанию заданиям из Части 1, и предназначена для домашней работы. Кроме того, в Части 2 содержатся задачи на развитие критического и логического мышления (выделены фиолетовым цветом), задания на развитие функциональной грамотности (желтым) и примеры на повторение (зеленым). Все задания в учебнике классифицированы по уровням сложности от 1 до 6. Уровень сложности дан в скобках сразу после номера задания.

Пак О. В.
П 13 **Алгебра и начала анализа:** Учебник для учащихся 10 класса общеобразовательной школы общественно-гуманитарного направления. Ч 1. / О. В. Пак, Д. Ардақұлы, Е. В. Ескендирова. – Алматы: АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ, 2019. – 240 с., ил.

ISBN 978-601-01-3958-9 общ.
Часть 1 – 240 с., ил.
ISBN 978-601-01-3801-8

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72

ISBN 978-601-01-3801-8 – (часть 1)
ISBN 978-601-01-3958-9 общ.

Дорогие десятиклассники!

Великий английский философ и математик Бертран Рассел говорил: «Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой – красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим произведениям искусства».

Вместе с учебником, который вы держите сейчас в руках, вам предстоит сделать еще один шаг в постижении самой древней и великой науки. Новый для вас курс называется «Алгебра и начала анализа». В нем на более строгом уровне рассматриваются понятие функции, ее свойства, производная функции, а также некоторые вопросы теории вероятности. Мы с вами поймем, каким образом функции описывают окружающий нас мир.

Зачем нужна математика? Бытовая техника, которой мы пользуемся, силовые агрегаты, имеющие колоссальную мощность, дома, в которых мы живем, самолеты в небе и корабли в море, сотовый телефон в твоей руке, торты, которые печет твоя мама – ни одно творение рук человеческих не обходится без математических расчетов в той или иной степени. Практически все современные науки используют математику в своих теоретических или практических исследованиях.

Зачем нужна математика лично вам? Давайте будем откровенными друг с другом: мало кому из вас после окончания школы или вуза понадобится умение, например, упрощать тригонометрические выражения. Но вы не можете не согласиться с тем, что умение думать, рассуждать, сопоставлять факты друг с другом и делать логические выводы, имеющие практическую пользу – очень нужные в жизни качества. Сообразительность, смекалка, изобретательность помогают человеку справиться с любыми проблемами и стать успешной личностью. Умения понимать другого человека и правильно выражать свою мысль необходимы для эффективного общения людей друг с другом. Именно занятия математикой развивают в человеке все эти качества.

Кроме того, какую бы специальность в жизни вы не выбрали, вам придется иметь дело с числами. А еще мы надеемся, что среди вас найдутся те, кто будут заниматься математикой профессионально.

Учебник рассчитан на сознательных учащихся. Теоретическая часть каждого параграфа содержит не только примеры, но и упражнения. Самостоятельная работа над упражнениями необходима для глубокого понимания нового материала.

Успехов в работе!

С уважением, авторы

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 3
Тригонометрические уравнения и неравенства

ГЛАВА 4
Вероятность

ПОВТОРЕНИЕ

Не зная математики, нельзя знать ни прочих наук, ни мирских дел. И что ещё хуже, люди, в ней не сведущие, не ощущают собственного невежества, а потому не ищут от него лекарства. И напротив того, знакомство с этой наукой подготовляет душу и возвышает ее ко всякому прочному знанию, так что, если кто познал источники мудрости, касающиеся математики, и правильно применил их к познанию прочих наук и дел, тот сможет без ошибок и без сомнений, легко и по мере сил постичь и все последующие науки.

Роджер Бэкон

Серия 1

1. Выполните преобразование $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$.
2. Решите дробно-рациональное уравнение $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{10}{3}$.
3. Решите систему линейных уравнений $\begin{cases}3x+5y=8,\\-3x+y=-2.\end{cases}$
4. Упростите выражение $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)}$.
5. Постройте график функции $y=x^2+4x-20$.
6. Решите рациональное неравенство $x^3-25x\le 0$.
7. Решите уравнение $x^2+\frac{16}{x^2}-5x+\frac{20}{x}=2$.
8. Айдар положил деньги на депозит банка. Банк обеспечивает 10%-й рост депозита в год при условии, что клиент не снимает в течение года никакую сумму. В течение 4-х лет Айдар не снимал и не вкладывал деньги. Его депозит увеличился в k раз. Какое из следующих чисел ближе всего к k: а) 1,4641; б) 1,331; в) 0,14641; г) 4,4?

Серия 2

1. Выполните действия $\left(\frac{b}{a^2-ab}-\frac{1}{a-b}\right):\left(\frac{a+b}{a^2-ab}-\frac{b}{ab-b^2}\right)$.
2. Решите уравнение $x^6-9x^3+8=0$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases}x-y=1,\\x^3-y^3=7.\end{cases}$

4. Найдите область определения функции $y=\sqrt{x^2-x-72}$.
5. Постройте график функции $y=2x^3-5$.
6. Решите дробно-рациональное неравенство методом интервалов: $\frac{x^2-7x+12}{2x^2+4x+5}>0$.
7. Упростите выражение $\frac{\text{ctg}\,\alpha}{\text{ctg}\,\beta}$, если $\sin(\alpha+\beta)=9\sin(\alpha-\beta)$.
8. Стоимость электроэнергии увеличилась на 25%. На сколько % нужно сократить потребление электроэнергии, чтобы платить такую же сумму, как раньше?

Серия 3

1. Решите иррациональное уравнение $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+1}$.
2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 6x^2-29x+30\le 0, \\ 5x+2>3x^2. \end{cases}$
3. Найдите a_1, d в арифметической прогрессии $\begin{cases} S_2-S_4+a_2=14, \\ S_3+a_3=17. \end{cases}$
4. Найдите пятый член геометрической прогрессии, в которой: $\begin{cases} b_3+b_4=36, \\ b_2+b_3=18. \end{cases}$
5. Поезд был задержан на 6 мин и ликвидировал опоздание на перегоне в 36 км, увеличив скорость на 4 км/ч. Определите первоначальную скорость поезда.
6. Вычислите: $\frac{3}{7}+1+\frac{9}{49}+\frac{1}{3}+\frac{27}{343}+\frac{1}{9}+\ldots$
7. Вычислите: $\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$, если $\text{ctg}\,\alpha=\sqrt{3}$.
8. Данияр устраивается на работу. Фирма обещает ему выплатить 1000 у.е. за первый месяц и каждый месяц увеличивать его заработную плату на 50 у.е. Какую сумму (у.е.) заработает Данияр за первый год?

Серия 4

1. Решите систему линейных неравенств $\begin{cases} 3x-15<18, \\ 4x-10>5. \end{cases}$
2. Найдите область определения функции $y=\dfrac{1}{|x|-3}$.
3. Докажите тождество $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.
4. На путь по течению реки катер затратил 3 ч, а на обратный путь – 4,5 ч. Какова скорость течения реки, если скорость катера относительно воды 25 км/ч?
5. Не вычисляя корней уравнения $3x^2+8x-1=0$, найдите:

   а) $x_1^2+x_2^2$;   б) $x_1x_2^3+x_1^3x_2$;   в) $\dfrac{x_1}{x_2^2}+\dfrac{x_2}{x_1^2}$.
6. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Их произведение равно 64, а их среднее арифметическое $\dfrac{14}{3}$. Найдите эти числа.
7. Вычислите: $\sin 70^0 \cdot \sin 50^0 \cdot \sin 10^0$.
8. Сколькими способами можно добраться из точки (0;0) в точку (5;2) на координатной плоскости, если за один ход можно сдвинуться либо на вектор (1;0), либо на вектор (0;1)?

Серия 5

1. Решите дробно-рациональное неравенство

   $$\frac{x-2}{(x+2)(x-5)}\geq 0.$$
2. Найдите область определения функции

   $$y=\frac{x+7}{\sqrt{5x^2-x-4}}.$$
3. Решите уравнение

   $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120.$
4. Решите систему уравнений

   $$\begin{cases} 3x^2+2xy-2y^2=3, \\ 2x^2+3xy-y^2=4. \end{cases}$$

5. Вычислите: $\sin\alpha+\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$.

6. На посадке деревьев работали две бригады. Первая бригада ежедневно высаживала на 40 деревьев больше, чем вторая, и посадила 270 деревьев. Вторая бригада работала на два дня больше первой и посадила 250 деревьев. Сколько дней работала каждая бригада?

7. Вычислите

$$\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\ldots..}}}}}.$$

8. Для организации школьной дискотеки старый глобус обклеивают одинаковыми маленькими зеркальными кусочками. Понадобилось 1000 таких кусочков. Сколько бы таких кусочков (приблизительно) понадобилось, если бы диаметр глобуса был в 2 раза больше?

Ответы:

Серия-1

1. $\frac{13-\sqrt{5}}{2}$. **2.** ±6. **3.** $(1;1)$. **4.** $\cos^2\alpha$. **6.** $(-\infty;-5]\cup[0;5]$. **7.** $-1;4;1\pm\sqrt{5}$. **8.** A.

Серия-2

1. $\frac{b-a}{b}$. **2.** $1;2$. **3.** $(-1;-2),(2;1)$. **4.** $(-\infty;-8]\cup[9;+\infty)$. **6.** $(-\infty;3)\cup(4;+\infty)$. **7.** $\frac{4}{5}$.

8. 20%.

Серия-3

1. 2. **2.** $[1,5;2)$ **3.** $-\frac{32}{3};-\frac{37}{3}$. **4.** 48. **5.** 36 км/ч. **6.** 2,25. **7.** $\sqrt{3}$.

8. 15300 у.е.

Серия-4

1. $(3,75;11)$. **2.** $x\neq\pm3$. **4.** 5 км/ч. **5.** а) $7\frac{7}{9}$; б) $-2\frac{16}{27}$; в) $-194\frac{2}{3}$. **6.** 2;4;8.

7. $\frac{1}{8}$. **8.** 21.

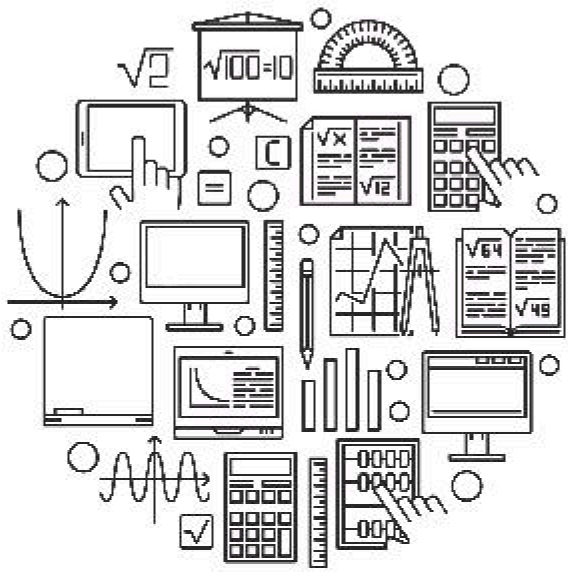
Серия-5

1. $x\in(-2;2]\cup(5;+\infty)$. **2.** $x\in\left(-\infty;-\frac{4}{5}\right)\cup(1;+\infty)$. **3.** -6; 1. **4.** $(\pm1;\pm1)$. **5.** $-\frac{1}{5}$.

6. 3 и 5 дней. **7.** 7. **8.** 4000.

Глава 1

ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК



§1 ФУНКЦИЯ И СПОСОБЫ ЕЕ ЗАДАНИЯ

Математика – это наука, брошенная человечеством на исследование мира в его возможных вариантах.
Иммануил Кант

Упражнение 1

Температура воздуха окружающей среды зависит от времени суток, сила гравитационного притяжения между двумя телами зависит от расстояния между ними, ваша оценка за четверть зависит от количества часов, проведенных за компьютером (как?). Приведите еще несколько примеров (из области физики, химии или других наук, из жизненных ситуаций) зависимости одних числовых величин от других. Попытайтесь объяснить причины зависимости величин одних от других. Попытайтесь также спрогнозировать ситуацию. Например, если расстояние между двумя точечными массами увеличили в 2 раза, то во сколько раз уменьшится сила гравитационного притяжения между ними?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Пусть множество D – некоторое непустое множество чисел. Функцией f, определенной на множестве D, называется правило, которое каждому элементу x множества D ставит в соответствие некоторое единственное для данного элемента число y, которое называется значением функции f в точке x и обозначается $f(x)$.

Число y называют также образом элемента и пишут: $y=f(x)$. Переменная величина x называется **аргументом функции** f или **независимой переменной** функции f.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

Множество D из определения 1 называется областью определения функции f и обозначается $D(f)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.

Множество образов всех элементов из $D(f)$ называется множеством значений функции f и обозначается $E(f)$.

В определении функции важны несколько моментов:

- каждому элементу x из D ставится в соответствие некоторое число y;
- каждому элементу x из D ставится в соответствие только одно значение y.
- $E(f)$ – это множество всех значений $f(x)$, которое получается, если x «пробегает» все значения из $D(f)$.
- $E(f)$ – это множество всех чисел, которым может быть равна функция f. Множество значений $E(f)$ состоит из всех таких чисел y, для которых существует хотя бы одно число $x \in D(f)$ такое, что $f(x) = y$.

Упражнение 2

В верхней строчке таблицы указаны номера учеников 10 «А» класса в списке по классному журналу, в нижней – соответствующие оценки за контрольную работу по теме «Функция».

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
4	3	5	2	5	4	3	4	3	5	4	5	4	5	2	5	4	5	4	2	5	4	3

а) Почему данная таблица задает функцию (обозначим ее f)?

б) Найдите $D(f)$ и $E(f)$.

в) Найдите $f(5)$, $f(16)$, $f(23)$.

г) Решите уравнение $f(x) = 2$.

д) Решите неравенство $f(x) > 4$.

Упражнение 3

На координатной плоскости в виде линии изображено некоторое множество точек. Каждому числу x из отрезка $[-4;13]$ ставим в соответствие ординату y той точки изображенного множества, которое имеет абсциссу x (рис.1).

а) Почему определенное таким образом правило задает функцию (назовем ее f)?

б) Определите $f(-4)$, $f(9)$, $f(13)$.

в) Решите уравнение $f(x) = 6$.

г) Решите неравенство $f(x) < 6$.

д) Найти множество значений функции f.

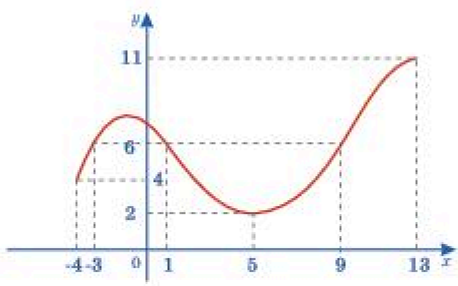


Рис. 1

Упражнение 4

Каждому числу x из отрезка $[-1;1]$ поставим в соответствие значение y, удовлетворяющее уравнению $x^2+y^2=1$. Задает ли такое правило функцию?

Упражнение 5

Каждому числу x из отрезка $[-1;1]$ поставим в соответствие число $y=\sqrt{1-x^2}$. Задает ли такое правило функцию?

Пример 1

Выполним упражнение 2. В нем задана функция, так как каждому номеру ученика по журналу ставится в соответствие ровно одно число – оценка за контрольную работу. В упражнении 2 функция задана **табличным** способом, или, как еще говорят, методом задания упорядоченных пар (x,y). Понятно, что $f(5)=f(16)=5$, $f(23)=3$. Решением уравнения $f(x)=2$ являются числа $\{4, 15, 20\}$. Решением неравенства $f(x)>4$ являются те числа первой строки, напротив которых во второй строке стоят числа большие, чем четыре. Поэтому решением неравенства $f(x)>4$ является множество чисел $\{3, 5, 10, 12, 14, 16, 18, 21\}$. Областью определения данной функции является множество целых чисел от 1 до 23 включительно, область значений $E(f)$ состоит из чисел $\{2, 3, 4, 5\}$.

Пример 2

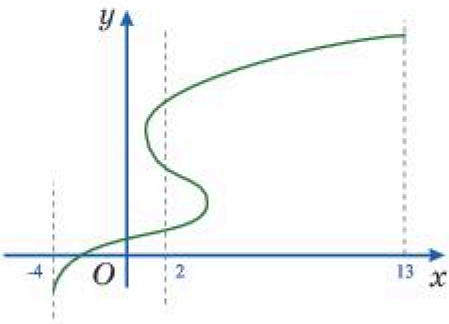


Рис. 2

Выполним упражнение 3. Множество точек, изображенное в нем задает функцию, так как каждому значению $x\in[-4;13]$ по понятным причинам ставится в соответствие ровно одно значение y. Таким свойством не обладает множество точек, изображенное на рис. 2. Например, числу $x=2$ на рисунке 2 соответствуют три значения y. Множество точек упражнения 3 называется **графиком** функции f; соответственно способ задания функции называется графическим. Ясно, что $f(-4)=4$, так как точка на графике, имеющая абсциссу x,

равную –4, имеет ординату y, равную четырем. Аналогично $f(9)=6$, $f(13)=11$. Решениями уравнения $f(x)=6$ являются те значения x, для которых соответствующие значения равны шести. По графику видно, что это числа $x=-3$, $x=1$, $x=9$.
9 Задание «решите неравенство $f(x)=6$» переформулируем так: «Найти абсциссы x тех точек на графике, ординаты y которых меньше чем 6». Нетрудно видеть, что сформулированному условию удовлетворяют значения x, лежащие в интервале $[-4;-3)$ или $(1;9)$.

Значениями функции f, заданной графически, являются ординаты точек графика. Поэтому объединение всех ординат графика и есть **множество значений** функции f: $E(f)=[2;11]$.

Здесь есть одна тонкость. Под «графиком функции», все-таки, подразумеваем множество точек на координатной плоскости. График функции – это не та жирная линия, которую оставляет ваш карандаш, а некая (абстрактная, в некотором смысле) геометрическая фигура, не имеющая толщины. То, что мы рисуем на бумаге – это не больше чем изображение соответствующего множества точек, кстати, в большинстве случаев неполное. Попробуйте изобразить всю параболу, которая является графиком функции $y=x^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.

Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек координатной плоскости с координатами $(x;f(x))$, где $x\in D(f)$.

Пример 3

Рассмотрим упражнение 4. Соответствие, описанное в нем, не является функцией. Действительно, функция каждому своему аргументу ставит в соответствие единственное число. Однако, если, например, $x=0$, то согласно правилу $0^2+y^2=1$, т.е. $y=\pm1$. Это значит, что такое правило числу $x=0$ ставит в соответствие два значения y. Правило упражнения 4 не задает функцию.

Пример 4

Соответствие, описанное в упражнении 5, удовлетворяет всем условиям определения функции. Значение функции вычисляется по формуле $y=\sqrt{1-x^2}$.

Если значение функции задается с помощью некоторой формулы, то говорят, что функция задана **аналитически**. Если в условии задачи об аналитически заданной функции f никаких специальных оговорок об области определения не сделано, то имеется в виду, что функция имеет естественную область определения, фактически совпадающую с ОДЗ (областью допустимых значений переменной) аналитической формулы для $f(x)$.

Итак, мы рассмотрели три способа задания функции: **табличный, графический, аналитический**. Существуют другие способы задания функций. Например, словесный.

Пример 5

Вот пример словесного задания функции: «Монету подбрасывают n раз. При этом записывают 0 каждый раз, когда выпадает «орел», и записывают 1 каждый раз, когда выпадает «решка». В результате получается некоторая последовательность из 0 и 1. Каждому числу n поставим в соответствие количество последовательностей из 0 и 1, которое может получиться».

На самом деле, разница между способами задания функции достаточно условна. Например, запись $y=\sqrt{1-x^2}$ мы, в конце концов, читаем словами «игрек равен корню квадратному из разности единицы и квадрата икса». Если разобраться до конца с примером 5, то получится, что числу n ставится в соответствие число $f(n)=2^n$. А это уже аналитический способ.

Задачи

Часть 1

1. (1) Дан график функции $y(x)$ (рис.3). По графику определите:
а) значение функции при заданном значении аргумента: $x=2$, $x=-4$;
б) значение аргумента при заданном значении функции: $y=3$, $y=-3$;
в) решите неравенство:
$y(x)\geq 0$, $y(x)\leq 3$.

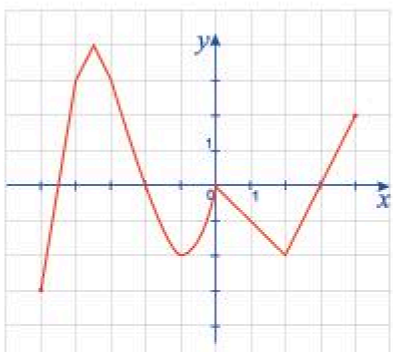


Рис. 3

2. (2) Приведите примеры функций, заданных таблично, с которыми вы сталкиваетесь в повседневной жизни.

3. (1) Задайте какую-нибудь функцию в словесной форме.

4. (2) Придумайте какую-нибудь аналитически заданную числовую функцию, содержащую не менее четырех арифметических действий, задайте ее в словесной форме, соблюдая правила русского языка.

5. (3) Придумайте или приведите пример соответствия между элементами каких-либо двух множеств, которое не является функцией.

6. (2). На рисунке 4 изображены графики функций $f(x)$ и $g(x)$, $D(f):[-3;5]$, $D(g):\left[-3\frac{1}{2};8\right]$.

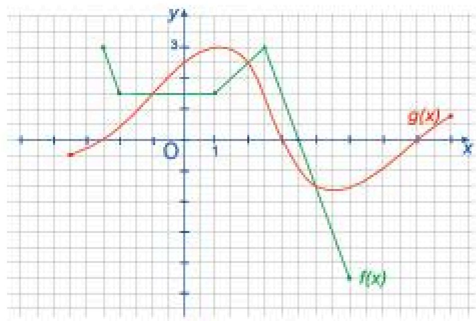


Рис. 4

а) Сколько корней имеет уравнение $f(x)=g(x)$? Укажите значения x, при которых $f(x)=g(x)$.
б) Укажите значения x, при которых $g(x)=0$, т.е. решите уравнение $g(x)=0$.
в) Укажите значения x, при которых $g(x)\le 0$, т.е. решите неравенство $g(x)\le 0$.
г) Сколько корней имеет уравнение $g(x)=\frac{3}{2}$?
д) Решите уравнение $f(x)=\frac{3}{2}$.
е) Решите неравенства $f(x)\ge g(x)$, $f(x)<g(x)$.
ж) Решите систему неравенств $\begin{cases} g(x)\le 2\frac{1}{2}, \\ g(x)\ge f(x). \end{cases}$

7. (1) Дана функция $f(x)=x^2-3x+2$.
а) Найдите $f(0)$, $f(3)$, $f(-3)$.
б) Найдите те значения аргумента x, при которых значение функции $f(x)$ равно нулю.

8. (3) Найдите область определения следующих функций:
а) $f(x)=\frac{1}{x}$; б) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$; в) $f(x)=\sqrt{-x}$; г) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$;
д) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; е) $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; ж) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$; з) $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x}}$.

Часть 2

9. (2) Приведите примеры функциональной зависимости одних физических величин от других. В чем причины такой зависимости? Что является аргументом и что – значением в приведенных вами примерах. Постарайтесь понять, какова область определения и множество значений. Как изменяется значение функции при изменении аргумента? Обоснуйте свои результаты в тетради.

10. (2) На рисунке 5 изображены графики функций $f(x)$ и $g(x)$, $D(f):[-2;6]$, $D(g):[-1;7]$.

а) Решите уравнение $f(x)=g(x)$.

б) Решите уравнения $f(x)=1\frac{1}{2}$, $g(x)=0$, $f(x)=\frac{1}{2}$.

в) Решите неравенства $f(x)>1\frac{1}{2}$, $g(x)\le 0$.

г) Решите неравенства $f(x)<g(x)$, $f(x)>g(x)$.

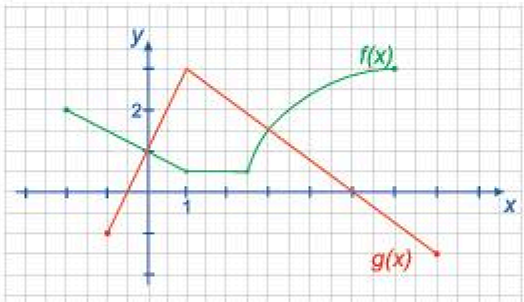


Рис. 5

д) Решите систему неравенств $\begin{cases} f(x)\ge \frac{3}{2}, \\ g(x)>0. \end{cases}$

е) Решите систему неравенств $\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)\le \frac{3}{2} \end{cases}$.

11. (2) Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\sqrt{2+x}$; б) $f(x)=\sqrt{3x+9}$; в) $f(x)=\frac{\sqrt{3x+9}}{\sqrt{2+x}}$;

г) $f(x)=\sqrt{\frac{3x+9}{2+x}}$; д) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}-\sqrt{-x}$;

е) $f(x)=\sqrt{|x|}$; ж) $f(x)=\sqrt{-x^2+6x-9}$.

12. (3) Найдите область определения и множество значений функции:
а) $y=\sqrt{x^2+2x+3}$ б) $y=-x^2+4x+5$ в) $y=(-x^2+4x+5)^{-2}$.

13. (4) Посетите официальный сайт сотового оператора, услугами которого пользуетесь.
а) Проанализируйте тарифный план номера вашего телефона. Составьте приблизительную таблицу ваших расходов за месяц по предоставляемым услугам: Интернет, SMS, разговоры с абонентами вашего сотового оператора, разговоры с абонентами других сотовых операторов, MMS и т.д.
б) Является ли ваш тарифный план оптимальным, учитывая именно ваш режим использования мобильного телефона?

14. (2) Маленький коала съедает листья с одного эвкалиптового дерева за 10 часов, а каждый из его родителей съедает в два раза быстрее. За сколько времени это семейство съест все листья с одного эвкалиптового дерева?

15. (3) В арифметической прогрессии 20 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 250, а на нечетных – 220. Найдите десятый член прогрессии.

16. (3) При анализе семейного бюджета оказалось, что 40% необходимых расходов приходится на приобретение продуктов питания. Насколько процентов сократятся расходы данной семьи, если сумма на покупку продуктов уменьшится на 20%?
A) 12% B) 10% C) 8% D) 6% E) 4%

17. Решите неравенства:
а) (1) $|4x+1|<3$; б) (3) $|x^2+2x-3|<|6x-6|$; в) (3) $\dfrac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|}\le 0$.

Ответы:

1. а) $y(2)=-2$, $y(-4)=3$; б) $3=y(-4)=y(-3)$;
в) $[-4{,}5;-2]\cup\{0\}\cup[3;4]$, $(-\infty;-4]\cup[-3;+\infty)$.

6. а) 3 корня: $x\in\{-1;2;4\}$; б) $x\in\left\{-2\frac{1}{2};3;7\right\}$; в) $\left[-3\frac{1}{2};-2\frac{1}{2}\right]\cup[3;7]$;
г) 2; д) $[-2;1]\cup\{3\}$;
е) $\left[-2\frac{1}{2};-1\right]\cup[2;4]$, $(-1;2)\cup(4;5]$; ж) $[-1;0]\cup\{2\}\cup[4;5]$.

7. а) $2, 2, 20$; б) $\{1,\ 2\}$.

8. а) $(-\infty;0)\cup(0:+\infty)$; б) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$; в) $(-\infty;0]$;
г) $[-1;1]$; д) $(-1;1)$; е) $[-1;0)\cup(0;1]$; ж) $(-\infty;-1]\cup(0;1]$; з) $(0;1]$.

10. а) $x\in\{0;3\}$; б) $\{-1;3\}$, $\{-0{,}5;5\}$, $x\in\left[1;2\frac{1}{2}\right]$; в) $x\in[-2;-1)\cup(3;6]$,
$x\in[-1;-0{,}5]\cup[5;7]$;
г) $x\in(0;3)$, $x\in[-2;0)\cup(3;6)$; д) $x\in[3;5)$; е) $x\in(0;3)$.

11. а) $(-\infty;2]$; б) $[-3;+\infty)$; в) $[-3;2)$; г) $(-\infty;-3]\cup(-2;+\infty)$; д) $(-\infty;-3)$;
е) $(-\infty;+\infty)$; ж) $\{3\}$.

12. а) $D(y)=\mathbb{R}$, $E(y)=[\sqrt{2};+\infty)$; б) $D(y)=\mathbb{R}$, $E(y)=(-\infty;9]$;
в) $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;5)\cup(5;+\infty)$, $E(y)=(0;+\infty)$.

14. За два часа. **15.** 22. **16.** C.

17. а) $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$; б) $(-9;1)\cup(1;3)$; в) $x<\frac{1}{3}$.

§2 СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

Значение математики сейчас непрерывно возрастает. В математике рождаются новые идеи и методы. Все это расширяет сферу ее приложения. Сейчас уже нельзя назвать такой области деятельности людей, где математика не играла бы существенной роли. Она стала незаменимым орудием во всех науках о природе, в технике, в обществоведении. Даже юристы и историки берут на свое вооружение математические методы.

А.Д. Александров

Упражнение 1

На рис. 1 изображена зависимость температуры по Цельсию окружающей среды от времени суток 3 марта 2010 года в городе Алматы.

а) Укажите, с какого и до какого момента температура повышалась. Укажите временные интервалы, в течение которых температура понижалась.

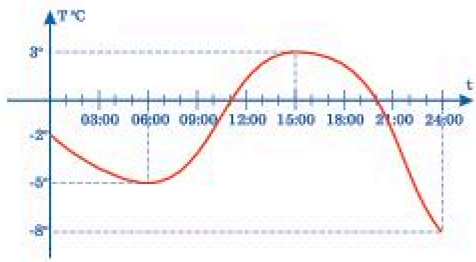


Рис. 1

б) Укажите время, когда температура T достигла своего наименьшего значения; наибольшего значения.

в) Укажите, когда T достигла своего наименьшего значения в период с 00.00 до 08.00; наибольшего значения в период с 00.00 до 03.00.

г) В какой момент времени температура была равной 0° по Цельсию? Когда температура была отрицательной? Положительной?

Мы не думаем, что выполнение упражнения у вас вызвало какие-нибудь затруднения. Ведь все и так «видно». Однако мы хотели бы показать, что математические концепции основаны на реалиях окружающего нас мира (или на том, как мы воспринимаем реальный мир, но это – уже совсем другая тема). Если абстрагироваться от природы величин t и T (считать неважным, что они обозначают), то фактически мы имеем график некоторой функции $T=f(t)$. Глядя на график, мы можем сказать следующее.

1. На множестве $t\in[0;6]$ функция $f(t)$ **убывает**; $(0;6)$ – **интервал убывания.**

На множестве $t\in[6;15]$ функция $f(t)$ **возрастает**; $(6;15)$ **интервал возрастания.**

На множестве $t\in[15;24]$ функция $f(t)$ убывает; $(15;24)$ интервал убывания.

2. В точке $t=24$ функция $f(t)$ достигает своего **наименьшего значения**, которое равно –8; соответствующая запись: $\min\limits_{t\in[0;24]} f(t)=f(24)=-8$.

   Наибольшее значение достигается функцией f в точке $t=15$ и равно это значение числу 3: $\max\limits_{t\in[0;24]} f(t)=f(15)=3$.

3. В точке $t=6$ значение функции равно –5. Это значение не является наименьшим на всем множестве $t\in[0;24]$, но если брать любые точки t, достаточно близкие к 6, то $f(t)>6$. Говорят, что в точке $t=6$ функция $f(t)$ достигает своего локального минимума (local(англ)– местный), $t=6$ – **точка локального минимума**, $f(6)=-5$ – значение локального минимума. В точке $t=0$ значение $f(t)$ равно -2, но точки слева от $t=0$ не лежат в области определения, точка $t=0$ не является точкой локального максимума.

4. Заметим, что $f(11)=0$ и $f(20)=0$. Точки $t=11$ и $t=20$ называются «**нулями**» функции $f(t)$. На промежутках $[0;11)$ и $(20;24]$ функция принимает отрицательные значения. На промежутке $(11;20)$ функция принимает положительные значения. Множества $[0;11)$, $(20;24]$ и $(11;20)$ называются **промежутками знакопостоянства функции**.

Упражнение 2

Перечитайте еще раз пункты 1 – 4 о графике $f(t)$ и проследите, как названия математических терминов согласуются с результатами вашей работы над соответствующими пунктами упражнения 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Функция $y=f(x)$ называется возрастающей на некотором промежутке, если для любых чисел x_1 и x_2 из этого промежутка, таких что $x_2>x_1$, выполняется неравенство $f(x_2)>f(x_1)$.

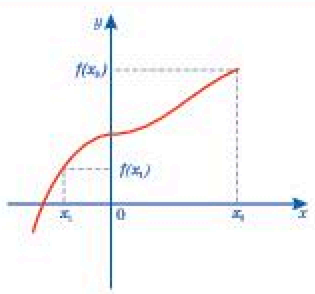


Рис. 2

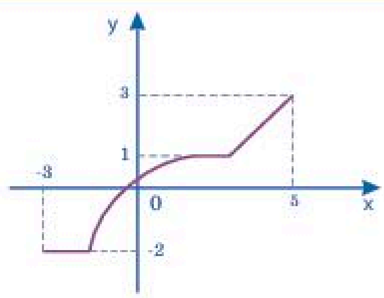


Рис. 3

Упрощенное определение 1 можно переформулировать в одном из следующих вариантов (рис. 2):

– большему значению аргумента соответствует большее значение функции;

– если x растет, то и y тоже растет;

– чем больше x, тем больше $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

Функция $y=f(x)$ называется неубывающей на некотором промежутке, если для любых чисел x_1 и x_2 из этого промежутка, таких что $x_1 > x_2$, выполняется неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$.

На рис. 3 изображен пример графика неубывающей функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.

Функция $y=f(x)$ называется убывающей на некотором промежутке, если для любых чисел x_1 и x_2 из этого промежутка, таких что, $x_1>x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Упрощенные формулировки определения убывающей функции:

– большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (рис.4);

– если x увеличивается, то y уменьшается;

– чем больше x, тем меньше $f(x)$.

Функции, удовлетворяющие условиям определения 1 или 3, называются монотонными (строго монотонными).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.

Функция $y=f(x)$ называется невозрастающей на некотором промежутке, если для любых чисел x_1 и x_2 из этого промежутка, таких что $x_1>x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$.

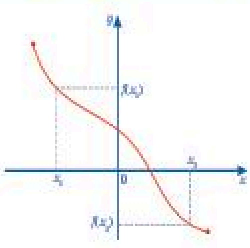


Рис. 4

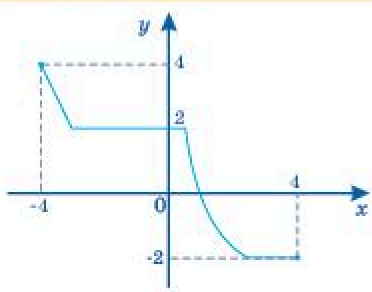


Рис. 5

На рисунках 4 и 5 представлены примеры строго убывающей функции и невозрастающей функции соответственно.

В дальнейшем мы будем рассматривать в основном функции, областью определения которых являются отрезки числовой прямой или их объединения. (Более подробно об отрезках посмотрите, пожалуйста, в приложении «Множества на числовой прямой» в конце учебника). Поэтому в дальнейшем нам будет важно следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.

Пусть областью определения функции является отрезок или объединение отрезков. Число *p* называется внутренней точкой области определения функции, если принадлежит отрезку или одному из отрезков области определения, но не является концом ни одного из этих отрезков.

Пример 1

На рисунке 5 областью определения функции является отрезок $[-4;4]$. Числа –4 и 4 являются концами отрезка, они не являются внутренними точками области определения. Все остальные точки отрезка $[-4;4]$ являются **внутренними точками** области определения функции.

Предположим, нам дана функция, и мы уже определили промежутки, на которых функция убывает, и промежутки, на которых функция возрастает.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.

Внутренняя точка области определения функции называется точкой локального минимума, если она является правым концом промежутка убывания и левым концом промежутка возрастания.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.

Внутренняя точка области определения функции называется точкой локального максимума, если она является правым концом промежутка возрастания и левым концом промежутка убывания.

Точки локального минимума или локального максимума называются точками локального экстремума.

Вместо слов «локальный минимум», «локальный максимум», «локальный экстремум» можно применять просто «минимум», «максимум», «экстремум» соответственно.

Пример 2

Рассмотрим график некоторой функции $f(x)$ (рис. 6), определенной на отрезке $D(f)=[x_1,x_7]$. Точки x_1 и x_7 не являются точками экстремума, так как это не внутренние точки множества $[x_1,x_7]$, x_2, x_4 и x_6 – точки локального максимума, x_3, x_5 – точки локального минимума.

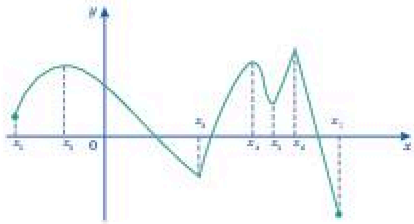


Рис. 6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.

Значения функции в точках локального максимума или точках локального минимума называются соответственно локальными максимумами или локальными минимумами.

Упражнение 3

Может ли какой-нибудь локальный минимум функции оказаться больше какого-нибудь локального максимума? Обязательно ли локальный максимум функции является наибольшим значением функции?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.

Значения переменной x, при которых значения функции равны нулю, называются «нулями» функции.

Иными словами, «нули» функции:
– это абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox;
– это корни уравнения $f(x)=0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.

Интервалы, на которых функция положительна, называются промежутками положительности функции; интервалы, на которых функция отрицательна, называются промежутками отрицательности функции. Промежутки положительности или отрицательности называются промежутками знакопостоянства.

Промежутки положительности функции $f(x)$ совпадают с решением неравенства $f(x)>0$; промежутки отрицательности функции $f(x)$ совпадают с решением неравенства $f(x)<0$. В качестве примера еще раз просмотрите упражнение 1, г).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.

Точка p из области определения функции называется точкой, в которой достигается наибольшее значение функции $f(x)$, если для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(p)$. Число $f(p)$ называется наибольшим значением функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.

Точка p из области определения функции называется точкой, в которой достигается наименьшее значение функции $f(x)$, если для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) \geq f(p)$.
Число $f(p)$ называется наименьшим значением функции.

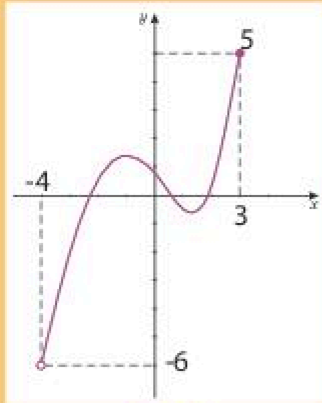


Рис. 7

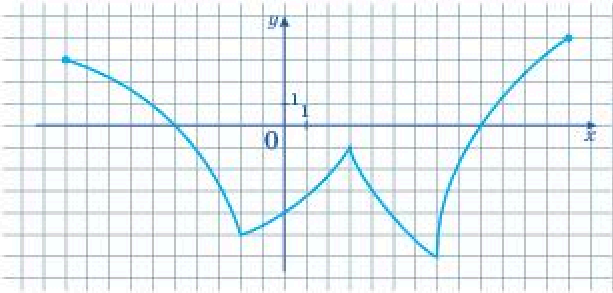
Наибольшие или наименьшие значения функции не всегда достигаются. На рисунке 7 изображен график функции $g(x)$, областью определения которой является отрезок $(-4;3]$. Число –4 не принадлежит области определения функции, поэтому число –6 не является наименьшим значением данной функции. Наибольшим значением функции является число 5. Наибольшее значение достигается в точке $x=3$.

Задачи

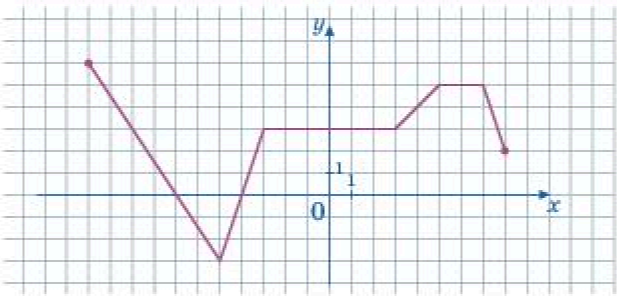
Часть 1

Исследовать функцию по ее графику – это значит указать:
а) область определения функции;
б) множество значений данной функции;
в) множества, на которых функция возрастает;
г) множества, на которых функция убывает;
д) точки и значения локальных экстремумов;
е) наибольшее и наименьшее значения функции;
ж) «нули» функции;
з) промежутки положительности и промежутки отрицательности функции.

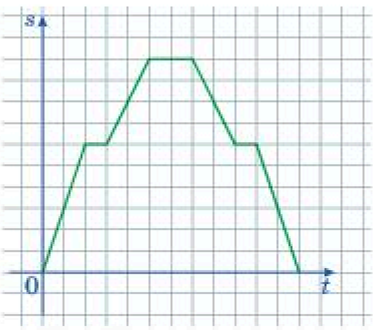
1. (2) На рисунке ниже изображен график функции $y=f(x)$. Исследовать функцию $f(x)$.



2. (2) На рисунке ниже изображен график функции $y=h(x)$. Исследовать функцию $h(x)$. Дополнительно указать множества, на которых функция является невозрастающей, неубывающей.



3. (2) На рисунке ниже изображен график функции $y=S(t)$, где $S(t)$ – расстояние от экскурсионного автобуса до пункта A. По оси Ot одно деление соответствует 0,5 часа, по оси OS одно деление соответствует 10 км.



Ответьте на следующие вопросы:
а) на какое наибольшее расстояние от пункта A удалялся автобус?

б) сколько остановок было совершено во время экскурсии, указать продолжительность каждой остановки;
в) какое время занимает вся экскурсия;
г) если считать, что первая остановка была совершена в пункте B, а вторая в пункте C, то чему равны скорости автобуса на участках AB и BC?

4. (1) Известно, что общее сопротивление системы из двух параллельно соединенных сопротивлений R_1 и R_2 связано с данными сопротивлениями формулой $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. Пусть $R_1=\mathrm{const}$, R_2 – переменная величина.

а) Увеличивается или уменьшается величина R, если R_2 увеличивается?

б) Выразите величину R как функцию от переменной $R_2=x$.

в) Возрастающей или убывающей является функция $R(x)$?

г) Предположим, что R_2 неограниченно возрастает. Что происходит с величиной R?

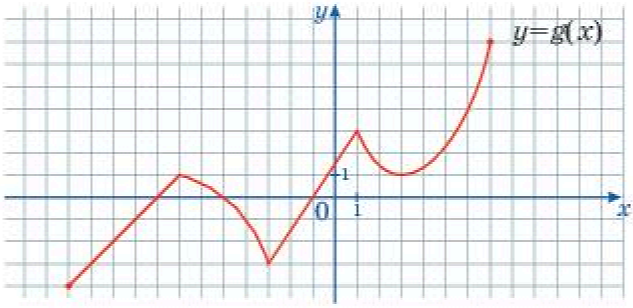
5. (3) Функция $f(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x, \text{ если } x\le 0;\\ \frac{4}{x}, \text{ если } 0<x\le 2;\\ x, \text{ если } x\ge 2.\end{cases}$$

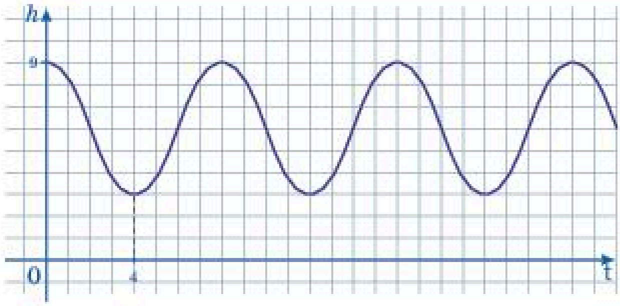
Постройте график, исследуйте функцию $y=f(x)$.

Часть 2

6. (2) Исследуйте функцию $y=g(x)$ по ее графику, изображенному на рисунке ниже.



7. (2) Материальная точка M колеблется относительно положения равновесия. На рисунке ниже изображен график зависимости величины h от времени t, где h – это расстояние от точки M до некоторой покоящейся точки A. Одно деление по оси h соответствует 1 метру, по оси t одно деление соответствует 1 секунде.



Предполагая, что колебания происходят без потери энергии, выполнить следующие задания.

а) Определите наибольшее значение, которого может достигать расстояние AM, опишите моменты времени, в которые достигается наибольшее значение.

б) Определите наименьшее значение, которого может достигать расстояние AM, опишите моменты времени, в которые достигается наименьшее значение.

в) Опишите периоды, в течение которых расстояние AM уменьшается; опишите периоды, в течение которых расстояние AM увеличивается.

8. (1) Площадь поверхности шара радиуса r вычисляется по формуле $S = 4\pi r^2$. Во сколько раз уменьшается доза получаемой радиации при удалении от источника радиоактивного излучения на расстояние, в два раза большее, чем данное?

9. (2) Как известно, сила гравитационного притяжения между двумя точечными массами m_1 и m_2 вычисляется по формуле $F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$, где k – некоторый коэффициент, r – расстояние между точечными массами.

а) Увеличивается или уменьшается сила F, если расстояние r уменьшается?

б) Во сколько раз изменится сила притяжения между двумя точечными массами, если расстояние между ними увеличится в 100 раз?

10. (3) Функция $f(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3, \text{ если } x<-1; \\ |x|-1, \text{ если } -1\le x\le 2; \\ -x^2+8x-18, \text{ если } x>2. \end{cases}$$

Постройте график, исследуйте функцию $y=f(x)$.

Ответы:

1. а) $D(f):[-10;13]$; б) $E(f):[-6;4]$; в) $[-2;3]$, $[7;13]$; г) $[-10;-2]$, $[3;7]$; д) $x=-2$ точка локального минимума, $f(-2)=-5$; $x=7$ точка локального минимума, $f(7)=-6$; $x=3$ точка локального максимума, $f(3)=-1$; е) $\max\limits_{x\in[-10;13]} f(x)=f(13)=4$, $\min\limits_{x\in[-10;13]} f(x)=f(7)=-6$; ж) $f(x)=0$ при $x\in\{-5;9\}$; з) $f(x)>0$ при $x\in[-10;-5)\cup(9;13]$, $f(x)<0$ при $x\in(-5;9)$.

2. а) $D(h):[-11;8]$; б) $E(h):[-3;6]$; в) $[-5;-3]$, $[3;5]$; г) $[-11;-5]$, $[7;8]$; д) $x=-5$ точка минимума, $h(-5)=-3$; точки локальных максимумов отсутствуют; е) наибольшее значение функции не достигается, $\min\limits_{x\in-11;8} h(x)=h(-5)=-3$; ж) $h(x)=0$ при $x\in(-7;-4)$; з) $f(x)>0$ при $x\in[-11;-7)\cup(-4;8]$, $f(x)<0$ при $x\in\{-7;-4\}$; и) функция является невозрастающей на множествах $x\in[-11;-5]$, $x\in[-3;3]$ и $x\in[5;8]$, функция является неубывающей на множестве $x\in[-5;7]$.

3. а) 100 км; б) продолжительность 1-ой остановки 30 мин, 2-ой – 1 ч, 3-ей – 30 мин; в) 6 ч; г) 60 км/ч и 40 км/ч соответственно.

4. а) увеличивается; б) $R=\dfrac{R_1x}{R_1+x}$; в) возрастающей; г) величина R становится близкой по значению к величине R_1.

5. а) $D(f):(-\infty;+\infty)$; б) $E(f):(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$; в) $(-\infty;-1]$, $[2;+\infty)$; г) $[-1;0]$, $(0;2]$; д) $x=2$ точка локального минимума, $f(2)=2$; $x=-1$ точка локального максимума, $f(-1)=1$; е) наибольшее и наименьшее значения не достигаются; ж) $f(x)=0$ при $x\in\{-2;0\}$; з) $f(x)>0$ при $x\in(-2;0)\cup(0;+\infty)$, $f(x)<0$ при $x\in(-\infty;-2)$.

6. а) $D(f):[-12;7]$; б) $E(f):[-4;7]$; в) $[-12;-7]$, $[-3;1]$, $[3;7]$; г) $[-7;-3]$, $[1;3]$; д) $x=-3$ точка локального минимума, $f(-3)=-3$; $x=3$ точка локального минимума, $f(3)=1$; $x=-7$ точка локального максимума, $f(-7)=1$; $x=1$ точка локального максимума, $f(1)=3$; е) $\max\limits_{x\in[-12;7]} f(x)=f(7)=7$, $\min\limits_{x\in[-12;7]} f(x)=f(-12)=-4$; ж) $f(x)=0$ при $x\in\{-5;-8;-1\}$; з) $f(x)>0$ при $x\in(-8;-5)\cup(-1;7]$, $f(x)<0$ при $x\in[-12;-8)\cup(-5;-1)$.

7. а) наибольшее значение равно 9, достигается в моменты времени $t_n=8n$, где $n=0$, 1, 2, 3 , ... , то есть n – неотрицательное целое число; б) наименьшее значение равно 3, достигается в моменты времени $t_n=4+8n$, где n – неотрицательное целое число; в) расстояние AM уменьшается в периоды, которые можно описать как $t\in[8n;\ 4+8n]$; расстояние AM увеличивается в периоды $t\in[4+8n;\ 8+8n]$.

8. В 4 раза.

9. а) увеличивается; б) уменьшится в 10000 раз.

10. а) $D(f):(-\infty;+\infty)$; б) $E(f):(-\infty;-2]\cup[-1;2]\cup(4;+\infty)$; в) $[0;2]$, $(2;4]$; г) $(-\infty;-1)$, $[-1;0]$, $[4;+\infty)$; д) $x=0$ точка минимума, $f(0)=-1$; $x=4$ точка локального максимума, $f(4)=-2$; е) наибольшее и наименьшее значения не достигаются; ж) $f(x)=0$ при $x\in\{-1;1\}$; з) $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;2]$, $f(x)<0$ при $x\in(-1;1)\cup(2;+\infty)$.

§3 ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

Симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство.
Г. Вейль

Упражнение 1

Точки $(4;-3)$ и $(-4;-3)$ имеют одинаковые ординаты и противоположные абсциссы. Отметьте их на координатной плоскости. Отметьте еще несколько таких же пар точек. Что можно сказать о взаимном расположении точек в одной паре?

Упражнение 2

Точки $(-5;2)$ и $(5;-2)$ имеют противоположные абсциссы и противоположные ординаты. Отметьте их на координатной плоскости. Отметьте еще несколько таких же пар точек. Что можно сказать о взаимном расположении точек в одной паре?

Упражнение 3

Рассмотрим функции $g(x)=x^2+4x^6$, $h(x)=|x|$ на их естественной области определения. Сравните между собой значения $g(x)$ и $g(-x)$, $h(x)$ и $h(-x)$. Что можно сказать о значениях этих функций в противоположных точках? Какие выводы можно сделать о структуре графиков этих функций?

Упражнение 4

Рассмотрим функции $g(x)=x^3-5x^7$, $h(x)=x(|x|-x^2)$ на их естественной области определения. Сравните между собой значения $g(x)$ и $g(-x)$, $h(x)$ и $h(-x)$. Что можно сказать о значениях этих функций в противоположных точках? Какие выводы можно сделать о структуре графиков этих функций?

Если вы все правильно сделали, то поняли, что значения функций из упражнения 3 в противоположных точках совпадают. Например, $g(-x)=(-x)^2+4(-x)^6=x^2+4x^6=g(x)$. Это значит, что любая пара точек графиков этих функций с противоположными абсциссами имеет одинаковые ординаты (упражнение 1). Следовательно, для любой точки (x_0,y_0) на графике симметричная ей относительно прямой *Oy* точка $(-x_0,y_0)$

тоже лежит на графике. Но это значит, что весь график симметричен сам себе относительно оси Oy (упражнение 1). Такие функции называются **четными**.

В упражнении 4 имеем $g(-x)=(-x)^3-5(-x)^7=-x^3+5x^7=-(x^3-5x^7)=-g(-x)$, т.е. любая пара точек с противоположными абсциссами имеет противоположные ординаты (упражнение 2). Следовательно, для любой точки (x_0, y_0) симметричная ей относительно $(0,0)$ точка с координатами $(-x_0, -y_0)$ также лежит на графике. Но это значит, что весь график симметричен сам себе относительно точки $O(0,0)$. Такие функции называются **нечетными**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Функция $f(x)$ называется четной, если выполняются два условия:
1) для любого x числа из области определения $D(f)$ число $-x$ также принадлежит $D(f)$;
2) для любого числа x из области определения $D(f)$ выполняется равенство $f(-x)=f(x)$.

Условие 1) в данном определении означает симметричность множества $D(f)$ относительно начала координат на оси Ox. Иными словами, в любой паре точек с противоположными координатами на оси либо обе не принадлежат области $D(f)$, либо обе принадлежат $D(f)$. Во втором случае значения функции в этих точках равны между собой. Это значит, что если какая-то точка (x_0, y_0) координатной плоскости лежит на графике четной функции, то $(-x_0, y_0)$ также лежит на графике той же функции. Но такие пары точек симметричны друг другу относительно оси Oy (см. упражнение 1). **Следовательно, прямая Oy является осью симметрии графика любой четной функции.**

Далее будет сформулировано определение нечетной функции и соответствующее свойство ее графика. Но для вас будет гораздо интереснее и полезнее выполнить следующее упражнение.

Упражнение 5

Попробуйте самостоятельно сформулировать корректное (правильное) определение нечетной функции и объяснить, почему график любой нечетной функции является центрально-симметричной фигурой с центром симметрии в точке $O(0,0)$.

Пример 1

Является ли функция $f(x)=x^2-|x|$ четной?

Рассуждение. Так как никаких слов об области определения в условии не сказано, то имеется в виду естественная область определения, т.е. ОДЗ выражения $x^2-|x|$. В данном выражении никаких ограничений на область допустимых значений x нет, поэтому $D(f)=(-\infty;+\infty)$, т.е. областью определения функции $f(x)$ является вся числовая ось. Точка 0 числовой оси очевидным образом является ее центром симметрии. Условие 1) определения четной функции выполняется. Осталось проверить условие 2). Для любого x выполняется равенство $f(-x)=(-x)^2-|-x|=x^2-|x|=f(x)$.

Решение. $D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметричное относительно 0 множество. Для любого x выполняется равенство $f(-x)=f(x)$. Действительно, $f(-x)=(-x)^2-|-x|=x^2-|x|=f(x)$.

Ответ: функция $f(x)=x^2-|x|$ является четной.

Пример 2

Функция $y(x)$ на множестве $(-2;1)$ задается формулой $y(x)=x^2$. Является ли $y(x)$ четной?

Решение. $D(f)=(-2;1)$. Это множество не является симметричным относительно нуля на оси .

Ответ: $y(x)$ не является четной функцией.

Пример 2 является простой, но поучительной иллюстрацией того факта, что область определения, на которой рассматривается функция, значительно влияет на свойства функции. Не будет ошибкой сказать, что функции, задаваемые одной и той же аналитической формулой, но рассматриваемые на различных областях определения, вообще говоря, являются различными функциями. Если в примере множество $(-2;1)$ заменить на любое множество $(-a;a)$, где $a>0$, то ответ к вопросу становится положительным.

Пора поговорить о нечетных функциях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2

Функция $f(x)$ называется нечетной, если выполняются два условия:
1) для любого числа x из области определения $D(x)$ число x также принадлежит $D(f)$;
2) для любого числа $x\in D(f)$ выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

Условие 1) равносильно симметричности множества $D(f)$ относительно начала координат на оси Ox. Иными словами, в любой паре противоположных точек на оси Ox либо обе не принадлежат области $D(f)$, либо обе принадлежат $D(f)$. Во втором случае значения функции в этих точках противоположны. Это значит, что если какая-то точка (x_0, y_0) координатной плоскости принадлежит графику нечетной функции, то точка $(-x_0, -y_0)$ также принадлежит графику этой функции. Но такие пары точек симметричны друг другу относительно точки $O(0;0)$. Следовательно, начало координат является центром симметрии графика любой нечетной функции.

Пример 3

Исследуйте следующие функции на четность:

а) $g(x)=(x+1)|x-2|+(x-1)|x+2|$;

б) $h(x)=(x+1)|x-2|+(x+2)|x-1|$.

Решение. а) Областью определения функции является все множество действительных чисел, симметричное относительно начала координат. Для любого значения переменной x имеем

$$g(-x)=(-x+1)|-x-2|+(-x-1)|-x+2|=-(x-1)|x+2|-(x+1)|x-2|=$$

$=-((x-1)|x+2|+(x+1)|x-2|)=-g(x)$. Следовательно, $g(x)$ является нечетной.

б) Попытки доказать, что для всех x выполняется равенство $h(-x)=h(x)$ или для всех x выполняется равенство $h(-x)=-h(x)$, не приводят к успеху. Значит ли это, что данная функция не обладает свойствами четности? Может мы просто ошиблись в преобразованиях? С другой стороны, попытки построить пример конкретного значения x, для которого нарушаются оба равенства $h(-x)=h(x)$ и $h(-x)=-h(x)$ приводят к очень интересным результатам. Например, $h(-1)=2=h(1)$, $h(-2)=-4=-h(2)$ (проверьте самостоятельно). Если функция $h(x)$ четная, то это противоречит равенству $h(-2)=-4=-h(2)$; если функция $h(x)$ нечетная, то это противоречит равенству $h(-1)=2=h(1)$.

Следовательно, функция $h(x)$ не обладает свойствами четности.

В качестве примеров приведем несколько графиков функций на рис 1.

Если какая-либо функция обладает свойствами четности, то либо для всех $x\in D(f)$ выполняется равенство $f(-x)=f(x)$, либо для всех $x\in D(f)$ выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$. Поэтому для доказательства того, что $f(x)$ не обладает свойствами четности, достаточно предъявить хотя бы одно значение переменной x, для которого не выполняется ни одно из равенств $f(-x)=f(x)$ или $f(-x)=-f(x)$. Например, функция $f(x)=x^3-x+3$ является функцией общего вида, так как $f(-2)=-3$, $f(2)=9$ (если бы $f(x)$ была четной или нечетной, то выполнялось бы одно из равенств $f(-2)=f(2)$ или $f(-2)=-f(2)$.

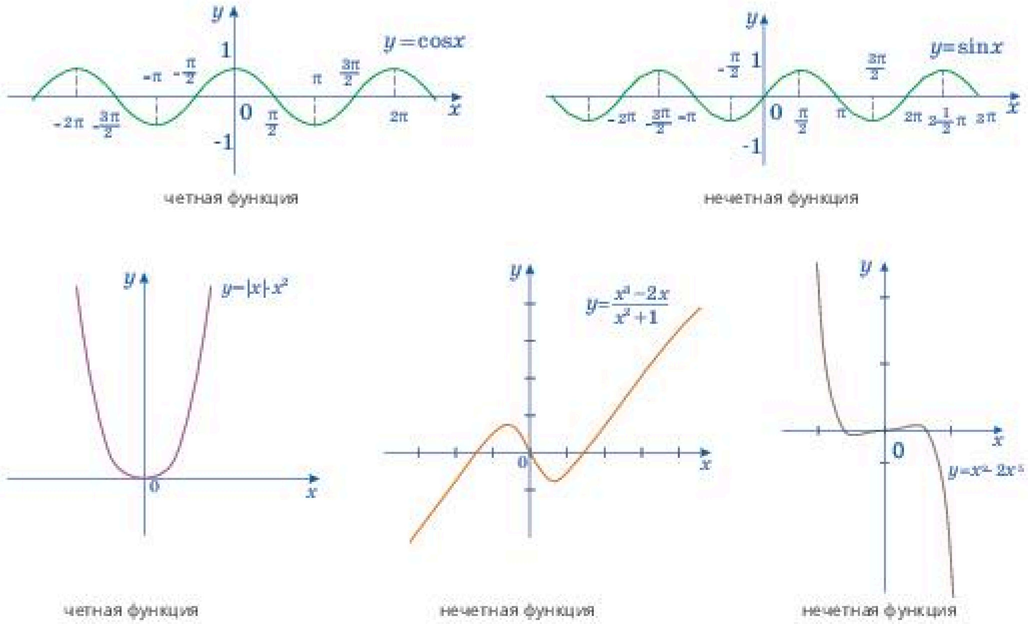


Рис. 1

Пример 4

Докажите, что если $f(x)$ четная функция, $g(x)$ – нечетная, то $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ – нечетная функция.

Решение. 1) Область определения состоит из тех точек оси Ox, которые принадлежат и области определения $D(f)$ и области $D(g)$. Это можно записать так: $D(h)=D(f)\cap D(g)$.

Множества $D(f)$ и $D(g)$ симметричны сами себе относительно начала координат на оси Ox, то и множество их общих точек симметрично себе относительно начала координат на оси Ox.

2) Для любого значения переменной имеем $h(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=$ $=f(x)\cdot(-g(x))=-f(x)\cdot g(x)=-h(x)$.

Упражнение 6

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две нечетные функции, имеющие одинаковую область определения, $h(x)=f(x)-g(x)$, $u(x)=f(x)\cdot g(x)$. Какими функциями являются $h(x)$ и $u(x)$?

Упражнение 7

Существует ли функция, которая является и четной, и нечетной одновременно?

Задачи

Часть 1

Исследуйте функцию на четность (1-8):

1. (1)а) $f(x)=x$; б) $f(x)=x^2$; в) $f(x)=|x|$; г) $f(x)=x|x|$; д) $f(x)=x+|x|$.

2. (1)а) $f(x)=x^4$; б) $f(x)=x^3$; в) $f(x)=x^3-x^4$; г) $f(x)=\dfrac{x-2}{|x|+1}$.

3. (2) $f(x)=(x+4)|x-3|+(x-4)|x+3|$.

4. (2) $g(x)=\dfrac{|x-9|}{(x+2)}+\dfrac{|x+9|}{(x-2)}$.

5. (2) $f(x)=(x+3)(x+4)(x+5)-(x-3)(x-4)(x-5)$.

6. (2) $g(x)=(x-5)^9(x+2)^5+(x+5)^9(x-2)^5$.

7. (3) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{x+3}-\dfrac{x^3+3x^2}{x-3}$.

8. (3) $g(x)=\dfrac{(x-2)^5}{(3x+4)^3}+\dfrac{(x+2)^5}{(3x-4)^3}$.

9. (2) Известно, что $f(x)$ – четная функция, возрастающая на интервале (–3;–1). Можно ли что-нибудь сказать о характере монотонности $f(x)$ на интервале: а) (0;6); б) (–4;0); в) (1;3)?

10. (1) Известно, что $f(x)$ – четная функция, $D(f)=R$, $f(150)=-4$. Чему равно значение функции в точке $x=-150$?

11. (2) Четная функция $f(x)$ задана на множестве [–6;6]. Уравнение $f(x)=7$ имеет 3 корня на промежутке $x\in(0;6]$. Сколько корней имеет уравнение $f(x)=7$ на промежутке $x\in[-6;0)$?

12. (3) Функция $f(x)$ является четной; известно, что $f(x)=x^2-2x$ при $x\geq 0$. Постройте график. Исследуйте функцию.
(Исследовать функцию – это значит указать нули функции, интервалы знакопостоянства, промежутки монотонности, экстремумы функции, наибольшее и наименьшее значения функции, область значений функции).

13. (3) Функция $f(x)$ является четной; известно, что $f(x)=-\frac{3}{x}$ при $x<0$. Постройте график $y=f(x)$. Исследуйте функцию.

14. (2) При каких значениях параметра *b* функция $f(x)=ax^2+b$ является четной?

15. (4) При каких значениях параметра *a* функция $f(x)=x^2-(2a+1)x+a^2$ является четной?

16. (2) При каких значениях параметра *a* функция $f(x)=ax^2+\mathrm{b}$ является четной?

17. (3) Пусть даны четные функции $f(x)$ и $g(x)$. Каким функциями являются $h(x)=f(x)+g(x)$, $s(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$?

Часть 2

Исследуйте функцию на четность (18–25):

18. (1) 1. а) $f(x)=-x$; б) $f(x)=|x-2|+|x+2|$; в) $f(x)=4x^5-\frac{1}{x^2}$.

19. (1) $f(x)=0$.

20. (1) $g(x)=(6x-1)^4+(6x+1)^4$.

21. (2) $f(x)=(x+7)|x-4|+(x-7)|x+4|$.

22. (2) $g(x)=\frac{|x-5|}{(x+3)}-\frac{|x+5|}{(x-3)}$.

23. (2) $f(x)=(x-6)^5(x+7)^{12}+(x+6)^5(x-7)^{12}$.

24. (2) $g(x)=(x^2-4x+7)(x^3-7x^2+3x-2)-(x^2+4x+7)(x^3+7x^2+3x+2)$.

25. (3) $f(x)=\frac{x^6-3x^3}{x-5}+\frac{x^6+3x^3}{x+5}$.

26. (3) $g(x)=\frac{(x-3)^3(x+2)^5(x-8)^7}{3x+2}+\frac{(x+3)^3(x-2)^5(x+8)^7}{3x-2}$.

27. (2) Известно, что $f(x)$ – нечетная функция, возрастающая на интервале $(-3;-1)$, $D(f)=R$. Что можно сказать о характере монотонности $f(x)$ на интервале:
а) $(0;6)$; б) $(-4;0)$; в) $(1;3)$?

28. (1) Известно, что $f(x)$ – нечетная функция, $D(f)=R$, $f(-5)=20$. Чему равно значение функции в точке $x=5$?

29. (2) Нечетная функция $f(x)$ задана на множестве [–6;6]. Уравнение $f(x)=7$ имеет 3 корня на промежутке $x\in(0;6]$. Сколько корней имеет уравнение $f(x)=-7$ на промежутке $x\in(-6;0]$?

30. (3) Функция $f(x)$ является нечетной; известно, что $f(x)=x^2-2x$ при $x\geq 0$. Постройте график $y=f(x)$. Исследуйте функцию.

31. (3) Функция $f(x)$ является нечетной; известно, что $f(x)=-x+5$ при $x<0$. Постройте график $y=f(x)$. Исследуйте функцию.

32. (2) При каких значениях параметра a функция $f(x)=ax+b$ является четной?

33. (4) Вычислите $f(-3)$, если известно, что $f(3)=2$, и функция $g(x)=f(x)+x^2$ является нечетной?

34. Пусть даны четная функция $f(x)$ и нечетная $g(x)$. Каким функциями являются $h(x)=f(x)-g(x)$, $s(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$?

35. (4) Вычислите $f(4)$, если известно, что $f(-4)=9$ и функция $g(x)=f(x)(x+1)$ является четной?

36. (2) На прямой отмечено несколько точек. Выбрав одну из них, Самат подсчитал число отрезков с концами в других отмеченных точках, на которых она лежит. Получилось 80 отрезков. Проделав то же самое с другой отмеченной точкой, он получил 90 отрезков. Сколько точек было отмечено на прямой?

37. (2) За январь, февраль, март зарплата составила в сумме 477000 тенге, а за апрель, май, июнь – 558000 тенге, при этом в течение календарного года она ежемесячно увеличивалась на одну и ту же величину. Определите зарплату за сентябрь.

38. (2) Упростите: $\operatorname{tg}^2(270°+\alpha)\cdot\sin^2(180°+\alpha)$.

39. Решите неравенство.

а) (1) $\dfrac{-4}{3x-7}>0$;

б) (2) $\dfrac{5x+4}{5x^2-6x+1}<\dfrac{1}{x-2}$

в) (3) $\dfrac{5(x^3+6x^2+12x+8)}{(x-1)^2(x+8)}\geq\dfrac{x(x+2)^3}{(x^2-2x+1)(x+8)}$. В ответе укажите количество целых решений, принадлежащих отрезку $[-10;12]$.

Ответы:

1. а) нечетная; б) четная; в) четная; г) нечетная; д) функция общего вида. **2.** а) четная; б) нечетная; в) функция общего вида; г) функция общего вида. **3.** нечетная. **4.** нечетная. **5.** четная. **6.** четная. **7.** нечетная. **8.** четная. **9.** а) нельзя ничего сказать, б) нельзя ничего сказать, в) убывает. **10.** -4. **11.** 3. **14.** $b\in(-\infty;\infty)$. **15.** $a=-\frac{1}{2}$. **16.** $a\in(-\infty;\infty)$. **18.** а) нечетная; б) четная; в) функция общего вида. **19.** четная и нечетная. **20.** четная. **21.** нечетная. **22.** четная. **23.** нечетная. **24.** четная. **25.** нечетная. **26.** четная. **27.** а) нельзя ничего сказать; б) нельзя ничего сказать; б) возрастает. **28.** -20. **29.** 3 или 4. **32.** $a=0$. **33.** –20. **35.** –5,4. **36.** 22. **37.** 222000. **38.** $\cos^2\alpha$. **39.** а) $x<\frac{7}{3}$; б) $\left(\frac{1}{5};1\right)\cup(2;+\infty)$; в) 9.

§4 ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Великая книга природы написана математическими символами.

Галилей

Перейдем к рассмотрению периодических функций. Сначала, как всегда, упражнение.

Упражнение 1

«Жизнь батарейки». Батарейку объемом 2500 мАч (миллиампер часов) один раз в сутки ставят на подзарядку, где она заряжается в течение 4 часов. Затем ее мгновенно устанавливают на некий гаджет, где ее заряд расходуют до нулевого уровня в течение 20 часов. После этого ее опять ставят на подзарядку на 4 часа, затем устанавливают в тот же гаджет и так изо дня в день. Новую батарейку с нулевым уровнем заряда поставили на подзарядку 27 февраля 2019 года в 20.00. Считая скорость зарядки и расхода электрического заряда батарейки равномерными:

а) изобразить график зависимости уровня заряда батарейки от времени в течение ближайших 5 суток;

б) установить объем заряда, содержащегося в батарейке 2 марта 2019 года в 10.00 утра.

Упражнение 2

Приведите примеры периодических процессов в природе или в жизни, процессов, характеристики которых повторяются через равные промежутки времени.

Настенные часы, движение планет, биоритмы человека, качели во дворе... Мы буквально окружены периодически происходящими явлениями. Человеческая любознательность с одной стороны и практическая нужда с другой, как всегда, привели к необходимости количественного описания таких явлений и процессов. Тут и возникала необходимость рассматривать такие функции, значения которых повторяются каждый раз, когда аргумент изменяется на определенную величину. Такие функции называются периодическими.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое положительное число T, что для любого x из области определения точки $x \pm T$ также лежат в $D(f)$ и $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$. Число T называется периодом функции $f(x)$.

Пусть $f(x)$ – периодическая с периодом T функция. Определение означает, что если любое x из области определения изменить на T (прибавить или отнять T), то новое значение аргумента снова окажется лежащим в области определения, а значение функции от этого не изменится.

Отсюда немедленно следует, что если к любому значению x из области определения несколько раз прибавить T или отнять от него несколько раз T, то результат снова будет лежать в области определения. Сказанное можно записать так: пусть k – произвольное целое число, тогда для любого $x \in D(f)$ выполняется отношение $x+kT \in D(f)$ и $f(x+kT)=f(x+kT-T)=$ $=f\left(x+kT\underbrace{-T-T-\ldots-T}_{k\ раз}\right)=f(x)$; положительное k означает прибавление k раз по T, отрицательное k означает отнимание $|k|$ раз по T.

Приведенные рассуждения показывают, что если k– некоторое натуральное число, то для любого x из области определения функции число $x+kT$ также принадлежит области определения, причем $f(x \pm kT)=f(x)$. Получилось почти дословное повторение определения периодической функции, только вместо T фигурирует kT. Получается, что kT тоже период.

Подведем итоги. Если T– период функции $f(x)$, то

1) для любого $x \in D(f)$ и $k \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство $f(x+kT)=f(x)$.

2) для любого $k \in \mathbb{N}$ число kT также является периодом функции $f(x)$.

Второй пункт означает, что если T – период, то $2T$, $3T$, $4T$ и т.д. также являются периодами функции $f(x)$. Если $f(x)$ имеет период, то она имеет бесконечно много периодов.

9 февраля 1986 года комета Галлея прошла свой перигелий (перигелий – ближайшая от Солнца точка орбиты планеты или кометы) и жители Земли имели возможность невооруженным глазом наблюдать это феерическое явление в ночном небе. Вы, конечно, знаете, что каждая комета появляется в Солнечной системе через равные промежутки времени. И Вас, конечно, интересует вопрос: Будете ли вы лично свидетелями следующего прохождения перигелия кометой Галлея? Ответ на этот вопрос зависит от **наименьшего периода обращения** данной кометы, который на самом деле равен приблизительно 75 годам.

Точно так же и при рассмотрении периодической функции, нас, прежде всего, интересует наименьший из всех периодов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

Наименьший из всех периодов (если он существует) называется главным периодом периодической функции.

У вас может возникнуть вопрос: «что значит оговорка – если он существует»? Ясно же, что если у функции есть положительные периоды, то среди них найдется минимальный. Не все так просто. Рассмотрим функцию Дирихле, которая определяется на всей числовой прямой следующим образом:

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x \text{ иррационально,}\\ 0, \text{ если } x \text{ рационально.}\end{cases}$$

Заметим, что сумма любых двух рациональных чисел есть число рациональное, а если прибавить рациональное к иррациональному, то получится иррациональное. Поэтому любое рациональное число есть период функции Дирихле. Но во множестве положительных рациональных чисел нельзя найти наименьший элемент. Так что у функции Дирихле нет главного периода.

Кстати, функция Дирихле – еще один пример, когда график как множество точек координатной плоскости существует, но как-либо вразумительно изобразить его не получается.

Теперь об упражнении 1. Это как раз тот случай, когда «лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать». Мы надеемся, что вы увидите, как получается следующий график (рис. 1).

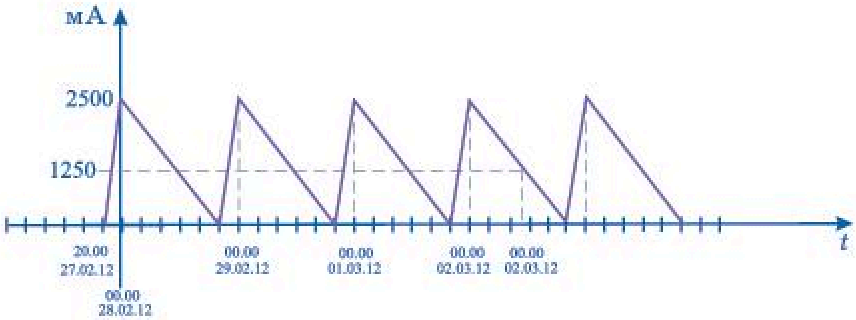


Рис. 1

Заметим лишь, что если «забыть», откуда взялся этот график и продолжить его влево и вправо таким же образом до бесконечности, то мы как раз и получим периодическую функцию с главным периодом $T = 24$ часа.

Пример 1 Приведем пример еще одного графика периодической функции (рис. 2).

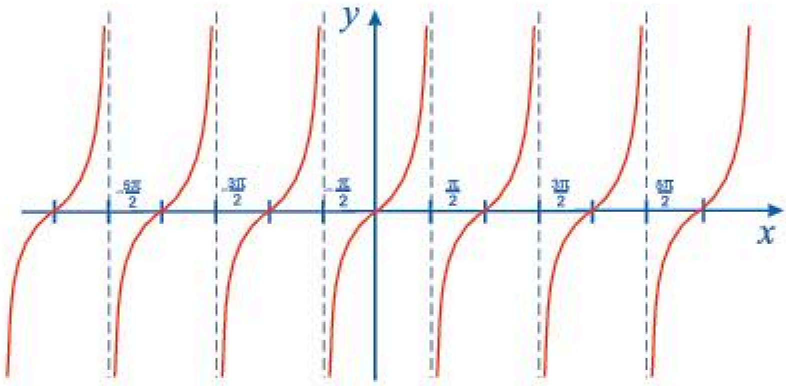


Рис. 2

Вы видите перед собой фрагмент графика функции $f(x) = \mathrm{tg}\,x$, имеющей главный период $T = \pi$. Одна из бесконечных ветвей графика лежит между прямыми $x = -\dfrac{\pi}{2}$ и $x = \dfrac{\pi}{2}$, асимптотически (бесконечно близко) приближаясь к этим прямым справа и слева соответственно. Весь график состоит из бесконечного числа таких ветвей, полученных из данного, параллельными сдвигами влево и вправо вдоль оси Ox на π, 2π, 3π и т.д. Попытайтесь представить в воображении всю эту конструкцию. Обсуждение вопроса о том, почему график функции $y = \mathrm{tg}\,x$ выглядит именно так, нас еще ждет впереди.

Упражнение 3

Постарайтесь разобраться, как данный график отражает определение и свойства периодических функций, которые мы рассмотрели в этом параграфе.

Упражнение 4

Начиная с точки 0 на положительной полуоси Ox, Жайна отмечает точки через каждые 3 ед., а Бахытжан – через каждые 5 ед. Найти расстояние между соседними дважды отмеченными точками.

ТЕОРЕМА 1.

Если T_1 и T_2 – периоды функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то наименьшее число $T>0$ такое, что $\frac{T}{T_1}$ и $\frac{T}{T_2}$ – целые положительные числа, является периодом функций $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$.

Число T в условии теоремы необязательно существует. Если такое существует, то T не обязательно является главным периодом.

О применении этой теоремы мы будем говорить более подробно в главе о тригонометрических функциях. Вместо доказательства приведем рис. 3:

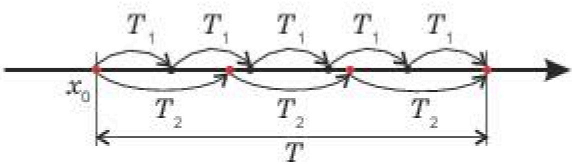


Рис. 3

Пусть x_0 – некоторая точка на прямой Ox, принадлежащая $D(f)$ и $D(g)$, $h(x)=f(x)\cdot g(x)$. Значения функции f совпадают друг с другом во всех черных точках, а значения функции совпадают друг с другом во всех красных. Если какая-то точка стала и красной и черной, то значение $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ в этой точке и точке x_0 совпадает.

Пример 2 Пусть функция $f(x)$ имеет период $T_1=3$, функция $g(x)$ имеет период $T_2=5$. Найти период функции $f(x)-g(x)$.

Решение. Пусть число T является периодом функции $f(x)-g(x)$. Согласно теореме 1 число T удовлетворяет следующим соотношениям: $\frac{T}{T_1}=\frac{T}{3}=k$, $\frac{T}{T_2}=\frac{T}{5}=n$, где k и n – натуральные числа. Тогда $T=3k=5n$, $\frac{k}{n}=\frac{5}{3}$. Наименьшие k и n, для которых это возможно, равны 5 и 3 соответственно. Следовательно, $T=15$.

Пример 3

Пусть $f(x)$– нечетная периодическая функция с периодом $T=10$. Известно, что $f(7)=8$. Найти $f(113)$.
Решение. Если $T=10$ – период функции, то $(113)=f(113-11\cdot10)=$ $=f(3)=f(3-10)=f(-7)$. Функция $f(x)$ – нечетная, следовательно, $f(-7)=-f(7)=-8$.
Ответ. –8.

Задачи

Часть 1

1. (1) Периодическая функция $f(x)$ такова, что $f(1)=-3$, $T=4$ – период функции. Найдите $f(5)$, $f(81)$, $f(-7)$.
2. (2) Функция $g(x)$ четная и имеет период $T=6$, на множестве $x\in[-2;0)$ имеет место равенство $g(x)=-2x+1$. Найдите $g(100)$, $g(98)$, $g(103)$.
3. (1) Изобразите график четной функции $y=f(x)$,если $f(x)$ имеет период $T=4$, и на множестве $[-2;0]$ значения $f(x)$ задаются формулой $f(x)=x+2$.
4. (2) Изобразите график функции $y=f(x)$, если $f(x)$ имеет период $T=2$ и на множестве $(0;2]$ значения $f(x)$ задаются формулой $f(x)=\frac{4}{x}$.
5. (2) Нечетная функция $f(x)$ имеет период $T=4$ и на множестве $[-2;0]$ задается формулой $f(x)=x^2+2x$. Изобразите график функции $y=f(x)$.
6. (2) Четная функция $f(x)$ имеет период $T=4$ и на множестве $[-2;0]$ задается формулой $f(x)=x^2+2x$. Изобразите график функции $y=f(x)$.

7. (4) Известно, что равенство $f(x+2)=-f(x)$ выполняется при всех $x\in(-\infty;+\infty)$. Докажите, что $f(x)$ является периодической с периодом $T=4$.

8. (1) Известно, что $f(x)$ – периодическая функция. Обязательно ли следующие функции являются периодическими: $y=f^2(x)$, $y=f(x^2)$, $y=|f(x)|$, $y=g(f(x))$, где $g(x)$– некоторая функция?

9. (3) Найдите значение выражения $f(1)+2f(-2)+4f(16)$, если известно, что функция $y=f(x)$ нечетная и периодическая с периодом, равным 10, а на отрезке [0;5] она определена формулой $f(x)=10x-2x^2$.

10. (3) Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 6. При каждом x из промежутка (–2;4] значение функции $f(x)$ совпадает со значением функции $g(x)$ определенной: $g(x)=\begin{cases} x^2-1, -2<x\le 2 \\ 3,\ 2<x\le 4 \end{cases}$.

Найдите значение выражения $f(6)+f(10)-2f(8)$.

11. (3) Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 9. На рисунке 4 изображен график этой функции при $x\in(-5;4]$. Найдите значение выражения $f(-10)-f(-1)\cdot f(8)$.

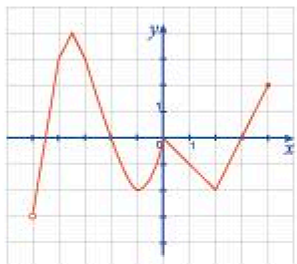


Рис. 4

Часть 2

12. (2) Периодическая функция $f(x)$ такова, что $f(-1)=5, f(5)=-6$, период функции $f(x)$ равен 10. Найдите $f(99)-f(-105)$. $f(-1)=5$, $f(5)=-6$.

13. (3) Функция $g(x)$ имеет период $T=7$, на множестве $x\in(-1;6]$ выполняется равенство $g(x)=-3x+7$. Найдите $g(2013)$.

14. (2) Изобразите график функции $y=f(x)$, если $f(x)$ имеет период $T=4$ и на множестве $[6;10)$ значения $f(x)$ задаются формулой $f(x)=-x+8$.

15. (2) Изобразите график функции $y=f(x)$, если $f(x)$ имеет период $T=2$ и на множестве $[0;2]$ значения $f(x)$ задаются формулой $f(x)=x^2-2x$.

16. (2) Четная функция $f(x)$ имеет период $T=4$, на множестве $[-2;0)$ задается формулой $f(x)=\dfrac{4}{x}$ и не определена в точке 0. Изобразите график функции $y=f(x)$.

17. (3) Нечетная функция $f(x)$ имеет период $T=12$, на интервале (0; 6) задается формулой $f(x)=\frac{1}{3}(x-3)^2$, в точках $x=0$ и $x=6$ не определена. Изобразите график функции $y=f(x)$.

18. (4) Пусть $f(x)$ – функция, удовлетворяющая при всех x равенству $f(x)=f(2-|x|)$. Докажите, что $f(x)$ – четная периодическая функция.

19. (3) Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 6. На промежутке [–3;0] она задается формулой $f(x)=x^2+x+2$. Найдите значение выражения $f(10)-f(5)+f(-4)$.

20. (3) Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой оси и является периодической с периодом 5. На рисунке 5 изображен график этой функции при $-3\le x\le 2$. Найдите значение выражения $\frac{f(11)}{f(0)\cdot f(-9)}$.

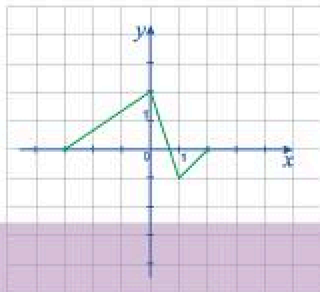


Рис. 5

21. (3) Семья Алишера приехала на дачу в 16:00. Если бы они увеличили свою скорость на 25%, то приехали бы на дачу в 14:30. Во сколько они выехали из дома?

22. (1) Упростите: $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

23. (3) Белла собирается купить квартиру в новом доме. Менеджер отдела продаж предлагает ей одновременно купить место в подземном паркинге за 1 095 000 тенге. Если Белла купит паркинг, то ей придется еще платить 3000 тенге в месяц за техобслуживание паркинга. Если не купит, то ей придется платить по 400 тенге в сутки за место в том же паркинге. Какое число ближе всего отражает количество лет, за которое окупится покупка места паркинга?
A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

24. (2) Решите систему: $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}=5 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$.

Ответы:

1. –3; –3; –3. **2.** 5, 5, 3. **8.** да, нет, да, да. **9.** –48. **10.** –4. **11.** –6. **12.** 11. **13.** –5. **19.** 6. **20.** 0,5. **21.** время 08:30. **22.** 0. **23.** D. **24.** (–3; –2), (3;2).

§5 КОМПОЗИЦИЯ ФУНКЦИЙ И ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Я составил краткую книгу об исчислении алгебры и алмукабалы, заключающую в себе простые и сложные вопросы арифметики, ибо это необходимо людям.
Аль-Хорезми

5.1 Сложные функции

Упражнение 1

Предположим, в некотором учебном заведении стипендия назначается согласно следующей таблице:

(0;3,5]	(3,5;4]	(4;4,5]	(4,5;5]
0	10000	20000	40000

В верхней строчке – средний балл студента по итогам сдачи экзаменов последнего семестра, в нижней – размер соответствующей стипендии в тенге. В верхней строчке следующей таблицы – номера студентов по списку одной из учебных групп этого учебного заведения, в нижней – средний балл по итогам последней сессии.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3,5	4	3,7	3,2	4,1	5	4,9	3	3,3	4,75	4,5	3,6	4,5	4,9	3,1	5

Сколько студентов будут получать стипендию в размере 40000 тенге? Сколько студентов будут получать стипендию от 10000 до 20000 тенге?

Рассмотрим две функции $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=3x+1$ на их естественных областях определения. Функция $g(x)$ числу 5 ставит в соответствие число 16, так как $g(5)=3\cdot5+1$. Функция $f(x)$ числу 16 ставит в соответствие число 4, так как $f(16)=\sqrt{16}=4$. В результате числу 5 поставлено в соответствие число 4 в два этапа: $5\xrightarrow{g(x)}16\xrightarrow{f(x)}4$.

Поскольку $16=g(5)$, то можно записать: $f(16)=f(g(5))=4$. Форма записи $f(g(5))=4$ хорошо отражает тот факт, что на число 5 сначала «подействовали» функцией, а потом на то, что получилось, «подействовали» функцией $f(x)$. Аналогично, $f(g(10))=f(31)=\sqrt{31}$. Однако, например, функция $g(x)$ числу (-3) ставит в соответствие число (-8), а функция $f(x)$ не имеет возможности числу (-8) поставить в соответствие какое бы то ни было число, потому что (-8) не входит в область ее определения. Разберемся, на какие числа можно «действовать» сначала функцией $g(x)$, а потом $f(x)$, а на какие нельзя. Так как функция $g(x)$ «превращает» число x в число $3x+1$, а $f(x)$ – извлекает из них корень, то получаем условие $3x+1\geq 0$ (корень извлекается только из неотрицательных чисел). Таким образом, мы понимаем, что если $x<-\frac{1}{3}$, то $g(x)$ мы посчитать сможем, а $f(g(x))$ – не сможем. Но для любого $x\geq -\frac{1}{3}$ мы сможем сначала вычислить число $g(x)$, а затем это число подставить в $f(x)$ и получить $f(g(x))=\sqrt{g(x)}$. Получилась новая функция, которая каждому числу из множества $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$ ставит в соответствие результат последовательного «применения» к нему двух функций: сначала $g(x)$, а затем $f(x)$. Если как-нибудь обозначить эту новую функцию, например $h(x)$, то $h(x)=f(g(x))$ и $D(h)=\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$. Кроме того, мы имеем возможность записать аналитическую формулу $h(x)=\sqrt{3x+1}$.

Функция $h(x)$ называется **композицией функций**, или **суперпозицией функций**, или **сложной функцией**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Пусть заданы две функции $f(x)$ и $g(x)$. Если существуют такие x из области определения функции g, что $g(x)\in D(f)$, то для таких x существует значение функции f в точке $g(x)$, которое обозначается $f(g(x))$. Функция, которая каждому такому x ставит в соответствие число $f(g(x))$, называется композицией функций и обозначается $y=f(g(x))$. Множество значений $x\in D(g)$ таких, что $g(x)\in D(f)$, является областью определения композиции.

Для аналитически заданных функций композицию построить очень легко: достаточно формулу для одной функции подставить вместо аргумента в другую.

Пример 1

Пусть $f(x)=x^3$, $g(x)=|x+4|$, $h(x)=\frac{1}{2x^2}$. Тогда

$$f(g(x))=g^3(x)=|x+4|^3;\ g(h(x))=|h(x)+4|=\left|\frac{1}{2x^2}+4\right|=\frac{1}{2x^2}+4;$$

$$h(g(x))=\frac{1}{2g^2(x)}=\frac{1}{2|x+4|^2}=\frac{1}{2(x+4)^2};$$

$$f(h(x))=h^3(x)=\left(\frac{1}{2x^2}\right)^3=\frac{1}{8x^6};$$

$$h(f(x))=\frac{1}{2f^2(x)}=\frac{1}{2(x^3)^2}=\frac{1}{2x^6};\ h(h(x))=\frac{1}{2h^2(x)}=\frac{1}{2\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2}=2x^4.$$

Пример 2

Если $f(x)=x^2-2x$, то $f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)$.

Упражнение 2

График 1 отображает зависимость себестоимости p единицы продукции A, выпущенной заводом B, от цены q сырья C на мировом рынке (рис. 1). График 2 отображает цены на сырье C в течение 2010 года (по оси OX – номера месяцев (рис.2)). Найдите приблизительную себестоимость продукции A в конце каждого месяца.

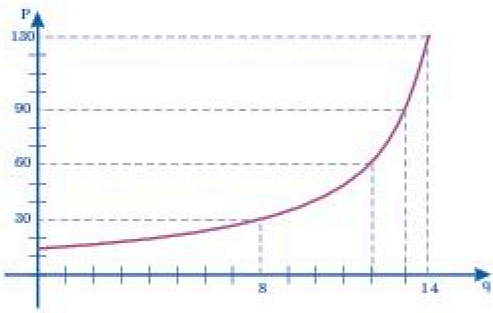


Рис. 1

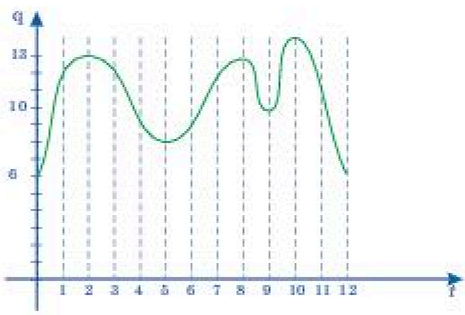
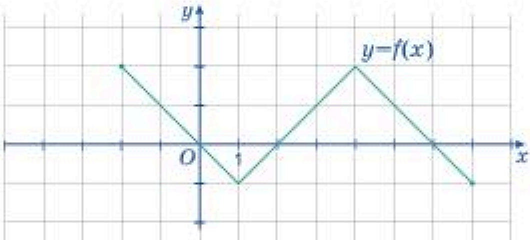


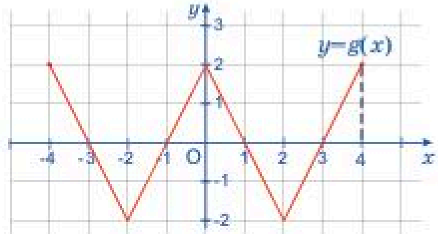
Рис. 2

Задачи

Часть 1

1. (2)–(3) На рисунке изображены графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$; $D(f)$: $[-2;7]$, $D(g)$: $[-4;4]$.





а) Найдите $f(g(2)), g(f(3)), f\left(g\left(-2\frac{1}{2}\right)\right)$.

б) Решите уравнение $f(g(x))=2$.

в) Решите уравнение $g(f(x))=-1$.

2. (1) Даны функции $f(x)=3x+2$ и $g(x)=-2x+1$. Найдите: $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(g(f(x)))$, $g(f(f(x)))$.

3. (2) Пусть $f(x)$ – возрастающая, $g(x)$ – убывающая функции на интервале (a,b). Что можно сказать о характере монотонности функции $h(x)=f(g(x))$ на данном интервале?

4. а) (1) Пусть $\varphi(x)=\frac{1}{x}$. Найдите $\varphi(\varphi(x))$. б) (2) $\alpha(x)=\frac{xa+1-a^2}{x-a}$, где a – некоторое число. Докажите, что $\alpha(\alpha(x))=x$.

5. Пусть $g(x)=2x+2,\ f(x)=-x+4$

а) (1) Решите уравненние: $g(f(x))=f(x)$.

б) (3) При каких значениях x значение функции $g(x)$ не больше значения функции $f(g(x))$?

6. (2) Заданы функции $h(x)=x$ и $f(x)=\frac{2x-1}{x}$. Найдите композиции

а) $h(f(x))$, б) $f(h(x))$.

7. (3) Даны функции $g(x)=\frac{2x+3}{x-4}$ и $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

Решите неравенства:

а) $g(f(x))<1$; б) $f(g(x))>0$; в) $f(g(x))>-1$.

8. (2) Функция вида $y=kx+m$, где k и m – некоторые числа, называется линейной. Докажите, что композиция любых двух линейных функций есть снова линейная функция.

9. (4) Известно, что $f(x+3)=2f(x)-5$ при всех x. Выразите $f(x+6)$ и $f(x+9)$ через $f(x)$.

10. (3) Пусть $h(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2$. Найдите область определения каждой из функций $f_1(x)=h(g(x))$ и $f_2(x)=g(h(x))$. Чему равно $f_1(x)$ при $x<0$?

11. (2) Даны функции $g(x)=\frac{1}{x}$ и $f(x)=x^2-4x+3$. При каких значениях x значение функции $f(g(x))$ меньше нуля?

12. (3) «Нули» функции $f(x)$, то есть значения аргумента x, при которых $f(x)=0$, образуют множество {–4;2;0}. Найдите «нули» функции $h(x)=f(2x)$.

13. (3) Известно, что естественная область определения $D(f)$ функции $f(x)$ есть множество $(-\infty;5)\cup(5;9)$. Найдите естественную область определения функции $h(x)=f(2x+3)$.

14. (3) Известно, что естественная область определения $D(f)$ функции $f(x)$ есть множество $[7;+\infty)$. Найдите естественную область определения функции $h(x)=f(-2x+1)$.

15. (3) Известно, что естественная область определения $D(f)$ функции $f(x)$ есть множество $[17;26)$. Найдите естественную область определения функции $h(x)=f(3x+2)$.

Часть 2

16. (2) Используя условие и рисунки задачи №1 из части 1, выполните задания:

а) найдите $g(f(2))$, $f\left(g\left(2\frac{1}{2}\right)\right)$, $g(f(7))$;

б) решите уравнение $g(f(x))=2$;

в) решите уравнение $f(g(x))=-2$.

17. (1) Даны функции $g(x)=2x-3$, $h(x)=\cos x$ и $f(x)=x^3$.

Найдите $h(f(x))$, $f(h(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(h(x))$, $h(g(x))$.

18. (1) Для функции $f(x)=2x-3$ найдите $f(f(x)$, $f(f(f(x)))$.

19. (2) Пусть $f(x)$ – возрастающая, $g(x)$ – убывающая функция на интервале $(a;b)$. Что можно сказать о характере монотонности функции $g(f(x))$ на данном интервале? Что можно сказать о функции $g(g(x))$?

20. (2) Обозначим $\varphi(x)=\dfrac{x-1}{x}$. Докажите, что $\varphi(\varphi(\varphi(x)))=x$.

21. (2) Пусть $h(x)=-2x+1$, $g(x)=3x+3$

а) Решите неравенство $h(g(x))\geq h(x)$.
б) Найдите значения, при которых значения функций $g(h(x))$ и $4h(g(x))$ равны между собой?

22. (3) Даны функции $g(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$ и $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$.

Решите неравенства:

а) $g(f(x))<0$; б) $f(g(x))>\dfrac{1}{2}$; в) $f(f(x))>f(3)$.

23. (3) Решите неравенство $g(g(x))\geq 2$, если $g(x)=\dfrac{3x-8}{x-3}$.

24. (2) Функции вида $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$ называются дробно-линейными.

Докажите, что композиция двух любых дробно-линейных функций есть снова дробно-линейная функция.

25. (2) Даны функции $g(x)=\dfrac{1}{x}$ и $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$.

При каких значениях значение функции $f(g(x))$ меньше нуля?

26. (2) Известно, что решениями уравнения $f(x)=7$ являются числа $\{-9, 6, 5, 8\}$. Найдите корни уравнения $f(3x)=7$.

27. (3) Известно, что естественная область определения $D(f)$ функции $f(x)$ есть множество $(-4;4)\cup[9;16]$. Найдите естественную область определения функции $h(x)=f(x^2)$.

28. (3) Даны функции $g(x)=\dfrac{3x+1}{x}$ и $f(x)=x^2-5x+6$.

Решите неравенство $f\big(g(x)\big)>0$.

29. (3) Часы идут правильно. Через 5 минут их часовая и минутная стрелки совпадут. Через какое минимальное время угол между часовой и минутной стрелками станет таким же, как и 10 минут назад?

30. (2) Сумма четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 14. Найдите сумму первых девяти членов прогрессии.

31. (2) Упростите: $\left(\dfrac{3-\sqrt{a}}{9-a}+\dfrac{1}{3-\sqrt{a}}-6\dfrac{a^2+162}{729-a^3}\right)^{-1}+\dfrac{a(a+9)}{54}$.

32. (3) Найдите решения уравнений: а) $\left|-x^2-16\right|=8x$; б) $x^2-4|x|+3=0$.

Ответы:

1. а) $2;\ 0;\ 1$; б) $x=-2;2$; в) $x=-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}$.

2. $f(g(x))=-6x+5$; $g(f(x))=-6x-3$, $f\big(g(f(x))\big)=-18x-7$,

$g\big(f(f(x))\big)=-18x-15$.

3. $h(x)$ – убывающая. **4.** а) $\varphi\big(\varphi(x)\big)=x$.

5. а) 6; б) $x\le 0$. **6.** $h\big(f(x)\big)=f\big(h(x)\big)=f(x)$. **7.**а) $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{7}{8};+\infty\right)$;
б) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{3};4\right)\cup(4;+\infty)$; в) $\left(-\infty;-\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{3};4\right)\cup(4;+\infty)$.

9. а) $4f(x)-15$; б) $8f(x)-35$.

10. $D(f_1)=R,\ D(f_2): x\ge 0,\ f_1(x)=-x$ при $x<0$.

11. $x\in(\frac{1}{3};1)$. **12.** $\{-2;1;0\}$. **13.** $(-\infty;1)\cup(1;3)$. **14.** $(-\infty;-3]$. **15.** $[5;8)$

16. а) $2,1,0$; б) $x\in\{0;2;6\}$; в) $x\in\varnothing$.

17. $h\big(f(x)\big)=\cos x^3; f(h)=\cos^3 x; f\big(g(x)\big)=(2x-3)^3$.

$g\big(f(x)\big)=2x^3-3;\ g\big(h(x)\big)=2\cos x-3;\ h\big(g(x)\big)=\cos(2x-3)$.

18. $f(f(x))=4x-9$; $f(f(f(x)))=8x-21$.

19. $g(f(x))$ убывает, $g(g(x))$ возрастает.

21. а) $\left(-\infty;-1\frac{1}{2}\right]$; б) $-1\frac{4}{9}$. **22.** *а)* $x\in\left(-\frac{5}{3};-\frac{3}{2}\right)$; *б)* $x\in(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{4}{3};-1\right)\cup(-1;+\infty)$;

в) $x\in(-2,5;-2)\cup\left(-2;-\frac{5}{3}\right)$. **23.** $x\in[2;3)\cup(3;+\infty)$. **25.** $x\in(-1;0)$. **26.** $\left\{-3;2;\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right\}$.

27. $[-4;-3]\cup(-2;2)\cup[3;4]$. **28.** $(-1;0)\cup(0;+\infty)$. **29.** 20 минут. **30.** 63. **31.** $-\frac{2}{3}$.

32. а) $x=4$; б) $x_1=-3,\ x_2=-1,\ x_3=1,\ x_4=3$.

5.2 Взаимно обратные функции

Упражнение 1

На координатной плоскости постройте прямую $y=x$. Отметьте пары точек $(4;3)$ и $(3;4)$, $(-2;5)$ и $(5;-2)$, $(-3;-6)$ и $(-6;-3)$, $(5;0)$ и $(0;5)$. Что вы можете сказать о таких точках и прямой $y=x$?

Каждому гражданину Республики Казахстан не младше семнадцати лет поставим в соответствие номер его удостоверения личности. Два различных человека не могут иметь один и тот же номер удостоверения. Поэтому, зная номер удостоверения, можно однозначно установить личность его владельца.

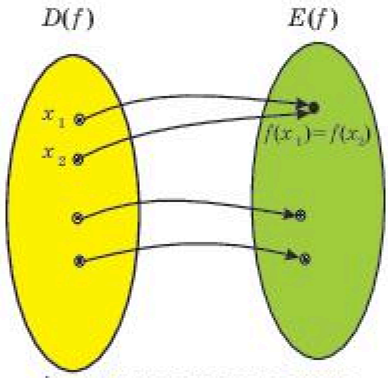
Каждому гражданину Республики Казахстан поставим в соответствие последовательность букв, обозначающую его имя и фамилию. Два различных человека могут иметь одинаковые имена и фамилии. Поэтому, зная имя и фамилию, мы не можем однозначно установить личность их владельца.

Фактически, и в первом и во втором случаях описаны функции. Но в первом случае функция задает взаимно однозначное соответствие, а во втором случае соответствие не является взаимно однозначным.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$. $D(f)=(-\infty;+\infty)$. Если $f(x)=4$, то мы не можем однозначно сказать, чему равно значение x, так как $f(-2)=4$ и $f(2)=4$. Рассмотрим функцию $g(x)=x^2, D(g)=(-\infty;0]$. Если $g(x)=a\geq 0$, то мы можем сказать, что $x=-\sqrt{a}$. Функция $g(x)$ является взаимно однозначной, в то время как $f(x)$ таковой не является.

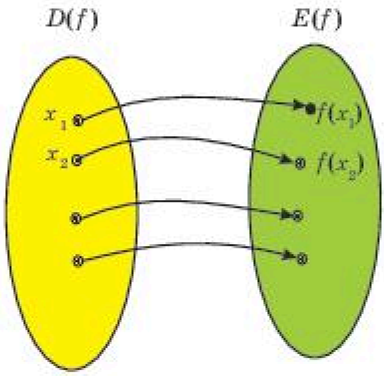
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

Функция $f(x)$ называется взаимно однозначной, если для любых x_1 и x_2 из $D(f)$ таких, что $x_1 \neq x_2$, выполняется $f(x_1) \neq f(x_2)$.



функция не является взаимно однозначной

Рис. 3



функция является взаимно однозначной

Рис. 4

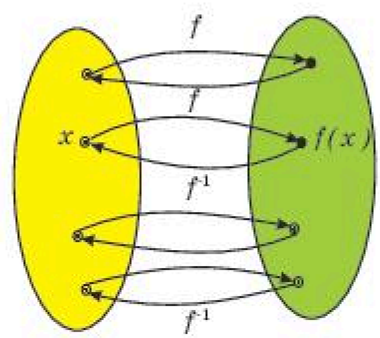


Рис. 5

Другими словами, функция является взаимно однозначной, если любым двум различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции. Это эквивалентно тому, что из равенства $f(x_1)=f(x_2)$ следует равенство $x_1=x_2$ (один игрек не может получиться из двух разных иксов 🙂). Это значит, что для каждого числа y из $E(f)$ существует только одно значение аргумента x из $D(f)$ такое, что $y=f(x)$. Каждому числу y из $E(f)$ поставим в соответствие то число x из $D(f)$, для которого $y=f(x)$. Получилось определение новой функции! Только действует она из $E(f)$ в $D(f)$, то есть $E(f)$ – область определения, $D(f)$ – множество значений новой функции, которая называется обратной к $f(x)$ и обозначается $f^{-1}(x)$ (рис. 5).

Почему $f^{-1}(x)$, *а не* $f^{-1}(y)$? *Дело в том, что* значения y функции f становятся аргументами x для функции f^{-1}.

Если рассмотреть композицию функций $f^{-1}(f(x))$, то получаем, что для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f^{-1}(f(x))=x$ (смотрите рисунок). Понятно также, что для любого $x \in E(f)=D(f^{-1})$ выполняется равенство $f(f^{-1}(x))=x$. В этом смысле функция $f(x)$ является обратной к $f^{-1}(x)$ и поэтому f и f^{-1} называют взаимно обратными функциями.

Сформулируем теперь корректное определение.

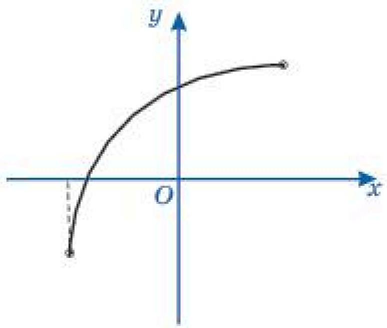
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.

Пусть дана функция f с областью определения $D(f)$ и множеством значений $E(f)$. Функция $g(x)$ называется обратной к $f(x)$, если ее область определения $D(g)$ совпадает с множеством $E(f)$ и для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $g(f(x))=x$. Функция $g(x)$, обладающая таким свойством относительно функции f, обозначается $f^{-1}(x)$.

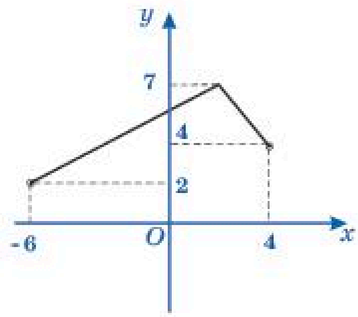
Обратная функция к f существует тогда и только тогда, когда f– взаимно однозначная функция.

Упражнение 2

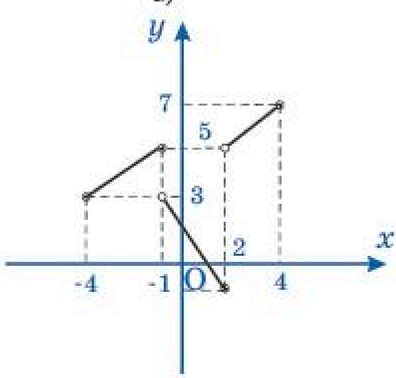
Являются ли функции, графики которых изображены на рисунках, взаимно однозначными?



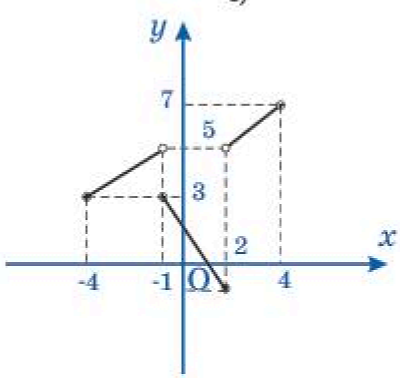
а)



б)



в)



г)

Функция $y=f(x)$ взаимно однозначна, если для любого $y_0 \in E(f)$ существует ровно одно x_0 такое, что $y_0=f(x_0)$. На рисунке б) для любого $y_0 \in [4;7)$ существует два значения x_0, для которых $y_0=f(x_0)$.

Следовательно, функция на рисунке б) не является взаимно однозначной и, как следствие, не имеет обратной. Аналогично, на рисунке г) функция принимает значение 3 в двух точках ($x=-4$ и $x=-1$) и по этой причине не является взаимно однозначной.

Становится понятным, что если хотя бы одна горизонтальная прямая имеет с графиком две или более общих точек, то функция не является взаимно однозначной. Обратно, если каждая горизонтальная прямая имеет с графиком $y=f(x)$ не более одной общей точки, то $f(x)$ – взаимно однозначная функция (рисунки а), в)). Очевидно, что такое свойство графика имеет место для любых монотонных функций.

Поговорим теперь о практическом способе нахождения обратных функций. Пусть $y=f(x)$ – некоторая аналитически заданная функция. Формула для функции f^{-1}, если она существует, по определению должна выражать x через y. Но выразить x через y– это значит решить уравнение $y=f(x)$, где y можно рассматривать в качестве параметра. При этом если для всех y уравнение $y=f(x)$ имеет один корень, то это автоматически означает, что ответ найден. Если же ответ неоднозначен, то нужно выбрать тот корень, который лежит в $D(f)$.

Пример 1

Найдите функцию, обратную к функции $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$.

Решение. Выражаем x через параметр y. Имеем $y(x-2)=3x+1$, $yx-2y=3x+1$, $x(y-3)=2y+1$. $x=\dfrac{2y+1}{y-3}$ остается вспомнить, что значение y функции является аргументом x обратной функции f^{-1}. Ответом, следовательно, является функция $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$.

Пример 2

$f(x)=x^2,\ x\in(-\infty;0]$. Найдите $f^{-1}(x)$.

Решение. Решаем уравнение $y=x^2$, где x – переменная, y – параметр. Имеем $x=\pm\sqrt{y}$.
Из двух корней выбираем тот, который лежит в $D(f)=(-\infty;0]$, $x=-\sqrt{y}$. Значение функции становится аргументом для обратной функции: $y=-\sqrt{x}$.

Ответ: $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$, где $[0;+\infty)$.

Пример 3 $f(x)=x^2+2x,\ x\in[-1;+\infty)$. Найдите $f^{-1}(x)$.

Решение. Решаем уравнение $y=x^2+2x$. Преобразования:

$x^2+2x+1=y+1,\ (x+1)^2=y+1,\quad x+1=\pm\sqrt{y+1},\quad x+1=\pm\sqrt{y+1}$. Заметим, что $x=-1+\sqrt{y+1}\in[-1;+\infty)$, $x=-1-\sqrt{y+1}\notin[-1;+\infty)$.

Остается формально поменять местами x и y в формуле $x=-1+\sqrt{y+1}$.

Ответ: $y=-1+\sqrt{x+1}$, где $x\in[-1;+\infty)$.

Сформулируем и докажем еще два свойства взаимно обратных функций.

1) Графики двух взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно прямой $y=x$.

2) Если одна из двух взаимно обратных функций возрастающая, то и другая является возрастающей. Если одна из двух взаимно обратных функций убывающая, то и другая является убывающей.

Доказательство:

1) Если точка $(x_0;y_0)$ лежит на графике $y=f(x)$, то это значит, что $y_0=f(x_0)$ (рис.6). По определению обратной функции $x_0=f^{-1}(x_0)$, т.е. точка лежит на графике $y=f^{-1}(x)$. Остается заметить, что любые точки $(x_0;y_0)$ и симметричны друг другу относительно прямой $y=x$ (упражнение 1).

2) Пусть $y=f(x)$ – возрастающая функция и $f^{-1}(x)$ обратная к ней. Для возрастающей функции условия $x_1>x_2$ и $y_1>y_2$ равносильны, где $y_1=f(x_1)$ и $y_2=f(x_2)$. Но $x_1=f^{-1}$ и (y_1) $x_2=f^{-1}(y_2)$. Получается равносильность условий $y_1>y_2$ и $f^{-1}(y_2)$, т.е. большему аргументу функции $f^{-1}(x)$ соответствует большее ее значение. Следовательно, $f^{-1}(x)$ – возрастающая.

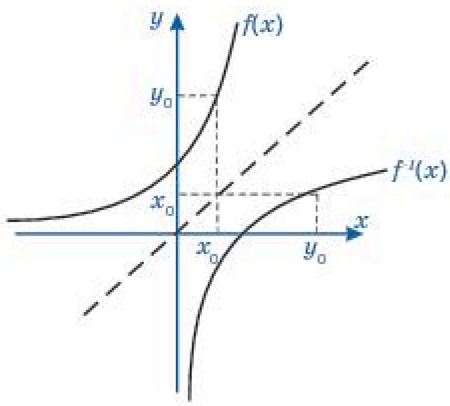


Рис. 6

Упражнение 3

Доказать свойство 2) для случая убывающих функций.

Задачи

Часть 1

1. (1) Определите, для каких из следующих функций существует обратная функция. Напишите формулу обратной функции:

а) $f(x)=3x-5$; б) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$; в) $f(x)=x^2+2x$ при $x\ge-1$; г) $f(x)=x^2+x, x\ge0$.

2. (2) При каких соотношениях между числами a,b,c,d функция $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ обратна самой себе?

3. (3) На какое множество отображает функция множество, если:

а) $f(x)=\dfrac{x}{x-3}, A=(3;5]$;

б) $f(x)=4-\dfrac{x}{2}, A=[-4;6)$;

в) $f(x)=x^2-x-2, A=[0;3]$?

4. (3) Найдите функцию, обратную данной. Укажите область определения и область значений обратной функции. Постройте графики данной функции и обратной в одной системе координат:

а) $y=2x$; б) $y=-3x$; в) $y=5x-1$; г) $y=3-4x$; д) $y=\dfrac{3}{x-1}$; е) $y=\dfrac{2}{2-x}$;

ж) $y=\dfrac{3x}{2x-1}$; з) $y=\dfrac{1-x}{x+2}$.

5. (2) Пусть $f(x)$– функция, для которой существует обратная функция $f^{-1}(x)$. Что можно сказать о функции $f^{-1}(x)$, если:
а) функция $f(x)$ – нечетная; б) $f(x)$ – возрастающая; в) $f(x)$ – убывающая?

6. (2) Какие из следующих функций имеют обратные функции:
а) $f(x)=x+x^3$; б) $f(x)=x-x^3$; в) $f(x)=x|x|$?

Часть 2

7. (2) Для следующих функций $f(x)$ напишите формулу обратной функции $f^{-1}(x)$ и укажите область ее определения:

а) $f(x)=2x+7$; б) $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+5}$; в) $f(x)=\sqrt{3-2x}+1$.

8. (2) Пусть $g(x)$– функция, обратная к функции $f(x)=x+x^5$. Вычислите $g(34)$.

9. (3) Пусть $g(x)$ – функция обратная к функции $f(x)$. Выразите через $g(x)$ функцию обратную к функции $f(ax+b)(a\neq 0)$.

10. (5) Напишите формулу обратной функции $f^{-1}(x)$ для функции $f(x)=2x-|x+1|$.

11. Найдите функцию, обратную данной. Укажите область определения и область значений обратной функции. Постройте графики данной функции и обратной в одной системе координат:

а) (2) $y=(x+3)^2, x\leq -3$; б) (2) $y=(x-4)^2, x\geq 4$; в) (3) $y=x^2+8x-4,\ x\geq -4$;

г) $y=x^2-2x+5, x\leq 1$; д) (2) $y=\sqrt{x-2}$; е) (2) $y=\sqrt{3-x}$; ж) (3) $y=4-\sqrt{x-1}$;

з) (3) $y=5+\sqrt{4-x}$.

12. (2) На улице, встав в кружок, беседуют четыре девочки: Мадина, Айгуль, Женя и Ира. Девочка в зеленом платье (не Мадина и не Айгуль) стоит между девочкой в голубом платье и Ирой. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом и Айгуль. Какое платье носит каждая из девочек?

13. (2) Себестоимость выпускаемой на новом конвейере продукции в первые полгода ежемесячно уменьшалась в одно и то же число раз. Найдите себестоимость продукции во второй месяц этого полугодия (в тыс. тенге), если в четвертый месяц она составила 512 тыс. тенге, а в последний месяц – 327,68 тыс. тенге.

14. (3) Из данных четырех чисел первые три относятся между собой как $1/5: 1/3: 1/20$, а четвертое состовляет 15% второго. Найти эти числа, если известно, что второе число на 8 больше суммы остальных.

15. (2) Из круга вырезали концентрический с ним круг, площадь которого составляет 81% от площади исходного круга. Какой процент от радиуса первоначального круга составляет толщина кольца?

16. (2) Поезд должен пройти 54 км. Поезд прошел 14 км и был задержан на 10 мин у светофора. Увеличив первоначальную скорость на 10 км/ч, он прибыл на место назначения с опозданием на 2 мин. Определите первоначальную скорость.

Ответы:

1. а) $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3}$; б) $f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x-2}$; в) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-1$; г) $f^{-1}(x)=\frac{\sqrt{1+4x}-1}{2}$.

2. Либо $a=-d$, либо $b=c=0,\ a=d$. **3.** а) $[2,5;+\infty)$; б) $(1;6]$; в) $[-2;4]$.

5. а) $f^{-1}(x)$ нечетная; б) $f^{-1}(x)$ – возрастающая; в) $f^{-1}(x)$ – убывающая.

6. Функции примеров а) и в) имеют обратные, так как являются возрастающими; б) функция $f(x)=x-x^3$ обратной не имеет, так как не является взаимно однозначной ($f(0)=f(1)$).

7. а) $f^{-1}(x)=\frac{x-7}{2}$, $-\infty<x<+\infty$; б) $f^{-1}(x)=\frac{5x+2}{1-3x}$, $x\neq\frac{1}{3}$;

в) $f^{-1}(x)=\frac{3-(x-1)^2}{2}$, $x\geq 1$. **8.** 2. **9.** $\frac{g(x)-b}{a}$. **10.** $f^{-1}(x)=\frac{2x+1+|x+2|}{3}$.

Указание: сначала получить формулы для $f^{-1}(x)$ при $x\geq -2$ и $x\leq -2$, а затем подобрать α,β,γ так, чтобы $f^{-1}(x)=\alpha x+\beta+\gamma|x+2|$.

12. Мадина в белом, Айгуль в голубом, Женя в зеленом, Ира в розовом.

13. 800 тыс. тенге. **14.** 48; 80; 12; 12. **15.** 10%. **16.** 50 км/ч.

§6 ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

При решении задачи плохой план часто оказывается полезным: он может вести к лучшему плану.

Д. Пойа

Упражнение 1

Найдите в Интернете определение и примеры геометрических преобразований: параллельный перенос, осевая симметрия, центральная симметрия.

Упражнение 2

Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y=x^2, y=x^2+2, y=(x+3)^2, y=-x^2$. С помощью каких геометрических преобразований три последние параболы получаются из первой?

Упражнение 3 а

Изобразите на координатной плоскости несколько пар точек.
В каждой паре абсциссы должны быть равны, а ординаты противоположны. Каким геометрическим преобразованием связаны друг с другом точки в каждой паре?

Упражнение 3 б

Изобразите на координатной плоскости несколько пар точек. В каждой паре абсциссы должны быть противоположны, а ординаты равны. Каким геометрическим преобразованием связаны друг с другом точки в каждой паре?

Упражнение 4

Изобразите на координатной плоскости точку $A(4,6)$. Передвиньте точку на наименьшее расстояние так, чтобы она стала в 2 раза ближе к оси Oy, чем была. Как изменились ее координаты? Повторите все действия с точками $B(-4,6)$, $C(-1,-3)$, $D(5,-8)$, $E(0,4)$.

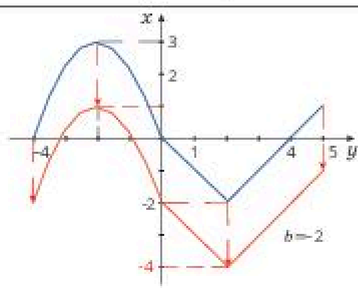
Упражнение 5

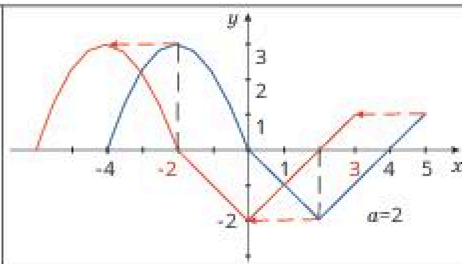
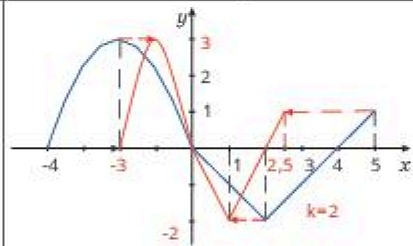
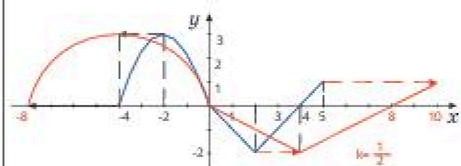
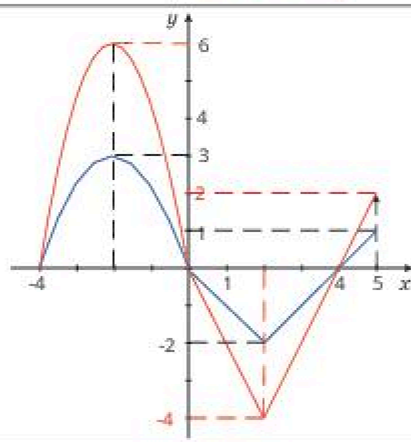
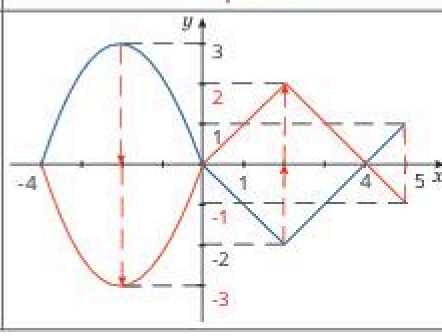
Изобразите на координатной плоскости точку $A(4,2)$. Передвиньте точку на наименьшее расстояние так, чтобы она стала в 3 раза дальше от оси, чем была. Как изменились ее координаты? Повторите все действия с точками $B(-4,2)$, $C(-1,3)$, $D(5,-1,5)$, $E(-3,0)$.

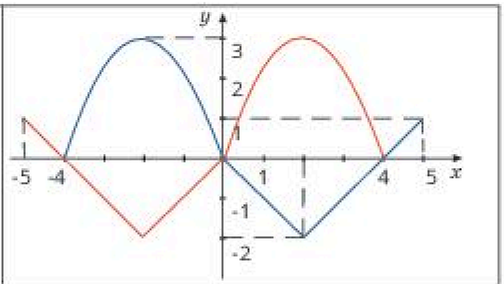
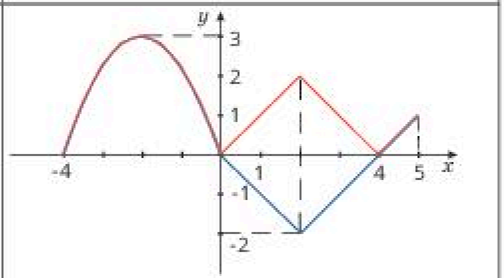
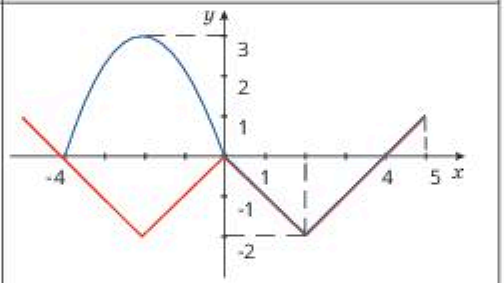
Преобразование, описанное в упражнении 4, будем называть **сжатием** в 2 раза вдоль оси Ox относительно оси Oy. Преобразование, описанное в упражнении 5, будем называть **растяжением** в 3 раза вдоль оси Oy относительно оси Ox.

Основной вопрос, который мы будем рассматривать: как простейшие алгебраические преобразования аналитической формулы, которой задается функция, отражаются на преобразованиях графика? При этом будем считать, что график функции $y=f(x)$ уже построен.

В следующей таблице укажем алгебраические преобразования функции $y=f(x)$, соответствующие им геометрические преобразования графика и примеры. Во всех примерах черным цветом изображен график функции, красным – результат преобразования

Функция	Преобразование графика и обозначение	Пример
$y=f(x)+b$	Параллельный перенос на единиц вдоль оси Oy (P1). Примечание. Если, например, $b=-2$, то фраза «перенос на -2 единицы вдоль оси Oy» означает сдвиг вниз.	

$y=f(x+a)$	Параллельный перенос на a единиц вдоль оси Ox (P2)	
$y=f(kx), k>0$	Сжатие в k раз вдоль оси Ox относительно оси Oy при $k>1$; растяжение в k раз вдоль Ox относительно Oy при $0<k<1$ (P3)	 
$y=kf(x), k>0$	Растяжение в k раз вдоль Oy относительно Ox при $k>1$; сжатие $\frac{1}{k}$ раз вдоль Oy относительно Ox при $O<k<1$ (P4)	
$y=-f(x)$	Симметрия относительно оси Ox (P5)	

$y=f(-x)$	Симметрия относительно оси Oy (Р6)	
$y=\lvert f(x)\rvert$	Часть графика, лежащая в верхней полуплоскости относительно Ox, не изменяется. Часть графика, лежащая в нижней полуплоскости, отражается симметрично относительно Ox (Р7)	
$y=f(\lvert x\rvert)$	Часть графика, лежащая в правой относительно Oy полуплоскости, остается без изменений; часть графика, лежащая в левой относительно Oy полуплоскости, заменяем на симметричное отражение правой относительно Oy (Р8)	

Докажем, что описанные преобразования корректны.

1) Преобразование $P1$: $y=f(x)+b$. Точка (x_0,y_0) принадлежит графику $y=f(x)$, т.е. $y_0=f(x_0)$. В результате сдвига на b единиц вдоль оси Oy точка (x_0,y_0) переходит в точку (x_0,y_0+b). Подставляя эти координаты в уравнение $y=f(x)+b$, получаем равенство $y_0+b=f(x_0)+b$, которое является верным в силу того, что равенство $y_0=f(x_0)$ верное.

2) Преобразование $P8$: $y=f(|x|)$. Если $x\geq 0$, то $|x|=x$ и $f(|x|)=f(x)$. Это значит, что на множестве $x\geq 0$, то есть в правой относительно Oy полуплоскости, графики $y=f(|x|)$ и $y=f(x)$ совпадают. Заметим теперь, что $f(|-x|)=f(|x|)$, так как $|-x|=|x|$. Это значит, что функция $y=f(|x|)-$ четная и ось Oy является осью симметрии ее графика. Приходится левую часть графика $y=f(x)$ заменить на симметричное отражение правой.

3) Преобразование $P3$: $y=f(kx),\ 0<k<1$. Пусть (x_0,y_0) – точка графика $y=f(x)$. Растяжение в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси Ox относительно Oy означает, что точка (x_0,y_0) переходит в точку $\left(\frac{1}{k}x_0,y_0\right)$. Для доказательства того, что эта новая точка лежит на графике $y=f(kx)$, требуется показать, что ее координаты удовлетворяют уравнению $y=f(kx)$. Действительно, подставляем вместо y число y_0, а вместо x число $\frac{1}{k}x_0$: $y_0=f\left(k\cdot\frac{1}{k}x_0\right)\Leftrightarrow y_0=f(x_0)$. Последнее равенство является верным, так как, по предположению, $(x_0,\ y_0)$ – точка графика функции $y=f(x)$.

Корректность остальных преобразований доказывается аналогично.

Упражнение 7

Докажите корректность остальных преобразований. Указание к упр.7: если (x_0,y_0) – точка на графике $y=f(x)$, то $y_0=f(x_0)$. Основная идея состоит в том, чтобы понять, в какую точку переходит (x_0,y_0) при данном преобразовании. После этого остается подставить новые координаты в новую функцию и доказать, что равенство выполняется.

Следующие примеры очень важны для понимания всей темы.

Пример 1

Постройте графики функции $y=\frac{2x+1}{x-3}$.

Решение. Преобразуем:

$\frac{2x-6+6+1}{x-3}=\frac{2(x-3)+7}{x-3}=\frac{2(x-3)}{x-3}+\frac{7}{x-3}=2+\frac{7}{x-3}$. Фактически, мы строим график функции $y=\frac{7}{x-3}+2$. Этот график может быть получен из графика $y=\frac{7}{x-3}$ параллельным переносом (сдвигом) на 2 единицы вдоль Oy. В свою очередь, график $y=\frac{7}{x-3}$ может быть получен из графика $y=\frac{7}{x}$ сдвигом на 3 единицы вдоль Ox. Отсюда план построения: строим график $y=\frac{7}{x}$, а затем сдвигаем его на 3 единицы вправо и на 2 единицы вверх. Очень важный совет: прямые $x=0$ (ось

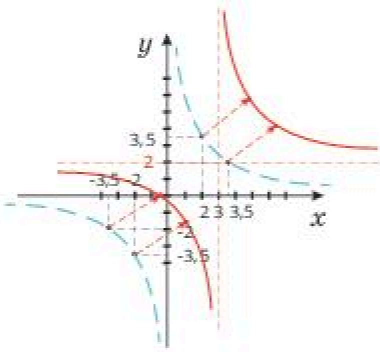


Рис. 1

Oy) и (ось Ox) являются асимптотами графика $y=\frac{7}{x}$. Асимптотами графика функции называются прямые, к которым график «принимается» на бесконечности. График $y=\frac{7}{x}$ строится по некоторым опорным точкам. Так вот, сначала на 3 единицы вправо и на 2 единицы вверх сдвигаем асимптоты, после этого – опорные точки, и уже на сдвинутых точках с помощью новых асимптот строим гиперболу. Процесс и результат построения вы видите на рисунке 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Функция $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, где a, d, c, d – некоторые числа и $c\neq 0$, называется дробно-линейной.

Упражнение 8

Подумайте, зачем нужно условие $c\neq 0$?

Графики дробно-линейных функций строятся с помощью алгебраического приема, который продемонстрирован в примере 1 и который называется «выделение целой части». Ключевым моментом в примере 1 было отнимание и прибавление числа 6 в числителе для последующего сокращения на $x-3$. Целой частью в данном случае является число 2.

Пример 2

Постройте график функции $y=x^2-2x-3$.

Решение. Один из способов построения таких графиков вы уже изучали в курсе 8–9 классов. Вот другой, который называется «выделение полного квадрата». Преобразуем: $x^2-2x-3=x^2-2x+1-1-3=(x^2-2x+1)-4=(x-1)^2-4$. График функции $y=(x-1)^2-4$ получается из графика $y=(x-1)^2$ сдвигом на 4 единицы вниз вдоль оси Oy. А график $y=(x-1)^2$ получается из $y=x^2$ сдвигом на 1 единицу вправо вдоль Ox. Отсюда план построения: строим сначала график $y=x^2$ «по точкам», а затем точки сдвигаем на 1 вправо и на 4 вниз. По новому полученному набору точек строим новую параболу.

Пример 3

Постройте график функции $y=\left|x^2-2|x|-3\right|$.

Рассуждения. С помощью какого преобразования и из графика какой функции мы легко могли бы получить данный в условии?

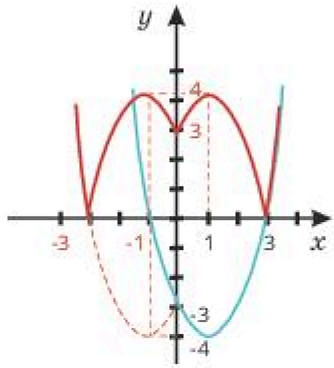


Рис. 2

Ну конечно, с помощью преобразования для случая $y=|f(x)|$ из графика $y=x^2-2|x|-3$ (преобразование Р7 из таблицы).

Теперь тот же вопрос задаем себе относительно функции $y=x^2-2|x|-3$: из графика какой функции и каким преобразованием? Так как $x^2=|x|^2$, то $y=|x|^2-2|x|-3$ получается из записи $y=x^2-2x-3$ формальной заменой x на $|x|$. Значит, подходит преобразование для случая $y=f(|x|)$ (преобразование Р8 из таблицы).

Решение. Строим график $y=x^2-2x-3$. Применяем преобразование для функции $y=f(|x|)$, для чего левую часть графика $y=x^2-2x-3$ заменяем на симметричное отражение правой относительно оси Oy. Получим график $y=x^2-2|x|-3$. Далее применяем преобразование для функции $y=|f(x)|$: часть графика, лежащую в нижней полуплоскости, отражаем на верхнюю относительно оси Ox. Результат всех построений обведен жирным красным (рис. 2).

Пример 4

Сколько корней имеет уравнение $|x^2-2|x|-3|=2\sqrt{3}$?

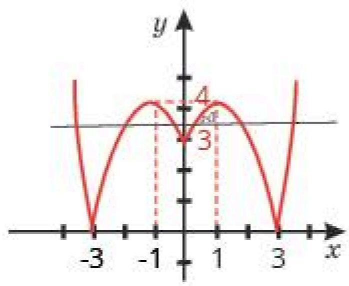


Рис. 3

Решение. Вопрос в данном задании сводится к количеству точек x, в которых значение функции $f(x)=|x^2-2|x|-3|$ равно $2\sqrt{3}$. В свою очередь количестве точек x, в которых значение функции $f(x)=|x^2-2|x|-3|$ равно $2\sqrt{3}$, равно количеству пересечений графика $f(x)=|x^2-2|x|-3|$ с прямой $y=2\sqrt{3}$. Приблизительное равенство $2\sqrt{3}\approx 3{,}4$ дает возможность построить такую прямую и увидеть, что имеется ровно 4 точки пересечения (рис. 3). Следовательно, уравнение имеет 4 корня.

Изученные методы построения графиков дают нам в руки мощный инструмент для исследования свойств функций. После построения графика функции $f(x)=|x^2-2|x|-3|$ мы можем об этой функции сказать очень многое из того, чего до построения сказать не могли.

1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$;

2) $E(f)=[0;+\infty)$;

3) $f(x)$ – четная функция;

4) $(-3;-1)$, $(0;1)$, $(3;\infty)$ – интервалы возрастания;

$(-\infty;-3)$, $(-1;0)$, $(1;3)$ – интервалы убывания;

5) $x=-1$ и $x=1$ – точки локального максимума, $f(-1)=f(1)=4$; $x=-3$, $x=3$, $x=0$ – точки локального минимума, $f(0)=3$, $f(-3)=f(3)=0$.

Все результаты о функции $f(x)=\left|x^2-2|x|-3\right|$, *полученные в данном параграфе графическим путем, могли быть найдены с помощью аналитических методов, но затраченных усилий было бы в разы больше.*

Задачи

Часть 1

1. (1) Дана функция $f(x)=x^2-6x$. Постройте графики функций:

а) $y=f(x)-2$; б) $y=f(x-2)$; в) $y=2f(x)$;

г) $y=f(2x)$; д) $y=-f(x)$; е) $y=f(-x)$;

ж) $y=f(|x|)$; з) $y=|f(x)|$; и) $y=|f(|x|)|$.

2. (1) Постройте графики функций на одной плоскости:

а) $y=x$; б) $y=x-2$; в) $y=|x-2|$;

г) $y=|x-2|-1$; д) $y=||x-2|-1|$.

По графику, полученному в д), исследуйте функцию. *Представьте, что Вам дано задание: построить график* $y=||x-2|-1|$. *Проследите, как последовательность д)–г)–в)–б)–а) отражает составление плана построения.*

3. (2) На одной координатной плоскости постройте график функций $f(x)=||x-2|-1|$ и $g(x)=\frac{1}{2}x$. Используя построенные графики,

а) решите уравнение $f(x)=g(x)$;

б) решите неравенство $f(x)\geq g(x)$;

в) ответьте на вопрос: «Сколько корней имеет уравнение $f(x)=a$ в зависимости от a?»

4. (2) Постройте графики функций на одной плоскости:

а) $y=\frac{3}{x}$; б) $y=\frac{3}{x-2}$; в) $y=\frac{3}{x-2}+3=\frac{3x-3}{x-2}$;

г) $y=\frac{3|x|-3}{|x|-2}$; д) $y=\left|\frac{3x-3}{x-2}\right|$.

5. (2) Постройте по алгоритму график $y=f(x)$, где $f(x)=x^2+2x-3$ на множестве $x\in[-4;2]$.

6. Составьте план и постройте графики следующих функций на основе графика $y=f(x)$, где $f(x)=x^2+2x-3$, $D(f)=[-4;2]$.

а) $y=\frac{1}{3}f(x)$; б) $y=f(2x)$; в) $y=-f(x)$;

г) $y=f(-x)$; д) $y=f(|x|)$; е) $y=|f(x)|$;

ж) $y=f(x)-3$; з) (2) $y=f(2x-4)$; и) (3) $y=\left|\frac{1}{2}f(-x)-3\right|$;

к) (3) $y=|f(|x|)|$.

Составьте план и постройте графики функций (7–10):

7. (2) $f(x)=|x^2-4|x|+3|$;

8. (1) а) $y=x^2-|x|-6$; б) $y=|x^2-x-6|$;

9. (3) а) $y=2-\sqrt{|x-3|}$; б) $y=|2-\sqrt{|x-3|}|$;

10. (3) $y=||x|-2|-3|$.

Часть 2

11. (3) Постройте на одной координатной плоскости графики $f(x)=||3-|x||-5|$ и $g(x)=x+2$.

а) Решите уравнение $f(x)=g(x)$.

б) Решите неравенство $f(x)\geq g(x)$.

в) Решите неравенство $f(x)>g(x)$.

12. (1) Постройте графики функций на одной плоскости:

а) $y=-x$; б) $y=-x-3$; в) $y=|-x-3|$;

г) $y=|x+3|-5$; д) $y=||x+3|-5|$; е) $y=||-x+3|-5|$;

ж) $y=||3-|x||-5|$. По графику ж) сделайте исследование функции.

13. (2) Постройте графики функций:

а) $y=-\dfrac{2}{x+3}, y=-\dfrac{2}{|x|+3}$;

б) $y=\dfrac{3-2x}{x-4}, y=\left|\dfrac{3-2x}{x-4}\right|$;

в) $y=\dfrac{6-2x}{x}, y=\left|\dfrac{6-2|x|}{|x|}\right|$.

14. (2) Постройте графики функции $y=\sqrt{x}$ «по точкам», используя полученный эскиз, составьте план и постройте графики:

а) $y=2\sqrt{x}$, $y=-3\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x}$.

б) $y=\sqrt{x-4}$, $y=\sqrt{2x-4}$, $y=\sqrt{-x-4}$, $y=\sqrt{4-x}$.

15. (2) Используя график функции $f(x)=\left|\dfrac{6-2|x|}{|x|}\right|$ из задачи 13 найдите количество корней уравнения $f(x)=p$ в зависимости от p.

16. (3) Составьте план и постройте график функции $f(x)=\left|\dfrac{4|x|+4}{|x|+2}\right|$.

17. Постройте по алгоритму график $y=f(x)$, где $f(x)=-x^2+2x+8$ на множестве $x\in[-3;5]$.

Составьте план и постройте графики следующих функций на основе графика $y=f(x)$.

а) (1) $y=\dfrac{1}{3}f(x)$; ә)(1) $y=f(2x)$; б)(1) $y=-f(x)$;

в) (1) $y=f(-x)$; г) (1) $y=f(|x|)$; ғ) (1) $y=|f(x)|$;

е) (1) $y=f(x)-3$; д)(2) $y=f(2x-4)$; ж)(3) $y=\left|\dfrac{1}{2}f(-x)-3\right|$;

з) $y=|f(|x|)|$.

Составьте план и постройте графики функций (18–20). Сделайте исследование функции по графику:

18. (2) а) $y=\left|-x^2+6x-8\right|$; б) $y=-x^2+6|x|-8$;

19. (3) а) $y=2-\sqrt{3-|x|}$; б) $y=\left|2-\sqrt{3-|x|}\right|$;

20. (2) $y=\left|2-\left|1-|x|\right|\right|$.

21. (4) Ученики соревнуются в прыжках, причем каждый прыгает 5 раз. Судьи оценивают правильность каждого прыжка целым количеством баллов от 1 до 20, но в окончательном подсчете участнику засчитывают 4 его лучших прыжка. За 5 прыжков Данияр набрал 72 балла. Какой наименьший результат может получиться у него при окончательном подсчете?

22. (3) Упростите выражение $\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)\cdot\frac{1}{a-b}$.

23. (2) Решите уравнения: а) $\frac{4x^2-7x-2}{x^2-5x+6}=0$; б) $\frac{x-2}{x+1}+\frac{4(x+1)}{x-2}=5$.

24. (3) Среди служащих некоторой компании 20% составляют женщины. Руководство компании планирует увеличить количество женщин на 80%, а количество мужчин сократить на 20%. Какое из следующих утверждений верно?
A) Количество служащих компании увеличится.
B) Количество служащих компании не изменится.
C) Количество служащих компании уменьшится на 10%.
D) Количество служащих компании уменьшится на 15%.
E) Недостаточно данных для однозначного ответа.

Ответы:

3. а) $x=\frac{2}{3}$; 2; 6. б) $x\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]\cup\{2\}\cup[6;+\infty)$; в) $a<0\Rightarrow$ 0 корней; или $a>1\Rightarrow$ 2 корня; $a=1\Rightarrow$ 3 корня; $a\in(0;1)\Rightarrow$ 4 корня.

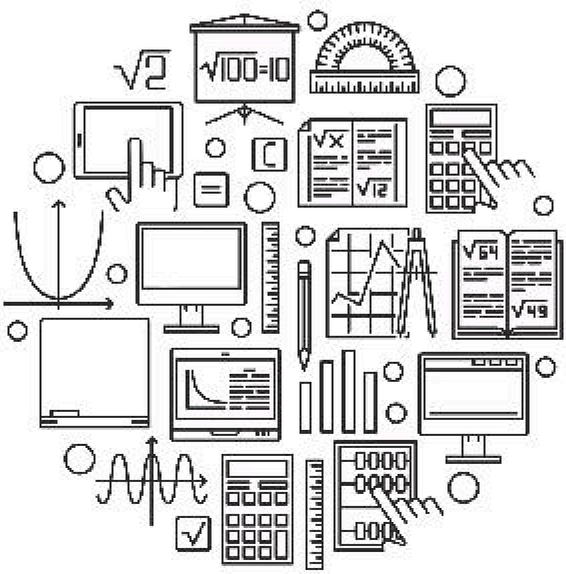
11. а) $x\in[0;3]$; б) $x\in[-\infty;3]$; в) $x\in(-\infty;0)$.

15. $p<0\Rightarrow$ 0 корней; $p\in\{0\}\cup[2;+\infty)\Rightarrow$ 2 корня; $p\in(0;2)\Rightarrow$ 4 корня.

21. 58. **22.** $-\frac{}{a\quad b}$. **23.** а) $x=-0.25$; б) $x=-2$. **24.** B.

Глава 2

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ



ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Математика учит точности мысли, подчинению логике доказательства, понятию строго обоснованной истины, а все это формирует личность, пожалуй, больше, чем музыка.
А.Д. Александров

Тригонометрия начинается с наблюдения, что отношения длин сторон треугольника зависят от формы треугольника, которая задается набором величин его углов, и не зависят от его размеров. Естественно, древние мыслители не могли пройти мимо этого замечательного факта, и поэтому элементы тригонометрических соотношений встречаются уже в математических рукописях древнего Китая, Вавилона и древнего Египта (II тысячелетие до н.э.). От вавилонской математики ведет начало привычное измерение углов градусами, минутами и секундами. Теорема Пифагора, открытая независимо друг от друга вавилонянами и китайцами задолго до самого Пифагора, эквивалентна основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. (Подумайте, почему?)

Однако первые по-настоящему важные открытия сделаны древнегреческими учеными (IV век до н. э.– IV век). Тригонометрия тогда не рассматривалась как отдельная дисциплина, для греков она была частью геометрии и астрономии. В трудах Архимеда (III век до н.э.) имеется теорема деления хорд, по существу эквивалентная формуле синуса половинного угла: $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

Предполагается, что первые тригонометрические таблицы составлены Гиппархом Никейским (середина II века до н.э.). Позднее астроном II века Клавдий Птолемей в «Альмагесте» дополнил результаты Гиппарха. Тринадцать книг «Альмагеста» – самая значимая тригонометрическая работа всей античности. В частности, «Альмагест» содержит обширные пятизначные таблицы хорд для острых и тупых углов с шагом 30 угловых минут. Для вычисления хорд Птолемей использовал теорему Птолемея (известную, впрочем, еще Архимеду), которая утверждает: сумма произведений длин противоположных сторон выпуклого вписанного в круг четырехугольника равна произведению длин его диагоналей.

В IV веке, после гибели античной науки, центр развития математики переместился в Индию. Сочинения индийских математиков показывают, что их авторы были хорошо знакомы с трудами греческих астрономов и геометров. Чистой геометрией индийцы интересовались мало, но их вклад в прикладную астрономию и расчетные аспекты тригонометрии очень значителен. Индийцы первыми ввели в использование косинус. Индийцы знали формулы для кратных углов $\sin nx$ и $\cos nx$ для $n=2,3,4,5$.

В VIII веке ученые стран Ближнего и Среднего Востока познакомились с трудами древнегреческих и индийских математиков и астрономов. Переводом их на арабский язык занимались такие крупные ученые VIII века, как Ибрахим Аль-Фазари и Якуб ибн Тарик. Они и их последователи стали активно комментировать и развивать эти теории. Предметом особого внимания ученых стран ислама была сферическая тригонометрия, методы которой использовались для решения задач астрономии и геодезии. Среди основных решаемых проблем были следующие:

– точное определение времени суток;

– вычисление будущего расположения небесных светил, моментов их восхода и заката, затмений Солнца и Луны;

– нахождение географических координат текущего места;

– вычисление расстояния между городами с известными географическими координатами;

– определение направления на Мекку из заданного места.

Самые ранние из сохранившихся трудов принадлежат Аль-Хорезми и Хаббаш аль-Хасиб (IX век), которые рассмотрели, наряду с известными еще индийцам синусом и косинусом, новые тригонометрические функции: тангенс, котангенс, секанс и косеканс. Основные соотношения между всеми шестью функциями привел ал-Баттани в том же столетии. Окончательной унификации добился Абу-ль-Вафа во второй половине X века, который впервые использовал для определения тригонометрических функций круг единичного радиуса, как это делается в современной математике.

§1 СВОЙСТВА И ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Всякая хорошо решенная математическая задача доставляет умственное наслаждение.

Г. Гессе

1.1 Радианная мера угла и алгебраический угол

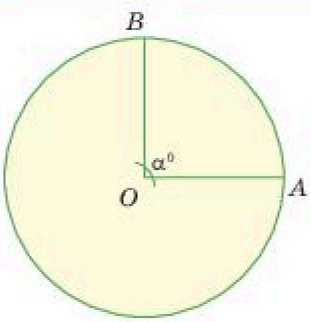


Рис. 1

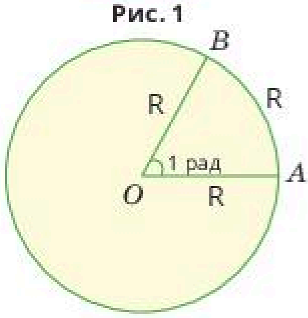


Рис. 2

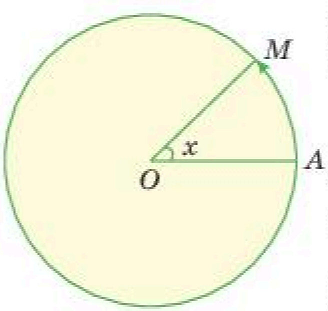


Рис. 3

Из курса геометрии 9 класса вам известно, что каждая дуга на окружности имеет две количественные характеристики: длину и градусную меру. Градусная мера дуги $\overset{\frown}{AB}$ равна градусной мере соответствующего угла $\widehat{AOB}$, где O – центр окружности (рис. 1). Оказывается, в некоторых случаях углы и дуги гораздо практичнее измерять не в градусах, а в радианах.

Угол между радиусами OA и OB равен 1 радиану, если длина дуги $\overset{\frown}{AB}$ равна радиусу R окружности; соответственно, радианная мера дуги $\overset{\frown}{AB}$ равна 1 радиану, если длина дуги $\overset{\frown}{AB}$ равна радиусу R окружности (рис. 2).

При измерении углов и дуг в радианах не принято писать единицу измерения. Отсюда ясно, что если бы угол $\widehat{AOB}$ был равен 2, 3, 4 и т.д., то радианная мера угла $\widehat{AOB}$ была бы равна соответственно 2, 3, 4 и т.д., длина дуги $\overset{\frown}{AB}$ была бы равна $2R$, $3R$, $4R$ и т.д.

Рассмотрим теперь некоторую окружность с центром O и зафиксированной на ней точкой A. Точку M сначала поместим в точку A, а затем отправим в путешествие по окружности. Если угол $\widehat{AOM}$ равен x, то радианная мера дуги $\overset{\frown}{AM}$ равна x, а длина пройденного точкой M пути равна xR.

Очень практично: пройденный точкой M путь в R раз больше угла $\widehat{AOM}$. А если еще принять $R=1$, то получается просто замечательная картина: и угол $\widehat{AOM}$, и радианная мера дуги $\widehat{AM}$, и длина пройденного пути – все равны x (рис. 3). Можно их не различать.

Вот мы и не будем их различать, а введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Пусть A – фиксированная точка окружности с центром O и радиусом 1, точка M движется по окружности, начиная с положения $M=A$. Алгебраическим углом x между радиусами OA и OM будем называть длину пройденного точкой M пути, взятой со знаком «+», если движение происходило против часовой стрелки, и со знаком «–», если движение происходило по часовой стрелке (рис. 3).

Вы уже знаете, что длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

Число, выражающее отношение длины окружности к ее диаметру, не может быть записано в виде дроби, где числитель и знаменатель – целые числа (т.е. это – иррациональное число). Но оно играет очень большую роль во всей математике. Поэтому это число заслужило специальное обозначение: π.

$$\pi \approx \frac{22}{7},\ \pi \approx 3{,}1416.$$

Упражнение 1

Каким образом фраза «Что я знаю о кругах?» связана с записью «3,1416»?

Если $R=1$, то длина окружности равна 2π. Это значит, что длина и дуга половины окружности равны π. Но дуга половины окружности равна 180°. Отсюда равенство:

$$\pi\ радиан = 180°.$$

Рассмотрим для определенности движение точки *M* против часовой стрелки. После того, как точка *M* сделает свой первый полный оборот, она совпадет с точкой *A*, пройденный ею путь составит 2π. Это значит, что алгебраический угол между *OA* и *OM* в этот момент равен 2π или 360°. Но у нас нет никаких оснований препятствовать дальнейшему движению точки *M*. После 2-х, 3-х, 4-х и т.д. полных оборотов угол (в дальнейшем мы будем опускать термин «алгебраический») станет равным 4π, 6π, 8π и т.д. (соответственно 720°, 1080°, 1440° и т.д.)

Аналогично можно рассматривать бесконечное движение точки M по часовой стрелке, при этом получаются отрицательные углы.

1.2 Определения тригонометрических функций

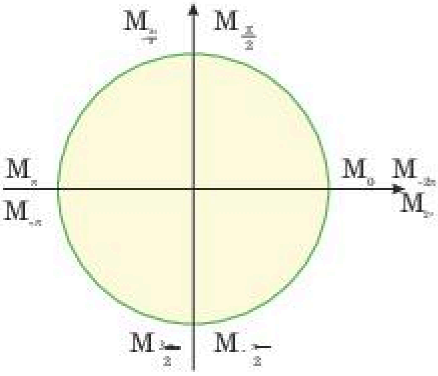


Рис. 4

Разместим всю описанную в предыдущем пункте конструкцию на координатной плоскости так, чтобы точка O совпала с началом координат, а точка A имела координаты $(1;0)$. Каждому углу $x \in (-\infty;+\infty)$ соответствует путь длины $|x|$, проделанный точкой M, начиная от точки A, против часовой стрелки, если $x>0$, и по часовой стрелке, если $x<0$. Конечное положение точки M будем обозначать M_x.

Фактически, мы организовали функцию $f: x \to M_x$, которая каждому числу x ставит в соответствие точку M_x на окружности. Функция не является взаимно однозначной, так как для чисел x, $x+2\pi$, $x+4\pi$ и т.д. точки $M_x, M_{x+2\pi}, M_{x+4\pi}$ и т.д. совпадают.

Упражнение 1

Отметьте на окружности точки

$M_{\frac{\pi}{2}}, M_{\frac{2\pi}{3}}, M_{2\frac{1}{3}\pi}, M_{2\frac{1}{6}\pi}, M_{\frac{\pi}{6}}, M_{\frac{\pi}{3}}, M_{\frac{2\pi}{3}}, M_{-\frac{2\pi}{3}}, M_{-2\frac{1}{3}\pi}, M_{-21\frac{1}{2}\pi}$.

(Отмечать можно и нужно, полагаясь на свой глазомер, например, путь длины $\frac{\pi}{3}$ в 3 раза меньше пути длины π).

Упражнение 2

Найдите координаты точек M_0, $M_{\frac{\pi}{2}}$, M_π, $M_{\frac{3\pi}{2}}$, $M_{4\pi}$ на координатной плоскости xOy. Не забудьте, что радиус окружности равен 1.

Окружность, которую мы сейчас рассматриваем, называется **тригонометрической окружностью**. На ее основе определяются все тригонометрические функции. Мы будем обозначать эту окружность ω.

Там, где это не вызывает разночтений, вместо обозначений $M_{\frac{\pi}{2}}$, $M_{-\frac{3\pi}{2}}$, M_x ... мы будем использовать на окружности обозначения $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, x ... .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

Для любого угла $x \in (-\infty; +\infty)$ косинусом угла x называется абсцисса точки M_x и обозначается как $\cos x$; синусом угла x называется ордината точки M_x и обозначается как $\sin x$ (рис. 5).

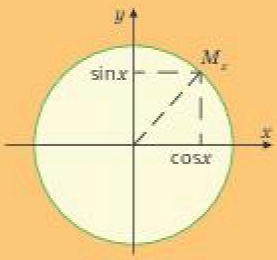


Рис. 5

Упражнение 3

Найдите косинусы и синусы углов 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 4π, используя результаты упражнения 2.

Оси Ox и Oy разбивают всю координатную плоскость на четыре области, которые называются четвертями или квадрантами. Каждая четверть имеет свой фиксированный номер (см. рис. 6).

Если M_x является внутренней точкой I четверти, то говорят, что угол x является углом I четверти. Аналогично определяются углы II, III и IV четвертей.

Упражнение 4

Определите знаки синусов и косинусов углов в зависимости от того, углами какой четверти они являются, используя тригонометрическую окружность.

Материал данного и следующего параграфов чрезвычайно важен для понимания всей тригонометрии. Практически все свойства тригонометрических функций видны как на ладони, необходимо только разобраться с тригонометрической окружностью. Запомните: ***круг – наш друг.***

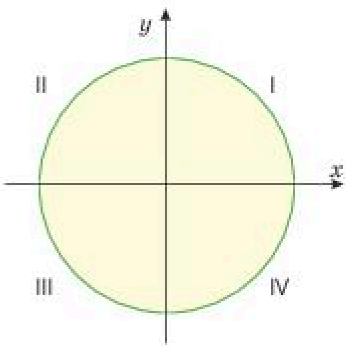


Рис. 6

Рассмотрим на координатной плоскости с тригонометрической окружностью дополнительную числовую ось, параллельную оси Oy. Единица измерения на этой оси равна единице измерения координатной плоскости. Эта ось называется осью тангенсов. Рисунок 7 показывает, как «работает» ось тангенсов. Через точку M_x и начало координат проводится прямая до пересечения с осью тангенсов. Ось тангенсов – числовая, и поэтому точка пересечения соответствует некоторому числу, которое и называется тангенсом угла x и обозначается tg x.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.

Пусть дано число $x \in (-\infty;+\infty)$. Тогда тангенсом числа x называется число на оси тангенсов, соответствующее точке пересечения прямой OM_x с осью тангенсов.

Очевидно, например, что если β – угол 2-ой или 4-ой четверти, то $\mathrm{tg}\beta < 0$.

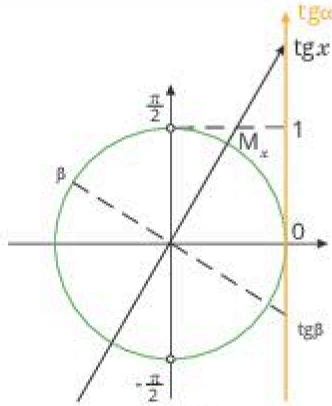


Рис. 7

Упражнение 5

Чему равен $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2}$?

Попытаемся найти $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2}$. По определению, проведем прямую через $M_{\frac{\pi}{2}}$ и начало координат – это, оказывается, ось Oy. Но ось Oy и ось тангенсов параллельны, и точек пересечения этих прямых попросту нет. *«На нет и тангенса нет»*. Иначе говоря, угол $\dfrac{\pi}{2}$ не входит в область определения функции $y=\mathrm{tg}\,x$.

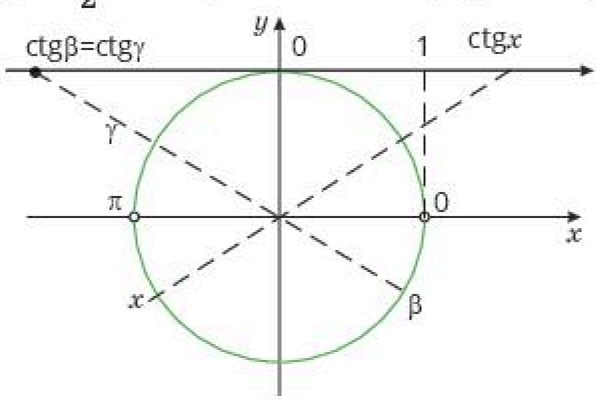


Рис. 8

Остается вспомнить, что такое котангенс. Математики древности вместо доказательства очень часто сопровождали свои рисунки короткой надписью «СМОТРИ». Вот и мы говорим: «СМОТРИ!» (рис. 8).

Числовая прямая, параллельная оси Ox и касающаяся тригонометрической окружности в точке $(0;1)$, называется **осью котангенсов** (рис. 8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.

Пусть дано число $x \in (-\infty;+\infty)$. Тогда котангенсом числа x называется число на оси котангенсов, соответствующее точке пересечения прямой OM_x с осью котангенсов. Котангенс числа x обозначается как $\mathrm{ctg}\,x$.

Упражнение 6

Докажите, что для острых углов $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ данные алгебраические определения тригонометрических функций дают те же значения $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, что и их геометрические определения в прямоугольном треугольнике. Указание: воспользуйтесь тем, что радиус тригонометрической окружности равен 1.

§2 ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

В голове у Архимеда было гораздо больше воображения, чем в голове у Гомера.
Вольтер

2.1 Функция $y=\sin x$

Алгебраический угол 2π соответствует одному полному обороту точки M против часовой стрелки. Следовательно, точки M_x и $M_{x+2\pi}$ совпадают. Аналогично, точки $M_{x-2\pi}$ и M_x совпадают (рис. 1). Отсюда следует, что $\sin x=\sin(x+2\pi)=\sin(x-2\pi)$, т.е. $T=2\pi$ – период функции $y=\sin x$. Докажем, что 2π – главный период, то есть, что не существует меньшего периода. Заметим, что $\sin 0=0$. При изменении угла x от 0 до 2π существует только три точки, в которых синус равен нулю: $\sin 0=0$, $\sin\pi=0$ и $\sin 2\pi=0$.

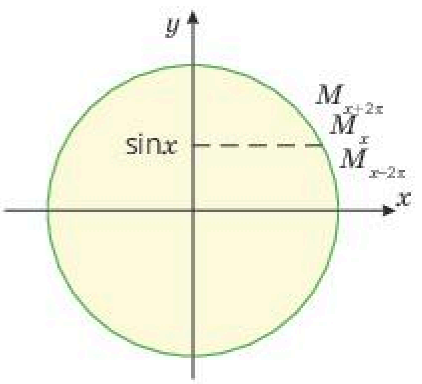


Рис. 1

Поэтому, если у функции и есть меньший, чем 2π, период, то он равен π. Тогда для любого x должно выполняться равенство $\sin x=\sin(x+\pi)$. Однако $-1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\neq\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

Итак, **функция $y=\sin x$ имеет главный период T=2π.**

Теперь мы можем исследовать и построить график на каком-нибудь отрезке длины 2π, а затем «копировать» его вдоль оси Ox влево и вправо. Естественно выбрать начальный отрезок «поближе к нулю».

Рассмотрим функцию $y=\sin x$ на отрезке $[-\pi;\pi]$. Очевидно, что точки M_x и M_{-x} симметричны друг другу относительно оси Ox, абсциссы этих точек равны, а ординаты противоположны. Переводим на язык тригонометрии: косинусы углов x и $-x$ равны, а синусы противоположны, $\sin(-x)=-\sin x$ (рис. 2). Но последнее равенство выполняется для всех $x\in(-\infty;+\infty)$, что означает **нечетность** функции $y=\sin x$.

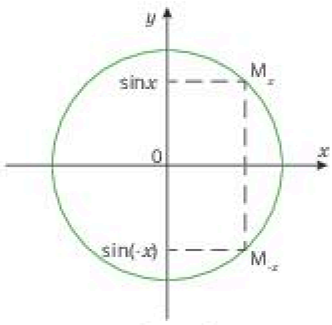
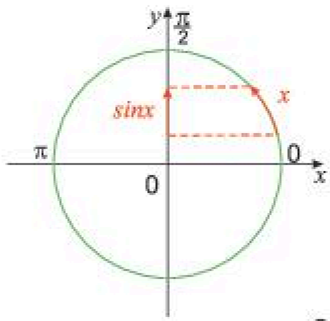
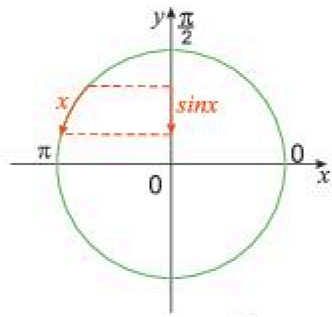


Рис. 2



При увеличении x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ значение $\sin x$ увеличивается

Рис. 3



При увеличении x от $\frac{\pi}{2}$ до π значение $\sin x$ уменьшается

Рис. 4

Функция $y=\sin x$ – нечетная.

Из отрезка $[-\pi;\pi]$ мы можем выбрать половинку $[0;\pi]$ и построить график на этом отрезке, а затем отразить полученный график симметрично относительно центра координат. При изменении x от 0 до π точка M_x движется по верхней полуокружности. Если проследить, как при этом изменяется ордината точки M_x (синус угла x), то можно заметить, что:

1) при увеличении x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ значение $\sin x$ увеличивается, $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ – интервал возрастания функции $y=\sin x$ (рис. 3);

2) при увеличении x от $\frac{\pi}{2}$ до π значение $\sin x$ уменьшается, $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ – интервал убывания функции $y=\sin x$ (рис. 4);

3) $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $x_0=\frac{\pi}{2}$ – точка, в которой функция $y=\sin x$ достигает наибольшего значения на множестве $x\in[0;\pi]$.

Для большей точности построения графика составим таблицу, в верхней строчке которой поместим углы, синусы которых нам хорошо известны. При этом учтем, что $\sqrt{2}\approx1,4$; $\sqrt{3}\approx1,73$.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}86$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}86$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}7$	$\frac{1}{2}$	0

Точки из таблицы отметим на координатной плоскости (рис. 5). Полученный фрагмент отражаем симметрично относительно начала координат (рис. 6). Так как $T=2\pi$ – период функции $y=\sin x$, то построчный фрагмент «копируем» влево и вправо до бесконечности (рис. 7).

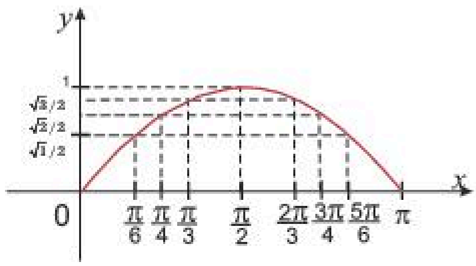


Рис. 5

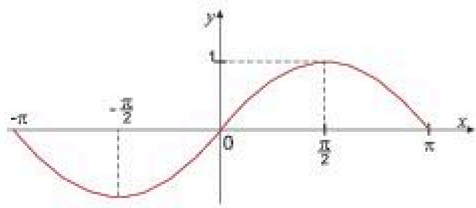


Рис. 6

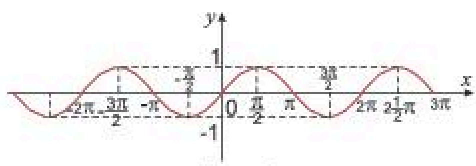


Рис. 7

Используя построенный график, перечислим свойства функции $y=\sin x$.

1) $D(f):(-\infty;+\infty)$.

2) $E(f):[-1;1]$.

3) Нечетная.

4) Периодическая с главным периодом $T=2\pi$.

5) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ – интервалы возрастания,

$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ – интервалы убывания, (здесь k – целое число),

6) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ – точки локального максимума,

$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ – точки локального минимума.

7) $x=\pi k$ – нули функции,

$(0+2\pi k;\pi+2\pi k)$ – интервалы положительности,

$(-\pi+2\pi k;0+2\pi k)$ – интервалы отрицательности.

Упражнение 1

Постройте график функции $y=\cos x$.

2.2 Функция $y=\cos x$

Построим график функции $y=\cos x$. Заметим, что по формуле приведения для любого угла α имеет место тождество $\cos\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$. Равенство $y=\cos x$ равносильно равенству $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Как нам уже известно, график функции $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ получается из графика $y=\sin x$ сдвигом на $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ вдоль оси Ox (рис. 8):

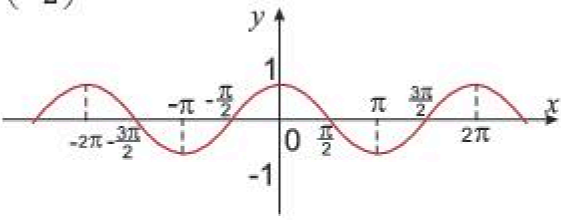


Рис. 8

Свойства функции $y=\cos x$.

1) $D(f)$: $x\in(-\infty;+\infty)$.

2) $E(f)$: $[-1;1]$.

3) Четная.

4) Периодическая с главным периодом $T=2\pi$.

5) $(-\pi+2\pi k;0+2\pi k)$ – интервалы возрастания, k – произвольное целое число.

$(0+2\pi k;\pi+2\pi k)$ – интервалы убывания.

6) $x=2\pi k$ – точки локального максимума,

$x=\pi+2\pi k$ – точки локального минимума.

7) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ – нули функции,

$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ – интервалы положительности,

$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ – интервалы отрицательности.

2.3 Примеры построения и исследования графиков

Построение графиков более сложных тригонометрических функций чаще всего выполняется с помощью простейших преобразований Р1–Р7, описанных в §4 предыдущей главы. Сначала требуется составить план построения (см. примеры 4, 5 пункта 4.2, глава 1), а затем выполнить преобразования. При этом для функций, содержащих синус или косинус, преобразования лучше выполнять с каким-нибудь участком графика, первоначально заданным на отрезке $[-\pi;\pi]$ или $[0;2\pi]$ или $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Полученный в результате преобразований фрагмент «клонируем», исходя из соображений периодичности. Аналогично для функций, содержащих тангенс или котангенс, преобразования лучше выполнять сначала для одной «ветки» **вместе с вертикальными асимптотами**. Приведем пример.

Пример 1 Постройте график функции $y=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$.

План: $\left(3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1\right)\overset{P1}{\leftarrow}\left(3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right)\overset{P4}{\leftarrow}$

$$\left(\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)\right).$$

$$\left(\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)\overset{P2}{\leftarrow}(\cos(2x))\overset{P3}{\leftarrow}\cos x.$$

Все преобразования Р3, Р2, Р4 и Р1 выполняются последовательно, начиная с участка графика $y=\cos x$, заданном на отрезке длины 2π: $x\in[-\pi;\pi]$ (рис. 9).

Преобразование Р3: «сжатие» в 2 раза вдоль оси Ox (рис. 10). Сначала выполняем «сжатие» для «особых» точек, а затем для всего участка.

Преобразование Р2: «сдвиг» графика на $\frac{\pi}{6}$ вдоль Ox (рис. 11).

Сначала «сдвигаем» особые точки, а затем и весь график.

Вместо «сдвига» точек графика на $-\frac{\pi}{6}$ можно выполнить «сдвиг» оси Oy на $+\frac{\pi}{6}$.

Преобразование Р4: растяжение в 3 раза вдоль оси Oy

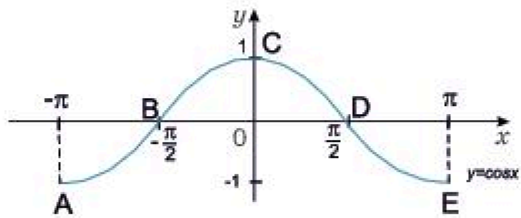


Рис. 9

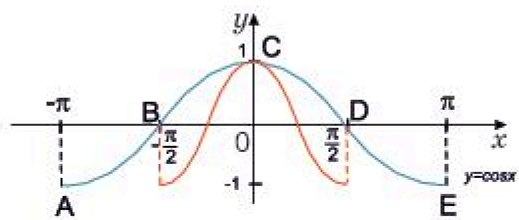


Рис. 10

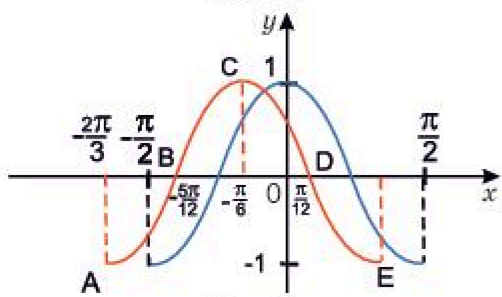


Рис. 11

(рис. 12). Точки B и D остаются на месте, точки A, C, E удаляем от Ox в 3 раза.

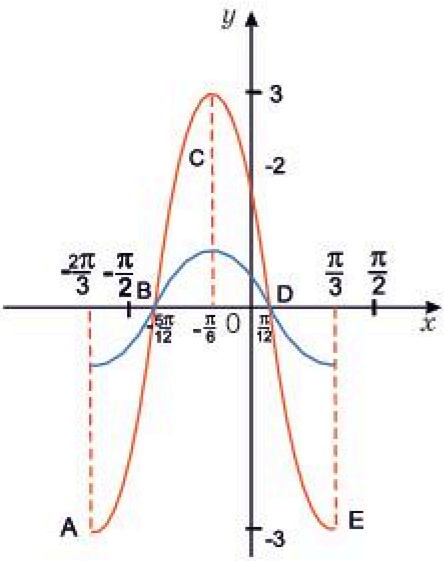


Рис. 12

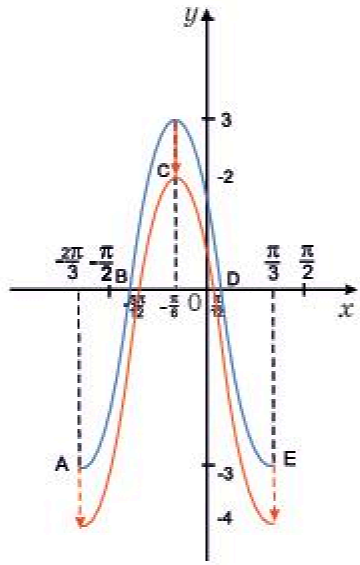


Рис. 13

Преобразование Р1: «сдвиг» на –1 вдоль оси Oy (рис. 13).
Вместо сдвига графика вниз на 1 ед. легче сдвинуть ось Ox на 1 ед. вверх.

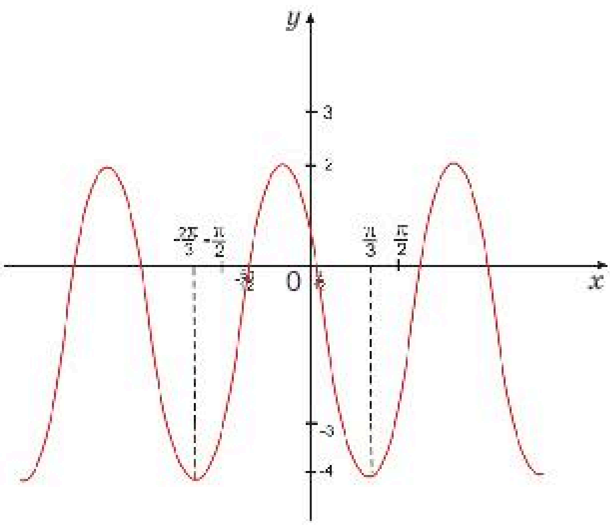


Рис. 14

Из соображений периодичности «клонируем» полученный фрагмент влево и вправо (до бесконечности).

График функции $y=3\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-1$ изображен на рис. 14.

Важные замечания.

1) *Мы выполнили каждое из преобразований на отдельной координатной плоскости. Мы сделали так для того, чтобы сделать процесс построения максимально ясным. При выполнении заданий вы можете ограничиться одной координатной плоскостью; все преобразования – на одном рисунке.*

2) *После каждого преобразования необходимо подписывать координаты «особых» точек прямо на плоскости.*

3) *При исследовании функции с помощью полученного графика не всегда удается точно найти «нули» функции. В таком случае, «нули» находим приблизительно, используя график.*

Приступим теперь к исследованию функции по построенному графику.

1) $D(f):(-\infty;+\infty)$.

2) Функция имеет период, равный π.

Из периодичности функции следует, что если для некоторого значения переменной $x=x_0$ имеет место некоторое свойство функции, то такое же свойство функции имеет место для любых значений $x=x_0+Tk$, где T – период, k – любое целое число.

3) «Нули» функции (значения x, при которых функция равна нулю; корни уравнения $f(x)=0$; точки пересечения графика с осью Ox) в данном случае находим приблизительно. Пересечение участка CD графика с осью Ox происходит примерно в середине отрезка $\left[0;\dfrac{\pi}{12}\right]$, $x_1\approx\dfrac{\pi}{24}$. Пересечение участка CB с осью Ox происходит примерно в точке $x_2\approx\dfrac{3\pi}{8}$. Таким образом, все «нули» описываются, согласно только что сделанному замечанию, двумя сериями: $x_1\approx\dfrac{\pi}{24}+\pi k$, $x_2\approx-\dfrac{3\pi}{8}+\pi k$, где k – любое целое число.

4) Промежутки знакопостоянства: $f(x)>0$ при $x\in(x_2+\pi k, x_1+\pi k)$, где $x_2\approx-\dfrac{3\pi}{8}$, $x_1\approx\dfrac{\pi}{24}$; $f(x)<0$ при $x\in(x_1+\pi k; x_2+\pi+\pi k)$.

5) Интервалы монотонности: $f(x)$ возрастает при $x\in\left(-\dfrac{2\pi}{3}+\pi k; -\dfrac{\pi}{6}+\pi k\right)$; $f(x)$ убывает при $x\in\left(-\dfrac{\pi}{6}+\pi k; \dfrac{\pi}{3}+\pi k\right)$.

6) Экстремумы: $x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi k$ – точки локальных максимумов, локальные максимумы равны 2; $x=\dfrac{\pi}{3}+\pi k$ – точки локальных минимумов, локальные минимумы равны (-4).

7) Множество значений: $E(f)=[-4;2]$.

Задачи

Часть 1

1. (2) Перерисуйте график функции $y=\sin x$ из пункта 2.1. На одной координатной плоскости последовательно постройте графики функций:

а) $y=\sin 2x$; б) $y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$; г) $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+3$.

2. (1) Перерисуйте график функции $y=\cos x$ из пункта 2.2. Используя график функции $y=\cos x$ как основной, постройте графики функций:

а) $y=-\cos x$; б) $y=\cos x-2$; в) $y=|\cos x|$; г) $y=2\cos x$; д) $y=\cos\frac{1}{2}x$.

3. (3) Постройте график функции $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+3$.

4. (1) Постройте график функции $y=\sin \pi x$.

5. (3) Постройте графики функций и проведите исследование свойств функций по построенным графикам:

а) $y=2-\sin\frac{x}{2}$; б) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$; в) $y=-2\sin\left|x+\frac{\pi}{3}\right|$.

6. (3) Постройте графики функций и проведите исследование свойств функций по построенным графикам:

а) $y=1+\cos 1,5x$; б) $y=1,5\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+2$; в) $y=3\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)-1$.

7. 2. (3) Постройте графики функций:

а) $y=\cos x+|\cos x|$; б) $y=\cos x-|\cos x|$; в) $y=\frac{\cos x}{|\cos x|}$.

8. 3. (2) Постройте графики функций:

а) $y=\sin^2 x$; б) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$.

9. 4. (2) Для каждой из функций, графики которых построены в задачах 1 – 8, определите множество значений и, если возможно, главный период.

Часть 2

10. (1) Перерисуйте график функции $y=\sin x$ из пункта 2.1. Используя график функции $y=\sin x$ как основной, постройте графики функций:

а) $y=\sin(-x)$; б) $y=|\sin x|$; в) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; г) $y=\sin|x|$; д) $y=-1,5\sin x$.

11. (2) Перерисуйте график функции $y=\cos x$ из пункта 2.1. На одной координатной плоскости последовательно постройте графики функций:

а) $y=\frac{3}{2}\cos x$; б) $y=\frac{3}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y=\frac{3}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$; г) $y=\left|\frac{3}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right|$.

12. (3) Постройте график функции $y=\left|\frac{3}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right|$.

13. (1) Постройте график функции $y=\cos\pi x$.

14. (3) Постройте графики функций и проведите исследование свойств функций по построенным графикам:

а) $y=2\sin 2x+1$; б) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$; в) $y=\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

15. (3) Постройте графики функций и проведите исследование свойств функций по построенным графикам: а) $y=-1+\cos\frac{x}{2}$; б) $y=-3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+3$; в) $y=|\cos 2x|$.

16. (3) Постройте графики функций: а) $y=|\sin x|-\sin x$; б) $y=2\sin x+|\sin x|$; в) $y=\frac{2|\sin x|}{\sin x}$.

17. (2) Постройте графики функций: а) $y=\cos^2 x$;

б) $y=-2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)-2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)$.

18. (2) Для каждой из функций, графики которых построены в задачах 10 – 17, определите множество значений и, если возможно, главный период.

19. (4) После того, как на борт были подняты 30 потерпевших кораблекрушения, оказалось, что запасов питьевой воды, имеющихся на корабле, хватит только на 50 дней, а не на 60, как раньше. Сколько людей было на корабле сначала?

20. (3) Решите уравнения:

а) $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$; б) $||3-x|-x+1|+x=6$.

21. (2) Три работника, работая три дня по три часа каждый день, могут засеять три гектара сельскохозяйственных культур. Какую площадь могут засеять 6 работников, работая шесть дней по шесть часов каждый день? Производительность всех работников считать одинаковой.

Ответы:

19. 150 человек. **20.** а) $x\in[1;2]\cup\{5\}$; б) $x\in\{-2;4\}$. **21.** 24 гектара.

2.4 Функция y=tgx

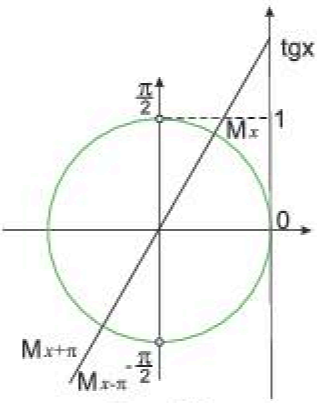


Рис. 15

Половина дуги всей окружности радиуса 1 равна π. Поэтому точки $M_{x+\pi}$ и $M_{x-\pi}$ диаметрально противоположны точке M_x. Отсюда следует, что $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}(x-\pi)=\operatorname{tg}x$. Следовательно, $T=\pi$ – период функции. Нетрудно видеть, что $T=\pi$ – главный период функции (рис. 15).

Точки M_x и M_{-x} симметричны друг другу относительно оси Ox, положительная и отрицательная полуоси оси тангенсов также симметричны друг другу относительно оси Ox. Отсюда $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$ (рис. 16).

Функция $y=\operatorname{tg}x$ – нечетная, и ее график симметричен сам себе относительно начала координат.

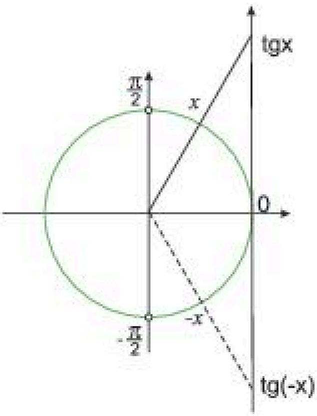


Рис. 16

Так как $y=\operatorname{tg}x$ имеет период π и ее график симметричен сам себе относительно начала координат, то сосредоточимся на построении графика на интервале $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. При изменении x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ значение $\operatorname{tg}x$ увеличивается; $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ – интервал возрастания (рис. 17).

Если x приближается к $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}x$ неограниченно растет (рис. 18). Это значит, что прямая $x=\frac{\pi}{2}$ – вертикальная асимптота графика.

Построим также небольшую таблицу из известных значений тангенсов некоторых углов:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg}x$	0	$\approx 0{,}58$	1	$\approx 1{,}73$	∞

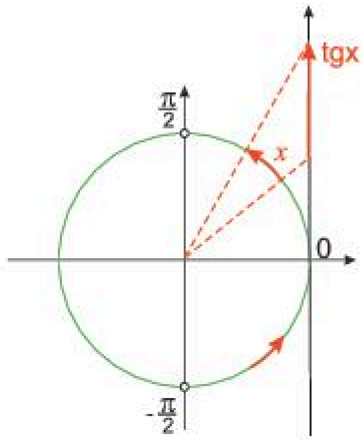


Рис. 17

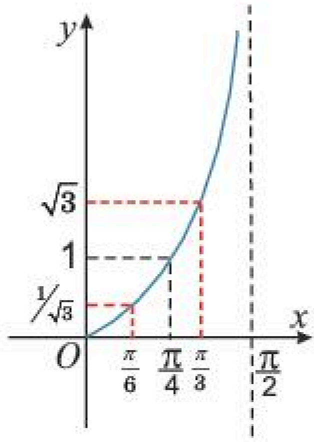


Рис. 18

Нечетность функции $y = \operatorname{tg} x$ позволяет получить изображение на рисунке 19.

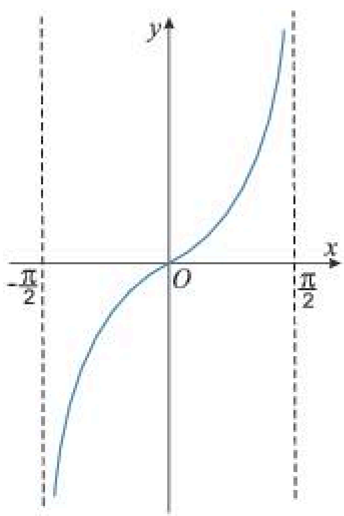


Рис. 19

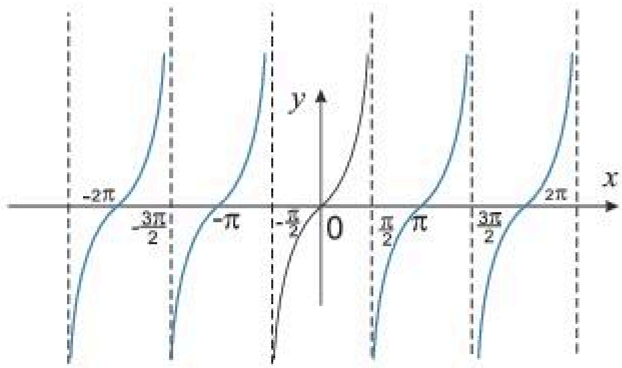


Рис. 20

Периодичность позволяет получить изображение на рисунке 20.

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

1) $D(f): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$ где $k \in \mathbb{Z}$.

2) $E(f): (-\infty; +\infty)$.

3) Нечетная.

4) Периодическая с главным периодом $T=\pi$.

5) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ – интервалы возрастания.

6) Не имеет точек локального экстремума.

7) $x=\pi k$ – нули функции.

8) $\left(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ – интервалы положительности, $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi k\right)$ – интервалы отрицательности.

9) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ – вертикальные асимптоты.

Упражнение 2

Постройте график и исследуйте функцию $y=\operatorname{ctg} x$.

2.5 Функция y=ctgx

Упражнение 2 тоже можно было выполнить аналогично тому, как мы построили график $y=\operatorname{tg} x$. Но если заметить, что по формуле приведения $\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, то график $y=\operatorname{ctg} x$ строится с помощью элементарных преобразований.

Построение проводим в три этапа:

– строим график $y=\operatorname{tg} x$;

– строим график $y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ сдвигом на $-\frac{\pi}{2}$ вдоль Ox;

– учитывая, что $\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, график $y=\operatorname{ctg} x$ получаем из предыдущего полной симметрией относительно оси *Oy* (преобразование Р6, глава 2, §4).

Не забудьте, что сначала надо преобразовывать асимптоты и точки. Сделайте все самостоятельно.

Мы приведем здесь только результат.

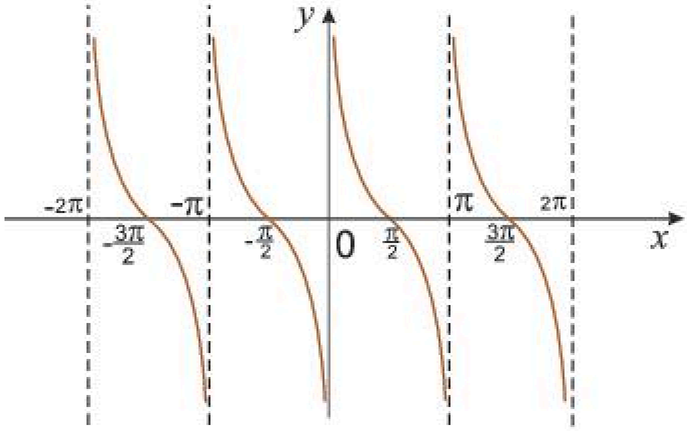


Рис. 21

Свойства функции $y=\mathrm{ctg}x$:

1) $D(f): x \neq \pi k$;

2) $E(f): (-\infty;+\infty)$;

3) нечетная;

4) периодическая с главным периодом $T=\pi$;

5) $(\pi k; \pi+\pi k)$ – интервалы убывания;

6) не имеет точек локального экстремума;

7) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ – нули функции;

8) $\left(\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ – интервалы положительности;

$\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \pi+\pi k\right)$ – интервалы отрицательности;

9) $x=\pi k$ – вертикальные асимптоты.

2.6 Примеры

График функции $f(2x)$ получается из графика $f(x)$ сжатием в 2 раза вдоль оси Ox. Отсюда следует, что если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f(2x)$ имеет период $\frac{T}{2}$. Аналогично, **если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f(kx)$ имеет период $\frac{T}{|k|}$**, так как график функции $f(kx)$ получается из графика $f(x)$ сжатием в $|k|$ раз вдоль оси Ox.

Пример 2

Найдите период и множество значений функции
$f(x)=6\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)-2$.

Решение. По формуле понижения степени $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$ преобразуем функцию $f(x)$ к виду $f(x)=-3\cos\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)+1$.

Очевидно, что функция $y=-3\cos x+1$ имеет период, равный 2π. Согласно сделанному замечанию, функция $f(x)=-3\cos\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ имеет период, равный $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

Найдем множество значений: $-1\le\cos\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$, $-3\le-3\cos\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)\le 3$, $-2\le-3\cos\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)+1\le 4$. Следовательно, множество значений $E(f):[-2;4]$.

Ответ: Период равен $\frac{\pi}{3}$, множество значений $E(f):[-2;4]$.

Пример 3

При каких значениях параметра a уравнение
$6\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)-2=a$ имеет корни?

Решение. Уравнение $f(x)=a$ имеет корни тогда и только тогда, когда a принадлежит множеству значений функции $y=f(x)$. Учитывая результат предыдущего примера, получаем ответ.

Ответ: $a\in[-2;4]$.

Пример 4

Для функции $y=\sin 1{,}5x-\operatorname{ctg}\frac{5}{3}x$ определите один из периодов, по возможности, наименьший.

Решение. Теорема пункта 2.3 главы 1 дает способ найти один из периодов данной функции. Период T_1 функции $f(x)=\sin\frac{3}{2}x$ равен $\frac{2\pi}{1{,}5}=\frac{4\pi}{3}$; период T_2 функции $g(x)=\operatorname{ctg}\frac{5}{3}x$ равен $\frac{\pi\cdot 3}{5}=\frac{3\pi}{5}$. Далее ищем наименьшие натуральные числа m и k, при которых $T_1m=T_2k$. Для этого составим пропорцию $\frac{T_1}{T_2}=\frac{k}{m}$. Подставляя $T_1=\frac{4\pi}{3}$ и $T_2=\frac{3\pi}{5}$, получаем после сокращений наименьшие возможные значения $k=20$ и $m=9$. По теореме пункта 2.3 главы 1 один из периодов функции $f(x)-g(x)$ имеет вид $T=T_1m=T_2k$. В данном случае $T=T_1m=\frac{4\pi}{3}\cdot 9=12\pi$.

Пример 5

Даны три числа x_1, x_2 и x_3, принадлежащие отрезку $[3\pi;4\pi]$, причем $x_1>x_2>x_3$. Сравните между собой числа $\operatorname{ctg}x_1$, $\operatorname{ctg}x_2$ и $\operatorname{ctg}x_3$.

Решение. На промежутке $[3\pi;4\pi]$ функция $y=\operatorname{ctg}x$ является убывающей: меньшим значениям аргумента соответствует большее значение функции. Следовательно, $\operatorname{ctg}x_1<\operatorname{ctg}x_2<\operatorname{ctg}x_3$.

Задачи

Часть 1

1. (1) Постройте графики функций:

а) $y=\operatorname{tg}x$; б) $y=\operatorname{tg}2x$; в) $y=-\operatorname{tg}2x$; г) $y=1-\operatorname{tg}2x$.

2. (1) Постройте графики функций:

а) $y=\operatorname{ctg}x$; б) $y=\operatorname{ctg}|x|$; в) $y=\operatorname{ctg}|x|-1$; г) $y=|\operatorname{ctg}|x|-1|$.

3. (2) Постройте график функции $y=\operatorname{tg}x\cdot\cos x$.

4. (2) Как известно, график функции $y=-\operatorname{tg}x$ получается из графика функции $y=\operatorname{tg}x$ преобразованием $P5$ (см. Глава 3, п. 4.2). С другой стороны, график функции $y=\operatorname{tg}(-x)$ получается из графика функции $y=\operatorname{tg}x$ преобразованием $P6$. Объясните, почему в обоих случаях получается один и тот же график.

5. а) (2) Дана возрастающая последовательность чисел x_1, x_2, x_3, ..., x_n, каждое из которых принадлежит отрезку $[8\pi;9\pi]$. Возрастающей или убывающей является последовательность чисел $\cos x_1$, $\cos x_2$, $\cos x_3$, ..., $\cos x_n$?

б) (2) Дана возрастающая последовательность чисел x_1, x_2, x_3, ..., x_n, каждое из которых принадлежит отрезку $[-9\pi;-8\pi]$. Что можно сказать о монотонности последовательности $\sin x_1$, $\sin x_2$, $\sin x_3$, ..., $\sin x_n$?

в) (2) Дана убывающая последовательность чисел x_1, x_2, x_3, ..., x_n, каждое из которых принадлежит отрезку $[-9\pi;-8\pi]$. Что можно сказать о монотонности последовательности $\operatorname{ctg}x_1$, $\operatorname{ctg}x_2$, $\operatorname{ctg}x_3$, ..., $\operatorname{ctg}x_n$?

6. (3) Среди следующих функций определите периодические и укажите их главный период:

а) $f_0(x)=\sin 4x$, $f_1(x)=x+\sin 4x$, $f_2(x)=\dfrac{23}{\cos 4x\sin 4x}$, $f_3(x)=|\sin x|$;

б) $g_0(x)=45\cos\left(0{,}5x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $g_1(x)=-5\cos\left(0{,}5\pi x+\dfrac{\pi}{5}\right)$,

$g_2(x)=\cos^2 x$, $g_3(x)=x\cos 5x$;

в) $h_0(x)=\dfrac{2}{3}\operatorname{tg}\dfrac{2}{3}x$; $h_1(x)=\dfrac{2\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}^2 2x}$, $h_2(x)=\dfrac{4}{x}-\operatorname{tg}3x$.

7. (3) Для следующих функций определите один из периодов, по возможности, наименьший:

а) $f(x)=\cos 7x+\sin 2x-4$; б) $g(x)=12\operatorname{tg}\dfrac{3}{4}x-15\operatorname{ctg}\dfrac{12}{5}x$;

в) $h(x)=\operatorname{tg}1{,}2x\cdot\sin 1{,}4x$.

8. (2) Каждую из следующих функций исследуйте на четность:

а) $f_1(x)=\cos 3x$, $f_2(x)=x^3\cos 3x$, $f_3(x)=x^3-\cos 3x$, $f_4(x)=\dfrac{x^3}{\sin 3x}$,

$f_5(x)=\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $g_1(x)=5x^3-\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x^3$, $g_2(x)=\sin^2 5x$,

$g_3(x)=\dfrac{3}{2+\sin^2 5x}$, $g_4(x)=\sin\sqrt{x}$.

9. (2) Укажите множество значений функции $y=f(x)$:

а) $y=\cos 2x$; б) $y=2\cos 2x-1$; в) $y=|\cos 3x|+4$; г) $y=5\cos^2 x-3$.

10. (2) Укажите множество значений функции $y=f(x)$:

а) $y=2\sin 100x\cos 100x$; б) $y=(\sin 2x+\cos 2x)^2$; в) $y=\cos^4\dfrac{x}{2}-\sin^4\dfrac{x}{2}$.

11. (3) При каких значениях параметра a уравнение имеет корни?

а) $\sin 3x=a$; б) $\sin x+|\sin x|=a$; в) $\cos^2 x=a-3$; г) $\sin 10x=a^2-2$.

12. В условии указан вид функции $f(x)$ и множество ее значений. Найдите значение параметра A, если:

а) $f(x)=A\cos x$, $E(f):[-2;2]$; б) $f(x)=A\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{7}\right)+6$, $E(f):[1;11]$.

13. (3) В условии указан вид функции $f(x)$, множество ее значений и период. Найдите значения параметров p, q, r, если:

а) $f(x)=p\sin rx+q$, $E(f):[-2;4]$, $T=\dfrac{\pi}{2}$;

б) $f(x)=(p-2)\cos\left(\left(2r+\dfrac{1}{3}\right)x\right)+|q+1|$, $E(f):[6;10]$, $T=6\pi$.

14. (4) Уровень воды Капчагайского водохранилища описывается функцией $h(t)=475-3\cos\dfrac{\pi}{6}t$, где $h(t)$ – высота (в метрах) над уровнем моря, t – номер месяца.

а) Чему равно наибольшее значение уровня воды в водохранилище? В каком месяце оно достигается?

б) Чему равно наименьшее значение уровня воды в водохранилище? В каком месяце оно достигается?

Часть 2

15. (1) Постройте графики функций:

а) $y=\operatorname{ctg}x$; б) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{2}x$; в) $y=2\operatorname{ctg}\dfrac{1}{2}x$; г) $y=2\operatorname{ctg}\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

16. (1) Постройте графики функций:

а) $y=\operatorname{tg}x$; б) $y=|\operatorname{tg}x|$; в) $y=\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$; г) $y=\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|$.

17. (2) Постройте график функции $y=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x$.

18. (3) Среди следующих функций определите периодические и укажите их главный период:

а) $f_0(x)=\cos\frac{2\pi}{7}\sin57x+\sin\frac{2\pi}{7}\cos57x$, $f_1(x)=\cos\frac{2}{3}x+\sin\frac{2}{3}x$,

$f_2(x)=\left(\cos\frac{2}{3}x+\sin\frac{2}{3}x\right)^2$, $f_3(x)=x^2|\sin x|$;

б) $g_0(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\sqrt{7}x-\frac{\pi}{7}\right)$, $g_1(x)=\cos^2\frac{\pi}{5}x-\sin^2\frac{\pi}{5}x$, $g_2(x)=x^3-\cos^4x$,

$g_3(x)=\cos^4x$;

в) $h_0(x)=\frac{1}{2-\operatorname{ctg}3\pi x}$; $h_1(x)=\frac{x}{2-\operatorname{ctg}3\pi x}$, $h_2(x)=1+\operatorname{ctg}^2x$.

19. Для следующих функций определите один из периодов, по возможности, наименьший:

а) (2) $f(x)=\sin x+\sin2x$; б) (2) $g(x)=\sin\frac{2}{3}x-\cos3x$;

в) (3) $h(x)=\operatorname{tg}1{,}5x\cdot\cos2x$.

20. (2) Каждую из следующих функций исследуйте на четность:

а) $f_1(x)=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x$, $f_2(x)=1+\operatorname{ctg}^3x$, $f_3(x)=x^{55}\operatorname{ctg}3x$, $f_4(x)=\frac{|x^3|}{\operatorname{ctg}37x}$;

б) $g_1(x)=\sin x+\cos x$, $g_2(x)=(\sin x-\cos x)^2-1$,

$g_3(x)=\sin(12x-\pi)$, $g_4(x)=\operatorname{tg}(-4x)+2015x^{2015}$.

21. а) (2) Дана убывающая последовательность чисел x_1, x_2, x_3, ..., x_n, каждое из которых принадлежит отрезку $[-8\pi;-6\pi]$. Что можно сказать о монотонности последовательности $\cos x_1$, $\cos x_2$, $\cos x_3$, ..., $\cos x_n$?

б) (2) Дана возрастающая последовательность чисел x_1, x_2, x_3, ..., x_n, каждое из которых принадлежит отрезку $[80{,}5\pi;81\pi]$. Что можно сказать о монотонности последовательности $\sin x_1$, $\sin x_2$, $\sin x_3$, ..., $\sin x_n$?

в) (2) Дана убывающая последовательность чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, каждое из которых принадлежит отрезку $[80{,}5\pi; 81\pi]$. Что можно сказать о монотонности последовательности $\operatorname{tg} x_1, \operatorname{tg} x_2, \operatorname{tg} x_3, \dots, \operatorname{tg} x_n$?

22. (3) Укажите множество значений функции $y = f(x)$:

а) $y = \sin\frac{x}{2}$; б) $y = -3\sin 2x + 1$; в) $y = -|\sin 4x| - 10$; г) $y = \pi\sin^2 4x + 6$.

23. (3) Укажите множество значений функции $y = f(x)$:

а) $y = 3\cos^2 x - 3\sin^2 x$; б) $y = (2\cos 3x - 2\sin 3x)^2$; в) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

24. (3) При каких значениях параметра a уравнение имеет корни?

а) $\cos\frac{x}{2} = \frac{a}{2}$; б) $|\cos x| - \cos x = a$; в) $\sin 3x = \cos a$; г) $|\sin x| = 3a^2 + 2a$.

25. (3) В условии указан вид функции $f(x)$ и множество ее значений. Найдите значения параметров p и q, если:

а) $f(x) = p\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + q$, $E(f): [-10; 20]$; б) $f(x) = p|\cos x| + q$, $E(f): [4; 12]$.

26. (3) В условии указан вид функции $f(x)$, множество ее значений и период. Найдите значения параметров p, q, r, если:

а) $f(x) = p\sin rx + q$, $E(f): [-10; 0]$, $T = 4$;

б) $f(x) = (p+2)\sin((6-2r)x) + 2q$, $E(f): [-6; 8]$, $T = \frac{\pi}{5}$.

27. (5) Четыре девочки поют песни, аккомпанируя друг другу по очереди. Каждый раз одна из них играет, а остальные три поют. Оказалось, что Аня спела больше всех песен – 11, а Айжан спела меньше всех песен – 8. Сколько всего песен спели девочки?

28. (2) Решите уравнения: а) $(x^2 - 4)\sqrt{x+1} = 0$; б) $(x^2 + 5x)\sqrt{x-3} = 0$.

29. (5) Балтабай собирается заменить в своей квартире 10 обычных ламп накаливания на 10 энергосберегающих. Потребляемая мощность обычной лампы – 100 Вт, энергосберегающей – 10 Вт, стоимость энергосберегающей лампы – 1440 тенге, стоимость электроэнергии – 16 тенге за один киловатт-час. За какое время окупится покупка энергосберегающих ламп, если каждая лампа горит в среднем по 4 часа в сутки? (Будем считать, что энергосберегающие лампы не перегорают).

A) 250 дней; B) 300 дней; C) 320 дней; D) 1 год; E) 440 дней.

30. (2) Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + 4y = 18, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

Ответы:

5. а) убывающая; б) ничего нельзя сказать; в) возрастающая.
6. а) $T_0=\frac{\pi}{2}$, f_1 непериодична, $T_2=\frac{\pi}{4}$, $T_3=\pi$; б) $T_0=4\pi$, $T_1=4$, $T_2=\pi$, g_3 непериодична; в) $T_0=1{,}5\pi$, $T_1=\frac{\pi}{4}$, h_2 непериодична.

7. а) 2π; б) $\frac{20\pi}{3}$; в) 10π. **8.** а) f_1 – четная, f_2 – нечетная, f_3 – общего вида, f_4 – четная, f_5 – нечетная; б) g_1 – нечетная, g_2 – четная, g_3 – общего вида, g_4 – общего вида. **9.** а) $[-1;1]$; б) $[-3;1]$; в) $[4;5]$; г) $[-3;2]$.

10. а) $[-1;1]$; б) $[0;2]$; в) $[-1;1]$. **11.** а) $[-1;1]$; б) $[0;2]$; в) $[3;4]$; г) $\left[-\sqrt{3};-1\right]\cup\left[1;\sqrt{3}\right]$.
12. а) ±2; б) ±5. **13.** а) $(p;q;r)\in\{(3;1;4);(-3;1;4);(3;1;-4);(-3;1;-4)\}$;
б) $(p;q;r)\in\left\{(0;0;7);(0;0;-9);\left(0;-\frac{1}{3};7\right);\left(0;-\frac{1}{3};-9\right);(4;0;7);(4;0;-9);\left(4;-\frac{1}{3};7\right);\left(4;-\frac{1}{3};-9\right)\right\}$.
14. а) Наибольшее значение уровня воды в водохранилище равно $475+3=478$ метров над уровнем моря и достигается оно при $t=6$, то есть в июне; б) наименьшее значение равно $475-3=472$ м и достигается при $t=0$ или $t=12$, то есть в декабре. **18.** а) $T_0=\frac{2\pi}{57}$, $T_1=3\pi$, $T_2=\frac{3\pi}{2}$, f_3 – непериодична; б) $T_0=\frac{2\pi}{\sqrt{7}}$, $T_1=5$, g_2 – непериодична, $T_3=\pi$; в) $T_0=\frac{1}{3}$, h_1 непериодична, $T_2=\pi$. **19.** а) 2π; б) 6π; в) 2π. **20.** а) f_1 – нечетная, f_2 – общего вида, f_3 – четная, f_4 – нечетная; **21.** а) ничего нельзя сказать; б) убывающая; в) убывающая. **22.** а) $[-1;1]$; б) $[-2;4]$; в) $[-11;10]$; г) $[6;6+\pi]$. **23.** а) $[-3;3]$; б) $[0;8]$; в) $\left[\frac{1}{2};1\right]$. **24.** а) $[-2;2]$; б) $[0;2]$; в) $(-\infty;+\infty)$; г) $\left[-1;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[0;\frac{1}{3}\right]$. **25.** а) $(p;q)\in\{(15;5);(-15;5)\}$; б) $(p;q)\in\{(8;4);(-8;12)\}$.
26. а) $(p;q;r)\in\left\{\left(5;-5;\frac{\pi}{2}\right);\left(-5;-5;-\frac{\pi}{2}\right);\left(5;-5;-\frac{\pi}{2}\right);\left(-5;-5;\frac{\pi}{2}\right)\right\}$;
б) $(p;q;r)\in\left\{\left(5;\frac{1}{2};-2\right);\left(5;\frac{1}{2};8\right);\left(-9;\frac{1}{2};-2\right);\left(-9;\frac{1}{2};8\right)\right\}$. **27.** 13 песен.
28. а) $x_1=-1$, $x_2=2$; б) $x=3$. **29.** А. **30.** $\left(\frac{2}{17};\frac{76}{17}\right)$, $(2;4)$.

§3 ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть никто, не будучи математиком, не дерзает читать мои труды.
Леонардо да Винчи

3.1 Арккотангенс

Рассмотрим дугу $(0;\pi)$ тригонометрической окружности и ось котангенсов (рис. 1). Для каждого числа a на оси котангенсов найдется ровно один угол φ на дуге $(0;\pi)$ такой, что $\operatorname{tg}\varphi = a$. Этот угол называется арккотангенсом числа a. Обозначение: $\varphi = \operatorname{arcctg} a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Для любого числа a арккотангенсом называется угол φ, лежащий в интервале $(0;\pi)$, котангенс которого равен числу a.

$$\operatorname{arcctg} a = \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \varphi < \pi, \\ \operatorname{ctg}\varphi = a \end{cases}$$

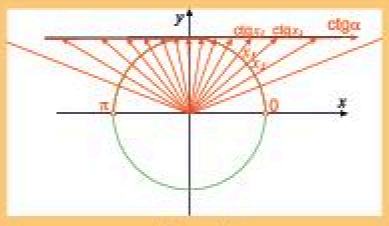


Рис.1

Из определения сразу следуют два тождества:

- Для любого числа a выполняется равенство $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$.
- Для любого угла φ из интервала $(0;\pi)$ выполняется $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\varphi) = \varphi$.

Пример 1

Даны углы $2\frac{1}{4}\pi$, $1\frac{1}{4}\pi$, $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$. Так как функция $y = \operatorname{ctg} x$ периодическая с периодом $T = \pi$, то котангенсы этих углов равны между собой, и равны числу 1. Какой из данных углов является арккотангенсом числа 1?

Решение. По условию $\operatorname{tg}2\frac{1}{4}\pi = \operatorname{tg}1\frac{1}{4}\pi = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$, однако только один из данных углов, угол $\frac{\pi}{4}$ принадлежит интервалу $(0;\pi)$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Пример 2

Найдите арккотангенсы чисел $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$.

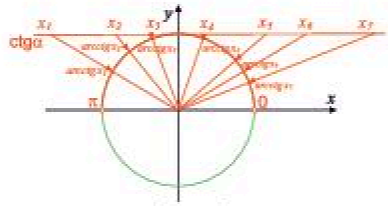


Рис.2

Решение. Известно, что $\sqrt{3}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$. Кроме того, $\frac{\pi}{6}\in(0;\pi)$. Отсюда следует, что $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$. Отметим числа $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$ на оси котангенсов (рис. 3). Числа $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$ на оси котангенсов симметричны друг другу относительно оси Oy. Точки $\frac{\pi}{6}$ и $\pi-\frac{\pi}{6}$ дуги $(0;\pi)$ также симметричны друг другу относительно оси Oy. Из геометрических соображений понятно, что $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\pi-\frac{\pi}{6}$.

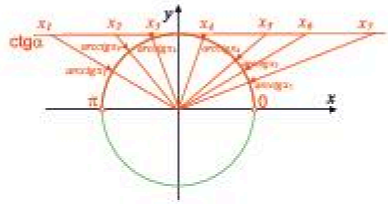


Рис.3

Ответ. $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6}$.

В общем случае точно так же, как и в примере 2, доказывается свойство арккотангенсов: **для любого числа a выполняется равенство** $\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg}a$.

Определение арккотангенса каждому действительному числу x ставит в соответствие угол $\operatorname{arcctg}x$, который по своему определению принадлежит интервалу $(0;\pi)$ (рис. 3). Таким образом возникает функция $y=\operatorname{arcctg}x$. Областью определения этой функции является все множество действительных чисел $(-\infty;+\infty)$, а множеством значений является интервал $(0;\pi)$. Нетрудно видеть, что $y=\operatorname{arcctg}x$ – **это функция, обратная функции** $y=\operatorname{ctg}x$, **определенной на множестве** $(0;\pi)$.

Построим график функции $y=\operatorname{arcctg}x$. Так как она является обратной к функции $y=\operatorname{ctg}x$ на множестве $(0;\pi)$, то графики этих функций симметричны друг другу относительно прямой $y=x$.

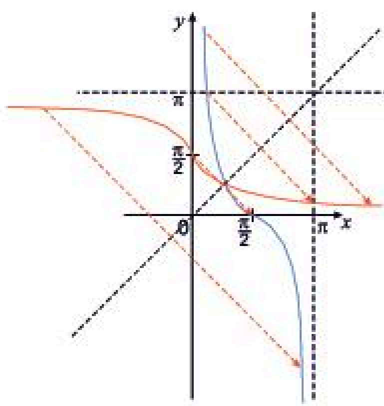


Рис. 4

При выполнении симметрии сначала строим образы асимптот: ось Oy *переходит в ось* Ox*, прямая* $x=\pi$ *переходит в прямую* $y = y=\pi$*. После этого отображаем несколько особых точек. Например, точка с координатами* $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ *переходит в точку* $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$*. А затем строим график* (рис. 4).

Свойства функции $y=\operatorname{arcctg} x$:

1) $D(f):(-\infty;+\infty)$,
2) $E(f):(0;\pi)$,
3) функция убывает на всей области определения,
4) $y=0$ и $y=\pi$ – горизонтальные асимптоты.

Далее для работы с аркфункциями будет полезна следующая таблица. Обратите внимание на форму записи числителей дробей в первой строке и во второй. Третья строка получается делением числа в первой строке на число во второй в соответствующем столбце. Как получаются числа в четвертой строке?

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

3.2 Арктангенс

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

Для любого числа $a\in(-\infty;+\infty)$ арктангенсом числа a называется угол φ из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

$$\operatorname{arctg} a=\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg}\varphi=a. \end{cases}$$

Из определения сразу следуют два тождества:

- Для любого числа a выполняется равенство $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)=a$.
- Для любого угла φ из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ выполняется $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)=\varphi$.

Пример 3

Определите $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{22\pi}{3}\right)$.

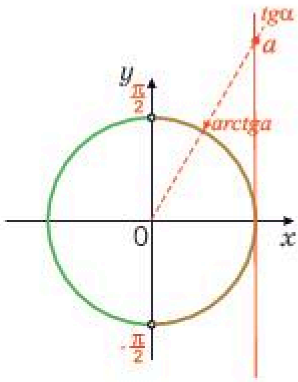


Рис. 5

Решение. Так как угол $\frac{22\pi}{3}$ не принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, то неправильно думать, что $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{22\pi}{3}\right)=\frac{22\pi}{3}$. По определению угол $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{22\pi}{3}\right)$ – это угол, тангенс которого равен тангенсу угла $\frac{22\pi}{3}$, но лежащий в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Воспользуемся периодичностью функции тангенс: $\operatorname{tg}\frac{22\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(7\frac{1}{3}\pi\right)=\operatorname{tg}\left(7\frac{1}{3}\pi-7\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, причем $\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Следовательно, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{22\pi}{3}\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Пример 4

Найдите арктангенсы чисел 1 и –1.

Решение. Известно, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, причем $\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$. Числа 1 и –1 на оси тангенсов симметричны друг другу относительно оси Ox. Точки $\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$ также симметричны друг другу относительно оси Ox. Следовательно, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$, $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

Заметим, что в примере 4 имеет место равенство $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1$. Аналогичные рассуждения показывают, что **для любого числа a верно равенство arctg** $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Каждому числу $x \in (-\infty; +\infty)$, согласно данному выше определению, поставим в соответствие $\operatorname{arctg} x$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.

$y = \operatorname{arctg} x$ – это функция, которая каждому числу $x \in (-\infty; +\infty)$ ставит в соответствие угол y такой, что $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} y = x$.

Нетрудно заметить, что $y = \operatorname{arctg} x$ – это обратная к функции $y = \operatorname{tg} x$, определенной на множестве $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, график $y = \operatorname{arctg} x$ строится симметричным отображением соответствующей ветки графика $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 6).

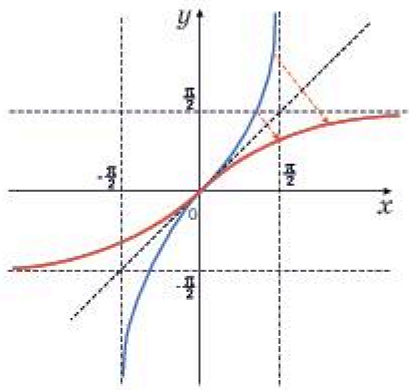


Рис. 6

Свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$:

1) $D(f): (-\infty; +\infty)$;

2) $E(f): \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

3) нечетная;

4) возрастает на всей области определения;

5) $y = \pm\frac{\pi}{2}$ – горизонтальные асимптоты.

3.3 Арккосинус

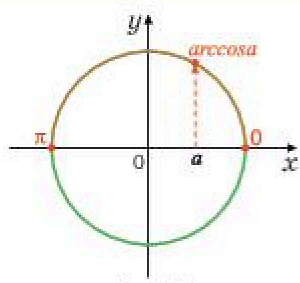


Рис. 7

Функция $y = \cos x$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между множеством $[0; \pi]$ и $[-1; 1]$. Это значит, что для любого числа a из отрезка $[-1; 1]$ найдется ровно один угол φ на дуге $[0; \pi]$ такой, что $\cos\varphi = a$ (рис. 7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.

Арккосинусом числа $a \in [-1;1]$ называется угол φ, лежащий на отрезке $[0;\pi]$, косинус которого равен a.

$$\arccos a = \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi, \\ \cos\varphi = a. \end{cases}$$

Непосредственно из определения следуют два тождества:

- Для любого числа $a \in [-1;1]$ выполняется равенство $\cos(\arccos a) = a$.
- Для любого угла φ из интервала $[0;\pi]$ выполняется $\arccos(\cos\varphi) = \varphi$.

Для любого $a \in [-1;1]$ имеет место следующее тождество: $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Пример 5

Упростите $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Решение. По свойству $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ имеем $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$. По таблице определяем, что $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$. Окончательно:

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Упражнение 1

Найти: $\arccos\frac{1}{2}$, $\arccos 0$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos 1$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.

$y = \arccos x$ – это функция, которая каждому числу $x \in [-1;1]$ ставит в соответствие угол y такой, что $y \in [0;\pi]$ и $\cos y = x$.

Пример 6

Определите значение $\arccos(\cos 2015{,}3\pi)$.

Решение. Пусть $\arccos(\cos 2015{,}3\pi)=\alpha$. Наша цель – определить угол α на дуге $[0;\pi]$, косинус которого равен косинусу угла $2015{,}3\pi$. Так функция $\cos x$ имеет период 2π, то $\cos 2015{,}3\pi=\cos(2015{,}3\pi-2\cdot 1008\pi)=\cos(-0{,}7\pi)=\cos 0{,}7\pi$, причем $0{,}7\pi\in[0;\pi]$.

Ответ: $0{,}7\pi$.

Функция $y=\arccos x$ является обратной к функции $y=\cos x$, определенной на множестве $[0;\pi]$ (рис. 8).

Свойства функции $y=\arccos x$:

1) $D(f):[-1;1]$;

2) $E(f):[0;\pi]$;

3) убывает на всей области определения.

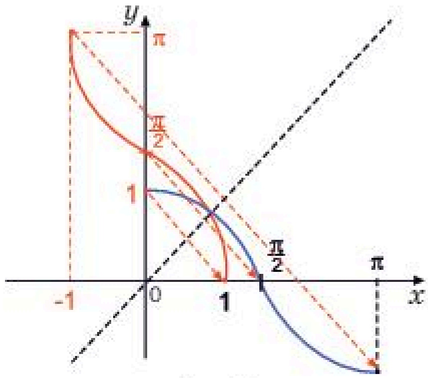


Рис. 8

3.4 Арксинус

Функция $y=\sin x$ осуществляет взаимно однозначное отображение отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ на отрезок $[-1;1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.

Арксинусом числа a из множества $[-1;1]$ называется угол φ, лежащий на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

$$\arcsin a=\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, \\ \sin\varphi=a. \end{cases}$$

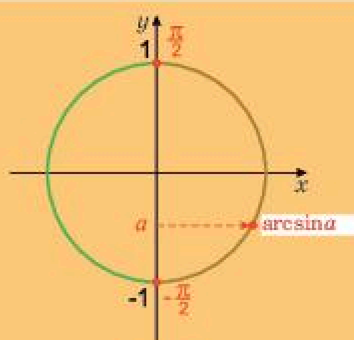


Рис. 9

Непосредственно из определения арксинуса следуют следующие формулы:

- Для любого числа $a \in [-1;1]$ выполняется равенство $\sin(\arcsin a) = a$.
- Для любого угла $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ выполняется $\arcsin\sin\varphi = \varphi$.

Заметим, что числа $(-a)$ и a на оси Oy симметричны друг другу относительно оси Ox. Углы $\arcsin(-a)$ и $\arcsin a$ на тригонометрической окружности также симметричны друг другу относительно оси Ox. Следовательно, **имеет место тождество** $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Упражнение 2

Найдите арксинусы чисел -1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

$y = \arcsin x$ – это функция, которая каждому числу $x \in [-1;1]$ ставит в соответствие число $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ такое, что $\sin y = x$.

Функция $y = \arcsin x$ является обратной к функции $y = \sin x$, определенной на множестве $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (рис.9).

Свойства функции $y = \arcsin x$:

1) $D(f): [-1;1]$;
2) $E(f): \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;
3) нечетная;
4) возрастает на области определения.

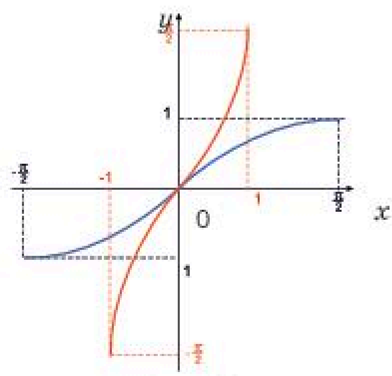


Рис. 10

Пример 7

Найдите $\arcsin(\sin 5)$.

Решение. Пусть $\arcsin(\sin 5) = \alpha$. Тогда по определению арксинуса $\sin\alpha = \sin 5$ и $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Так как $\pi \approx 3{,}14$, то $\frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi$ (рис. 10)

Следовательно, $\frac{3\pi}{2}-2\pi<5-2\pi<0$,

$-\frac{\pi}{2}<5-2\pi<0$.

Окончательно: $\sin 5=\sin(5-2\pi)$ и

$5-2\pi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $5-2\pi$.

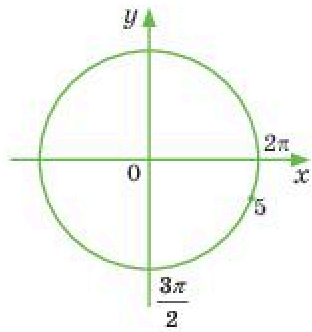


Рис. 11

Задачи

Часть 1

1. (1) Используя элементарные преобразования $P1-P8$ (глава 1, §6), постройте последовательно на одной координатной плоскости графики функций $f(x)=\arcsin x$, $g(x)=\arcsin\frac{1}{2}x$, $h(x)=3\arcsin\frac{1}{2}x$, $u(x)=3\arcsin\frac{1}{2}(x+4)$, $v(x)=3\arcsin\left(\frac{x}{2}+2\right)-\pi$. Для каждой из функций определите область определения и множество значений.

2. (1) Упростите следующие выражения:

а) $\arcsin 0$, $\arcsin 1$, $\arcsin(-1)$, $\arcsin\frac{1}{2}$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos\left(\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-2\right)$, $\arccos\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)$, $\arccos(-1)^{105}$,

$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}120^\circ\right)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(\cos\frac{53}{2}\pi\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{53}{2}\pi\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{55}{2}\pi\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\frac{4\cos 15^\circ}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}\right)$,

$\operatorname{arctg}\left(\frac{4\sin 15^\circ}{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}\right)$;

г) $\operatorname{arcctg}(\cos\beta+\cos(180^\circ-\beta))$, $\operatorname{arcctg}\frac{\sin(180^\circ-\gamma)}{\sin\gamma}$ при $\sin\gamma\neq 0$,

$\operatorname{arcctg}\frac{\cos 93^\circ}{\sin 3^\circ}$, $\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{3(1-\cos 14^\circ)}{2\sin^2 7^\circ}}$; $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

3. (1) Вычислите:

а) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1-\operatorname{arctg} 0-\arcsin(-1)$;

б) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})+\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

4. (3) Упростите следующие выражения:

а) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)$, $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$, $\arccos\left(\cos\frac{15\pi}{7}\right)$, $\arccos\left(\cos 99\frac{6}{7}\pi\right)$;

б) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$, $\arcsin(\sin 5{,}2\pi)$, $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{9\pi}{5}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{5}+2015\pi\right)\right)$;

г) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 0{,}3\pi)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 0{,}7\pi)$,

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-0{,}3\pi))$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-0{,}7\pi))$.

5. (4) Упростите следующие выражения:

а) $\arcsin(\sin(-1))$, $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{8}\right)$, $\arcsin(\sin 3)$;

б) $\arcsin\left(\sin\frac{15}{8}\pi\right)$, $\arcsin(\sin 6)$.

6. (4) Упростите следующие выражения:

а) $\arccos(\cos 2)$, $\arccos(\cos(-2))$; б) $\arccos(\cos 1{,}3\pi)$, $\arccos(\cos 4)$;

в) $\arccos(\cos 2{,}3\pi)$, $\arccos(\cos 7)$.

Часть 2

7. (1) Используя элементарные преобразования $P1-P8$ (глава 1, §6), постройте последовательно на одной координатной плоскости графики функций $f(x)=\arccos x$, $g(x)=\arccos 2x$, $h(x)=\frac{1}{2}\arccos 2x$, $u(x)=-\frac{1}{2}\arccos 2x$, $v(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos 2x$. Для каждой из функций определите область определения и множество значений.

8. (1) Упростите следующие выражения:

а) $\arccos\frac{1}{2}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\arcsin\frac{\sqrt{15}+\sqrt{21}}{\sqrt{20}+\sqrt{28}}$, $\arcsin\left(\sqrt{3}\sin\frac{19\pi}{6}\right)$, $\arcsin\left(\frac{\cos 2014\pi}{2}\right)$,

$\arcsin\left(\frac{2-3\sqrt{2}}{6-2\sqrt{2}}\right)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2 15}{2\operatorname{tg}15^\circ}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{8}}\right)$;

г) $\operatorname{arcctg}\frac{3^{-2}\cdot\sqrt{3}}{27\cdot 3^{-4}}$, $\operatorname{arcctg}\frac{\arccos(-1)}{-\pi\sqrt{3}}$.

9. (1) Упростите:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\operatorname{arctg}(-1)$;

б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos 0+\operatorname{arctg}1-\arcsin 1-\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$.

10. (3) Упростите следующие выражения:

а) $\arccos(\cos 0{,}9\pi)$, $\arccos(\cos 0{,}1\pi)$, $\arccos(\cos(-0{,}9\pi))$,
$\arccos(\cos 2016{,}1\pi)$;

б) $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{7}\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{4\pi}{7}\right)\right)$,
$\arcsin\left(\sin\left(-\frac{32\pi}{7}\right)\right)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{11}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{40\pi}{11}\right)\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{40\pi}{11}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{73\pi}{11}\right)$;

г) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}1{,}2\pi)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-1{,}2\pi))$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-2015{,}2\pi))$,
$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}777{,}7\pi)$.

11. (3) Упростите следующие выражения:

а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}1)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5}{7}\pi\right)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}2)$; б) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{15}{8}\pi\right)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}6)$.

12. (4) Упростите следующие выражения:

а) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}3)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-3))$; б) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}1{,}3\pi)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}4)$;

в) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}2{,}3\pi)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}7)$.

13. (4) Электронный будильник показывает часы (две цифры, от 00 до 23) и минуты (две цифры). Сколько раз между 00:01 и 23:59 показания часов будут читаться одинаково слева направо и справа налево?

14. (3) При изготовлении некоторой продукции 60% ее себестоимости приходится на приобретение сырья. Если цены на сырье увеличатся на 25%, то на сколько процентов увеличится себестоимость продукции?
A) 20%; B) 15%; C) 10%; D) 5%; E) 12%.

Ответы:

1. $D(f):[-1;1]$, $E(f):\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $D(g):[-2;2]$, $E(g):\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $D(h):[-2;2]$, $E(h):\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$; $D(u):[-6;-2]$, $E(u):\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$; $D(v):[-6;-2]$, $E(v):\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. **2.** а) 0, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{2}$, 0, π, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; в) 0, $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$. **3.** а) $1{,}5\pi$; б) $\frac{13\pi}{12}$. **4.** а) $\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{7}$; б) $\frac{\pi}{5}$, $-\frac{\pi}{5}$, $-\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$; в) $-\frac{\pi}{9}$, $-\frac{\pi}{9}$, $-\frac{\pi}{5}$, $-\frac{\pi}{5}$; г) $0{,}3\pi$, $0{,}7\pi$, $0{,}7\pi$, $0{,}3\pi$. **5.** а) -1, $\frac{\pi}{8}$, $\pi-3$; б) $-\frac{\pi}{8}$, $6-2\pi$. **6.** а) 2, 2; б) $0{,}7\pi$, $2\pi-4$; в) $0{,}3\pi$, $7-2\pi$. **7.** $D(f):[-1;1]$, $E(f):[0;\pi]$; $D(g):\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $E(g):[0;\pi]$; $D(h):\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $E(h):\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $D(u):\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $E(u):\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$; $D(v):\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $E(v):\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. **8.** а) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$. **9.** а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{\pi}{12}$. **10.** а) $0{,}9\pi$, $0{,}1\pi$, $0{,}1\pi$, $0{,}1\pi$; б) $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$, $-\frac{3\pi}{7}$, $-\frac{3\pi}{7}$; в) $\frac{4\pi}{11}$, $\frac{4\pi}{11}$, $-\frac{4\pi}{11}$, $-\frac{4\pi}{11}$; г) $0{,}2\pi$, $0{,}8\pi$, $0{,}8\pi$, $0{,}7\pi$. **11.** а) 1, $-\frac{2\pi}{7}$, $2-\pi$; б) $-\frac{\pi}{8}$, $6-2\pi$. **12.** а) 3, $\pi-3$; б) $0{,}3\pi$, $4-\pi$; в) $0{,}3\pi$, $7-2\pi$. **13.** 15. **14.** B.

§4 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Процветание и совершенство математики тесно связаны с благосостоянием государства.
Наполеон

ТЕОРЕМА 1.

Для любого числа $a \in [-1;1]$ выполняется равенство $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $a \in (0;1)$. Пусть ABC – прямоугольный треугольник, $\angle B = 90°$, $AB = a$, $AC = 1$. Тогда $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{1} = a$, $\angle C = \arcsin a$. Аналогично, $\angle A = \arccos a$.

Следовательно, $\arcsin a + \arccos a = \angle A + \angle C = \pi - \angle B = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Пусть теперь $a \in (-1;0)$. Так как $a < 0$, то $-a > 0$, и для положительного числа $-a$ только что доказано, что $\arcsin(-a) + \arccos(-a) = \frac{\pi}{2}$.

С другой стороны, по формулам упражнения 1 имеем $\arcsin(-a) + \arccos(-a) = -\arcsin a + \pi - \arccos a = \pi - (\arcsin a + \arccos a)$.

Отсюда следует, что $\pi - (\arcsin a + \arccos a) = \frac{\pi}{2}$, то есть $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, теорема 1 доказана для всех значений $a \in (-1;0) \cup (0;1)$. Оставшиеся частные случаи $a = -1$, 0, 1 тривиальны. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.

Для любого числа a выполняется равенство $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}$.

Упражнение 2

Докажите теорему 2 по аналогии с доказательством теоремы 1.

Пример 1

Вычислите $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$.

Решение: Пусть $\arccos\frac{2}{3}=\alpha$. Тогда по определению арккосинуса $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ и $0\le\alpha\le\pi$. Требуется найти $\sin\alpha$. Если $\alpha\in[0,\pi]$, то $\sin\alpha\ge0$, $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Пример 2

Вычислите $\cos(\operatorname{arcctg}(-2))$.

Решение. Заменим $\operatorname{arcctg}(-2)=\alpha$. Тогда по определению арккотангенса $\operatorname{ctg}\alpha=-2$ и $0<\alpha<\pi$. Требуется найти $\cos\alpha$. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ и $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$,

$1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\cos^2\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Остается выбрать правильный знак для $\cos\alpha$. *Нам известно только то, что* $\alpha\in(0,\pi)$. *Однако на этом множестве значение косинуса может быть как отрицательным, так и положительным. Что делать? Изображаем тригонометрическую окружность и замечаем, что значения котангенсов углов первой четверти положительны, в то время как значения котангенсов углов второй четверти отрицательны. В нашем случае* $\operatorname{ctg}\alpha=-2<0$. *Следовательно,* α *– угол второй четверти, и* $\cos\alpha<0$.

Так как $\operatorname{ctg}\alpha=-2<0$, то α – угол второй четверти, и $\cos\alpha<0$.

Ответ: $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Пример 3

Упростите $\sin(\operatorname{arcctg}x)$.

Решение: Обозначим $\operatorname{arcctg}x=\alpha$. Тогда по определению арккотангенса $\operatorname{ctg}\alpha=x$ и $\alpha\in(0,\pi)$.

Требуется найти $\sin\alpha$. Известно, что $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, $1+x^2=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Так как $\alpha\in(0,\pi)$, то $\sin\alpha>0$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Пример 4

Вычислите $\operatorname{tg}(\arccos 0{,}6-\operatorname{arctg}2)$.

Решение. Обозначим $\arccos 0{,}6=\alpha$ и $\operatorname{arctg}2=\beta$. Тогда $\operatorname{tg}(\arccos 0{,}6-\operatorname{arctg}2)=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. По определению арктангенса $\operatorname{tg}\beta=2$. Остается определить значение $\operatorname{tg}\alpha$ при условиях $\cos\alpha=0{,}6$ и $\alpha\in[0;\pi]$. Формула $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ дает возможность определить, что $\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{4}{3}$. На промежутке $\alpha\in[0;\pi]$ косинусы положительны для углов первой четверти и отрицательны для углов второй четверти. В данном случае $\cos\alpha=0{,}6>0$. Следовательно, α является углом первой четверти и $\operatorname{tg}\alpha>0$. Имеем $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$. Окончательно:

$$\operatorname{tg}(\arccos 0{,}6-\operatorname{arctg}2)=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{4}{3}-2}{1+\frac{4}{3}\cdot 2}=-\frac{2}{11}.$$

Ответ: $-\frac{2}{11}$.

Пример 5

Найдите $\arccos(\sin 5)$.

Решение. Так по теореме 1 $\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}$, то

$$\arccos(\sin 5)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sin 5)=\frac{\pi}{2}-(5-2\pi)=2{,}5\pi-5.$$

Ответ: $2{,}5\pi-5$.

Задачи
Часть 1

1. (2) Вычислите значения следующих выражений:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$, $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$, $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

б) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$, $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$, $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

в) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}5)$, $\sin(\operatorname{arcctg}5)$, $\cos(\operatorname{arcctg}5)$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}5)$.

2. (3) Вычислите значения следующих выражений:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$, $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$,

$\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}+\operatorname{arcctg}5\right)$;

б) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{1}{3}\right)$, $\sin(\operatorname{arcctg}5-\operatorname{arctg}2)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\operatorname{arctg}5\right)$, $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)-\operatorname{arctg}5\right)$, $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

3. (3) а) Вычислите значение выражения $\cos\left(2\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

б) Докажите, что если $|a|\le 1$, то $\cos(2\arccos a)=2a^2-1$.

в) Пользуясь формулой, доказанной в пункте

б) Определите $\cos\left(2\arccos\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right)$.

4. (3) а) Вычислите значение выражения $\sin\left(2\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

б) Докажите, что если $|a|\le 1$, то $\sin(2\arccos a)=2a\sqrt{1-a^2}$.

в) Пользуясь формулой, доказанной в пункте б), определите $\sin\left(2\arccos\frac{21}{29}\right)$.

5. (3) Докажите, что при допустимых значениях переменной x имеют место следующие тождества:

а) $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$; б) $\operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $\sin(\operatorname{arctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

6. (4) Докажите равенство $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\pi}{4}$.

7. (4) Докажите равенство $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{7}{5}$.

8. (5) Упростите следующие выражения:

а) $\arcsin(\cos 0{,}3\pi)$, $\arccos(\sin 0{,}2\pi)$, $\arccos(\sin 1{,}8\pi)$; $\arcsin(\cos 4)$;

б) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 1{,}8\pi)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 1{,}8\pi)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 3)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 7)$.

Часть 2

9. (2) Вычислите значения следующих выражений:

а) $\cos\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$, $\sin\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$, $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$;

б) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$, $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$, $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$;

в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-2))$, $\cos(\operatorname{arctg}(-2))$, $\sin(\operatorname{arctg}(-2))$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-2))$.

10. (3) Вычислите значения следующих выражений:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$, $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)-\arccos\frac{5}{13}\right)$,

$\cos(\operatorname{arctg}(-2)+\operatorname{arcctg}5)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{5}{13}\right)$, $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)-\arccos\frac{5}{13}\right)$,

$\sin\left(\arccos\frac{3}{4}+\operatorname{arctg}(-2)\right)$;

в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{arcctg}5\right)$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}5-\operatorname{arctg}3)$, $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}(-2)+\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

11. (3) а) Вычислите значение выражения $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

б) Докажите, что если $|a|\le 1$, то $\cos(2\arcsin a)=1-2a^2$.

в) Пользуясь формулой, доказанной в пункте б), определите $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}\right)$.

12. (3) а) Вычислите значение выражения $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}3)$.
б) Докажите, что для любого значения a выполняется равенство $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}a)=\dfrac{2a}{1-a^2}$.
в) Пользуясь формулой, доказанной в пункте б), определите $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)$.

13. (3) Докажите, что при допустимых значениях переменной x имеют место следующие тождества:

а) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$; б) $\operatorname{tg}(\arccos x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; в) $\cos(\operatorname{arctg}x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

14. (4) Докажите равенство $\operatorname{tg}\left(2\arccos\dfrac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\dfrac{12}{13}\right)=-\dfrac{119}{120}$.

15. (4) Докажите равенство $\arccos\left(\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

16. (5) Упростите следующие выражения:
а) $\arcsin\left(\cos\dfrac{\pi}{7}\right)$, $\arccos\left(\sin\left(-\dfrac{12\pi}{7}\right)\right)$, $\arccos\left(\sin\dfrac{15}{7}\pi\right)$; $\arcsin(\cos(-5))$;
б) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{5}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{27\pi}{8}\right)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}(-4))$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(-6))$.

17. (4) Решите систему уравнений $\begin{cases} x=y+6, \\ y=\dfrac{4x^2-x^4}{x^2-4}. \end{cases}$

18. (3) Три числа, сумма которых равна 65, составляют геометрическую прогрессию. Если из первого числа вычесть 25, второе оставить без изменения, а к третьему прибавить 5, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

Ответы:

1. а) $\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{4}{3}$; б) $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $-2\sqrt{2}$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; в) 5, $\dfrac{1}{\sqrt{26}}$, $\dfrac{5}{\sqrt{26}}$, $\dfrac{1}{5}$. **2.** а) $\dfrac{2\sqrt{6}-1}{6}$, $\dfrac{6\sqrt{2}-4}{15}$, $\dfrac{17}{5\sqrt{26}}$; б) $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$, $\dfrac{8\sqrt{2}+3}{15}$, $-\dfrac{9}{\sqrt{130}}$; в) $\dfrac{10-13\sqrt{3}}{11}$, $\dfrac{45+52\sqrt{2}}{199}$,

$\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{3}$. **3.** а) $-\frac{1}{3}$; б) $9-4\sqrt{6}$. **4.** а) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$; б) $\frac{840}{841}$. **8.** а) $0,2\pi$, $0,3\pi$, $0,7\pi$, $\frac{5\pi}{2}-4$; б) $0,7\pi$, $0,8\pi$, $\frac{3\pi}{2}-3$, $7-2\pi$. **9.** а) $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$, $2\frac{2}{5}$, $\frac{5}{12}$; б) $-\frac{2}{3}$, $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $-\frac{\sqrt{5}}{2}$; б) -2, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $-\frac{1}{2}$. **10.** а) $\frac{\sqrt{15}+2}{6}$, $\frac{5\sqrt{5}-24}{39}$, $\frac{7\sqrt{130}}{130}$; б) $\frac{5\sqrt{3}-12}{26}$, $-\frac{12\sqrt{5}+10}{39}$, $\frac{\sqrt{7}-6}{4\sqrt{5}}$; в) $\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{7}$, $\frac{1-4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$. **11.** а) $\frac{2}{7}$; б) $4\sqrt{35}-23$.
12. а) $-\frac{3}{4}$; б) 1. **16.** а) $\frac{5\pi}{14}$, $\frac{3\pi}{14}$, $\frac{5\pi}{14}$, $5-1,5\pi$; б) $\frac{9\pi}{10}$, $\frac{\pi}{8}$, $4-\frac{\pi}{2}$, $6-\frac{3\pi}{2}$. **17.** $(-3;-9)$.
18. 5; 15; 45 или 45; 15; 5.

§5 УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С АРКФУНКЦИЯМИ

Математика – царица наук,
арифметика – царица математики.
Карл Фридрих Гаусс

Пример 1

Решите уравнение $6\arccos^2 x+11\pi\arccos x-2\pi^2=0$

Решение. Замена $\arccos x=\alpha,\ \alpha\in[0;\pi]$.

$6\alpha^2+11\pi\alpha-2\pi^2=0,\ \alpha=\frac{\pi}{6}$ или $\alpha=-2\pi$, $\frac{\pi}{6}\in[0;\pi]$, $-2\pi\notin[0;\pi]$.

$\arccos x=\frac{\pi}{6},\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 2

Решите неравенство
$9\arccos^2(2x-1)<\pi^2$.

Решение. ОДЗ:
$-1\le 2x-1\le 1$, $0\le 2x\le 2$, $0\le x\le 1$.
Неравенство
$9\arccos^2(2x-1)<\pi^2$ равносильно двойному неравенству
$-\frac{\pi}{3}<\arccos(2x-1)<\frac{\pi}{3}$.

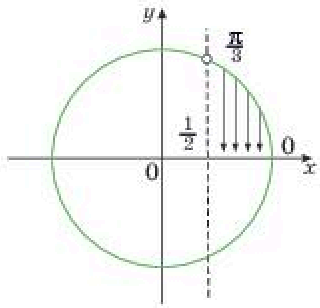


Рис. 1

Неравенство $-\frac{\pi}{3}<\arccos(2x-1)$ выполняется для всех $x\in$ ОДЗ, так как по определению арккосинуса для любого a выполняется условие $\arccos a\in[0;\pi]$.
Неравенство $\arccos(2x-1)<\frac{\pi}{3}$ решаем, используя тригонометрический круг (рис. 40):
$\frac{1}{2}<2x-1\le 1$, $1<4x-2\le 2$, $3<4x\le 4$, $\frac{3}{4}<x\le 1$.

Заметим, что $x\in\left(\frac{3}{4};1\right]$ является подмножеством ОДЗ.

Ответ: $\left(\frac{3}{4};1\right]$.

Задачи

Часть 1

1. (2) Решите уравнения:
а) $\arccos x=\frac{2\pi}{3}$; б) $2\arcsin x=\pi$; в) $3\operatorname{arctg} x=2\pi$; г) $6\operatorname{arcctg} 2x-\pi=0$.

2. Решите неравенства:
а) (2) $\arccos x>\frac{2\pi}{3}$, $\arccos x\le\frac{2\pi}{3}$;
б) (2) $2\arcsin x\le\pi$, $2\arcsin x\ge\pi$;
в) (3) $3\operatorname{arctg} x<2\pi$, $3\operatorname{arctg} x>2\pi$;
г) (3) $6\operatorname{arcctg} 2x-\pi\ge 0$, $6\operatorname{arcctg} 2x-\pi<0$.

3. а) (1) Решите уравнение $\arccos\left(x^2-\frac{5}{2}x+2\right)=\frac{\pi}{3}$;

б) (2) Решите неравенство $\arccos\left(x^2-\frac{5}{2}x+2\right)<\frac{\pi}{3}$;

в) (3) Решите неравенство $\arccos\left(x^2-\frac{5}{2}x+2\right)>\frac{\pi}{3}$.

4. (3) Решите уравнения:

а) $3\arcsin^2 x+5\pi\arcsin x-2\pi^2=0$; б) $3\arcsin^2 x+5\pi\arcsin x+2\pi^2=0$.

5. (4) Решите неравенства:

а) $3\arcsin^2 x+5\pi\arcsin x-2\pi^2\le 0$; б) $3\arcsin^2 x+5\pi\arcsin x-2\pi^2>0$.

6. а) (2) Решите уравнение $\operatorname{arctg}\left(4x^2-3x-1\right)=-\frac{\pi}{4}$;

б) (2) Решите неравенство $\operatorname{arctg}\left(4x^2-3x-1\right)>-\frac{\pi}{4}$;

в) (3) Решите неравенство $\operatorname{arctg}\left(4x^2-3x-1\right)\le-\frac{\pi}{4}$.

7. Решите уравнения;

а) (2) $18\operatorname{arctg}^2 x-3\pi\operatorname{arctg}x=\pi^2$; б) (3) $18\operatorname{arcctg}^2 x-3\pi\operatorname{arcctg}x=\pi^2$.

8. Решите неравенства:

а) (4) $18\operatorname{arctg}^2 x-3\pi\operatorname{arctg}x<\pi^2$; б) (5) $18\operatorname{arcctg}^2 x-3\pi\operatorname{arcctg}x\ge\pi^2$

Часть 2

9. Решите уравнения:

а) (1) $4\arccos x-3\pi=0$; б) (1) $-6\arcsin 7x-\pi=0$;

в) (1) $4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\pi=0$; г) (1) $4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+3\pi=0$.

10. Решите неравенства:

а) (2) $4\arccos x-3\pi<0$, $4\arccos x-3\pi>0$;

б) (2) $-6\arcsin 7x-\pi\ge 0$, $-6\arcsin 7x-\pi\le 0$;

в) (2) $4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\pi<0$, $4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\pi>0$;

г) (3) $4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+3\pi\le 0$, $4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+3\pi>0$.

11. а) (1) Решите уравнение $\arcsin\left(2{,}5x^2-4x+0{,}5\right)=\frac{\pi}{6}$;

б) (2) Решите неравенство $\arcsin\left(2{,}5x^2-4x+0{,}5\right)\le\frac{\pi}{6}$;

в) (3) Решите неравенство $\arcsin\left(2{,}5x^2-4x+0{,}5\right)\ge\frac{\pi}{6}$.

12. (3) Решите уравнения:

а) $9\arccos^2 x=9\pi\arccos x-2\pi^2$; б) $9\arcsin^2 x=9\pi\arcsin x-2\pi^2$.

13. (4) Решите неравенства:

а) $9\arccos^2 x<9\pi\arccos x-2\pi^2$; б) $9\arccos^2 x>9\pi\arccos x-2\pi^2$.

14. а) (3) Решите уравнение $\operatorname{arcctg}\left(-x^2+5x-4\right)=\frac{\pi}{2}$;

б) (4) Решите неравенство $\operatorname{arcctg}\left(-x^2+5x-4\right)\ge\frac{\pi}{2}$;

в) (5) Решите неравенство $\operatorname{arcctg}\left(-x^2+5x-4\right)\le\frac{\pi}{2}$.

15. Решите уравнения:

а) (2) $4\operatorname{arcctg}^2 x+\pi^2=5\pi\operatorname{arcctg} x$; б) (3) $4\operatorname{arctg}^2 x+\pi^2=5\pi\operatorname{arctg} x$.

16. (4) Решите неравенства:

а) $4\operatorname{arcctg}^2 x+\pi^2\ge5\pi\operatorname{arcctg} x$; б) $4\operatorname{arctg}^2 x+\pi^2\ge5\pi\operatorname{arctg} x$.

17. (3) Определите операцию $\otimes$ следующим образом: $a\otimes b=a^2-ab+b^2$, где a и b произвольные числа. Вычислите $2\otimes(1\otimes0)$.

18. (2) Пусть даны числа a и b, про которые известно, что $0<a<1$ и $b>1$. Среди следующих пяти чисел укажите наименьшее: ab, a, $a:b$, b, $a+b$.

19. (4) Асан на мотоцикле и Усен на ослике стартуют одновременно из одной точки кругового шоссе в одном направлении и двигаются с постоянными скоростями. Через 2 часа они впервые снова оказались одновременно в точке старта, причем за это время Асана 99 раз обгонял Усена. Во сколько раз средняя скорость мотоцикла больше скорости ослика, если Усен за 2 часа успел сделать ровно один круг?

Ответы:

1. а) $x=-\frac{1}{2}$; б) $x=1$; в) $x\in\varnothing$; г) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. а) $x\in\left[-1;-\frac{1}{2}\right)$, $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$; б) $x\in[-1;1]$, $x=1$;

в) $x\in(-\infty;+\infty)$, $x\in\varnothing$; г) $x\in\left(-\infty;\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $x\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$.

3. а) $x\in\{1;\ 1{,}5\}$; б) $x\in\left[\frac{1}{2};1\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right]$; в) $x\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

4. а) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $x\in\varnothing$.

5. а) $-1\le x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}<x\le1$.

6. а) $x\in\left\{0;\frac{3}{4}\right\}$; б) $x\in(-\infty;0)\cup(0{,}75;+\infty)$; в) $x\in[0;0{,}75]$.

7. а) $x\in\left\{\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$; б) $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. а) $x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\sqrt{3}\right)$; б) $x\in\left(-\infty;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

9. а) $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $x=-\frac{1}{14}$; в) $x=-2$; г) $x\in\varnothing$.

10. а) $x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$, $x\in\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $x\in\left[-\frac{1}{7};-\frac{1}{14}\right]$, $x\in\left[-\frac{1}{14};\frac{1}{7}\right]$;

в) $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; г) $x\in\varnothing$, $x\in(-\infty;+\infty)$.

11. а) $x\in\left\{0;\frac{8}{5}\right\}$; б) $x\in\left[0;\frac{3}{5}\right]\cup\left[1;\frac{8}{5}\right]$; в) $x\in\left[\frac{4-\sqrt{21}}{5};0\right]\cup\left[\frac{8}{5};\frac{4+\sqrt{21}}{5}\right]$.

12. а) $x=\pm\frac{1}{2}$; б) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. а) $x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; б) $x\in\left[-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right]$.

14. а) $x\in\{1;4\}$; б) $x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$; в) $x\in[1;4]$.

15. а) $x=1$; б) $x=1$.

16. а) $x\in[1;+\infty)$; б) $x\in(-\infty;1]$.

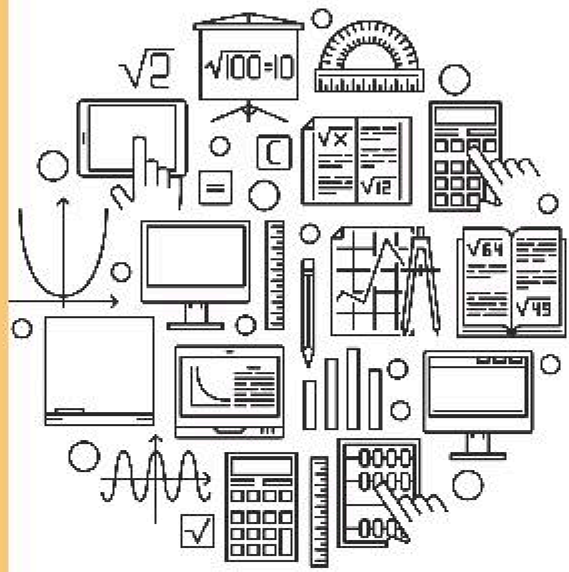
17. 3.

18. $a:b$.

19. В 100 раз.

Глава 3

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА



ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Искусство алгебры ... есть научное искусство, предмет которого составляют абсолютное число и измеримые величины, являющиеся неизвестными, но отнесенные к какой-нибудь известной вещи, по которой их можно определить. Эта вещь есть или количество или отношение...

Омар Хайям

Первым специализированным трактатом по тригонометрии был трактат среднеазиатского ученого Аль-Бируни (X-XI век) «Ключ к астрономии». Сам трактат утерян, но сохранилось небольшое «Введение в элементы астрологического искусства», содержащее в популярной форме изложение основ математики и астрономии (995–996 годы). Фундаментальное изложение тригонометрии как самостоятельной науки (как плоской, так и сферической) дал персидский математик и астроном Насир ад-Дин ат-Туси в 1260 году.

Таким образом, к концу XIII века были открыты базовые теоремы, составляющие содержание тригонометрии:

- выражение любой тригонометрической функции через любую другую;
- формулы для синусов и косинусов кратных и половинных углов, а также для суммы и разности углов;
- теоремы синусов и косинусов;
- решение плоских и сферических треугольников.

После того как в XII–XIII веках арабские трактаты были переведены на латынь, многие идеи индийских и исламских математиков стали достоянием европейской науки. Крупным достижением стала монография немецкого математика Региомонтана «Пять книг о треугольниках всех видов» (опубл. 1462–1464), в которой были сведены все известные к этому моменту знания по плоской и сферической тригонометрии и приложены семизначные таблицы синусов (с шагом 1′) и тангенсов (с шагом 1°). После XVI века этой темой занимались многие выдающиеся ученые, в том числе Николай Коперник, Иоганн Кеплер, Франсуа Виет.

Современный вид тригонометрии придал Леонард Эйлер (1707–1783). В трактате «Введение в анализ бесконечных» Эйлер дал определение тригонометрических функций, эквивалентное современному. Манера обозначать обратные тригонометрические функции с помощью приставки arc (от лат. arcus, дуга) появилась у австрийского математика Карла Шерфера (Karl Scherffer, 1716-1783) и закрепилась благодаря Лагранжу. Имелось в виду, что, например, обычный синус позволяет по дуге окружности найти стягивающую ее хорду, а обратная функция решает противоположную задачу.

В XIX–XX веках бурное развитие получили теория тригонометрических рядов и связанные с ней области математики: гармонический анализ, теория случайных процессов и другие. Актуальность тригонометрии в настоящее время подтверждается хотя бы тем фактом, что математические принципы, используемые при передаче аудио и видеоинформации (например, файлов с расширением .jpg) , разработаны современными математиками на основе так называемых тригонометрических рядов Фурье (1768–1830 гг). г).

§1 ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1.1 Уравнения $sinx=a$

В результате изучения данной темы мы научимся решать уравнения вида $\sin x = a$. Начнем с упражнений, для выполнения которых мы рекомендуем использовать тригонометрическую окружность. Не забывайте, что если угол x отмечен на тригонометрической окружности, то синусом угла x является вторая координата отмеченной точки.

Упражнение 1

Известно, что синус угла $\frac{\pi}{6}$ равен $0,5$. Это значит, что угол $\frac{\pi}{6}$ является решением уравнения $\sin x = 0,5$. Существуют ли другие решения этого уравнения? Если да, то назовите несколько из них.

Упражнение 2

Известно, что если $x=0$, то $\sin x = 0$. Верно ли обратное утверждение: если $\sin x = 0$, то $x=0$? Ответ обоснуйте.

Упражнение 3

Отметьте на оси Oy число $\sqrt{2}$. Существует ли такой угол на тригонометрической окружности, что его синус равен $\sqrt{2}$?

Начнем с уравнения $\sin x = 0$.

Пример 1

Решите уравнение $\sin x = 0$.

Рассуждение. Отмечаем 0 на оси Oy. На единичной окружности находим точки, у которых ордината равна 0 (рис. 1). Это оказываются точки пересечения единичной окружности с осью Ox. Двигаясь от нуля в положительную сторону (против часовой стрелки), получаем последовательность углов 0, 2π, 3π, 4π и т.д. Движение в отрицательную сторону дает последовательность углов 0, –π, –2π, –3π, –4π и т.д. В результате получаем все решения уравнения $\sin x = 0$.

Решение: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Решите уравнение $\sin x = 1$.

Рассуждение. Отмечаем 1 на оси Oy и видим, что только у одной точки на тригонометрической окружности вторая координата равна 1. Это самая верхняя точка с координатами (0,1). Назовем эту точку Н. Пусть точка M_x движется по окружности, начиная с положения $x = 0$, против часовой стрелки, то есть в положительном направлении. В первый раз M_x совпадает с Н при $x = \frac{\pi}{2}$. Это значит, что $x = \frac{\pi}{2}$ – одно из решений уравнения $\sin x = 1$. Так как число 2π является основным периодом функции $y = \sin x$, то прибавление или вычитание числа 2π от числа $\frac{\pi}{2}$ несколько раз не изменяет значение синуса. Например, числа $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi$, $\frac{\pi}{2} + 6\pi$ и т.д., а также $\frac{\pi}{2} - 2\pi$, $\frac{\pi}{2} - 4\pi$, $\frac{\pi}{2} - 6\pi$ и т.д. также являются корнями уравнения $\sin x = 1$. Таким образом, решением уравнения $\sin x = 1$ является серия чисел $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k принимает произвольное целое значение.

Решение: $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k – произвольное целое число.

Приведенный пример намечает общий подход к решению уравнений типа $\sin x = a$ с помощью тригонометрической окружности. Вот небольшой алгоритм.

- Отмечаем число a на оси Oy. Проводим горизонтальную прямую через отмеченную точку и фиксируем пересечения этой прямой с тригонометрической окружностью.

- Используя теоретические знания, таблицы и др., находим ближайшие к нулю углы, соответствующие зафиксированным точкам.
- Используя факт периодичности функции $y=\sin x$, записываем ответ.

Пример 3

Решите уравнение $\sin x=-1$.

Рассуждение по алгоритму. Число –1 на оси Oy является самой нижней точкой тригонометрической окружности. Ближайший к нулю угол, соответствующий этой точке, равен $-\frac{\pi}{2}$.

Число 2π является главным периодом функции $y=\sin x$. Следовательно, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

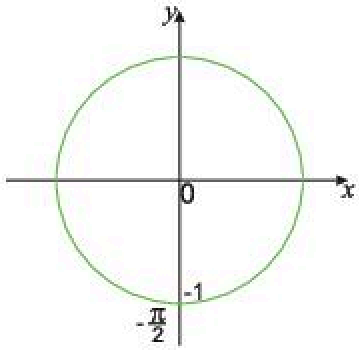


Рис. 1

Решение: $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Уравнения $\sin x=-1$, $\sin x=1$, $\sin x=0$ являются частными случаями уравнения $\sin x=a$.

В общем случае, если $a>1$ или $a<-1$, то равенство $\sin x=a$, очевидно, не может иметь места. Это значит, что при $a>1$ или $a<-1$ решением уравнения $\sin x=a$ является пустое множество, $x\in\varnothing$.

Если $-1<a<1$, $a\neq 0$, то снова обратимся к алгоритму и рисунку 1. Если через точку a на оси Oy провести горизонтальную прямую, то пересечение этой прямой с окружностью соответствует углам $\arcsin a$ и $\pi-\arcsin a$. Все решения уравнения $\sin x=a$ можно записать через две серии: $x=\arcsin a+2\pi k$ или $x=\pi-\arcsin a+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$. Две записанные серии возможно объединить в одну. Действительно, перепишем выражения для корней немного в другом виде: $x=\arcsin a+\pi(2k)$, $x=-\arcsin a+\pi(2k+1)$. Введем в рассмотрение новый параметр n. Заметим, что если $n=2k$ – четное, то $(-1)^n=1$, а если $n=2k+1$ – нечетное число, то $(-1)^n=-1$. Поэтому обе серии можно объединить в одну: $x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

Все результаты можно выписать в одну таблицу. Само собой разумеется, что параметры k и n принимают все возможные целые значения.

$\sin x = a$, $a < -1$ *или* $a > 1$	$x \in \varnothing$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 0$	$x = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = a$, $-1 < a < 1$, $a \neq 0$	$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, где $k, n \in \mathbb{Z}$

Формулы в первых четырех строчках настоятельно рекомендуем не учить, а каждый раз «восстанавливать», рассуждая приблизительно так, как было показано в приведенных примерах. Формула в пятой строчке таблицы называется «общей формулой корней для синуса».

Какую из двух формул $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{array}\right.$ или $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ применять? Одного правила нет. Наша рекомендация состоит в том, что если после применения общей формулы для корней для выражения x в «чистом» виде еще необходимы дополнительные преобразования, то лучше применять формулу как объединение серий. Если же значительных преобразований не требуется, то лучше в виде одной серии. Проиллюстрируем сказанное на двух следующих примерах.

Пример 4

Решите уравнение $\sin\frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. По общей формуле корней $\frac{x}{3} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Так как $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, то

$$\frac{x}{3} = (-1)^n (-1)\frac{\pi}{4} + \pi n = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{4} + 3\pi n.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{4} + 3\pi n$, где $n \in Z$.

Пример 5

Решите уравнение $2\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-1=0$.

Решение. Уравнение легко преобразуется к виду

$$\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

По формуле $\left[\begin{array}{l} x=\arcsin a+2\pi k, \\ x=\pi-\arcsin a+2\pi k, \end{array}\right.$ получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\pi k, \\ \frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3x}{2}=2\pi k, \\ \frac{3x}{2}=\frac{2\pi}{3}+2\pi k, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=4\pi k, \\ 3x=\frac{4\pi}{3}+4\pi k, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{4}{3}\pi k, \\ x=\frac{4\pi}{9}+\frac{4}{3}\pi k, \end{array}\right.$$

Решение: $x=\frac{4\pi}{3}k$, $x=\frac{4\pi}{9}+\frac{4}{3}\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Пример 6

Решите уравнение $7\sin 5x-1=0$.

Решение. Уравнение преобразуется к виду $\sin 5x=\frac{1}{7}$. Число $\frac{1}{7}$ не является табличным значением синуса, однако лежит в отрезке $[-1;1]$. Применяя «общую формулу корней для синуса», получаем ответ.

Ответ: $x=(-1)^n\arcsin\left(\frac{1}{7}\right)+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

Задачи

Часть 1

Решите уравнение (1–5):

1. (1) а) $\sin x=-1$; б) $\sin 2x=-1$; в) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=-1$.

2. (1) а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin(-2x) = -\frac{1}{2}$; в) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

3. (1) а) $2\sin \pi x = -\sqrt{3}$; б) $2\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$;

в) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3}$; г) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right) = -\sqrt{3}$.

4. (1) а) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$; б) $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$;

в) $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0$; г) $2\sin\left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2}$.

5. (1) а) $2\sin\frac{2x}{3} - 2\sqrt{2} = 0$; б) $\sin 3x = \sqrt{5} - 2$;

в) $\sin 5x - \sqrt{5} = 2$; г) $8\sin\left(x + \frac{\pi}{13}\right) = -3\pi$.

6. (2) Решите уравнения, применив формулы приведения:

а) $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$; б) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi x\right) = 1$;

в) $7\sin(\pi - 3x) - 2 = 0$; г) $14\cos\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = -\sqrt{98}$.

7. (2) Решите уравнения, используя замену переменной $\sin x = p$:

а) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$; б) $3\sin^2 x + 11\sin x - 4 = 0$; в) $2\sin^2 x - \sin x = 0$.

Часть 2

Решите уравнение (8–12):

8. (1) а) $\sin x = 1$; б) $\sin\frac{x}{2} = 1$; в) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 1$.

9. (1) а) $\sin x = -\frac{1}{2}$; б) $2\sin(-3x) = 1$; в) $2\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{1}{2}$.

10. (1) а) $2\sin x = \sqrt{3}$; б) $2\sin\left(\frac{2\pi x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$;

в) $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) + \sqrt{3} = 0$; г) $2\sin\left(\frac{\pi}{5} - 2x\right) = -\sqrt{3}$.

11. (1) а) $2\sin x - \sqrt{2} = 0$; б) $-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - \pi x\right) + 1 = 0$;

в) $2\sin\left(\frac{2x}{7}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$; г) $2\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$.

12. (1) а) $2\sin\frac{2x}{3}+3\sqrt{2}=0$; б) $\sin\frac{x}{2}=\sqrt{17}-3$;

в) $\sin 2x-\sqrt{15}=-3$; г) $8\sin\left(x+\frac{\pi}{13}\right)=-2\pi$.

13. (2) Решите уравнения, применив формулы приведения:

а) $2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sqrt{3}=0$; б) $2\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=1$;

в) $\sin(7\pi+2x)=-1$; г) $18\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)=\sqrt{243}$.

14. (2) Решите уравнения, используя замену переменной $\sin x=p$:

а) $\sin^2 x-5\sin x+4=0$; б) $\sin^2 x+5\sin x+6=0$; в) $\sin^2 x+5\sin x=0$.

15. (2) Решите: $\begin{cases}\frac{5}{x+2y}+\frac{8}{y}=5,\\ \frac{10}{x+2y}-\frac{2}{y}=1.\end{cases}$

16. (2) В двух мешках вместе находятся 140 кг муки. Если из первого мешка переложить во второй 12,5% муки, то в обоих мешках будет одинаковое количество муки. Сколько муки в каждом из мешков?

Ответы: *(во всех ответах предполагается $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$).*

1. а) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; б) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; в) $x=-\frac{\pi}{12}+\pi k$; г) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}$.

2. а) $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; б) $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$;

в) $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}$ г) $-\frac{4\pi}{3}+4\pi k, 4\pi k$.

3. а) $x=(-1)^{k+1}\frac{1}{3}+k$; б) $\frac{7\pi}{18}+\frac{4\pi k}{3}, \frac{11\pi}{18}+\frac{4\pi n}{3}$;

в) $\frac{8\pi}{45}+\frac{2\pi k}{3}, \frac{13\pi}{45}+\frac{2\pi n}{3}$; г) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, \frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$.

4. а) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k$; б) $\frac{7\pi}{12}+2\pi k, \frac{13\pi}{12}+2\pi n$;

в) $\frac{\pi}{4}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi n$; г) $-\frac{7}{4}+6k, \frac{11}{4}+6n$.

5. а) $x\in\varnothing$; б) $x=\frac{1}{3}(-1)^k\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)+\frac{\pi k}{3}$; в) $x\in\varnothing$; г) $x\in\varnothing$.

6. а) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$; б) $x=\frac{1}{4}+k$;

в) $x=\frac{1}{3}(-1)^k\arcsin\left(\frac{2}{7}\right)+\frac{\pi k}{3}$; г) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k$.

7. а) $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; б) $x=(-1)^k\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+\pi k$; в) $x=\pi k, x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$.

8. а) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; б) $x=\pi+4\pi k$; в) $x=\frac{\pi}{12}+\pi k$; г) $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}$.

9. а) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$; б) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$;

в) $-\pi+6\pi k$, $3\pi+6\pi n$; г) $\frac{\pi}{6}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k$.

10. а) $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$; б) $-\frac{7}{8}+3k, \frac{13}{8}+3n$;

в) $-\frac{\pi}{15}+\pi k, \frac{23\pi}{30}+\pi n$; г) $\frac{4\pi}{15}+\pi k, \frac{13\pi}{30}+\pi n$.

11. а) $x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$; б) $\frac{1}{12}+2k, -\frac{5}{12}+2k$;

в) $-\frac{7\pi}{4}+7\pi k, \frac{7\pi}{2}+7\pi n$; г) $\frac{\pi}{60}+\frac{2\pi k}{5}, \frac{7\pi}{60}+\frac{2\pi k}{5}$.

12. а) $x\in\varnothing$; б) $x\in\varnothing$;

в) $x=\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\left(\sqrt{15}-3\right)+\frac{\pi k}{2}$; г) $x=-\frac{\pi}{13}+(-1)^{k+1}\arcsin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\pi k$.

13. а) $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$; б) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$;

в) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$; г) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$.

14. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; б) $x\in\varnothing$; в) πk. **15.** $(1;2)$. **16.** 80 кг и 60 кг.

1.2 Уравнения вида $\cos x=a$

Упражнение 4

В предыдущем пункте мы полностью и подробно изучили уравнения вида $\sin x=a$. Результатом стала таблица формул, в которой рассмотрены все возможные значения a. Попробуйте самостоятельно получить аналогичную таблицу для уравнений вида $\cos x=a$.

Пример 7

Решите уравнение $\cos x=-\frac{\pi}{2}$.

Рассуждение. $\frac{\pi}{2}\approx\frac{3,14}{2}\approx1,57>1$,

$\cos x$ – это абсцисса соответствующей точки M_x на тригонометрической окружности. Очевидно, что на окружности нет точек, у которых абсцисса равна $-\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 2).

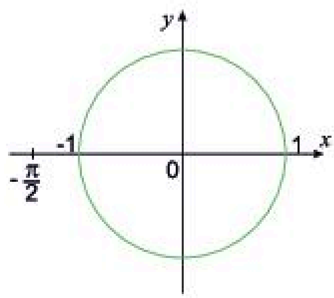


Рис. 2

Решение. $\cos x=-\frac{\pi}{2}$ => $x\in\varnothing$, так как

$-\frac{\pi}{2}<-1$.

Аналогичные рассуждения показывают, что если a не лежит в отрезке $[-1;1]$, то уравнение $\cos x=a$ не имеет решений.

Пример 8

Решите уравнение $\cos x=0$.

Рассуждение. Заметим, что $\cos x=0$ тогда и только тогда, когда абсцисса точки M_x равна 0. Абсцисса точки M_x равна 0 тогда, когда M_x совпадает с точками пересечения окружности с осью Oy. При движении M_x по окружности «попадание» в эти точки происходит через каждые полкруга (рис. 3), что соответствует изменению угла x на $+\pi$ или на $-\pi$. Так как $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$, то $x=\frac{\pi}{2}$ – одно из решений уравнения. Остальные получаются из данного прибавлением или отниманием целого количества углов π.

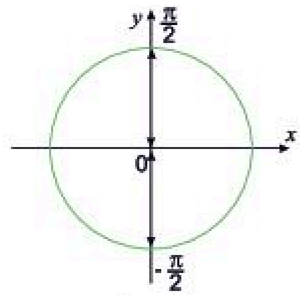


Рис. 3

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Пример 9

Решите уравнение $\cos x=1$.

Рассуждение. Так как 1 – крайняя правая точка отрезка $[-1;1]$ на оси Ox, то на окружности существует только одна точка, абсцисса которой равна 1. На рисунке 3 это точка *B*, которая соответствует углу $\arccos 1=0$ радиан. При движении по тригонометрической окружности точка M_x совпадает с точкой *B* ровно через круг, то есть периодом решения является вся дуга окружности 2π. Это соответствует известному факту, что число 2π является главным периодом функции $y=\cos x$: если мы к числу 0 несколько раз прибавим или несколько раз отнимем от него число 2π, то значение косинуса от этого не изменится. Таким образом, $x=2\pi$, 4π, 6π и т.д. в положительную сторону, $x=-2\pi$, -4π, -6π и т.д. в отрицательную сторону являются корнями уравнения $\cos x=1$.

Решение. Уравнение $\cos x=1$ имеет решение $x=2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Пример 10

Решите уравнение $\cos x=-1$.

Рассуждение. Так как –1 – крайняя правая точка отрезка $[-1;1]$ на оси Ox, то на окружности существует только одна точка, абсцисса которой равна –1. Эта точка соответствует углу $\arccos(-1)=\pi$. Периодичность функции $y=\cos x$ позволяет записать все решения данного уравнения: $x=\pi+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Уравнение $\cos x=-1$ имеет решение $x=\pi+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Уравнения $\cos x=-1$, $\cos x=1$ и $\cos x=0$, которые мы рассмотрели, являются частными случаями уравнения $\cos x=a$. Кроме того, мы уже знаем, что если $a<-1$ или $a>1$, то уравнение $\cos x=a$ не имеет корней. Все оставшиеся случаи описываются как $-1<a<1$ и $a\neq 0$. Приведенные примеры намечают общий подход к решению уравнений типа $\cos x=a$ с помощью тригонометрической окружности. Вот небольшой алгоритм.

- Отмечаем число a на оси Ox. Проводим вертикальную прямую через отмеченную точку и фиксируем пересечения этой прямой с тригонометрической окружностью.
- Используя теоретические знания, таблицы и др., находим ближайшие к нулю углы, соответствующие зафиксированным точкам.
- Используя факт периодичности функции $y=\cos x$, записываем ответ.

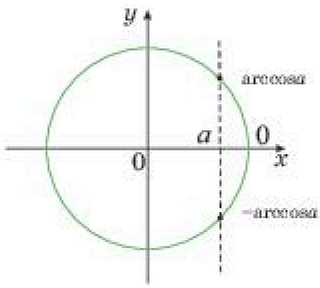


Рис. 4

Пусть требуется решить уравнение $\cos x=a$, где $a\neq 0$ и $-1<a<1$. Вертикальная прямая, проведенная через точку a на оси Ox, пересекает тригонометрическую окружность в точках, которые соответствуют углам $x=\arccos a$ и $x=-\arccos a$. С учетом периодичности функции $y=\cos x$ все решения уравнения записываем в виде $x=-\arccos a+2\pi k$ и $x=\arccos a+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$. Все результаты оформим в виде таблицы.

$\cos x=a$, $a>1$ или $a<-1$	$x\in\varnothing$
$\cos x=-1$	$x=\pi+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$
$\cos x=1$	$x=2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$
$\cos x=0$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$
$\cos x=a$, $-1<a<1$, $a\neq 0$	$x=\pm\arccos a+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$

Формулы в первых четырех строчках настоятельно рекомендуем не учить, а каждый раз «восстанавливать», рассуждая приблизительно так, как было показано в приведенных примерах. Формула в пятой строчке таблицы называется «общей формулой корней для косинуса».

Пример 11

Решите уравнение $2\cos x=-1$.

Решение. Уравнение легко преобразуется к виду $\cos x=-\frac{1}{2}$. Применяя приведенный алгоритм, получаем, что $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Кроме того, нам известно, что $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

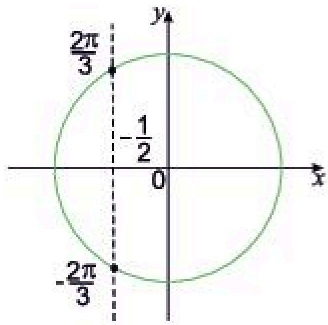


Рис. 5

Пример 12

Решите уравнение $\cos x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Решение. $0<\sqrt{3}-\sqrt{2}<\sqrt{4}-1=1$. Следовательно, уравнение $\cos x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ имеет решение.

Ответ: $x=\pm\arccos\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+2\pi m$, где $m\in\mathbb{Z}$.

Задачи

Часть 1

Решите уравнения (1–5):

1. (1) а) $\cos x=1$; б) $\cos\frac{x}{2}=1$; в) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-3\pi x\right)=1$.

2. (1) а) $\cos x=-\frac{1}{2}$; б) $2\cos(-3x)=1$; в) $2\cos\left(\frac{\pi x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+1=0$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=-\frac{1}{2}$.

3. (1) а) $2\cos x=\sqrt{3}$; б) $2\cos\left(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$;

в) $2\cos\left(2\pi x-\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{3}=0$; г) $2\cos\left(\frac{\pi}{5}-2x\right)=\sqrt{2}$.

4. (1) а) $3\cos x-1=0$; б) $-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+2=0$;

в) $10\cos\left(\frac{2x}{7}+\frac{\pi}{4}\right)+7=0$; г) $2\cos\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=7$.

5. (1) а) $4\cos\frac{2x}{3}-3\sqrt{2}=0$; б) $\cos\frac{x}{2}=5-\sqrt{27}$;

в) $\cos 2x-\sqrt{15}=\frac{\pi}{3}$; г) $5\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=-\pi$.

6. (2) Решите уравнения, применив формулы приведения:

а) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sqrt{3}=0$; б) $2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=1$;

в) $\cos(7\pi+2x)=-1$; г) $-28\sin\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)=\sqrt{392}$.

7. (2) Решите уравнения, используя замену переменной $\cos x=p$:

а) $\cos^2 x-3\cos x+2=0$; б) $\cos^2 x-5\cos x+26=0$; в) $5\cos^2 x-\cos x=0$.

Часть 2

Решите уравнение (8–12):

8. (1) а) $\cos x=-1$; б) $\cos 2x=0$; в) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=-1$.

9. (1) а) $\cos\pi x=\frac{1}{2}$; б) $\cos(-2x)=-\frac{1}{2}$; в) $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=1$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=-1$.

10. (1) а) $2\cos x=-\sqrt{3}$; б) $2\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$;

в) $2\cos\left(3\pi x-\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}$; г) $2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{6}\right)=-\sqrt{3}$.

11. (1) а) $2\cos x+\sqrt{2}=0$; б) $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$;

в) $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$; г) $2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{2}$.

12. (1) а) $2\cos\frac{2x}{3}-2\sqrt{2}=0$; б) $\cos 3x=\sqrt{5}-2$;

в) $\cos 5x-\sqrt{5}=-4$; г) $11\cos\left(x+\frac{\pi}{13}\right)=-3\pi$.

13. (2) Решите уравнения, применив формулы приведения:

а) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1=0$; б) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi x\right)=1$;

в) $\cos(\pi - 3x) = \frac{2}{7}$; г) $14\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = -\sqrt{98}$.

14. (2) Решите уравнения, используя замену переменной $\cos x = p$:

а) $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$; б) $3\cos^2 x + 11\cos x - 4 = 0$; в) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

Ответы: *(во всех ответах предполагается $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$).*

1. а) $x = 2\pi k$; б) $x = 4\pi k$; в) $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$; г) $x = \frac{1}{12} + \frac{2k}{3}$.

2. а) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; б) $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$; в) $-\frac{5}{2} + 6n$, $\frac{3}{2} + 6k$; г) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\frac{5\pi}{12} + \pi n$.

3. а) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; б) $-\frac{3\pi}{2} + 3\pi k$, $\frac{3\pi}{4} + 3\pi n$

в) $\frac{31}{90} + \frac{2}{3}k$, $-\frac{29}{90} + \frac{2}{3}k$. г) $\frac{9\pi}{40} + \pi k$, $-\frac{\pi}{40} + \pi k$;

4. а) $\pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$; б) $x \in \varnothing$;

в) $-\frac{35\pi}{8} + \frac{7}{2}\arccos\frac{7}{10} + 7\pi k$, $\frac{21\pi}{8} - \frac{7}{2}\arccos\frac{7}{10} + 7\pi k$; г) $x \in \varnothing$;

5. а) $x \in \varnothing$; б) $x = \pm 2\left(\pi - \arccos\left(\sqrt{27} - 5\right)\right) + 4\pi k$; в) $x \in \varnothing$;

г) $\frac{7\pi}{8} - \arccos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2\pi k$, $-\frac{9\pi}{8} + \arccos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2\pi k$.

6. а) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; б) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$; в) $x = \pi k$; г) $x = \pm\frac{3\pi}{8} + \pi k$;

7. а) $2\pi k$; б) $x \in \varnothing$; в) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$;, $x = \pm\arccos\left(\frac{1}{5}\right) + 2\pi k$;

8. а) $x = \pi + 2\pi k$; б) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; в) $x = \frac{2\pi}{3} + \pi k$; г) $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$.

9. а) $x = \pm\frac{1}{3} + 2k$; б) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$; в) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$;

г) $\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$.

10. а) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; б) $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{4\pi k}{3}$, $x = \frac{\pi}{18} + \frac{4\pi n}{3}$;

в) $x=\frac{11}{90}+\frac{2k}{3}$, $x=\frac{1}{90}+\frac{2n}{3}$; г) $x=6\pi+12\pi k$, $x=-4\pi+12\pi n$.

11. а) $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; б) $x=\frac{7\pi}{12}+2\pi k$, $x=\frac{\pi}{12}+2\pi n$;

в) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\pi n$; г) $x=\frac{5\pi}{4}+6\pi k$; $x=-\frac{13\pi}{4}+6\pi k$.

12. а) $x\in\varnothing$; б) $x=\pm\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)+\frac{2\pi k}{3}$;

в) $x\in\varnothing$; г) $x=\frac{12\pi}{13}-\arccos\frac{3\pi}{11}+2\pi k$, $x=-\frac{14\pi}{13}+\arccos\frac{3\pi}{11}+2\pi n$.

13. а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; б) $x=\frac{1}{2}+k$;

в) $x=\pm\frac{1}{3}\left(\pi-\arccos\frac{2}{7}\right)+\frac{2\pi k}{3}$; г) $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$.

14. а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; б) $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi k$; в) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$;, $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$;

1.3 Уравнения вида $tg x=a$ и $cos x=a$

Упражнение 5

Изобразите тригонометрическую окружность и ось тангенсов.
а) Найдите хотя бы один угол, тангенс которого равен 1.
б) Отталкиваясь от найденного угла, проследите за движением точки M_x по окружности. Фиксируйте те положения точки M_x, для которых $\operatorname{tg} x=1$, и записывайте соответствующие углы в строчку.
в) Как записать все такие углы в виде одной формулы?

Упражнение 6

Изобразите тригонометрическую окружность и ось котангенсов.
а) Найдите хотя бы один угол, котангенс которого равен 0.
б) Отталкиваясь от найденного угла, проследите за движением точки M_x по окружности. Фиксируйте те положения точки M_x, для которых $\operatorname{ctg} x=0$, и записывайте соответствующие углы в строчку.
в) Как записать все такие углы в виде одной формулы?

Пример 13

Решите уравнение $\operatorname{tg} x = a$.

Рассуждение. Изображаем тригонометрическую окружность ω и ось тангенсов. Через точку a на оси тангенсов и начало координат проведем прямую. Отмечаем точки пересечения этой прямой с окружностью ω. Мы знаем, что тангенсы всех углов x, для которых M_x совпадает с одной из отмеченных точек, равны a. Мы знаем также, что $x = \operatorname{arctg} a$ – одно из решений уравнения $\operatorname{tg} x = a$ (см. рис. 6). Проследим за движением M_x по окружности, начиная с положения $x = \operatorname{arctg} a$. Совпадения M_x с отмеченными точками происходят через каждые полкруга, что соответствует тому факту, что функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет главный период π.

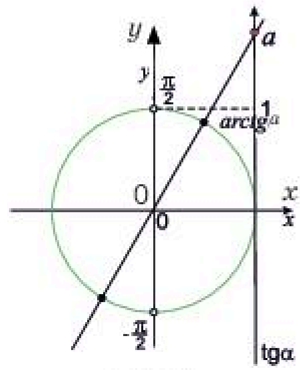


Рис. 6

Решение: уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Упражнение 7

Рассуждения для решения уравнения вида $\operatorname{ctg} x = a$ аналогичны только что приведенным для уравнения $\operatorname{tg} x = a$ (рис. 7). Просто вместо оси тангенсов используется ось котангенсов. Проведите рассуждения самостоятельно и получите ответ: $x = \operatorname{arcctg} x + \pi k$, где $k \in Z$.

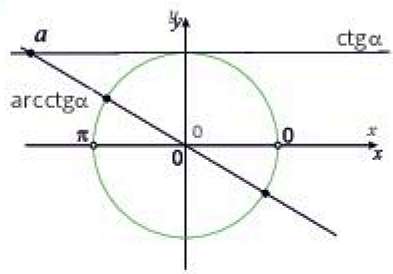


Рис. 7

Формулы для корней уравнений $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ приведены в следующей таблице.

$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$

Пример 14

Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

Решение. Повторяя рассуждения примера 13, получаем, что

$2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ 2x = \pi k,\quad x = \frac{\pi k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Если $a < 0$, то вместо формулы $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$ может применяться также формула $x = -\operatorname{arcctg}(-a) + \pi k$. Рассмотрим пример.

Пример 15

Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = -20$.

Решение. По формуле в таблице имеем $x = \operatorname{arcctg}(-20) + \pi k$ (рис. 8). По свойству $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$ получаем $x = \pi - \operatorname{arcctg} 20 + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Можно пойти дальше и заметить, что

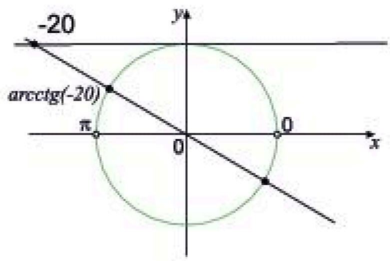


Рис. 8

$$x = \pi - \operatorname{arcctg} 20 + \pi k = -\operatorname{arcctg} 20 + \pi(k+1).$$

Если k принимает все возможные целые значения, то и выражение $k+1$ также принимает все возможные целые значения. Заменяя $k+1$ на какой-нибудь другой целый параметр, окончательно получаем: $x = -\operatorname{arcctg} 20 + \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = -\operatorname{arcctg} 20 + \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим также пример, в котором требуется не только решить уравнение в общем виде, но и найти частные решения, удовлетворяющие каким-нибудь дополнительным условиям.

Пример 16

Найдите решения уравнения $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$, принадлежащие интервалу $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Решение. Заметим, что $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ $\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \pi k \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{3}$. По условию задачи требуется найти те значения переменной x, которые принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$. Следовательно, требуется найти те значения переменной x, для которых выполняется двойное неравенство $-\frac{\pi}{2} \le x < 2\pi$. Подставив в данное двойное неравенство выражение $x = -\frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{3}$, решаем неравенство относительно переменной k. Получаем: $-\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{3} < 2\pi$.

Делим все три части неравенства на π и прибавляем $\frac{1}{36}$ ко всем трем частям: $-\frac{1}{2} \le -\frac{1}{36} + \frac{k}{3} < 2$, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{36} \le \frac{k}{3} < 2 + \frac{1}{36}$,

$-\frac{17}{36}\le\frac{k}{3}<\frac{73}{36}$. Умножаем на 3 все три части неравенства: $-\frac{17}{12}\le k<\frac{73}{12}$, $-1\frac{5}{12}\le k<6\frac{1}{12}$. Остается вспомнить, что параметр k принимает только целые значения. На отрезке $\left[-1\frac{5}{12};6\frac{1}{12}\right)$ целыми являются значения $k=-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Подставляя полученные значения параметра k в равенство $x=-\frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{3}$, получаем соответствующие значения переменной x, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right)$.

Ответ: $x=-\frac{13\pi}{36}, -\frac{\pi}{36}, \frac{11\pi}{36}, \frac{23\pi}{36}, \frac{35\pi}{36}, 1\frac{1}{36}\pi, 1\frac{23}{36}\pi, 1\frac{35}{36}\pi$.

Задачи

Часть 1

1. Решите уравнения:

а) $\operatorname{tg} x=0$; б) $\operatorname{tg} x=1$; в) $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$; г) $\operatorname{tg} x=-4$; д) $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Решите уравнения:

а) $\operatorname{ctg} x=0$; б) $\operatorname{ctg} x=-1$; в) $\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg} x=5$; д) $\operatorname{ctg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Решите уравнения:

а) $\operatorname{ctg} 2x-1=0$; б) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$; в) $3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-\pi x\right)+\sqrt{3}=0$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-3\right)=5$.

4. Решите уравнения:

а) $(\operatorname{tg} x-\sqrt{3})(\sin x+1)=0$; б) $(2\cos x+1)(3\operatorname{ctg} x+\sqrt{3})=0$.

5. Среди решений уравнения $\operatorname{tg} x=-1$ укажите те, которые принадлежат промежутку $[-\pi;\pi]$.

6. Решите уравнение $3\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$ и найдите его корни, удовлетворяющие условию $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.

7. Определите количество корней уравнения $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=1$, принадлежащих промежутку $[\pi;4\pi)$.

8. (3) Определите сумму корней уравнения $2\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{3}=0$, принадлежащих интервалу $(-1;\,1)$.

Часть 2

9. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg}\pi x=0$; б) $\operatorname{tg}x=-1$; в) $\operatorname{tg}x-\sqrt{3}=0$; г) $\operatorname{tg}3x=9$; д) $3\operatorname{tg}\frac{x}{3}+\sqrt{3}=0$.

10. Решите уравнение:

а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}=0$; б) $\operatorname{ctg}\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)-1=0$; в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\sqrt{3}$;

г) $\operatorname{ctg}\frac{x}{3}=\pi$; д) $\operatorname{ctg}4x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11. Решите уравнение:

а) $\operatorname{ctg}\left(2\pi x-\frac{\pi}{4}\right)=1$; б) $\operatorname{ctg}\left(2\pi x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$;

в) $3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\pi x\right)-\sqrt{3}=0$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=50$.

12. Решите уравнение: а) $\left(\operatorname{ctg}x+\sqrt{3}\right)(\sin x-1)=0$;

б) $\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)\left(\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\right)=0$.

13. (2) Среди решений уравнения $\operatorname{ctg}2x=1$ укажите те, которые принадлежат промежутку $[-\pi;\pi]$.

14. (2) Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ и найдите его корни, удовлетворяющие условию $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.

15. (3) Определите количество корней уравнения $2\sin\left(\frac{2\pi x}{7}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$, принадлежащих промежутку $[1;4)$.

16. (3) Определите сумму корней уравнения $2\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0$, принадлежащих интервалу $(-\pi; 2\pi)$.

Ответы: *(во всех ответах предполагается $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$).*

1. а) $x=\pi k$; б) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$; в) $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$; г) $x=-arctg4+\pi k$; д) $x=\frac{\pi}{6}+\pi k$.

2. а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; б) $x=\frac{3\pi}{4}+\pi k$; в) $x=\frac{\pi}{6}+\pi k$; г) $x=arcctg5+\pi k$; д) $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$.

3. а) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$; б) $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; в) $x=\frac{2}{3}+k$; г) $x=6+2\operatorname{arctg}5+2\pi k$.

4. а) $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; б) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $x=\frac{2\pi}{3}+\pi k$.

5. $x=-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$. 6. $x=-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$.

7. 9. **8.** $\frac{7}{5}$. **9.** а) $x=k$; б) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; в) $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$; г) $x=\frac{1}{3}arctg9+\frac{\pi k}{3}$; д) $x=-\frac{\pi}{2}+3\pi k$.

10. а) $x=\frac{3}{2}+3k$; б) $x=-\frac{\pi}{48}+\frac{\pi k}{4}$; в) $x=\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$; г) $x=3arcctg\pi+3\pi k$; д) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{4}$.

11. а) $x=\frac{1}{4}+\frac{k}{2}$; б) $x=\frac{k}{2}$. в) $x=\frac{1}{6}+k$; г) $x=arctg50+\pi k$.

12. а) $x=\frac{5\pi}{6}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; б) $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$.

13. $x\in\left\{-\frac{7\pi}{8}; -\frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}\right\}$. **14.** $x=-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$; **15.** 1. **16.** 16π.

§2 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Давида Гильберта спросили об одном из его бывших учеников. «А, такой-то? – вспомнил Гильберт. – Он стал поэтом. Для математики у него было слишком мало воображения».

2.1 Предварительные замечания

В предыдущем параграфе мы рассмотрели простейшие тригонометрические уравнения. Все остальные уравнения, содержащие тригонометрические функции, так или иначе сводятся к простейшим. И вот тут математика переплетается с искусством, так как не существует единого алгоритма для решения любого тригонометрического уравнения. Однако можно сформулировать несколько принципов и идей, использование которых существенно облегчает путь к успеху.

«Замена переменной». Если видишь, что можно сделать замену переменной, то не стоит тянуть – сразу делай замену.

«Чем меньше углов, тем лучше». Если аргументами тригонометрических функций, входящих в уравнение являются углы x, $2x$, $3x$ и т.д., то нужно стремиться с помощью преобразований свести все эти функции к какому-нибудь одному аргументу.

«Чем меньше функций, тем лучше». Различные тригонометрические функции, входящие в уравнения, стремимся выразить с помощью формул через как можно меньшее количество функций (в идеале – через одну).

«Разлагай и властвуй». Если удается все слагаемые перенести влево и осуществить разложение левой части на множители, то исходное уравнение преобразуется в совокупность более простых.

«Первая степень лучше второй». Применение формул понижения степени часто упрощает уравнения.

«Под лежачий камень вода не течет». Если не видишь сразу, какие из сформулированных принципов 1–5 «сработают», то попробуй сделать те преобразования, которые возможны по известным формулам. Торопиться при этом не следует – после каждого шага необходимо внимательно анализировать полученное уравнение на предмет возможности применения принципов 1–5.

2.2 Уравнения, приводимые к квадратным

Уравнения вида $a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\cos 2x + d\cos x + e = 0$ решаются заменой $\cos x = p$. Если $\cos x = p$, то $\cos^2 x = p^2$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - p^2$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2p^2 - 1$.

Уравнения вида $a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\cos 2x + d\sin x + e = 0$ решаются заменой $\sin x = p$. Если $\sin x = p$, то $\sin^2 x = p^2$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - p^2$, $\cos 2x = 2 - 2\sin^2 x = 1 - 2p^2$. В обоих случаях после замены получаются квадратные уравнения.
В следующем примере замена переменной очевидна.

Пример 1

Решите уравнение $\sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0$.
Решение. ОДЗ: $x \in (-\infty; +\infty)$. Замена: $\sin x = s$, $\sin^2 x = s^2$. Уравнение принимает вид $s^2 - 3s - 4 = 0$. Решение этого уравнения через дискриминант или любым другим способом приводит к корням $s = -1$ или $s = 4$. Обратная замена: $\sin x = -1$ или $\sin x = 4$. Уравнение $\sin x = -1$ имеет корни $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Уравнение $\sin x = 4$ не имеет корней, так как 4 не принадлежит множеству значений функции $\sin x$, $4 > 1$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

В примере, который мы сейчас рассмотрим, ведущей идеей является замечание, что $\sin^2 2x$ может быть заменено на $1 - \cos^2 2x$.

Пример 2

Решить уравнение $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$.
Решение: ОДЗ: $x \in (-\infty; +\infty)$.
Замена $\cos 2x = p$, $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x = 1 - p^2$.
Исходное уравнение принимает вид $3(1 - p^2) + 7p - 3 = 0$.

Далее $3 - 3p^2 + 7p - 3 = 0 \Leftrightarrow 3p^2 - 7p = 0 \Leftrightarrow p(3p - 7) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 0 \\ p = \frac{7}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{7}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x \in \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$.

В приведении уравнения к квадратному нередко бывают полезными формулы $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Пример 3

Решите уравнение $\sqrt{3}\cos 2x - \sin x + \sqrt{3} = 0$.

Решение. ОДЗ: $x \in (-\infty; +\infty)$. Стремясь привести все выражения к одной функции, применяем тождество $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Получаем уравнение $\sqrt{3}(1 - 2\sin^2 x) - \sin x + \sqrt{3} = 0$. Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые: $2\sqrt{3}\sin^2 x + \sin x - 2\sqrt{3} = 0$. Замена $\sin x = t$ приводит уравнение к квадратному $2\sqrt{3}t^2 + t - 2\sqrt{3} = 0$, корни которого $t = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Обратная замена:

$t = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. Уравнение не имеет корней, так как

$-\frac{2}{\sqrt{3}} < -1$.

$t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Решите уравнение $\operatorname{ctg} x\left(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}\right) = 1$.

Решение. ОДЗ переменной x определяется условием $\sin x \neq 0$.

$\frac{\cos x}{\sin x}\left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x}\right) = 1$, $\cos x(\cos x + 1) = \sin^2 x$,

$\cos^2 x + \cos x - \sin^2 x = 0$,

$\cos^2 x + \cos x - (1 - \cos^2 x) = 0$, $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, $\cos x = -1$ или

$\cos x = \frac{1}{2}$.

Заметим, что если $\cos x = -1$, то $\sin x = 0$, что противоречит ОДЗ. Если же $\cos x = \frac{1}{2}$, то $\sin x \neq 0$. Поэтому уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ дает корни ко всему уравнению: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Задачи

Часть 1

Решите уравнение (1–10):

1. $6\cos^2 x-5\sin x+5=0$.

2. $5\sin x-2\cos^2 x-\sin\frac{\pi}{2}=0$.

3. $1+\cos 2x+\cos 4x=0$.

4. $\cos^2 3x+4\cos 3x=3\sin^2 3x$.

5. $\cos^2 x+5\cos x=2\sin^2 x$.

6. $4\sin^4 x+12\cos^2 x=7$.

7. $\cos x+2\cos 2x=1$.

8. $2-\cos 2x+4\sin^2 x=5\sin x$.

9. $\sqrt{2}\left(1+\cos^2 x\right)=3\cos x$.

10. $\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg} x-\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1}{2}$.

Часть 2

Решите уравнение (11–20):

11. $\cos^2 x-2\sin x=-\frac{1}{4}$.

12. $2\sin^2 3x+\cos^2 3x+\sin 3x=1$

13. $\cos 2x+3\sin x=2\cos 0$.

14. $3\sin^2 2x+7\cos 2x-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}=0$.

15. $3\cos 2x-8\cos x=11$.

16. $\cos^4\frac{x}{5}+\sin^2\frac{x}{5}=1$.

17. $\sin x-2\cos 2x=1$.

18. $3\sin x-\cos 2x-\sin^2 100x=\cos^2 100x$.

19. $\sqrt{2}\left(1+\sin^2 x\right)=-3\sin x$.

20. $\operatorname{ctg} x\left(4\operatorname{ctg} x-\frac{4}{\sin x}\right)+\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x=0$.

21. (3) В июне прошлого года количество солнечных дней в Алматы составляло 25% от количества пасмурных, а количество теплых дней – 20% от прохладных. Только три дня в июне были теплыми и солнечными. Сколько дней были пасмурными и прохладными?

22. (2) Между числами 36 и $2\frac{1}{4}$ вставьте три числа так, чтобы вместе с данными числами они составили геометрическую прогрессию.

Ответы: *(во всех ответах предполагается $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$).*

1. $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **2.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **3.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$ **4.** $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$.

5. $\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi k$.

6. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$.

7. $\pi+2\pi n,\ \pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k$.

8. $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ (-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$

9. $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$.

10. $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$.

11. $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$.

12. $x=\frac{\pi n}{3},\ x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$.

13. $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k$.

14. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$.

15. $\pi+2\pi k$.

16. $\frac{5\pi}{2}+5\pi k,\ 5\pi n$.

17. $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ (-1)^k\arcsin\frac{3}{4}+\pi k$.

18. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$.

19. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n$.

20. $\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi k$.

21. 22 дня.

22. $18, 9, 4{,}5$

2.3 Однородные тригонометрические уравнения

Пример 5

Решите уравнение $a\sin x=b\cos x, (a\neq 0, b\neq 0)$.

Решение. Если $\cos x=0$, то из уравнения следует, что $\sin x=0$, $\cos^2 x+\sin^2 x=0$, что противоречит основной тригонометрической формуле $\cos^2 x+\sin^2 x=1$. Следовательно, $\cos x\neq 0$, и мы имеем возможность разделить обе части уравнения на $\cos x$. Получим $\operatorname{tg} x=\frac{b}{a},\ x=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Обсудим теперь уравнения вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$.

После замены $\sin x = u$ и $\cos x = v$ получаем уравнение $au^2 + buv + cv^2 = 0$. Алгебраическая структура этого уравнения должна быть вам известна: сумма одночленов второй степени равна 0. Такие уравнения называются **однородными уравнениями второй степени**. Аналогично, уравнения вида $au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 = 0$ называются однородными уравнениями третьей степени т.д. Деление обеих частей на старшую степень одной из переменных приводит однородные уравнения к обычным алгебраическим относительно новой переменной.

Уравнения вида $au^2 + buv + cv^2 = 0$. Если $v = 0$, то $u = 0$. Если $v \neq 0$, то деление обеих частей на v^2 приводит к уравнению $a\left(\frac{u}{v}\right)^2 + b\left(\frac{u}{v}\right) + c = 0$, $at^2 + bt + c = 0$, где $t = \frac{u}{v}$.

Уравнения вида $au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 = 0$. Если $v = 0$, то и $u = 0$. Если $v \neq 0$, то деление обеих частей на v^3 приводит к уравнению $a\left(\frac{u}{v}\right)^3 + b\left(\frac{u}{v}\right)^2 + c\left(\frac{u}{v}\right) + d = 0$, $at^3 + bt^2 + ct + d = 0$, где $t = \frac{u}{v}$.

Пример 6

$3\cos^2 x - \sin 2x - \sin^2 x = 0$.

Решение. *Чем меньше углов, тем лучше:*

$3\cos^2 x - 2\sin x\cos x - \sin^2 x = 0$. Если $\cos x = 0$, то из уравнения следует, что $\sin x = 0$, но $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно быть равны 0. Следовательно, $\cos x \neq 0$. Делим обе части уравнения на $\cos^2 x$:

$\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$, $3 - 2\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}^2 x = 0$. Замена $\mathrm{tg}x = t$ приводит к уравнению $t^2 + 2t - 3 = 0$, $t = 1$ или $t = -3$. Обратная замена: $\mathrm{tg}x = 1$ или $\mathrm{tg}x = -3$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ или $x = -\mathrm{arctg}3 + \pi k$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $-\mathrm{arctg}3 + \pi k$, где $k \in Z$.

Все уравнения, имеющие вид

$$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x + d\sin 2x + e\cos 2x = f,$$

где a, b, c, d, e, f – некоторые числа, сводятся к однородным, если мы заменим $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $f = f\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$.

Пример 7

Решите уравнение $11\sin^2 x + \frac{5}{2}\sin 2x + \cos 2x = 3$.

Решение. $11\sin^2 x+\frac{5}{2}2\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=3(\sin^2 x+\cos^2 x)$,

$10\sin^2 x+5\sin x\cos x+\cos^2 x=3\sin^2 x+3\cos^2 x$,

$7\sin^2 x+5\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.

Заметим, что $\cos x\neq 0$, иначе из уравнения следует, что $\sin x=0$. Однако из тождества $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ следует, что $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не могут быть равны 0. Делим обе части уравнения на $\cos^2 x$: $7\mathrm{tg}^2 x+5\mathrm{tg}x-2=0$. Замена $\mathrm{tg}x=t$ приводит к уравнению $7t^2+5t-2=0$, $t=-1$ или $t=\frac{2}{7}$. Обратная замена

$\mathrm{tg}x=-1$ или $\mathrm{tg}x=\frac{2}{7}$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$ или $x=\mathrm{arctg}\frac{2}{7}+\pi k$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\mathrm{arctg}\frac{2}{7}+\pi k$, где $k\in Z$.

Пример 8

Решите уравнение $\cos^2 x+\sin x\cos x=0$.

Решение. Уравнение является однородным.

Если $\cos x=0$, то левая часть равна правой: $0^2+\sin x\cdot 0=0$, т.е. множество значений x, при которых $\cos x=0$, является решением уравнения; $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Если $\cos x\neq 0$, то обе части делим на $\cos^2 x$:

$1+\mathrm{tg}x=0$, $\mathrm{tg}x=-1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, где $k\in Z$.

Пример 8 приведен для того, чтобы у вас не осталось впечатления, что в однородных уравнениях всегда $\cos x\neq 0$. На самом деле существует более простое решение:

$\cos^2 x+\sin x\cos x=0$, $\cos x(\cos x+\sin x)=0$, $\cos x=0$ или $\cos x+\sin x=0$ и т.д.

Следующий пример показывает эффективность перехода к однородному уравнению в случаях, которые на первый взгляд не приводятся к однородному. Прием состоит в переходе к половинному углу.

Пример 9

Решите уравнение $\sin x+\cos x=1$.

Решение. Выразим $\sin x$, $\cos x$ и 1 через тригонометрические функции половинного угла: $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$,

$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, $1 = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$. Получаем уравнение $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$. Далее получаем $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$. Закончить решение мы предоставляем читателям самостоятельно.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ или $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Задачи

Часть 1

Решите уравнения (1–12):

1. (2) $2\sin x - 3\cos x = 0$.
2. (2) $\sin 2x + \cos 2x = 0$.
3. (3) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.
4. (3) $\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.
5. (3) $\sin^3 x + \sin^2 x\cos x - 3\sin x\cos^2 x - 3\cos^3 x = 0$.
6. (3) $10\sin^2 x + 5\sin x\cos x + \cos^2 x = 3$.
7. (3) $1 + 7\cos^2 x = 3\sin 2x$.
8. (3) $2\cos^2 x - 7\cos x = 2\sin^2 x$.
9. (3) $5\sin^2 x + 5\sin x\cos x = 3$.
10. (3) $2 + \cos^2 3x = 2{,}5\sin 6x$.
11. (3) $2\sin 4x - 3\sin^2 2x = 1$.
12. (3) $6\sin^2 2x + 4\cos^2 2x - 4\sin 4x = 1$.

Часть 2

Решите уравнения (13-24):

13. (2) $3\sin x + \cos x = 0$.
14. (3) $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0$. Определите число корней на отрезке $[-5\pi; 5\pi]$.
15. (3) $\sin^4 2x - \sin^2 4x + 3\cos^4 2x = 0$.
16. (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \cos^2\frac{x}{2} = 0$. Определите сумму корней на отрезке $[\ 2\pi; 3\pi]$.
17. (3) $\sin^4 x\cos^2 x - 3\sin^2 x\cos^4 x - 2\sin^3 x\cos^3 x = 0$.
18. (3) $5\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 4$.
19. (3) $1 - \cos 2x = 3\sin 2x - 4\sin^2 x$.
20. (3) $4\cos^2 x = \sin x - \sin^2 x$. Найдите наибольший корень, который меньше, чем 3π.

21. (3) $3\cos^2 x-3\cos x+\sin^2 x=0$. Найдите сумму минимального и максимального корней на отрезке $[4\pi;6\pi]$.

22. (3) $0{,}5\sin 2\pi x=\cos\pi x-\sin^2\pi x+1$.

23. (3) Найдите минимальный корень уравнения $2\operatorname{tg}x-1=\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ на отрезке $\left[\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

24. (3) $3\dfrac{\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)}{\cos^4 x}=10\dfrac{(1-\cos 2x)}{(1+\cos 2x)}$.

25. (3) Пятачок съедает горшок меда за 10 минут, миску малины за 13 минут и выпивает банку сгущенки за 14 минут. Винни-Пух съедает горшок меда за 6 минут, миску малины тоже за 6 минут и выпивает банку сгущенного молока за 7 минут. За сколько Винни-Пух и Пятачок съедают все вместе?

26. (3) Вычислите: а) $\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}\cdot(3{,}375)^{-1}}{(2{,}25)^{-2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}}$; б) $\dfrac{(0{,}4)^{-2}\cdot(2{,}5)^{-4}}{(0{,}16)^{-5}\cdot\left((6{,}25)^{-3}\right)^2}$.

27. (2) Решите систему уравнений $\begin{cases}(x+y)^2+(x-3y)^2=8,\\ x-3y+2=(x+y)^2.\end{cases}$

28. (2) Алдаркосе и Шигайбай разделили между собой выручку от продажи ковра-самолета. Алдаркосе подумал: если бы я взял денег на 40% больше, то доля Шигайбая уменьшилась бы на 60%. Как изменилась бы доля Шигайбая, если бы Алдаркосе взял себе денег на 50% больше?

Ответы: *(во всех ответах предполагается $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$).*

1. $x=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}+\pi n$. **2.** $x=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}$. **3.** $x_1=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $x_2=\operatorname{arctg}2+\pi n$.

4. $x_1=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $x_2=-\dfrac{\pi}{6}+\pi n$. **5.** $x_1=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$; $x_2=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n$.

6. $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x_2=\operatorname{arctg}\frac{2}{7}+\pi n$; **7.** $x_1=\operatorname{arctg}2+\pi n$, $x_2=\operatorname{arctg}4+\pi n$;

8. $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi n$; **9.** $x_1=-\operatorname{arctg}3+\pi n$, $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$;

10. $x_1=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $x_2=\frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n\right)$; **11.** $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi n}{2}$;

12. $x_1=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{2}$.

13. $x=-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)+\pi k,\ k\in Z$. **14.** 5.

15. $x_1=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$. **16.** 4π.

17. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_3=\operatorname{arctg}3+\pi k,\ k\in Z$.

18. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\operatorname{arctg}4+\pi k,\ k\in Z$.

19. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. **20.** $\frac{5\pi}{2}$.

21. 10π.

22. $x_1=\frac{1}{2}+k$, $x_2=k$. **23.** $\frac{3\pi}{4}$.

24. $x_1=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$. **25.** 12 мин.

26. а) $\frac{8}{27}$; б) 1. **27.** $(-1;-1),(2;0)$. **28.** Уменьшится на 75%.

2.4 Метод разложения на множители

В любом уравнении мы имеем возможность все слагаемые правой части перенести в левую и справа получить 0. После этого разложение левой части на множители очень часто играет решающую роль как в простых, так и в сложных уравнениях.

Пример 10

Решите уравнение $\cos x=\sin 2x$.

Решение. Чем меньше углов, тем лучше. Преобразуем $\sin 2x$ по формуле $\sin 2x=2\sin x\cos x$ и получим уравнение $\cos x = 2\sin x\cos x$. Переносим все в левую часть и выносим общий множитель за скобки: $\cos x - 2\sin x\cos x = 0$, $\cos x(1-2\sin x)=0$. Уравнение равносильно совокупности двух простейших уравнений: $\cos x = 0$ или $1-2\sin x=0$. Следовательно, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ или $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

При решении тригонометрических уравнений часто оказываются полезными следующие тождества: $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$ и $\cos 2x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$. Тождества легко доказываются.

Пример 11

Решите уравнение $\sin 2x+\cos 2x=-1-\sin x-\cos x$.

Решение. $\sin 2x+1+\cos 2x+\sin x+\cos x=0$. *Чем меньше углов, тем лучше.*

$(\sin x+\cos x)^2+\cos^2 x-\sin^2 x+\sin x+\cos x=0$.

$\cos^2 x-\sin^2 x$ – *это разность квадратов* (!).

$(\sin x+\cos x)^2+(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)+(\sin x+\cos x)=0$.

Разлагай (на множители) и властвуй.

$(\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x+\cos x-\sin x+1)=0$.

$\sin x+\cos x=0$ или $2\cos x+1=0$.

$\sin x+\cos x=0$, $\sin x=-\cos x$, $\mathrm{tg}x=-1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

$2\cos x+1=0$, $\cos x=-\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

В седьмом классе вы проходили метод группировки по два члена для разложения на множители. Этот метод остается актуальным и для решения тригонометрических уравнений.

Пример 12

Решите уравнение $2\cos x+\sin x=1+\sin 2x$.

Решение. Уравнение равносильно следующему:

$2\cos x-1=2\sin x\cos x-\sin x$,

$2\cos x-1=\sin x(2\cos x-1)$. Грубой ошибкой на данном этапе решения было бы сокращение обеих сторон на $2\cos x-1$! Дело в том, что, если $2\cos x-1=0$, то обе части уравнения равны 0 и, следовательно, равны между собой. Такое сокращение привело бы к потере целой серии корней $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$!

Далее: $2\cos x-1-\sin x(2\cos x-1)=0$, $(2\cos x-1)(1-\sin x)=0$, $2\cos x-1=0$ или $1-\sin x=0$ и т.д.

И наконец рассмотрим достаточно сложный пример, в котором догадаться до разложения на множители довольно трудно.

Пример 13

Решите уравнение $2\cos 3x = 3\sin x + \cos x$.

Решение. *Под лежачий камень вода не течет. Пробуем как-то «уравнять» коэффициенты.*

Прибавим к обеим частям $2\cos x$:

$2\cos 3x + 2\cos x = 3\sin x + 3\cos x$,

$2(\cos 3x + \cos x) = 3(\sin x + \cos x)$,

$2 \cdot 2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 3(\sin x + \cos x)$,

$4\cos 2x \cos x = 3(\sin x + \cos x)$,

$4(\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x = 3(\sin x + \cos x)$,

$4(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)\cos x = 3(\sin x + \cos x)$,

$(\cos x + \sin x)(4\cos^2 x - 4\cos x \sin x - 3) = 0$.

$\cos x + \sin x = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$.

$4\cos^2 x - 4\cos x \sin x - 3\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$.

$\cos^2 x - 4\cos x \sin x - 3\sin^2 x = 0$ – однородное уравнение. Очевидно, что $\cos x \neq 0$. Деление на $\cos^2 x$ и замена $\operatorname{tg} x = t$ приведет нас к квадратному уравнению $3t^2 + 4t - 1 = 0$, $t_1 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$, $t_2 = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$.

$x = \operatorname{arctg}\frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Задачи

Часть 1

Решите уравнение (1–13):

1. $\sin^4 x - \sin^2 x = 0$.

2. $\sin 2x = 3\cos x$.

3. $\cos 2x = \cos x - \sin x$.

4. $1 + \sin 2x = \cos x + \sin x$

5. $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} + \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

6. $2\cos x + \operatorname{ctg} x = 0$.

7. $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x-4\sin^2 x=0$.

8. $x^2\sin x-x^2\sqrt{3}\cos x-\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$.

9. $\cos^3 x+\sin^3 x=\cos x+\sin x$.

10. $\sin 6x+\sin 3x=2\cos 3x+1$.

11. $\cos^4 \pi x-\sin^4 \pi x=\cos^2 2\pi x$.

12. $3\mathrm{tg}^3 x-10\mathrm{tg}^2 x+3\mathrm{tg}\,x=0$.

13. $\sin\left(2x+\mathrm{arctg}\sqrt{3}\right)+\sin\left(x+\arcsin\frac{1}{2}\right)=2\cos\left(x+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$.

Часть 2

Решите уравнение (14–26):

14. $\cos^4 x-\cos^2 x=0$.

15. $\sin 2x=\sin x$.

16. $\cos 3x=\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{3x}{2}$.

17. $1-\sin 4x=\cos 2x-\sin 2x$.

18. $\mathrm{ctg}\,x+1+\cos x+\sin x=0$.

19. $\mathrm{tg}\,x+2\sin x=0$.

20. $4\cos^2 x-\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\,x=0$.

21. $x^3\sqrt{3}\sin x-x^3\cos x-\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$.

22. $\cos^3 x-\sin^3 x=\cos x-\sin x$.

23. $\sin\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}=\sin \pi x+1$.

24. $\cos^4 x-\sin^4 x=\sin 4x$.

25. $3\mathrm{ctg}^3 x+4\mathrm{ctg}^2 x+\mathrm{ctg}\,x=0$.

26. $\cos^3\left(\left(\arccos\frac{1}{2}\right)x\right)+\sin^3\left(\pi+\frac{\pi x}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi x}{3}\right)$.

27. (2) В начале маршрута в автобус сели 23 человека. Водитель очень спешил, поэтому останавливался только тогда, когда выйти хотели не менее четверти пассажиров, находящихся в автобусе. Заходить никто никогда не успевал. Сколько раз автобус мог остановиться?

28. (2) Упростите выражение $\frac{\left(pq^{-1}+1\right)^2}{pq^{-1}-p^{-1}q}\cdot\frac{p^3q^{-3}-1}{p^2q^{-2}+pq^{-1}+1}:\frac{p^3q^{-3}+1}{pq^{-1}+p^{-1}q-1}$.

Ответы: *(во всех ответах предполагается $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$).*

1. $\frac{\pi k}{2}$.

2. $\frac{\pi}{2}+\pi k$.

3. $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $2\pi k$.

4. $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $2\pi k$, $\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

5. $\frac{\pi}{3}+\pi k$, $\pi+2\pi k$.

6. $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$.

7. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, πn.

8. ± 1, $\frac{\pi}{3}+\pi n$.

9. $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{\pi k}{2}$.

10. $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}, \pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$.

11. $\frac{1}{4}+\frac{k}{2}, k$.

12. πk, $\operatorname{arctg} 3+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$.

13. $\frac{\pi}{2}+2\pi k, -\pi+2\pi k, \frac{\pi}{3}+2\pi k$.

14 $\frac{\pi k}{2}$.

15 $\pi k, \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

16 $\frac{4\pi k}{3}, \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}, -\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}$.

17. $\pi k, \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$.

18. $-\frac{\pi}{4}+\pi k, -\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

19. $\pi k, \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$.

20. $(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi k$.

21. $\frac{\pi}{6}+\pi k, 1$.

22. $\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{4}+\pi k$.

23. $-\frac{1}{2}+2k, 4k, 1+4\pi k$.

24. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, (-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$.

25. $\frac{\pi}{2}+\pi k, -\frac{\pi}{4}+\pi k, -\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}+\pi k$.

26. $\frac{3}{2}+6k, 6k, \frac{3}{4}+3k$.

27. 8.

28. 1.

§3 ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

3.1 Неравенства, содержащие $\sin x$

Если вы хотите плохо разбираться в данной теме, тратить время на контрольных и тестах, получать плохие оценки, то, пожалуйста, НЕ выполняйте упражнений и НЕ читайте теорию – сразу переходите к таблице формул в конце пунита.

Упражнение 6

Нарисуйте тригонометрическую окружность и отметьте $\frac{1}{2}$ на оси OY. Проведите горизонтальную прямую через отмеченную точку до пересечения с окружностью. На отрезке [–1;1] оси OY найдите числа, которые больше, чем $\frac{1}{2}$. Если нашли, закрасьте их цветной авторучкой или карандашом. Найдите на окружности точки, у которых вторая координата (ордината) попадает на закрашенный участок, т.е. точка, у которой ордината больше, чем $\frac{1}{2}$. Найденные на окружности точки также закрасьте. (НЕ путайте окружность с кругом. Окружность – это граница круга). Закрасили? Все. Стоп. Поздравляем! Вы только что решили неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$. Подумайте, почему?

Пример 1

Решите неравенство $\sin x \le -\frac{1}{2}$.

Рассуждение. Синус угла x – это ордината точки M_x. Через $-\frac{1}{2}$ на оси OY проведем горизонтальную прямую. Мы ищем синусы, которые меньше, чем $-\frac{1}{2}$ или равны $-\frac{1}{2}$. Эти синусы находятся не выше, чем $-\frac{1}{2}$ на оси OY. Следовательно, мы ищем такие углы x, что их точки M_x лежат на нижней дуге окружности (смотри рис. 1).

Остается правильно описать все такие углы в виде промежутков.

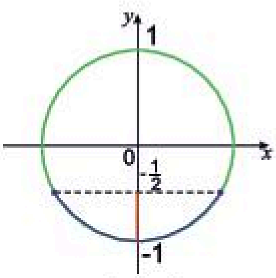


Рис. 1

Решением уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ является серия $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

$$x_0 = (-1)^{0+1}\frac{\pi}{6} + \pi \cdot 0 = -\frac{\pi}{6},$$

$$x_1 = (-1)^{1+1}\frac{\pi}{6} + \pi \cdot 1 = \frac{7\pi}{6},$$

$$x_{-1} = (-1)^{-1+1}\frac{\pi}{6} + \pi \cdot (-1) = -\frac{5\pi}{6}.$$

Отмечаем данные углы на окружности (вместо M_x далее будем писать просто x). Любая дуга записывается против часовой стрелки от меньшего угла к большему (рис.2). Нас интересует нижняя дуга: $[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}]$.

Поскольку значения $sin\ x$ повторяются через каждый полный оборот, то окончательно, $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi k; -\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, или $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k \le x \le \frac{\pi}{6}+2\pi k$.

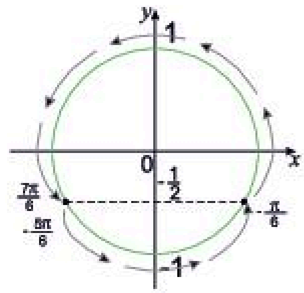


Рис. 2

Решение. $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$,

$x_0 = -\frac{\pi}{6}, x_{-1} = -\frac{5\pi}{6}$.

Ответ: $[-\frac{5\pi}{6}+2\pi k; -\frac{\pi}{6}+2\pi k]$, где $k \in Z$.

Если бы мы решали неравенство $\sin x \ge -\frac{1}{2}$, то нас интересовала бы верхняя дуга: $x \in \left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{7\pi}{6}+2\pi k\right]$.

Все готово для того, чтобы мы смогли рассмотреть общий случай. Пусть требуется сравнить $\sin x$ и a, где $a \ne 1, a \ne -1$. Решением уравнения $sin\ x=a$ является серия $x=(-1)$n $arcsin a+\pi n$,

$x_0 = \arcsin a$,

$x_1 = (-1)^1 \arcsin a + \pi \cdot 1 = \pi - \arcsin a$,

$x_{-1} = (-1)^{-1} \arcsin a + \pi \cdot (-1) = -\pi - \arcsin a$.

$-\pi - \arcsin a < \arcsin a < \pi - \arcsin a$.

Имеем две дуги: верхняя – $(\arcsin a; \pi - \arcsin a)$ и нижняя – $(-\pi - \arcsin a; \arcsin a)$ (рис. 3). Точки на верхней дуге имеют ординаты бо́льшие, чем a. Точки на нижней дуге имеют ординаты меньшие, чем a. **Соответственно, решением неравенства** $\sin x > a$ **является серия промежутков** $x \in (\arcsin a + 2\pi k; \pi - \arcsin a + 2\pi k)$; **решением неравенства** $\sin x < a$ **является серия промежутков** $x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi k; \arcsin a + 2\pi k)$. Аналогично,

$\sin x \ge a \Leftrightarrow x \in [\arcsin a + 2\pi k;\ \pi - \arcsin a + 2\pi k]$,

$\sin x \le a \Leftrightarrow x \in [-\pi - \arcsin a + 2\pi k; \arcsin a + 2\pi k]$.

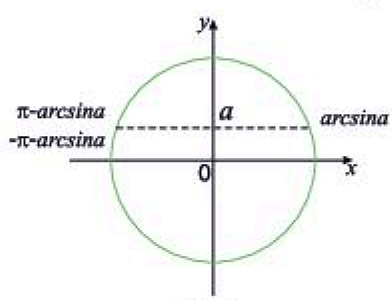


Рис. 3

Отдельного внимания заслуживают случаи, в которых $sin x$ сравнивается с 1 или (–1). У всех точек окружности, кроме самой верхней, ординаты строго меньше 1. Все углы, которым соответствует самая верхняя точка, описываются формулой $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$. Следовательно,

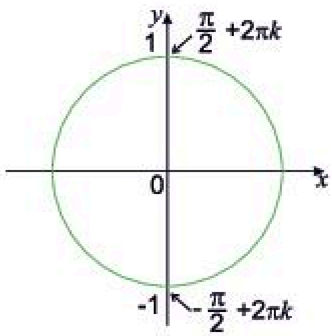


Рис. 4

$\sin x\ge 1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$,

$\sin x>1\Leftrightarrow x\in\varnothing$,

$\sin x<1\Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{2}+2\pi k$,

$\sin x\le 1\Leftrightarrow x\in(-\infty;+\infty)$.

Аналогично, углы x вида $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ и только они имеют синус, равный (–1). Остальным углам соответствуют точки на окружности, ординаты которых строго больше, чем (–1). Поэтому:

$\sin x\ge -1\Leftrightarrow x\in=(-\infty;+\infty)$,

$\sin x>-1\Leftrightarrow x\ne-\frac{\pi}{2}+2\pi k$,

$\sin x<-1\Leftrightarrow x\in\varnothing$,

$\sin x\le -1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

Пример 2

Решите неравенство $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Если заменить $2x-\frac{\pi}{6}=\varphi$, то получаем неравенство $\sin\varphi\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение данного неравенства имеет вид $\frac{\pi}{4}+2\pi k\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Возвращаемся к замене: $\frac{\pi}{4}+2\pi k\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{4}+2\pi k$.

Поскольку требуется определить границы множеств для переменной x, то прибавим ко всем трем частям неравенства $\frac{\pi}{6}$ и затем разделим на 2 все три части:

$$\frac{5\pi}{12}+2\pi k\le 2x\le\frac{11\pi}{12}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{24}+\pi k\le x\le\frac{11\pi}{24}+\pi k.$$

Ответ: $x\in\left[\frac{5\pi}{24}+\pi k;\frac{11\pi}{24}+\pi k\right]$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Задачи

Часть 1

Решите неравенства (1–3):

1. а) $\sin x>0$; б) $\sin 3x\ge 0$; в) $\sin\frac{x}{3}<0$;

г) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\le 0$; д) $\sin\left(\frac{5x}{6}-\frac{5\pi}{6}\right)\le 0$.

2.(2) а) $\sin x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\frac{x}{3}\ge-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\frac{2x}{3}<-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\sin\left(\frac{5x}{6}+\frac{6\pi}{7}\right)\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.(2) а) $\sin x>\frac{1}{5}$; б) $\sin 2x\ge-\frac{1}{8}$; в) $\sin\frac{3x}{5}<\frac{6}{7}$;

г) $\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\le-\frac{4}{5}$; д) $\sin\left(\frac{2x}{5}+\frac{8\pi}{5}\right)\le\frac{4}{5}$.

4. (3) Найдите область определения функции:

а) $y=\frac{5}{\sqrt{1-2\sin 2x}}$; б) $y=\sqrt{\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Часть 2

Решите неравенства (5–6):

5. (2) а) $\sin x - \frac{1}{2}$; б) $\sin 4x \geq \frac{1}{2}$; в) $\sin 5x < -\frac{1}{2}$;

г) $\sin(2x - \frac{\pi}{5}) \leq \frac{1}{2}$; д) $\sin(x - \frac{\pi}{7}) \leq -\frac{1}{2}$.

6. (2) а) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin\frac{x}{4} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin\frac{3x}{5} < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\sin\left(\frac{6x}{7} + \frac{6\pi}{7}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. (2) Решите неравенства:

а) $\sin x > 1$; б) $\sin\frac{1}{4x} \geq -1$; в) $\sin\frac{x}{7} < -1$;

г) $\sin(\sqrt{x + \frac{\pi}{17}}) \leq 1$; д) $\sin(\sqrt{\frac{4\pi}{11} - \frac{4x}{11}}) \geq -1$.

8. (3) Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{\sin x + 1}$; б) $y = \frac{5}{\sqrt{2\sin 3x + \sqrt{3}}}$.

9. (2) Решите систему $\begin{cases} xy=6 \\ yz=8 \\ zx=12 \end{cases}$.

Ответы: *(во всех ответах предполагается $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$).*

1. а) $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$; б) $\left[\frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right]$; в) $(-3\pi + 6\pi k; 6\pi k)$;

г) $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$; д) $\left[-\frac{\pi}{5} + \frac{12\pi k}{5}; \pi + \frac{12\pi k}{5}\right]$.

2. а) $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right)$; б) $[-\pi + 6\pi k; 4\pi + 6\pi k]$;

в) $\left(-\pi+3\pi k;-\dfrac{\pi}{2}+3\pi k\right)$; г) $\left[-\dfrac{23\pi}{15}+2\pi k;\dfrac{2\pi}{15}+2\pi k\right]$;

д) $\left[-\dfrac{64\pi}{35}+\dfrac{12\pi k}{5};-\dfrac{10\pi}{7}+\dfrac{12\pi k}{5}\right]$.

3. а) $\left(\arcsin\dfrac{1}{5}+2\pi k;\pi-\arcsin\dfrac{1}{5}+2\pi k\right)$;

б) $\left[-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{8}+\pi k;\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{8}+\pi k\right]$;

в) $\left(-\dfrac{5\pi}{3}-\dfrac{5}{3}\arcsin\dfrac{6}{7}+\dfrac{10\pi k}{3};\dfrac{5}{3}\arcsin\dfrac{6}{7}+\dfrac{10\pi k}{3}\right)$;

г) $\left[-\dfrac{6\pi}{5}+\arcsin\dfrac{4}{5}+2\pi k;-\dfrac{\pi}{5}-\arcsin\dfrac{4}{5}+2\pi k\right]$;

д) $\left[-\dfrac{13\pi}{2}-\dfrac{5}{2}\arcsin\dfrac{4}{5}+5\pi k;-4\pi+\dfrac{5}{2}\arcsin\dfrac{4}{5}+5\pi k\right]$.

4. а) $\left(-\dfrac{7\pi}{12}+\pi k;\dfrac{\pi}{12}+\pi k\right)$; б) $\left[\dfrac{5\pi}{24}+\pi k;\dfrac{11\pi}{24}+\pi k\right]$.

5. а) $\left(-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k;-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\right)$; б) $\left[\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi k}{2};\dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{\pi k}{2}\right]$;

в) $\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi k}{5};-\dfrac{\pi}{30}+\dfrac{2\pi k}{5}\right)$; г) $\left[-\dfrac{29\pi}{60}+\pi k;\dfrac{11\pi}{60}+\pi k\right]$;

д) $\left(-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k\right)$.

6. а) $\left(-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k\right)$; б) $[\pi+8\pi k;3\pi+8\pi k]$;

в) $\left(-\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{10\pi k}{3};-\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{10\pi k}{3}\right)$; г) $\left[-\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k;2\pi k\right]$;

д) $\left[-\dfrac{15\pi}{8}+\dfrac{7\pi k}{3};-\dfrac{31\pi}{24}+\dfrac{7\pi k}{3}\right]$.

7. а) $x\in\varnothing$; б) $x\neq 0$; в) $x\in\varnothing$; г) $\left[-\dfrac{\pi}{17};+\infty\right)$; д) $(-\infty;+\infty)$.

8. а) $(-\infty;+\infty)$; б) $\left(-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2\pi k}{3};\dfrac{4\pi}{9}+\dfrac{2\pi k}{3}\right)$. **9.** $(\pm3;\pm2;\pm4)$.

3.2 Неравенства, содержащие $\cos x$

Рассмотрим теперь неравенства, содержащие косинус.

Упражнение 2

Решением уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ являются две серии углов: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ – серия P_k; $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ – серия Q_k. Отметим на окружности точки P_0, Q_0 и Q_1. Рассмотрим на окружности две дуги: $\overset{\frown}{Q_0P_0}$ и $\overset{\frown}{P_0Q_1}$. (Дуги отмечаются от первой точки ко второй против часовой стрелки!). Сравните косинус угла x и число $\frac{1}{2}$, если M_x попадает на дугу $\overset{\frown}{Q_0P_0}$: что больше? Сделайте такое же сравнение, если точка M_x угла x попадает на дугу $\overset{\frown}{P_0Q_1}$.

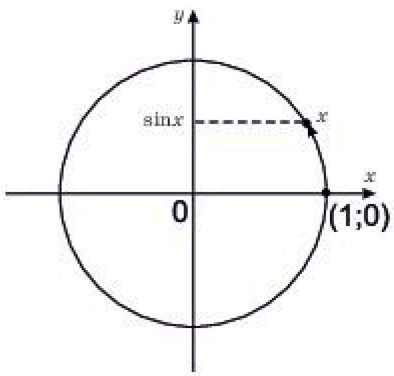


Рис. 5

Рассмотрим строгие неравенства $\cos x > a$, $\cos x < a$ и соответствующие им нестрогие неравенства. Решением уравнения $\cos x = a$ являются две серии $x = \arccos a + 2\pi k$ и $x = -\arccos a + 2\pi k$. Отметим на окружности углы: $\arccos a$, $-\arccos a$ и $2\pi - \arccos a$. Заметим, что $-\arccos a < \arccos a < 2\pi - \arccos a$. Имеем две дуги: правая – $(-\arccos a; \arccos a)$ и левая – $(\arccos a; 2\pi - \arccos a)$. Точки на дуге справа имеют абсциссы, бóльшие, чем a; точки на дуге слева имеют абсциссы мéньшие, чем a (рис. 5). Соответственно:

$$\cos x > a \Leftrightarrow x \in (-\arccos a + 2\pi k; \arccos a + 2\pi k);$$

$$\cos x < a \Leftrightarrow x \in (\arccos a + 2\pi k; 2\pi - \arccos a + 2\pi k);$$

$$\cos x \geq a \Leftrightarrow x \in [-\arccos a + 2\pi k; \arccos a + 2\pi k];$$

$$\cos x \leq a \Leftrightarrow x \in [\arccos a + 2\pi k; 2\pi - \arccos a + 2\pi k].$$

«Экстремальные» неравенства, в которых $\cos x$ сравнивается с $+1$ или -1, решаются также с помощью тригонометрического круга. *Круг – ваш друг*. Например, дано неравенство $\cos x > 1$. Ищем точки на окружности, у которых абсцисса строго больше, чем 1. Ищем – и не находим. Следовательно, $\cos x > 1 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Рассмотрим другой пример: $\cos x < 1$. Ищем точки на окружности, абсцисса которых меньше, чем 1. Понимаем, что такими точками являются все, кроме крайней правой. Углы, «попадающие» в крайнюю правую точку, описываются серией $x = 2\pi k$. Поэтому решением неравенства $\cos x < 1$ являются все числа, кроме $x = 2\pi k$, $\cos x < 1 \Leftrightarrow x \neq 2\pi k$.

Решим неравенство $\cos x \geq 1$. Ищем точки на окружности, абсциссы которых больше 1 или равны 1. Точек первого вида не существует и только одна точка имеет абсциссу 1. Все углы этой точки имеют вид $x = 2\pi k$. Итак, $\cos x \geq 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k$.

Пример 3

Решите неравенство $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Сделаем замену переменной: $z = 3x - \frac{\pi}{4}$. Решаем неравенство $\cos z < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

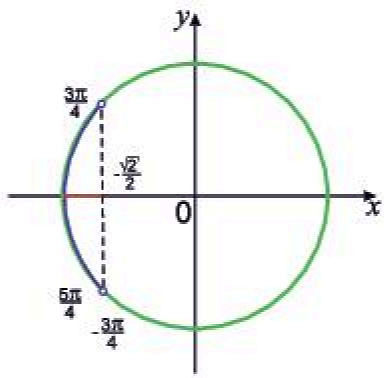


Рис. 6

Уравнение $\cos z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет решение $\left[\begin{array}{l} z = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ z = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right.$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Отметим углы $\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$. Для углов на дуге слева $\cos z < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 6). Записываем углы этой дуги (от меньшего угла к большему против часовой стрелки): $z \in \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right)$, то есть

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < z < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k,$$

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < 3x - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k,$$

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k < 3x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k,$$

$$\pi + 2\pi k < 3x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Задачи

Часть 1

Решите неравенства (1–3):

1. (2) а) $\cos x > 0$; б) $\cos 2x \geq 0$; в) $\cos\frac{x}{2} < 0$; г) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$;

д) $\cos\left(\frac{5x}{4} + \frac{5\pi}{4}\right) \leq 0$.

2. (2) а) $\cos x > \frac{1}{2}$; б) $2\cos 2x \geq -1$; в) $2\cos 3x - 1 < 0$; г) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{7}\right) + 1 \leq 0$;

д) $2\cos\left(\frac{3x}{7} + \frac{3\pi}{7}\right) \leq 1$.

3. (2) а) $2\cos x \geq \sqrt{3}$; б) $\cos\frac{x}{2} \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos\frac{2x}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \leq 0$; д) $2\cos\left(\frac{2x}{5} + \frac{7\pi}{6}\right) \leq \sqrt{3}$.

Часть 2

Решите неравенства:

4. (2) а) $\cos x + 1 > 0$; б) $\cos 2x \geq 1$; в) $\cos\frac{x}{3 + 2x} \leq 1$;

г) $\cos\left(x + \frac{\pi}{11}\right) \leq -1$; д) $\cos\sqrt{\frac{4x}{5} + \frac{4\pi}{5}} \leq 1$.

5. (2) а) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\frac{x}{7} \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $2\cos\frac{3x}{2} < \sqrt{2}$;

г) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) + \sqrt{2} \leq 0$; д) $\sqrt{2} - 2\cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) \geq 0$.

6. (2) а) $\cos x > \frac{1}{7}$; б) $7\cos 2x \geq -4$; в) $\cos\frac{5x}{8} < \frac{5}{7}$;

г) $10\cos\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)+1 \leq 0$; д) $10\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leq 1$.

7. (2) Решите неравенство $|2x^2 - 12x + 13| \geq 3$.

8. (2) Площадь поверхности куба равна 24 см². Чему равен объем этого куба (в куб. см)?
а) 4 б) 6 в) 8 г) 10 д) 12

Ответы: *(во всех ответах предполагается $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$).*

1. а) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$; б) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi k\right]$; в) $(\pi+4\pi k; 3\pi+4\pi k)$;

г) $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{5\pi}{4}+2\pi k\right]$; д) $\left[\frac{7\pi}{5}+\frac{8\pi k}{5}; \frac{11\pi}{5}+\frac{8\pi k}{5}\right]$. **2.** а) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$;

б) $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi k; \frac{\pi}{3}+\pi k\right]$; в) $\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}; \frac{5\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right)$; г) $\left[\frac{11\pi}{21}+2\pi k; \frac{25\pi}{21}+2\pi k\right]$;

д) $\left[-\frac{2\pi}{9}+\frac{14\pi k}{3}; \frac{26\pi}{9}+\frac{14\pi k}{3}\right]$. **3.** а) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$;

б) $\left[-\frac{5\pi}{3}+4\pi k; \frac{5\pi}{3}+4\pi k\right]$; в) $\left(\frac{\pi}{4}+3\pi k; \frac{11\pi}{4}+3\pi k\right)$; г) $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k; \pi+2\pi k\right]$;

д) $\left[-\frac{5\pi}{2}+5\pi k; \frac{5\pi}{3}+5\pi k\right]$.

4. а) $x \neq \pi+2\pi k$; б) $x = \pi k$; в) $x \neq -\frac{3}{2}$; г) $x = \frac{10\pi}{11}+2\pi k$; д) $[-\pi; +\infty)$.

5. а) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$; б) $\left[-\frac{21\pi}{4}+14\pi k; \frac{21\pi}{4}+14\pi k\right]$;

в) $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi k}{3}; \frac{7\pi}{6}+\frac{4\pi k}{3}\right)$; г) $\left[\frac{11\pi}{20}+2\pi k; \frac{21\pi}{20}+2\pi k\right]$;

д) $\left[-\frac{7\pi}{12}+2\pi k; \frac{11\pi}{12}+2\pi k\right]$.

6. а) $\left(-\arccos\frac{1}{7}+2\pi k; \arccos\frac{1}{7}+2\pi k\right)$;

б) $\left[-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{7}+\pi k; \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{7}+\pi k\right]$;

в) $\left(\frac{8}{5}\arccos\frac{5}{7}+\frac{16\pi k}{5}; \frac{16\pi}{5}-\frac{8}{5}\arccos\frac{5}{7}+\frac{16\pi k}{5}\right)$;

г) $\left[-\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{10}+2\pi k; -\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{10}+2\pi k\right]$;

д) $\left[-\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{10}+2\pi k; \frac{7\pi}{4}-\arccos\frac{1}{10}+2\pi k\right]$.

7. $x\in(-\infty;1]\cup[2;4]\cup[5;+\infty)$. **8.** 8 см³.

3.3 Неравенства, содержащие $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$

Упражнение 3

Решим неравенство $\operatorname{tg}x\le\sqrt{3}$. Для этого на оси тангенсов «отметьте» число $\sqrt{3}$ (приблизительно $\sqrt{3}\approx1{,}73$) и все числа, меньшие, чем $\sqrt{3}$. Вообразите, что через центр окружности и каждую из отмеченных точек проведено по одной прямой. Закрасьте множество точек пересечения этих прямых с тригонометрической окружностью. Как закрашенное множество связано с решением неравенства $\operatorname{tg}x\le\sqrt{3}$? Попробуйте самостоятельно записать решения этого неравенства в виде промежутков.

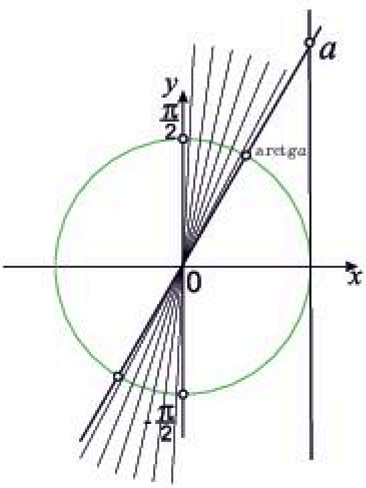


Рис. 7

Пусть требуется решить неравенство $\operatorname{tg}x>a$. Рисуем окружность и ось тангенсов, на оси тангенсов отмечаем точку a и соответствующий ей угол $\operatorname{arctg}a$ на окружности. Теперь видно (рис. 7), что тангенсы, которые больше, чем a, расположены выше числа a на оси тангенсов; углы, им соответствующие, «заполняют» дугу от $\operatorname{arctg}a$ до $\frac{\pi}{2}$ и симметричную ей дугу относительно начала координат; при этом точки второй дуги получаются из точек первой поворотом на угол π. Поэтому ответ: $x\in\left(\operatorname{arctg}a+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Из приведенных рассуждений также понятно, что решением неравенства $\operatorname{tg} x \geq a$ является серия промежутков $x \in \left[\operatorname{arctg} a + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

Рассмотрим теперь неравенство $\operatorname{tg} x < a$. Для любого угла на дуге $\left(-\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg} a\right)$ или симметричной ей дуге относительно начала координат тангенс этого угла меньше, чем a (см. тот же рисунок 7). Следовательно, $\operatorname{tg} x < a \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} a + \pi k\right)$. Соответственно, $\operatorname{tg} x \leq a \Leftrightarrow$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} a + \pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решим неравенство $\operatorname{ctg} x > a$. Так как имеет место свойство $\operatorname{ctg}(x \pm \pi) = \operatorname{ctg} x$, то мы имеем возможность сначала найти частное решение на дуге от 0 до π, а затем записать общее решение (рис. 8).

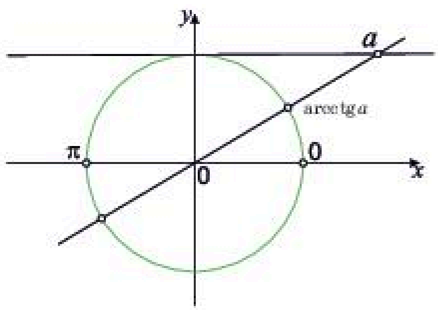


Рис. 8

Для любого угла x на дуге от 0 до $\operatorname{arcctg} a$ выполняется $\operatorname{ctg} x > a$.

Следовательно,

$\operatorname{ctg} x > a \Leftrightarrow x \in (0 + \pi k; \operatorname{arcctg} a + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Для любого угла на дуге от $\operatorname{arcctg} a$ до π выполняется $\operatorname{ctg} x < a$. Следовательно,

$\operatorname{ctg} x < a \Leftrightarrow x \in (\operatorname{arcctg} a + \pi k; \pi + \pi k) \Leftrightarrow x \in (\operatorname{arcctg} a - \pi + \pi k; \pi k)$.

Соответственно, $\operatorname{ctg} x \geq a \Leftrightarrow x \in (\pi k; \operatorname{arcctg} a + \pi k]$,

$\operatorname{ctg} x \leq a \Leftrightarrow x \in [\operatorname{arcctg} a + \pi k; \pi + \pi k) \Leftrightarrow x \in [\operatorname{arcctg} a - \pi + \pi k; \pi k)$.

Пример 4

Решите неравенство $\operatorname{ctg} 2x \leq 4$.

Решение. Замена $2x = z$.

Решаем неравенство $\operatorname{ctg} z \leq 4$ (рис. 9).

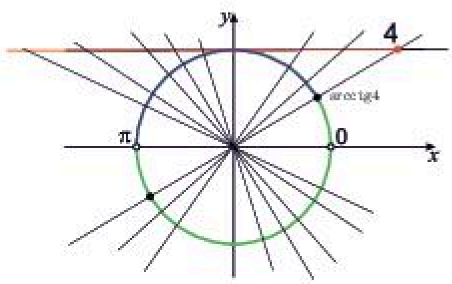


Рис. 9

$z \in [\operatorname{arcctg} 4 + \pi k; \pi + \pi k)$,

$\operatorname{arcctg} 4 + \pi k \leq z < \pi + \pi k$,

$\operatorname{arcctg} 4 + \pi k \leq 2x < \pi + \pi k$,

$\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 4 + \frac{\pi k}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$.

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 4 + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Задачи

Часть 1

Решите неравенства (1–5):

1. (2) а) $\operatorname{tg} x > 0$; б) $\operatorname{tg} 4x \geq 0$; в) $\operatorname{tg} \frac{x}{4} < 0$;

г) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{7}\right) \leq 0$; д) $\operatorname{tg}\left(\frac{6x}{7} + \frac{6\pi}{7}\right) \leq 0$.

2. (2) а) $\operatorname{ctg} x > -1$; б) $\operatorname{ctg} 9x \geq 1$; в) $\operatorname{ctg} \frac{2x}{5} < -1$;

г) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \leq 1$; д) $\operatorname{ctg}\left(\frac{2x}{11} + \frac{\pi}{8}\right) \leq -1$;

3. (2) а) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} 3x - \sqrt{3} \geq 0$; в) $\operatorname{tg} \frac{x}{5} < \sqrt{3}$.

г) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \leq 0$; д) $\operatorname{tg}\left(\frac{7x}{2} + \frac{5\pi}{6}\right) \leq -\sqrt{3}$;

4. (2) а) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$; б) $\operatorname{ctg} 2x > -\sqrt{3}$; в) $\operatorname{ctg} 6x < \sqrt{3}$.

г) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{3}$; д) $\operatorname{ctg}\left(\frac{9x}{4} - \frac{5\pi}{4}\right) \leq \sqrt{3}$;

5. (2) а) $\operatorname{ctg} x > 121$; б) $\operatorname{ctg} 200x > -\frac{1}{200}$; в) $700 \operatorname{ctg} \frac{3x}{7} < 3$;

г) $4\operatorname{ctg}\left(x + \frac{5}{\pi}\right) - 5 \leq 0$; д) $\operatorname{ctg}(\frac{10x}{3} + \frac{\pi}{5}) \leq 1000$.

Часть 2

Решите неравенства (6–10):

6. (2) а) $\operatorname{ctg} x > 0$; б) $\operatorname{ctg} 5x \geq 0$; в) $\operatorname{ctg} \frac{x}{5} < 0$;

г) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{9}\right) \leq 0$; д) $\operatorname{ctg}\left(\frac{7x}{5} - \frac{7\pi}{5}\right) \leq 0$.

7. (2) а) $\operatorname{tg} x > 1$; б) $\operatorname{tg} 10x \geq -1$; в) $\operatorname{tg} \frac{x}{8} < -1$;

г) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$; д) $\operatorname{tg}\left(\frac{4x}{5} + \frac{5\pi}{4}\right) \leq -1$.

8. (2) а) $\operatorname{tg} x > \frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{tg} 2x \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{6} < 1$;

г) $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{9}\right) + 1 \leq 0$; д) $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(x - \frac{5\pi}{9}\right) - 1 \leq 0$.

9. (2) а) $\operatorname{ctg} x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\operatorname{ctg} 3x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\operatorname{ctg} \frac{x}{8} < -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{8}{\pi}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$; д) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{8}{5\pi}\right) \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

10. (2) а) $\operatorname{tg} x > 100$; б) $\operatorname{tg} 20x > -20$; в) $\operatorname{tg} \frac{5x}{8} < \frac{5}{8}$;

г) $\operatorname{tg}\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) + 100 \leq 0$; д) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{9\pi}{4}\right) \leq \pi$.

Ответы: *(во всех ответах предполагается $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$)*

1. а) $\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$; б) $\left[\frac{\pi k}{4}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{4}\right)$; в) $(-2\pi + 4\pi k; 4\pi k)$; г) $\left(-\frac{9\pi}{14} + \pi k; -\frac{\pi}{7} + \pi k\right]$;

д) $\left(-\frac{19\pi}{12} + \frac{7\pi k}{6}; -\pi + \frac{7\pi k}{6}\right]$. **2.** а) $\left(\pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right)$; б) $\left(\frac{\pi k}{9}; \frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{9}\right]$;

в) $\left(-\frac{5\pi}{8} + \frac{5\pi k}{2}; \frac{5\pi k}{2}\right)$; г) $\left[\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{7\pi}{8} + \pi k\right)$; д) $\left[-\frac{33\pi}{16} + \frac{11\pi k}{2}; -\frac{11\pi}{16} + \frac{11\pi k}{2}\right)$.

3. а) $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$; б) $\left[\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}\right)$; в) $\left(-\frac{5\pi}{2} + 5\pi k; \frac{5\pi}{3} + 5\pi k\right)$;

г) $\left(-\frac{5\pi}{6} + \pi k; -\frac{2\pi}{3} + \pi k\right]$; д) $\left(-\frac{8\pi}{21} + \frac{2\pi k}{7}; -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{7}\right]$. **4.** а) $\left(\pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right)$;

б) $\left(\frac{\pi k}{2}; \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}\right]$; в) $\left(\frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{6}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{6}\right)$; г) $\left[-\frac{\pi}{12} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right)$;

д) $\left[\frac{17\pi}{27} + \frac{4\pi k}{9}; \pi + \frac{4\pi k}{9}\right)$. **5.** а) $(\pi k; \operatorname{arcctg} 121 + \pi k)$;

б) $\left[\frac{\pi k}{200}; \frac{\pi}{200} - \frac{1}{200} \operatorname{arcctg} \frac{1}{200} + \frac{\pi k}{200}\right)$; в) $\left(\frac{7}{3} \operatorname{arcctg} \frac{3}{700} + \frac{7\pi k}{3}; \frac{7\pi}{3} + \frac{7\pi k}{3}\right)$;

г) $\left[-\frac{5}{\pi} + \operatorname{arcctg} \frac{5}{4} + \pi k; \frac{\pi^2 - 5}{\pi} + \pi k\right)$; д) $\left[-\frac{3\pi}{50} + \frac{3}{10} \operatorname{arcctg} 1000 + \frac{3\pi k}{10}; \frac{12\pi}{50} + \frac{3\pi k}{10}\right)$.

6. а) $\left(\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$; б) $\left(\frac{\pi k}{5}; \frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}\right]$; в) $\left(-\frac{5\pi}{2}+5\pi k; 5\pi k\right)$; г) $\left[-\frac{7\pi}{18}+\pi k; \frac{\pi}{9}+\pi k\right)$;
д) $\left[\frac{9\pi}{14}+\frac{5\pi k}{7}; \pi+\frac{5\pi k}{7}\right)$. **7.** а) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$; б) $\left[-\frac{\pi}{40}+\frac{\pi k}{10}; \frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{10}\right)$;
в) $(-4\pi+8\pi k; -2\pi+8\pi k)$; г) $\left(-\frac{3\pi}{4}+\pi k; \pi k\right]$; д) $\left(-\frac{35\pi}{16}+\frac{5\pi k}{4}; -\frac{15\pi}{8}+\frac{5\pi k}{4}\right]$.

8. а) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$; б) $\left[-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)$; в) $(-3\pi+6\pi k; \pi+6\pi k)$;
г) $\left(-\frac{7\pi}{18}+\pi k; \frac{\pi}{18}+\pi k\right]$; д) $\left(\frac{\pi}{18}+\pi k; \frac{13\pi}{18}+\pi k\right]$. **9.** а) $\left(\pi k; \frac{2\pi}{3}+\pi k\right)$;
б) $\left(\frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}\right]$; в) $\left(-\frac{8\pi}{3}+8\pi k; 8\pi k\right)$; г) $\left[\frac{\pi^2-24}{3\pi}+\pi k; \frac{\pi^2-8}{\pi}+\pi k\right)$;
д) $\left[\frac{24-5\pi^2}{15\pi}+\pi k; \frac{8}{5\pi}+\pi k\right)$. **10.** а) $\left(\operatorname{arctg}100+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$;
б) $\left[-\frac{1}{20}\operatorname{arctg}20+\frac{\pi k}{20}; \frac{\pi}{40}+\frac{\pi k}{20}\right)$; в) $\left(-\frac{4\pi}{5}+\frac{8\pi k}{5}; \frac{8}{5}\operatorname{arctg}\frac{5}{8}+\frac{8\pi k}{5}\right)$;
г) $\left(-\frac{3\pi}{44}+\frac{\pi k}{11}; -\frac{\pi}{44}-\frac{1}{11}\operatorname{arctg}100+\frac{\pi k}{11}\right]$; д) $\left(-\frac{11\pi}{4}+\pi k; -\frac{9\pi}{4}+\operatorname{arctg}\pi+\pi k\right]$.

3.4 Системы простейших тригонометрических неравенств

Если мы действительно что-то знаем, то мы знаем это благодаря изучению математики.
Пьер Гассенди

Решением системы тригонометрических неравенств является множество углов x, удовлетворяющих и первому неравенству, и второму. Следующий двухшаговый алгоритм всегда приведет к успеху при решении систем простейших тригонометрических неравенств.

- Шаг 1. Дуги окружности, углы которых удовлетворяют первому неравенству, красим в один цвет; дуги окружности, углы которых удовлетворяют второму неравенству, красим в другой цвет.
- Шаг 2. Решением системы неравенств является множество углов x, точки M_x которых попадают на дважды закрашенные участки. Запи-

сываем какое-нибудь частное решение. **При записи каждой два раза закрашенной дуги двигаемся от меньшего угла к большему против часовой стрелки**. Общий ответ получаем с учетом периодичности.

Рассмотрим пример.

Пример 5

Решите систему неравенств: $\begin{cases} \operatorname{tg} x \ge 0, \\ \cos x \le \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

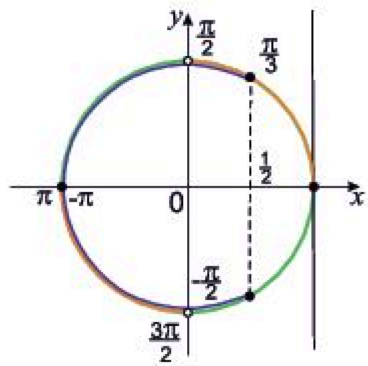


Рис. 10

Решение. Первому неравенству соответствуют дуги красного цвета $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$, второму неравенству соответствуют дуга синего цвета $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3}\right]$. В ответ записываем дважды закрашенные участки $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Периодом решения является число 2π.

Ответ: $x\in\left[\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left[\pi+2\pi k;\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$.

Этот же ответ может иметь другую форму: $x\in\left[-\pi+2\pi k;-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left[\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ (Почему?)

Пример 6

Решите систему неравенств: $\begin{cases} \cos x > -\dfrac{1}{2}, \\ \sin x \ge -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

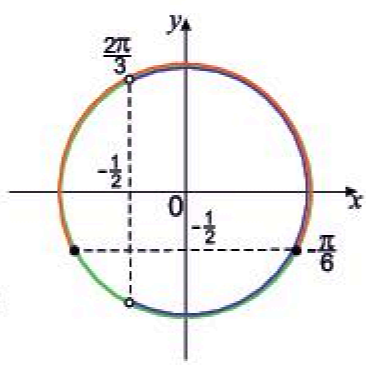


Рис. 11

Ответ: $x\in\left[-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$ (рис. 11).

пример 7

Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 1, \\ \sin x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

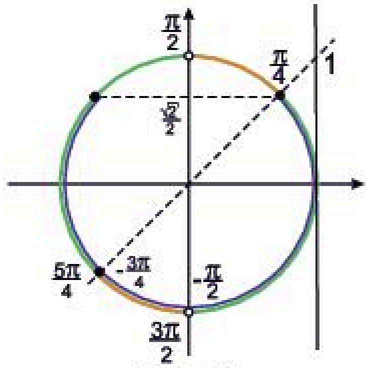


Рис. 12

Ответ:

$$x \in \left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \cup \left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k\right\},$$

где $k \in \mathbb{Z}$ (рис.12).

Другая форма того же ответа:

$$\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k\right\} \cup \left[\frac{5\pi}{4}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right),$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

пример 8

Решите систему неравенств: $\begin{cases} \operatorname{ctg} x < 1, \\ \cos x < -\sqrt{2}. \end{cases}$

Решение. Второе неравенство не имеет решений, следовательно, не существует значений x, удовлетворяющих обоим неравенствам.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Задачи

Часть 1

Решите системы неравенств (1–16):

1. (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 0, \\ \cos x \leq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 0, \\ \cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

3. (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 1, \\ \cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

4. (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \cos x < -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

5. (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 1, \\ \cos x \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

6. (1) $\begin{cases} \sin x \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

7. (1) $\begin{cases} \sin x \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

8. (1) $\begin{cases} \sin x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

9. (2) $\begin{cases} \cos x \geq \dfrac{1}{2}, \\ \sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

10. (2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}, \\ \cos x \leq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ **11.** (2) $\begin{cases} \cos x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3}. \end{cases}$ **12.** (2) $\begin{cases} \sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{ctg} x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

13. (2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x < \sqrt{3}, \\ \cos x \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ **14.** (2) $\begin{cases} \sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{ctg} x < 1. \end{cases}$ **15.** (2) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3} \end{cases}$

16. (2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 1, \\ \operatorname{ctg} x \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

Найдите область определения функции (17–18):

17. (2) а) $y = \sqrt{-2\sin x - \sqrt{3}} - \sqrt{6\cos x - 3}$; б) $y = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}}} + \dfrac{1}{\sqrt{10\sin x - 5}}$.

18. (3) а) $y = \dfrac{1}{2\sin x + 1} + \sqrt{2\cos x - \sqrt{3}}$; б) $y = \dfrac{1}{2\operatorname{tg} x - 2} + \sqrt{2\cos x - \sqrt{2}}$.

Часть 2

Решите системы неравенств (19–36):

19. (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 0, \\ \cos x < -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ **20.** (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 0, \\ \cos x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ **21.** (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 1, \\ \cos x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

22. (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}, \\ \cos x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ **23.** (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \cos x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$ **24.** (1) $\begin{cases} \sin x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x \geq -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

25. (1) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \geq 1, \\ \cos x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ **26.** (1) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \leq 1, \\ \sin x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ **27.** (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 0, \\ \sin x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

28. (1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \ge 1, \\ \sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

29. (2) $\begin{cases} \cos x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

30. (2) $\begin{cases} \cos x \ge \dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \le -\sqrt{3}. \end{cases}$

31. (2) $\begin{cases} \sin x \ge \dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \le \sqrt{3}. \end{cases}$

32. (2) $\begin{cases} \cos x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{ctg} x \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

33. (2) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \sin x \le -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

34. (2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \ge 1, \\ \cos x \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

35. (2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \le 1, \\ \operatorname{ctg} x \ge 1. \end{cases}$

36. (2) . $\begin{cases} \operatorname{tg} x \ge 1, \\ \operatorname{ctg} x \ge 1. \end{cases}$

Найдите область определения функции (37–38):

37. (2) а) $y = \sqrt{4\cos x - 2\sqrt{3}} - \sqrt{8\sin x + 4}$; б) $y = \dfrac{1 + \operatorname{ctg} x}{\sqrt{3\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}} - \dfrac{1}{\sqrt{5\sin x + 10}}$.

38. (3) а) $y = \dfrac{1}{2\cos x + 3} + \sqrt{2\sin x + \sqrt{3}}$; б) $y = \dfrac{1}{2\operatorname{ctg} x + 3} + \sqrt{2\sin x - \sqrt{2}}$.

39. (2) Упростите: $\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - x}}{1 - x + \sqrt{1 - x}} + \dfrac{1 - \sqrt{1 + x}}{1 + x - \sqrt{1 + x}}\right)^2 \cdot \dfrac{x^2 - 1}{2} + 1$.

40. (3) За килограмм одного продукта и 10 кг другого заплачено 2000 тенге. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15%, а второй подешевеет на 25%, то за такое же количество этих продуктов будет заплачено 1820 тенге. Сколько стоит 1 кг каждого продукта?

41. (2) Упростите: $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha}{2\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

42. (2) Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y^3 = 2, \\ 2x + x^2 + 5y^3 = 8. \end{cases}$

Ответы: *(во всех ответах предполагается $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$).*

1. $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right] \cup \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right]$. **2.** $x \in \left(-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k; 2\pi k\right]$.

3. $x \in \left[\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$. **4.** $x \in \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right)$.

5. $\left[\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

6. $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right]$.

7. $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$. **8.** $x \in \varnothing$. **9.** $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

10. $\left[\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$. **11.** $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$. **12.** $x \in \varnothing$. **13.** $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$.

14. $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$. **15.** $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$. **16.** $\left[\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right]$. **17.** а) $x \in \left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right\}$.

б) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$. **18.** а) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$. б) $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$

19. $\left[\pi + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right)$. **20.** $\left[2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$.

21. $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$. **22.** $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left[\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$.

23. $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$. **24.** $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$. **25.** $\left(2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right]$.

26. $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; 2\pi k\right) \cup \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right) \cup \left[\frac{5\pi}{4} + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right)$.

27. $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$. **28.** $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$. **29.** $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$;

30. $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. **31.** $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right] \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$.

32. $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; 2\pi k\right)$. **33.** $x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$.

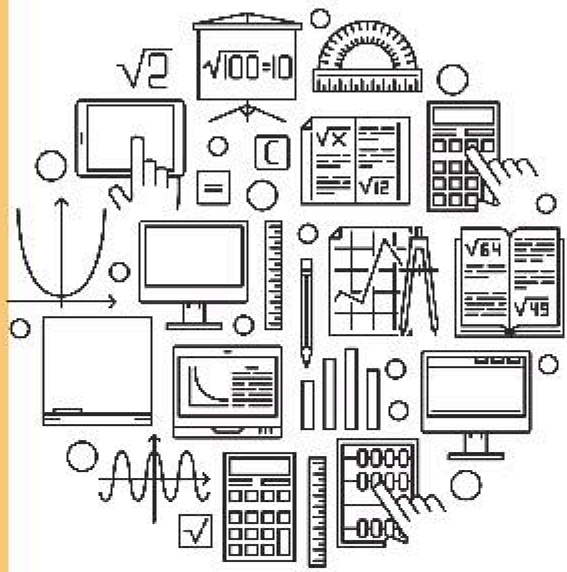
34. $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$. **35.** $\left(\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right]$. **36.** $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + \pi k\right\}$. **37.** $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$.

б) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$. **38.** а) $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right]$. б) $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$.

39. $\sqrt{1 - x^2}$. **40.** 800 тенге и 120 тенге. **41.** $\operatorname{tg} \alpha$. **42.** (1; 1), (2; 0).

Глава 4

ВЕРОЯТНОСТЬ



Введение

Как самостоятельное направление в математике теория вероятности родилась из стремления построить выигрышные стратегии в азартных играх. Азартные игры – это игры, в которых результат зависит не только от умения игрока, но и от некоторых случайных факторов. В этом смысле шахматы или шашки не являются азартными играми, в то время как, например, при игре в нарды каждый ход зависит, прежде всего, от комбинации выпавших очков на двух игральных костях. Однако на сегодняшний день теория вероятности и математическая статистика предоставляют мощнейшие инструменты для применения почти во всех областях науки и практической деятельности человека: страхование и статистическая физика, социология и биология, информатика и строительство и т.д. Поведение элементарных частиц в квантовой механике описывается в терминах теории вероятности. Разработка стратегий эффективного страхования была бы невозможна без достижений современной теории вероятности и математической статистики. Вероятность проявления наследственных признаков, передаваемых через гены, является предметом пристального внимания биологов и врачей. Кстати, человек, понимающий хотя бы основы теории вероятности, никогда не станет играть в азартные игры.

§1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1 Испытания, элементарные исходы и события

Игральная кость – это маленький кубик, на каждой грани которого отмечено от одной до шести точек. Кость «выбрасывается» на игровую поверхность, и число, равное количеству точек, оказавшихся на верхней грани, принимается к сведению игроками в соответствии с правилами той или иной игры. Мы будем рассматривать математическую модель игральной кости – абсолютно правильный идеально сбалансированный кубик, грани которого помечены числами от 1 до 6. Если в результате подбрасывания на верхней грани кубика оказалось, например, число 2, то говорят, что выпало число 2. Здравый смысл подсказывает нам, что при многократном подбрасывании кости (например, 10000000 раз) количеств выпадений каждого из чисел окажется примерно одинаковым! Это объясняется тем, что перед каждым из подбрасываний ни одно из шести чисел не имеет никаких преимуществ перед другими для того, чтобы оказаться на верхней грани. В такой ситуации мы будем говорить, что выпадения чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 равновозможны или равновероятны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Конечный во времени случайный процесс, результат которого мы не можем предсказать заранее, называется испытанием или экспериментом. Равновозможные (равновероятные) результаты испытания называются элементарными исходами. Совокупность всех исходов, удовлетворяющих каким-либо условиям, называется случайным событием или просто событием.

События обозначаются большими латинскими буквами.

Пример 1

Подбрасывание игрального кубика является испытанием. Множество чисел $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ является множеством всех элементарных исходов. События в данном случае могут быть определены самыми различными способами. Вот несколько примеров.

- Событие A: «Выпало четное число».
- Событие B: «Выпало число 5».
- Событие C: «Выпало не меньше чем 5».
- Событие D: «Выпало одно из целых чисел от 1 до 6».
- Событие E: «Выпало число 7».

Событию A удовлетворяют три числа $\{2, 4, 6\}$. (Можно также сказать: «К событию A приводят исходы $\{2, 4, 6\}$» или «Событие A является множеством $\{2, 4, 6\}$»). К событию B приводит выпадение числа 5. Это значит, что событие B состоит из одного элементарного исхода. Событие C произойдет, если выпадут числа 5 или 6. Событие D «Выпало одно из целых чисел от 1 до 6» произойдет при любом подбрасывании. Такое событие называется достоверным. Событие E «Выпало число 7» не может произойти ни при каком подбрасывании кубика. Такое событие называется невозможным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

Событие, происходящее при любом исходе испытания, называется достоверным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.

Событие, не происходящее ни при каком исходе испытания, называется невозможным.

Пример 2

Определим испытание как выбор произвольной точки на отрезке $[0;1]$. При этом будем считать, что никакая точка не имеет какого-либо преимущества перед другими в том, чтобы быть выбранной. Элементарными исходами являются все точки отрезка. Вот примеры событий, которые могут быть определены при данном испытании.

- Событие A: «Выбрано число, не превосходящее 0,3».
- Событие B: «Выбрано число, принадлежащее интервалу $(0,4;0,9)$».
- Событие C: «Выбрано неотрицательное число».
- Событие D: «Выбрано отрицательное число».

В данном примере событие C является достоверным, а событие D – невозможным.

Пример 3

Пусть испытание состоит в одновременном подбрасывании трех различных монет. Будем записывать «0» каждый раз, когда выпадает «орел», и записывать «1», если выпадает «решка». Например, последовательность 110 обозначает, что на первых двух монетах выпала «решка», а на третьей выпал «орел». Тогда имеется 8 различных равновозможных элементарных исходов: 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111. Определим событие B: «Ровно на двух из трех монет выпал «орел»». Тогда событию B удовлетворяют (можно также сказать – благоприятствуют событию, принадлежат событию, приводят к событию) исходы 001, 010, 100.

1.2 Совместные и несовместные события. Противоположные события

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.

Два события называются несовместными, если они одновременно не могут иметь места в результате одного и того же испытания.

Пример 1

В примере 1 предыдущего пункта события A и B являются несовместными.

Упражнение 1

Укажите несовместные события в примере 2 пункта 1.1.
Аналогично определяется несовместность нескольких событий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.

События называются несовместными, если в одном и том же испытании появление одного из них исключает появление других.

Пример 2

В коробке находятся 10 красных и 10 синих шаров. Все шары одинаковы по размеру. Наугад достают 2 шара без возврата. Возможны следующие события:
- A – оба шара оказались красными;
- B – оба шара оказались синими;
- C – один шар оказался синим, а другой – красным.

Нетрудно понять, что никакие два события из трех не могут произойти одновременно. Поэтому эти три события являются несовместными. Кроме того, очевидно, что в результате испытания какое-то из трех событий произойдет обязательно. В таком случае говорят, что события A, B, C образуют полную группу событий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.

Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания одно из них обязательно произойдет, но никакие два из них не могут произойти одновременно.

Простейшим примером полной группы событий является пара противоположных событий. Пусть, например, испытание состоит в трехкратном подбрасывании монеты. Определим событие A как появление хотя бы одного «орла» за все три броска. Тогда противоположным событием является событие A, которое состоит в том, что за все три броска «орел» ни разу не выпадет, т.е. все три раза выпадет «решка».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.

Два несовместных события, образующих полную группу, называется противоположными.

Фактически, противоположным к любому событию A является событие $\overline{A}$, означающее, что событие A не произойдет. Из определения противоположных событий следует, что противоположные события – это пара событий, одно из которых в результате испытания обязательно произойдет, но оба они произойти на могут. Из определения также следует, что **сумма противоположных событий является достоверным событием.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.

Два события называются совместными, если они могут одновременно произойти в результате одного испытания.

Пример 3

В коробке находятся 10 красных и 10 синих шаров. Все шары одинаковы по размеру. Наугад достают 2 шара без возврата. Определим следующие события:

- А – первый шар оказался красным;
- В – второй шар оказался красным.

Нетрудно понять, что если оба шара окажутся красными, то произойдут и событие А, и событие В. То есть ни одно из событий А или В не исключает другого. События А и В являются совместными.

Пример 4

Испытание состоит в выборе произвольной точки на отрезке $[1;2]$. Событие А определим как выбор числа, не превосходящего 1,7. Событие В определим как выбор числа из отрезка $[1,2;\ 1,5]$. Если произошло событие А, то это не значит, что В не может произойти. Если произошло событие В, то событие А точно произошло.

1.3 Сумма и произведение событий

Пример 5

Пусть испытание состоит в однократном подбрасывании игрального кубика. Определим следующие события:

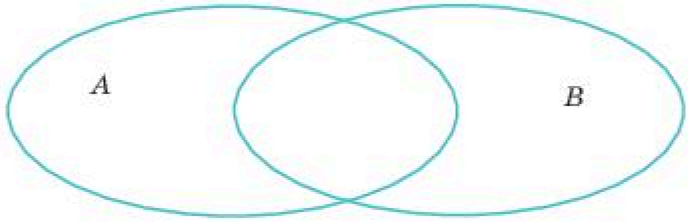
- событие B – «выпало четное число»;
- событие D – «выпало одно из чисел 2, 4 или 3».

Определим событие H следующим образом: событие имеет место тогда и только тогда, когда произошло хотя бы одно из событий B или D. Давайте разберемся более подробно. Событие B состоит из элементарных исходов $\{2, 4, 6\}$. Событие D есть множество $\{2, 4, 3\}$. Хотя бы одно из событий B или D произойдет, если выпадет одно из чисел $\{2, 4, 3, 6\}$. Событие H, таким образом, состоит из чисел $\{2, 4, 3, 6\}$. Заметим, что это те исходы, которые приводят или к событию B, или к событию D, или к ним обоим. Событие H называется суммой событий B и D. Записывается этот факт аналогично: $H = B + D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.

Событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из двух данных событий A или B, называется их суммой $A+B$ или объединением $A \cup B$. К событию $A \cup B$ приводят только те исходы, которые приводят или к событию A, или к событию B, или к ним обоим.

Вернемся к примеру в начале данного пункта. Определим событие F следующим образом: событие имеет место тогда и только тогда, когда произошли оба события B и D одновременно. Событие B состоит из элементарных исходов $\{2, 4, 6\}$. Событие D есть множество $\{2, 4, 3\}$. Оба события В и D произойдут одновременно, если выпадет одно из чисел $\{2, 4\}$. Это те исходы, которые принадлежат обоим событиям. Говорят, что событие F является произведением событий B и D.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.

Событие, состоящее в том, что произошли оба события A и B, называется произведением этих событий. Произведение событий обозначается как AB.

Пример 6

Пусть испытание состоит в однократном подбрасывании игрального кубика. Определим следующие события:

- Событие A – «выпало число 5»;
- событие B – «выпало четное число»;
- событие D: $\{2, 5, 6\}$

Определите:

а) сумму и произведение событий A и B;
б) сумму и произведение событий A и D.

Решение. а) суммой событий A и B является множество {2, 4, 5, 6}, произведением событий A и B является пустое множество.
б) суммой событий A и D является множество D: {2, 5, 6}, так как множество A является подмножеством множества D. По той же причине произведением событий A и D является событие A: {5}.

Произведению событий соответствует союз «и». Сумме событий соответствует союз «или».

Пример 7

Два стрелка производят по одному выстрелу каждый по своей мишени. Событием A назовем попадание первого стрелка, событием B назовем попадание второго стрелка. Сформулируйте события, которые являются произведением и суммой событий A и B.

Решение. Произведением событий A и B является событие AB, состоящее в том, что оба стрелка попадут. Суммой событий A и B является событие $A+B$, состоящее в том, что попал хотя бы один стрелок, т.е. попал только первый, или попал только второй, или попали оба.

Задачи

Часть 1

1. Игральный кубик подбрасывается один раз. Приведите 4 примера событий при таком испытании, одно из которых является достоверным, а другое – невозможным.

2. Определим испытание как выбор произвольной точки на отрезке $[-2;2]$. Приведите 4 примера событий при таком испытании, одно из которых является достоверным, а другое – невозможным.

3. Пусть испытание состоит в одновременном подбрасывании двух различных монет. Будем записывать «0» каждый раз, когда выпадает «орел», и записывать «1», если выпадает «решка». Определим событие A: «на обеих монетах выпал «орел»», событие B: «только на первой монете выпал «орел»», C: «на первой монете выпал «орел»».

а) Запишите последовательности из нулей и единиц, которые соответствуют элементарным исходам событий A, B и C.

б) определите еще два события так, чтобы вместе с событиями A и B все четыре образовали полную группу событий.

4. Пусть испытание состоит в однократном подбрасывании игрального кубика. Определим следующие события:

- событие A – «выпало число 3 или 5»;
- событие B – «выпало четное число»;
- событие C – «выпало нечетное число».

Ответьте на следующие вопросы:

а) определите, какие пары из этих событий являются совместными;

б) определите, какие пары из этих событий являются несовместными;

в) определите, какие пары из этих событий являются противоположными;

г) определите событие, противоположное событию A;

д) определите сумму и произведение событий A и B;

е) определите сумму и произведение событий A и C;

ж) определите сумму и произведение событий B и C.

5. На плоскости отмечено 10 синих точек и 7 оранжевых. Каждая из отмеченных точек соединена с каждой? Наудачу выбирается один из них. Определим:

- событие A: «оба конца отрезка синие»,
- событие B: «один из концов отрезка синий, а другой – оранжевый»,
- событие C: «хотя бы один из концов отрезка синий»,
- событие D: «хотя бы один из концов отрезка оранжевый»,
- событие E: «оба конца отрезка оранжевые».

Ответьте на следующие вопросы:

а) какие-то из этих событий образуют пары противоположных, определите эти пары;

б) укажите тройки событий такие, что одно из трех является суммой двух других.

в) укажите тройку событий, образующих полную группу.

г) какое из обозначенных событий является произведением событий D и C?

Часть 2

6. Монета подбрасывается два раза. Приведите 4 примера событий при таком испытании, одно из которых является достоверным, а другое – невозможным.

7. Определим испытание как выбор произвольной точки на отрезке $[-1;1]$. Приведите 4 примера событий при таком испытании, одно из которых является достоверным, а другое – невозможным.

8. Пусть испытание состоит в одновременном подбрасывании трех различных монет. Будем записывать «0» каждый раз, когда выпадает «орел», и записывать «1», если выпадает «решка». Определим событие A: «на всех монетах выпал «орел»», событие B: «ровно на одной монете из трех выпал «орел»», C: «на первой монете выпал «орел»».

а) Запишите последовательности из нулей и единиц, которые соответствуют элементарным исходам событий A, B и C.

б) Определите еще два события так, чтобы вместе с событиями A и B все четыре образовали полную группу событий.

9. Пусть испытание состоит в однократном подбрасывании игрального кубика. Определим следующие события:
- событие A – «выпало число 4 или 5»;
- событие B – «выпало нечетное число»;
- событие C: $\{1, 2, 3, 6\}$.

Ответьте на следующие вопросы:
а) определите, какие пары из этих событий являются совместными;
б) определите, какие пары из этих событий являются несовместными;
в) определите, какие пары из этих событий являются противоположными;
г) определите событие, противоположное событию B;
д) определите сумму и произведение событий A и B;
е) определите сумму и произведение событий A и C;
ж) определите сумму и произведение событий B и C.

10. Белла отметила на окружности несколько бирюзовых точек, а Акниет – несколько фиолетовых. Акниет каждую отмеченную точку соединила с каждой, а Белла наугад выбирает треугольник с вершинами в отмеченных точках. Сформируем события:
- событие A: «все три вершины треугольника оказались бирюзовыми»,
- событие B: «ровно одна вершина треугольника оказалась бирюзовой»,
- событие C: «ровно две вершины треугольника оказались бирюзовыми»,

- событие D: «все вершины треугольника оказались фиолетовыми»,
- событие E: «хотя бы одна вершина треугольника оказалась бирюзовой»,
- событие F: «хотя бы одна вершина треугольника оказалась фиолетовой».

Ответьте на следующие вопросы:
а) какие-то из этих событий образуют пары противоположных, определите эти пары;
б) какие-то четыре из этих событий образуют полную группу, укажите эту четверку событий;
в) докажите, что сумма событий B и C является произведением событий E и F.

11. (2) В очереди за билетами стоят друзья: Артур, Ансар, Габит, Толеген и Арыстан. Известно, что Артур купит билет раньше, чем Ансар, но позже Арыстана, Габит и Арыстан не стоят рядом, а Толеген не находится рядом ни с Артуром, ни с Арыстаном, ни с Габитом. Кто за кем стоит?

12. (2) Упростите выражение $(1-\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha)+\sin^2\alpha+3$.

Ответы:

4. а) A и C; б) A и B, B и C; в) B и C; г) $D:\{1, 2, 4, 6\}$; д) $A+B:\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $AB:$ постое множество; е) $C:\{1, 3, 5\}$; ж) $E:\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, постое множество. **5.** а) A и D, C и E; ә) $C=A+B$, $D=B+E$; б) A, B и E; в) A. **9.** а) A и B, B и C; б) A и C; в) A и C; г) $D:\{2, 4, 6\}$; д) $A+B:\{1, 3, 4, 5\}$, $AB:\{5\}$; е) $A+C:\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $AC:$ постое множество; ж) $B+C:\{1, 2, 3, 5, 6\}$, $BC:\{1, 3\}$. **10.** а) A и F, D и E; б) A, B, C, D. **11.** Арыстан, Артур, Габит, Ансар и Толеген. **12.** 4.

§2 КОМБИНАТОРИКА

2.1 Принцип умножения и принцип сложения

Для дальнейшей работы нам понадобятся некоторые факты комбинаторики. Комбинаторика – это раздел математики, в котором разрабатываются методы подсчета объектов или их комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям. Образно говоря, комбинаторика отвечает на вопрос: «Как подсчитать, не подсчитывая...». Приведем пример. Сколькими способами можно поставить в ряд одинаковых красных и одинаковых зеленых шариков? При малых значениях и ответ легко можно найти прямым перебором всех случаев. Например, при и количество способов равно 10: ККЗЗЗ, КЗКЗЗ, КЗЗКЗ, КЗЗЗК, ЗККЗЗ, ЗКЗКЗ, ЗКЗЗК, ЗЗККЗ, ЗЗКЗК, ЗЗЗКК. Но при и перебрать все случаи таким же образом не представляется возможным. Однако простые комбинаторные методы позволяют дать точный ответ: при $k=6$ и $m=29$ таких способов ровно 1 623 160. Оказывается, сформулированный вопрос о шариках эквивалентен следующему: сколькими способами можно выбрать набор из 6 чисел без учета их порядка из данных 35 чисел.

Упражнение 1

В классе 10 мальчиков и 15 девочек. Сколькими способами можно составить одну пару мальчик-девочка для участия в школьном конкурсе танцев?

Принцип умножения. Если первый выбор можно осуществить способами, а второй выбор можно осуществить способами, то существует способов осуществить сначала первый выбор, а затем второй.

Обобщенный принцип умножения. Если первый выбор можно осуществить n_1 способами, второй выбор можно осуществить n_2 способами, ..., k-й выбор можно осуществить n_k способами, то существует $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способов осуществить сначала первый выбор, затем второй и т.д. до k-го.

Пример 1

В классе 30 человек. Требуется выбрать старосту, помощника старосты и учебный сектор, на каждую должность по одному учащемуся. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Будем выбирать по очереди. Старосту можно выбрать 30 способами. Если староста уже выбран, то помощника старосты можно выбрать 29 способами. Если староста и помощник уже выбраны, то остается 28 способов выбрать учебный сектор. Итого получаем по принципу умножения $30 \cdot 29 \cdot 28$ способов.

Упражнение 2

Из города А в город В ведет 5 дорог, из города В в город С ведет 4 дороги. Из города А в город Е ведет 3 дороги, из города Е в город С ведет 6 дорог. Сколькими способами можно попасть из А в С?

Решение упражнения 2 получается, если отдельно подсчитать количество дорог из А в С , ведущих через В и ведущих через Е. Ответом является сумма этих чисел. То есть все дороги мы разбили на два класса и подсчитали количество в каждом из них. Мы использовали принцип сложения.

Принцип сложения. Если все способы разбиваются на q непересекающихся классов, то общее количество способов равно сумме $k_1+k_2+\ldots\ldots+k_q$, где k_i – количество способов в i-ом классе.

При всей своей очевидности сложность применения принципа сложения заключается в основном в нахождении подходящего способа разбить способы на классы.

Пример 2

У Бауыржана имеется много деревянных кубиков. Бауыржан берет по одному кубику и каждую грань красит в один из двух цветов: красный или зелёный. Какое максимальное количество крашеных кубиков может получить Бауыржан, если он хочет, чтобы все кубики были раскрашены по-разному?

Решение. Необходимо как-то упорядочить подсчет. Принцип сложения подсказывает, что можно попробовать классифицировать раскраски по количеству красных граней: 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Если красных граней 0, то все грани – зеленые. Это дает один способ. Если имеется ровно одна красная грань, то это еще один способ. Если у кубика две красные грани, то они могут быть либо соседними, либо противоположными – еще два способа. Три красные грани могут располагаться друг относительно друга тоже только двумя способами (подумайте – какими?). Если красных граней 4, 5 или 6, то зеленых соответственно 2, 1 или 0. Рассматривая в этих случаях зеленые грани вместо красных, получаем соответственно 2, 1 и 1 способ. Всего получается 1+1+2+2+2+1+1=10 неповторяющихся раскрасок кубика.

2.2 Основные формулы комбинаторики

Для того чтобы двигаться дальше, нам потребуется вспомнить некоторые формулы комбинаторики.

Число размещений с повторениями.

Пример 3

Мурат проводит серию экспериментов, каждый из которых заключается в пятикратном подбрасывании игрального кубика. Результат каждого эксперимента он записывает в виде последовательности из пяти выпавших чисел. Сколько различных последовательностей он может получить?

Решение. На первом месте последовательности может оказаться любое число от 1 до 6, на втором месте последовательности может оказаться любое число от 1 до 6 независимо от того, какое число оказалось записанным на первом месте и т.д. На любом из пяти мест может оказаться любое число от 1 до 6 независимо от того, какие числа выпали и записаны на остальных местах. По принципу умножения получаем ответ 6^5.

В общем случае количество способов выбрать k не обязательно различных элементов из n элементов множества S и поставить их в один ряд (один и тот же элемент может выбираться несколько раз, т. е. повторяться), называется числом размещений с повторениями и вычисляется по формуле $\overline{A}_n^k = n^k$.

Пример 4

Весь класс (30 человек) плохо ведет себя на всех уроках. В кабинете 15 парт по 2 места за каждой. Классный руководитель считает, что проблему можно решить, если правильно пересадить всех учеников. Он решил каждый день по-новому рассаживать учеников. Сколько дней понадобится классному руководителю, чтобы убедиться в справедливости известной басни Крылова?

Решение. В классе 30 мест. На первое из них можно выбрать любого из учеников – 30 способов. Если такой выбор уже сделан, то на второе место можно выбрать одного из оставшихся 29 учеников. Если посадили второго ученика, то на третье место можно выбрать одного из оставшихся 28 учеников. И так далее. По принципу умножения получаем всего $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ способов. Число $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ обозначается как $30!$. (Неимоверно большое число, так как $30!$ дней – это примерно $7267201638690165990035848767 12$ лет.)

В общем случае произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ натуральных чисел от 1 до n обозначается как $n!$. Число $0!$ считается равным единице. Аналогичные рассуждения показывают, что число перестановок n различных элементов равно $n!$. Число перестановок обозначается как P_n.

$$P_n = n!$$

Число перестановок фактически является частным случаем числа размещений без повторений из n различных предметов по k. Это число обозначается как A_n^k. Иначе говоря, число A_n^k обозначает количество способов выбрать k элементов из данных n и поставить их в один ряд. В примере 1 данного параграфа ответом является число A_{30}^3. Рассуждения, аналогичные тем, которые привели к решению примера 1 , показывают, что число A_n^k равно произведению k чисел $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$. Итак,

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Переходим к рассмотрению очень важной формулы для числа сочетаний из n элементов по k.
Количество способов выбрать k элементов из n данных без учета порядка обозначается C_n^k. Читается «Це из n по k». Например, количество способов выбрать пару точек из 12 отмеченных обозначается как C_{12}^2. Количество способов выбрать 6 чисел из данных тридцати пяти обозначается как C_{35}^6.

Следующий пример сравните с примером 1.

Пример 5

В классе 30 человек. Требуется выбрать актив класса в количестве 3-х человек. Сколькими способами это можно сделать?
Решение. Представим, что мы решаем задачу из примера 1, но немного другим путем. Сначала выберем актив из трех человек, а затем распределим между ними должности. Количество способов распределить 3 должности между уже выбранными тремя человеками равно количеству перестановок $P_3 = 3!$. Если обозначить через C_{30}^3 число способов выбрать актив, то по принципу умножения количество способов выбрать старосту, помощника и учебный сектор равно $C_{30}^3 \cdot P_3$. С другой стороны мы уже знаем ответ на вопрос примера 1: это число A_{30}^3. Получаем равенство $C_{30}^3 \cdot P_3 = A_{30}^3$, откуда немедленно следует, что $C_{30}^3 = \dfrac{A_{30}^3}{P_3}$. Если подставить формулы для $A_{30}^3 = \dfrac{30!}{(30-3)!}$ и $P_3 = 3!$, то получается $C_{30}^3 = \dfrac{30!}{3!(30-3)!}$.

В общем случае аналогичные рассуждения показывают, что $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Пример 6

Рассмотрим подробнее формулы для C_n^k при малых значениях k.

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1,$$

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-3)\cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n}{1\cdot (1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1))} = n,$$

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-3)\cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n}{(1\cdot 2)(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-2))} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-3)\cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n}{(1\cdot 2\cdot 3)(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-3))} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Упражнение 2

Используя формулу $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, докажите что $C_n^n=C_n^0=1$, $C_n^{n-1}=C_n^1=n$, $C_n^{n-2}=C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Пример 7

В классе 10 мальчиков и 15 девочек. Требуется выбрать команду, в которой должно быть 2 мальчика и 2 девочки. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Два мальчика из 10 можно выбрать C_{10}^2 способами. Две девочки из 15 можно выбрать C_{15}^2 способами. Чтобы собрать команду из четырех человек, можно выбрать любую пару мальчиков и любую пару девочек. По принципу умножения получается $C_{10}^2\cdot C_{15}^2$ способов. Вычисления: $C_{10}^2\cdot C_{15}^2=\dfrac{10\cdot 9}{2}\cdot\dfrac{15\cdot 14}{2}=4725$.

Пример 8

В классе 10 мальчиков и 15 девочек. Требуется выбрать команду из двух человек, в которой должно быть или 2 мальчика, или 2 девочки. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Два мальчика из 10 можно выбрать C_{10}^2 способами. Две девочки из 15 можно выбрать C_{15}^2 способами. По принципу сложения получаем $C_{10}^2+C_{15}^2$ способов. Вычисления: $C_{10}^2+C_{15}^2=\dfrac{10\cdot 9}{2}+\dfrac{15\cdot 14}{2}=45+105=150$.

Пример 9

На окружности отмечены 7 красных и 5 синих точек. Сколько существует треугольников, у которых хотя бы одна вершина красная?

Решение. **Способ 1.** Все треугольники, у которых хотя бы одна вершина красная, разбиваем на классы по количеству красных вершин: все три вершины красные, ровно 2 вершины красные, ровно одна вершина красная.

Количество треугольников, у которых все три вершины красные, равно числу способов выбрать три красные точки из семи. Это, по определению, число C_7^3.

Чтобы указать треугольник, у которого 2 вершины красные и одна синяя, требуется выбрать 2 красные точки из 7 и одну синюю точку из пяти. Это можно сделать $C_7^2\cdot C_5^1$ способами, так как каждой паре красных точек можно поставить в соответствие любую из синих точек и получить таким образом треугольник рассматриваемого типа (принцип умножения).

Треугольники с одной красной вершиной и двумя синими считаются аналогично: $C_7^1 \cdot C_5^2$.

В результате получается $C_7^3 + C_7^2 \cdot C_5^1 + C_7^1 \cdot C_5^2$ треугольников, у которых хотя бы одна вершина красная. Несложные арифметические подсчеты позволяют получить числовой ответ: 210.

Способ 2. Все треугольники с вершинами в двенадцати отмеченных точках делятся на два типа. К первому типу относятся те, у которых хотя бы одна вершина красная. Ко второму относятся те, у которых нет ни одной красной вершины. (Либо красная вершина есть у треугольника, либо ее нет. Третьего не дано. Идея состоит в вычислении количества вообще всех треугольников и треугольников, у которых все вершины синие. Разность этих чисел и есть искомый ответ.) Количество треугольников с вершинами в 12-и отмеченных точках равно количеству способов выбрать 3 точки из 12-и, то есть C_{12}^3. Количество треугольников с вершинами в синих точках равно C_5^3.

Ответ: $C_{12}^3 - C_5^3$. Вычисления показывают, что $C_{12}^3 - C_5^3 = 210$.

Решения задачи из последнего примера демонстрирует одну очень полезную идею, которую мы назовем «переход к дополнению». Суть идеи состоит в следующем. Пусть нам дано некоторое множество A и требуется подсчитать количество элементов этого множества, обладающих каким-либо свойством. Иногда легче подсчитать количество всех элементов множества A и количество элементов этого множества, которые не обладают обозначенным свойством. Разность найденных чисел и есть ответ.

Задачи

Часть 1

1. а) Сколько существует четырехзначных чисел, состоящих только из нечетных цифр?

б) Сколько существует четырехзначных чисел, состоящих только из четных цифр?

2. Жанар, Олег и еще пятеро друзей купили билеты в кино на один ряд на места с 1-е по 7-е.

а) Сколькими способами они могут сесть на свои места?

б) Сколькими способами они могут занять свои места так, что Олег сядет на 2-е место?

в) Сколькими способами они могут занять свои места так, что Олег не сядет на 2-е место?

г) Сколькими способами они могут занять свои места так, что Олег и Жанар окажутся сидящими рядом?

д) Сколькими способами они могут занять свои места так, что Олег и Жанар не окажутся сидящими рядом?

3. В ряд стоят 15 стульев.
(1) а) Сколькими способами можно выбрать 4 из них?
(1) б) Сколькими способами можно выбрать 11 из них?
(1) в) Сколькими способами 4 девушки могут разместиться на 15 стульях?

4. В классе 15 мальчиков и каждое утро они обмениваются рукопожатиями каждый с каждым. Сколько рукопожатий происходит каждое утро?

5. На плоскости отмечено 5 зеленых и 8 голубых точек. Каждую из точек соединили с каждой отрезком.
а) Сколько отрезков имеют оба конца голубого цвета?
б) Сколько отрезков имеют оба конца зеленого цвета?
в) У какого количества отрезков концы не совпадают по цвету?

6. В классе 12 мальчиков и 12 девочек. Требуется выбрать команду, в которой должно быть 3 мальчика и 2 девочки. Сколькими способами это можно сделать?

7. Имеется 3 одинаковых белых шара и 4 одинаковых красных.
а) Сколькими способами можно поставить их в один ряд?
б) Сколькими способами можно поставить их в один ряд так, чтобы на первом месте оказался белый шар?

8. На окружности отмечены 6 красных и 9 синих точек.
а) Сколько существует треугольников, у которых ровно одна вершина красная?
б) Сколько существует треугольников, у которых ровно две вершины синие?

9. (3) Система состоит из восьми пронумерованных лампочек, каждая из которых может либо гореть, либо не гореть независимо от других. Сформулируем условие A: лампочка №1 горит. Условие B: обе лампочки №7 и №8 не горят. Определите количество состояний системы, для которых:
а) не выполняется условие А; б) выполняется условие *B*;
в) не выполняется условие В; г) выполняются оба условия А и В;
д) не выполняется хотя бы одно из двух условий;
е) не выполняется ни одно из условий;
ж) выполняется хотя бы одно из условий.

Часть 2

10. Имеется 15 книг. Сколькими способами можно выбрать первые три из них и поставить по очереди на полку?

11. а) Сколько существует пятизначных чисел, состоящих только из цифр $1, 4, 7$?
б) Сколько всего существует пятизначных чисел?

12. Канат и шестеро его друзей купили билеты в кино на один ряд на места с 1 по 7.
а) Сколькими способами они могут занять свои места так, что Канат сядет на 1-е или на 7-е место?
б) Сколькими способами они могут занять свои места так, что Канат не сядет ни на 1-е, ни на 7-е место?

13. В турнире по шахматам участвуют 10 шахматистов и каждый играет с каждым ровно одну партию. Сколько партий должно быть сыграно?

14. На плоскости отмечено 15 зеленых и 18 голубых точек. Каждую из точек соединили с каждой отрезком.
а) Сколько отрезков имеют оба конца голубого цвета?
б) Сколько отрезков имеют оба конца зеленого цвета?
в) У какого количества отрезков концы не совпадают по цвету?

15. В магазине продаются 7 видов мороженого и 10 видов пирожных. Сколькими способами можно купить набор из 3 видов мороженого и 3 видов пирожных?

16. Имеется 3 одинаковых белых шара и 4 одинаковых красных. Сколькими способами можно поставить их в один ряд так, чтобы на третьем месте оказался белый шар?

17. На окружности отмечены 6 красных и 9 синих точек.
а) Сколько существует треугольников с вершинами во всех отмеченных точках?
б) Сколько существует треугольников, у которых ровно одна вершина синяя?
в) Сколько существует треугольников, у которых хотя бы две вершины синие?

18. (3) Одно испытание состоит в трехкратном подбрасывании игрального кубика. После каждого подбрасывания записывают выпавшее число. Таким образом, после каждого испытания получается некоторая последовательность из трех чисел.
а) Чему равно количество всех возможных последовательностей?
Пусть условие А состоит в том, что первое из трех чисел последовательности равно 1; условие В состоит в том, что последнее из трех чисел равно 5 или 6. Определите количество последовательностей, для которых:
б) не выполняется условие А; в) выполняется условие В;
г) не выполняется условие В; д) выполняются оба условия А и В;
е) не выполняется хотя бы одно из двух условий;
ж) не выполняется ни одно из условий;
з) выполняется хотя бы одно из условий.

19. А и В – дети С, С – мать А, А – сын С, но В не дочь С. Кем друг другу приходятся А и В?

20. От полного стакана кофе я отпил половину и долил столько же молока. Затем я отпил третью часть получившегося кофе с молоком и долил столько же молока. Наконец, я отпил шестую часть получившегося кофе с молоком и долил столько же молока. Только после этого я выпил все до конца. Чего в итоге я выпил больше: молока или кофе?

Ответы:

1. а) 625; б) 500. **2**. а) $7!$; б) $6!$; в) $6\cdot6!$; г) $5\cdot6!$; д) $5\cdot6!$. **3**. а) C_{15}^4; б) $C_{15}^{11}=C_{15}^4$; в) $A_{15}^4=12\cdot13\cdot14\cdot15$. **4**. C_{15}^2. **5**. а) C_8^2; б) C_5^2; в) 40. **6**. $C_{12}^3\cdot C_{12}^2$. **7**. а) 35; б) 15.

8. а) $6\cdot C_9^2$; б) $6\cdot C_9^2$. **9.** а) 2^7; б) 2^6; в) 2^8-2^6; г) 2^5; д) Возможны только два взаимоисключающих случая: либо выполняются оба условия, либо хотя бы одно из них не выполняется. Учитывая ответ предыдущего пункта имеем ответ 2^8-2^5. е) $3\cdot 2^5$; ж) $7\cdot 2^5$. **10.** $15\cdot 14\cdot 13$. **11.** а) 3^5; б) 9000. **12.** а) $2\cdot 6!$; б) $5\cdot 6!$. **13.** 45. **14.** а) C_{18}^2; б) C_{15}^2; в) $15\cdot 18$. **15.** $C_7^3\cdot C_{10}^3$. **16.** 15. **17.** а) C_{15}^3; б) $9\cdot C_6^2$; в) $C_9^3\cdot C_6^0+C_9^2\cdot C_6^1$. **18.** а) 6^3; б) 6^3-6^2; в) $2\cdot 6^2$; г) $6^3-2\cdot 6^2$; д) 12; е) 6^3-12; ж) 20; з) 6^3-20. **19.** Братьями. **20.** Поровну.

§3 КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Обратимся снова к классическому примеру – игральной кости. Ни одна грань не имеет преимуществ перед остальными для того, чтобы оказаться наверху. Поэтому при многократном подбрасывании (например, 6000000000 подбрасываний), каждое из чисел от 1 до 6 выпадет примерно одинаковое количество раз. Это значит, что каждое число выпадает в среднем в одном из 6 бросков. Предположим, что по некоторым причинам мы хотим, чтобы выпало число 2. Очевидно, что имеется 1 шанс из 6 для того, чтобы действительно выпало число 2. Математики говорят немного по-другому: ***вероятность выпадения числа 2 равна*** $\frac{1}{6}$. Представим другую ситуацию: для выигрыша нам необходимо и достаточно, чтобы на следующем броске выпало не меньше, чем 5. Это значит, что выпадение числа 5 или числа 6 принесут нам радость победы, выпадение любого другого числа заставит испытать горечь поражения. Следовательно, имеется 2 шанса из 6 победить в игре и 4 шанса из 6 – проиграть. Вероятность того, что выпадет число, не меньшее, чем 5, равна $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; вероятность того, что выпадет меньше, чем 5, равна $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Вы уже знаете, что числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 являются элементарными исходами в данном испытании, а выпадение числа, не меньшего, чем 5, называется случайным событием. Вероятность события в теории вероятностей обозначается буквой P. Например, запись $P(A)=\frac{1}{6}$ обозначает, что вероятность события A равна $\frac{1}{6}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть некоторое испытание имеет q равновероятных исходов, p из которых приводят к событию A. Тогда вероятность P(A) события A равна отношению $\frac{p}{q}$.

Из определения следует алгоритм вычисления вероятности события.

1. Вычисляем q – общее количество равновозможных взаимоисключающих исходов.
2. Вычисляем p – количество исходов события A.
3. Вычисляем вероятность события A по формуле $P(A)=\frac{p}{q}$.

Пример 1

Пусть одно испытание состоит в одновременном подбрасывании трех различных монет. Какова вероятность того, что ровно на двух из них выпадет «орел»?

Решение. Будем записывать «0» каждый раз, когда выпадает «орел», и записывать «1», если выпадает «решка». Например, последовательность 110 обозначает, что на первых двух монетах выпала «решка», а на третьей выпал «орел». Тогда имеется 8 различных равновозможных исходов: 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111. Ровно три из них содержат в точности по два нуля: 001, 010, 100. Следовательно, имеется три шанса из восьми для того, чтобы реализовалось событие B, обозначенное в условии задачи: «ровно на двух монетах выпадет «орел»». Вероятность $P(B)$ такого события равна $\frac{3}{8}$.

Используя данный алгоритм и приведенные примеры, постарайтесь самостоятельно справиться со следующими упражнениями.

Упражнение 1

В непрозрачном пакете находятся 225 красных и 625 синих шариков, одинаковых по форме. Какова вероятность, что первый вынутый шарик окажется синим?

Упражнение 2

В коробке находится 30 одинаковых по форме шаров, на каждом из которых написано одно из натуральных чисел от 1 до 30. Любые два шара имеют разные номера. Какова вероятность того, что:
а) номер первого вынутого шара окажется четным числом;
б) окажется простым числом?

Упражнение 3

«*Наивный клиент*». В некоторой стране 20 городов, в каждом городе по магазину «Зерде». Сеть магазинов «Зерде» объявила о новогодней акции: к каждой покупке, совершенной с 1 декабря по 31 января прилагается лотерейный билет на розыгрыш одного из 20 автомобилей. Ахмед решил с 1 декабря по 31 января каждый день делать по одной покупке. Каковы его шансы на выигрыш автомобиля, если в тот же период в каждом магазине посетителями ежедневно совершалось в среднем по 1000 покупок?

Пример 2

«Невероятный результат». Газиз, Арсен и Бибигуль играют в такую игру. Газиз, являясь арбитром игры, многократно подбрасывает монету. Он записывает «0» каждый раз, когда выпадает «орел» и записывает «1» каждый раз, когда выпадает «решка». Все символы записываются в одну строку. Последовательностью Арсена называется запись, состоящая из семи нулей подряд «0000000», последовательностью Бибигуль называется запись из 4-х нулей и 3-х единиц «0101010» именно в данном порядке. Выигрывает тот, чья последовательность первой появится в записи Газиза. У кого больше шансов на победу?

Рассуждения. В чем, собственно, состоит **испытание**? Очевидно, что и Бибигуль, и Арсен в процессе игры после каждого броска Газиза будут сравнивать свою последовательность с **последними семью символами** в записи арбитра. Поэтому одним испытанием можно считать серию из семи подбрасываний монеты: запись с первого символа по седьмой будет считаться результатом первого испытания, со второго по восьмой – результатом второго испытания и так далее. Остается посчитать количество элементарных исходов, а главное – понять, что событие, приводящее к победе Арсена, состоит ровно из одного элементарного исхода. Впрочем, событие, приводящее к победе Бибигуль, также состоит из одного элементарного исхода.

Решение. Одним испытанием можно считать серию из семи подбрасываний монеты.
Результат каждого из подбрасываний не зависит от результатов остальных. Следовательно, имеется всего 2^7 элементарных исходов, то есть, возможно составить всего 2^7 различных **последовательностей** из нулей и единиц, содержащих ровно 7 символов. Последовательность Бибигуль является **в точности одной из 2^7 возможных** последовательностей. Последовательность Арсена также является **в точности одной**

из 2^7 **возможных** последовательностей. Следовательно, **у Бибигуль и Арсена одинаковые шансы на выигрыш.**

Пример 3

«Дед Мороз». Когда Дед Мороз пришел перед Новым Годом в гости к сестрам Айтолкын и Акботе, в мешке у него оставалось 12 кукол «Айголек» и 8 водяных пистолетов. Дед Мороз считает, что на Новый год любой ребенок должен радоваться любому подарку, и поэтому наугад достает два первых попавшихся предмета из 20 имеющихся у него в мешке. Какова вероятность того, что сестры останутся довольны подарком, если обе питают отвращение к оружию?

Рассуждения. В чем состоит испытание? Испытание состоит в случайном выборе двух предметов из двадцати, 12 из которых есть куклы, а остальные – пистолеты. Что можно назвать множеством элементарных исходов? Множеством элементарных исходов можно назвать множество пар, которые могут быть выбраны. Сколько всего таких пар? Сколькими способами можно выбрать 2 элемента из 20, если порядок элементов в паре неважен? Или все-таки важен? Обе сестры останутся довольны, если Дед Мороз достанет пару кукол, и хотя бы одна из них останется недовольна в любом другом случае независимо от порядка. Следовательно, порядок неважен. Два элемента из 20 без учета порядка можно выбрать C_{20}^2 способами. Это и есть количество равновозможных исходов q из классического определения вероятности. Обе сестры останутся довольны, если оба предмета окажутся куклами. Это и есть событие А. А откуда может взяться пара кукол? Ну конечно, из множества двенадцати кукол в мешке Деда. Девочек устроит любая пара. Сколькими способами можно выбрать пару кукол из двенадцати?

Решение. Испытание состоит в случайном выборе двух предметов из двадцати. Следовательно, имеется $q=C_{20}^2$ равновозможных исходов данного испытания. Событие A состоит в том, что оба предмета окажутся куклами. Так как всего кукол имеется ровно 12, то количество p исходов, приводящих к событию A, равно C_{12}^2. По определению вероятности

$$P(A)=\frac{p}{q}=\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}=\frac{12\cdot 11}{2}\cdot\frac{2}{20\cdot 19}=\frac{33}{95}.$$

Ответ: $\frac{33}{95}$.

Пример 4

«Без права выбора». Сразу после того, как Дед Мороз сделал подарок Айтолкын и Акботе, он пришел в гости к Аружан и ее младшему брату Алихану. Дед Мороз достал из мешка первый попавшийся в руки предмет и вручил его Аружан. После этого он таким же образом достал подарок для Алихана. Перед уходом Дед Мороз пригрозил, что, если кто-нибудь из детей не будет играть той игрушкой, которая ему досталась, он вернется и отберет подарки. Какова вероятность того, что Аружан и Алихан останутся довольны подарками, если Алихан обожает смотреть «боевики», Аружан любит играть в «куклы», а Айтолкын и Акбота встретили Новый Год в прекрасном настроении?

Обсуждение. Так как Айтолкын и Акбота встретили Новый Год в прекрасном настроении, то, надо полагать, перед встречей с Аружан и ее братом в мешке у Деда Мороза оставались 10 кукол «Айголек» и 8 водяных пистолетов. В чем состоит испытание? Не совсем понятно. Тогда в чем состоит событие? Событие состоит в том, что первым предметом, который наугад вынимается из мешка, является кукла, а вторым предметом окажется пистолет. Идея состоит в том, чтобы рассмотреть все пары игрушек, которые могут достаться Аружан и Алихану. Важен ли здесь порядок, в котором Дед Мороз достал подарки? Конечно, важен. Поэтому множеством элементарных исходов можно считать множество упорядоченных пар, которые можно выбрать из 18-ти предметов. Пары называются упорядоченными в том смысле, что, например, (3,11) и (11,3) считаются различными. Пронумеруем всех кукол номерами от 1 до 10, все пистолеты – номерами от 11 до 18. Нас интересуют те пары, первое число в которых равно любому натуральному числу от 1 до 10, а второе число равно любому из натуральных чисел от 11 до 18.

Решение. Пронумеруем всех кукол номерами от 1 до 10, все пистолеты – номерами от 11 до 18. Испытанием в данном случае назовем выбор упорядоченной пары чисел $(x;y), x \neq y$ из множества от 1 до 18. Количество элементарных исходов такого испытания равно $q = A_{18}^2$. Нас интересуют те пары, первое число в которых равно любому натуральному числу от 1 до 10, а второе число равно любому из натуральных чисел от 11 до 18. Выбор такой пары назовем событием A. Найдем количество таких пар. Сначала выберем одно из чисел от 1 до 10 и поставим его на первое место. Если такой выбор сделан, то на второе место пары можно поставить любое из 8 чисел от 11 до 18. Всего получаем $p = 10 \cdot 8$ пар-исходов, приводящих к событию A. По определению вероятности события имеем $P(A)=\frac{p}{q}=\frac{10\cdot 8}{A_{18}^2}=\frac{10\cdot 8}{18\cdot 17}=\frac{40}{153}$.

Ответ: $\frac{40}{153}$.

Пример 5

На окружности отмечены 7 красных и 5 синих точек. Рассматриваются треугольники с вершинами в отмеченных точках. Какова вероятность того, что наугад выбранный треугольник имеет хотя бы одну красную вершину?

Решение. Вернитесь и перечитайте решение задачи примера 9 предыдущего параграфа. Решая эту задачу, мы уже выяснили, что имеется 210 треугольников, у которых хотя бы одна вершина красная. Количество треугольников с вершинами в 12-и отмеченных точках равно количеству способов выбрать 3 точки из 12-и, то есть C_{12}^3. Так как $C_{12}^3=220$, то вероятность того, что треугольник имеет хотя бы одну красную вершину, равна $\frac{210}{220}=\frac{21}{22}$.

Пример 6

Преподаватель подготовил к экзамену 20 билетов. На экзамене студенты по очереди подходят к столу преподавателя, выбирают наугад билет, переписывают его к себе в тетрадь и возвращают билет обратно на стол. На экзамен пришли три друга. Какова вероятность того, что:

а) всем троим попадется один и тот же билет?

б) всем троим попадутся разные билеты?

в) ровно двоим из них попадется один и тот же билет?

Решение. Назовем друзей X, Y и Z. Студенту X может попасться любой из 20 билетов. Студенту Y может попасться любой из 20 билетов. Студенту Z может попасться любой из 20 билетов. По принципу умножения всего имеется $20\cdot 20\cdot 20$ вариантов распределения билетов между тремя студентами. Тот же результат получается по формуле $\overline{A}_n^k=n^k$ числа размещений с повторениями, где $n=20$ и $k=3$. Таким образом, в формуле $P(A)=\frac{p}{q}$ классического определения вероятности количество всех элементарных исходов q равно 20^3.

а) Определим событие «всем троим попадется один и тот же билет» как событие B. Если всем троим попадется один и тот же билет, то это может быть любой из 20 билетов. Вероятность события B равна $P(B)=\frac{p}{q}$, где $p=20$ и $q=\overline{A}_{20}^{3}=20^3$. Вычисляем $P(B)=\frac{p}{q}=\frac{20}{20^3}=\frac{1}{400}$.

б) Определим событие «всем троим попадутся разные билеты» как событие A. Выбрать 3 билета из 20-и и распределить их между тремя студентами можно A_{20}^{3} способами, $A_{20}^{3}=20\cdot 19\cdot 18$. (Тот же результат можно получить без применения формулы A_{20}^{3} по принципу умножения. А именно: X выбирает один 20-и билетов, студенту Y остается выбор одного из 19 билетов, студенту Z достается один из 18-и оставшихся.) В итоге вероятность события A равна $P(A)=\frac{p}{q}$, где $p=A_{20}^{3}=20\cdot 19\cdot 18$, а $q=\overline{A}_{20}^{3}=20^3$. Подставляя эти значения в формулу, получаем $P(A)=\frac{p}{q}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{20^3}=\frac{342}{400}$.

в) Определим событие «ровно двоим из друзей попадется один и тот же билет» как событие C. Если ровно двоим достается один билет, то третьему другу достается какой-то другой билет. Эти два билета можно выбрать $A_{20}^{2}=20\cdot 19$ способами. Если первый из этих билетов достается друзьям X и Y, то второй достается другу Z. Если первый из этих билетов достается друзьям Y и Z, то второй достается другу X. Если первый из этих билетов достается друзьям Z и X, то второй достается другу Y. Всего имеем 3 способа разделить друзей на 2 части, в первой из которых два друга, а во второй – один друг. Каждый из этих способов комбинируется с каждым из выборов двух билетов. Всего имеем $3A_{20}^{2}=3\cdot 20\cdot 19$ способов. Таким образом, в формуле $P(C)=\frac{p}{q}$ число $p=3\cdot 20\cdot 19$, а число $q=\overline{A}_{20}^{3}=20^3$. Вычисляем $P(C)=\frac{3\cdot 20\cdot 19}{20^3}=\frac{57}{400}$.

Задачи

Часть 1

1. В торговом центре всего 10000 платьев, из которых 7000 розового цвета, 2000 – белого цвета и 1000 – голубого. Определите вероятность того, что Айзере выберет:
а) белое платье;
б) зеленое платье;
в) белое или голубое платье;
г) не голубое платье.
2. Испытание состоит в однократном подбрасывании игрального кубика. Определите вероятность того, что:
а) выпадет число 6;
б) выпадет четное число;
в) выпадет не меньше чем 1.
3. Испытание состоит в одновременном подбрасывании двух монет. Найдите вероятность того, что:
а) на обеих монетах выпадет «орел»;
б) на одной из монет выпадет «орел», а на другой – «решка»;
в) хотя бы на одной из монет выпадет «орел».
4. Из множества натуральных чисел от 1 до 200 случайным образом выбирается одно число. Определите вероятность того, что выбранное число окажется:
а) членом арифметической прогрессии $a_n = -30 + 12n$, где $n \geq 1$;
б) числом, которое кратно числу 5 (то есть делится на число 5 без остатка);
в) числом, которое кратно числам 5 и 7;
г) числом, которое кратно числу 5 или числу 7 .
5. Испытание состоит в одновременном подбрасывании двух игральных кубиков. Какова вероятность того, что произведение выпавших чисел окажется простым числом?
6. Испытание состоит в трехкратном подбрасывании кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков за три раза составит 17 или 18?
7. Айганым собирается дарить друзьям подарки. В ее сумке находятся книги: 4 математики и 7 физики. Она не глядя достает по очереди подарки и раздает их друзьям. Какова вероятность того, что:
а) первая наугад вынутая книга окажется физикой?
б) две первые книги окажутся физикой?
в) первая книга окажется математикой, а второй – физикой?
8. В классе 20 человек. Требуется выбрать команду из 7 учеников для участия в КВН. Участников решили выбирать жребием. Какова вероятность того, что Асель и Ануар окажутся вместе в выбранной команде?
9. В коробке 9 шаров: 3 красных, 3 желтых и 3 зеленых. Наудачу вынимаются три из них. Определите вероятность того, что:

а) все три шара окажутся одного цвета;
б) два шара окажутся красными и один – зеленым;
в) все шары окажутся разноцветными.

10. Три пассажира сели в автобус, у которого по маршруту впереди еще 8 остановок. Какова вероятность того, что:
а) все три пассажира выйдут на одной и той же остановке;
б) все три пассажира выйдут на разных остановках?
в) двое выйдут на одной остановке, а третий выйдет на другой?

11. На одной из параллельных прямых отмечено 10 точек, а на другой – 12. Рассматриваются треугольники с вершинами в отмеченных точках. Какова вероятность того, что наугад указанный треугольник имеет две из трех своих вершин на первой прямой?

12. На окружности отмечены 10 красных и 7 синих точек. Рассматриваются треугольники с вершинами в отмеченных точках. Какова вероятность того, что наугад выбранный треугольник:
а) имеет все три вершины красные;
б) имеет все три вершины одного цвета?

Часть 2

13. Айсулу, любимая дочка батыра Алпамыса, попросила себе на день рождения одного скакуна из жайлау. Батыр Алпамыс никогда ни в чем не отказывает своей дочке. В жайлау ровно 3600 лощадей, 1200 из которых – соловые, 900 – бурые, а остальные являются чалыми. Определите вероятность того, что:
а) Айсулу достанется соловый конь;
б) Айсулу достанется не чалый конь;
в) Айсулу достанется чубарый конь.

14. Испытание состоит в однократном подбрасывании игрального кубика. Определите вероятность того, что:
а) выпадет число 3 или 5;
б) выпадет делитель числа 6;
в) выпадет не больше, чем 8.

15. В коробке находятся 3 красных шара и 5 зеленых. По очереди достают шары без возврата. Какова вероятность того, что:
а) первый наугад вынутый шар окажется красным;
б) два первых шара окажутся красными;
в) первый шар окажется красным, а второй – зеленым?

16. В коробке находятся 3 красных шара и 5 зеленых. По очереди достают шары и возвращают в коробку. Какова вероятность того, что:
а) первый наугад вынутый шар окажется красным;
б) два первых шара окажутся красными;
в) первый шар окажется красным, а второй – зеленым?

17. Испытание состоит в одновременном подбрасывании трех монет. Найдите вероятность того, что:
а) на всех трех монетах выпадет «орел»;
б) выпадет хотя бы один «орел» и хотя бы одна «решка»;
в) хотя бы на двух монетах выпадет «орел».

18. Из множества натуральных чисел от 1 до 100 случайным образом выбирается одно число. Определите вероятность того, что выбранное число окажется:
а) числом, которое кратно числу 6 (то есть делится на число 6 без остатка);
б) числом, которое кратно числам 6 и 8;
в) числом, которое кратно числу 6 или числу 8;
г) членом геометрической прогрессии $b_n = \frac{1}{16} \cdot 2^{n-1}$, где $n \geq 1$.

19. Испытание состоит в одновременном подбрасывании двух игральных кубиков. Какова вероятность того, что произведение выпавших чисел окажется нечетным числом?

20. Перед Винни-Пухом и Пятачком стоят 24 одинаковых на вид запечатанных горшков. Винни-Пух и Пятачок уверены, что в каждом из них мед. На самом деле, накануне вечером их добрый друг ослик Иа съел мед в 12-ти из горшков. Так что теперь 12 из 24 горшков действительно содержат мед, а остальные – отменное удобрение для выращивания растений. Винни-Пух и Пятачок выбирают себе каждый по одному горшку. Определите вероятность того, что:
а) Винни-Пуху достанется горшок с удобрением;
б) Винни-Пуху достанется горшок с удобрением и Пятачку достанется горшок с удобрением;
в) Винни-Пуху достанется горшок с удобрением, а Пятачку достанется горшок с медом.

21. На плоскости отмечено 4 зеленых и 9 голубых точек. Рассматриваются все отрезки с концами в отмеченных точках. Какова вероятность того,что наугад выбранный отрезок:
а) имеет оба конца голубыми;
б) имеет концы разного цвета;
в) имеет одноцветные концы?

22. На окружности отмечены 10 красных и 7 синих точек. Рассматриваются треугольники с вершинами в отмеченных точках. Какова вероятность того, что наугад выбранный треугольник:
а) имеет ровно одну красную вершину;
б) имеет хотя бы 2 красные вершины?

23. Ерлан и Асхат попали в армию во взвод подводных пехотинцев. Взвод подводных пехотинцев насчитывает 30 рядовых. Каждый день из числа рядовых случайным образом выбирают 10 и отправляют их надувать боевые пузыри. С какой вероятностью оба приятеля попадают вместе в команду надувателей боевых пузырей?

24. В урне 12 шаров: 4 красных, 4 желтых и 4 зеленых. Наудачу вынимаются три из них. Определите вероятность того, что:
а) все три шара окажутся одного цвета;
б) среди вынутых шаров не окажется зеленого;
в) все шары окажутся разноцветными.

25. Если первый член геометрической прогрессии равен 2, а четвертый член – 16, то чему равен третий член этой прогрессии?

Ответы:

1. а) $0,2$; б) 0; в) $0,3$; г) $0,9$. **2.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1. **3.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{4}$. **4.** а) $\frac{17}{200}$; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{1}{40}$; г) $\frac{63}{200}$. **5.** $\frac{1}{6}$. **6.** $\frac{1}{54}$. **7.** а) $\frac{7}{11}$; б) $\frac{21}{55}$; в) $\frac{14}{55}$. **8.** $\frac{C_{18}^5}{C_{20}^7}$. **9.** а) $\frac{1}{28}$; б) $\frac{3}{28}$; в) $\frac{9}{28}$.

10. а) $\frac{1}{64}$; б) $\frac{21}{32}$; в) $\frac{21}{64}$. **11.** $\frac{12\cdot C_{10}^2}{12\cdot C_{10}^2+10\cdot C_{12}^2}=\frac{9}{20}$. **12.** а) $\frac{C_{10}^3}{C_{17}^3}=\frac{3}{17}$; б) $\frac{C_{10}^3+C_7^3}{C_{17}^3}=\frac{31}{136}$.

13. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{7}{12}$; в) 0. **14.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) 1. **15.** а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{3}{28}$; в) $\frac{15}{56}$. **16.** а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{9}{64}$; в) $\frac{15}{64}$. **17.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{2}$. **18.** а) $\frac{4}{25}$; б) $\frac{1}{25}$; в) $\frac{6}{25}$. **19.** $\frac{1}{4}$. **20.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{11}{46}$; в) $\frac{6}{23}$.

21. а) $\frac{C_9^2}{C_{13}^2}$; б) $\frac{C_4^1\cdot C_9^1}{C_{13}^2}$; в) $\frac{C_4^2+C_9^2}{C_{13}^2}$. **22.** а) $\frac{C_{10}^1\cdot C_7^2}{C_{17}^3}$; б) $\frac{C_{10}^2\cdot C_7^1+C_{10}^3\cdot C_7^0}{C_{17}^3}$. **23.** $\frac{C_{28}^2}{C_{30}^{10}}$.

24. а) $\frac{3}{55}$; б) $\frac{1}{55}$; в) $\frac{16}{55}$. **25.** 8.

§4 ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пример 1

Капли дождя падают на прямую беговую дорожку длиной 100 метров. Определим событие *A*: «Капля падает на расстоянии не более *a* метров от старта». Какова вероятность *P*(*A*) события *A*. Капли, падающие вне дорожки, не рассматриваются.

Решение-обсуждение. Нетрудно сообразить, что на отрезок беговой дорожки длины 50 метров падает примерно в 2 раза меньше капель, чем на всю беговую дорожку длины 100 метров. Поэтому, если, например,

$a=50$, то $P(A)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$. Если $a=25$, то отрезок длины 25 метров в 4 раза меньше всей беговой дорожки, поэтому $P(A)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$. И вообще, на дорожку длины a падает капель примерно во столько раз меньше, во сколько раз a меньше, чем 100. Следовательно, $P(A)=\frac{a}{100}$.

Приведенный пример показывает естественность следующего геометрического определения вероятности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Пусть дан отрезок L длины l и его подмножество K, состоящее из нескольких отрезков суммарной длины k. На отрезок L наугад бросается точка. Событием A назовем попадание точки на подмножество K. Вероятность события A равна $P(A)=\frac{k}{l}$.

Пример 2

Веревка длиною 2 метра разрезается в произвольном месте. Какова вероятность того, что один из получившихся кусков окажется длиннее, чем 1 м 50 см.

Решение. Один из кусков окажется длиннее, чем 1 м 50 см, только в том случае, если другой окажется меньше, чем 50 см.

Подмножество K состоит из двух отрезков длиною 50 см с каждого конца. В определении вероятности $P(A)=\frac{k}{l}$ число k равно 50 см + 50 см=1 м, $l=2$ м.

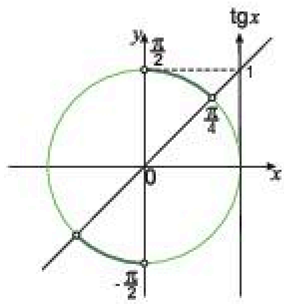
Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 3

Какова вероятность того, что для произвольного числа x выполняется неравенство $\operatorname{tg} x>1$?

Решение. Изобразим тригонометрическую окружность и ось тангенсов.

Решая тригонометрическое неравенство $\operatorname{tg} x>1$, получаем ответ:



$x \in \left(\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, где $k \in Z$. Отметим эти дуги на окружности. Если число x принадлежит отмеченным отрезкам, то неравенство $\operatorname{tg} x > 1$ является верным. Множеством L в данном случае является тригонометрическая окружность, радиус которой, как известно, равен 1. Длина окружности $l = 2\pi r = 2\pi$. Длина каждой из отмеченных дуг равна $\frac{\pi}{4}$. Множеством K является пара отмеченных дуг, суммарная длина k которых равна $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $P(A) = \frac{k}{l} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi} = \frac{1}{4}$.

Аналогичное определение вероятности можно рассмотреть для плоских фигур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2

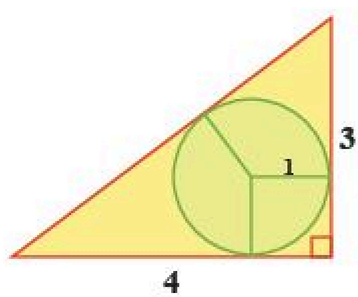
Пусть на плоскости дана фигура F площади S и его подмножество G, площади g. На фигуру F наугад бросается точка. Событием A назовем попадание точки на подмножество G. Вероятность события A равна $P(A) = \frac{g}{S}$.

Пример 4

В прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что точка попадет в круг, вписанный в треугольник?

Решение. Фигурой F в данном случае является треугольник. Его площадь S равна $\frac{3 \cdot 4}{2}$.

Радиус вписанного круга находим по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где a и b – катеты, c – гипотенуза прямоугольного треугольника. Гипотенузу данного треугольника находим по теореме Пифагора: $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.



Следовательно, радиус круга равен $r=\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{3+4-5}{2}=1$. Подмножеством G из определения является круг радиуса 1, его площадь находим по формуле $S_{кр}=\pi r^2$. Последние вычисления: $P(A)=\dfrac{g}{S}=\dfrac{\pi\cdot 1^2}{6}\approx 0{,}5236$.

Задачи

Часть 1

1. На отрезок $[-3;3]$ числовой оси наугад бросают точку. Какова вероятность того, что точка упадет на множество решений неравенства $|x-1|\le 1$?
2. На тригонометрической окружности отметили дугу, соответствующую решениям неравенства $\sin x\ge\dfrac{1}{2}$. Какова вероятность того, что наугад указанное число x принадлежит отмеченной дуге?
3. Правильный треугольник вписан в круг. В круг наугад бросают точку. Какова вероятность того, что брошенная точка окажется внутри треугольника? Ответ найдите с точностью до 3-го знака после запятой.
4. Круг вписан в квадрат. В квадрат наугад бросают точку. Какова вероятность того, точка окажется внутри круга? Ответ найдите с точностью до 3-го знака после запятой.
5. Прямоугольный треугольник с гипотенузой 13 и катетом 5 вписан в круг.

   а) Какова вероятность, что произвольная точка круга окажется внутренней точкой треугольника? Ответ найдите с точностью до 3-го знака после запятой.

   б) Какова вероятность, что произвольная точка круга не окажется внутренней точкой треугольника? Ответ найдите с точностью до 3-го знака после запятой.
6. В круге с центром в точке *O* провели радиусы *OA* и *OB*, угол между которыми равен 60°. Какова вероятность того, что произвольная точка круга окажется внутри сектора *AOB*, центральный угол которого равен 60°?

Часть 2

7. На отрезок $[-4;7]$ числовой оси наугад бросают точку. Какова вероятность того, что точка упадет на множество решений неравенства $x^2+2x-3\le 0$?

8. На тригонометрической окружности отметили дугу, соответствующую решениям неравенства $\cos x\le\frac{1}{2}$. Какова вероятность того, что наугад указанное число x принадлежит отмеченной дуге?

9. В правильный треугольник вписан круг. В треугольник наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что брошенная точка окажется внутри круга? Ответ найдите с точностью до 3-го знака после запятой.

10. В круг вписан квадрат. В круг наугад бросают точку. Какова вероятность того, что точка окажется внутри квадрата? Ответ найдите с точностью до 3-го знака после запятой.

11. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 13 и катетом 5 вписан круг.

а) Какова вероятность, что произвольная точка треугольника окажется внутренней точкой круга? Ответ найдите с точностью до 3-го знака после запятой.

б) Какова вероятность, что произвольная точка треугольника не окажется внутренней точкой круга? Ответ найдите с точностью до 3-го знака после запятой.

12. В круге с центром в точке *O* провели радиусы *OA* и *OB*, угол между которыми равен 60°. Какова вероятность того, что произвольная точка круга окажется внутри малого сегмента, отделяемого отрезком *AB*?

13. Какая из следующих систем уравнений имеет по крайней мере одно решение в вещественных числах:

а) $\frac{x}{y}=x+y=x-y$; б) $\frac{y}{x}=x-y=x+y$;

с) $\frac{x}{y}=xy=x+y=x-y$; д) $\frac{x}{y}=\frac{y}{x}=x-y=x+y$; е) $\frac{x}{y}=xy=x+y$.

14. Вычислите значение выражения: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{50^2}\right)$.

Ответы:

1. $\frac{1}{3}$. **2.** $\frac{1}{3}$. **3.** $0{,}045$. **4.** $0{,}785$. **5.** а) $0{,}226$; б) $0{,}774$. **6.** $\frac{1}{6}$. **7.** $\frac{4}{11}$. **8.** $\frac{2}{3}$. **9.** $0{,}605$. **10.** $0{,}637$. **11.** а) $0{,}419$; б) $0{,}581$. **12.** $0{,}029$. **13.** E. **14.** $\frac{51}{100}$.

§5 НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ

5.1 Независимые события и вероятность их произведения

Пример 1

В одном мешке находятся 10 желтых шаров и 12 зеленых. В другом мешке находятся 7 желтых и 22 зеленых. Наугад достают по одному шару из каждого мешка. Какова вероятность, что оба шара окажутся желтыми?

Решение. Эта простая задача решается по классическому определению вероятности. Общее количество пар шаров, один из которых достается из первого мешка, а другой – из второго, равно произведению $22 \cdot 29$. Количество таких пар, оба шара в которых желтые, равно произведению $10 \cdot 7$. Тогда вероятность того, что оба шара окажутся желтыми, равна дроби $\frac{10 \cdot 7}{22 \cdot 29}$. Заметим теперь, что эта дробь равна произведению дробей $\frac{10}{22}$ и $\frac{7}{29}$, причем первая дробь равна вероятности появления желтого шара из первого мешка, а вторая дробь равна вероятности появления желтого шара из второго мешка. Таким образом, если обозначить событием A появление желтого шара из первого мешка, событием B появление желтого из второго, то произведение AB этих событий состоит в том, что оба шара окажутся желтыми. Кроме того, оказывается, что $\frac{10 \cdot 7}{22 \cdot 29} = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{10}{22} \cdot \frac{7}{29}$.

На самом деле равенство $P(AB) = P(A)P(B)$ имеет место не во всех случаях, а только для независимых событий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

События называются независимыми, если наступление любого из них не влияет на вероятность наступления другого.

Например, события в примере 1 независимы, поскольку вероятность появления желтого шара из одного мешка никак не зависит от того, появился желтый из другого мешка или нет. Независимость мы будем устанавливать путем логических рассуждений на основании условий испытаний.

ТЕОРЕМА 1.

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей: $P(AB)=P(A)P(B)$.

Пример 2

Два стрелка производят по одному выстрелу каждый по своей мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна $0{,}8$, вероятность попадания второго равна $0{,}7$. Какова вероятность того, что оба стрелка попадут в цель?

Решение. Если обозначить событием A попадание первого стрелка, а событием B попадание второго стрелка, то событие «оба стрелка попадут в цель» является произведением событий A и B. События A и B независимы, следовательно, $P(AB)=P(A)P(B)=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56$.

Теорема обобщается на большее число независимых событий: вероятность произведения попарно независимых событий равна произведению их вероятностей.

Пример 3

Игральный кубик подбрасывается три раза. Какова вероятность, что в первый раз выпадет 5, во второй раз выпадет число, кратное 3, а в третий раз выпадет нечетное число?

Решение. Вероятность выпадения числа 5 на первом броске равна $\frac{1}{6}$. Так на 3 делятся числа 3 и 6, то вероятность выпадения числа, кратного 3, на втором броске равна $\frac{2}{6}$. Так как имеется всего 3 нечетных числа, не превосходящих 6, то вероятность выпадения нечетного числа на третьем броске равна $\frac{3}{6}$. Так результаты бросков не зависят друг от друга, то вероятность наступления всех трех событий равна произведению $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{36}$.

Еще раз напоминаем, что формула $P(AB)=P(A)P(B)$ имеет место только для независимых событий.

Например, если события A и B несовместны, то $P(AB)=0$. Действительно, так как A и B несовместны, то они оба одновременно не могут иметь места, т.е. два события не могут наступить вместе, событие AB является невозможным. Вероятность невозможного события, очевидно, равна нулю.

5.2 Вероятность суммы событий

Пример 4

Пусть одно испытание состоит в трехкратном подбрасывании монеты: записывается 0, если выпадает «орел», и записывается 1, если выпадает «решка». Таким образом, множество всех равновозможных исходов состоит из 8 последовательностей длины 3: $\{000, 001, 010, 100, 110, 101, 011, 111\}$. Будем говорить, что произошло событие A, если выпала одна из последовательностей $\{000, 001, 010\}$. Будем говорить, что произошло событие B, если выпала одна из последовательностей $\{001, 010, 100, 110\}$. Какова вероятность суммы событий $A+B$?

Решение. Сумма событий A и B есть просто объединение множеств A и B. Это значит, что сумму событий ищем как множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B, т. е. элементов, принадлежащих или событию A, или событию B, или им обоим. В данном примере $A+B=\{000, 001, 010, 100, 110\}$.

Заметим также, что множество A состоит из 3 элементов, множество B состоит из 4 элементов. Если к трем элементам множества $A=\{000, 001, 010\}$ формально добавить четыре элемента множества $B=\{001, 010, 100, 110\}$, то получится набор из семи элементов $\{000, 001, 010, 001, 010, 100, 110\}$. Заметим, что элементы произведения $AB=\{001, 010\}$ встречаются в этом наборе по два раза. Если один «лишний» раз удалить, то как раз останется сумма $A+B=\{000, 001, 010, 100, 110\}$. Если обозначить количество элементов множества A как $|A|$, то получается равенство, $5=3+4-2$, т.е. $|A+B|=|A|+|B|-|AB|$. Если разделить обе части данного равенства на общее количество исходов, то получится: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Можно доказать, что равенство $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ имеет место для любых событий, которые могут произойти в результате одного испытания. Данное утверждение сформулируем в виде теоремы без доказательства в общем виде.

ТЕОРЕМА 2.

Для любых событий A и B, которые могут произойти в результате данного испытания, выполняется равенство $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

ТЕОРЕМА 3.

Для любых несовместных событий A и B, которые могут произойти в результате данного испытания, выполняется равенство $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Доказательство теоремы 2 получается сразу из теоремы 1, если принять во внимание равенство $P(AB)=0$ для несовместных событий, о котором говорилось в предыдущем пункте. Теорема о вероятности суммы несовместных событий справедлива также и для большего числа событий.

ТЕОРЕМА 4.

Для любых попарно несовместных событий, которые могут произойти в результате данного испытания, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий.

ТЕОРЕМА 5.

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

Докажем теорему 5. Пусть A и $\overline{A}$ – два противоположных события. С одной стороны, так как сумма противоположных событий является достоверным событием, то $P\left(A+\overline{A}\right)=1$. С другой стороны, по теореме 3 имеем $P(A)+P\left(\overline{A}\right)=P\left(A+\overline{A}\right)$. Следовательно, $P(A)+P\left(\overline{A}\right)=1$. Доказательство окончено. На практике эта формула применяется в виде $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)$.

Пример 5

Два стрелка производят по одному выстрелу каждый по своей мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,8, вероятность попадания второго равна 0,7.

а) Какова вероятность того, что оба стрелка попадут в цель?

б) Какова вероятность того, что первый стрелок промахнется, а второй попадет?

в) Какова вероятность того, что попадет только один стрелок?

г) Какова вероятность того, что хотя бы один из стрелков попадет?

Решение. Обозначим событие A – первый стрелок попал, B – второй стрелок попал. Тогда события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ состоят в промахах первого и второго стрелков соответственно.

а) Ответ на этот вопрос мы дали в примере 2 данного параграфа: поскольку мы имеем дело с независимыми событиями, то $P(AB)=P(A)P(B)=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56$, где произведение событий AB состоит в попадании обоих.

б) Событие, состоящее в промахе первого и попадании второго есть произведение $\overline{A}B$. Так как A и B независимы, то $\overline{A}$ и B тоже независимы. Следовательно, $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$. По теореме 5 о вероятности суммы противоположных событий $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}8=0{,}2$. Далее: $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=0{,}2\cdot0{,}7=0{,}14$.

в) Если ровно один стрелок попал, значит, произошло одно из событий: «попал первый и промахнулся второй» или «первый промахнулся, второй попал». Событие «попал первый и промахнулся второй» является произведением $A\overline{B}$; событие «первый промахнулся, второй попал» является произведением $\overline{A}B$. Следовательно, событие «ровно один стрелок попал» является суммой $A\overline{B}+\overline{A}B$, причем события $A\overline{B}$ и $\overline{A}B$ являются несовместными. По теореме 3 о сумме несовместных событий имеем:

$$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=$$

$$=0{,}8\cdot0{,}3+0{,}2\cdot0{,}7=0{,}38.$$

г) Способ 1. Событие «хотя бы один из стрелков попал» есть, очевидно, сумма событий A и B (см. определение суммы событий в п 1.3 данной главы). По теореме 2 получаем $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}8+0{,}7-0{,}56=0{,}94$.

Способ 2. Событие «хотя бы один из стрелков попал» есть сумма несовместных событий «попал первый и промахнулся второй», «первый промахнулся, второй попал», «попали оба»: $A\overline{B}+\overline{A}B+AB$. Никакие два из этих событий не могут случиться одновременно. Следовательно, мы имеем дело с несовместными событиями и по теореме 4 получаем:

$$P(A\overline{B}+\overline{A}B+AB)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB)=$$

$$=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)+P(A)P(B)=$$

$$=0{,}8\cdot0{,}3+0{,}2\cdot0{,}7+0{,}8\cdot0{,}7=0{,}94.$$

Способ 3. Событие C «хотя бы один из стрелков попал» противоположно событию $\overline{C}$ «не попал ни один». Следовательно, по теореме 5 имеет место равенство $P(C)=1-P(\overline{C})$. Событие $\overline{C}$ «не попал ни один» есть произведение независимых событий $\overline{A}$ «промах первого стрелка» и события $\overline{B}$ «промах второго», т.е. $P(\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})=0,2\cdot 0,3=0,06$. Таким образом, $P(C)=1-P(\overline{C})=1-0,06=0,94$.

Задачи

Часть 1

1. В одном мешке находятся 5 желтых шаров и 6 зеленых. В другом мешке находится 7 желтых и 11 зеленых. Наудачу достают по одному шару из каждого мешка. Какова вероятность, что:
а) оба шара окажутся желтыми;
б) оба шара окажутся одноцветными?

2. Испытание состоит в трехкратном подбрасывании игрального кубика. Какова вероятность того, что все три раза выпадет нечетное число?

3. В каждом из трех ящиков имеется по 12 изделий. В первом ящике из 12 деталей 2 являются бракованными. Во втором и третьем ящиках находится соответственно 1 и 3 бракованных изделия. Из ящиков достали по одной детали. Какова вероятность того, что:
а) все три детали оказались бракованными;
б) все детали оказались без брака;
в) деталь из первого ящика оказалась бракованной, а две другие оказались без брака;
г) среди трех деталей ровно одна оказалась бракованной?

4. (3) Два стрелка соревнуются по стрельбе из лука. Вероятность попадания первый стрелок в цель равна 0,8; вероятность попадания второго стрелка в цель равна 0,9. Если каждый из стрелков сделает по одному выстрелу, то какова вероятность того, что:
а) оба стрелка попадут в цель;
б) первый попадет в цель;
в) попадет только второй;
г) оба стрелка промахнутся?

5. (4) Для того, чтобы стать участником заключительного этапа Кубка мира, спортсмену необходимо принять участие в трех независимых отборочных этапах. Вероятность того, что спортсмен станет побе-

дителем первого из этих трех этапов, равна 0,8. Каждый следующий этап сложнее предыдущих, поэтому вероятность победить каждый раз уменьшается на 0,1. Участие во втором и третьем этапах не зависит от результатов выступления на предыдущих. Какова вероятность того, что:
а) спортсмен станет победителем во всех трех отборочных этапах;
б) спортсмен станет победителем только во втором и третьем этапах;
в) спортсмен не станет победителем ни в одном из этапов;
г) спортсмен станет победителем в каких-то двух из трех этапов?

Часть 2

6. В одном мешке находятся 8 желтых шаров и 6 зеленых. В другом мешке находится 6 желтых и 11 зеленых. Наугад достают по одному шару из каждого мешка. Какова вероятность, что:
а) шар из первого мешка окажется желтым, а из второго окажется зелёным;
б) оба шара окажутся разного цвета?

7. Испытание состоит в трехкратном подбрасывании игрального кубика. Какова вероятность того, что случатся все три события: первый раз выпадет нечетное число, во второй раз выпадет не меньше 5, в третий раз выпадет 2?

8. В каждом из трех ящиков находится по 20 спелых и 10 неспелых яблок. Наугад достают по одному яблоку из каждого ящика. Какова вероятность того, что:
а) яблоки из первого и третьего ящика окажутся неспелыми, а яблоко из второго ящика – спелым;
б) среди трех вынутых яблок ровно 2 окажутся неспелыми?

9. Стрелок попадает в цель с вероятностью 0,7. Он произвел 2 выстрела. Какова вероятность того, что стрелок:
а) оба раза промахнулся;
б) ровно один раз промахнулся;
в) оба раза попал в цель?

10. Робин Гуд попадает из лука с 30 шагов в тыкву с вероятностью 0,9, а в яблоко – с вероятностью 0,4. Он собирается стрелять один раз в тыкву, а второй раз – в яблоко. Какова вероятность, что:
а) он не попадет в тыкву;
б) он попадет в яблоко;

в) он попадет ровно в яблоко;
г) он попадет в точности в один предмет;
д) он попадет хотя бы в один из предметов?

11. Год 2037. Предстоит четвертьфинал Лиги чемпионов. Встречаются команды «Кайрат» – «Реал Мадрид», «Манчестер Юнайтед» – «Бавария», «Челси» – «Ювентус», «Зенит» – «Аякс». Вероятность того, что первая команда в паре победит вторую, равна соответственно $0{,}9$, $0{,}2$, $0{,}5$ и $0{,}3$. Определите вероятность следующих событий:
а) «Кайрат» не сможет выиграть у «Реал Мадрид»;
б) «Кайрат» не сможет выиграть у «Реал Мадрид» и «Манчестер Юнайтед» победит «Баварию»;
в) «Кайрат» выиграет у «Реал Мадрид», «Ювентус» не проиграет команде «Челси», а голландцы не проиграют россиянам.

12. Сколько корней имеет уравнение $|x-1|=x^2$?

13. Если затраты на покупку огурцов возросли на 92%, а цена килограмма огурцов увеличилась на 60%, то насколько возрос вес купленных огурцов?

Ответы:

1. а) $\frac{35}{198}$; б) $\frac{101}{198}$. **2.** $\frac{1}{8}$. **3.** а) $\frac{1}{288}$; б) $\frac{55}{96}$; в) $\frac{11}{96}$; г) $\frac{103}{288}$.

4. а) $0{,}72$; б) $0{,}08$; в) $0{,}18$; г) $0{,}02$.

5. а) $0{,}336$; б) $0{,}084$; в) $0{,}024$; г) $0{,}452$. **6.** а) $\frac{44}{119}$; б) $\frac{62}{119}$.

7. $\frac{1}{36}$. **8.** а) $\frac{2}{27}$; б) $\frac{2}{9}$. **9.** а) $0{,}09$; б) $0{,}42$; в) $0{,}49$.

10. а) $0{,}1$; б) $0{,}4$; в) $0{,}04$; г) $0{,}58$; д) $0{,}94$. **11.** а) $0{,}1$; б) $0{,}02$; в) $0{,}252$.

12. 2. **13.** на 20%.

МНОЖЕСТВА НА ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

Бог создал целые числа, все остальное — дело рук человека.
Леопольд Кронекер

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, … и т. д. называются **натуральными.** Наименьшее натуральное число – это единица. Иногда говорят, что натуральные числа – это числа, которые мы используем для подсчета предметов. Однако предметов не может быть бесконечно много, в то время как натуральный ряд бесконечен. Множество натуральных чисел обозначается буквой N.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \ldots\}$$

Если к множеству натуральных чисел добавить нуль и все числа, противоположные натуральным, то получится множество **целых** чисел:

$$Z = \{\ldots, -11, -10, -9, -8, -7, -6, 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Все числа, равные отношениям $\frac{p}{q}$, где p – некоторое целое, а q – некоторое натуральное число, образуют множество **рациональных** чисел Q.

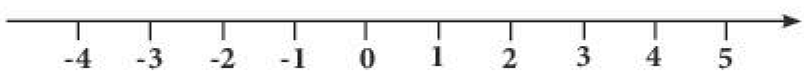
$$Q = \{\frac{p}{q}, \text{ где } p - \text{целое}, q - \text{натуральное}\}.$$

Примеры рациональных чисел: $\frac{3}{7}, -\frac{3}{7} = \frac{-3}{7}, 0 = \frac{0}{1}, -10 = \frac{-10}{1}$.

Ясно, что каждое натуральное число является целым, каждое целое – рациональным.

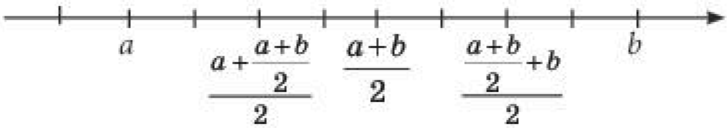
Нетрудно понять, что при умножении, сложении и делении рациональных чисел снова получаются рациональные числа.

Вы уже знаете, что числа удобно представлять на числовой оси в виде точек.



Заметим, что **между любыми двумя рациональными числами (точками) существует бесконечно много других рациональных чисел (точек).** Действительно, если a и b – рациональные числа $a<b$, то $a<\frac{a+b}{2}<b$, причем $\frac{a+b}{2}$ – тоже рациональное. Геометрически точка

$\dfrac{a+b}{2}$ – середина отрезка от a до b. Тогда между a и $\dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{a+b}{2}$ и b также можно найти хотя бы по одной рациональной точке, и т.д до бесконечности.



Аналогично можно показать, что **какой бы малый по длине отрезок числовой оси мы не рассматривали, на нем найдется бесконечно много рациональных точек.** Это, однако, не означает, что любая точка на числовой прямой соответствует какому-нибудь рациональному числу. Например, длина стороны квадрата, площадь которого равна 2, не выражается в виде дроби $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in Z$. Такую длину, как вы знаете, мы обозначаем $\sqrt{2}$. Таким образом, $\sqrt{2}$ – не рациональное число. Все числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными. Иррациональных чисел в некотором смысле больше рациональных. Объединение всех рациональных и иррациональных чисел дает множество действительных чисел R, $R = (-\infty; +\infty)$. Множество R иногда называют еще множеством вещественных чисел.

Странно слышать, когда в ответ на вопрос: «Сколько чисел между 1 и 3?» отвечают: «Между числами 1 и 3 находится одно число. Это число – два».

Между любыми двумя числами a и b, такими, что $a < b$, существует бесконечно много чисел. Например, запись $x \in (1; 3)$ означает, что рассматриваются все числа x, которые больше чем 1, но меньше чем 3. Заметим, что в множестве (1; 3) невозможно указать наибольший и наименьший элемент. Действительно, если бы в таком множестве число c оказалось бы наибольшим, то число $\frac{c+3}{2}$ таково, что $1 < c = \frac{c+c}{2} < \frac{c+3}{2} < \frac{3+3}{2} < 3$. Это значит, что число $\frac{c+3}{2}$ также принадлежит множеству и в то же время оно больше, чем c. Но мы предполагали, что наибольшим является число c. Противоречие.

Запись $x \in [1; 3]$ указывает, что рассматриваются все числа, не меньше чем 1, и в то же время не больше чем 3. В таком множестве 1 – наименьший элемент, 3 – наибольший. Таким образом, для любых чисел a и b таких, что $a < b$:

$$x \in (a; b) \Leftrightarrow a < x < b$$
$$x \in [a; b] \Leftrightarrow a \le x \le b$$

$$x \in [a; b) \Leftrightarrow a \le x < b$$

$$x \in (a; b] \Leftrightarrow a < x \le b$$

$$x \in (a; +\infty) \Leftrightarrow x > a$$

$$x \in [a; +\infty] \Leftrightarrow x \ge a$$

$$x \in (-\infty; b] \Leftrightarrow x \le b$$

$$x \in (-\infty; b] \Leftrightarrow x < b.$$

Пересечением двух множеств A *и* B называется совокупность элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B. Обозначение: $A \cap B$.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \in B.$$

Объединением двух множеств A и **B** называется совокупность элементов, принадлежащих **хотя бы одному** из двух множеств A или B. Обозначение: $A \cup B$.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ или } x \in B.$$

Заметим, что любой элемент пересечения принадлежит объединению.

Аналогично определяется пересечение и объединение большего числа множеств.

В школьном курсе решение **систем** условий (уравнений, неравенств и т.д.) будет означать поиск **пересечения множеств**, удовлетворяющих условиям; решение **совокупности** условий (уравнений, неравенств и т.д.) будет означать поиск **объединения множеств**, удовлетворяющих данным условиям.

*Приведем пример. Большинство учеников в классе занимаются футболом или волейболом. К множеству **A** отнесем всех учеников, которые занимаются футболом. К множесту **B** отнесем тех учеников, которые занимаются волейболом. Тогда **пересечением множеств** A и **B** является совокупность всех учеников, которые занимаются обоими видами спорта. **Объединением множеств** A и **B** явлется совокупность всех учеников, которые занимаются хотя бы одним видом, то есть или футболом, или волейболом, или обоими видами.*

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

А. Формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$
$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab;$$
$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab.$$

В. Основные тригонометрические формулы:

1. Формулы, связывающие функции одного аргумента:

$\sin^2 x+\cos^2 x=1;$ $\quad \operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x};$ $\quad \operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x};$

$\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1;$ $\quad 1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x};$ $\quad 1+\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

2. Формулы сложения:

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;$ $\quad \sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y;$

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;$ $\quad \cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y;$

$\operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y};$ $\quad \operatorname{tg}(x-y)=\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}.$

3. Формулы двойного аргумента:

$\sin 2x=2\sin x\cos x;$ $\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x;$

$tg2x=\dfrac{2tgx}{1-tg^2x}.$

4. Формулы тройного аргумента:

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

5. Формулы понижения степени:

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$;

$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$; $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$.

6. Формулы преобразования суммы в произведение:

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$; $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$;

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$; $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$;

$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$; $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$.

7. Формулы преобразования произведения в сумму:

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$; $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$;

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$.

8. Формулы, использующие тангенс половинного аргумента:

$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; $\cos x \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}$;

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

C. Неравенства, содержащие знак абсолютной величины:

1. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$

2. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$

СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

Русский	Казахский	Английский
Арифметика		
Арифметический квадратный корень	Арифметикалық квадрат түбір	Arithmetical square root
Возведение в степень	Дәрежеге шығару	Involution, powering
Делимое	Бөлінгіш	Dividend
Делитель	Бөлгіш	Divisor
Квадрат числа	Санның квадраты	Square of number
Корень n-й степени	n-ші дәрежелі түбір	n-th root
Куб числа	Санның кубы	Cube of number
Основание степени	Дәреженің негізі	Base of power
Остаток	Қалдық	Remainder, residual
Подкоренное выражение	Түбір астындағы өрнек	Radical expression
Показатель степени	Дәреженің көрсеткіші дәреже көрсеткіші	Exponent, index of power
Признак делимости	Бөлінгіштік белгілері	Criterion of divisibility, divisibility test, test for divisibility
Произведение	Көбейтінді	Product
Радикал	Радикал	Radical
Разложение на множители	Көбейткіштерге жіктеу	Factorisation
Разность	Айырма	Difference between
Свойства степени	Дәреженің қасиеттері	Power properties
Степень	Дәреже	Power
Степень с рациональным показателем	Рационал көрсеткішті дәреже	Power with rational exponent
Сумма	Қосынды	Sum
Частное	Бөлінді	Quotient
Вектор		
Вектор	Вектор	Vector
Векторный метод	Векторлық әдіс	Vectorial method
Длина вектора	Вектордың ұзындығы	Lenght of vector
Коллинеарные векторы	Коллинеар векторлар	Collinear vectors
Компланарные векторы	Компланар векторлар	Coplanar vectors
Координаты вектора	Вектордың координаттары	Vector coordinates

Координаты точки	Нүктенің координаталары	Position of a point
Линейная комбинация векторов	Векторлардың сызықтық комбинациясы	Linear combination of vectors
Проекция вектора	Вектордың проекциясы	Vector projection
Противоположные векторы	Қарама-қарсы векторлар	Opposite vectors
Радиус-вектор	Радиус-вектор	Radius-vector
Скалярное произведение	Скаляр көбейтінді	Scalar product
Сонаправленные векторы	Бағыттас векторлар	Codirectional vectors
Составляющие вектора	Вектордың құраушылары	Vector component
Величина		
Бесконечно большая величина	Шексіз үлкен шама	Infinite
Бесконечно малая величина	Шексіз аз шама	Infinitesimal
Больше	Үлкен	Greater
Меньше	Кіші	Less
Неотрицательный	Теріс емес	Nonnegative
Неположительный	Оң емес	Non-positive
Отрицательные числа	Теріс сандар	Negative number
Отрицательный	Теріс	Negative
Положительный	Оң	Positive
Выражение		
Буквенное выражение	Әріпті өрнек	Literal expression
Двучлен	Екімүше	Binomial
Дробные выражения	Бөлшекті өрнектер	Fractional expression
Значение выражения	Өрнектің мәні	Value of expression
Квадрат двучлена	Екімүшенің квадраты	Square of binomial
Квадратный трехчлен	Квадрат үшмүше	Quadratic trinomial
Коэффициент	Коэффициент	Coefficient
Область допустимых значений переменной	Айнымалының мүмкін мәндерінің облысы	Admitted region of variable, tolerance range of variable
Освобождение от иррациональностей	Иррационалдықтан құтылу	Rationalization
Преобразование выражений	Өрнектерді түрлендіру	Expression transformation
Числовое выражение	Сандық өрнек	Numeral expression
Вычисление		
Приближенное вычисление	Жуық есептеу	Approximate calculation

Геометрия

Геометрическая фигура	Геометриялық фигура	Geometric figure
Гомотетия	Гомотетия	Homothety
Длина отрезка	Кесіндінің ұзындығы	Length of segment
Задачи на построение	Салу есептері	Construction problems
Инверсия	Инверсия	Inversion
Кривая	Қисық	Curve
Криволинейная трапеция	Қисық-сызықты трапеция	Curvilinear trapezoid
Ломаная	Сынық	Polygonal curve
Луч	Сәуле	Ray
Наклонная	Көлбеу	Slanting line
Образ	Бейне	Image
Общий перпендикуляр	Ортақ перпендикуляр	Common perpendicular
Опорная прямая	Тірек түзуі	Line of support, supporting line
Ортогональное проектирование	Ортогональ кескіндеу	Orthogonal projection
Осевая симметрия	Өстік симметрия	Rotational symmetry
Отношение отрезков	Кесінділердің қатынасы	Segment ratio
Отрезок	Кесінді	Segment
Параллельное проектирование	Параллель кескіндеу	Parallel projection
Параллельные прямые	Параллель түзулер	Parallel lines
Параллельный перенос	Параллель көшіру	Parallel shift, parallel translation
Перпендикуляр	Перпендикуляр	Perpendicular
Плоская фигура	Жазық фигура	Plane figure
Построение	Салу	Construct
Преобразование плоскости	Жазықтықты түрлендіру	Plane transformation
Признак перпендикулярности	Перпендикулярлық белгісі	Test of perpendiculars
Признаки параллельности	Параллельдік белгілері	Test of parallels
Проекция	Проекция	Projection
Прямая	Түзу	Line
Прямая линия	Түзу сызық	Straight line
Секущая	Қиюшы	Secant
Серединный перпендикуляр	Орта перпендикуляр	Middle perpendicular
Сторона	Қабырға	Side
Центр гомотетии	Гомотетия центрі	Ray center
Центр масс	Масса центрі	Centre of mass

График		
Построение графика	График салу	Construction of graph
Преобразование графика	Графиктерді түрлендіру	Graph transformation
Преобразование графика функции	Функцияның графигін түрлендіру	Function graph transformation
Дробь		
Десятичная дробь	Ондық бөлшек	Decimal fraction
Доля	Үлес	Fracture
Дробная часть	Бөлшек бөлігі	Fractional part
Знаменатель	Бөлім	Denominator
Неправильная дробь	Бұрыс бөлшек	Unproper fraction
Несократимая дробь	Қысқартылмайтын бөлшек	Irreducible fraction
Обыкновенная дробь	Жай бөлшек	Vulgar fraction
Правильная дробь	Дұрыс бөлшек	Proper fraction
Рациональная дробь	Рационал бөлшек	Rational fraction
Сокращение дробей	Бөлшекті қысқарту	Reduction of fractions
Целая часть	Бүтін бөлігі	Integer part
Числитель	Алым	Numerator
Индукция		
Половина	Жарты	Half
Треть	Үштен бірі	Third
Индукция		
Базис индукции	Индукция базисі	Basis of induction
Индуктивное предположение	Индуктивті болжау	Induction hypothesis
Индуктивный шаг	Индуктивті қадам	Induction step
Метод математической индукции	Математикалық индукция әдісі	Method of mathematical induction
Инструмент		
Линейка	Сызғыш	Rule
Транспортир	Транспортир	Protractor
Циркуль	Циркуль	Compass
Интеграл		
Интегрирование по частям	Бөліктен интегралдау	Partial integration
Неопределенный интеграл	Анықталмаған интеграл	Indefinite integral
Правила интегрирования	Интегралдау ережелері	Integration rule
Таблица интегралов	Интегралдау кестесі	Integral table

Комбинаторика		
Перестановка	Орналастыру	Commutation
Размещение	Алмастыру	Disposition
Сочетание	Теру	Combination
Факториал	Факториал	Factorial
Комплексные числа		
Действительная часть	Нақты бөлігі	Real part
Комплексное число	Комплекс сан	Complex number
Корень из комплексного числа	Комплекс санның түбірі	Root of complex number
Мнимая часть	Жорамал бөлігі	Imaginary part
Модуль комплексного числа	Комплекс санның модулі	Complex number modulus, modulus of complex number
Сопряженное комплексное число	Түйіндес комплекс сан	Complex conjugate
Тригонометрическая форма комплексного числа	Комплекс санның тригонометриялық түрі	Goniometric form of complex number
Координаты		
Абсцисса	Абсцисса	Abscissa
Координатная ось	Координаталық өс	Coordinate axis
Координатный луч	Координаттық сәуле	Coordinate ray
Метод координат	Координаттар әдісі	Coordinate method
Ордината	Ордината	Ordinate
Четверть (координатная)	Ширек	Quadrant
Кривые		
Вершина параболы	Параболаның төбесі	Vertex of parabola
Гипербола	Гипербола	Hyperbola
Логарифмы		
Основание логарифма	Логарифм негізі	Logarithmic base
Многоугольник		
Вершина	Төбесі	Vertex
Вписанный	Іштей сызылған	Inscribed
Вписанный многоугольник	Іштей сызылған көпбұрыш	Inscribed polygon
Выпуклая фигура	Дөңес фигура	Convex figure
Диагональ	Диагональ	Diagonal
Квадрат	Квадрат	Square
Многоугольник	Көпбұрыш	Polygon

Описанный многоугольник	Сырттай сызылған көпбұрыш	Circumscribed polygon
Параллелограмм	Параллелограмм	Parallelogram
Правило параллелограмма	Параллелограмм ережесі	Parallelogram law, parallelogram rule
Правильный многоугольник	Дұрыс көпбұрыш	Regular polygon
Прямоугольник	Тік төртбұрыш	Rectangle
Ромб	Ромб	Rhomb, rhombus
Трапеция	Трапеция	Trapezium
Многочлен		
Многочлен	Көпмүше	Polynomial
Однородный многочлен	Біртекті көпмүше	Homogeneous polynomial
Одночлен	Бірмүше	Monomial
Свободный член	Бос мүше	Absolute term
Симметрический многочлен	Симметриялық көпмүше	Symmetric polynomial
Старший коэффициент	Үлкен коэффициент	Leading coefficient
Трехчлен	Үшмүше	Trinomial
Формула n-го члена	n-ші мүшесінің формуласы	n-th term formula
Множество		
Бесконечное множество	Шексіз жиын, ақырсыз жиын	Infinite set
Конечное множество	Шекті жиын, ақырлы жиын	Finite set, finite aggregate
Множество	Жиын	Set
Подмножество	Ішкі жиын	Subset
Пустое множество	Бос жиын	Empty collection, empty set
Элемент множества	Жиынның элементі	Set member
Неравенство		
Двойное неравенство	Қос теңсіздік	Two-sided inequality
Доказательство неравенств	Теңсіздікті дәлелдеу	Inequality proving
Метод интервалов	Интервалдар әдісі	Interval method
Неравенство	Теңсіздік	Inequality
Неравенство о среднем	Орталар туралы теңсіздіктер	Mean value inequality
Свойства неравенств	Теңсіздіктің қасиеттері	Inequality properties
Система неравенств	Теңсіздік жүйелері	Simultaneous inequalities
Совокупность неравенств	Теңсіздік жиынтығы	Set of inequalities

Объем		
Кубический метр	Куб метр	Cubic meter
Кубический сантиметр	Куб сантиметр	Cubic centimeter
Объем	Көлем	Volume
Окружность		
Диаметр	Диаметр	Diameter
Длина окружности	Шеңбердің ұзындығы	Perimeter of circle
Дуга	Доға	Arc
Касательная	Жанама	Tangent
Круг	Дөңгелек	Circle
Окружность	Шеңбер	Circumference
Площадь круга	Дөңгелектің ауданы	Area of a circle
Сегмент	Сегмент	Segment
Сектор	Сектор	Sector
Уравнение окружности	Шеңбердің теңдеуі	Circumference equation
Хорда	Хорда	Chord
Центральный угол	Центрлік бұрыш	Central angle
Определение		
Аксиома	Аксиома	Axiom
Алгоритм	Алгоритм	Algorithm
Бином	Бином	Binomial
Достаточное условие	Жеткілікті шарт	Sufficient condition
Начальное условие	Бастапқы шарт	Starting condition
Необходимое условие	Қажетті шарт	Necessary condition
Принцип Дирихле	Дирихле принципі	Dirichlet principle
Площадь		
Квадратный метр	Шаршы метр	Square meter
Квадратный сантиметр	Шаршы сантиметр	Square centimeter
Площадь	Аудан	Area
Равновеликие фигуры	Тең шамалы фигуралар	Equal figures
Равносоставленные фигуры	Тең құрамдас фигуралар	Decomposition-equal figures
Подобие		
Подобие	Ұқсастық	Similarity
Подобные треугольники	Ұқсас үшбұрыштар	Similar triangles
Подобные фигуры	Ұқсас фигуралар	Similar figures
Признак подобия	Ұқсастық белгілері	Test of similarity

Подстановка		
Метод подстановки	Алмастыру әдісі (тәсілі)	Method of substitution
Подстановка	Алмастыру	Substitution
Последовательность		
Последовательность	Тізбек	Sequence
Рекуррентное соотношение	Рекуррентті арақатынас	Recurrence relation
Предел		
Замечательный предел	Тамаша шек	Remarkable limit
Односторонние пределы	Біржақты шектер	One-sided limit
Предел последовательности	Тізбек шегі	Limit of sequence
Прогрессия		
Арифметическая прогрессия	Арифметикалық прогрессия	Arithmetical progression
Бесконечная геометрическая прогрессия	Шектеусіз геометриялық прогрессия	Infinite geometrical progression
Геометрическая прогрессия	Геометриялық прогрессия	Geometrical progression
Знаменатель геометрической прогрессии	Геометриялық прогрессияның еселігі	Geometric ratio
Прогрессия	Прогрессия	Progression
Разность арифметической прогрессии	Арифметикалық прогрессияның айырымы	Arithmetical ratio
Производная		
Производная	Туынды	Derivative
Производная обратной функции	Кері функцияның туындысы	Derivative of reciprocal function
Производная сложной функции	Күрделі функцияның туындысы	Derivative of combined function, derivative of complicated function
Пропорция		
Коэффициент пропорциональности	Пропорционалдық коэффициент	Coefficient of proportionality
Обратная пропорциональность	Кері пропорционал	Reciprocal proportionality
Пропорциональное деление	Пропорционал бөлу	Proportional division
Пропорция	Пропорция	Proportion

Прямая пропорциональность	Тура пропорционал	Direct proportionality
Размер		
Длина	Ұзындық	Length
Ширина	Ені	Width
Решение		
Множество решений	Шешімдер жиыны	Solution set
Общее решение	Жалпы шешім	General solution
Решение треугольников	Үшбұрышты шешу	Solution of triangle
Частное решение	Дербес шешім	Particular solution
Сокращенное умножение		
Куб разности	Айырманың кубы	Cube of difference
Куб суммы	Қосындының кубы	Cube of sum
Разность кубов	Кубтардың айырмасы	Cube difference
Сумма кубов	Кубтардың қосындысы	Sum of cubes
Формула квадрата разности	Айырманың квадратының формуласы	Square of difference formula
Формула квадрата суммы двух выражений	Екі өрнектің қосындысының квадратының формуласы	Square of sum formula
Формула разности квадратов	Квадраттар айырмасының формуласы	Square difference formula
Формулы сокращенного умножения	Қысқаша көбейту формулары	Formulas of abridged multiplication
Статистика		
Достоверное событие	Нақты жағдай	Persistent event
Медиана ряда	Қатардың медианасы	Median of series
Мода ряда	Қатардың модасы	Mode of series
Размах ряда	Қатардың ауқымы	Spread of series
Среднее арифметическое	Арифметикалық ортасы	Arithmetic average, arithmetical mean arithmetic average
Элементарное событие	Элементарлық жағдай	Elementary event, simple event
Текстовые задачи		
Время	Уақыт	Time
Движение	Қозғалыс	Movement
Масштаб	Масштаб	Coverage

Объем работы	Жұмыс көлемі	Work content, volume of work
Производительность	Өнімділік	Productivity
Путь	Жол	Path, way
Расстояние	Арақашықтық	Distance
Скорость	Жылдамдық	Speed
Смесь	Қоспа	Mixture
Сплав	Қорытпа	Alloy
Средняя скорость	Орташа жылдамдық	Average speed
Боковая поверхность	Бүйір бет	Lateral surface
Выпуклые многогранники	Дөңес көпжақтар	Convex polyhedrons
Касание со сферой	Сферамен жанасу	Contact with sphere
Конус	Конус	Cone
Многогранник	Көпжақ	Polyhedron
Многогранный угол	Көпжақты бұрыш	Polyhedral angle
Описанные многогранники	Сырттай сызылған көпжақ	Circumscribed polyhedron
Опорная плоскость	Тірек жазықтығы	Plane of support, supporting plane
Осевое сечение	Осьтік қима	Axial section
Параллелепипед	Параллелепипед	Parallelepiped
Пересечение шара	Шардың қиылысуы	Ball crossing
Пирамида	Пирамида	Pyramid
Поверхность	Бет	Surface
Полная поверхность	Толық бет	Complete surface
Правильная пирамида	Дұрыс пирамида	Regular pyramid
Призма	Призма	Prism
Пространственные фигуры	Кеңістік фигуралары	Space figures
Прямой цилиндр	Тік цилиндр	Straight cylinder
Развертка	Жазба	Involute, evolvent
Ребро	Қыры	Edge
Сечение	Қима	Cut set, section
Сечение конуса	Конустың қимасы	Cone section
Сечение многогранника	Көпжақтың қимасы	Polyhedron section
Скрещивающиеся прямые	Айқас түзулер	Skew lines
Сфера	Сфера	Sphere
Тела вращения	Айналу денелері	Body of revolution
Усеченная пирамида	Қиық пирамида	Truncated pyramid

Цилиндр	Цилиндр	Cylinder
Шар	Шар	Ball
Эллипс	Эллипс	Ellipse
Тождество		
Тождественное преобразование	Тепе-тең түрлендіру	Identity substitution
Тождество	Тепе-теңдік	Identity
Точка		
Множество точек	Нүктелер жиыны	Set of points
Неподвижные точки	Қозғалмайтын нүктелер	Fixed points
Точка	Нүкте	Point
Точка перегиба	Иілу нүктесі	Point of inflection
Треугольник		
Биссектриса	Биссектриса	Bisector
Высота	Биіктік	Altitude
Гипотенуза	Гипотенуза	Hypotenuse
Катет	Катет	Cathetus
Медиана	Медиана	Median
Неравенство треугольника	Үшбұрыштың теңсіздігі	Triangle inequality
Ориентация	Бағдар	Orientation
Ортоцентр	Ортоцентр	Orthocenter
Основание	Табаны	Base
Периметр	Периметр	Perimeter
Правило треугольника	Үшбұрыш ережесі	Triangle law
Признаки равенства треугольников	Үшбұрыштардың теңдік белгілері	Test of triangles equality
Прямоугольный треугольник	Тікбұрышты үшбұрыш	Right-angled triangle
Равнобедренный треугольник	Теңбүйірлі үшбұрыш	Isosceles triangle
Равносторонний треугольник	Теңқабырғалы үшбұрыш	Equilateral triangle
Треугольник	Үшбұрыш	Triangle
Тригонометрия		
Единичная окружность	Бірлік шеңбер	Unit circumference
Косинус	Косинус	Cosine
Котангенс	Котангенс	Cotangent
Линия котангенсов	Котангенстер сызығы	Line of cotangents
Линия тангенсов	Тангенстер сызығы	Line of tangents

Обратные тригонометрические функции	Кері тригонометриялық функциялар	Inverse trigonometric functions
Основное тригонометрическое тождество	Негізгі тригонометриялық тепе-теңдік	Fundamental trigonometric identity
Простейшие тригонометрические уравнения	Қарапайым тригонометриялық теңдеулер	Elementary trigonometric equations
Синус	Синус	Sine
Тангенс	Тангенс	Tangent
Формулы двойного аргумента	Қос аргументтің формулалары	Double-argument formula
Формулы половинного аргумента	Жарты аргументтің формулары	Half-argument formula
Формулы приведения	Келтіру формулалары	Reduction formulas
Угол		
Вертикальные углы	Вертикаль бұрыштар	Vertical angles
Вписанный угол	Іштей сызылған бұрыш	Inscribed angle
Градус	Градус	Degree
Двугранный угол	Екіжақты бұрыш	Dihedral angle
Накрест лежащие углы	Айқыш бұрыштар	Alternate angles
Односторонние углы	Тұстас бұрыштар	Unilateral angles
Острый угол	Сүйір бұрыш	Sharp angle
Плоский угол	Жазық бұрыш	Plane angle
Плоскость	Жазықтық	Plane
Поворот	Бұру	Rotating
Прямой угол	Тік бұрыш	Right angle
Радиан	Радиан	Radian
Развернутый угол	Жазыңқы бұрыш	Flat angle, straight angle
Смежные углы	Сыбайлас бұрыштар	Adjacent angles
Соответственные углы	Сәйкес бұрыштар	Corresponding angles
Трехгранный угол	Үшжақты бұрыш	Trihedral angle
Тупой угол	Доғал бұрыш	Blunt angle
Угол	Бұрыш	Angle
Уравнение		
Биквадратное уравнение	Биквадрат теңдеу	Biquadratic equation
Графический метод	Графиктік әдіс	Graphic method
Двойной аргумент	Қос аргумент	Double argument
Дискриминант	Дискриминант	Discriminant

Дифференциальные уравнения	Дифференциалдық теңдеулер	Differential equation
Замена переменной	Айнымалыны алмастыру	Change of variable
Иррациональное уравнение	Иррационал теңдеу	Irrational equation
Квадратное уравнение	Квадрат теңдеу	Quadratic equation
Корень уравнения	Теңдеудің түбірі	Root of equation
Метод вспомогательного аргумента	Қосымша аргумент әдісі	Method of auxiliary argument
Параметр	Параметр	Parameter
Переменная	Айнымалы	Variable
Потеря корней	Түбір жоғалту	Loss of roots
Приобретение посторонних корней	Бөгде түбірдің пайда болуы	Acquisition of extraneous root
Равносильные уравнения	Мәндес теңдеулер	Equivalent equations
Рациональное уравнение	Рационал теңдеу	Rational equation
Рациональные корни уравнения	Теңдеудің рационал түбірлері	Rational roots of equations
Симметрические уравнения	Симметриялық теңдеулер	Symmetrical equations
Угловой коэффициент	Бұрыштық коэффициент	Angular coefficient
Уравнение	Теңдеу	Equation
Уравнение второго порядка	Екінші ретті теңдеу	Second order equation
Уравнение плоскости	Жазықтықтың теңдеуі	Equation of plane
Уравнение прямой	Түзудің теңдеуі	Equation of line
Формулы понижения степени уравнения	Дәрежені төмендету формулары	Formula for depression of equation
Целые корни уравнения	Теңдеудің бүтін түбірлері	Integer roots of equations
Функция		
Асимптота	Асимптота	Asymptote
Вертикальная асимптота	Тік асимптота	Vertical asymptote
Взаимно обратные функции	Өзара кері функциялар	Mutually inverse functions
Вогнутость	Ойыс	Concavity
Возрастание	Өсуі	Increase
Возрастающая функция	Өспелі функция	Increasing function
Вторая производная	Екінші ретті туынды	Second derivative
Горизонтальная асимптота	Көлденең асимптота	Horizontal asymptote
График	График	Graph, plot

Дифференциал	Дифференциал	Differential
Дробно-линейная функция	Бөлшек-сызықтық функция	Homographic function
Квадратичная функция	Квадраттық функция	Quadratic function
Композиция функций	Функциялар композициясы	Composition of functions
Линейная функция	Сызықтық функция	Linear function, affine function
Монотонность	Бірсарындылық	Monotony
Наибольшее значение функции	Функцияның ең үлкен мәні	Maximum
Наименьшее значение функции	Функцияның ең кіші мәні	Minimum
Наклонная асимптота	Көлбеу асимптота	Oblique asymptote
Непрерывность	Үзіліссіздік	Continuity
Нечетная функция	Тақ функция	Odd function
Область значений функции	Функцияның мәндерінің жиыны	Range
Область определения функции	Функцияның анықталу аймағы	Function domain
Первообразная	Алғашқы функция	Primitive
Период	Период	Period
Показательная функция	Көрсеткіштік функция	Exponential function
Половинный аргумент	Жарты аргумент	Half-argument
Приращение	Өсімше	Increment
Промежуток, интервал	Аралық, интервал	Interval
Прообраз	Алғашқы бейне	Inverse image, original
Разрывность	Үзілістік	Discontinuity
Степенная функция	Дәрежелік функция	Power function
Тригонометрические функции	Тригонометриялық функциялар	Trigonometric functions
Тройной аргумент	Үшінші аргумент	Triple argument
Убывание	Кемуі	Decrease
Убывающая функция	Кемімелі функция	Decreasing function
Функция	Функция	Function
Четная функция	Жұп функция	Even function
Числовые функции	Сандық функциялар	Numerical function
Экстремум	Экстремум	Extremum
Цифра		
Разряд	Разряд	Digit, position
Цифра	Цифр	Numeral, figure

Число

Взаимно простые числа	Өзара жай сандар	Coprime numbers, relative primes
Действительные числа	Нақты сандар	Real numbers
Иррациональные числа	Иррационал сандар	Irrational numbers
Кратное	Еселік	Multiple
Множество натуральных чисел	Натурал сандар жиыны	Set of natural numbers
Множество рациональных чисел	Рационал сандар жиыны	Set of rational numbers
Множество целых чисел	Бүтін сандар жиыны	Set of integer numbers
Модуль числа	Санның модулі	Module, modulus
Натуральные числа	Натурал сандар	Natural numbers
Нечетность	Тақтық	Oddness
Отношение чисел	Сандардың қатынасы	Numbers ratio
Положительные числа	Оң сандар	Positive numbers
Простые числа	Жай сандар	Prime numbers
Противоположные числа	Қарама-қарсы сандар	Opposite numbers
Рациональные числа	Рационал сандар	Rational numbers
Решить уравнение	Теңдеуді шешу	Solve equation
Смешанное число	Аралас сан	Mixed number
Составные числа	Құрама сандар	Composite numbers
Сравните числа	Сандарды салыстыру	Compare numbers
Четность	Жұптық	Evenness
Число	Сан	Number

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Веб-сайт: www.esepterqory.kz
2. Сборник задач по математике: Под ред.: М.И. Сканави. – М., 2005.
3. Элементар математика есептерінің жинағы. Т.Н. Бияров, М.Т. Молдабеков. – Алматы: Кітап, 1992.
4. 3000 конкурсных задач. Е.Д. Куланин и др. – М., 2003.
5. Веб-сайт: problem.ru
6. Задачи международного конкурса Кенгуру.
7. Википедия – свободная энциклопедия. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org

Оқулық басылым *Учебное издание*

Олег Владимирович Пак
Дархан Ардақұлы
Елена Викторовна Ескендирова

АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

1-бөлім
Қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы жалпы білім беретін мектептің 10-сынып оқушыларына арналған оқулық

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Часть 1
Учебник для учащихся 10 класса общеобразовательной школы общественно-гуманитарного направления

Арнайы редакторы / спецредактор – З. Н. Киябаева
Дизайн – Е. А. Ибрашов
Суретін салған / Художник – Б. Б. Булатов
Мұқаба / Обложка: Е. С. Жузбаев, Б. Б. Булатов, А. М. Әбдіразах
Беттеуші / Верстка – М. С. Шелекбаева

Басуға 22.07.2019 ж. қол қойылды.
Пішімі 70x100 $^1/_{16}$. Есептік баспа табағы 7,84.
Шартты баспа табағы 19,35. Офсеттік басылым.
Әріп түрі «Open Sans». Офсеттік қағаз.
Таралымы 1300 дана. Тапсырыс № 2158.

Сапасы жөнінде мына мекемеге хабарласыңыз:
Қазақстан Республикасы,
050012, Алматы қаласы, Жамбыл көшесі, 111-үй,
«АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ» ЖШС,
тел. +7 (727) 250 29 58, факс +7 (727) 292 81 10.
e-mail: info@almatykitap.kz

Сапа және қауіпсіздік стандарттарына сай.
Сертификация қарастырылмаған.
Сақтау мерзімі шектелмеген.

Подписано в печать 22.07.2019 г.
Формат 70x100 $^1/_{16}$. Уч.-изд. л. 7,84.
Усл. печ. л. 19,35. Печать офсетная.
Гарнитура «Open Sans». Бумага офсетная.
Тираж 1300 экз. Заказ № 2158

С претензиями по качеству обращаться:
Республика Казахстан,
050012, г. Алматы, ул. Жамбыла, 111,
ТОО «АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ»,
тел. +7 (727) 250 29 58; факс +7 (727) 292 81 10.
e-mail: info@almatykitap.kz

Соответствует всем стандартам качества и безопасности.
Сертификация не предусмотрена.
Срок годности не ограничен.

Қазақстанда басылды
«Реформа» ЖШС
Алматы қ., Ақбұлақ ы-ауд., Шарипов к-сі, 40Б-үй

Отпечатано в Казахстане
ТОО «Реформа»
г. Алматы, мкр. Акбулак, ул. Шарипова, д. 40Б