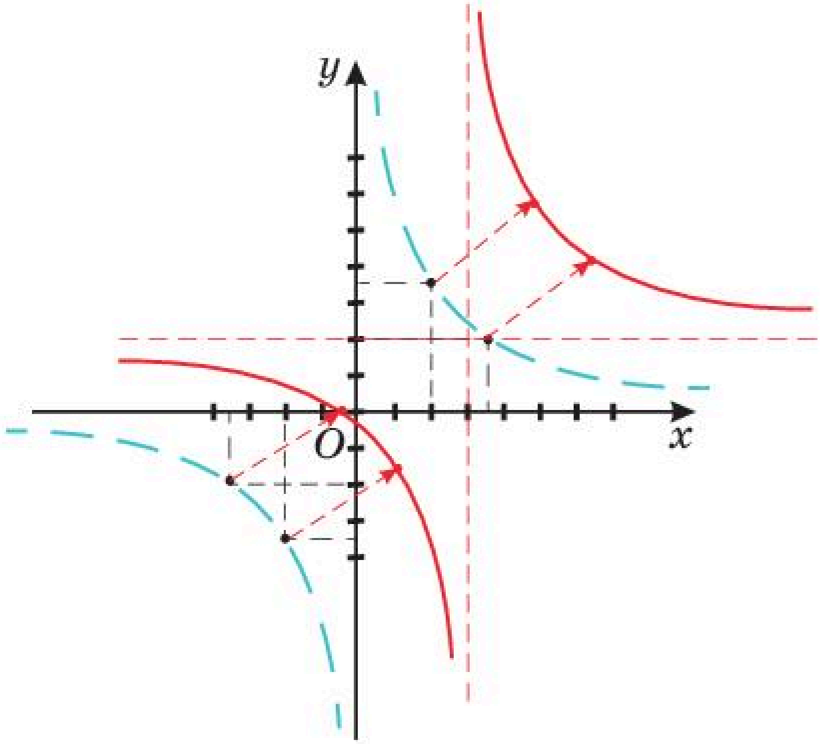


АЛГЕБРА

и начала анализа

Часть 2

Учебник для учащихся 10 класса общеобразовательной школы общественно-гуманитарного направления

Рекомендовано Министерством образования и науки Республики Казахстан

О. В. Пак
Д. Ардақұлы
Е. В. Ескендирова

АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ
2019

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72
П 13

Данный учебник рассчитан как на работу в классе, так и на самостоятельное изучение материала. Теоретический материал учебника содержит примеры и упражнения. Решение примеров можно рассматривать сразу при первом чтении. Упражнения предназначены для самостоятельного решения. Цель упражнений: либо подготовить учащихся к более эффективному восприятию новой темы, либо закрепить полученные навыки. В любом случае требуется сначала попытаться справиться с упражнениями самостоятельно, и только затем обращаться к их решениям, которые обычно расположены ниже по тексту. Курсивом даны авторские ремарки, поясняющие основной текст.

Задачи на закрепление навыков расположены в конце каждого теоретического раздела и разделены на две части. Часть 1 предназначена для работы в классе. Часть 2 содержит задания, аналогичные по своему идейному содержанию заданиям из Части 1, и предназначена для домашней работы. Кроме того, в Части 2 содержатся задачи на развитие критического и логического мышления (выделены фиолетовым цветом), задания на развитие функциональной грамотности (желтым) и примеры на повторение (зеленым). Все задания в учебнике классифицированы по уровням сложности от 1 до 6. Уровень сложности дан в скобках сразу после номера задания.

Пак О. В.
П 13 **Алгебра и начала анализа:** Учебник для учащихся 10 класса общеобразовательной школы общественно-гуманитарного направления. Ч. 2. / О. В. Пак, Д. Ардақұлы, Е. В. Ескендирова. – Алматы: АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ, 2019. – 168 с., ил.

ISBN 978-601-01-3958-9 общ.
Часть 2 – 168 с., ил.
ISBN 978-601-01-3800-1

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72

ISBN 978-601-01-3800-1 – (часть 2)
ISBN 978-601-01-3958-9 общ.

Дорогие десятиклассники!

Великий английский философ и математик Бертран Рассел говорил: «Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой – красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим произведениям искусства».

Вместе с учебником, который вы держите сейчас в руках, вам предстоит сделать еще один шаг в постижении самой древней и великой науки. Новый для вас курс называется «Алгебра и начала анализа». В нем на более строгом уровне рассматриваются понятие функции, ее свойства, производная функции, а также некоторые вопросы теории вероятности. Мы с вами поймем, каким образом функции описывают окружающий нас мир.

Зачем нужна математика? Бытовая техника, которой мы пользуемся, силовые агрегаты, имеющие колоссальную мощность, дома, в которых мы живем, самолеты в небе и корабли в море, сотовый телефон в твоей руке, торты, которые печет твоя мама – ни одно творение рук человеческих не обходится без математических расчетов в той или иной степени. Практически все современные науки используют математику в своих теоретических или практических исследованиях.

Зачем нужна математика лично вам? Давайте будем откровенными друг с другом: мало кому из вас после окончания школы или вуза понадобится умение, например, упрощать тригонометрические выражения. Но вы не можете не согласиться с тем, что умения думать, рассуждать, сопоставлять факты друг с другом и делать логические выводы, имеющие практическую пользу – очень нужные в жизни качества. Сообразительность, смекалка, изобретательность помогают человеку справиться с любыми проблемами и стать успешной личностью. Умения понимать другого человека и правильно выражать свою мысль необходимы для эффективного общения людей друг с другом. Именно занятия математикой развивают в человеке все эти качества.

Кроме того, какую бы специальность в жизни вы не выбрали, вам придется иметь дело с числами. А еще мы надеемся, что среди вас найдутся те, кто будут заниматься математикой профессионально.

Учебник рассчитан на сознательных учащихся. Теоретическая часть каждого параграфа содержит не только примеры, но и упражнения. Самостоятельная работа над упражнениями необходима для глубокого понимания нового материала.

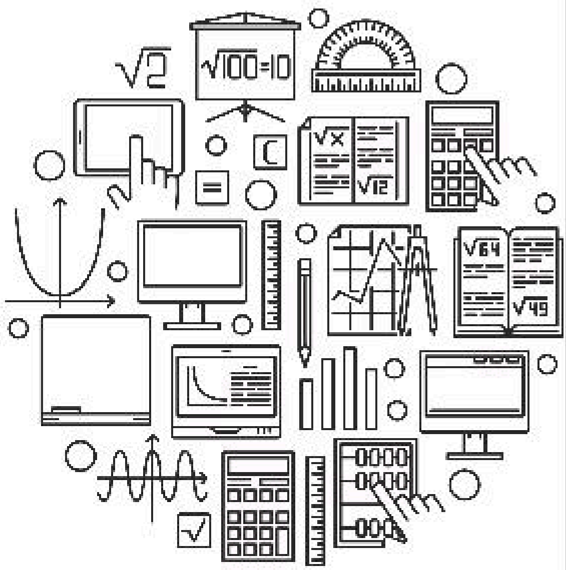
Успехов в работе!

С уважением, авторы

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 5

ПРОИЗВОДНАЯ



У людей, усвоивших великие принципы математики, одним органом чувств больше, чем у простых смертных.
Ч. Дарвин

Объективная реальность – это окружающий нас мир и его свойства, существующие независимо от нашего сознания. Субъективная реальность – это отражение объективной реальности в нашем сознании, то есть мир и его свойства такие, какими мы их себе представляем. Зенон Элейский (V век до н. э.) пытался доказать, что окружающий нас мир не поддается изучению при помощи научных моделей, поскольку объективная и субъективная реальности совершенно различны. Для доказательства этого тезиса он сформулировал 40 апорий (апория – парадокс, противоречие, софизм), 9 из которых дошли до нашего времени. В своих апориях Зенон рассматривал время, пространство и движение. Основной вопрос: можно ли время и пространство делить до бесконечности, или они состоят из неделимых частиц, дальнейшее деление которых невозможно? Иными словами: непрерывны или дискретны время и пространство? В некоторых из апорий Зенон исходит из первой возможности и путем логических рассуждений приходит к противоречию. В других он исходит из второй возможности и опять приходит к противоречию. Отсюда великий философ делает вывод, что мир в целом непознаваем. Приведем три наиболее известные апории: «Дихотомия», «Ахиллес и черепаха» и «Стрела».

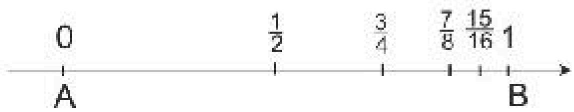
«Дихотомия» *(деление пополам): «Для того, чтобы попасть из одной точки пространства A в другую точку B, тело сначала должно преодолеть половину расстояния от A до B. Но до того, как оно преодолеет половину пути, тело должно преодолеть половину половины.*

До того момента, как оно преодолеет половину половины, тело должно преодолеть половину половины. И так далее до бесконечности. Следовательно, движение никогда не начнется». Второй вариант той же апории: «Для того, чтобы попасть из точки A в точку B, тело сначала должно преодолеть половину расстояния от A до B. После этого оно должно преодолеть половину остатка. После того, как оно преодолеет половину остатка, прежде, чем достичь точки B, тело должно преодолеть половину следующего остатка. И так далее: после преодоления половины очередного остатка пути, прежде чем достичь точки B, тело должно преодолеть половину следующего остатка. Но этот процесс бесконечен. Следовательно, движение никогда не закончится».

«Ахиллес и черепаха»*: «Быстроногий Ахиллес никогда не догонит неторопливую черепаху, если в начале движения черепаха находится впереди Ахиллеса. Допустим, Ахиллес бежит в десять раз быстрее, чем черепаха, и находится позади нее на расстоянии в тысячу шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха в ту же* *сторону проползёт сто шагов. Когда Ахиллес пробежит сто шагов, черепаха проползёт ещё десять шагов, и так далее. Процесс будет продолжаться до бесконечности, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху».*

***«Стрела»**: «Летящая стрела неподвижна, так как в каждый момент времени она покоится, а поскольку она покоится в каждый момент времени, то она покоится всегда».*

В первых двух апориях время и пространство предполагаются непрерывными, а в третьей – дискретными. На данный момент у нас нет возможности подробно рассматривать все аспекты поставленных Зеноном проблем. Остановимся на математической стороне вопроса. Расстояние от A до B во втором варианте «Дихотомии» будем считать единицей, отрезок AB будем считать расположенным на координатной прямой так, что точка A имеет координату 0, а точка B имеет координату 1. В момент, когда тело преодолеет половину пути от A до B, его координата x_1 равна $\frac{1}{2}$, остаток y_1 пути равен $\frac{1}{2}$; в момент, когда тело преодолеет половину остатка, его координата станет равна $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, остаток y_2 пути равен $\frac{1}{4}$; $x_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$, $y_3=\frac{1}{8}$. И так далее: $x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$, $y_n=\frac{1}{2^n}$.



Нетрудно увидеть, что чем больше значение n, тем меньше отличается от 1; с другой стороны, какое бы большое значение n мы не рассмотрели, остаток пути останется ненулевой положительной величиной. Мы не будем вслед за Зеноном отрицать очевидный факт: если тело движется с постоянной скоростью, то оно все-таки достигнет точки B. И для того, чтобы построенная математическая модель не противоречила нашему опыту, необходимо **принять**, что сумма **бесконечного** количества положительных слагаемых равна единице: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$. Математики говорят, что **ряд** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ является **сходящимся**, а также, что последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ **имеет предел**, равный 1. При этом пространство и время считаются непрерывными, то есть считается, что любой временной или пространственный отрезок можно делить на меньшие части до бесконечности. В рамках построенной модели апория Зенона уже не содержит противоречия. Ведь если тело движется с постоянной скоростью и на половину пути от A до B оно затратит время T, то на половину остатка оно затратит время $\frac{T}{2}$, на половину следующего остатка – $\frac{T}{4}$, и так далее...

Время на все движение от А до В равно $T+\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\frac{T}{8}+\ldots+\frac{T}{2^n}+\ldots=2T$. Движение все-таки закончится.

Аналогичную непротиворечивую модель, использующую понятие предела, можно построить для апории «Ахиллес и черепаха». Однако следует отметить, что наше построение непротиворечивой математической модели все-таки было основано на субъективном опыте и привлечении весьма смутных представлений о бесконечности. Поэтому мы не можем считать, что решили общую проблему, поставленную великим философом почти две с половиной тысячи лет назад. Яростные споры по поводу апорий Зенона не утихают в научном мире и по сегодняшний день. Масла в огонь подлили современные достижения **квантовой механики** (раздела физики, изучающей элементарные частицы), которые показали, что в микромире на расстояниях, сравнимых с размерами атомного ядра, роль дискретности резко повышается.

Разумеется, в душе нам не хотелось бы соглашаться с Зеноном Элейским хотя бы потому, что пессимизм его выводов неизбежно приводит к пассивному бездействию: зачем пытаться понять то, чего мы не сможем понять в принципе? В данной главе мы приступаем к изучению **математического анализа**. Эффективность и полезность научных моделей, построенных в рамках этого раздела математики, трудно переоценить.

§1 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Математика – это наука, брошенная человечеством на исследование мира в его возможных вариантах.
Иммануил Кант

1.1 Определение предела функции в точке

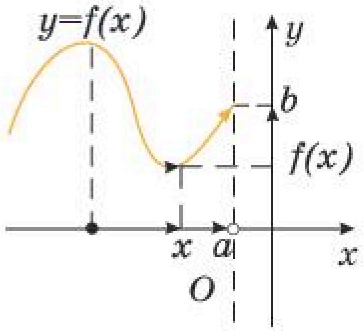


Рис. 1

Пусть a – некоторое фиксированное число.

Выражение «x стремится к a слева» (обозначение: «$x \to a-0$») будем понимать следующим образом: «Значения x увеличиваются, неограниченно приближаясь к a; значения строго меньше чем a, но становятся почти неотличимы от a».

Выражение «x стремится к a справа» (обозначение: «$x \to a+0$») будем понимать следующим образом: «Значения x уменьшаются, неограниченно приближаясь к a; значения x строго больше чем a, но становятся почти неотличимыми от a».

Если из условия $x \to a-0$ следует, что значения некоторой функции $f(x)$ становятся почти неотличимыми от числа b, то будем говорить, что «предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a слева, равен b» (рис. 1).

При этом допускается, что при некоторых или всех значениях выполняется равенство $f(x) = b$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$.

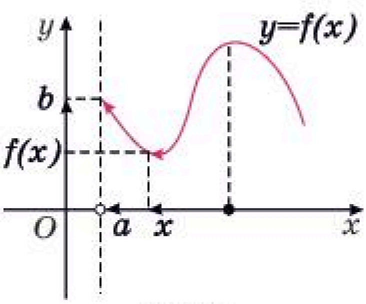


Рис. 2

Если из условия $x \to a+0$ следует, что значения некоторой функции становятся почти неотличимыми от числа b, то будем говорить, что «предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a справа, равен b. При этом допускается, что при некоторых или всех значениях x выполняется равенство $f(x)=b$ (рис. 2).

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$.

Пример 1

Дана функция $y = f(x)$, $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x+1}$.
Область определения: $x \neq -1$.
Если $x \neq -1$, то $f(x) = x(x-1)$. График функции $y = f(x)$ – парабола с «выколотой» точкой (–1; 2). В этой ситуации $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = 2$.

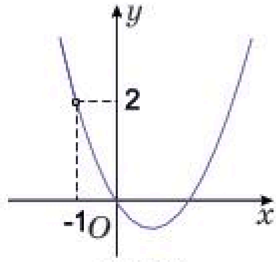


Рис. 3

Если при $x \to a - 0$ значения $f(x)$ неограниченно возрастают, то будем писать; $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$ (рис. 4) и говорить: предел функции $y=f(x)$ при x, стремящемся к слева, равен плюс бесконечности.

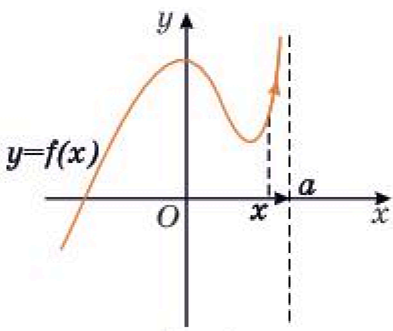


Рис. 4

Аналогично определяются еще 3 случая: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$ (рис. 5), $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$ (рис. 6) и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$ (рис. 7).

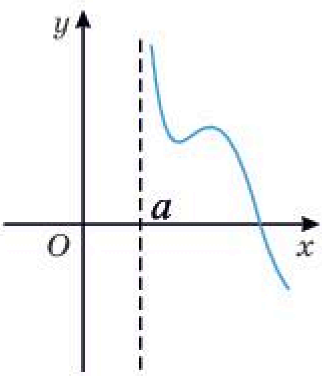


Рис. 5

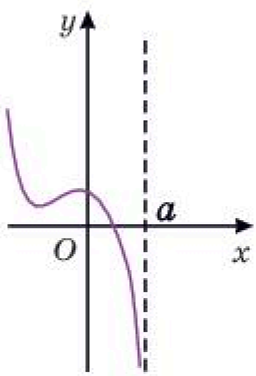


Рис. 6

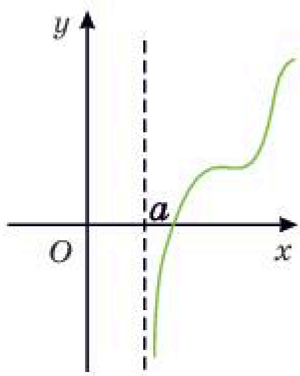


Рис. 7

Записи «$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$» и «$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$» будем называть левосторонним и правосторонним пределами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Если существует такое число b, что $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$, то будем говорить, что существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ («предел $f(x)$ при x, стремящемся к a, равен b»); во всех остальных случаях будем говорить, что $f(x)$ не имеет предела в точке.

Из определения односторонних (левостороннего и правостороннего) пределов вытекает, что запись «$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$» следует понимать так: «Чем меньше x отличается от a, тем меньше $f(x)$ отличается от b независимо от способа приближения к a. Если x почти не отличается от a, то $f(x)$ почти неотличимо от b». В примере 1 (рис. 3) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$. Приведем без доказательства интуитивно понятные свойства пределов.

1) Для любой константы c имеет место равенство

$\lim\limits_{x\to a}(c\cdot f(x))=c\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$,

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$,

3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)$,

4) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$,

5) Если $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ и $g(x)\neq 0$ в некоторой окрестности точки a, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

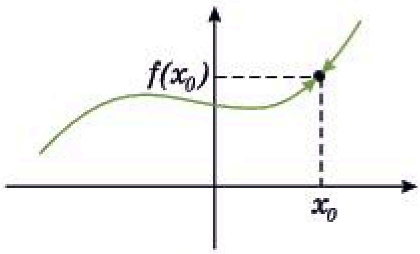
6) Для непрерывных функций (определение будет дано ниже) $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to a} g(x))$.

В каждой из приведенных формул предполагается, что все пределы, значения которых участвуют в формуле, существуют и не равны $\pm\infty$.

1.2 Непрерывность функции в точке и на интервале

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

Если для некоторой функции в некоторой точке существуют оба односторонних предела и они равны значению функции в данной точке, то говорят, что функция непрерывна в данной точке.



$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$$

Рис. 8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.

Функцию будем называть непрерывной на интервале, если ее графиком на данном интервале является линия без разрывов.

Нетрудно видеть, что если функция непрерывна на интервале, то она непрерывна в каждой внутренней точке этого интервала. Обратное утверждение тоже верно: если функция непрерывна в каждой внутренней точке интервала, то она непрерывна на всем интервале. Основной смысл непрерывности на интервале в том, что малые, близкие к нулю, изменения аргумента влекут за собой малые, близкие к нулю, изменения значения функции. Значение функции не может измениться «скачком». Отсюда становится понятным, что сумма, разность и произведение непрерывных на некотором интервале функций есть снова непрерывные функции. Отношение непрерывных функций непрерывно во всех точках интервала, за исключением «нулей» знаменателя.

*Иногда говорят: **функция непрерывна, если ее график можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги.** Но это, ни предыдущее определения не являются строгими в математическом смысле, но дают очень хорошее представление о поведении непрерывных функций. Например, становится очевидной следующая очень полезная теорема:*

ТЕОРЕМА 1.

Если функция непрерывна на отрезке $[a;b]$, $f(a)f(b)<0$, то на интервале $[a;b]$ существует хотя бы одна точка c такая, что $f(c)=0$.

Иными словами, если непрерывная на отрезке функция имеет разные знаки на его концах, то уравнение $f(x)=0$ имеет хотя бы один корень на этом отрезке. Действительно, пусть для определенности $f(a)<0$ и $f(b)>0$. Это означает, что точка A с координатами $(a, f(a))$ лежит ниже оси Ox, а точка B с координатами $(b, f(b))$ лежит выше оси Ox (нарисуйте сами). По условию, $f(x)$ – непрерывна на множестве $[a;b]$, ее график – непрерывная линия. Любая попытка соединить точки A и B линией, «не отрывая карандаша от бумаги», приводит к необходимости пересечь ось Ox хотя бы один раз. Вот и все.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.

Если функция $f(x)$ не является непрерывной в некоторой точке $x=a$, то говорят, что точка a является точкой разрыва функции $f(x)$.

1.3 Предел функции на бесконечности

Выражение «x стремится к бесконечности» мы будем обозначать «$x\to\infty$» и понимать следующим образом: «значения переменной неограниченно растут; для любого большого числа M значения переменной x в конце концов становятся больше, чем M».

Если из условия «$x\to\infty$» следует, что значения функции $f(x)$ неограниченно растут, то есть начиная с некоторого значения переменной x значения функции $f(x)$ больше любого наперед заданного числа, то мы будем говорить, что предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности, равен бесконечности и писать:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Аналогично понимаются следующие случаи:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

Например, для любого многочлена $P(x)$ ненулевой четной степени с положительным старшим коэффициентом выполняются соотношения $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=+\infty.$

Например:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4-x^2\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4-x^2\right)=+\infty$ (рис. 9).

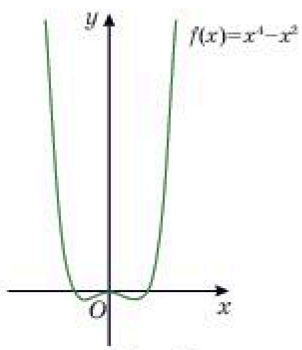


Рис. 9

Для любого многочлена $P(x)$ нечетной степени с положительным старшим коэффициентом выполняются соотношения: $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=-\infty$ (рис. 10).

Например:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x^2+x-1\right)=+\infty,$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+x^2+x-1\right)=-\infty$ (рис. 10).

Напоминаем, что многочленом называется функция вида $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$ где $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ – некоторые числа, $a_n\neq 0$, n – степень многочлена. Например, известный вам квадратный трехчлен – это многочлен степени 2.

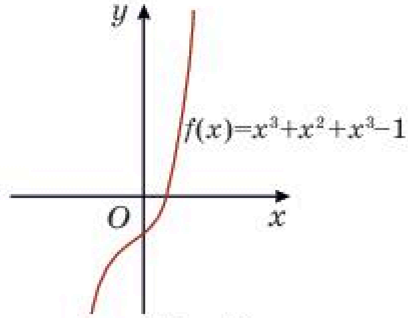


Рис. 10

Если из условия $x\to\infty$ следует, что значения $f(x)$ становятся неограниченно близкими к некоторому числу $b\neq\pm\infty$, то есть при всех очень больших значениях x значения f(x) почти неотличимы от числа b, то мы будем говорить, что при x, стремящемся к бесконечности, $f(x)$ стремится к b и писать: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

Аналогично понимается запись: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$.

Например, $\lim\limits_{x\to\infty} arctg\, x=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} arctg\, x=-\frac{\pi}{2}$ (рис. 11)

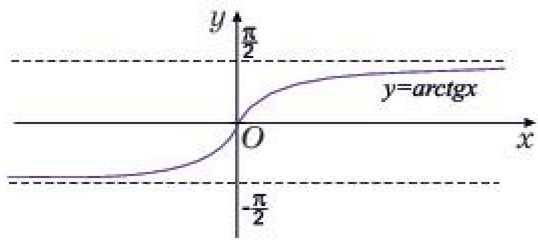


Рис. 11

Задачи

Часть 1

1. (1) Постройте график функции $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$.

а) Найдите область определения функции и множество ее значений.

б) Пользуясь графиком, определите $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)$. Обоснуйте существование предела функции $f(x)$ в точке $a=-1$ и найдите $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.

в) Укажите промежутки непрерывности функции и точки разрыва.

г) Определите $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. (2) Постройте график функции $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

а) Найдите область определения функции и множество ее значений.

б) Пользуясь графиком, определите $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)$.

в) Пользуясь графиком, определите $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.

г) Укажите промежутки непрерывности функции и точки разрыва.

д) Определите $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. (1) Определите $\lim\limits_{x\to-1+0} \arcsin x$, $\lim\limits_{x\to1-0} \arcsin x$.

4. (2) Функция $y=\operatorname{sign} x$ (знак числа x) определяется следующим образом:

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases}0, \text{ если } x=0;\\ \dfrac{x}{|x|}, \text{ если } x\neq0.\end{cases}$$

а) Постройте график функции. Найдите область определения функции и множество ее значений.

б) Определите $\lim\limits_{x\to+\infty} (\operatorname{sign} x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (\operatorname{sign} x)$.

в) Определите $\lim\limits_{x\to0+0} (\operatorname{sign} x)$, $\lim\limits_{x\to0-0} (\operatorname{sign} x)$.

5. (1) Существуют ли $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$? Если нет, то почему? Если да, то чему они равны?

6. (3) Функция $y=f(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}x+1+\pi, \text{ если } x\in(-\infty;-1),\\ \arccos x, \text{ если } x\in(-1;1),\\ x^2, \text{ если } x\in(1;+\infty)\end{cases}$$

а) Постройте график функции $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)$, найдите область определения и множество значений функции.

б) Определите $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)$.

в) Существуют ли $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$? Если нет, то почему? Если да, то чему они равны?

г) Определите $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
д) Укажите промежутки непрерывности функции и точки разрыва.

Часть 2

7. (1) Постройте график функции $f(x)=\dfrac{-x^2+1}{x+1}$.

а) Найдите область определения функции и множество ее значений.
б) Пользуясь графиком, определите $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)$. Обоснуйте существование предела функции $f(x)$ в точке $a=-1$ и найдите $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.
в) Укажите промежутки непрерывности функции и точки разрыва.
г) Определите $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

8. (2) Постройте график функции $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$.

а) Найдите область определения функции и множество ее значений.
б) Пользуясь графиком, определите $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)$.
в) Пользуясь графиком, определите $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.
г) Укажите промежутки непрерывности функции и точки разрыва.
д) Определите $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

9. (1) Определите $\lim\limits_{x\to-1+0} \arccos x$, $\lim\limits_{x\to1-0} \arccos x$.

10. (3) Рассмотрим функцию $y=f(x)$, где $f(x)=3\operatorname{sign}(x-2)$.

а) Постройте график функции. Найдите область определения функции и множество ее значений.
б) Определите $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
в) Определите $\lim\limits_{x\to2+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)$.
г) Существует ли $\lim\limits_{x\to2} f(x)$?

11. (1) Существуют ли $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x$? Если нет, то почему? Если да, то чему они равны?

12. (3) Функция $y=f(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{x+2}, \text{ если } x\in(-\infty;-2),\\ \arcsin\dfrac{1}{2}x, \text{ если } x\in[-2;2],\\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } x\in(2;+\infty).\end{cases}$$

а) Постройте график функции $y=f(x)$, найдите область определения и множество значений функции.

б) Определите $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2+0} f(x)$.

в) Существуют ли $\lim\limits_{x\to2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$? Если нет, то почему? Если да, то чему они равны?

г) Определите $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

д) Укажите промежутки непрерывности функции и точки разрыва.

1.4 Неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Пусть для некоторых функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняются соотношения $\lim\limits_{x\to a} f(x)=p$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=q$, где p и q – некоторые числа, причем $q\neq0$.

Тогда по свойству $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ имеем равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{p}{q}$.

Нетрудно также сообразить, что если, например, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=50000000000$, а $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

Предположим теперь, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Чему может быть равно значение предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, то говорят, что в пределе $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ имеет место неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Аналогичная неопределенная ситуация возникает, если одновременно $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$, то говорят, что в пределе $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет место неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Заметим, что в обоих определениях возможно формальное равенство $a=\pm\infty$. Вычисление предела в случае неопределенности называется **раскрытием неопределенности**.

Рассмотрим, например, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$. Здесь $f(x)=x^3-1$ и $g(x)=x-1$. Заметим, что $f(1)=g(1)=0$, причем обе функции непрерывны в точке $x=1$. Тогда $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=0$, в пределе $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ имеет место неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$. Раскроем данную неопределенность:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3.$$

Это значит, что при x, очень близких к 1, выполняется приблизительное равенство $f(x)\approx 3g(x)$.

Рассмотрим теперь $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^3-1}{(x-1)^2}$. Здесь $f(x)=x^3-1$ и $g(x)=(x-1)^2$ при $x\to 1-0$. Заметим, что $f(1)=g(1)=0$. Снова возникает неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$. Однако на этот раз:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x^2+x+1)}{(x-1)}=-\infty,$$

так как $\lim\limits_{x\to 1-0}(x^2+x+1)=3$ и $\lim\limits_{x\to 1-0}(x-1)=0-0$.

Рассмотрим, наконец, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^3-1)^2}{x-1}$.

В данном случае $f(x)=(x^3-1)^2$ и $g(x)=x-1$. Снова $f(1)=g(1)=0$, однако:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x^3-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-1)(x^2+x+1)^2=0.$$

Какие выводы можно сделать из результата данного вычисления? С одной стороны, при $x\to1$ значения обеих функций $f(x)=(x^3-1)^2$ и $g(x)=x-1$ стремятся к нулю. Однако с другой стороны, при x, очень близких к 1, значения функции $f(x)$ ничтожно малы по сравнению со значениями функции $g(x)$.

Как видите, при раскрытии неопределенности может получиться любое число. Поэтому и говорят: неопределенность.

Для практического вычисления пределов используются свойства пределов. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ (подстановка $x=a$ в функцию дает результат). Если же a является точкой разрыва и в точке a возникает неопределенность, то требуется с помощью алгебраических преобразований раскрыть неопределенность. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2

Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Так как в точке $x=0$ не возникает неопределенности, то просто вычислим значение функции в точке $x=0$.

Ответ: 1.

Пример 3

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Прямая подстановка $x=1$ дает неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

Используя формулу разложения квадратного трехчлена на множители, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена, разложим многочлены на множители: $2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$ и $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

Тогда получим: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{1+1}{2\cdot1+1}=\dfrac{2}{3}$

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

Пример 4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x+1}$$

Заметим, что данный пример отличается от примеров 1 и 2, так как вместо x мы не можем подставить ∞. Поэтому здесь используем следующий метод: разделим и числитель, и знаменатель дроби на x^2. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{2x^2-x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

Заметим, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$. Значит,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 5

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$$

Для вычисления предела раскроем скобки в числителе и приведем подобные слагаемые.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5-1-5x}{x^2+x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{10x^2+10x^3+5x^4+x^5}{x^2+x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(10+10x+5x^2+x^3\right)}{x^2\left(1+x^3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{10+10x+5x^2+x^3}{1+x^3}=\frac{10+10\cdot 0+5\cdot 0+0}{1+0}=10.$$

Ответ: 10.

Пример 6

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x+2x^2)(1+3x)-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+3x+2x^2+3x+9x^2+6x^3-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^3+11x^2+6x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(6x^2+11x+6)}{x}=\lim_{x\to 0}(6x+11x+6)=6.$$

Ответ: 6.

Пример 7

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$$

При подстановке получаем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

При вычислении пределов, содержащих иррациональность, часто используется прием умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

Используя формулу разности квадратов $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ получим:

$$\lim_{x\to 4}\frac{((\sqrt{1+2x})^2-3^2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)((\sqrt{x})^2-2^2)}=\lim_{x\to 4}\frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{2(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{1+2\cdot 4}+3}=\frac{2\cdot 4}{6}=\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Важное замечание: имеет место замечательный предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Данное равенство может применяться при вычислении пределов, содержащих тригонометрические функции.

Пример 8

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ Умножим числитель и знаменатель на 5, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5, т.к.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}.$$

Ответ: 5.

Задачи

Часть 1

1. (1) Вычислите значения пределов:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+1}{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+c}{bx-d}$, где a, b, c и d – некоторые числа.

Сформулируйте общее утверждение, начиная со слов: «Отношение значений двух линейных функций…»

2. (1) Вычислите значения пределов:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x-5}{7x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+10x+7}{7x^2+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+1000000000x}{7x^2+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}$. Сформулируйте общее утверждение.

3. (2) Используя общие утверждения задач 1 и 2, без вычислений определите пределы: а) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{4-60z}{12z+4000}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x+1}{2x^2-1}$.

4. (2) Вычислите значения пределов:

а) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{4-60z}{12z^2+4000}$; б) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{12z^2+4000}{4-60z}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x+1}{20x^3-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{20x^3-1}{4x^2+3x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1+b_0}$ при различных случаях $n=m$, $n<m$, $n>m$, где n и m – натуральные числа. Сформулируйте общее утверждение, начиная со слов: «Отношение значений двух многочленов…»

5. (2) Вычислите значения пределов:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}-2x)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+1}{\sqrt{x^2+3x+10}+3x}$.

6. (2) Вычислите значения пределов:

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-9}{x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{x^2-b^2}{x-b}$.

7. (3) Вычислите значения пределов:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

8. (3) Вычислите значения пределов:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$; д) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

Часть 2

9. (1) Определите значения пределов:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)(3x-1)}{(x+2)(4x-1)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{5x+1}{3x+2}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x}-\dfrac{5}{x^2}\right)$.

10. (1) Вычислите значения пределов:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+1)(x+3)}-x)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+1}}$.

11. (2) Докажите, что при $a\ge 0$ имеет место равенство:

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}x)=0$.

12. (2) Вычислите значения пределов:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{ax^2+bx+c}{x-x_1}$, где x_1 является корнем трехчлена ax^2+bx+c.

13. (3) Вычислите значения пределов:

а) $\lim\limits_{x\to 0.5}\dfrac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0.4}\dfrac{5x^3-2x^2+5x-2}{5x^4-2x^3-5x^2+2x}$.

14. (2) Вычислите значения пределов:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

15. (3) Вычислите значения пределов:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$ г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

16 (2) Произведение возрастов братьев Маржан равно 1664. Младший из братьев вдвое младше старшего. Сколько у Маржан братьев?

17 (2) Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 12, а сумма первых шести членов равна -84. Найдите третий член прогрессии.

18 Решите неравенства:

а) (2) $\left|x^2+2x-4\right|>4$;

б) (2) $\left|2x+1\right|+\left|3x+2\right|\le 5x+3$;

в) (2) $\left|\left|x^3-x-1\right|-5\right|>x^3+x+8$.

19 (2) В комнате 3 светильника, каждый из которых можно включить или выключить, независимо от остальных. Сколько существует способов для освещения комнаты в ночное время?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Ответы:

1. а) $\frac{7}{3}$; б) $\frac{a}{b}$. **2.** а) 0; б) $-\frac{3}{7}$; в) $-\frac{3}{7}$; г) $\frac{a}{a_1}$.

3. а) -5; б) 2.

4. а) 0; б) $-\infty$; в) 0; г) ∞; д) 0 при $n<m$, $\frac{a_n}{b_m}$ при $n=m$, ∞ или $-\infty$ в зависимости от знака $\frac{a_n}{b_m}$ при $n>m$.

5. а) 0; б) $\frac{3}{2}$. **6.** а) -4; б) -6; в) $2b$.

7. а) -1; б) 4; в) -2. **8.** а) 2; б) $0,4$; в) $0,4$; г) $\frac{m}{n}$; д) $\cos a$.

9. а) 2; б) $1,5$; в) $\frac{5}{3}$; г) $\frac{2}{3}$. **10.** а) 0; б) $0,5$.

12. а) $-0,25$; б) $0,75$; в) $a(x_1-x_2)$. **13.** а) $0,4$; б) $-2,5$; в) $-\frac{145}{42}$.

14. а) $1,5$; **б)** $\frac{1}{16}$. **15. а)** 1; **б)** $0,5$; **в)** 2; **г)** $-\sin a$.

16. 3. **17.** 16.

18. а) $(-\infty;-4)\cup(-2;0)\cup(2;+\infty)$; б) $x\ge-\frac{1}{2}$; в) $x\le-\sqrt[3]{6}$. **19.** C).

§2 ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Легкость математики основана на возможности чисто логического ее построения, трудность, отпугивающая многих, – на невозможности иного изложения.

Хуго Штейнгаус

2.1 Введение

Понятие производной появилось в результате попыток измерить скорость изменения физических величин при условии, что сам закон изменения известен. Из курса физики вам известно, что путь, пройденный телом в результате свободного падения за время t, равен $\frac{gt^2}{2}$, а скорость падения в момент времени t равна gt. Является ли эта пара функций особенностью только данного явления, или же между ними существует связь, которая есть частный случай какого-то общего закона?

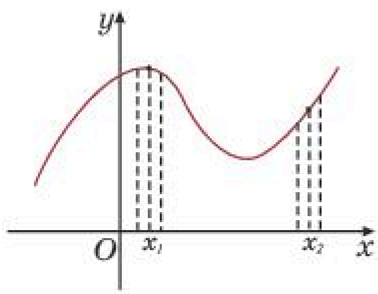
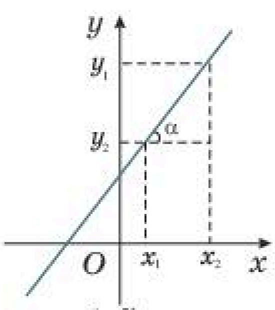


Рис. 1

На рисунке 1 изображен график некоторой функции $f(x)$. Интуитивно понятно, что в окрестности точки x_1 функция изменяется медленнее, чем в окрестности точки x_2. Но как это описать в терминах функции f?



$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k = tg\,\alpha$

Рис. 2

Наиболее понятно в этом отношении ведут себя линейные функции $y=kx+m$. Скорость их изменения постоянна и равна k. Если говорить более точно, отношение изменения функции $y_2 - y_1$ к изменению аргумента $x_2 - x_1$ равно k при любом выборе x_1 и x_2 (рис. 2).

С другой стороны, большинство функций, описывающих физические, химические и другие природные явления, имеют «гладкие» (без изломов) или «кусочно-гладкие» графики. Основная идея состоит в том, что **маленькие кусочки таких графиков похожи на отрезки прямых**.

Рассмотрим, например, график функции, построенный нами ранее (рис. 3). Интуитивно понятно, что в точке P, так же как и в любой другой точке графика за исключением A, B и C, можно провести **касательную – прямую, сливающуюся с графиком в малой окрестности точки P.**

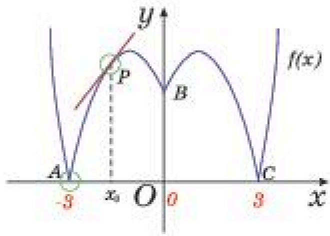


Рис. 3

Если изображать все меньшие круги с центром в точке P, не меняя при этом размер изображения, то мы увидим примерно такую последовательность: рисунки 4, 5, 6.

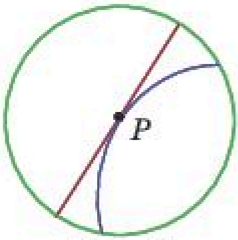


Рис. 4

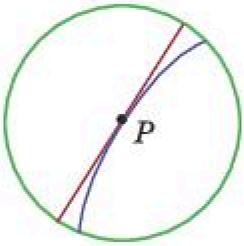


Рис. 5

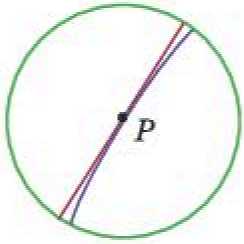


Рис. 6

Маленький кусочек графика, содержащий точку P, все больше сливается с отрезком касательной. Касательная прямая есть график некоторой линейной функции $y=kx+m$. Коэффициент k – это и есть значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Если в точке с координатами $y=kx+m$ можно провести касательную $y=kx+m$ к графику функции $y=f(x)$, то говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, или говорят, что функция $f(x)$ **имеет производную в точке** x_0. Значение производной при этом равно угловому коэффициенту k касательной.

Если же мы рассмотрим круги с центром в точке A, то какой бы малый радиус этих кругов ни брали, кусочек графика $f(x)$, содержащий точку A, не будет похож на отрезок прямой (рис. 7). То же самое можно сказать о точках B и C.

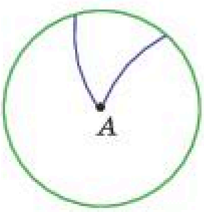


Рис. 7

Тогда говорят, что в точках $x=-3$, 0, 3 у функции $f(x)$ не существует производной.

2.2 Основной принцип дифференциального исчисления

На данном этапе мы имеем возможность точно определить, что такое касательная к графику квадратичной функции. Любая прямая $y=kx+m$ имеет с параболой $y=ax^2+bx+c$ либо 0, либо 1, либо 2 общие точки (рис. 8).

Действительно, количество общих точек прямой и параболы равно количеству решений уравнения $ax^2+bx+c=kx+m$, $ax\ +(b-k)x+(c-m)=$. Так как $a\neq 0$, то последнее уравнение является квадратным. Квадратное уравнение, как известно, может иметь либо 0, либо 1, либо 2 решения.

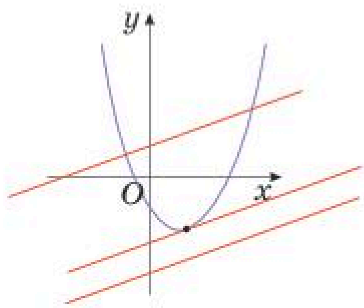


Рис. 8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

Прямая $y=kx+m$ называется касательной к параболе, если имеет с ней ровно одну общую точку.

Пример 1

Найдите уравнение касательной к параболе $y=x^2$ в точке с абсциссой $x_0=3$.

Решение. Точка на параболе с абсциссой $x_0=3$ имеет ординату $y_0=x_0^2=3^2=9$ (рис. 9).
Уравнения всех прямых, проходящих через точку $(3;9)$, имеют вид $y-9=k(x-3)$. Данная прямая и парабола $y=x^2$ имеют единственную общую точку только в том случае, если система уравнений $\begin{cases} y-9=k(x-3), \\ y=x^2; \end{cases}$ имеет единственное решение. Подставляя $y=x^2$ в первое уравнение, получаем: $x^2-9=k(x-3)$, $x^2-kx+3k-9=0$.

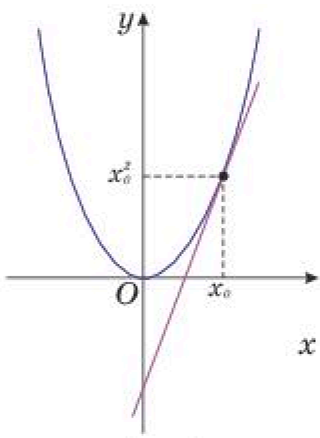


Рис. 9

Полученное квадратное уравнение имеет единственное решение, если его дискриминант равен нулю:
$D=k^2-12k+36=0$, откуда следует, что $k=6$.

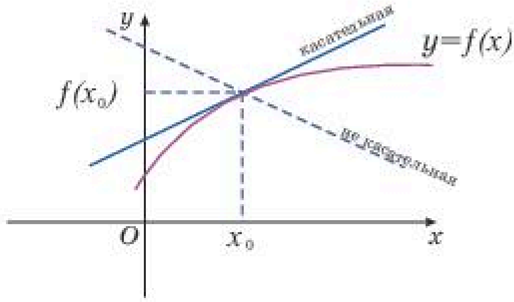


Рис. 10

В результате подстановки $k=6$ в уравнение $y-9=k(x-3)$, окончательно получаем уравнение касательной $y=6x-9$. Задача решена.

В рассмотренном примере 1 касательная, проведенная к графику функции $y=x^2$ в точке с абсциссой $x_0=3$, имеет угловой коэффициент $k=6$. Это значит, что производная функции $y=x^2$ в точке $x_0=3$ равна 6.

Рассмотрим общий случай. Пусть прямая $y=kx+m$ является касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=x_0$. Точка касания имеет координаты $(x_0;f(x_0))$ (рис. 10).

Не приводя строгого определения касательной (которое в рамках нашего курса все равно привести невозможно), ограничимся некоторыми пояснениями.

1) Касательная отличается от любой другой прямой, проходящей через точку $(x_0;f(x_0))$, тем, что вблизи данной точки ее отрезок практически **сливается с графиком функции** $y=f(x)$ (рис. 10).

2) В точках x, близких к x_0, значения линейной функции $y=kx+m$ ближе к значениям функции $f(x)$, чем значения любой другой линейной функции (рис. 10).

3) В точках x, близких к x_0, маленький отрезок графика $y=f(x)$ ведет себя так же, как отрезок касательной $y=kx+m$ (рис. 10).

Сформулируем **основной принцип дифференциального исчисления**:

Если в точке $y=f(x)$ графика функции $y=f(x)$ можно провести касательную $y=kx+m$, то при x, достаточно близких по значению к x_0, имеет место приблизительное равенство $f(x)\approx kx+m$.

Основной принцип дифференциального исчисления позволяет в достаточно малых окрестностях точки x_0 вместо функции $y=f(x)$ рассматривать линейную функцию $y=kx+m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.

Значением производной функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ называется угловой коэффициент k касательной $y=kx+m$, проведенной к графику данной функции в точке с координатами $(x_0;f(x_0))$.

Обозначение. ***Значение производной функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ обозначается как $f'(x_0)$.***

Замечание. Графиком линейной функции $f(x)=kx+m$ является прямая, которую естественно считать касательной к самой себе. Поэтому производная линейной функции $f(x)=kx+m$ в любой точке равна угловому коэффициенту k.

Как уже отмечалось, изменение значения аргумента x на величину $\delta=x_2-x_1$ влечет за собой изменение значения линейной функции $y=kx+m$ на величину $\Delta=y_2-y_1=k\delta$ (рис. 11).

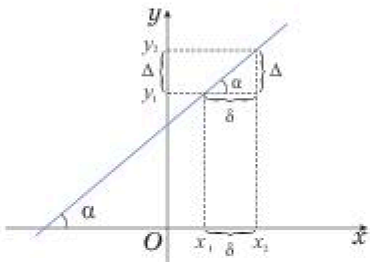


Рис. 11

Пример 2

Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0=\dfrac{1}{2}$. Определите значение производной в точке $x_0=\dfrac{1}{2}$.

Решение. Графиком функции $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ является гипербола (изобразите самостоятельно). Из геометрических соображений понятно, что прямая $y=kx+m$ касается гиперболы тогда и только тогда, когда имеет с ней ровно одну общую точку. По условию, эта общая точка имеет абсциссу $x_0=\dfrac{1}{2}$. Отсюда получается переформулировка задачи: найти значения параметров k и m, при которых уравнение $-\dfrac{1}{x}=kx+m$ имеет единственный корень $x_0=\dfrac{1}{2}$. Уравнение $-\dfrac{1}{x}=kx+m$ равносильно $kx^2+mx+1=0$. Так как число $x_0=\dfrac{1}{2}$ является **корнем**, то $k\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+m\cdot\dfrac{1}{2}+1=0$. Так как число $x_0=\dfrac{1}{2}$ является **единственным** корнем, то дискриминант уравнения $kx^2+mx+1=0$ равен нулю: $D=m^2-4k=0$. Решая систему уравнений
$$\begin{cases} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+m\cdot\dfrac{1}{2}+1=0, \\ m^2-4k=0, \end{cases}$$
получаем в результате $m=-4$ и $k=4$.

Значение производной в точке $x_0=\dfrac{1}{2}$ равно коэффициенту k наклона касательной: $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$.

Ответ: $y=4x-4$, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$.

2.3 Аналитическое определение производной

Таким образом, коэффициент k равен отношению изменения значения линейной функции к соответствующему изменению аргумента. Иначе говоря, коэффициент k – **это скорость роста линейной функции.** Если график функции $y=f(x)$ имеет касательную $y=kx+m$ в точке $x=x_0$, то по определению производной $f'(x_0)=k$. Из **основного принципа дифференциального исчисления** следует, что в малой окрестности точки x_0 отношение изменения значения функции $f(x)$ к изменению аргумента x приблизительно равно $f'(x_0)=k$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\approx f'(x_0).$$

Причем равенство тем точнее, чем меньшую окрестность точки x_0 мы рассматриваем (рис. 12).

Иначе говоря, значение $f'(x_0)$ производной от функции $f(x)$ – **это скорость роста функции в точке** x_0. Отсюда нетрудно сделать вывод, что имеет место следующее равенство:

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

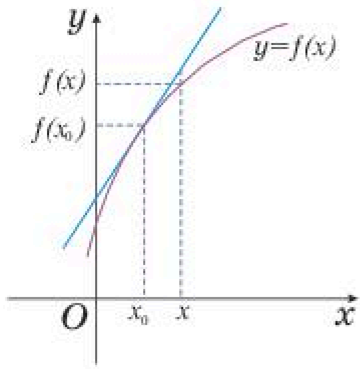


Рис. 12

Данное равенство мы будем называть **аналитическим** определением производной. Разность $f(x)-f(x_0)$ называется **приращением функции**, разность $x-x_0$ называется **приращением аргумента.**

Пример 3

Найдите значение производной от функции $f(x)=x^3-x$ в точке $x_0=2$, используя аналитическое определение.

Решение. Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна пределу отношения $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при x, стремящемся к x_0. В данном случае $f(x)=x^3-x$, $f(x_0)=f(2)=2^3-2=6$.

$f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-x-6}{x-2}$. Поскольку в пределе имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, то в числителе пытаемся выделить множитель $(x-2)$. Множитель $(x-2)$ содержится в разности кубов x^3-2^3. Отсюда преобразования:

$$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^3-x-6}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^3-8-x-6+8}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)-(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4-1)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to2}(x^2+2x+3)=11.$$

Задачи

Часть 1

1. (1) Чему равны производные функций $y=3x-567$, $y=-3x$, $y=6$, $y=-\frac{1}{2}x$, $y=\frac{1}{2}x+7$? Как связаны между собой знаки производных и наклоны соответствующих прямых?

2. (1) Производная четной функции в точке $x=5$ равна (–10). Можем ли мы что-нибудь сказать о значении производной в точке $x=-5$?

3. (1) Известно, что для функции $y=f(x)$ значение производной в точке x=4 равно 7. Можем ли мы что-нибудь сказать о значении производной функции $y=f(-x)$ в точке $x=-7$? Можем ли мы что-нибудь сказать о значении производной $y=f(-x)$ в точке $x=-4$?

4. (1) По графику функции $f(x)=x^2-2x$ определите знаки чисел $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(1)$, $f'(4)$.

5. (2) Постройте график функции $f(x)=|x^2-2x|$. Определите точки, в которых:

а) не существует производной;
б) производная равна нулю;
в) производная положительна.

6. (2) Постройте график функции $f(x)=|\sin x|+1$. Определите точки, в которых:

а) не существует производной;
б) производная равна нулю;
в) производная отрицательна.

7. (3) Докажите, что прямая $y=3x$ является касательной к графику функции $f(x)=x^2+x+1$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

8. (3) Докажите, что прямая $y=\frac{x}{4}+2$ является касательной к графику функции $f(x)=\sqrt{x+4}$ в точке пересечения этого графика с осью ординат.

9. (3) Найдите производную функции $f(x)=x^3$ в точке $x_0=1$, используя аналитическое определение производной.

10. (3) Найдите производную функции $f(x)=x^2+5x+6$ в точке $x_0=-2$, используя аналитическое определение производной.

11. (4) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=\frac{3}{x}$ в точке с абсциссой $x_0=1$. Определите значение производной $f'(1)$, (см. пример 2 в п. 2.2).

12. (4) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=-x^2+4x$ в точке с абсциссой $x_0=3$. Определите значение производной $f'(3)$ (см. определение касательной к параболе в п. 2.2 и пример 1).

Часть 2

13. (1) Чему равны производные функций $y=-2x+3$, $y=5x+57$, $y=-8$?

14. (1) Производная нечетной функции в точке $x=-3$ равна 6. Можем ли мы что-нибудь сказать о значении производной данной функции в точке $x=3$?

15. (1) Известно, что для функции $y=f(x)$ значение производной в точке $x=4$ равно 7. Можем ли мы что-нибудь сказать о значении производной функции $y=-f(x)$ в точке $x=-4$? Можем ли мы что-нибудь сказать о значении производной $y=-f(x)$ в точке $x=4$?

16. (1) По графику функции $f(x)=-x^2-2x$ определите знаки чисел $f'(1)$, $f'(0)$, $f'(-1)$, $f'(-3)$.

17. (2) Постройте график функции $f(x)=|x^2+2x|$. Определите точки, в которых:
а) не существует производной; б) производная равна нулю;
в) производная отрицательна.

18. (2) Постройте график функции $f(x)=|\cos x|-3$. Определите точки, в которых:
а) не существует производной; б) производная равна нулю;
в) производная положительна.

19. (3) Докажите, что прямая $y=-3x+2$ является касательной к графику функции $f(x)=-x^2+x-1$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

20. (3) Докажите, что прямая $y=-\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$ является касательной к графику функции $f(x)=-\sqrt{x+3}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

21. (3) Найдите производную функции $f(x)=-x^3$ в точке $x_0=-2$, используя аналитическое определение производной.

22. (3) Найдите производную функции $f(x)=x^2-7x+100$ в точке $x_0=3$, используя аналитическое определение производной.

23. (4) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=-\frac{2}{x}$ в точке с абсциссой $x_0=-1$. Определите значение производной $f'(-1)$, (см. пример 3 в п. 2.2).

24. (4) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+4x$ в точке с абсциссой $x_0=-5$. Определите значение производной $f'(-5)$, (см. определение касательной к параболе в п.2.2 и пример 1).

Ответы:

1. Графиками линейных функций являются прямые линии. Очевидно, что каждый отрезок прямой имеет такой же наклон, как и вся прямая. В этом смысле график любой линейной функции является касательной к самому себе. Поэтому производные функций $y=3x-567$, $y=-3x$, $y=6$, $y=-\frac{1}{2}x$, $y=\frac{1}{2}x+7$ равны соответственно 3, –3, 0, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$. Наклон верхней части прямой вправо от вертикального положения соответствует положительному значению производной, наклон верхней части прямой влево от вертикального положения соответствует отрицательному значению производной.

2. Так как ось Oy является осью симметрии для графика четной функции, то касательные к графику в противоположных точках имеют противоположные угловые коэффициенты.

3. Функция $y=f(-x)$ в точке $x=-4$ имеет производную, равную -7. О значении производной функции $y=f(-x)$ в точке $x=-7$ ничего сказать нельзя.

4. Знак производной определяем по наклону соответствующей касательной: $f'(-1)<0$, $f'(0)<0$, $f'(2)>0$, $f'(1)=0$, $f'(4)>0$.

5. а) Производная не существует в точках «излома» графика: $x=0$, $x=2$.
б) Производная функции в данной точке – это и есть угловой коэффициент касательной. Производная равна нулю, если угловой коэффициент равен нулю. Коэффициент наклона равен нулю у горизонтальных прямых. Ответ: $x=1$.
в) Производная положительна в точках, касательная в которых имеет положительный угловой коэффициент. Ответ: $x\in(0;1)\cup(2;+\infty)$.

6. а) $x=\pi k$, где k – произвольное целое число.

б) $x=-\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, где k – произвольное целое число.

в) $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\pi k\right)$, где k – произвольное целое число.

7. Указание. Достаточно показать, что уравнение $x^2+x+1=3x$ имеет единственный корень $x=1$.

9. $f'(1)=3$.

10. $f'(-2)=1$.

11. $y=-3x+6$, $f'(1)=-3$.

12. $y=-2x+9$, $f'(3)=-2$.

13. Производные равны -2, 5, 0 соответственно.

14. Значение производной данной функции в точке $x=3$ также равно 6.

15. Значение производной от $y=-f(x)$ в точке $x=4$ равно -7. О точке $x=-4$ ничего определенного сказать нельзя.

16. $f'(1)<0$, $f'(0)<0$, $f'(-1)=0$, $f'(-3)>0$.

17. а) Производная не существует в точках «излома» графика: $x=0$, $x=-2$.
б) Производная равна нулю в точке $x=-1$.
в) Производная отрицательна в точках $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;0)$.

18. а) Производная не существует в точках «излома» графика: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$.
б) Производная равна нулю в точках $x=\pi k$.
в) $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\pi k\right)$, где k – произвольное целое число.

21. $f'(-2)=-12$.

22. $f'(3)=-1$.

23. $y=2x+4$, $f'(-1)=2$.

24. $y=-6x-25$, $f'(-5)=-6$.

2.4 Правила нахождения производной

Математика – это наука о хитроумных операциях, производимых по специально разработанным правилам над специально придуманными понятиями.

Ю. П. Вигнер

Процесс нахождения производной называется **дифференцированием**. Если функция имеет конечное значение производной (имеет производную) в данной точке, то она называется **дифференцируемой в данной точке**. Если функция дифференцируема в каждой точке интервала, то она называется **дифференцируемой на интервале**. Дифференцируемая на интервале функция всегда непрерывна на этом интервале.

Раздел математического анализа, в котором производная применяется для изучения поведения функции, называется дифференциальным исчислением. Процесс нахождения производной от любой комбинации элементарных функций сводится к механическому применению определенных правил и формул. Этот процесс может быть запрограммирован.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – дифференцируемые в точке x_0 функции. Тогда можно доказать, что имеют место следующие правила вычисления производных (символ (x_0) опускаем):

1. Если с – некоторая константа (число), то $(cf)' = cf'$;
2. $(f+g)' = f' + g'$ (правило дифференцирования суммы);
3. $(f-g)' = f' - g'$ (правило дифференцирования разности);
4. $(f \cdot g)' = f'g + g'f$ (правило дифференцирования произведения);
5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ (правило дифференцирования частного).

Строгое доказательство данных правил выходит за рамки нашего курса. Идея состоит в применении аналитического определения производной. Продемонстрируем это на примере доказательства правила дифференцирования произведения.

Пусть $h(x) = f(x)g(x)$.

Тогда

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}g(x)\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

До сих пор мы говорили об определении значения производной функции в точке. Но **если функция f имеет производную в каждой точке x некоторого интервала, то каждой такой точке можно поставить в соответствие значение производной $f'(x)$. Определенная таким образом функция называется производной от функции $f(x)$ и обозначается $y=f'(x)$.**

Очевидно, что правила 1-5 справедливы для функций f и g, определенных и дифференцируемых на некотором интервале.

Особое место в правилах нахождения производной занимает **правило дифференцирования сложной функции**.

$$\boxed{\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

Докажем это правило. Для доказательства будем использовать аналитическое определение производной в следующем виде:

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

По данной формуле

$$\left(f(g(x))\right)'=\lim_{t\to x}\frac{f(g(t))-f(g(x))}{t-x}=\lim_{t\to x}\left(\frac{f(g(t))-f(g(x))}{g(t)-g(x)}\cdot\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right)=$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{f(g(t))-f(g(x))}{g(t)-g(x)}\cdot\lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Аналогия. Скорость бегуна G в 2 раза больше, чем скорость бегуна X, а скорость бегуна F в 3 раза больше, чем скорость бегуна G. Во сколько раз скорость бегуна F больше, чем скорость X?

2.5 Формулы для нахождения производной

Имеют место следующие формулы для производных элементарных функций (см. таблицу). Во втором столбце расположены результаты применения правила дифференцирования сложной функции $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, если в качестве $f(x)$ рассматривается соответствующая функция первого столбца. Чтобы облегчить восприятие, везде вместо $g(x)$ мы писали просто g.

Таблица производных

1	$C' = 0$	
2	$(kx)' = k$	
3	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(g^n)' = ng^{n-1} \cdot g'$
4	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin g)' = \cos g \cdot g'$
5	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos g)' = -\sin g \cdot g'$
6	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} g)' = \dfrac{1}{\cos^2 g} \cdot g'$
7	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} g)' = -\dfrac{1}{\sin^2 g} \cdot g'$
8	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin g)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-g^2}} \cdot g'$
9	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos g)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-g^2}} \cdot g'$
10	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} g)' = \dfrac{1}{1+g^2} \cdot g'$
11	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} g)' = -\dfrac{1}{1+g^2} \cdot g'$

Докажем все формулы из первого столбца.

Доказательство формул 1–2.

Для самой простой линейной функции все просто. В некотором смысле ее график «сам себя касается». Если $f(x)=kx+m$, то скорость роста $f(x)$ равна k. Отсюда $(kx+m)'=k$. При $k=0$ и $m=C$ получаем формулу 1, при $m=0$ получаем формулу 2.

Доказательство формулы 3.

Найдем производную степенной функции $f(x)=x^n$, где n – натуральное число.

Имеют место следующие формулы:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$

$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3),$$

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4).$$

Выведем формулу:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

По формуле суммы геометрической прогрессии

$$1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^3+\ldots+\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}=\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n-1}{\frac{b}{a}-1}=\frac{b^n-a^n}{a^{n-1}(b-a)}.$$

Остается обе части равенства умножить на $a^{n-1}(a-b)$.

В формуле $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ переобозначим $x=t$ и $x_0=x$:

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{(t-x)(t^{n-1}+t^{n-2}x+\ldots+x^{n-1})}{t-x}=$$

$$=\lim_{t\to x}(t^{n-1}+t^{n-2}x+\ldots+x^{n-1})=$$

$$=(x^{n-1}+x^{n-2}x+\ldots+x^{n-1})=nx^{n-1}.$$

На самом деле, формула $(x^n)'=nx^{n-1}$ верна не только для натуральных, но и для любых значений n.

Пример 4 Применение формулы $(x^n)' = nx^{n-1}$.

а) $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$; б) $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $(x^{2013})' = 2013x^{2012}$; г) $\left(\frac{1}{x^7}\right)' = (x^{-7})' = -7x^{-7-1} = -7x^{-8} = -\frac{7}{x^8}$,

е) $(x\sqrt{x})' = \left(x^{1+\frac{1}{2}}\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$.

Доказательство формулы 4.

$$(\sin x)' = \lim_{t\to x}\frac{\sin t - \sin x}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{2\sin\frac{t-x}{2}\cos\frac{t+x}{2}}{t-x} =$$

$$= \lim_{t\to x}\frac{\sin\frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}}\cos\frac{t+x}{2} = \lim_{t\to x}\cos\frac{t+x}{2} = \cos x.$$

В преобразованиях мы воспользовались тем, что $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

Упражнение 1

Докажите, что $(\cos x)' = -\sin x$ (формула 5).

Доказательство формулы 6.

Используем правило $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Упражнение 2

Докажите, что $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ (формула 7).

Доказательство формулы 10.

Докажем, что $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Действительно, по определению арктангенса для всех x выполняется равенство $(\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x))=x$.

Следовательно, для всех x выполняется равенство $(\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x))'=x'$.

К левой части применяем формулу $(\mathrm{tg}\,g)'=\dfrac{1}{\cos^2 g}\cdot g'$, где $g=\mathrm{arctg}\,x$.
Получаем равенство:

$$\frac{1}{\cos^2(\mathrm{arctg}\,x)}\cdot(\mathrm{arctg}\,x)'=1,$$

откуда

$$(\mathrm{arctg}\,x)'=\cos^2(\mathrm{arctg}\,x).$$

Остается доказать, что $\cos^2(\mathrm{arctg}\,x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Пусть $\mathrm{arctg}\,x=\alpha$, тогда $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\mathrm{tg}\,\alpha=x$, $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Упражнение 3

Докажите, что: а) $(\arcsin)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (формула 9);

в) $(\mathrm{arcctg}\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$ (формула 11).

Поскольку правило дифференцирования сложной функции мы уже обсудили, то формулы 3–11 из второй колонки таблицы можно считать доказанными. Приведем несколько примеров их применения.

Пример 5

Найдите: а) $(\sin^3 x)'$; б) $(\sin x^3)'$; в) $\left(\cos\left(8x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)'$; г) $\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'$.

Решение. а) Для вычисления $(\sin^3 x)'$ применяем формулу $(g^n)'=ng^{n-1}\cdot g'$, где $g=\sin x$: $(\sin^3 x)'=3\sin^2 x(\sin x)'=3\sin^2 x\cos x$.

б) Для вычисления $(\sin x^3)'$ применяем формулу $(\sin g)'=\cos g\cdot g'$, где $g=x^3$: $(\sin x^3)'=\cos x^3\cdot(x^3)'=3x^2\cos x^3$.

в) Для вычисления $\left(\cos\left(8x-\frac{\pi}{3}\right)\right)'$ применяем формулу $(\cos g)'=-\sin g\cdot g'$, где $g=8x-\frac{\pi}{3}$:

$$\left(\cos\left(8x-\frac{\pi}{3}\right)\right)'=-\sin\left(8x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(8x-\frac{\pi}{3}\right)'=-8\sin\left(8x-\frac{\pi}{3}\right).$$

г) Для вычисления $\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'$ применяем формулу

$(g^n)'=ng^{n-1}\cdot g'$, где $g=ax^2+bx+c$, $n=\frac{1}{2}$:

$$\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'=\left(\left(ax^2+bx+c\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\left(ax^2+bx+c\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(ax^2+bx+c\right)'=$$

$$=\frac{\left(ax^2+bx+c\right)'}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Упражнение 4

Найдите значение производной функции $f(x)=\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}-4$ в точке $x_0=1$.

Упражнение 5

Найдите $f'(x)$, где $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Упражнение 6

Найдите $f'(x)$, если $f(x)=x^3\sin 10x$.

Упражнение 7

Найдите $f'(x)$, если $f(x)=\dfrac{x^7}{7}$.

Упражнение 8

Найдите $f'(x)$, если $f(x)=\arcsin\left(x^2+4x\right)$.

Решение упражнения 4. $f'(x)=\left(\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}-4\right)'=\left(5x^{-2}+3x^{-3}-4\right)'=$

$$=\left(5x^{-2}\right)'+\left(3x^{-3}\right)'-4'=5\left(x^{-2}\right)'+3\left(x^{-3}\right)'-0=-10x^{-3}-9x^{-4}=-\frac{10}{x^3}-\frac{9}{x^4}.$$

Осталось подставить $x=x_0=1$ в полученное выражение для $f'(x)$:
$f'(x_0)=f'(1)=-\dfrac{10}{1^3}-\dfrac{9}{1^4}=-19$.

Решение упражнения 5. Применяем формулу $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$:

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)'=\frac{\left(x^2+1\right)'\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)'\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x\left(x^2-1-x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=-\frac{4x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Решение упражнения 6. Применим формулу $(fg)'=f'g+g'f$:

$$\left(x^3\sin 10x\right)'=\left(x^3\right)'\sin 10x+\left(\sin 10x\right)'x^3=3x^2\sin 10x+\cos 10x\cdot(10x)'\cdot x^3=$$

$$=x^2\left(3\sin 10x+10x\cos 10x\right).$$

Решение упражнения 7. *Упражнение 7 – специально для тех, кто пытается посчитать* $\left(\dfrac{x^7}{7}\right)'$ *по формуле* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$. *Можно ли в данном случае применять эту формулу? Конечно, можно. Но это будет нерационально. Вот короткое решение!*

$$\left(\frac{x^7}{7}\right)'=\left(\frac{1}{7}x^7\right)'=\frac{1}{7}\left(x^7\right)'=\frac{1}{7}\cdot 7x^6=x^6.$$

Решение упражнения 8. *Для нахождения производной от данной функции будем использовать формулу* $\left(\arcsin(g(x))\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}}\cdot g'(x)$.

$$\left(\arcsin\left(x^2+4x\right)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2+4x\right)^2}}\cdot\left(x^2+4x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2+4x\right)^2}}\cdot(2x+4)=$$

$$=\frac{2(x+2)}{\sqrt{1-\left(x^2+4x\right)^2}}.$$

Производная $f'(x)$ некоторой функции $f'(x)$ на интервале – тоже функция, которая, может быть, тоже имеет свою производную. Производная производной называется второй производной для исходной функции и обозначается $f''(x)$. Производная второй производной называется производной третьего порядка и т.д.

$$((f'(x))'=f''(x),\ (f''(x))'=f'''(x).$$

Пример 6 Найдите производные второго и третьего порядка от функции $f(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3$.

Решение. Первая производная: $f'(x)=\left(\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3\right)'=x^4+x^2$.

Вторая производная: $f''(x)=\left(x^4+x^2\right)'=4x^3+2x$. Производная третьего порядка: $f'''(x)=\left(4x^3+2x\right)'=12x^2+2$.

Пример 7 Найдите производную функции $f(x)=\cos^3\left(x^2+2x\right)$.

Решение. Сначала применяем формулу

$\left((g(x))^n\right)'=ng^{n-1}(x)\cdot g'(x)$:

$$f'(x)=\left(\cos^3\left(x^2+2x\right)\right)'=3\cos^2\left(x^2+2x\right)\cdot\left(\cos\left(x^2+2x\right)\right)'.$$

Теперь применяем формулу $(\cos g(x))'=-\sin g(x)\cdot g'(x)$:

$$f'(x)=3\cos^2\left(x^2+2x\right)\cdot\left(-\sin\left(x^2+2x\right)\right)\cdot\left(x^2+2x\right)'=$$

$$=-6\cdot(x+1)\cos^2\left(x^2+2x\right)\cdot\sin\left(x^2+2x\right).$$

Ответ: $-6\cdot(x+1)\cos^2\left(x^2+2x\right)\cdot\sin\left(x^2+2x\right)$.

Задачи

Часть 1

1. Найдите производные следующих функций:

а) $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=x^3$, $u(x)=x^4$, $v(x)=x^{2014}$;

б) $f(x)=1$, $g(x)=\dfrac{1}{2x^2}$, $h(x)=\dfrac{1}{3x^3}$, $u(x)=-\dfrac{1}{4x^4}$, $v(x)=-\dfrac{1}{2^{15}\left(x^2\right)^{12}}$.

2. Найдите производные следующих функций:

$f(x)=2x-1$, $g(x)=x^2-2x-1$, $h(x)=(2x-1)^2$, $u(x)=\left(x^2-2x-1\right)^4$.

3. Найдите производные следующих функций:

а) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sin 2x$, $h(x)=\dfrac{1}{6}\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $u(x)=-\dfrac{1}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{5}-4\pi x\right)$;

б) $f(x)=-\cos x$, $g(x)=\cos 3x$, $h(x)=\dfrac{1}{4}\cos\left(8x-\dfrac{\pi}{7}\right)$, $u(x)=\dfrac{2}{\pi}\cos\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{3\pi x}{2}\right)$;

в) $f(x)=2\operatorname{tg} x$, $g(x)=\operatorname{tg}\dfrac{5x}{2}$, $h(x)=\dfrac{3}{7}\operatorname{tg}\left(\dfrac{14x}{3}-\dfrac{\pi}{9}\right)$, $u(x)=\dfrac{}{3}\operatorname{tg}\left(\dfrac{}{5}-9\ \ x\right)$;

г) $f(x)=-3\operatorname{ctg} x$, $g(x)=7\operatorname{ctg}\dfrac{8x}{7}$, $h(x)=\dfrac{4}{9}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{27x}{2}-\dfrac{\pi}{21}\right)$,

$u(x)=-\dfrac{1}{11\pi}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{11}-22\pi x\right)$.

4. Найдите производные следующих функций:

а) $f(x)=\arcsin x$, $g(x)=\arcsin 2x$, $h(x)=2\arcsin\left(2x^2\right)$,

$u(x)=\dfrac{1}{2}\arcsin\left(x^2+1\right)$;

б) $f(x)=0{,}1\operatorname{arctg} x$, $g(x)=0{,}3\operatorname{arctg}\left(27x+\dfrac{\pi}{9}\right)$, $h(x)=\dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(2x^3\right)$,

$u(x)=\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(x^5-1\right)$.

5. Найдите производные следующих функций:

$f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{3-4x}$, $h(x)=\sqrt{5-4x^2}$, $u(x)=\sqrt{2+\cos x}$.

6. Найдите значения переменной x, при которых производная функции $f(x)$ равна a.

а) $f(x)=-\cos x$, $a=1$; б) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 4x+8$, $a=\sqrt{3}$;

в) $f(x)=7\cos 2x-5x$, $a=2$; г) $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{7}\operatorname{tg}14x+8x$, $a=10$.

7. При каких значениях переменной t выполняются одновременно два условия: $f'(t)\geq 0$ и $f(t)<0$, если $f(t)=-t^2+2t+3$?

8. Укажите множество значений переменной x, для которых производная функции $f(x)=3x^4+8x^3$ неотрицательна.

9. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

а) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, $x_0=1$; б) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$, $x_0=0$;

в) $f(x)=\frac{3x-1}{x+4}$, $x_0=-3$; г) $f(x)=\frac{5x+2}{7x+13}$, $x_0=-2$.

10. Решите следующие неравенства:

а) $f'(x)>\frac{1}{2(x-1)}$, если $f(x)=-\frac{1}{x-1}$; б) $f'(x)\leq\frac{4}{3(x^2-1)}$, если $f(x)=-\frac{1}{x^2-1}$.

11. При каких значениях переменной значение функции $g(x)$ равно значению производной функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=-\cos x$, $g(x)=\sin 3x$; б) $f(x)=-5\cos x-5x$, $g(x)=6\cos^2 x$;

в) $f(x)=\sqrt{2}x+5$, $g(x)=\cos 3x+\sin 3x$; г) $f(x)=\cos x$, $g(x)=\frac{\cos 3x}{\sin 2x}$.

12. Дана функция $f(x)=\sin 2x-\cos x+3x$. Найдите производную функции, вторую производную, производную третьего порядка, производную четвертого порядка.

13. Дана функция $f(x)=\frac{1}{120}x^5-3x^4+\frac{1}{16}x^3-3x^2+\sqrt{7}$. Найдите производную пятого порядка от функции $f(x)$.

14. Найдите производные следующих функций:

а) $f(x)=\sin^4 x$, $g(x)=\sin x^4$, $h(x)=\sin^3 x^4$, $u(x)=\sin(4x)^3$;

б) $f(x)=\arccos^2 x$, $g(x)=\arccos^2(2x-1)$, $h(x)=\arccos(2x+1)^3$,

$u(x)=\arccos^3(4x+5)^2$.

15. Найдите значения производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если:

а) $f(x) = x\sin x + \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; б) $f(x) = x^2\cos 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

в) $f(x) = (4\pi x - \pi)\operatorname{tg}(3\pi x)$, $x_0 = \dfrac{1}{12}$; г) $f(x) = x\arccos 2x$, $x_0 = 0$.

16. Вычислите:

а) $g'(-9)$, если $g(x) = x(x+10)^5$; б) $h'(1)$, если $h(x) = 2x(3x-2)^7$;

в) $u'(-1)$, если $u(x) = (2x+1)^4(2+3x)^9$; г) $f'(-3)$, если $g(x) = 3x\left(\dfrac{9}{x}+4\right)^3$.

17. Решите следующие неравенства:

а) $f'(x) \ge 0$, если $f(x) = \cos 2x - x$; б) $f'(x) \le 1$, если $f(x) = \sin x - \cos x$;

в) $f'(x) \ge 5$, если $f(x) = \sin^2 x + 4x$; г) $f'(x) \ge \cos x$, если $f(x) = \cos x$.

Часть 2

18. Найдите производные следующих функций:

а) $f(x) = -x$, $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $h(x) = -\dfrac{x^3}{3}$, $u(x) = \dfrac{x^4}{4}$, $v(x) = \dfrac{x^m}{m}$;

б) $f(x) = -\dfrac{1}{5x^5}$, $g(x) = \dfrac{1}{6x^3}$, $h(x) = -\dfrac{1}{14x^7}$, $u(x) = \dfrac{1}{24x^8}$, $v(x) = -\dfrac{1}{3^{95}\left(x^3\right)^{91}}$.

19. Найдите производные следующих функций:

$f(x) = 1 - 3x$, $g(x) = 2 - 3x^2$, $h(x) = 3\left(1 - \dfrac{x}{3}\right)^5$, $u(x) = \dfrac{1}{15}\left(2 - 3x^2\right)^5$.

20. Найдите производные следующих функций:

а) $f(x) = 2\sin\dfrac{x}{2}$, $g(x) = \dfrac{7}{3}\sin 3x$, $h(x) = -\dfrac{1}{7}\sin\left(14x + \dfrac{\pi}{6}\right)$,

$u(x) = \dfrac{1}{5\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{8} - 10\pi x\right)$;

б) $f(x) = -22\cos\dfrac{x}{11}$, $g(x) = \dfrac{1}{18}\cos 27x$, $h(x) = -\dfrac{2}{9}\cos\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{7}\right)$,

$u(x) = -\dfrac{8}{9}\cos\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{27\pi x}{16}\right)$;

в) $f(x)=4\operatorname{tg}\frac{x}{4}$, $g(x)=\frac{3}{4}\operatorname{tg}\frac{8x}{9}$, $h(x)=\frac{4}{45}\operatorname{tg}\left(\frac{15x}{2}-\frac{\pi}{9}\right)$,

$u(x)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}-5\pi x\right)$;

г) $f(x)=-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$, $g(x)=\frac{9}{11}\operatorname{ctg}\frac{22x}{3}$, $h(x)=\frac{3}{5}\operatorname{ctg}\left(\frac{10x}{9}-\frac{\pi}{21}\right)$,

$u(x)=-\frac{1}{25\pi}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{11}-75\pi x\right)$.

21. Найдите производные следующих функций:

а) $f(x)=3\arccos x$, $g(x)=\arccos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$, $h(x)=\frac{1}{3}\arccos x^3$,

$u(x)=\frac{1}{4}\arccos(2x^2-1)$;

б) $f(x)=0{,}2\operatorname{arcctg}5x$, $g(x)=0{,}6\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}x+\frac{\pi}{7}\right)$, $h(x)=\frac{1}{12}\operatorname{arctg}3x^4$,
$u(x)=\frac{1}{7}\operatorname{arcctg}(14x^2-1)$.

22. Найдите производные следующих функций:

а) $f(x)=\sqrt{x+2}$, $g(x)=2\sqrt{\frac{x}{2}-8}$, $h(x)=-4\sqrt{14-\sin x}$, $u(x)=-4\sqrt{\sin 7x+5}$.

23. Найдите значения переменной x, при которых производная функции $f(x)$ равна a.

а) $f(x)=3\sin x$, $a=1{,}5$;

б) $f(x)=5\cos 4x+8\pi$, $a=10\sqrt{3}$;

в) $f(x)=9\sin 4x-15x$, $a=3$;

г) $f(x)=0{,}3\operatorname{ctg}(10\pi x)+9\pi x$, $a=6\pi$.

24. При каких значениях переменной t выполняются одновременно два условия: $f'(t)<0$ и $f(t)\le 0$, если $f(t)=t^2+4t-5$?

25. Укажите множество значений переменной x, для которых производная функции $f(x)=4x^3-9x^4$ отрицательна.

26. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

а) $f(x)=\frac{2x-1}{2x+1}$, $x_0=0{,}5$;

б) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^3+2}$, $x_0=0$;

в) $f(x)=\frac{3x-1}{x+4}$, $x_0=-3$;

г) $f(x)=\frac{6x+2}{3x-5}$, $x_0=2$.

27. Решите следующие неравенства:

а) $f'(x)\geq\dfrac{2}{3(4x-x^2)}$, если $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x}$;

б) $f'(x)<\dfrac{4}{(2x^2-1)}$, если $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-1}$.

28. При каких значениях переменной значение функции $g(x)$ равно значению производной функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=-\dfrac{2\cos 5x}{5}+\cos\dfrac{\pi}{3}$, $g(x)=\sin 3x+\sin 7x$;

б) $f(x)=2x+\cos^2\dfrac{4\pi}{17}$, $g(x)=\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x$;

в) $f(x)=-\dfrac{\cos 8x}{8}-\dfrac{\cos 2x}{2}$, $g(x)=2\sin 3x\cos x$;

г) $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{8}+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{\sin 2\pi}{21}$, $g(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$?

29. Дана функция $f(x)=\sin x+\cos 3x-7x^2$. Найдите производную функции, вторую производную, производную третьего порядка, производную четвертого порядка.

30. Дана функция $f(x)=\dfrac{1}{12}x^4+2x^2-85x+2015^2$. Найдите производную четвертого порядка от функции $f(x)$.

31. Найдите производные следующих функций:

а) $f(x)=4\sqrt{\cos x}$, $g(x)=\sqrt{\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$, $h(x)=\cos\sqrt{x}$, $u(x)=\cos\sqrt{x^2+1}$;

б) $f(x)=\operatorname{arctg}^3 x$, $g(x)=\operatorname{arctg}^3(5x)$, $h(x)=\operatorname{arctg}(2x^3)$, $u(x)=\operatorname{arctg}^2(x^2+1)$.

32. Найдите значения производной функции $f(x)$ в точке $x=x_0$, если:

а) $f(x)=x\cos x-\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$; б) $f(x)=4x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{x}{2}\right)$, $x_0=\dfrac{2\pi}{3}$;

в) $f(x)=\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi x}{8}\right)$, $x_0=2$; г) $f(x)=x\arcsin(x+1)$, $x_0=0$.

33. Вычислите:

а) $g'(0)$, если $g(x)=x^6(7-x)^7$; б) $h'(2)$, если $h(x)=(3-x)^5(2x-3)^4$;

в) $u'(-1)$, если $u(x)=\left(\dfrac{2}{x}+3\right)^6(3x+4)^{10}$; г) $f'(-0{,}5)$, если $g(x)=4x(8x+5)^5$.

34. Решите следующие неравенства:

а) $f'(x)\geq 0$, если $f(x)=2\sin x-x$; б) $f'(x)\geq 0$, если $f(x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$;

в) $f'(x)\leq \pi+3$, если $f(x)=\sin 2\pi x+3x$; г) $f'(x)\leq \sin x$, если $f(x)=\sin x$.

35. (4) Некоторые из 11 больших коробок содержат по 8 средних коробок, некоторые из средних коробок содержат по 8 маленьких коробок. Среди всех этих коробок 102 пустых. Сколько всего коробок?

36. (3) Турист проехал расстояние между двумя городами за три дня. В первый день он проехал $\dfrac{1}{5}$ всего пути и еще 60 км, во второй день он проехал $\dfrac{1}{4}$ всего пути и еще 20 км и в третий день $\dfrac{23}{80}$ всего пути и оставшиеся 25 км. Найдите расстояние между городами.

37. (2) Решите систему уравнений: $\begin{cases} x+|y|=2, \\ 3x+|y|=4. \end{cases}$

38. (3) Две бригады, работая одновременно, обработали участок земли за 12 ч. За какое время могла бы обработать этот участок каждая из бригад в отдельности, если скорости выполнения работы бригадами относятся как 3:2?

39. (3) Упростите:

$$\frac{a^2+10a+25+2\sqrt{5}\left(\sqrt{a^3}+5\sqrt{a}\right)}{\left(a^2-25\right)\left(\left(\sqrt{a^3}-\sqrt{125}\right)\left(a+\sqrt{5a}+5\right)^{-1}\right)^{-1}}.$$

40. (2) Решите уравнения:

а) $\dfrac{1-x}{(2-x)(x-3)}+1=\dfrac{1}{2-x}$; б) $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x^2-2x}$.

41. (2) Найдите третий член геометрической прогрессии, если ее знаменатель равен 3, а сумма первых четырех членов равна 40.

Ответы: *(в ответах $n, k \in \mathbb{Z}$)*

1. а) $f'(x)=1$, $g'(x)=2x$, $h'(x)=3x^2$, $u'(x)=4x^3$, $v'(x)=2014x^{2013}$;

б) $f'(x)=0$, $g'(x)=-\dfrac{1}{x^3}$, $h'(x)=-\dfrac{1}{x^4}$, $u'(x)=\dfrac{1}{x^5}$, $v'(x)=\dfrac{3}{2^{12}x^{25}}$.

2. $f'(x)=2$, $g'(x)=2x-2$, $h'(x)=8x-4$, $v'(x)=8\left(x^2-2x-1\right)^3(x-1)$.

3. а) $f'(x)=\cos x$, $g'(x)=2\cos 2x$, $h'(x)\dfrac{1}{2}\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $u'(x)=4\cos\left(\dfrac{\pi}{5}-4\pi x\right)$;

б) $f'(x)=\sin x$, $g'(x)=-3\sin 3x$, $h'(x)=-2\sin\left(8x-\dfrac{\pi}{7}\right)$,

$u'(x)=3\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{3\pi x}{2}\right)$;

в) $f'(x)=\dfrac{2}{\cos^2 x}$, $g'(x)=\dfrac{5}{2\cos^2\dfrac{5x}{2}}$, $h'(x)=\dfrac{2}{\cos^2\left(\dfrac{14x}{3}-\dfrac{\pi}{9}\right)}$,

$u'(x)=-\dfrac{3}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}-9\pi x\right)}$;

г) $f'(x)=\dfrac{3}{\sin^2 x}$, $g'(x)=-\dfrac{8}{\sin^2\dfrac{8x}{7}}$, $h'(x)=-\dfrac{6}{\sin^2\left(\dfrac{27x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}$,

$u'(x)=-\dfrac{2}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{11}-22\pi x\right)}$.

4. а) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$, $h'(x)=\dfrac{8x}{\sqrt{1-4x^4}}$, $u'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$;

б) $f'(x)=\dfrac{1}{10+10x^2}$, $g'(x)=\dfrac{8{,}1}{1+\left(27x+\dfrac{\pi}{9}\right)^2}$, $h'(x)=\dfrac{x^2}{1+4x^6}$, $u'(x)=\dfrac{x^4}{x^{10}-2x^5+2}$.

5. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $g'(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{3-4x}}$, $h'(x)=-\dfrac{4x}{\sqrt{5-4x^2}}$, $u'(x)=-\dfrac{\sin x}{2\sqrt{2+\cos x}}$.

6. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; б) $\pm\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}$; в) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$; г) $x\in\varnothing$.

7. $t\in(-\infty;-1)$. **8.** $x\in[-2;+\infty)$. **9.** а) $\frac{1}{2}$; б) 0; в) 13; г) 51.

10. а) $x\in(-\infty;1)\cup(1;3)$; б) $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;-0,5)\cup(2;+\infty)$.

11. а) πk, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; в) $\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}$; г) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$.

12. $f'(x)=2\cos 2x+\sin x+3$; $f''(x)=-4\sin 2x+\cos x$;

$f'''(x)=-8\cos 2x-\sin x$; $f''''(x)=16\sin 2x-\cos x$.

13. 1.

14. а) $f'(x)=4\sin^3 x\cos x$, $g'(x)=4x^3\cos x^4$, $h'(x)=12x^3\sin^2 x^4\cos x^4$,

$u'(x)=192x^2\cos(64x^3)$;

б) $f'(x)=-\frac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x)=-\frac{2\arccos(2x-1)}{\sqrt{x-x^2}}$, $h'(x)=-\frac{6(2x+1)^2}{\sqrt{1-(2x+1)^6}}$,

$u'(x)=-\frac{24(4x+5)\arccos^2(4x+5)^2}{\sqrt{1-(4x+5)^4}}$.

15. а) 0; б) $-\frac{\pi}{8}$; в) $4\pi-\pi^2$; г) $\frac{\pi}{2}$. **16.** а) -44; б) 44; в) 35; г) 30.

17. а) $x\in\left[-\frac{5\pi}{12}+\pi k;\frac{\pi}{12}+\pi k\right]$; б) $x\in\left[-\frac{3\pi}{2}+2\pi k;2\pi k\right]$; в) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$;

г) $x\in\left[-\frac{5\pi}{4}+2\pi k;-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$

18. а) $f'(x)=-1$, $g'(x)=x$, $h'(x)=-x^2$, $u'(x)=x^3$, $v'(x)=x^{m-1}$;

б) $f'(x)=\frac{1}{x^6}$, $g'(x)=-\frac{1}{2x^4}$, $h'(x)=\frac{1}{2x^8}$, $u'(x)=-\frac{1}{3x^9}$, $v'(x)=\frac{91}{3^{94}x^{274}}$.

19. $f'(x)=-3$, $g'(x)=-6x$, $h'(x)=-5\left(1-\frac{x}{3}\right)^4$, $u'(x)=-2x(2-3x^2)^4$;

20. а) $f'(x)=\cos\frac{x}{2}$, $g'(x)=7\cos 3x$, $h'(x)=-2\cos\left(14x+\frac{\pi}{6}\right)$,

$u'(x)=-2\cos\left(\frac{\pi}{8}-10\pi x\right)$;

б) $f'(x)=2\sin\frac{x}{11}$, $g'(x)=-\frac{3}{2}\sin 27x$, $h'(x)=\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{7}\right)$,

$u'(x)=-\frac{3\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{27\pi x}{16}\right)$;

в) $f'(x)=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}}$, $g'(x)=\frac{2}{3\cos^2\frac{8x}{9}}$, $h'(x)=\frac{2}{3\cos^2\left(\frac{15x}{2}-\frac{\pi}{9}\right)}$,

$u'(x)=-\frac{5}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}-5\pi x\right)}$;

г) $f'(x)=\frac{1}{9\sin^2\frac{x}{3}}$, $g'(x)=-\frac{6}{\sin^2\frac{22x}{3}}$, $h'(x)=-\frac{2}{3\sin^2\left(\frac{10x}{9}-\frac{\pi}{21}\right)}$,

$u'(x)=-\frac{3}{\sin^2\left(\frac{\pi}{11}-75\pi x\right)}$.

21. а) $f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x)=-\frac{2}{\sqrt{1-\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)^2}}$, $h'(x)=-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$,

$u'(x)=-\frac{x}{2\sqrt{x^2-x^4}}$;

б) $f'(x)=-\frac{1}{1+25x^2}$, $g'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{5}{3}x+\frac{\pi}{7}\right)^2}$, $h'(x)=\frac{x^3}{1+9x^8}$,

$u'(x)=-\frac{4x}{1+(14x^2-1)^2}$.

22. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$, $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2}-8}}$, $h'(x)=\frac{2\cos x}{\sqrt{14-\sin x}}$, $u'(x)=-\frac{14\cos 7x}{\sqrt{\sin 7x+5}}$.

23. а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z;$ б) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z;$

в) $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$ в) $\frac{1}{20}+\frac{k}{10},\ k\in Z.$

24. $t\in[-5;-2)$. **25.** $x\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. **26.** а) 1; б) 0; в) 13; г) −36.

27. а) $x\in(-\infty;0)\cup(0;1]\cup[6;+\infty)$; б) $x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$.

28. а) $\frac{\pi k}{5},\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{14}+\frac{\pi m}{7}$; в) $\frac{\pi k}{2},\ \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}$; г) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$.

29. $f'(x)=\cos x-3\sin 3x-14x$; $f''(x)=-\sin x-9\cos 3x-14$;

$f'''(x)=-\cos x+27\sin 3x$; $f''''(x)=\sin x+81\cos 3x$.

30. 2.

31. а) $f'(x)=-\frac{2\sin x}{\sqrt{\cos x}}$, $g'(x)=-\frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}}$, $h'(x)=-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$,

$u'(x)=-\frac{x\sin\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$;

б) $f'(x)=\frac{3\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}$, $g'(x)=\frac{15\operatorname{arctg}^2(5x)}{1+25x^2}$, $h'(x)=\frac{6x^2}{1+4x^6}$,

$u'(x)=\frac{4x\operatorname{arctg}(x^2+1)}{2+2x^2+x^4}$;

32. а) $-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$; б) $-\frac{8\pi^2}{9}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{2}$. **33.** а) 0; б) 3; в) 28; г) −76.

34. а) $x\in\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$; б) $x\in\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right)$;

в) $x\in\left[\frac{1}{6}+k;\frac{5}{6}+k\right]$; г) $x\in\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right]$.

35. 115. **36.** 400 км. **37.** (1;1), (1;−1). **38.** За 20 и 30 ч. **39.** $\sqrt{a}+\sqrt{5}$.

40. а) $x=1$; б) $x=3$; **41.** 9.

Дополнительные задачи

Вычислите производные от следующих функций (1–7):

1. (1) $f(x)=x+5$.

2. (1) $f(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1$.

3. (2) $f(x)=\frac{x^2+2x}{2x-6}$.

4. (2) $f(x)=\frac{1-x^9}{1-x^3}$.

5. (2) $f(x)=(5x^2-3x+2)^5$.

6. (2) $f(x)=\frac{3-x}{(x+7)^2}$.

7. (2) $f(x)=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.

8. (2) Решите уравнение $f'(x)=0$, если:

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x$.

9. (2) Решите уравнение $f'(x)=g'(x)$, если:

$f(x)=4x^3+12x^2$, $g(x)=5x^3+8x^2$.

10. (3) Решите неравенство $f'(x)<g'(x)$, если:

$f(x)=3x^3+21x^2+5x-7$, $g(x)=2x^3+8x^2+5x+11$.

11. (3) Решите неравенство $\frac{f'(x)}{g'(x)}<0$, если:

$f(x)=11x^3-11x^2+9$, $g(x)=4x^3+5x^2-17$

12. (3) Решите систему неравенств $\begin{cases} f'(x)>0 \\ g'(x)\le 0 \end{cases}$, если:

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-16x+18$, $g(x)=\frac{1}{3}x^3-8x^2+21$.

13. (2) Укажите число целых решений неравенства $f'(x)\le 0$, если:

$f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{16x^3}{3}$.

14. (2) Найдите те значения аргумента, при которых производная функции $y=x^3-3x$ принимает положительные значения.

Найдите производные следующих функций (15–17):

15. (2) а) $f(x)=\sqrt{x}$; б) $f(x)=3x+4\sqrt{x}$.

16. (3) а) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; б) $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}-x}$.

17. (3) а) $f(x)=\left(\sqrt{5x}+1\right)^4$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\left(7\sqrt{2x}+8x\right)^3}$.

18. (3) Вычислите значения производной функции $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x)=x^4\left(2\sqrt{x}+3x\right)^4,\ x_0=1$;

б) $f(x)=\left(x^2-8x+16\right)^2\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}\right)^3,\ x_0=4$.

Найдите производные следующих функций (19–24):

19. (1) а) $y=-\cos x$; б) $y=5\sin x$; в) $y=x^2\sin x$.

20. (2) а) $y=2\sin x\cos x$; б) $y=x^2+\cos 2x\sin 3x$.

21. (2) а) $y=\cos^2 x$; б) $y=\dfrac{7}{\sin^7 x}$; в) $y=\cos^3 x\sin^2 x$;

г) $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$; д) $y=tg^2 x\cdot ctg^2 x$; е) $y=-\dfrac{1}{9}\sin^3 3x$;

ж) $y=\left(x^2+5sinx\right)^3$.

22. (3) а) $f(x)=\sqrt{x+\sin x}$; б) $f(x)=\sqrt{x\sin 2x}$; в) $f(x)=\sqrt{\cos x\sin x}$;

г) $f(x)=ctg^2\sqrt{2x^3-3x^2}$; д) $f(x)=\sin\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$;

е) $f(x)=\dfrac{\sin\sqrt{2x^3+6x}}{\cos\sqrt{2x^3+6x}}$.

23. (3) а) $f(x)=\sin\sin x$; б) $f(x)=\cos(\sin x)$;

в) $f(x)=tg\sqrt{tg2x}$; г) $f(x)=\cos(\cos x)\sin(\sin x)$.

24. (3) а) $f(x)=\arccos 2x$; б) $f(x)=\mathrm{arctg}(x^2)$;

в) $f(x)=\mathrm{arcctg}\sqrt{x^2-\dfrac{\pi}{6}}$; г) $f(x)=x^2\arcsin x$.

25. (3) Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции: $y=1+4\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ равна $10\sqrt{3}$.

26. (4) Задана последовательность функций $f_n(x)$, $n=0,1,2......$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f_0(x)=\sin x$,

2) $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$ (каждая функция, кроме $f_0(x)$, равна производной предыдущей функции).

Найдите: а) $f_4(x)$; б) $f_{10}(x)$; в) $f_{2014}(x)$.

27. (2) Решите уравнение $f'(x)=0$, если $f(x)=3x^4-4x^3$.

28. (3) Решите уравнение $f'(x)=g'(x)$, если $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

29. (3) Решите неравенство $f'(x)<g'(x)$, если $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+1}$, $g(x)=\dfrac{2x}{2x^2+1}$.

30. (3) Решите неравенство $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}<0$, если $f(x)=5x^3-25x^2$, $g(x)=3x^3+9x^2$.

31. (3)Решите систему неравенств $\begin{cases} f'(x)\le 0, \\ g'(x)\le 0, \end{cases}$

если $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3+3x^2+8x$, $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+3x^2+9x$.

32. (2) Найти те значения аргумента, при которых производная функции $y=x^5-\dfrac{5}{4}x$ принимает отрицательные значения.

33. (2) Найти те значения аргумента, при которых производная функции $y=\sqrt{x}+x$ принимает неотрицательные значения.

Вычислите производные следующих функций (34-35):

34. (2) а) $f(x)=x\sqrt{x}$; б) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$; г) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+5}$;

35. (3) а) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5x-x^2}}$; б) $f(x)=x^2\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{x}-7\right)^2$;

в) $f(x)=x^3\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{x}-13x\right)^3$.

36. (3) Найдите все значения x^x, при каждом из которых производная функции: $y=5+8\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{7}\right)$ равна $8\sqrt{3}$.

37. (4) Задана последовательность функций $f_n(x),(n=0,1,2......)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f_0(x)=\cos x$,

2) $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$(каждая функция, кроме $f_4(x)$;, равна производной предыдущей функции.)

Найдите: а) $f_4(x)$; б) $f_{10}(x)$; в) $f_{2014}(x)$.

Ответы:

1. 1. **2.** $x^4+x^3+x^2-x$. **3.** $\dfrac{x^2-6x-6}{2(x-3)^2}$. **4.** $3x^2+6x^5$.

5. $5(10x-3)(5x^2-3x+2)^4$. **6.** $\dfrac{x-13}{(x+7)^3}$. **7.** $\dfrac{4x-4}{(x+1)^3}$.

8. $-1;-3$. **9.** $0;\dfrac{8}{3}$. **10.** $x\in\left(-\dfrac{26}{3};0\right)$.

11. $x\in\left(-\dfrac{5}{6};0\right)\cup\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$. **12.** $x\in(4;16]$. **13.** 9.

14. $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **15.** а) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $3+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$. **16.** а) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

б) $\dfrac{x+6\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-x)^2}$. **17.** а) $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{x}}(\sqrt{5x}+1)^3$; б) $-3\left(\dfrac{7\sqrt{2}+16\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(7\sqrt{2x}+8x\right)^4}\right)$.

18. а) 4500; б) 0. **19.** а) $\sin x$; б) $5\cos x$; в) $2x\sin x+x^2\cos x$.

20. а) $2\cos 2x$; б) $2x-2\sin 2x\sin 3x+3\cos 3x\cos 2x$.

21. а) $-\sin 2x$; б) $\sin x\cos^2 x(5\cos^2 x-3)$; в) $\sin x\cos^2 x(5\cos^2 x\ \ 3)$;

г) $-\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$; д) 0; е) $-\sin^2 3x\cos 3x$; ж) $3\left(x^2+5\sin x\right)^2\left(2x+5\cos x\right)$.

22. а) $\dfrac{1+\cos x}{2\sqrt{x+\sin x}}$.; б) $\dfrac{\sin 2x+2x\cos 2x}{2\sqrt{x\sin 2x}}$.; в) $\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{2\sin 2x}}$;

г) $\dfrac{6\left(x-x^2\right)}{\sqrt{2x^2-3x^2}\sin^2\sqrt{2x^3-3x^2}}\operatorname{ctg}\sqrt{2x^3-3x^2}$; д) $-\dfrac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\cos\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;

е) $\dfrac{3\left(x^2+1\right)}{\sqrt{2x^3+6x}\cdot\cos^2\sqrt{2x^3+6x}}$.

23. а) $\cos(\sin x)\cos x$; б) $-\sin(\sin x)\cos x$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}2x}\cdot\cos^2 2x\cdot\cos^2\sqrt{\operatorname{tg}2x}}$; г) $-\sin x\cdot\cos(2\cos x)$.

24. а) $-\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$; б) $\dfrac{2x}{1+x^4}$; в) $\dfrac{6x}{\left(\pi-1-x^2\right)\sqrt{x^2-\dfrac{\pi}{6}}}$;

г) $2x\arcsin x+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.; **25.** а) $x=\dfrac{1}{5}\left(\pm\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$

26. а) $\sin x$; б) $-\sin x$; в) $-\sin x$; **27.** 0; 1. **28.** $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. **29.** $x\in\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

30. $x\in(-2;0)\cup\left(0;\dfrac{10}{3}\right)$. **31.** $x\in\{-3\}$. **32.** $x\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **33.** $x\in[0;+\infty)$.

34. а) $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$; б) $\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$; в) $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$; г) $\dfrac{5-x}{2\sqrt{x}(x-5)^2}$. **35.** а) $\dfrac{4x\sqrt{x}-\sqrt{5}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{5x}-x\right)^2}$;

б) $2\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-7x\right)\left(\sqrt{x}-7\right)$; в) $3\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-13x^2\right)^2\left(\sqrt{x}-26x\right)$.

36. $x=\dfrac{1}{2}\left((-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{7}+\pi n\right)$, где $n\in\mathbb{Z}$. **37.** а) $\cos x$; б) $-\cos x$; в) $-\cos x$.

§3 ФИЗИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

3.1 Дифференциал и физический смысл производной

Математик не только способствует более глубокому пониманию решения, найденного естествоиспытателем, но и существенно обобщает первоначальную постановку проблемы.

Ю. П. Вигнер

Физик и математик наблюдают за камнем, который запускается с поверхности земли вертикально вверх с начальной скоростью υ_0. Оба рассуждают о взаимосвязи времени, скорости и расстояниях. Физик рассуждает примерно так. Материальная точка, движущаяся с постоянной скоростью за время t проходит путь $S=\upsilon t$. Однако ясно, что скорость камня не есть постоянная величина. Тогда рассмотрим ситуацию в течение очень малого промежутка времени dt, прошедшего после некоторого фиксированного момента t_0. За этот промежуток высота камня изменилась на очень малую величину dS. Физик не без оснований предполагает, что вряд ли за очень малый промежуток времени dt скорость камня существенно изменилась. И, обозначив скорость камня в момент времени t_0 как $\upsilon(t_0)$, он смело пишет $dS=\upsilon(t_0)\,dt$; величину $\upsilon(t_0)$ он называет мгновенной скоростью; dS он называет бесконечно малым приращением пути, произошедшем за бесконечно малый промежуток времени dt; dt и dS для физика – дифференциалы пути и времени соответственно. При этом, dS и dt для него – реально существующие величины, просто очень-очень маленькие. Он даже совершает с ними математические операции: делит обе части на dt, например, и получает равенство $\frac{dS}{dt}=\upsilon(t_0)$.

Математик же, как и положено математику, начинает придумывать некие несуществующие в реальной природе вещи. Он представляет себе график зависимости высоты S от времени t. В точке графика с абсциссой t_0 он проводит касательную и коэффициент ее наклона называет производной $S'(t_0)$. Математик рассматривает ситуацию в момент времени t_0: приращение аргумента $t-t_0$, приращение функции $S(t)-S(t_0)$ и произведение $S'(t_0)(t-t_0)$.

Произведение $S'(t_0)(t-t_0)=k(t-t_0)=tg\alpha(t-t_0)=PQ_t$. Индекс t в обозначении ставится для выражения того факта, что ситуация рассматривается в динамике: t приближается к t_0.

Математик понимает, что при таком приближении разница PT между величинами $S(t)-S(t_0)$ и $S'(t_0)(t-t_0)=PQ_t$ уменьшается существенно быстрее, чем уменьшается разность $t-t_0$. Однако при всем его уважении к другу-физику любовь к точности побеждает и математик не может согласиться с тем, что приращение функции $S(t)-S(t_0)$ совпадает с $S'(t_0)(t-t_0)$ даже при очень близких значениях t и t_0: ведь есть отрезок PT. Он записывает:

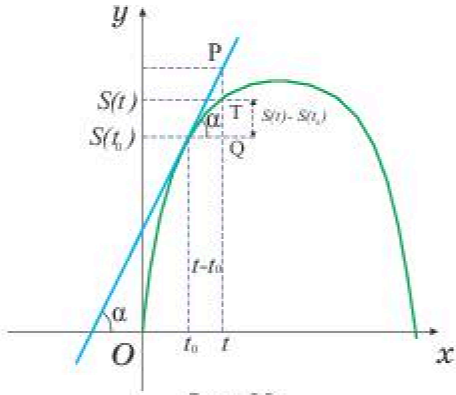


Рис. 32

$$S(t)-S(t_0)=S'(t_0)(t-t_0)+PT.$$

Дифференциалом функции $S(t)$ в точке t_0 математик называет функцию (!) $S'(t_0)(t-t_0)$. После этого при малых значениях разности $t-t_0$ он соглашается обозначить разность как dt, а саму функцию $S'(t_0)(t-t_0)$ как dS и получает равенство $dS=S'(t_0)dt$. Поскольку оба понимают, что dS математика и dS физика при значениях t, близких к t_0 – практически неотличимы, то оба приходят к соглашению, что мгновенная скорость $v(t_0)$ и производная $S'(t_0)$ – одно и то же. Математик соглашается принять новое обозначение для производной $S'(t_0)=\dfrac{dS}{dt}$, хотя для него $\dfrac{dS}{dt}$ не дробь, а всего лишь набор символов.

Подведем итоги.

Физический смысл производной. Пусть функция $S(t)$ задает зависимость некоторой физической величины S от времени t. Тогда производная $S'(t)$ задает мгновенную скорость $v(t)$ изменения величины S в момент времени t.

Если $v(t)$ – дифференцируемая функция, то имеет смысл рассмотреть ее производную $v'(t)$ как скорость изменения скорости. В физике ее называют ускорением $a(t)$. Скорость $v(t)=S'(t)$, ускорение $a(t)=v'(t)$.

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется функция, зависящая от dx:

$$df=f'(x)dx,$$

где dx понимается как достаточно малое приращение аргумента x.

Пример 1

Координата x материальной точки, двигающейся вдоль числовой оси, изменяется по закону $x(t)=t^3+3t^2-9t+2$ при $t\geq 0$. Найдите начальное положение точки, начальную скорость, и начальное ускорение точки. Найдите также ускорение точки в крайнем левом положении на оси.

Решение. Скорость в момент времени t вычисляется по формуле $v(t)=\frac{dx}{dt}=\left(t^3+3t^2-9t+2\right)'=3t^2+6t-9$, а ускорение $a(t)=\frac{dv}{dt}=v'(t)=\left(3t^2+6t-9\right)'=6t+6$. Начальное положение точки на оси $x(0)=2$. Начальная скорость $v(0)=-9$ (то есть точка сначала двигалась влево, если иметь в виду обычное расположение числовой оси); начальное ускорение $a(0)=6$. Нетрудно понять, что в крайнем левом положении скорость точки равна нулю. Скорость равна нулю при условии $3t^2+6t-9=0$, $t^2+2t-3=0$, $t_1=1\in[0;+\infty)$, $t_2=-3\notin[0;+\infty)$. Это значит, что в момент времени $t=1$ точка имела скорость, равную 0. Подставляя $t=1$ в $x(t)$, получаем крайнее левое положение точки x: $x(1)=-3$. Ускорение в этот момент было равно $a(1)=12$.

Пример 2

Если сила тока I в электрической цепи – величина постоянная, то количество заряда Q, проходящее за время t через данное сечение проводника, вычисляется по формуле $Q=I\cdot t$. Если $I=I(t)$ – непостоянная величина, непрерывно зависящая от времени, то, рассуждая как физики, мгновенно получаем соотношения: $dQ=I(t)dt$, $\frac{dQ}{dt}=I(t)$, $Q'(t)=I(t)$.

Пример 3

Если $A(t)$ – работа, выполняемая каким-нибудь устройством, мощность которого изменяется по закону $N(t)$, то имеют место равенства $dA=N(t)dt$, $\frac{dA}{dt}=N(t)$, $A'(t)=N(t)$.

В свою очередь, если $F(t)$ – сила, то $dN=F(t)dt$, $\frac{dN}{dt}=F(t)$,

$N'(t)=F(t)$.

Задачи

Часть 1

1. (3) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=3t^2+4t+2$ измеряется в метрах, t – в секундах. Найти путь, пройденный точкой с момента времени $t=0$ к тому моменту времени, когда ее скорость стала равной 16 $м/с$.
2. (3) Тело, выпущенное с поверхности земли вертикально вверх, движется по закону $h(t)=60t-5t^3$ (h измеряется в метрах, t – в секундах). Через сколько времени оно достигнет верхней точки своего подъема? Определить высоту, на которую ему удастся подняться.
3. (2) Найдите силу F, действующую на материальную точку с массой m, движущуюся прямолинейно по закону $x(t)=2t^3-t^2$ при $t=2$.
4. (2) Количества заряда, прошедшего через сечение электрического проводника, изменяется по закону $q(t)=5t^3+2t^2-5$. Найдите величину тока в момент t=2.
5. (2) Количество работы, совершенной топливным двигателем машины, изменяется по закону $A(t)=3t^2+5t$. Какова мощность двигателя на момент t=1?
6. (2) Если уравнение мощности двигателя $N(t)=2t+16$, то какое количество работы совершит двигатель через 12 секунд? Найдите уравнение работы.

Часть 2

7. (2) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{2}t^2+4t+2$: Найти отношение средней скорости точки за время $t=1$ к ее мгновенной скорости в момент времени $t=2$.
8. (2) Человек, рост которого равен 1,8 м, удаляется от источника света, находящегося на высоте 12 м, со скоростью 50 м/мин. С какой скоростью перемещается тень его головы?
9. (3) Тело массой 2 кг движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2+t+1$. Координата x измеряется в сантиметрах, время t – в секундах. Найдите: а) действующую силу; б) кинетическую энергию E тела через 2 с после начала движения.

10. (2) Ток в электрической цепи изменяется по закону $I(t)=2t^3+5$. По какому закону изменяется заряд в ней?

A) $q(t)=\frac{1}{2}t^3+5t$; B) $q(t)=6t^2$; C) $q(t)=6t^2+5t$; D) $q(t)=\frac{1}{2}t^4+5t$.

11. (2) Андрей и Белла играют в следующую игру. Они по очереди берут камни из кучи, не меньше 1 и не больше 7 каждый раз. Не разрешается брать столько же камней, сколько взял другой игрок на предыдущем ходе. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. В начале игры в куче было 15 камней. Первым ходит Андрей. Сколько камней он должен взять, делая первый ход, если он хочет наверняка выиграть игру?

12. (2) Найти решение уравнений: а) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9$;

б) $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$.

13. (2) Арман устраивается на работу. Фирма «К» обещает ему 1000 у.е. в первый месяц, и затем каждый месяц увеличивать его заработную плату на 10%. Какую сумму (в у.е.) заработает Арман за первый год?

14. (2) Упростите: $(3\sin x+2\cos x)^2+(2\sin x-3\cos x)^2$.

Ответы:

1. 20 м. **2.** Через 2 с на высоту 80 м.

3. 22 m. **4.** 68 А. **5.** 11 Вт.

6. $A(t)=t^2+16t$, 336 Дж. **7.** $\frac{13}{12}$.

8. $\frac{1000}{17}$ м/мин. **9.** а) 0,04 Н; б) 0,0025 Дж.

10. г). **11.** 7.

12. а) $x_1=2$, $x_2=0{,}5$; б) $x_1=-1$, $x_2=0{,}5$.

13. ≈ 21384 у. е. **14.** 13.

3.2 Касательная к графику функции

Умение решать задачи – такое же практическое искусство, как умение плавать или бегать на лыжах. Ему можно научиться только путем подражания или упражнения.
Д. Пойа

Мы предполагаем, что функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x=x_0$. Это равносильно тому, что в точке $(x_0,f(x_0))$ существует касательная.

ТЕОРЕМА.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x=x_0$. Тогда уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой $x=x_0$ имеет вид $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Доказательство. Пусть на координатной плоскости дана точка с координатами $(x_0;y_0)$. Тогда любая прямая, проходящая через данную точку, имеет уравнение вида $y-y_0=k(x-x_0)$, где k – некоторое число, являющееся угловым коэффициентом. Действительно, при подстановке $x=x_0$ и $y=y_0$ в данное уравнение получается верное равенство:

$$y_0-y_0=k(x_0-x_0).$$

Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=x_0$ проходит через точку с координатами $(x_0,f(x_0))$ (рис. 2) и, следовательно, имеет вид: $y_0-f(x_0)=k(x_0-x_0)$.

Остается вспомнить, что угловой коэффициент касательной k равен значению производной $f'(x_0)$: $y_0-f(x_0)=f'(x_0)(x_0-x_0)$

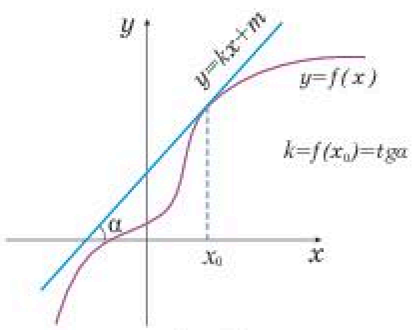


Рис. 2

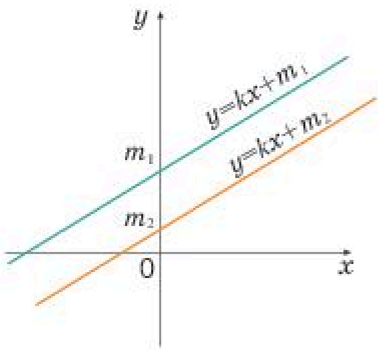


Рис. 3

Теорема доказана.

Кроме данного уравнения, для успешного решения задач о касательных, необходимо помнить еще несколько теоретических фактов.

1) Если $y = kx + m$ – уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, то $k = f'(x_0)$.

2) Для прямой $y = kx + m$ коэффициент k равен тангенсу угла α, образованного «верхней» частью прямой и положительным направлением оси Ox.

3) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ (рис. 3) параллельны тогда и только тогда, когда $\begin{cases} k_1 = k_2 \\ m_1 \neq m_2 \end{cases}$.

4) Пересечение графика любой функции $y=f(x)$ с осью ординат Oy ищем из условия $x=0$ (так как у всех точек на оси Oy абсцисса равна 0). Пересечение графика любой функции $y=f(x)$ с осью абсцисс Oy ищем из условия $y=0$ (так как у всех точек на оси Ox ордината равна 0).

*Перед вами список упражнений, решение которых мы приводим ниже. Но разве вам самим не интересно – **до какого уровня** вы сможете пройти **самостоятельно**?*

Упражнение 1

Найти уравнение касательной к графику функции $y=\cos^2 x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Упражнение 2

Найти уравнения касательной к графику функции $y=x^3-4x$ в точках пересечения этого графика с осью абсцисс.

Упражнение 3

Найти координаты точек пересечения с осями координат тех касательных к графику функции $y = \frac{2x-2}{x+1}$, которые параллельны прямой $y = 4x+1000$.

Упражнение 4

Найти координаты точек пересечения с осью OX тех касательных к графику функции $y = \frac{x+1}{x-3}$, которые образуют угол $\frac{3\pi}{4}$ с осью OX.

Упражнение 5

Найти уравнения всех тех касательных к графику функции $y=\frac{x^2+1}{x}$, каждая из которых вместе с осями координат ограничивает треугольник площадью 2.

Упражнение 6

Найти уравнения общих касательных к графикам функции $y=x^2$ и функции $y=-x^2+4x-6$.

Упражнение 7

Найти уравнения двух параллельных касательных соответственно к графикам $y=\sin 2x$ и $y=\frac{x^3}{3}+2x^2+6x$.

Решение упражнения 1

Рассуждение.
Уравнение касательной по теории: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.
Что известно? Известно значение x_0. Что необходимо найти? Необходимо вычислить $f(x_0)$ и $f'(x_0)$. Как это сделать?
Подставить x_0 в $f(x)$ и $f'(x)$. Следовательно, сначала нужно найти $f'(x)$.
Решение.

$$f(x)=\cos^2 x, f(x_0)=\cos^2\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-2\cos x\sin x=-\sin 2x, f'(x_0)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

Уравнение касательной $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,

$$y=\frac{1}{2}-1\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ y=-x+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

Ответ: $y=-x+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

Решение упражнения 2

Рассуждение. Как найти точки пересечения графика с осью Ox? У любой точки на этой оси вторая координата (y) равна нулю. Получается уравнение $0=x^3-4x, x(x-2)(x+2)=0, x=0$ или $x=2$ или $x=-2$. Что это значит? Это значит, имеются 3 точки пересечения. Надо рассмотреть 3 случая $x_0 = 0$, $x_0=2$, $x_0=-2$.

Решение. $f(x)=x^3-4x, f'(x)=3x^2-4$.

1) $x_0=0, f(0)=0, f'(0)=-4, y=f(0)+f'(0)(x-0), y=-4x$.

Остальные 2 случая аналогичные.

Решение упражнения 3

Рассуждение. В каком случае прямые параллельны? Их коэффициенты наклона должны быть равны. У прямой $y = 4x+1000$ коэффициент равен 4. А чему равен коэффициент наклона у касательной? По теории он равен $f'(x_0)$. Значит, $4=f'(x_0)$. Найдем $f'(x)$ и решим уравнение $f'(x)=4$. Если найдем x_0, то дальше все как в упражнении 1 или 2. Только $f'(x_0)$ уже известно. Пересечение касательной с осями находим из условия $x = 0$ для Oy и $y = 0$ для Ox.

Решение упражнения 4

Рассуждение. Какие прямые образуют угол $\frac{3\pi}{4}$ с осью Ox? Для любой прямой $y=kx+m$ $k=tg\alpha$, где α – угол между прямой и осью Ox. Значит $k=tg\frac{3\pi}{4}=-1$.

Но это не просто прямая – это касательная! Отсюда $k=f'(x_0)$, где x_0 пока неизвестно. Получается уравнение $-1=f'(x_0)$, откуда мы и найдем x_0.

Решение упражнения 5

Рассуждение.
Попробуем пока обойтись без точного рисования графика $y=\frac{x^2+1}{x}$.

Представим себе картинку в самом общем виде (рис. 4). Площадь треугольника AOB равна 2. Что отсюда мы можем найти? Ничего.

*Сейчас мы Вам дадим **очень полезный совет**. Если из тех числовых данных, которые даны в условии задачи, **ничего нельзя найти**, то это верный признак того, что **дело решается уравнением или системой уравнений**. Ищем величины, через которые можно было бы выразить (найти) то, что дано. Обозначив их через какие-нибудь буквы (x, y, a, b и т.п.), на время считаем, что они известны, и пытаемся через них выразить те величины, которые даны. Получается уравнение или система.*

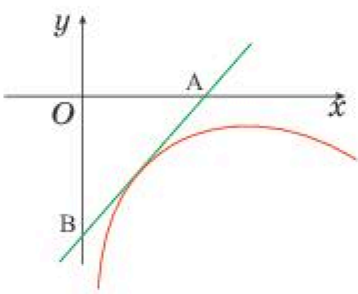


Рис. 4

Если бы мы знали абсциссу x_0 точки касания, то смогли бы найти уравнение касательной, пересечения этой касательной с осями и смогли бы найти площадь треугольника AOB.

Так и поступим, сделав вид, будто x_0 нам известно.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x},\ f'(x)=1-\frac{1}{x^2},$$

$$f(x_0)=x_0+\frac{1}{x_0},\ f'(x_0)=1-\frac{1}{x_0^2}$$

Подставим все это в уравнение касательной.....

Решение. Пусть x_0 – абсцисса точки касания. Тогда:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2},f(x_0)=x_0+\frac{1}{x_0},f'(x_0)=1-\frac{1}{x_0^2}.$$

Подставим все это в уравнение касательной:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\ y=x_0+\frac{1}{x_0}+\left(1-\frac{1}{x_0^2}\right)(x-x_0),\ y=\left(1-\frac{1}{x_0^2}\right)x+\frac{2}{x_0}.$$

Пересечение А этой прямой с осью ищем из условия $y=0$ $\left(1-\frac{1}{x_0^2}\right)x=-\frac{2}{x_0},x=\frac{2x_0}{1-x_0^2}$ – абсцисса точки А.

Пересечение В касательной с осью ищем из условия $y=0$: $A\left(\frac{2x_0}{1-x_0^2},0\right),B\left(0;\frac{2}{x_0}\right)$. Площадь треугольника OAB равна $\frac{1}{2}AO\cdot BO$, при чем $AO=\left|\frac{2x_0}{1-x_0^2}\right|,BO=\left|\frac{2}{x_0}\right|$

Точки A или B могут оказаться на отрицательных полуосях, поэтому BO равно не $\frac{2}{x_0}$, а $\left|\frac{2}{x_0}\right|$.

$S_{AOB}=2\left|\frac{1}{1-x_0^2}\right|$. Но по условию $S_{AOB}=2$. Получаем уравнение $\frac{1}{1-x_0^2}=\pm1$, откуда $x_0=\sqrt{2},-\sqrt{2},0$. Последнее значение x_0 не принадлежит $D(f)$ функции $y=\frac{x^2+1}{x}$.

Ответ: $y=\frac{x}{2}\pm\sqrt{2}$.

Решение упражнения 6

Рассуждение.
Опять из того, что дано, никаких непосредственных вычислений сделать невозможно. Вот если бы мы знали абсциссы точек касания....

Пусть p и q – абсциссы точек касания (рис. 5).
Если бы они были известны, то мы могли бы выписать уравнения касательных. Так и поступим, считая p и q известными.

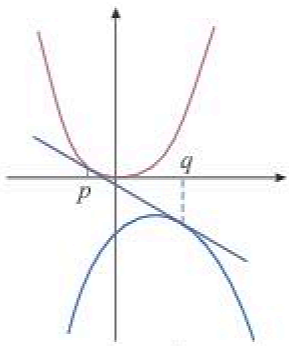


Рис. 5

Решение. $f(x)=x^2, f'(x)=2x, f(p)=p^2, f'(p)=2p.$
Уравнение касательной в точке p: $y = p^2 + 2p(x-p)$, $y=2px-p^2$.
Для второй функции $g(x)=-x^2+4x-6, g'(x)=-2x+4.$
Уравнение касательной в точке q:

$$y=-q^2+4q-6+(4-2q)(x-q), \quad y=(4-2q)x+q^2-6.$$

По условию эта касательная совпадает с первой $y=2px-p^2$. Но два уравнения $y=k_1x+m_1$ и $y=k_2x+m_2$ задают одну и ту же прямую только в том случае, если $k_1=k_2$ и $m_1=m_2$.

Отсюда система уравнений: $\begin{cases} 2p=4-2q, \\ -p^2=q^2-6. \end{cases}$

Решая систему, находим $q=1\pm\sqrt{2}$. Подставляем $q=1\pm\sqrt{2}$ в уравнение $y=(4-2q)x+q^2-6$ и получаем в ответе две возможных прямых.

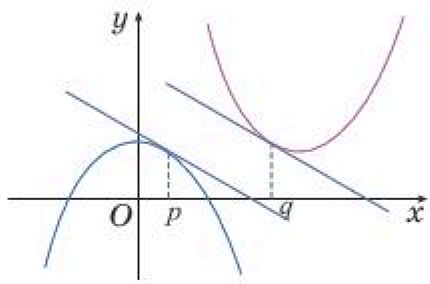


Рис. 6

Решение упражнения 7

Рассуждение. В каком случае касательные параллельны? (рис. 6)
Их угловые коэффициенты равны между собой. Что такое угловые коэффициенты? Это значения производных в точках касания. Необходимо найти производные и приравнять.

$$f(x)=\sin 2x-3x^3, f'(x)=2\cos 2x-9x^2, g(x)=\frac{x^3}{3}+2x^2+6x,$$

$$g'(x)=x^2+4x+6, f'(x)=g'(x), 2\cos 2x-9x^2=x^2+4x+6$$

Во-первых, уравнение какое-то необычное.

Во-вторых, перечитывая условие, понимаем, что абсциссы точек касания, вообще говоря, не обязаны совпадать. Пусть p и q – абсциссы точек касания (см. рисунок, графики – схематически). Тогда $2\cos 2p-9p^2=q^2+4q+6$. *Стало еще хуже.*

Еще один совет. Если уравнение содержит одновременно степенные и тригонометрические функции, то либо «разлагай и властвуй», либо ищи минимумы и максимумы.

Поскольку для любого значения p выполняются неравенства $\cos 2p\le 1$ и $2\cos 2p-9p^2\le 2$, то $2\cos 2p-9p^2\le 2$. С другой стороны, $q^2+4q+6=q^2+4q+4+2=(q+2)^2+2\ge 2$, так как для любого q имеет место неравенство $(q+2)^2\ge 0$.

Левая часть уравнения $2\cos 2p-9p^2=q^2+4q+6$ не превосходит 2, правая не меньше чем 2. Следовательно, равенство может иметь место только тогда, когда каждая из частей равна 2:

$$\begin{cases}2\cos 2p-9p^2=2,\\ q^2+4q+6=2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos 2p-9p^2=2,\\ (q+2)^2=0.\end{cases}$$

При решении уравнения применяем аналогичные соображения. Так как для любых значений p выполняются неравенства $2\cos 2p\le 2$ и $2+9p^2\ge 2$, то равенство $2\cos 2p=2+9p^2$ может состояться, только если в каждом из неравенств достигается равенство: $2\cos 2p=2$ и $2+9p^2=2$. Отсюда сразу следует, что $p=0$.

Итак, и $q=-2$ есть абсциссы точек касания к графикам первой и второй функций соответственно. Дальше все как в упражнении 1. Наше рассуждение незаметно перешло в решение. Решение доведите до конца и запишите в своей тетради.

Задачи

Часть 1

Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (1–8):

1. (1) $f(x)=0,5x^2+x+1, x_0=2.$

2. (1) $f(x)=\dfrac{x^2}{6}, x_0=2.$

3. (1) $f(x)=\cos x, x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

4. (1) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}, x_0=1.$

5. (1) $f(x)=x^4-7x^3+12x-45, x_0=0.$

6. (1) $f(x)=(x-2)(x^2+2x+4), x_0=3.$

7. (1) $f(x)=5-0.5x^2, x_0=-\sqrt{3}.$

8. (1) $f(x)=\sin(x+\pi)+1, x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

Найдите уравнения касательной к графику функции в точках пересечения этого графика с осью абсцисс (9–10):

9. (2) $y=\dfrac{x^3+1}{3}$.

10. (2) $y=x^2-2x$.

Найдите уравнения касательной к графику функции в точках пересечения этого графика с осью ординат (11–13):

11. (2) $y=x^2-2x+5$.

12. (2) $y=3x^3+2x+5$.

13. (2) $y=2-x-x^3$.

Найдите абсциссу x_0 точки графика функции $y = f(x)$, в которой касательная к нему параллельна заданной прямой (14–17).

14. (3) $y = x^2 - 3x+2$, прямая $2x + y = 5$.

15. (3) $y = x^2 - 2x+5$, прямая $y = 2x$.

16. (3) $y = x^2$, прямая $y=-\dfrac{1}{2}x+5$.

17. (3) $y=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+10x-4$ прямая $y = 3 + x$.

18. (3) В каких точках касательная к графику функции $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5x^2}{2}+7x-4$ образует с осью Ox угол 45°?

19. (3) Составьте уравнения касательных к кривым $y=2x^2-5$ и $y=x^2-3x+5$, проведенных через точки пересечения этих кривых.

20. (3) На графике функции $y = x(x-4)^3$ найдите точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

21. (3) Покажите, что касательные, проведенные к графику функции $y=\dfrac{x-4}{x-2}$ в точках его пересечения с осями координат, параллельны.

22. (3) В каких точках касательные к кривой $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-x+1$ параллельны прямой $y=2x-1$?

23. (3) Вычислите координаты точек пересечения с осью Oy тех касательных к графику функции $y=\dfrac{x+4}{x-5}$, которые образуют угол 135° с осью Ox.

24. (3) Составьте уравнение параболы $y=x^2+bx+c$, касающейся прямой $y=-x$ в точке $M(1;-1)$.

К графику заданной функции проведите касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y=2-x$ (25–26):

25. (2) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-x$

26. (2) $y=\frac{x^3}{3}+x^2-x$

27. (3) Через точку пересечения графиков функции $y=\frac{6}{\sqrt{x}}$ и $y=12x^{-\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}$ проведена касательная к каждому графику. Найдите разность углов, образованных этими касательными с положительным направлением оси Ox.

28. (3) В точке $M(1;8)$ к кривой $y=\sqrt{\left(5-x^{-\frac{2}{3}}\right)^3}$ проведена касательная. Найдите длину ее отрезка, заключенного между осями координат.

29. (3) Найти площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к кривой $y=\sqrt{x^2-5}$ в точке $M(3;\ 2)$.

30. (3) К гиперболе $y=\frac{4}{x}$ проведены касательные: одна – в точке $M(2;\ 2)$, а другая – параллельно прямой $y=-4x$. Найдите площади треугольников, образованных каждой из этих касательных с осями координат.

31. (3) Найдите координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $y=\cos x$: первая в точке на графике с абсциссой $x=\frac{\pi}{6}$, а вторая – и в точке с абсциссой $x=\frac{7\pi}{6}$.

32. (3) Найдите координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $y=\frac{3x+1}{2x-1}$: первая в точке на графике с абсциссой $x=-1$, а вторая – в точке с абсциссой $x=3$.

Часть 2

Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (33–37):

33. (1) $f(x)=x^4-2x^2, x_0=0{,}5.$

34. (1) $f(x)=\cos^2 x, x_0=\frac{\pi}{4}.$

35. (1) $f(x)=\sin x, x_0=0.$

36. (1) $f(x)=\sqrt{4-5x}, x_0=0.$

37. (1) $f(x)=\sqrt{x}+1, x_0=4.$

Найти уравнения касательной к графику функции в точках пересечения этого графика с осью абсцисс (38–39):

38. (2) $y=4x-x^2$.

39. (2) $y=6x^2-5x+1$.

40. Найдите уравнения касательной к графику функции в точках пересечения этого графика с осью ординат:

(3) $y=4+\sqrt[3]{x^5}+ctg\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

41. Найти абсциссу x_0 точки графика функции $y=f(x)$, в которой касательная к нему параллельна заданной прямой.

(3) $y=\frac{x^3}{3}-3x^2+10x-4$, прямая $y=3+x$.

Составьте уравнение той касательной к графику функции $y=f(x)$, которая образует с осью заданный угол α, (42–43):

42. (2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}x^3-3\sqrt{3}x,\quad \alpha=60°$;

43. (2) $f(x)=\frac{4}{\sqrt{3}}x-\frac{\sqrt{3}}{3}x^3,\quad \alpha=30°$.

44. (2) К параболе $y=4-x^2$ в точке на ней с абсциссой $x_0=1$ проведена касательная. Найдите точку пересечения этой касательной с осью Oy.

45. (2) К параболе $y=4x-x^2$ в точке на ней с абсциссой $x_0=3$ проведена касательная. Найдите точку пересечения этой касательной с осью Ox.

46. (2) Найдите уравнение касательной к функции $y=\sqrt{4-2x-x^2}$, проходящей через точку $(3; 0)$.

47. (2) Вычислите координаты точек пересечения с осью y тех касательных к графику функции $y=\frac{3x-1}{x+8}$, которые образуют угол $45°$ с осью Ox.

48. (3) Найдите координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $y=\sin 3x$: первая в точке на графике с абсциссой $x=\frac{\pi}{18}$, а вторая в точке с абсциссой $x=\frac{5\pi}{18}$.

49. (3) Найдите координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $y=\dfrac{x^2+1}{x-3}$: первая в точке на графике с абсциссой $x=4$, а вторая в точке с абсциссой $x=-2$.

50. (3) Найдите уравнение всех тех касательных к графику функции $y=\sqrt{1-2x^2}$, каждая из которых вместе с осями координат ограничивает треугольник площадью $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

51. (3) К графику функции $y=3x-x^2$ проведены две касательные. Первая касательная проведена в точке на графике с абсциссой $x_0=2$, вторая в точке максимума данной функции. Найдите площадь треугольника, образованного осью ординат и этими касательными.

52. (2) Если бы вчера был понедельник, то через 72 часа после сегодняшнего полудня был бы день недели, который на самом деле будет послезавтра. Из этого следует, что завтра будет...?

53. (3) В течение недели перед экзаменом ученик занимался 12 часов 15 минут, причем ежедневно он тратил на подготовку к экзамену на одно и то же число минут больше, чем в предыдущий день. В первые 3 дня он занимался в общей сложности 3 часа 45 минут. Сколько минут он занимался накануне экзамена?

54. (3) Требуется приготовить определенное количество порций омлета. На рынке имеется два вида одинаковых по форме яиц, но высота яиц первого вида в 1,5 раза больше высоты яиц второго вида. Сколько яиц второго вида можно купить вместо 8 яиц первого?
A) 10 B) 12 C) 16 D) 27 E) 24

55. (2) Решите уравнения:

а) $x^2+4|x-3|-7x+11=0$; б) $\left(3|x+1|+\dfrac{1}{3}\right)^2=6(x+1)^2+\dfrac{10}{9}$.

Ответы

1. $y=3x-1$.

2. $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}$.

3. $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

8. $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}+1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

9. $y = x + 1$.

12. $y = 2x + 5$.

14. $0{,}5$.

15. 2.

16. $-\frac{1}{4}$.

17. 3.

18. $\left(2,\frac{8}{3}\right),\left(3,\frac{7}{2}\right)$.

19. В точке $(-5,\ 45)$: $y=-20x-55$ и $y=-13x-20$; в точке $(2{,}3)$: $y=8x-13$ и $y=x+1$.

20. $(4;\ 0),\ (1;\ -27)$.

22. $(3;-2),\left(-1;\frac{2}{3}\right)$.

23. $(0;0),(0;12)$.

24. $y = x^2 - 3x + 1$.

25. $y = -x, y = 20\frac{5}{6} - x$.

26. $y = 1\frac{1}{3} - x, y = -x$.

27. $\frac{\pi}{6}$.

28. $3\sqrt{5}$.

29. 5 кв. ед.

30. $S_1=S_2=S_3=8$ *ед.*

31. $\left(\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right)$.

32. $(-7;4)$.

33. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{16}$.

34. $y = -x + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

37. $y = \frac{1}{4}x + 2$.

39. $y = -x + \frac{1}{3},\ y = x - \frac{1}{2}$.

40. $y = -2x + 4$.

41. 3.

42. $3y = \sqrt{3}x \pm \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

43. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

44. $(0;5)$.

45. $(4{,}5;0)$.

46. $y = -\sqrt{\frac{5}{11}}(x-3)$.

47. $(0;1),\ (0;\ 21)$.

48. $\left(\frac{\pi}{6};\frac{3+\pi\sqrt{3}}{6}\right)$.

49. $(5{,}5;3{,}5)$.

50. $y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}; y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$.

51. $\frac{49}{32}$.

52. Четверг.

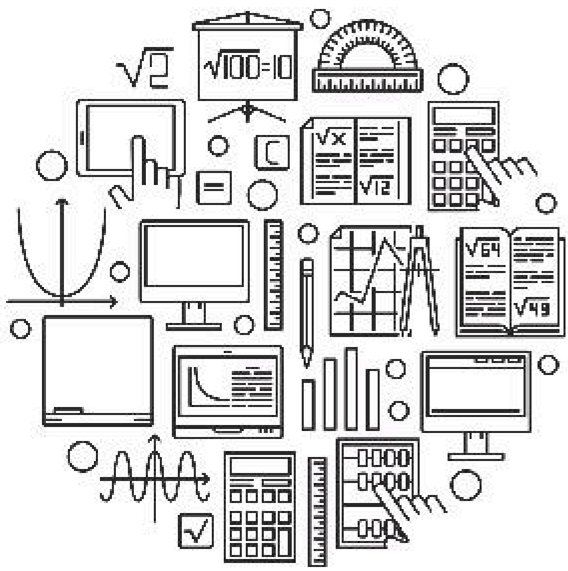
53. 150.

54. D).

55. *а)* $x_1 = \frac{11-\sqrt{29}}{2}, x_2 = \frac{\left(3+\sqrt{13}\right)}{2}$; б) $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = -\frac{4}{3}$.

Глава 6

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ



§1 ПРИЗНАКИ МОНОТОННОСТИ

А вот нужны ли математические знания для того, чтобы в максимальной степени использовать возможности, предоставляемые современным компьютером? Рискну предположить, что без них не обойтись. Почему? Да потому, что компьютер подобен двуликому Янусу. С одной стороны – «железо»....Описать наиболее важные части «железа» может лишь математика. Причем в довольно абстрактных, «непрактичных» на уровне лабаза разделах. С другой стороны – «софт». Под тончайшим слоем дружественных интерфейсов и геологическими пластами кода лежит прочнейший скелет булевой алгебры. Дисциплины, возникшей не из практических нужд, но из попыток математиков XIX века привнести некоторую упорядоченность в свою науку.

М. Ваннах

Упражнение 1

Построить на одной плоскости графики линейных функций $y=kx+m$:
$y=0x+3$, $y=\frac{1}{2}x-3$, $y=2x$, $y=3x-1$, $y=7x-5$, $y=-\frac{1}{2}x-3$, $y=-2x$,

$y=-3x-1$, $y=-7x-5$.

Графики с положительными и отрицательными значениями коэффициента k изобразить различными цветами. Какие выводы можно сделать о монотонности линейной функции в зависимости от знака k?

Упражнение 2

На рисунке 1 изображен график некоторой функции $y = f(x)$.

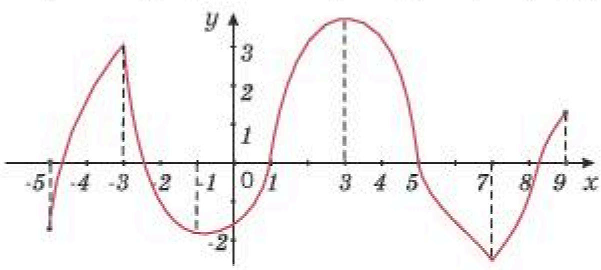


Рис. 1

Напоминаем, что если достаточно маленький участок графика, содержащий точку с абсциссой x, похож на отрезок прямой, то говорят, что $f(x)$ имеет производную в точке x, и значение производной равно угловому коэффициенту k касательной в этой точке. В противном случае считаем, что в точке x не существует производной (например, в точках «излома» $x=-3$ и $x=7$).

а) Постепенно увеличивая значение x от –5 до 9, проследить за знаком коэффициента k касательной в соответствующей точке графика. На отдельной числовой оси изобразить знаки производной $f'(x)$.

б) Найти интервалы возрастания и интервалы убывания функции $f(x)$.

Каким образом связаны между собой результаты а) и б) ? В чем причина?

в) Чему равны k и $f'(x)$ в точках $x = -1$, $x = 3$?

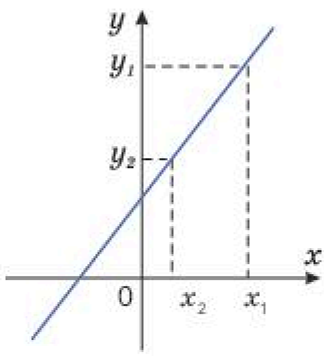


Рис. 2

Пусть $y = kx + m$ – линейная функция и $k > 0$.

Если $x_1 > x_2$ – произвольные числа, то

$$y_1 - y_2 = (kx_1 + m) - (kx_2 + m) = k(x_1 - x_2) > 0, y_1 > y_2.$$

Большему значению аргумента соответствует большее значение линейной функции (рис. 2).

Следовательно, если $k>0$, то функция $y=kx+m$ – строго возрастающая. Аналогично доказывается, что если $k<0$, то функция $y=kx+m$ – строго убывающая.

ТЕОРЕМА

Если во всех точках некоторого интервала производная функции существует и положительна, то сама функция возрастает на этом интервале. Если во всех точках некоторого интервала производная функции существует и отрицательна, то сама функция убывает на этом интервале.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если во всех точках интервала производная функции существует, то в каждой из них можно провести касательную к графику. Если во всех точках производная больше нуля, то у всех касательных положительные угловые коэффициенты. Кусочки графиков неотличимы от отрезков касательных, которые являются графиками возрастающих линейных функций. Следовательно, и весь график является графиком возрастающей функции.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Вы уже имели возможность убедиться в том, что нахождение аналитического выражения для производной функции сводится, по существу, к последовательному выполнению простых операций. В свете только что доказанной теоремы такое умение становится мощным средством для исследования функций.

Выполняя упражнение 2, вы скорее всего уже поняли, что знак производной, а вместе с ним и характер монотонности непрерывной на интервале функции может измениться на противоположный либо в точке, где производная равна 0, либо в точках, где производная не существует. Такие точки логично назвать одним термином.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть на интервале (a, b) задана кусочно-гладкая непрерывная функция f. Тогда внутренние точки, в которых производная функции f равна нулю или не существует, называются критическими.

Термин «кусочно-гладкая» означает, что касательная к графику функции существует во всех точках, за исключением, быть может, нескольких. Критическими могут быть только внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует.

Необходимо понимать, что если точка – критическая, то характер монотонности не обязательно в ней меняется. Классический пример: $y=x^3, x\in(-\infty,+\infty)$. Ее производная $y'=3x^2$ равна 0 в точке $x=0$, т.е. $x=0$ – критическая точка функции $y=x^3$. Однако производная положительна как при $x>0$, так и при $x<0$. Функция $y=x^3$ является возрастающей на всей области определения (рис. 3).

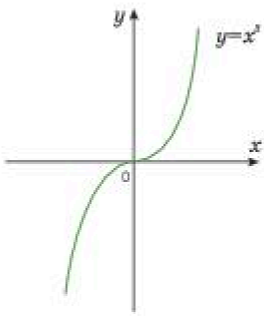


Рис. 3

Для исследования функции на монотонность необходимо выполнить следующие действия.

1. Найти область определения функции и исследовать на непрерывность.
2. Найти производную функции и критические точки функции.
3. Методом интервалов определить знаки производной на всех промежутках, концами которых являются либо критические точки, либо точки разрыва, либо границы области определения.
4. Сделать выводы о характере монотонности функции на каждом из промежутков. Критические точки, в которых производная не изменяет своего знака, включаем в промежуток монотонности.

Пример 1

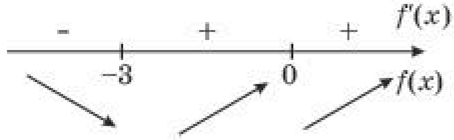
Найти промежутки монотонности функции $f(x)=x^4+4x^3$.

Решение.

1. $D(f)=(-\infty,+\infty)$, $f(x)$ непрерывна на $D(f)$.

2. $f'(x)=4x^3+12x^2$, $f'(x)$ существует в любой точке $D(f)$.

3. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3+12x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x+3)=0$, $x=0$ и $x=-3$ – критические точки.



4. $(-\infty;-3)$ – интервал убывания, $(-3;+\infty)$ – интервал возрастания.

Пример 2

Найти промежутки монотонности функции

$f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2}}$.

Решение.

1. $D(f)$ определяется неравенством $x^2-2>0$,
$x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

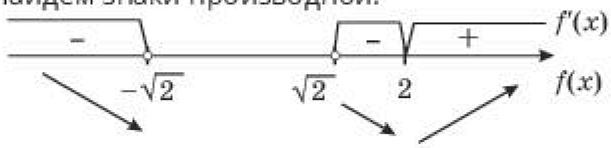
2. $$f'(x)=\frac{(x-1)'\sqrt{x^2-2}-\left(\sqrt{x^2-2}\right)'(x-1)}{x^2-2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-2}-\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-2}}}{x^2-2}=\frac{x-2}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}.$$

Аналитическая формула для $f'(x)$ обеспечивает ее существование на всей области определения функции $f(x)$. Следовательно, критическими для данной функции являются только те точки x, для которых выполняется равенство $f'(x)=0$:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-2}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}=0\Leftrightarrow x=2.$$

3. Найдем знаки производной.



4. $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{2};2\right)$ – интервалы убывания, $(2;+\infty)$ – интервал возрастания.

Пример 3

Определить интервалы монотонности функции $f(x)=\sqrt{3}x-\sin 2x$.

Решение. $D(f):(-\infty;+\infty)$; функция $f(x)$ непрерывна на всей области определения. Найдем производную функции: $f'(x)=\left(\sqrt{3}x-\sin 2x\right)'=\sqrt{3}-2\cos 2x$. Интервалы возрастания функции определяются неравенством $f'(x)>0$, т.е. $\sqrt{3}-2\cos 2x>0$. Решая данное неравенство, получаем, что функция возрастает на каждом из интервалов $x\in\left(\frac{\pi}{12}+\pi k;\frac{11\pi}{12}+\pi k\right)$, где k – произвольное целое число.

Аналогично, решения неравенства $f'(x)<0\Leftrightarrow\sqrt{3}-2\cos 2x<0$ определяют интервалы убывания: $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi k;\frac{\pi}{12}+\pi k\right)$, где k – произвольное целое.

Пример 4

При каких значениях параметра p функция $g(x) = 2\cos x - px$ является убывающей на всей своей области определения?

Решение. $D(g):(-\infty;+\infty)$; функция $g(x)$ непрерывна на всей области определения для любого p, $g'(x)=-2\sin x-p$. Если $g'(x)<0$ для любого x, то $-2\sin x-p<0$, $p>-2\sin x$. Так как $\sin x\in[-1;1]$, то неравенство $p>-2\sin x$ выполняется для всех x тогда и только тогда, когда $p>2$. Пусть $p=2$, тогда $g'(x)=-2\sin x-2=0$ при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$. Серия $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ – множество критических точек, в которых производная не меняет знака, т.к. если $x\neq-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, то $\sin x\neq-1$, $\sin x>-1$, $g'(x)=-2\sin x-2<0$.

Ответ: $p\geqslant 2$.

Задачи

Часть 1

1. (2) Для следующих функций определите интервалы монотонности:

а) $f(x)=-5x+4$; б) $g(x)=3x^2-12x+11$; в) $h(x)=-\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+8x+\cos\frac{\pi}{3}$.

2. (2) Определите интервалы возрастания и интервалы убывания функций:

а) $f(x)=-x^4+3x^3-9$; б) $g(x)=3x^5-20x^3+87$; в) $h(x)=\frac{(x-2)^3}{x}$.

3. (2) Исследуйте на монотонность функции:

а) $f(x)=\sqrt{6x+24}$; б) $g(x)=\sqrt{x^2-4}$; в) $h(x)=x\sqrt{1-x^2}$; г) $u(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2}}$.

4. (2) Функция $f(x)=\dfrac{(x-1)^4(x+1)^7(5-x)^3}{(x+3)^6}$ является производной от некоторой функции $F(x)$. Определите интервалы убывания функции $F(x)$.

5. (3) Докажите, что:

а) функция $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+x-2014$ возрастает на всей области определения;

б) функция $g(x)=2\cos x-3x$ убывает на всей области определения;

в) функция $h(x)=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ возрастает на всей области определения.

6. (3) Определив множество значений производной от функции $f(x)=\dfrac{1}{3}\cos 3x-\dfrac{1}{3}\sin 3x-\sqrt{2}x$, объясните, почему функция $f(x)$ убывает на всей области определения.

7. (2) Для следующих функций определите интервалы монотонности (используя производную):

а) $f(x)=\cos x-\sqrt{3}$; б) $g(x)=x+\sin 2x$;

в) $h(x)=5\sin\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}x$.

8. (3) Сколько членов арифметической прогрессии a_n попадают в интервал убывания функции $g(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2015}{2}x^2+2014x-2013$, если $a_2=102$ и $a_3=202$?

9. (3) При каких значениях параметра a функция $f(x)=x^2+2ax-17$:

а) убывает на интервале $x\in(-\infty;4)$ и возрастает на интервале $x\in(4;+\infty)$;

б) убывает на интервале $x\in(-\infty;4)$?

Часть 2

10. (2) Для следующих функций определите интервалы монотонности:

а) $f(x)=x\sin\dfrac{15\pi}{7}-67$; б) $g(x)=\dfrac{\arccos(-1)}{(-2\pi)}x^2+7x\,\mathrm{tg}\dfrac{15\pi}{4}+777\sin 6$;

в) $h(x)=x^3+x^2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{5\pi}{3}-9x+7\arcsin\dfrac{2}{3}$.

11. (2) Определите интервалы возрастания и интервалы убывания функций:

а) $f(x)=x^5-5x^4$; б) $g(x)=-5x^8+64x^5+\operatorname{arcctg}2015$; в) $h(x)=\dfrac{(x+1)^7}{1-x}$.

12. (2) Исследуйте на монотонность функции:

а) $f(x)=\sqrt{5-x}$; б) $g(x)=\sqrt{12-x-x^2}$;

в) $h(x)=x\sqrt{8-x^2}$; г) $u(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{3-x^2}}$.

13. (2) Функция $f(x)=\dfrac{x^{2014}(x^2-1)^{2015}(x+11)^4}{(4-x)^5}$ является производной от некоторой функции $F(x)$. Определите интервалы возрастания функции $F(x)$.

14. (3) Докажите, что:

а) функция $f(x)=-x^3+9x^2-27x+2015$ убывает на всей области определения;

б) функция $g(x)=2x-\sin 2x$ возрастает на всей области определения;

в) функция $h(x)=\operatorname{arctg}x-x$ возрастает на всей области определения.

15. (3) Определив множество значений производной от функции $f(x)=\sin 2014x+\cos 2014x+2x+11$, объясните, почему функция $f(x)$ возрастает на всей области определения.

16. (2) Для следующих функций определите интервалы монотонности (используя производную):

а) $f(x)=5\sin(-x)+5\operatorname{tg}5$; б) $g(x)=-2\cos 3x-6x\cos\dfrac{3\pi}{4}$;

в) $h(x)=\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)-2x$.

17. (3) В арифметической прогрессии сумма второго и четвертого членов равна 12, а сумма первых 10 членов прогрессии равна 110. Сколько членов данной прогрессии не попадают в интервалы убывания функции $h(x)=-\dfrac{x^3}{3}+7x^2+15x-16$?

18. (3) При каких значениях параметра p длина промежутка убывания функции $f(x)=x^3+3px^2+76$ равна 12?

19. (3) Две материальные точки движутся в пространстве таким образом, что расстояние между ними описывается функцией от времени $S(t)=\sqrt{t^2-2t+26}$, начиная с момента $t_0=0$. Чему может быть равно наименьшее расстояние между точками?

20. (2) Найдите арифметическую прогрессию, если сумма ее n первых членов $S_n=5n^2-2n$.

21. (4) В клубе встретились 20 джентльменов. Некоторые пришли в шляпах, а некоторые – без шляпы. Время от времени один из джентльменов снимал шляпу и надевал ее на одного из тех, у кого в этот момент шляпы не было. В конце 10 джентльменов подсчитали, что любой из них отдавал шляпу больше, чем получал. Сколько джентльменов пришло в шляпах?

22. (3) Самолет летел сначала со скоростью 220 км/ч. Когда ему осталось лететь на 385 км меньше, чем он пролетел, скорость его стала равной 330 км/ч. Средняя скорость самолета на всем пути 250 км/ч. Какое расстояние пролетел самолет?

Ответы

1. а) $f(x)$ убывает на интервале $x\in(-\infty;+\infty)$; б) $g(x)$ убывает на $x\in(-\infty;2)$ и возрастает на $x\in(2;+\infty)$; в) $(-8;1)$ интервал возрастания, $(-\infty;-8)$, $(1;+\infty)$ интервалы убывания.

2. а) $\left(-\infty;2\frac{1}{4}\right)$ интервал возрастания, $\left(2\frac{1}{4};+\infty\right)$ интервал убывания;

б) $[-4;+\infty)$, интервалы возрастания, $(-\infty;-2)$ интервал убывания;

в) $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$ интервалы возрастания, $(-2;2)$ интервал убывания.

3. а) $[-4;+\infty)$ интервал возрастания; б) $(-\infty;-2]$ интервал убывания, $[2+\infty;)$ интервал возрастания; в) $\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$ промежутки убывания, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ интервал возрастания; г) $(-\infty;-\sqrt{2})$, $(\sqrt{2};2)$ интервалы убывания, $(2;+\infty)$ интервал возрастания.

4. $(-1;5)$ интервал возрастания, $(-3;-1)$, $(-3;-1)$, $(5;+\infty)$ интервалы убывания.

7. а) $(2\pi k;\pi+2\pi k)$ интервалы возрастания, $(-\pi+2\pi k;2\pi k)$ интервалы убывания;
б) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$ интервалы возрастания, $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2\pi}{3}+\pi k\right)$ интервалы убывания; в) $\left(\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$ интервалы возрастания, $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\pi+\pi k\right)$ интервалы убывания.

8. 21. **9.** а) $a=-4$; б) $a\le-4$.

10. а) $(-\infty;+\infty)$ интервал возрастания;
б) $(-\infty;-7)$ интервал возрастания, $(-7;+\infty)$ интервал убывания;
в) $(-3;1)$ интервал убывания, $(-\infty;-3)$, $(1;+\infty)$ интервалы возрастания.

11. а) $(-\infty;0)$, $(4;+\infty)$ интервалы возрастания, $(0;4)$ интервал убывания;
б) $(-\infty;2)$ интервал возрастания, $(2;+\infty)$ интервал убывания;
в) $(-\infty;1)$, $\left(1;\frac{4}{3}\right)$ интервалы возрастания, $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$ интервал убывания.

12. а) убывает на всей области определения $x\in(-\infty;5]$;
б) $[-4;-0,5)$ промежуток возрастания, $(-0,5;3]$ промежуток убывания;
в) $(-2;2)$ интервал возрастания, $\left[-2\sqrt{2};-2\right)$, $\left(2;2\sqrt{2}\right]$ интервалы убывания; г) $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ интервал возрастания.

13. Функция $F(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;4)$.

16. а) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ интервалы возрастания, $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ интервалы убывания;
б) $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3};\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right)$ интервалы возрастания,
$\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3};-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right)$ интервалы убывания;
в) $\left(\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)$ интервалы возрастания, $\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi k}{2}\right)$ интервалы убывания.

17. 7. **18.** ±6. **19.** 5. **20.** 3; 13; 23; 33 ... .

21. 10. Указание. Если джентльмен пришел без шляпы, то он не может отдать большее число раз, чем получить.

22. 1375 км.

§2 ЭКСТРЕМУМЫ И КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

Найдите и перечитайте определение локального экстремума. На графике упражнения 2 предыдущего параграфа найдите точки экстремумов. Постепенно увеличивая значение переменной x от –5 до 9, проследите за сменой знаков производной в критических точках. Имеется ли какая-нибудь зависимость между характером экстремума (максимум или минимум) и комбинацией знаков производной в окрестности точек экстремума? Если такую зависимость обнаружили, попытайтесь ее объяснить.

Почти во всех сферах человеческой деятельности вопрос экстремума является самым актуальным. Какие бы цели ни преследовал человек или группа людей, в первую очередь составляется план действий, призванный обеспечить максимальный результат при минимуме затрат. Существует целое направление в математике, «Теория оптимального управления», которое рассматривает общие принципы решения задач на отыскание экстремумов. Понятно, что в таких задачах функции, минимумы или максимумы которых нужно найти, зависят от очень большого числа переменных. Сегодня мы ставим перед собой более скромную цель: научиться находить экстремумы функции одной переменной.

В главе 1 мы рассматривали понятие локального экстремума. Напоминаем определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Внутренняя точка области определения функции называется точкой локального минимума, если она является правым концом промежутка убывания и левым концом промежутка возрастания.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

Внутренняя точка области определения функции называется точкой локального максимума, если она является правым концом промежутка возрастания и левым концом промежутка убывания

Пусть функция $f(x)$ такова, что она имеет производную (дифференцируема) во всех точках вблизи точки x_0 за исключением, быть может, самой точки x_0. Учитывая теорему предыдущего параграфа, а также определения локальных экстремумов, можно сформулировать следующее достаточное условие существования локального экстремума.

ТЕОРЕМА (ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК ЭКСТРЕМУМА).

Пусть $f(x)$ – функция, непрерывная точке x_0.

а) Если точка x_0 является правым концом интервала, на котором выполняется неравенство $f'(x)>0$, и левым концом интервала, на котором выполняется неравенство $f'(x)<0$, то x_0 – точка локального максимума.

б) Если точка x_0 является правым концом интервала, на котором выполняется неравенство $f'(x)<0$, и левым концом интервала, на котором выполняется неравенство $f'(x)>0$, то x_0 – точка локального минимума.

Чем более строго пытаешься сформулировать теорему, тем успешнее скрываешь ее суть от читателя. На самом деле все просто. Расставили критические точки, нашли знаки производной и двигаемся вслед за переменной x от левого конца области определения к правому. Если при переходе через критическую точку производная меняет свой знак с «+» на «–», то критическая точка является точкой максимума; если с «–» на «+», то критическая точка является точкой минимума. Почему этот алгоритм работает – тоже понятно. Перемена знака производной с «+» на «–» означает, что возрастание сменилось убыванием. Получился максимум. Перемена знака с «–» на «+» означает, что убывание сменилось возрастанием. Получился минимум. Если же перемены знака в критической точке не произошло – значит, данная критическая точка не является точкой экстремума.

Во многих задачах вопрос о нахождении локальных экстремумов автоматически решается, если найдены интервалы монотонности. Сформулированная теорема позволяет найти локальные экстремумы сразу после определения промежутков возрастания и убывания.

Пример 1 Найти точки локальных экстремумов и значения экстремумов для функции $f(x)=x^4+4x^3$.

Решение. Исследование на монотонность (см. пример 1 предыдущего пункта) дает следующий результат:

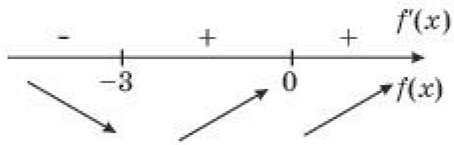


Рис. 1

Таким образом, $(-\infty;-3)$ – интервал убывания, $(-3;+\infty)$ – интервал возрастания.
По теореме о достаточном признаке экстремума получаем, что данная функция, во-первых, не имеет точек локального максимума, во-вторых, имеет точку локального минимума $x=-3$.
Значение локального минимума $f(-3)=(-3)^4+4(-3)^3=-27$.
Замечание. Если это не приводит к двусмысленности, то вместо слов «локальный экстремум», «локальный минимум» или «локальный максимум» можно употреблять слова «экстремум», «минимум» или «максимум» соответственно.

Пример 2

Определить точки локальных экстремумов функции $f(x)=\sqrt{3}x-\sin 2x$.
Решение. Исследование на монотонность (см. пример 3 предыдущего пункта) дает следующий результат: $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi k;\frac{\pi}{12}+\pi k\right)$ – интервалы убывания, $\left(\frac{\pi}{12}+\pi k;\frac{11\pi}{12}+\pi k\right)$ – интервалы возрастания, $k\in\mathbb{Z}$.

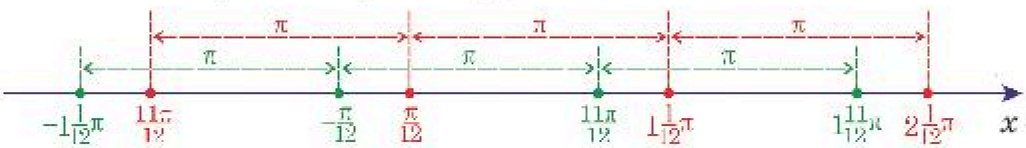


Рис. 2

Следовательно, точки $\frac{\pi}{12}+\pi k$ являются точками минимума (на рисунке 2 отмечены красным цветом). *Если двигаться слева направо, то в точках* $x=\frac{\pi}{12}+\pi k$ *происходит смена знака производной с отрицательного на положительный*. Нетрудно понять, что серии $-\frac{\pi}{12}+\pi k$ и $\frac{11\pi}{12}+\pi k$ соответствуют одному и тому же множеству точек на координатной прямой (на рисунке 2 отмечены зеленым цветом). Согласно достаточному признаку экстремума, точки $x=-\frac{\pi}{12}+\pi k$ являются точками максимума.

Пример 3

При каких значениях параметра p точка $x=3$ является точкой минимума функции $f(x)=px^3-5p^2x^2+3x-5$?
Решение. Для любого значения параметра p функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на всем множестве

действительных чисел. Любая точка экстремума является критической точкой. Следовательно, значение производной $f'(x)=3px^2-10p^2x+3$ в точке $x=3$ равно нулю: $f'(3)=3p\cdot3^2-10p^2\cdot3+3=0$. Отсюда следует, что $p=1$ или $p=-0{,}1$.

Если $p=1$, то $f'(x)=3x^2-10x+3=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)$. Исследование знаков производной в этом случае показывает, что точка $x=3$ действительно является точкой минимума.

Если $p=-0{,}1$, то $f'(x)=-0{,}3x^2-0{,}1x+3=-0{,}3\left(x+\frac{10}{3}\right)(x-3)$.

Исследование знаков производной в этом случае показывает, что точка $p=1$ является точкой максимума.

Ответ: $p=1$.

Задачи

Часть 1

Всюду в данном наборе задач и далее при определении точек экстремума необходимо указывать, является ли данная точка экстремума точкой максимума или точкой минимума.

1. (1) На рисунке 3 изображен график функции $y=f(x)$, $D(f):(-7;7)$.

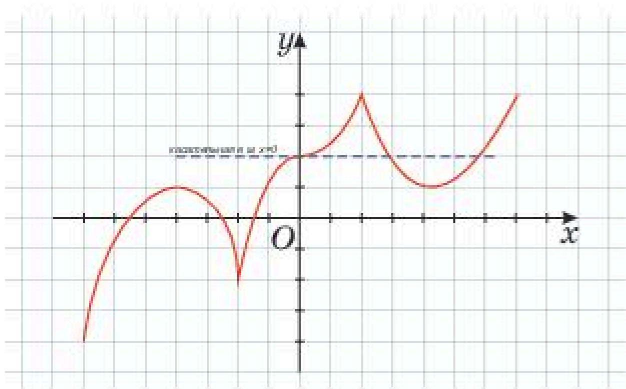


Рис. 3

а) Укажите все критические точки функции $f(x)$.
б) Укажите точки локальных экстремумов.
в) Решите неравенства $f'(x)\le0$, $f'(x)<0$, $f'(x)\ge0$, $f'(x)>0$.

2. (3) На рисунке 4 изображен график производной $f'(x)$ функции $y=f(x)$, $D(f):(-6;6)$.

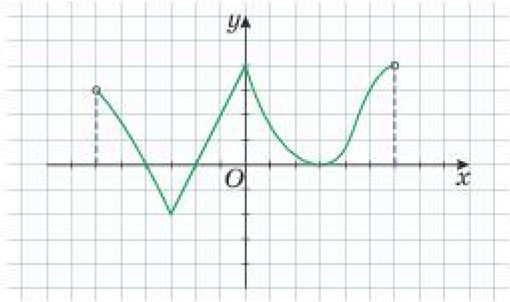


Рис. 4

а) Укажите критические точки функции $f(x)$.
б) Укажите интервалы монотонности функции $f(x)$.
в) Укажите точки локальных экстремумов функции $f(x)$.

3. (2) а) Дан квадратный трехчлен $y=8x^2+10x+3$. Найдите точку экстремума и значение трехчлена в точке экстремума.
б) Используя достаточный признак экстремума, докажите следующее утверждение: «Если $a>0$, то квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ принимает свое наименьшее значение в точке $x_0=-\dfrac{b}{2a}$. Наименьшее значение квадратного трехчлена равно $y_0=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.»

4. (1) Для каждой из следующих функций определите критические точки. Из всех найденных критических точек выделите точки экстремума. В каждой из точек экстремума найдите значение функции:

а) $f(x)=4x^3-6x^2+20x+9$; в) $g(x)=4x^3-6x^2+18x+9$;

б) $h(x)=4x^3-6x^2-72x+9$.

5. (2) Найдите точки экстремума функции $y=x^3-6x^2-9x+1$ на интервале $\left(-\dfrac{3}{5};5\right)$.

6. (2) Найдите значение функции $f(x)=x^3(x+3)^4$ в точке ее локального максимума.

7. (3) Найдите точки локальных экстремумов для следующих функций:

а) $f(x)=\sin x$; б) $g(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{2}x$

в) $h(x)=\sin 3x\cos\dfrac{3\pi}{7}-\cos 3x\sin\dfrac{3\pi}{7}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x$.

8. (2) Найдите точки локальных экстремумов и значения экстремумов для следующих функций:

а) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; б) $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$; в) $h(x)=\dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$; г) $u(x)=\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^2$.

9. (1) а) Найдите точки локальных экстремумов и значения экстремумов для функции $g(x)=\dfrac{1}{4}x+\sqrt{4-x}$.

(2) б) Даны положительные числа a и b. Найдите точки локальных экстремумов и значения экстремумов для функции $g(x)=ax+\sqrt{b-x}$.

10. (1) Функция $f(x)=-3x^2+10x-3$ является производной от некоторой функции $F(x)$. Определите точки локальных экстремумов функции $F(x)$.

11. (3) Найдите критические точки функций:

а) $f(x)=-\sin x+14\cos x-12x-18$;

б) $g(x)=\sin 4x-2\sin 2x+2\cos 2x-\cos 4\pi$.

12. (3) При каких значениях параметра a точка $x=13$ является критической для функции $y=ax^2-52x+777$? При каждом из найденных значений a выясните, точкой максимума или точкой минимума является $x=13$ для данной функции.

13. (3) При каких значениях параметра p точка $x_0=p$ является точкой минимума функции $f(x)=2x^3-3(p-3)x^2-18px-7$?

Часть 2

14. (1) На рисунке 5 изображен график функции $y=f(x)$, $D(f):[-7;7]$.

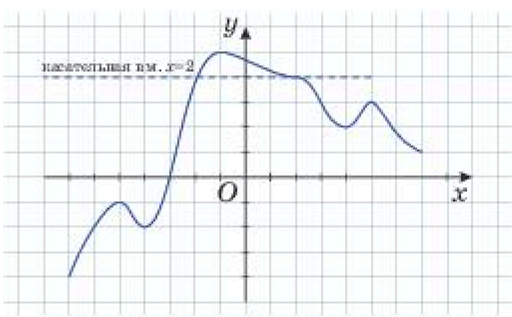


Рис. 5

а) Укажите все критические точки функции $f(x)$.
б) Укажите точки локальных экстремумов функции $f(x)$.
в) Решите неравенство $f'(x)>0,\ f'(x)\geq 0,\ f'(x)<0,\ f'(x)\leq 0$.

15. (3) На рисунке 6 изображен график производной $f'(x)$ функции $f(x)$, $D(f):(-5;6)$.
а) Укажите критические точки функции $f(x)$.

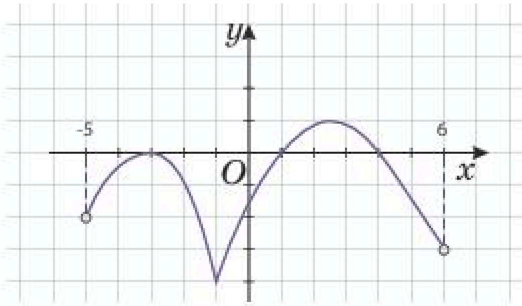


Рис. 6

б) Укажите интервалы монотонности функции $f(x)$.
в) Укажите точки локальных экстремумов функции $f(x)$.

16. (2) а) Дан квадратный трехчлен $y=-3x^2+4x+1$. Найдите точку экстремума и значение трехчлена в точке экстремума.
б) Используя достаточный признак экстремума, докажите следующее утверждение: «Если $a<0$, то квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ принимает свое наибольшее значение в точке $x_0=-\dfrac{b}{2a}$. Наибольшее значение квадратного трехчлена равно $y_0=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$».

17. (1) Для каждой из следующих функций определите критические точки. Из всех найденных критических точек выделите точки экстремума. В каждой из точек экстремума найдите значение функции:

а) $f(x)=-x^3-5x^2-3x+1$; б) $f(x)=-10x^3-5x^2-3x+1$;

в) $f(x)=-x^3-5x^2-\dfrac{25}{3}x+1$.

18. (2) Найдите точки экстремума функции $y=-x^3-9x^2-3x+100$ на интервале $\left(-6;-\dfrac{1}{5}\right)$.

19. (2) Найдите значение функции $f(x)=(x-2)^4(11-x)^5$ в точке ее локального минимума.

20. (3) Найдите точки локальных экстремумов для следующих функций:

а) $f(x)=\cos x$; б) $g(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$;

в) $g(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-2x$.

21. (3) Найдите точки локальных экстремумов и значения экстремумов для следующих функций:

а) $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$; б) $g(x)=\frac{x+7}{x^2+x-6}$; в) $h(x)=\frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$; г) $u(x)=\frac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$.

22. (2) Найти точки локальных экстремумов и значения экстремумов для функции $h(x)=\sqrt{3}\arccos x-2\sqrt{1-x^2}$.

23. (1) Функция $f(x)=(x-11)(x-100)^2(x-8)^7$ является производной от некоторой функции $F(x)$. Определите точки локальных экстремумов функции $F(x)$.

24. (3) Найти критические точки функций:

а) $g(x)=5\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)-3\cos\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $h(x)=\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{7}\cos 7x-\frac{2}{5}\cos 5x-\frac{2}{7}$.

25. (3) При каких значениях параметра a точка $x=-50$ является критической для функции $y=ax^2+4a^3x-1$? При каждом из найденных значений a выясните точкой максимума или точкой минимума является $x=-50$ для данной функции.

26. (3) При каких значениях параметра p функция

$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{(p+5)}{2}x^2+5px+9$ не имеет точек экстремума?

27. (2) Из набора чисел 1 2 3 ... 19 вычеркнуты все четные числа, а также все такие числа x, что 19–x делится на 3. Сколько осталось чисел?

28. (3) В последнюю неделю мая количество продаваемых в «Детском мире» надувных игрушек для плавания маленьких детей ежедневно увеличивалось в одно и то же число раз. Найдите отношение количества проданных игрушек 31 мая к количеству проданных игрушек 30 мая, если 27 мая было продано 45 игрушек, а 29 мая – 405 игрушек?

29. (2) Велосипедист каждую минуту проезжает на 500 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 120 км он затрачивает времени на 2 часа больше, чем мотоциклист. Вычислите скорость велосипедиста.

30. (2) Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=7, \\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=-1. \end{cases}$

Ответы:

1. а) $x\in\{-4;\ -2;\ 0;\ 2;\ 4\}$.

б) $x\in\{-4;2\}$ – точки локальных максимумов; $x\in\{-2;4\}$ – точки локальных минимумов.

в) $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-7;-4)\cup(-2;0)\cup(0;2)\cup(4;7)$;

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-4;-2)\cup(2;4)$; $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-7;-4]\cup(-2;2)\cup[4;7)$;

$f'(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-4;-2)\cup(2;4]\cup\{0\}$.

2. а) $x\in\{-4;-2;3\}$.

б) Интервалы возрастания $(-6;-4);(-2;6)$; интервал убывания $(-4;-2)$.
в) $x=-4$ – точка максимума; $x=-2$ – точка минимума.

3. а) $x_0=-\dfrac{5}{8}$ – точка минимума, $y_0=-\dfrac{1}{8}$.

4. а) критических точек нет; б) $x=\dfrac{1}{2}$ –критическая точка, не являющаяся точкой экстремума; в) $x=-2$ – точка локального максимума, $h(-2)=93$; $x=3$ – точка минимума, $h(3)=-153$.

5. Точка минимума $x=2+\sqrt{7}$.

6. $f(-3)=0$.

7. а) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ – точки максимумов, $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ – точки минимумов, где $k\in Z$;

б) $-\frac{5\pi}{24}+\pi k$ – точки минимумов, $\frac{\pi}{24}+\pi k$ – точки максимумов, где $k\in Z$;

в) $-\frac{17\pi}{126}+\frac{2\pi k}{3}$ – точки минимумов, $\frac{53\pi}{126}+\frac{2\pi k}{3}$ – точки максимумов, где $k\in Z$.

8. а) $x=1$ – точка локального минимума, $f(1)=2$; $x=-1$ – точка локального максимума, $f(-1)=-2$; б) $x=-1$ – точка локального минимума, $g(-1)=-0,5$; $x=1$ – точка локального максимума, $g(1)=0,5$; в) $x=3\frac{1}{5}$ – точка максимума, $h(3,2)=\frac{9}{16}$; г) $x=\frac{1}{2}$ – точка минимума, $u\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

9. а) $x=0$ – точка максимума, $g(0)=2$; б) $x=b-\frac{1}{4a^2}$ – точка максимума, $g\left(b-\frac{1}{4a^2}\right)=ab+\frac{1}{4a}$.

10. Точка $x=\frac{1}{3}$ – точка локального минимума, $x=3$ – точка локального максимума.

11. а) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; б) $x_1=\pi k$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_3=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, где $k\in Z$.

12. При $a=2$ точка $x=13$ является точкой минимума.

13. $p>-3$.

14. а) $\{-5;-4;-1;\ 2;\ 5;\ 4\}$ – критические точки;

б) $x\in\{-5;-1;5\}$ – точки локальных максимумов;

$x\in\{-4;\ 4\}$ – точки локальных минимумов.

в) $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-7;-5)\cup(-4;-1)\cup(4;5)$;

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-7;-5]\cup[-4;-1]\cup\{2\}\cup[4;5)$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-5;-4)\cup(-1;2)\cup(2;4)\cup(5;7)$;

$f'(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-5;-4]\cup[-1;4]\cup[5;7)$.

15. а) $x\in\{-3;1;4\}$ – критические точки.

б) $x\in(-5;1)$ – интервал убывания, $x\in(4;6)$ – интервал возрастания;

$x\in(4;6)$ – интервал убывания.

в) $x=1$ – точка минимума, $x=4$ – точка максимума.

16. а) $x_0=\frac{2}{3}$ – точка максимума, $y_0=\frac{7}{3}$.

17. а) $x=-3$ – точка минимума, $f(-3)=-8$; $x=-\frac{1}{3}$ – точка максимума, $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{40}{27}$; б) критических точек нет; в) $x=-\frac{5}{3}$ – критическая точка, не являющаяся точкой экстремума.

18. Точка минимума $x=-3-2\sqrt{2}$.

19. $f(2)=0$.

20. а) $2\pi k$ – точки максимумов, $\pi+2\pi k$ – точки минимумов, где $k\in Z$;

б) $\frac{5\pi}{6}+4\pi k$ – точки минимумов, $\frac{13\pi}{6}+4\pi k$ точки максимумов, где $k\in Z$;

в) $\frac{5\pi}{24}+\pi k$ – точки минимумов, $\frac{11\pi}{24}+\pi k$ – точки максимумов, где $k\in Z$.

21. а) $x=2$ – точка минимума, $f(2)=12$; б) $x=-13$ – точка минимума, $g(-13)=-\frac{1}{25}$; $x=-1$ – точка максимума, $g(-1)=-1$; в) $x=-1$ – точка максимума, $h(-1)=0,25$; $x\in\{0;4\}$ – точки минимума, $h(0)=0$, $h(4)=10\frac{2}{3}$;

г) $x=5$ – точка максимума, $u(5)=-\frac{27}{4}$.

22. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ – точка минимума, $h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-1$.

23. $x=8$ – точка максимума, $x=11$ – точка минимума.

24. а) $x_1=\frac{5\pi}{48}+\frac{\pi k}{4}$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; б) $x=\frac{\pi k}{5}$, где $k\in Z$.

25. $a=\pm5$, при $a=5$ точка $x=-50$ является точкой минимума, при $a=-5$ точка $x=-50$ является точкой максимума.

26. $p=5$.

27. 6.

28. 3.

29. 30 км/ч.

30. $(2;1)$.

§3 НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Я с дрожью ужаса отворачиваюсь от ваших несчастных проклятых функций, у которых нет производных.

Шарль Эрмит

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $f(x)$, причем $[a;b]$ является подмножеством естественной области определения $f(x)$. Тогда существует точка $c \in [a;b]$ такая, что значение функции в этой точке является наибольшим, т.е. для любого $x \in [a;b]$ выполняется неравенство $f(x) \le f(c)$; аналогично, существует точка $d \in [a;b]$, значение функции в которой является наименьшим среди всех значений функции на отрезке, т.е. для любого $x \in [a;b]$ выполняется неравенство $f(x) \ge f(d)$.

В курсе высшей математики сформулированное утверждение является теоремой Вейерштрасса и доказывается; для нас с вами это – интуитивно понятное предложение. Чтобы вы не думали, что все так просто, поразмышляйте над следующим фактом: функция $f(x)=x^2$ ***не достигает*** *своего наибольшего значения на множестве $x\in(-2;3)$.*

Вопрос: как найти точки c и d? Очевидно, что максимальное (наибольшее) значение функции на отрезке достигается либо в точке локального максимума, либо на одном из концов отрезка. Минимальное значение функции достигается либо в точке локального минимума, либо на одном из концов отрезка (рис. 1).

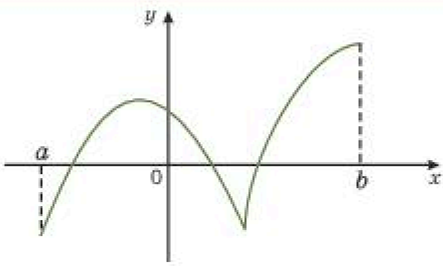


Рис. 1

Точки экстремума являются критическими точками. С другой стороны, у функций, которые мы изучали, на отрезке может быть только конечное число критических точек. Отсюда идея: не разбирая, какой является каждая из критических точек, вычислить значения функции в каждой из них и значения функции на концах отрезка. Наибольшее и наименьшее из получившихся чисел, очевидно, и есть наибольшее и наименьшее значения функции на всем отрезке $[a;b]$.

Таким образом, алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке состоит из следующих шагов:

1. Найти производную функции и все ее критические точки.
2. Вычислить значения функции на концах отрезка и во всех критических точках, принадлежащих данному отрезку.

3. Выбрать наибольшее и наименьшее из полученных чисел.

Постарайтесь самостоятельно справиться со следующими упражнениями, следуя данному алгоритму.

Упражнение 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=3x^4+4x^3+1$ на отрезке $x\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$.

Упражнение 2

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2\sin x+\cos 2x$.

Упражнение 3

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=4x^3-x|x-2|$ на отрезке $x\in[0;3]$.

Перейдем к рассмотрению упражнений.

Решение упражнения 1

$f'(x)=12x^3+12x^2$. Критические точки находим из условия

$f'(x)=0$:
$12x^3+12x^2=0$,
$x^2(x+1)=0$,
$x=0$ или $x=-1$.
Из двух критических точек $x=0$ и $x=-1$ вторая лежит на отрезке $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$.

$f(-2)=3\cdot(-2)^4+4(-2)^3+1=13$,

$f(-1)=0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{16}$.

Ответ: $\max\limits_{x\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=f(-2)=13$, $\min\limits_{x\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=f(-1)=0$.

Решение упражнения 2

Способ 1. Пусть $f(x)=2\sin x+\cos 2x$. Функция f периодическая с периодом 2π. Следовательно, достаточно рассмотреть какой-нибудь отрезок длины 2π. Например, $x\in[-\pi;\pi]$.

$f'(x)=2\cos x-2\sin 2x$.

Критические точки находим из условия $f'(x)=0$.

$\cos x-\sin 2x=0$,

$\cos x-2\sin x\cos x=0$,

$\cos x(1-2\sin x)=0$,

$\cos x=0$ или $\sin x=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ или

$x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$ или $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$.

На отрезке $[-\pi;\pi]$ лежат точки $-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ (рис.2):

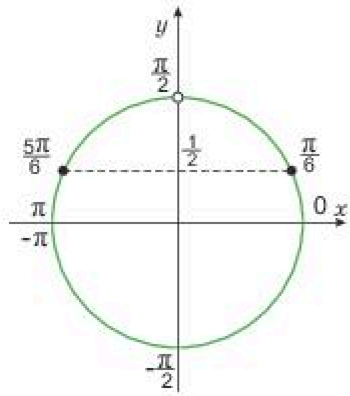


Рис. 2

$f(-\pi)=1$; $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-3$; $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}$; $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$;

$f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}$; $f(\pi)=1$.

Ответ: наибольшее значение равно $\dfrac{3}{2}$, наименьшее равно (–3).

Способ 2. $f(x)=2\sin x+\cos 2x$. Сделаем замену $\sin x=t$. Тогда $f(x)=2\sin x+1-2\sin^2 x=-2t^2+2t+1=g(t)$. Если $x\in(-\infty;+\infty)$, то $\sin x=t\in[-1;1]$.

Задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции $g(t)=-2t^2+2t+1$ на отрезке $t\in[-1;1]$.

Производная функции $g'(t)=-4t+2$ равна нулю в точке $t=\dfrac{1}{2}$, которая принадлежит отрезку $[-1;1]$. Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $g(t)$ на отрезке $[-1;1]$ остается вычислить величины $g(-1)$, $g(1)$ и $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Так как $g(-1)=-3$, $g(1)=1$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$, то наибольшее значение функции $f(x)$ равно $\dfrac{3}{2}$, наименьшее значение функции $f(x)$ равно -3.

Решение упражнения 3

$f(x)=4x^3-x|x-2|, x\in[0;3]$.

Решение. Заметим, что $x-2=0 \Leftrightarrow x=2,\ 2\in[0;3]$.

Если $x\geq 2$, то $|x-2|=x-2$, $f(x)=4x^3-x(x-2)$, $f(x)=4x^3-x^2+2x$, $f'(x)=12x^2-2x+2$. Так как уравнение $f'(x)=0$ не имеет корней, то на интервале $(2;3)$ функция не имеет критических точек.

Если $x<2$, то $|x-2|=2-x$, $f(x)=4x^3+x(x-2)$, $f(x)=4x^3+x^2-2x$, $f'(x)=12x^2+2x-2$. Уравнение $f'(x)=0$ имеет корни $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{3}$. Критическая точка $x=\frac{1}{3}$ принадлежит множеству $[0;2)$.

Если вы в свое время добросовестно выполняли домашние задания на построение графиков, то должны знать, что точки, в которых модуль какого-нибудь выражения равен нулю, обычно являются точками «излома» графика, т.е. критическими. В данной задаче нет необходимости проверять – является ли точка $x=2$ критической. Просто включим ее в список «подозреваемых»:

$$f(0)=0,\ f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}-\frac{1}{3}\left(2-\frac{1}{3}\right)=-\frac{11}{27},\ f(2)=32,\ f(3)=105.$$

Ответ: $\max\limits_{x\in[0;3]} f(x)=f(3)=105,\ \min\limits_{x\in[0;3]} f(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{11}{27}$.

Задачи

Часть 1

1. (1) Для каждой из следующих функций определите наибольшее и наименьшее значения на отрезке $x\in[1;4]$:
а) $f(x)=-x^2+4x-3$; б) $g(x)=-x^2-4x-3$; в) $h(x)=x^2+4x-3$.

2. (1) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$ на каждом из отрезков:
а) $x\in[-3;-1]$; б) $x\in[0;2]$; в) $x\in[-3;3]$.

3. (2) На отрезке $x\in[-1;2]$ задана функция $f(x)=x^4-2x^2+3$. Найдите координаты точки графика данной функции, имеющей: а) наибольшую ординату; б) наименьшую ординату.

4. (2) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)=-x^3(x+2)$ на отрезке $x\in[-2;1]$.

5. (3) Найдите наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках:

а) $f(x)=\dfrac{x^4}{x+2}$, $x\in[-0,5;0]$; б) $g(x)=\dfrac{x-1}{3x-x^2-3}-1$, $x\in[-1;3]$.

6. (1) а) Функция $z(t)=t^2-t$ задана на отрезке $t\in[-1;1]$. При каком значении переменной $t\in[-1;1]$ функция $z(t)$ достигает своего наибольшего значения?

(3) б) Используя результаты пункта а) данной задачи и замену $\sin x=t$, найдите наибольшее значение функции $f(x)=\sin^2 x-\sin x$. При каких значениях переменной x функция $f(x)$ достигает своего наибольшего значения?

7. (3) Найдите все значения x, для каждого из которых функция $f(x)=-2\cos 2x+3\sqrt{3}\cos x-7\sin^2 x$ принимает наименьшее значение.

8. (3) Найдите все значения x, для каждого из которых функция $f(x)=\dfrac{2}{3}\cos^3 x+\dfrac{3}{2}\sin^2 x+\cos x+1$:

а) принимает наибольшее значение;
б) принимает наименьшее значение.

9. (3) Определите наибольшее и наименьшее значения функции $v(t)=2t^3+3t|t+1|-33t+1$ на отрезке $t\in[-3;1]$.

10. (4) Определите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\operatorname{tg}x-\dfrac{4}{3}x$ на отрезке $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Часть 2

11. (1) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^2+6x-2$ на каждом из отрезков:

а) $x\in[-3;-2]$; б) $x\in[-2;0]$; в) $x\in[0;1]$.

12. (1) Для каждой из следующих функций определите наибольшее и наименьшее значения на отрезке $x\in[-1;2]$:

а) $f(x)=-x^3+x^2$; б) $g(x)=-x^3+9x^2$; в) $h(x)=-x^3+27x$.

13. (2) Найдите наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках:

а) $f(x)=-4x^4+2x^2+5$, $x\in[0;2]$; б) $g(x)=(x+2)^2(1-x)^3$, $x\in[-3;-1]$.

14. (3) Найдите наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках:

а) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-9}$, $x\in[4;6]$;   б) $g(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x-2}$, $x\in[-1;1]$.

15. (3) Дана функция $y=-x^3+26x$, имеющая область определения $x\in[-1;4]$. Из всех точек графика данной функции определите ту, для которой сумма координат имеет:

а) наибольшее значение;   б) наименьшее значение.

16. (1) Используя замену $\cos x=t\in[-1;1]$, найдите наименьшее значение функции $f(x)=\cos^2 x+\cos x$. При каких значениях переменной x функция $f(x)$ достигает своего наименьшего значения?

17. (3) Найдите все значения x, для каждого из которых функция $f(x)=3\cos 2x-4\sin x+2\sin^2 x+100$ принимает наибольшее значение.

18. (3) Найдите все значения x, для каждого из которых функция $f(x)=-4\sin^3 x-9\cos^2 x-6\sin x+1$ принимает:

а) наименьшее значение;

б) наибольшее значение.

19. (4) Определите наибольшее и наименьшее значения функции $v(t)=|t|(4t^2-15t+12)+5$ на отрезке $t\in[-1;2]$.

20. (4) Определите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=-\mathrm{ctg}\,x-2x$ на отрезке $x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

21. (2) У Аскара есть 20 разноцветных шариков: черного, синего, зеленого и желтого цветов. Из этих шариков 17 – не зелёные, 5 – чёрные, а 12 – не жёлтые. Сколько синих шариков у Аскара?

22. Решите методом интервалов: (1) а) $\dfrac{3}{2x-1}>0$; (2) б) $\dfrac{9-x^2}{3x+1}\geq\dfrac{2}{x}$;

(3) в) $x\geq\dfrac{25}{1-x}-9$. В ответе укажите наименьшее решение.

23. (1) Две материальные точки в момент времени $t=0$ начинают движение и движутся таким образом, что расстояние между ними описывается функцией от времени $S(t)=\sqrt{8t+36}$. Чему может быть равно наименьшее расстояние между ними?

A) недостаточно данных;   B) 4;   C) 5;   D) 6;   E) 0.

24. (3) В первые 7 дней марта количество продаваемых в парфюмерном магазине подарочных наборов увеличивалось на одно и то же число ежедневно. Сколько наборов продали за 7 дней, если во второй день продали 95 наборов, а в пятый день – 140?

Ответы

1. а) $\max\limits_{x\in[1;4]} f(x)=f(2)=1$, $\min\limits_{x\in[1;4]} f(x)=f(4)=-3$; б) $\max\limits_{x\in[1;4]} g(x)=g(1)=-8$, $\min\limits_{x\in[1;4]} g(x)=g(4)=-35$; в) $\max\limits_{x\in[1;4]} h(x)=h(4)=29$, $\min\limits_{x\in[1;4]} h(x)=h(1)=2$.

2. а) $\max\limits_{x\in[-3;-1]} f(x)=f(-2)=21$, $\min\limits_{x\in[-3;-1]} f(x)=f(-3)=10$;
б) $\max\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f(2)=5$, $\min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f(1)=-6$; в) $\min\limits_{x\in[-3;3]} f(x)=f(1)=-6$, $\min\limits_{x\in[-3;3]} f(x)=f(1)=-6$.

3. а) $(2;11)$; б) $(-1;2)$ или $(1;2)$.

4. $\max\limits_{x\in[-2;1]} g(x)=g\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{16}$, $\min\limits_{x\in[-2;1]} g(x)=g(1)=-3$.

5. а) $\max\limits_{x\in[-0,5;0]} f(x)=f(-0,5)=\dfrac{1}{24}$, $\min\limits_{x\in[-0,5;0]} f(x)=f(0)=0$;
б) $\max\limits_{x\in[-1;3]} g(x)=g(0)=-\dfrac{2}{3}$, $\min\limits_{x\in[-1;3]} g(x)=g(2)=-2$.

6. а) $\max\limits_{t\in[-1;1]} z(t)=z(-1)=2$;
б) $\max\limits_{x\in R} f(x)=2$ при условии $\sin x=-1$, т. е. $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

7. $x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

8. а) $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$; б) $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$.

9. $\max\limits_{t\in[-3;1]} v(t)=v(2)=45$, $\min\limits_{t\in[-3;1]} v(t)=v(1)=-24$.

10. $\max\limits_{x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\dfrac{4\pi}{9}$, $\min\limits_{x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2\pi}{9}$.

11. а) $\max\limits_{x\in[-3;-2]} f(x)=f(-3)=-2$, $\min\limits_{x\in[-3;-2]} f(x)=f(-2)=-6$;
б) $\max\limits_{x\in[-2;0]} f(x)=f(0)=-2$, $\min\limits_{x\in[-2;0]} f(x)=f(-1,5)=-6,5$;
в) $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x)=f(1)=6$, $\min\limits_{x\in[0;1]} f(x)=f(0)=-2$.

12. а) $\max\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=f(-1)=2$, $\min\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=f(2)=-4$; б) $\max\limits_{x\in[-1;2]} g(x)=g(2)=28$, $\min\limits_{x\in[-1;2]} g(x)=g(0)=0$; в) $\max\limits_{x\in[-1;2]} h(x)=h(2)=46$, $\min\limits_{x\in[-1;2]} h(x)=h(-1)=-26$.

13. а) $\max\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=5\frac{1}{4}$, $\min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f(2)=f(1)=-51$.

б) $\max\limits_{x\in[-3;-1]} g(x)=g(-3)=64$, $\min\limits_{x\in[-3;-1]} g(x)=g(-2)=0$.

14. а) $\max\limits_{x\in[4;6]} f(x)=f(4)=\frac{128}{7}$, $\min\limits_{x\in[4;6]} f(x)=f(3\sqrt{3})=9\sqrt{3}$;

б) $\max\limits_{x\in[-1;1]} g(x)=g(0)=0$, $\min\limits_{x\in[-1;1]} g(x)=g(1)=-3$.

15. а) $(3;51)$; б) $(-1;-25)$

16. а) $\min\limits_{x\in R} f(x)=-0,25$ при условии $\cos x=-0,5$, т.е. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

17. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

18. а) $x=(-1)^{k}\frac{\pi}{6}+\pi k$; б) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

19. $\max\limits_{t\in[-1;2]} v(t)=v(-1)=36$, $\min\limits_{t\in[-1;2]} v(t)=v(2)=1$.

20. $\max\limits_{x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1-\frac{\pi}{2}$, $\min\limits_{x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\pi$. **21.** 4 шарика.

22. а) $x>\frac{1}{2}$; б) $x\in(-\infty;-2]\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\{1\}$; в) -4. **23.** D. **24.** 875.

§4 ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМУМОВ

Ответственные решения должны приниматься не интуитивно, а на основе предварительных прикидок, математических расчетов. И не случайно именно в наше время отмечается бурный рост математических методов во всех областях практики. Вместо того чтобы «пробовать и ошибаться» на реальных объектах, люди предпочитают делать это на математических моделях. Построение таких моделей, их анализ и вывод рекомендаций – одна из важнейших задач прикладной математики.

Е.С. Вентцель

Упражнение 1

Число 200 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы их произведение было максимальным.

Упражнение 2

Из кирпича размером $20\times10\times5$ см требуется сложить изгородь толщиной 10 см и высотой $0,5$ м, огораживающую прямоугольный участок. Каким образом надо строить изгородь, чтобы площадь участка оказалась максимальной, если количество кирпича ограничено?

Упражнение 3

На координатной плоскости рассматриваются всевозможные треугольники ABC, у каждого из которых $\angle ABC = 90^\circ$, вершина A имеет координаты $(-4;\,0)$. Вершина B лежит на отрезке $[0;4]$ оси Ox, а вершина C лежит на параболе $y=4x-x^2$. Какие координаты должна иметь вершина C, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

Упражнение 4

Корабль стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега. С корабля можно послать матроса в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу, от ближайшей точки берега (лагерь расположен на берегу). Матрос передвигается по берегу со скоростью 5 км/ч, а на веслах – 4 км/ч. В каком пункте берега он должен причалить, чтобы оказаться в лагере в кратчайшее время?

Упражнение 5

Представьте, что у вас в руках прямоугольный лист картона, ножницы и скотч. Ваша цель – смастерить коробочку следующим способом: вырезать квадратные уголки (1), сделать сгибы вдоль пунктирных линий до соединения ребер a и b (2), склеить соединенные ребра скотчем и полюбоваться на свое изделие (3) (рис. 1).

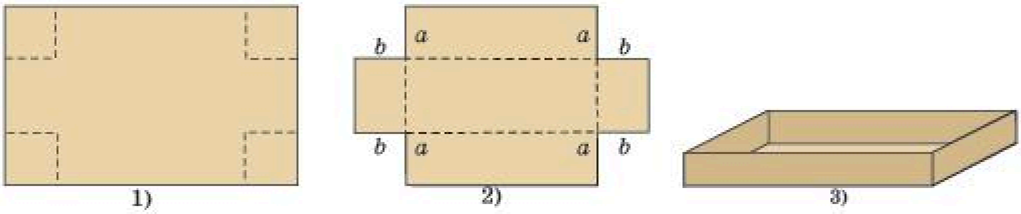


Рис. 1

Если размер вырезаемых квадратов будет очень мал, то получится очень плоская коробка. Если сторона квадратика будет чуть меньше половины меньшей стороны прямоугольника, то коробка получится очень узкой. Практический вопрос: как из данного прямоугольника получить коробку максимального объема?

Упражнение 5

Возьмите нитку или веревку длиной не более 1 м и свяжите концы. Постарайтесь расположить ее на столе так, чтобы площадь, огороженная ниткой, оказалась наибольшей. Какая фигура получилась?

Пример 1

Решите упражнение 1.

Решение. Пусть первое слагаемое равно x. Тогда второе равно $200-x$, причем $x\in[0;200]$. Требуется определить значения x, при которых произведение $x(200-x)$ принимает наибольшее значение. Получилась задача на нахождение наибольшего значения для функции $f(x)=x(200-x)$ на отрезке $x\in[0;200]$. Критическая точка находится из условия $f'(x)=0$. Так как $f'(x)=\left(x(200-x)\right)'=\left(200x-x^2\right)'=200-2x$, то получаем уравнение $200-2x=0$. Отсюда $x_0=100$ является критической точкой. Так как $f(0)=f(200)=0$, $f(100)=10000$, то наибольшего значения произведение $x(200-x)$ принимает в точке $x=100$.

Ответ: $200=100+100$.

Пример 2

Решите упражнение 2.

Решение. Так как толщина и высота изгороди фиксирована, то из ограниченного количества кирпичей возможно построить стену фиксированной длины. Отсюда получаем чисто геометрическую задачу на экстремум: из всех прямоугольников периметра P найти тот, который имеет максимальную площадь. Если x – длина одной стороны, то

$\frac{P}{2}-x$ – длина другой (рис. 2). Площадь $S(x)=x\left(\frac{P}{2}-x\right)$, $x\in\left[0;\frac{P}{2}\right]$.

$S'(x)=\frac{P}{2}-2x$, $S'(x)=0$ при $x=\frac{P}{4}$, $x=\frac{P}{4}$ – критическая точка.

$S(0)=S\left(\frac{P}{2}\right)=0$, $S\left(\frac{P}{4}\right)=\frac{P^2}{16}$ – наибольшее значение.

Если длина одной стороны $x=\frac{P}{4}$, то длина другой стороны равна $\frac{P}{2}-\frac{P}{4}=\frac{P}{4}$. **Наибольшее значение площади достигается в том случае, если прямоугольник является квадратом.** Участок нужно огораживать квадратной формы. Но полученный ответ меркнет перед тем фактом, что доказан, вообще говоря, общий геометрический факт: **из всех прямоугольников заданного периметра P, наибольшую площадь имеет квадрат**. Тут же обнаруживается связь этого геометрического факта с математическим анализом, так как, если принять $P=400$, то получится упражнение 1. Подумайте, почему.

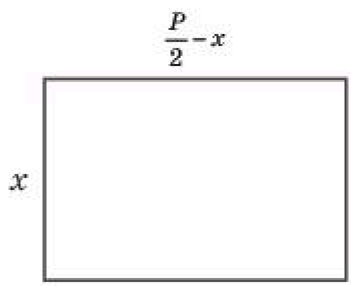


Рис. 2

Пример 3

Решите упражнение 3.

Решение. Ситуацию в задачах на экстремум требуется рассматривать «в динамике»: изменяя в воображении одну из величин от одного крайнего значения до другого, наблюдать за соответствующими изменениями других величин.

В данной задаче, например, наблюдаем за движением точки

B от точки 0 до точки 4 на оси абсцисс (рис. 2). Очевидно, что в крайних положениях точки B площадь треугольника ABC равна 0. Точка C, двигаясь по параболе над точкой B, имеет ту же абсциссу, что и точка B. Если B имеет координаты $(x;0)$, то C имеет координаты $(x;4x-x^2)$. Это наблюдение дает нам понять, что значение параметра x задает высоту $BC=4x-x^2$ треугольника и тем самым однозначно задает площадь треугольника ABC: $S(x)=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}(x+4)(4x-x^2)$, где x изменяется от 0 до 4.

Получилась задача на нахождение наибольшего значения функции на отрезке, и мы уверены, что вы в состоянии справиться с ней самостоятельно. Сообщаем только ответ: $\left(\frac{4}{\sqrt{3}};\frac{16}{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\right)$.

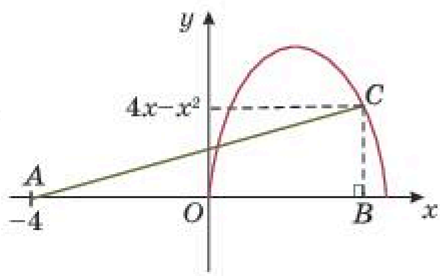


Рис. 3

Пример 4

Решите упражнение 4.

Решение. Отбросив в сторону ненужные детали (корабли, моряки, чайки и пр.), сразу попытаемся построить математическую модель: отрезок AB перпендикулярен прямой BC, $AB=9$, $BC=15$. Точка S имеет возможность двигаться со скоростью 5 по прямой ВС и со скоростью 4 вне прямой BC. Точка S движется в какую-нибудь точку D прямой BC, а затем по прямой BC завершает свой путь в точке C. В каком месте нужно выбрать точку D, чтобы время движения было минимальным?

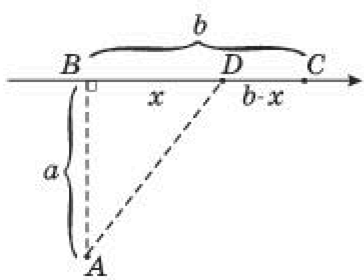


Рис. 4

Пусть $BD=x, 0\le x\le 15$. Тогда $AD=\sqrt{9^2+x^2}$, $DC=15-x$, время на движение $T(x)=\frac{AD}{4}+\frac{DC}{5}=\frac{\sqrt{9^2+x^2}}{4}+\frac{15-x}{5}$. Требуется найти наименьшее значение функции $T(x)=\frac{\sqrt{9^2+x^2}}{4}+\frac{15-x}{5}$ на отрезке $x\in[0;15]$. Найдем производную $T'(x)=\frac{x}{4\sqrt{9^2+x^2}}-\frac{1}{5}$, критические точки ищем из условия $T'(x)=0$. Получаем уравнение $\frac{x}{4\sqrt{9^2+x^2}}=\frac{1}{5}$, $\frac{x}{4\sqrt{9^2+x^2}}=\frac{1}{5}$, $5x=4\sqrt{9^2+x^2}$, $5^2x^2=4^2\cdot 9^2+4^2x^2$, $x^2=\frac{4^2\cdot 9^2}{5^2-4^2}$, $x^2=16\cdot 9$, $x=\pm 12$. Из двух значений только $x=12$ принадлежит отрезку $[0;15]$. Вычисляем значения функции в концах отрезка и в критической точке: $T(0)=\frac{9}{4}+\frac{15}{5}=5,25$, $T(15)=\frac{\sqrt{9^2+15^2}}{4}=\frac{\sqrt{306}}{4}\approx 4,37$ и $T(12)=\frac{\sqrt{9^2+12^2}}{4}+\frac{15-12}{5}=4\frac{7}{20}=4,35$. Из трех чисел наименьшим является число $T(12)=4,35$.

Ответ. Должен причалить в 3 км от лагеря.

Упражнение 5 рассматривать не будем. Постройте математическую модель и исследуйте ее самостоятельно: a и b – длины сторон прямоугольника, x – длина сторон вырезаемых квадратов и т.д. Если будет тяжело в общем случае, рассмотрите сначала частный: $a=4$, $b=8$.

В упражнении 6 нитку надо расположить в форме окружности. Из всех замкнутых линий на плоскости с фиксированной длиной, окружность ограничивает наибольшую площадь. Из всех фигур, ограничивающих объем в пространстве и имеющих фиксированную площадь поверхности, наибольший объем ограничивает сфера.

В этом смысле казахская юрта в качестве жилья для кочевника имеет практически оптимальные формы: основанием является круг, шанырак – почти полусфера.

К сожалению, доказать эти теоремы в рамках школьной программы невозможно.

Задачи

Часть 1

1. (2) Найдите положительное число, для которого разность между его кубом и самим числом принимает наименьшее значение.

   (2) а) Представьте число 20 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

   б) Представьте данное положительное число p в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

2. (2) в) Подставив p=20 в формулы, полученные в б), проверьте соответствие результатов а) и б). Используя формулы, полученные в б), выпишите ответ к задаче пункта б) при p=48.

3. (2) а) Сумма длин трех сторон прямоугольника равна 100. Какую наибольшую площадь может иметь такой прямоугольник?

   б) Сумма длин трех сторон прямоугольника равна a. Определите стороны такого прямоугольника, имеющего наибольшую площадь.

4. (3) а) Гоша выбирает положительное число, Артур умножает это число на 4, а Белла умножает число, обратное выбранному, на 9. Затем Гоша складывает результаты Артура и Беллы. Какое число должен назвать Гоша сначала, чтобы результат в конце получился наименьшим? И какой наименьший результат может получиться у Гоши?

   (3) б) Пусть заданы положительные числа a и b. Докажите, что для любого положительного числа x выполняется неравенство $ax+\frac{b}{x}\geq 2\sqrt{ab}$, причем равенство достигается в точке $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$.

5. (3) а) Из всех точек на прямой $y=-\frac{4}{3}x+4$ найдите координаты той, которая наименее удалена от начала координат.

   (4) б) Пусть k и m – данные числа. Из всех точек на прямой $y=kx+m$ найдите координаты той, которая наименее удалена от начала координат.

   (2) в) Используя результаты пункта б), решите аналогичную задачу для прямых $y=3x-10$, $y=\sqrt{3}x+12$.

6. (3) а) В прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см и углом 60° вписан прямоугольник наибольшей площади так, что одна из его сторон лежит на гипотенузе. Определите большую из сторон прямоугольника.

   (4) б) В прямоугольный треугольник с гипотенузой c и углом α вписан прямоугольник так, что одна из его сторон лежит на гипотенузе. Определите наибольшую площадь, которую может иметь такой прямоугольник.

7. (3) Рассматриваются прямоугольники, две вершины которых лежат на оси Ox, а две другие – на графике функции $y=4\cos x$, заданной на отрезке

$x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Среди всех таких прямоугольников найдите стороны того, который имеет наибольший периметр.

8. (3) Рассматриваются прямоугольные треугольники ABC, у которых вершина A имеет координаты $\left(-3\frac{1}{2};0\right)$, вершина C лежит на отрезке $[-1;1]$ оси Ox, вершина B лежит на единичной окружности с центром в начале координат, угол ACB прямой. Какую наибольшую площадь может иметь такой треугольник ABC?

9. (4) Две точки движутся по осям координат в положительных направлениях с постоянными скоростями $v_1 = 2$ и $v_2 = 1$. В какой момент времени расстояние между двигающимися точками будет наименьшим, если в начальный момент они занимают положения $(-3;0)$ и $(0;-5)$ соответственно?

10. (3) Если фермер ухаживает не более чем за 20 яблонями, то он может получить по 600 яблок с каждого дерева. Если он ухаживает за более чем 20 яблонями, то потери с каждого дерева увеличиваются. Фактически, с добавлением каждого дополнительного дерева потери с каждой яблони увеличиваются на 15 яблок. За каким количеством яблонь нужно ухаживать фермеру, чтобы получать максимальное количество яблок?

Часть 2

11. (2) Найдите положительное число x, для которого разность между его кубом и числом $12x$ принимает наименьшее значение.

12. (2) а) Сумма двух положительных чисел равна 30. Подберите эти числа так, чтобы произведение одного из них на квадрат другого было наибольшим.

(2) б) Сумма двух положительных чисел равна p. Подберите эти числа так, чтобы произведение одного из них на квадрат другого было наибольшим.

(2) в) Подставив $p = 30$ в формулы, полученные в б), проверьте соответствие результатов а) и б). Используя формулы, полученные в б), выпишите ответ к задаче пункта б) при $p = 3^{2014}$.

13. (2) а) Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений: длины, ширины и высоты. Найдите наибольший объем прямоугольного параллелепипеда, у которого длина в два раза больше ширины, а сумма трех измерений равна 18.

(3) б) Найдите наибольший объем прямоугольного параллелепипеда, у которого длина в два раза больше ширины, а сумма трех измерений равна a.

14. (2) а) Берик представляет число 1 в виде суммы двух не обязательно положительных слагаемых. Серик возводит первое из слагаемых в квадрат и умножает на 3, второе также возводит в квадрат и умножает на 6, а затем складывает результаты умножений. На какие слагаемые должен разбить Берик число 1, чтобы у Серика получился наименьший результат из возможных?
(3) б) Пусть даны положительные числа a и b. Найдите наименьшее значение выражения $ax^2+b(1-x)^2$, если $\in(-\infty\ +\infty)$.

15. (3) Мастерская шьет детские костюмы. Себестоимость каждого костюма составляет 20 у.е. Известно, что если костюмы продаются по цене p у. е., то покупатели приобретают $1560-12p$ костюмов в месяц. Какое количество костюмов в месяц необходимо производить, чтобы прибыль мастерской оказалась максимальной?

16. (3) а) Дан прямоугольный треугольник с катетами 8 и 6. Прямоугольник вписан в треугольник таким образом, что одна его вершина лежит на гипотенузе, противоположная ей вершина совпадает с вершиной прямого угла треугольника, а две оставшиеся вершины лежат по одной на каждом катете. Определите наибольшую площадь, которую может иметь такой прямоугольник.
(3) б) Решите задачу пункта а) для произвольного прямоугольного треугольника с катетами a и b.
(2) в) Используя результаты пункта б), решить аналогичную задачу для треугольника с катетами $\sqrt{13}-3$ и $\sqrt{13}+3$.

17. (3) Рассматриваются прямоугольники, две вершины которых лежат на оси $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, а две другие – на графике функции $y=\sin 4x$, заданной на отрезке $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. Среди всех таких прямоугольников найдите стороны того, который имеет наибольший периметр.

18. (4) а) В двух различных сосудах находятся растворы соли, причем в первом находится 10 кг, а во втором 15 кг. При испарении воды содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором в q раз. Известно, что $pq=6$. Какая наименьшая суммарная масса растворов могла остаться в обоих сосудах?
(4) б) решить задачу пункта а) при условии, что в первом сосуде находится первоначально m_1 кг, во втором m_2 кг, $pq=c$, где m_1, m_2 и c – данные положительные числа, $y=x^2$.

19. (4) В фигуру, ограниченную линиями $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=6$ вписан параллелограмм наибольшей площади так, что две его вершины лежат на прямой $x=6$, а две другие _ на параболах $y=x^2$, $y=2x^2$. Найдите эту площадь.

20. (6) Требуется построить несколько одинаковых домов общей жилой площадью $40\ 000$ м². Затраты на постройку одного дома общей жилой площадью S складываются из стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{S}$, и стоимости наземной части, пропорциональной $S\sqrt{S}$. При строительстве дома жилой площадью 400 м^2 80% затрат идет на фундамент. Сколько надо построить домов, чтобы затраты были наименьшими?

21. (3) Заяц соревновался в скорости бега на 100 м с черепахой. Когда заяц прибежал к финишу, черепахе оставалось до финиша еще 90 м. На сколько нужно отодвинуть стартовую линию для зайца, чтобы оба бегуна пришли к финишу одновременно?

22. (2) Одно число ровно 0,5, второе число 0,3. Сколько процентов составляет второе число от разности первого и второго чисел?

23. (3) Дан металлический стержень длины 120 мм. От него отпиливают куски длиной 10 мм, при этом отходы на металлургические опилки составляют 1 мм длины на один распил. Какое максимальное количество кусков можно получить? Варианты ответов:

A) 9; B) 10; C) 11; D) 12; E) 13.

24. (2) Упростите: $\cos^2(\pi-\alpha)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

Ответы

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.** а) $\frac{10}{3}+\frac{50}{3}$; б) первое слагаемое должно быть равно $\frac{\sqrt{6p+1}-1}{3}$; в) $\frac{16}{3}+\frac{128}{3}$. **3.** а) 1250; б) такой прямоугольник имеет размеры $\frac{a}{4}\times\frac{a}{2}$. **4.** а) Если Гоша назовет число $1,5$, то получит наименьший из возможных результатов 12. **5.** а) $\left(\frac{48}{25};\frac{36}{25}\right)$; б) $\left(-\frac{km}{1+k^2};\frac{m}{1+k^2}\right)$; в) для прямой $y=3x-10$ ответ $(3;-1)$, для прямой $y=\sqrt{3}x+12$ ответ $\left(-3\sqrt{3};3\right)$. **6.** а) 4 см; б) $\frac{c^2\sin 2\alpha}{8}$. **7.** Длина стороны, лежащей на оси Ox, равна $\frac{\pi}{3}$; высота равна $2\sqrt{3}$. **8.** $\frac{15\sqrt{15}}{32}$. **9.** $t=0,2$ с. **10.** 30. **11.** 2. **12.** а) $30=10+20$; б) $\frac{p}{3}+\frac{2p}{3}$; в) $3^{2013}+2\cdot3^{2013}$. **13.** а) 192; б) $\frac{8}{9}l^3$. **14.** а) $1=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$; б) $\frac{ab}{a+b}$. **15.** 660. **16.** а) 12; б) $\frac{1}{4}ab$; в) 1. **17.** Длина стороны, лежащей на оси Ox, равна $\frac{\pi}{12}$; высота равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **18.** а) 10 кг; б) красивый ответ $2\sqrt{\frac{m_1m_2}{c}}$. **19.** 32. **20.** 25 домов. **21.** 900 м. **22.** 150%. **23.** C). **24.** 1.

§5 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

5.1 Асимптоты графика – что это такое?

Заполнить таблицу.

x	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	8	12	16
$\frac{1}{2}x$						1	$\frac{3}{2}$						
$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$						2	$2\frac{1}{6}$						

Используя заполненную таблицу, построить графики функций $y=\frac{1}{2}x$ и $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ при $x > 0$. (Масштаб 1 ед. = 1 см= 2 клетки).

Рассмотрим поведение **дробно-рациональной функции** $y=f(x)$, где $f(x)=\frac{(x+2)(x-3)}{x-1}$, вблизи точки x=1. Пусть x приближается к 1 слева $(x\to 1-0)$. Числитель дроби $(x+2)(x-3)$ – непрерывная функция и значения числителя приближаются к числу $(1+2)(1-3)=-6$. Так как мы рассматриваем приближение x к 1 слева, то x<1 и x–1<0. Следовательно, если x – очень близкое к 1 число, то

$$f(x)\approx\frac{-6}{\textit{очень маленькое по модулю отрицательное число}}=$$

очень большое положительное число. Чем ближе x приблизится к 1, тем большему положительному числу будет равно значение $y = f(x)$. На графике это выглядит примерно так (рис. 1):

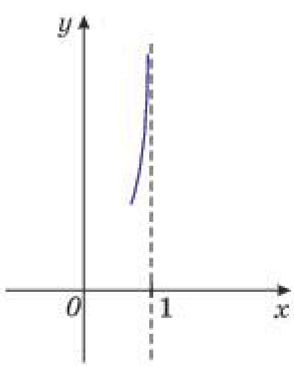


Рис. 1

Подобное поведение функции характеризуется равенством: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=+\infty$. Отсюда следует, что прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота.

Рассмотрим ту же функцию $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-1}$, но x приближается к 1 справа ($x\to 1+0$). Тогда $x>1$ и $x-1>0$. Если x – очень близкое к 1 число, то числитель приблизительно равен –6, а знаменатель – очень маленькое по модулю положительное число.

$$f(x)\approx\frac{-6}{\textit{очень маленькое по модулю положительное число}}=$$

$=$ *очень большое по модулю отрицательное число.*

Чем ближе справа x приближается к 1, тем большему по модулю отрицательному числу равно значение $f(x)$. На графике это выглядит приблизительно так (рис. 2):

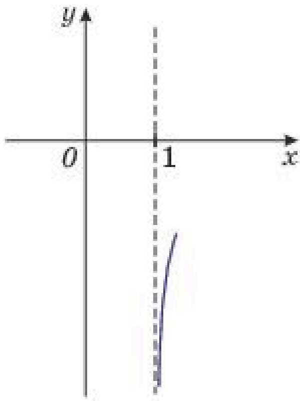


Рис. 2

Записываем: $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=-\infty$, отсюда следует, что прямая $x=1$ – **вертикальная асимптота графика функции** $y=f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если выполняется хотя бы одно из четырех условий: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$.

Рассмотрим теперь поведение функции $y=f(x)$, где $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-1}$ при очень больших значениях переменной.

$$\frac{(x+2)(x-3)}{x-1}=\frac{x^2-x-6}{x-1}=\frac{x^2-x}{x-1}-\frac{6}{x-1}=x-\frac{6}{x-1}$$

При очень больших значениях x значения дроби $\dfrac{6}{x-1}$ становятся очень маленькими по модулю и значение $f(x)$ приблизительно равно x. Кроме того, $\dfrac{6}{x-1}>0$, $f(x)=x-\dfrac{6}{x-1}<x$.

$$f(x)\approx x-\frac{6}{\textit{очень большое число}}=x-(\textit{очень маленькое по модулю число})\approx x.$$

Чем больше значение x, тем меньше $f(x)$ отличается от x. График $f(x)$ бесконечно близко «прижимается» к графику прямой $y=x$ снизу, так как $f(x)<x$.

На графике это выглядит так, как на рисунке 3:

Записываем: при $x \to +\infty$ выполняется равенство $f(x) \approx x$, прямая $y=x$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x>0$.

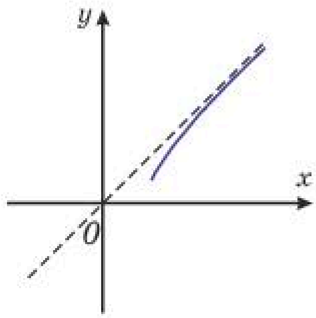


Рис. 3

При $x \to -\infty$ дробь $\frac{6}{x-1}$ становится очень маленьким по модулю отрицательным числом. Так как $f(x)=x-\frac{6}{x-1}$, то при $x \to -\infty$ значение $f(x)$ приблизительно становится равным x, кроме того $f(x) > x$. Чем больше абсолютная величина x (*модуль* x), тем меньше $f(x)$ отличается от x. График $f(x)$ бесконечно близко прижимается к прямой $y = x$ сверху.

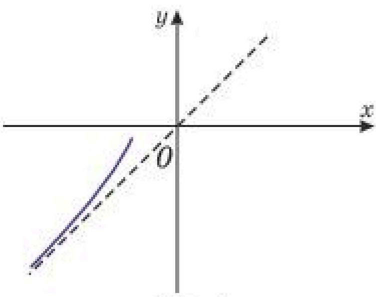


Рис. 4

Вид графика на рисунке 4.

Записываем: при $x \to +\infty$ выполняется равенство $f(x) \approx x$, прямая $y=x$ является наклонной асимптотой графика $y=f(x)$ при $x<0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

График линейной функции $y = kx + m$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если выполняется хотя бы одно из двух условий: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+m))=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(kx+m))=0$.

Замечание. Если $k=0$, то $y=m$ – горизонтальная асимптота. Горизонтальная асимптота – частный случай наклонной асимптоты. Иногда сразу можно понять, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=m$, тогда прямая $y=m$ – горизонтальная асимптота.

Коэффициенты k и m ищем из следующих соображений. При больших значениях переменной x выполняется приблизительное равенство $f(x)\approx kx+m$. Следовательно, $\frac{f(x)}{x}\approx\frac{kx+m}{x}\approx k$ и $m\approx f(x)-kx$. Переходя к пределам при очень больших по модулю значениях переменной x, получаем два соотношения: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$.

Если хотя бы один из пределов не является конечным числом, то и ни о какой асимптоте речи быть не может.

5.2 Исследование функций и построение графиков

Исследование функции проводим по следующему плану:

1. Область определения.
2. Непрерывность.
3. Свойство четности.
4. Периодичность.
5. Монотонность.
6. Экстремумы.
7. Пересечения графика с осями координат. Интервалы знакопостоянства.
8. Наклонные асимптоты.
9. Множество значений.

Поясним каждый из пунктов.

1. Если в условии задачи ничего не сказано об области определения, то находим естественную область определения, то есть область допустимых значений для аргумента.

2. Если найдены точки нарушения непрерывности, то необходимо вычислить односторонние пределы.

3. Требуется либо доказать, что функция является четной или нечетной, либо доказать, что функция не обладает свойствами четности.

4. Вопрос о периодичности не имеет смысла для многочленов и дробно-рациональных функций.

Многочлены – функции вида это $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, *где* $a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,\ a_0$ *– некоторые числа, и* $a_n\neq 0$. *Дробно-рациональные функции – это функции вида* $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *где* $f(x)$ *и* $g(x)$ *– многочлены.*

Если функция периодическая, то требуется определить ее главный период. Периодичность функции позволяет ограничиться ее исследованием на каком-нибудь отрезке, длина которого равна периоду.

5. Интервалы монотонности находим с помощью производной: интервалы положительности производной совпадают с интервалами возрастания функции; интервалы отрицательности производной совпадают с интервалами убывания функции.

6. Применяем достаточный признак экстремума: если при переходе (слева направо) через критическую точку знак производной меняется с «+» на «–», то в критической точке возрастание сменяется убыванием и имеет место точка локального минимума; если при переходе (слева направо) через критическую точку знак производной меняется с «–» на «+», то в критической точке убывание сменяется возрастанием и имеет место точка локального минимума.

7. Любая точка на оси Oy имеет нулевую абсциссу. Поэтому пересечение графика функции $y=f(x)$ с осью Oy находим из условия $x = 0$. Любая точка на оси Ox имеет нулевую ординату. Поэтому пересечение с осью Ox находим из условия $y = 0$, то есть решаем уравнение $f(x) = 0$. Интервалы знакопостоянства находим методом интервалов.

Не для любого уравнения $f(x) = 0$ существует способ найти его корни в явном виде. В таком случае следует пропустить данный пункт (не выполнять).

8. Способ нахождения наклонных асимптот описан в п.1. данного параграфа. Смотрите также приведенные ниже примеры.

9. Множество значений определяем как объединение ординат всех точек графика. *Существуют также другие способы нахождения множества значений.*

Общие замечания.

1. При построении графика, там, где это возможно, можно и нужно пользоваться простейшими преобразованиями графиков.

2. Если аналитическая формула для $f(x)$ содержит выражение с модулем, но простейшие преобразования графика к ним не применимы, то построение графика производим отдельно на каждом из промежутков знакопостоянства подмодульных выражений. Отдельно вычисляем значения $f(x)$ в «нулях» выражений, стоящих под знаком модуля.

3. Для контроля правильности построения и уточнения рисунка полезно составить небольшую (в 2–3 точки) таблицу значений функций.

4. Если выяснилось, что функция является четной или нечетной, и конечной целью исследования ставится построение графика, то допустимо построить график сначала в области $x \geq 0$ (правая полуплоскость относительно оси Oy), а затем достроить симметричное отражение относительно оси Oy в случае четной или относительно точки $(0, 0)$ в случае нечетной функции.

5. Если в процессе исследования получаются иррациональные числа, то при построении графика следует пользоваться их приближенными значениями, но при записи ответа – их точными значениями. Например, выяснилось, что $\sqrt{3}$ – точка локального максимума, $2\sqrt{2}$ – локальный максимум. Так как $\sqrt{3} \approx 1{,}7...$, $\sqrt{2} \approx 1{,}4...$, то на плоскости отмечаем точку $(1{,}7; 2{,}8)$, но обозначения ставим точные (рис. 5).

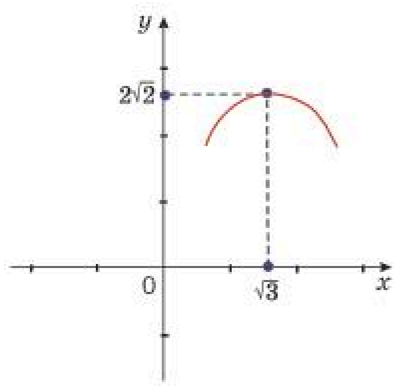


Рис. 5

Пример 1 Исследовать функцию и построить ее график: $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Решение.

1) Область определения $D(f):(-\infty;+\infty)$.

2) Знаменатель x^2+1 дробно-рациональной функции не обращается в 0. Функция непрерывна на множестве $(-\infty;+\infty)$.

3) Для всех $x \in D(f)$ выполняется равенство

$f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+1}=-\dfrac{x}{x^2+1}=f(x)$, следовательно, функция

$f(x)$ является нечетной.

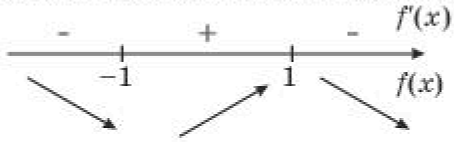
4) Функция не периодическая.

5) Производная функции $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$,

$f'(x)=\dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$.

Так как $D(f'(x))=(-\infty;+\infty)$, то критические точки ищем из условия $f'(x)=0$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ или $x=-1$.

Методом интервалов исследуем знаки производной:



Отсюда следует, что:

$(-\infty;-1)$ – интервал убывания,

$(-1;1)$ – интервал возрастания,

$(1;+\infty)$ – интервал убывания.

6) Точка $x=-1$ является точкой локального минимума,

$f(-1)=-\dfrac{1}{2}$,

Точка $x=1$ является точкой локального максимума, $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

7) Пересечение графика с осью Oy ищем из условия $x=0$. Так как $f(0)=0$, то график пересекает ось Oy в начале координат $(0,0)$.

Пересечение с осью Ox: $y=0 \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+1}=0 \Rightarrow x=0$. Отсюда следует, что график функции пересекает ось Ox в точке $(0,0)$.

Очевидно, что $f(x)>0$ при $x\in(0;+\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in(-\infty;0)$.

8) Заметим, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}=0.$

Следовательно, прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика.

9) Множество значений функции $E(f)=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Изображение точек графика начинаем с 6.

Существование производной на промежутках непрерывности гарантирует «гладкость» графика функции: график не имеет «изломов». По этой причине, например, точка локального максимума, в которой $f'(x)=0$ изображается в виде закругленной вершины, а не острой (рис 6 , 7).

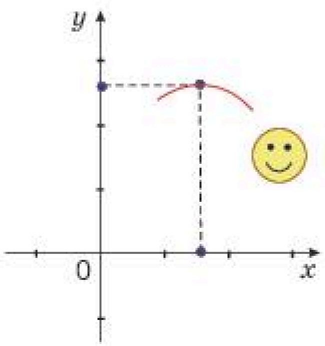


Рис. 6

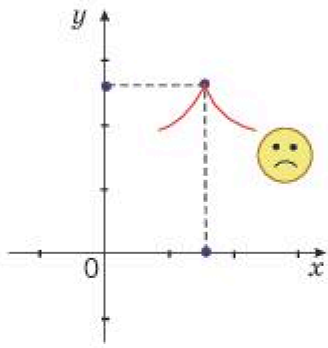


Рис. 7

Строим график (рис. 8):

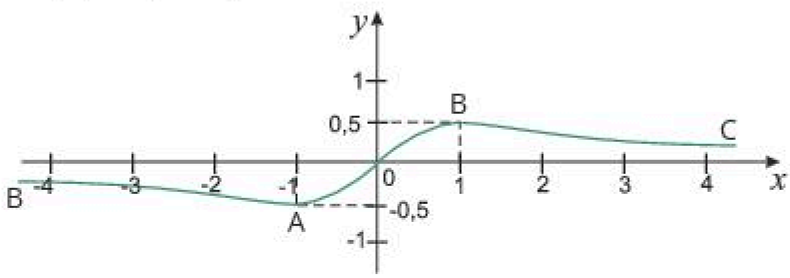


Рис. 8

Данное изображение было построено следующим образом.

1) Отмечены точки $A\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$, $O(0;0)$, $B\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

2) В точках A и B проведены маленькие горизонтальные отрезки – части будущего графика. Отрезки горизонтальны, так как $f'(-1)=0$ и $f'(1)=0$, то есть касательные к графику в точках A и B горизонтальны.

3) Строим участок A-O-B. Так как по исследованию $(-1;\ 1)$ – интервал возрастания, то строим плавную повышающуюся линию от правого конца *маленького горизонтального отрезка в точке A до левого конца маленького горизонтального отрезка в точке B. Линию ведем через* $(0;\ 0)$*, так как* $(0;\ 0)$ *– точка пересечения данного графика с осями координат.*

4) Строим участок B-C. Так как $(1;\ +\infty)$ *– интервал убывания, то линия B-C должна понижаться. Так как* $(0;\ +\infty)$ *– интервал положительности* $f(x)$*, то, несмотря на снижение линии B-C, она нигде не пересечет* Ox*. Так как* Ox *– асимптота графика, то B-C, снижаясь и нигде не пересекая* Ox*, прижимается к* Ox *ближе и ближе с ростом* x*. Вывод: от правого конца маленького горизонтального отрезка в точке B проводим плавную понижающуюся линию, прижимающуюся к оси* Ox*.*

5) Так как функция $f(x)$ *является нечетной, то участок D-A строим как симметричное отражение участка B-C относительно* $(0;\ 0)$*.*

Пример 1

Исследовать функцию $y=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-1}$.

Решение. Функция $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-1}$ является дробно-рациональной.

1) Область определения $D(f)$ задается условием $x\neq 1$.

2) Так как $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=-\infty$, то $x=1$ является точкой разрыва 2-го рода, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика (см. п.1. данного параграфа).

3) Функция $f(x)$ не обладает свойствами четности, так как ее область определения не симметрична относительно нуля на оси Ox: $x=1\notin D(f),\ x=-1\in D(f)$.

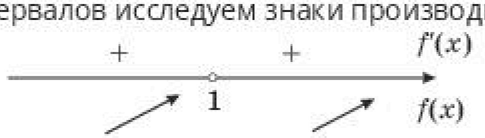
4) Функция не является периодической.

5) Производная функции

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x-6)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+7}{(x-1)^2}.$$

Производная не существует в точке $x=1$, но $x=1$ не является точкой непрерывности функции $f(x)$. Поэтому $x=1$ не является критической точкой. Других критических точек нет, так как уравнение $f'(x)=0$ не имеет решений. Действительно, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x+7=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Методом интервалов исследуем знаки производной $f'(x)$:



Так как на интервалах $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$ производная положительна, то данные интервалы являются интервалами возрастания функции $f(x)$.

6) Точки экстремума отсутствуют.

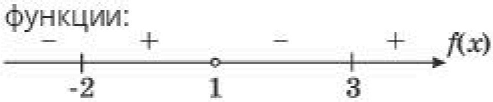
7) Пересечение с осью Oy ищем из условия x=0. Так как $f(0)=6$, то пересечением графика с осью Oy является точка $(0;6)$.

Пересечение с осью Ox ищем из условия y=0:

$$\frac{(x+2)(x-3)}{x-1}=0 \Leftrightarrow x=-2,\ x=3.$$

Следовательно, график пересекает ось Ox в точках (–2;0) и (3;0).

Методом интервалов находим интервалы знакопостоянства функции:



При $x\in(-\infty;-2)\cup(1;3)$ функция принимает отрицательные значения: $f(x)<0$.

При $x\in(-2;1)\cup(3;+\infty)$ функция принимает положительные значения: $f(x)>0$.

8) Наклонные асимптоты.

Один из способов нахождения асимптоты, выделение целой части, был рассмотрен в 5.1 данного параграфа. Существует другой способ. Прямая $y=kx+m$ является наклонной асимптотой графика $y=f(x)$ только в том случае, если существуют два конечных предела:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ и } m=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

В данном случае

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1,$$

$$m=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x-6}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{x-1}=0.$$

Вычисления обоих пределов при $x\to-\infty$ не отличаются от приведенных. Отсюда следует, что прямая $y=1x+0$ является наклонной асимптотой графика $y=f(x)$ при $x>0$ и $x<0$.

9) $E(f):(-\infty;\infty)$.

Строим график (рис. 9):

О том, как было построено данное изображение, прочитайте еще раз пункт 5.1 данного параграфа. Заметим только, что:

– так как $(-\infty;1)$ – интервал возрастания, то участок A-B – поднимающаяся слева направо линия, проходящая через точки $(-2;0)$ и $(0;6)$;

– так как $(1;\infty)$ – интервал возрастания, то участок C-D – поднимающаяся слева направо линия, проходящая через точку $(3;0)$.

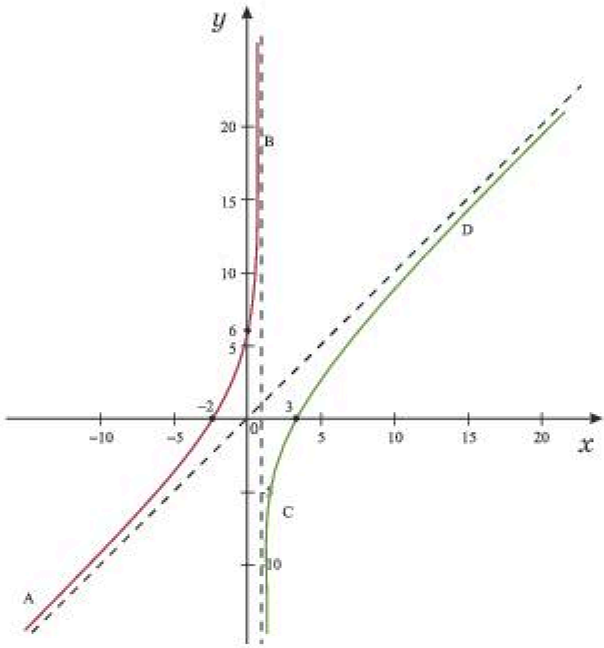


Рис. 9

Пример 3

Построить график функции $y=2\sin x+\cos 2x$.

Решение

1) $D(f):(-\infty;\infty)$.

2) Функция $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ непрерывна на множестве $D(f)$.

3) Заметим, что $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-3$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Отсюда следует, что функция не обладает свойствами четности, иначе выполнялось бы одно из равенств $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ или $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

4) $T=2\pi$ – период, так как для любого $x\in D(f)$ выполняется равенство $f(x+2\pi)=f(x)$. Действительно, $f(x+2\pi)=2\sin(x+2\pi)+\cos(2(x+2\pi))=2\sin x+\cos 2x=f(x)$.

5) Производная $f'(x)=2\cos x-2\sin 2x$. Критические точки ищем из условия $f'(x)=0$ (см. упражнение 2, §3).

$T=2\pi$ *– период.* Мы имеем возможность построить график $y=f(x)$ на каком-нибудь отрезке длины 2π, *например, на отрезке* $[-\pi;\pi]$, а затем построенный участок «размножить» влево и вправо вдоль оси Ox.

На отрезке $[-\pi;\pi]$ имеются 4 критические точки:

$-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$, причем

$$f(-\pi)=1,\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-3,\ f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2},\ f(\pi)=1.$$

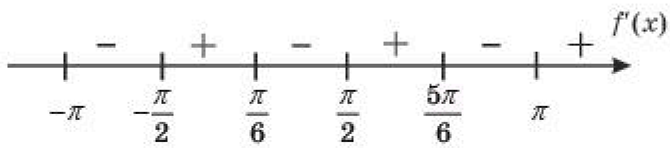


Рис. 10

Знаки $f'(x)$ на интервалах можно найти, выбирая внутри каждого интервала точку и подставляя ее значение в $f'(x)$. Например, между $\frac{\pi}{2}=90°$ и $\frac{5\pi}{6}=150°$ удобно рассмотреть точку $135°=\frac{3\pi}{4}$ и проверить, что $f'(\frac{3\pi}{4})>0$ (рис. 10).

Обычный метод интервалов. Предупреждаем только, что знаки не всегда чередуются.

6) Используя теорему о достаточном признаке экстремума, получаем $x=-\frac{\pi}{2}$ и $x=\frac{\pi}{2}$ – точки локального минимума, $x=\frac{\pi}{6}$ и $x=\frac{5\pi}{6}$ – точки локального максимума.

7) Пересечение с осью Oy: $x=0$, $f(0)=1$, $(0;1)$ – точка пересечения с осью Oy.

Пересечения с осью Ox – нули функции $f(x)$ – находятся из уравнения $2\sin x+\cos 2x=0$. После замены $\cos 2x=1-2\sin x^2$, $\sin x=t$ приходим к уравнению $2t^2-2t-1=0$ с корнями $t=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$, $x=(-1)^n\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)+\pi n$.

Как отметить такие корни на оси Ox? (Да никак!). Наша цель – построить график, а такие корни нам в этом никак не помогут.

8) Асимптот, очевидно, нет.

Кстати, может ли не равная тождественно нулю периодическая функция иметь наклонную асимптоту?

9) $E(f)=\left[-3;\dfrac{3}{2}\right]$. Строим график (рис. 11):

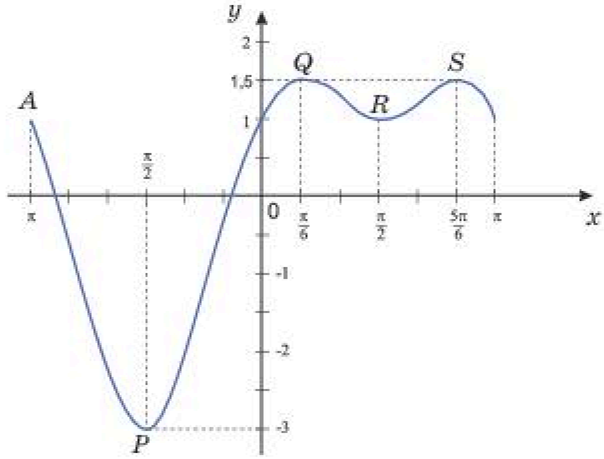


Рис. 11

Данное изображение было построено следующим образом:

1. Отмечены точки $A(-\pi;1)$, $B(0;1)$, $C(\pi,1)$.

2. Отмечены точки $P\left(\dfrac{-\pi}{2};-3\right)$, $P\left(-\dfrac{\pi}{2};-3\right)$, $Q\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{3}{2}\right)$, $R\left(\dfrac{\pi}{2};1\right)$, $S\left(\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{3}{2}\right)$, соответствующие локальным экстремумам. Производная в критических точках $-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ равна нулю. *Это значит, что касательные в этих точках горизонтальны. А это значит, что маленькие кусочки графиков, содержащие точки P, Q, R и S, похожи на отрезки прямых. Нужно сначала провести маленькие горизонтальные отрезки через эти точки. График строим, соединяя плавной линией не точки, а концы проведенных маленьких отрезков (см. пример 1) (рис. 12).*

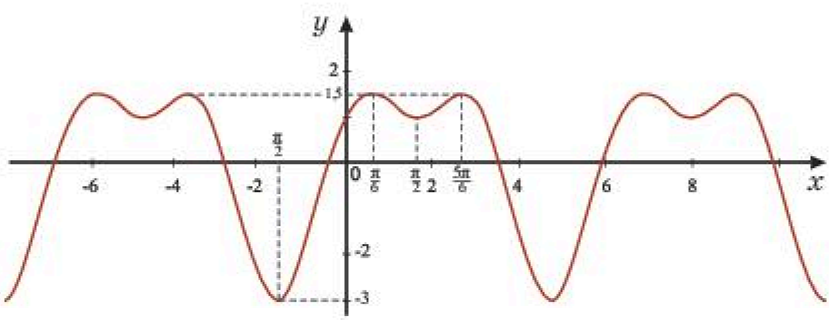


Рис. 12

Задачи

Часть 1

1. (2) Дана функция $y=\frac{4}{x^2-1}$. Определите уравнения вертикальных асимптот графика функции. Графически изобразите поведение функции вблизи вертикальных асимптот аналогично тому, как это сделано на рисунке 9 пункта 5.1 данного параграфа.
2. (3) а) Исследуйте функцию $y=f(x)$ и постройте ее график, где $f(x)=x^3-3x$.
   б) Используя построенный график, определите число корней уравнения $f(x)=g(x)$, где $g(x)=x-1$.
   в) Определите число корней уравнения $x^3-3x=a$ в зависимости от значений параметра a.
3. (3) а) Исследуйте функцию $y=3+2x^2-x^4$ и постройте ее график.
   б) На той же координатной плоскости постройте график функции $y=0,5x+1$. Настолько точно, насколько позволяет ваш график, найдите корни уравнения $3+2x^2-x^4=0,5x+1$.
4. (3) а) Исследуйте функцию $y=\frac{8x}{x^2+4}$ и постройте ее график.
   б) На той же координатной плоскости постройте график функции $y=\frac{x^2}{2}$. Решите графически неравенство $\frac{8x}{x^2+4}\geq\frac{x^2}{2}$.
5. (3) а) Исследуйте функцию $y=x+\frac{4}{x}$ и постройте ее график.
   б) На той же координатной плоскости постройте окружность $x^2+y^2=36$. Определите количество решений системы уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=36,\\ xy=x^2+4.\end{cases}$
6. (4) а) Докажите, что все прямые вида $y=k(x-2)$, где k – произвольное число, проходят через точку с координатами $(2;0)$. Чем отличается положение прямой при положительном значении k от положения прямой при отрицательном значении k? Что происходит с прямой $y=k(x-2)$ при увеличении положительного значения k? Что происходит с прямой $y=k(x-2)$ при уменьшении отрицательного значения k?

б) Постройте график функции $y=\dfrac{3x}{x^2-4}$. Используя построенный график, постарайтесь определить количество корней уравнения $\dfrac{3x}{x^2-4}=k(x-2)$ в зависимости от значений параметра k.

7. (3) Определите уравнение асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{2x^3+32x^2+26x-57}{3(x^2+x-2)}$ при $x\to+\infty$. Используя уравнение асимптоты, найдите приближенное значение функции $f(x)$ в точке $x=300$.

8. (4) Исследуйте функцию $f(x)=4\cos\dfrac{x}{2}-2\cos x$ и постройте ее график.

9. (3) Дана функция $g(x)=x-2\sin x$, определенная на промежутке $x\in[-2\pi;2\pi]$. Исследуйте функцию $y=g(x)$ и постройте ее график.

Часть 2

10. (2) Дана функция $y=\dfrac{-5-x}{x^2(x+3)}$. Определите уравнения вертикальных асимптот графика функции. Графически изобразите поведение функции вблизи вертикальных асимптот аналогично тому, как это сделано на рисунке 9 пункта 5.1 данного параграфа.

11. (3) а) Исследуйте функцию $y=f(x)$ и постройте ее график, где $f(x)=-x^3+2x^2-x$.
б) Используя построенный график, определите число корней уравнения $f(x)=g(x)$, где $g(x)=x+5$.
в) Определите число корней уравнения $-x^3+2x^2-x=a$ в зависимости от значений параметра a.

12. (3) а) Исследуйте функцию $y=x(x-2)^3$ и постройте ее график.
б) На той же координатной плоскости постройте график функции $y=-x+2$. Настолько точно, насколько позволяет ваш график, найдите корни уравнения $x(x-2)^3=-x+2$.

13. (3) а) Исследуйте функцию $y=\dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$ и постройте ее график.
б) На той же координатной плоскости постройте график функции $y=x^2-2x-2$. Решите графически неравенство $\dfrac{6(x-1)}{x^2+3}\le x^2-2x-2$.

14. (3) а) Исследуйте функцию $y=\frac{9-x^2}{x}$ и постройте ее график.

б) На той же координатной плоскости постройте окружность $(x-6)^2+(y-6)^2=36$. Определите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases}(x-6)^2+(y-6)^2=36,\\ xy=9-x^2.\end{cases} \qquad P\left(-\frac{\pi}{2};-3\right)$$

15. (4) а) Докажите, что все прямые вида $y=k(x+3)$, где k – произвольное число, проходят через точку с координатами $(-3;0)$. Чем отличается положение прямой при положительном значении k от положения прямой при отрицательном значении k? б) Постройте график функции $y=\frac{x^2}{9-x^2}$. Используя построенный график, постарайтесь определить количество корней уравнения $\frac{x^2}{9-x^2}=k(x+3)$ в зависимости от значений параметра k.

16. (3) Определите уравнение асимптоты графика функции $f(x)=\frac{-5x^3+130x^2-245x+126}{6(x-1)^2}$ при $x\to+\infty$. Используя уравнение асимптоты, найдите приближенное значение функции в точке $x=60$.

17. (4) Исследуйте функцию $f(x)=2\cos x+\sin 2x$ и постройте ее график.

18. (3) Дана функция $g(x)=2\cos x+x$, определенная на промежутке $x\in[-2\pi;2\pi]$. Исследуйте функцию $y=g(x)$ и постройте ее график.

19. (4) Костя из 10Б класса и 8 его друзей из той же школы пошли в поход. Среди любых 4-х туристов обязательно есть одноклассники, а среди любых 5 – не больше, чем 3 одноклассника. Сколько учеников 10Б класса пошли в поход?

20. (3) Жанар живет в Алматы, но бизнес свой ведет в Талдыкоргане. Иногда ей требуется отправлять деньги из одного города в другой. Это можно сделать двумя способами: либо банковскими переводами, при этом банк удерживает $0,4\%$ от суммы перевода, либо курьером, стоимость поездки которого составляет 12000 тенге независимо от суммы.

Начиная, с какой суммы Жанар будет выгоднее отправлять деньги курьером, чем через банк?
A) 300000 тг; B) 4800001 тг; C) 480000 тг; D) 3000000 тг; E) 3000001 тг.

21. (2) Известно, что число абитуриентов, сдававших экзамен по предмету X на факультет Y университета Z больше ста тридцати, но меньше ста семидесяти четырех. Известно также, что ровно 64% из них получили оценку «3». Сколько абитуриентов сдавали этот экзамен?

22. (1) Решите уравнения: а) $0,6|x-0,3|=x^2+0,27$; б) $|2-x|=5-4x$.

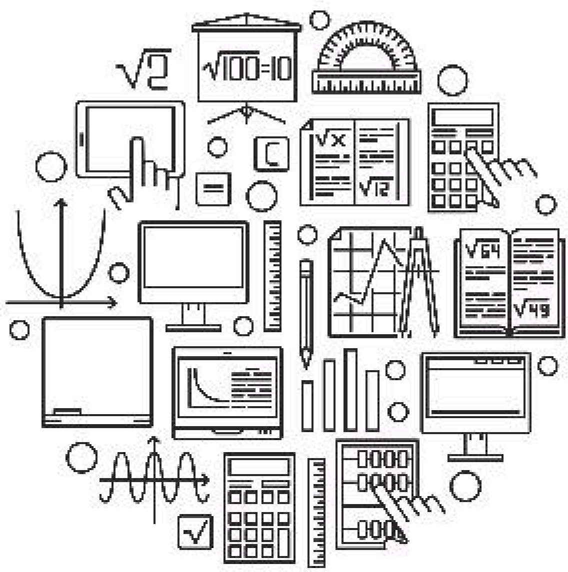
Ответы:

1. Уравнения вертикальных асимптот: $x=-1$, $x=1$. **2.** б) 3 корня; в) при $a<-2$ или $a>2$ уравнение имеет один корень, при $a=\pm 2$ два корня, при $-2<a<2$ три корня. **4.** б) $x\in[0;2]$. **5.** б) Система имеет 4 решения. **6.** б) При $k>0$ уравнение имеет 3 корня, при $k\le 0$ имеет один корень. **7.** При $x\to+\infty$ асимптотой графика функции является прямая $y=\frac{2}{3}x+10$, следовательно, при достаточно больших значениях переменной имеет место приближенное равенство $\frac{2x^3+32x^2+26x-57}{3(x^2+x-2)}\approx\frac{2}{3}x+10$, то есть $f(300)\approx\frac{2}{3}\cdot 300+10=210$. **10.** Уравнения вертикальных асимптот: $x=0$, $x=-3$. **11.** б) один корень; в) при $a<-\frac{4}{27}$ или $a>0$ уравнение имеет один корень, при $a=-\frac{4}{27}$ или $a=0$ два корня, при $-\frac{4}{27}<a<0$ три корня. **13.** б) $x\in(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$. **14.** б) два решения. **15.** б) При $k>0$ уравнение имеет 3 корня, при $k\le 0$ имеет один корень. **16.** При $x\to+\infty$ асимптотой графика функции является прямая $y=-\frac{5}{6}x+20$, $f(60)\approx-\frac{5}{6}\cdot 60+20=-30$.

19. 3. **20.** E. **21.** 150. **22.** а) $x=-0,3$; б) $x=1$.

Глава 7

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ



§1 ВВОДНЫЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотрим несколько числовых величин.

Величина X: результат подбрасывания игрального кубика.

Величина Y: сумма цифр автомобильного номера.

Величина Z: остаток от деления случайно выбранного целого числа на 13.

Величина W: значение дроби вида $\frac{p}{q}$, где числа p и q случайным образом выбираются из множества $\{1, 2, 3\}$.

Величина S: **точное** расстояние от центра мишени до точки попадания дротика при игре в дартс.

Величина T: **точное** время Вашего передвижения из дома в школу.

Величина X может принимать любое значение от 1 до 6. Так как автомобильные номера в Казахстане являются трехзначными, то величина Y может принимать значения от 1 до 27. Какие значения может принимать величина Z, подумайте самостоятельно. Величина W может принимать значения из множества $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3\right\}$. Если диаметр мишени для игры в дартс равен, например, 20 см, то величина S, выраженная в сантиметрах без округления, может оказаться любым действительным числом от 0 до 20. Если предположить, что время, за которое вы преодолеваете свой путь от дома до школы, не превышает 3-х часов, но не меньше 5 минут, то величина T может принимать любое значение от 5 минут до 3 часов, например, $\sqrt{2}$ часов.

Все перечисленные величины в результате одного испытания принимают какое-то конкретное числовое значение, которое невозможно предугадать заранее до испытания. Такие величины называются **случайными**.

§2 ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Случайной называют величину, которая в результате испытания принимает одно и только одно числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Первые четыре величины X, Y, Z и W отличаются от последних двух S и T. Дело в том, что каждая из первых четырех величин может принимать **конечное** множество значений, в то время как значениями каждой из последних двух могут быть любые действительные числа из определенных промежутков. Поэтому величины X, Z, Z и W называются **дискретными** случайными величинами, а S и T называются **непрерывными** случайными величинами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

Случайная величина называется дискретной, если она принимает с определенной вероятностью значения из конечного или счетного множества.

Если с конечными множествами все понятно, то возникает вопрос о том, что такое счетные множества? Множество называется счетным, если оно бесконечно, но его элементы можно пронумеровать. Например, счетным является множество всех членов геометрической прогрессии со знаменателем, не равным единице. Труднее понять, почему счетным является множество всех рациональных чисел. Об этом можете почитать на https://ru.wikipedia.org/wiki/рациональное число. В нашем курсе мы не будем рассматривать случайные величины, принимающие значения из счетных множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.

Случайная величина называется непрерывной, если она может принимать все значения из конечного или бесконечного промежутка.

Упражнение 1

Приведите по несколько примеров дискретных и непрерывных случайных величин.

Пример 1

Капли дождя падают на прямую беговую дорожку длиной 100 м. Какова вероятность $P(a)$ падения отдельно взятой капли на расстоянии не более a м от старта? Капли, падающие вне дорожки, не рассматриваются.

Решение-обсуждение. Нетрудно сообразить, что на отрезок беговой дорожки длины 50 м падает примерно в 2 раза меньше капель, чем на всю беговую дорожку длины 100 м. Поэтому, если, например, $a=50$, то $P(a)=P(50)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$. Если $a=25$, то отрезок длины 25 м в 4 раза меньше всей беговой дорожки, поэтому $P(a)=P(25)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$. И вообще, на дорожку длины a падает капель примерно во столько раз меньше, во сколько раз a меньше чем 100. Следовательно, $P(a)=\frac{a}{100}$.

В данном случае мы имеем дело с так называемым **равномерным распределением** непрерывной случайной величины. Назовем ее X. В результате испытания – падения капли на беговую дорожку – величина X принимает значение, равное расстоянию от места падения капли до старта. Говорят, что непрерывная случайная величина X равномерно распределена на интервале (0;100). Аналогично определяется равномерное распределение на произвольном интервале $(a;b)$: точка наугад бросается на интервал $(a;b)$. В результате такого испытания случайная величина X принимает значение, равное координате точки.

Изучение данного параграфа начнем с рассмотрения примера.

§3 ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пример 1

«Aldar-Khose and the Devil» («Алдаркосе и черт»). Однажды черт предложил Алдаркосе сыграть в игру по следующим правилам: «Алдаркосе подбрасывает игральную кость. Если выпадает «1», «2» или «3», то черт дает Алдаркосе 50 сникерсов (50 Sn); если «4» или «5», то черт дает Алдаркосе 240 Sn; если выпадает «6», то Алдаркосе отдает черту 666 Sn». Стоит ли соглашаться Алдаркосе на такую игру? Попытайтесь спрогнозировать результат игры после большого числа подбрасываний n, например, при $n=6000$.

Решение-обсуждение. Предположим, произошло $n=6000$ подбрасываний. Вероятности выпадения той или иной грани одинаковы. Поэтому понятно, что при большом числе подбрасываний «1» выпадает в среднем в одном из шести случаев, «2» выпадает в среднем в одном из шести случаев и так далее. Следовательно, при π–6000 каждая из граней выпала приблизительно по 1000 раз. По условиям игры, если выпадает «1», «2» или «3», то черт отдает Алдаркосе 50 сникерсов (50 Sn). Исходы «1», «2» и «3» составляют ровно половину из числа всех равновозможных исходов. Это значит, что примерно в половине случаев количество сникерсов Алдаркосе увеличивалось на 50. Аналогично, исходы «4» и «5» составляют ровно треть из числа всех равновозможных исходов.

Это значит, что приблизительно $\frac{1}{3}\cdot 6000$ раз количество сникерсов Алдаркосе увеличивалось на 240. И, наконец, приблизительно $\frac{1}{6}\cdot 6000$ раз Алдаркосе отдавал 666 сникерсов черту. Подведем итоги: приблизительно 3000 раз получил по 50, примерно 2000 раз получил по 240, примерно 1000 раз отдал 666. Всего получается приблизительно $3000\cdot 50+2000\cdot 240+1000\cdot(-666)=-36000$ Sn. Вывод: если Алдаркосе согласится сыграть с чертом, то через 6000 подбрасываний окажется должен черту примерно 36000 Sn.

Пример 1

Хитрый черт продолжает уговаривать Алдаркосе: «Уважаемый! Если не хочешь играть 6000 раз, давай не будем играть 6000 раз. Давай всего один раз подбросим кубик на тех же условиях. Подумай хорошо. Вряд ли именно на этот раз выпадет шестерка. Шестерка выпадает намного реже, чем все остальные грани вместе взятые». Соглашаться ли Алдаркосе?

Решение. Не соглашаться. Ведь если за 6000 раз «выигрыш» составляет -36000 Sn, то за один раз «выигрыш» составляет в среднем $\frac{-36000}{6000}=-6$ сникерсов.

Давайте внимательнее присмотримся к равенству:

$$3000\cdot 50+2000\cdot 240+1000\cdot(-666)=-36000.$$

Разделим обе части равенства на количество подбрасываний 6000:

$$\frac{3000}{6000}\cdot 50+\frac{2000}{6000}\cdot 240+\frac{1000}{6000}\cdot(-666)=-\frac{36000}{6000},$$

$$\frac{1}{2}\cdot 50+\frac{1}{3}\cdot 240+\frac{1}{6}\cdot(-666)=-6.$$

Заметим, что числа 50, 240 и –666 равны возможным выигрышам Алдаркосе; числа $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$ равны соответственно вероятностям, с которыми данные выигрыши выпадают.

Упражнение 1

Помогите Алдаркосе заменить одно из чисел 50, 240 или -666 на такое, чтобы уравнять его шансы в игре против черта.

Давайте отвлечемся от фольклорных героев и сформулируем пример 1 в известных математических терминах. Возможный выигрыш Алдаркосе назовем величиной X. Ясно, что X является случайной дискретной величиной. Получается примерно такой текст: «В результате некоторого испытания величина X случайным образом с вероятностью $\frac{1}{2}$ принимает значение 50, с вероятностью $\frac{1}{3}$ принимает значение 240 и с вероятностью $\frac{1}{6}$ принимает значение -666. Чему равно среднее значение величины X при большом числе испытаний?» Рассматривая пример 2, мы уже ответили на этот вопрос: среднее значение величины X равно числу – 6. Условие только что сформулированной задачи можно компактно и наглядно оформить в виде таблицы:

x_i	50	240	-666
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Такая таблица называется **рядом распределения** или **таблицей распределения** случайной величины X. Среднее значение величины X при большом числе испытаний называется **математическим ожиданием** случайной величины X. В примере «Aldar-Khose and the Devil» исходам «1», «2» и «3» ставится в соответствие число 50, исходам «4» и «5» ставится в соответствие число 240 и, наконец, исходу «6» ставится в соответствие число -666. Вот еще несколько примеров случайных величин:

- сумма цифр автомобильного номера;
- выигрыш лотерейного билета, выраженный в денежном эквиваленте;
- при подбрасывании монеты 0 ставится в соответствие исходу «орел» и 1 ставится в соответствие исходу «решка»;
- среднее арифметическое оценок каждого из учеников класса, полученных за четверть.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Всякое соотношение, задающее зависимость между значениями случайной величины и вероятностями, с которыми эти значения принимаются, называется законом распределения случайной величины.

Мы с вами будем рассматривать только один способ задания такой зависимости: таблицу распределения, аналогичную той, которую мы составили к примеру «Aldar-Khose and the Devil».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

Пусть на множестве элементарных исходов некоторого испытания задана случайная величина X, принимающая одно из возможных значений x_1, x_2, x_3 и т. д. с вероятностями p_1, p_2, p_3 и т.д. соответственно. Таблица, в которой указываются вероятности, с которыми случайная величина X принимает каждое из своих значений, называется таблицей распределения случайной величины X.

Таблица распределения имеет вид:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Из определения таблицы распределения следует, что рассматриваются все элементарные исходы, то есть сумма всех вероятностей в таблице равна единице: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.

Математическим ожиданием случайной величины X называется число $M(X)$, вычисляемое по формуле $M(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.

В «развернутом» состоянии формула $M(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ выглядит следующим образом:

$$M(X)=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\ldots+p_nx_n .$$

Смысл математического ожидания в том, что оно указывает на среднее значение величины X при большом числе испытаний (еще раз просмотрите пример «Алдаркосе и черт»).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.

Дисперсией случайной величины X называется число $D(X)$, вычисляемое по формуле $D(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-a)^2$, где $a=M(X)$.

Запись $D(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-a)^2$ означает, что

$$D(X)=p_1(x_1-a)^2+p_2(x_2-a)^2+p_3(x_3-a)^2+\ldots+p_n(x_n-a)^2 .$$

На основе случайной величины X определим новую случайную величину $Y=(X-a)^2$, где a есть математическое ожидание $M(X)$ величины X. Это значит, что если в результате испытания величина X приняла значение x_i, то Y принимает значение $y_i=(x_i-a)^2$. Составим таблицу распределения величины Y:

y_i	$(x_1-a)^2$	$(x_2-a)^2$	$(x_3-a)^2$	...	$(x_n-a)^2$
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Внимательно присмотримся к формуле:

$D(X)=p_1(x_1-a)^2+p_2(x_2-a)^2+p_3(x_3-a)^2+\ldots+p_n(x_n-a)^2$ и сравним ее с определением математического ожидания:

$$M(X)=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\ldots+p_nx_n.$$

Нетрудно заметить, что, по сути, дисперсия $D(X)$ есть не что иное, как математическое ожидание величины $Y=(X-a)^2$:

$$D(X)=M\left((X-a)^2\right).$$

С другой стороны, величина $y_i=(x_i-a)^2$ указывает, насколько «далеко» отстоит данное значение x_i от среднего значения a случайной величины X. Теперь очевидно, что **чем ближе значения x_i в совокупности к своему среднему $M(X)$, тем меньше значение дисперсии $D(X)$.** Дисперсия характеризует **степень разброса** значений случайной величины вокруг ее математического ожидания.

Дисперсия $D(X)$ может быть вычислена по следующей формуле:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X).$$

Докажем эту формулу для $n=3$. Заметим предварительно, что $a=M(x)=p_1x_1+p_2x_2+p_2x_2$ и $p_1+p_2+p_3=1$. Следовательно,

$$D(X)=p_1(x_1-a)^2+p_2(x_2-a)^2+p_3(x_3-a)^2=$$
$$=p_1\left(x_1^{\ 2}-2x_1a+a^2\right)+p_2\left(x_2^{\ 2}-2x_2a+a^2\right)+p_3\left(x_3^{\ 2}-2x_3a+a^2\right)=$$
$$=p_1(x_1)^2+p_2(x_2)^2+p_3(x_3)^2-2a(p_1x_1+p_2x_2+p_2x_2)+a^2(p_1+p_2+p_3)=$$
$$=M(X^2)-2a\cdot a+a^2=M(X^2)-a^2=M(X^2)-M^2(X).$$

Доказательство данной формулы для других значений n проводится аналогично.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.

Среднеквадратическим отклонением случайной величины X называется величина $\sigma(X)$, вычисляемая по формуле $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Среднеквадратическое отклонение также характеризует **степень разброса** значений случайной величины вокруг ее математического ожидания. Однако его преимущество перед дисперсией в том, что степень разброса характеризуется в тех же единицах измерения, что и сама случайная величина.

По данной таблице распределения случайной величины Y вычислите ее математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

y_i	10	15	20	30	40
p_i	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

Решение. $M(Y)=p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3+p_4y_4+p_5y_5=$
$=0{,}1\cdot 10+0{,}3\cdot 15+0{,}2\cdot 20+0{,}3\cdot 30+0{,}1\cdot 40=22{,}5$.

Дисперсию будем вычислять по формуле $D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)$.

Составим таблицу распределения величины Y^2:

y_i^2	100	225	400	900	1600
p_i	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

Математическое ожидание $M(Y^2)$ квадрата величины Y:

$M(Y^2)=p_1y_1^2+p_2y_2^2+p_3y_3^2+p_4y_4^2+p_5y_5^2=$
$=0{,}1\cdot 100+0{,}3\cdot 225+0{,}2\cdot 400+0{,}3\cdot 900+0{,}1\cdot 1600=587{,}5$.

Дисперсия: $D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=587{,}5-(22{,}5)^2=81{,}25$.

Среднеквадратическое отклонение $\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{81{,}25}\approx 9{,}01388$.

Пример 1 Стрелок производит 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,8. За каждое попадание стрелку засчитывается 10 очков. Найти закон распределения числа засчитанных очков, вычислить математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Очевидно, что по результатам стрельбы, состоящей из трех выстрелов, может получиться от 0 до 3 попаданий. Соответственно стрелку может быть засчитано 0, 10, 20 и 30 очков. Необходимо выяснить, с какой вероятностью может случиться каждое из количеств попаданий. Пусть A_1, A_2, A_3 – события, состоящие в попадании на первом, втором и третьем выстрелах соответственно. Тогда события $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ состоят в промахе на соответствующем выстреле. По условию $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=0,8$. Следовательно, $P(\overline{A_1})=P(\overline{A_2})=P(\overline{A_3})=1-0,8=0,2$. Например, событие $\overline{A_1 A_2 A_3}$ соответствует промахам во всех трех выстрелах, событие $A_1\overline{A_2 A_3}$ соответствует попаданию в первом и промахам во втором и третьем. Аналогично, $A_1\overline{A_2}A_3$ соответствует промаху во втором выстреле и попаданиям в первом и третьем. Все события A_1, A_2, A_3 независимы друг от друга. Поэтому вероятность того, что стрелок промахнется во всех трех выстрелах, равна $P(\overline{A_1 A_2 A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=0,2^3=0,008$. Аналогично,

$$P(A_1\overline{A_2 A_3})=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=0,8\cdot 0,2^2=0,032,$$

$$P(A_1\overline{A_2}A_3)=P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)=0,8^2\cdot 0,2=0,128 \text{ и т.д.}$$

Составим таблицу.

Количество попаданий	0	1	2	3
Количество очков	0	10	20	30
Соответствующие элементарные события	$\overline{A_1 A_2 A_3}$	$\overline{A_1 A_2}A_3$, $A_1\overline{A_2 A_3}$, $\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$	$\overline{A_1}A_2A_3$, $A_1\overline{A_2}A_3$, $A_1A_2\overline{A_3}$	$A_1A_2A_3$
Вероятность каждого из событий	$0,2^3$	$0,8\cdot 0,2^2$	$0,8^2\cdot 0,2$	$0,8^3$
Сумма вероятностей	$0,2^3$	$3\cdot 0,8\cdot 0,2^2$	$3\cdot 0,8^2\cdot 0,2$	$0,8^3$

Далее получаем таблицу распределения случайной величины X:

x_i	0	10	20	30
p_i	0,008	0,096	0,384	0,512

Математическое ожидание и дисперсию считаем аналогично примеру 3. Решение найдено.

Задача для исследования. *В коробке лежат k белых и l черных шаров, причем $k \geq 2$ и $l \geq 1$. Наугад за один раз достают m шаров, $2 \leq m \leq k+l$. Случайной величиной Y назовем количество белых шаров, оказавшихся среди вынутых. Составьте ряд распределения величины Y. В качестве плана для исследования можно воспользоваться следующим планом. Смотрите также задачу 5 после данного параграфа.*

а) $k=2$, $l=2$, $m=2$; б) $k=2$, $l=3$, $m=2$; в) для любых l и l при $m=2$; г) рассмотрите какие-нибудь другие случаи, стараясь получить как можно более общие результаты.

Задачи

Часть 1

1. (2) Известны законы распределения случайных величин X и Y – числа очков, выбиваемых 1-м и 2-м стрелками.

X:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

Y:

x_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_j	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Вычислить $M(X)$ и $M(Y)$.

2. (2) В предыдущей задаче вычислите дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа выбитых очков для каждого стрелка.

3. (1) Первый член арифметической прогрессии равен -10, разность равна 5. Подбрасывается игральный кубик. Случайная величина Z принимает значение, равное члену арифметической прогрессии, номер которого совпадает с выпавшим количеством очков на кубике. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение величины Z.

а) $(5;7)$; б) $(7;11)$; в) $(7;11)\cup(14;17)$; г) А, которое является решением неравенства $-x^2+23x-130\geq 0$.

5. (3) В коробке 2 красных и 1 зеленый шар. Наугад извлекаются без возврата 2 шара. Количество извлеченных красных шаров примем за случайную величину Y. Составьте таблицу распределения случайной величины Y.

6. (5) В коробке 6 белых и 4 черных шаров. Из нее извлекается шар 5 раз подряд, причем каждый раз вынутый шар возвращается в коробку и шары перемешиваются. Приняв за случайную величину X число извлеченных белых шаров, составьте закон распределения для величины X, определите ее математическое ожидание и дисперсию.

Часть 2

7. (2) Вычислите $M(X)$ для случайной величины X – чистого выигрыша.

x_i	-7	193	243	4993
p_i	0,990	0,005	0,004	0,001

8. (2) Первый член геометрической прогрессии равен 8, знаменатель равен $0,5$. Подбрасывается игральный кубик. Случайная величина Z принимает значение, равное члену геометрической прогрессии, номер которого совпадает с выпавшим количеством очков на кубике. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение величины Z

9. (2) Случайная величина X характеризуется рядом распределения:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Определите математическое ожидание.

10. (2) В предыдущей задаче вычислите дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

11. (3) Точка наугад бросается на интервал $(a;b)$. Какова вероятность попадания точки в множество $(c;d)$, где:
а) $a \le c \le d \le b$; б) $c \le a \le d \le b$; в) $c \le a \le b \le d$.

12. (4) Испытание состоит в трехкратном подбрасывании монеты. Случайная величина Z принимает при этом значение, равное количеству выпавших «орлов». Составьте ряд распределения величины Z, найдите ее математическое ожидание и дисперсию.

13. Решите уравнение: $\cos x - \cos 3x = \cos 2x - \cos 4x$.

14. Если некоторое двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же к сумме квадратов цифр данного числа прибавить произведение его цифр, то получится искомое число. Найдите это число.

15. В следующей последовательности К обозначает красный, Ж – желтый, З – зеленый, Г – голубой, Б – белый цвета. Если продолжить последовательность, то какой цвет будет следующим?
Г Г К Г К Б Г К Б З Г К Б З Ж Г К Г К Б Г К Б

16. В кладовке имеются большие и маленькие коробки. В маленькую коробку помещается только один мяч, а в большую – два. 13 мячей можно разложить по коробкам так, чтобы осталось 9 пустых коробок. 10 мячей можно разложить по коробкам так, чтобы осталось 6 пустых коробок. Сколько коробок в кладовке?

Ответы

1. $M(X)=5,36$; $M(Y)=5,36$.

2. $D(X)=13,61$; $D(Y)=4,17$; $\sigma_x=\sqrt{D(X)}=3,69$; $\sigma_y=\sqrt{D(Y)}=2,04$.

3. $M(Z)=2,5$, $D(Z)=72,91667$, $\sigma(Z)=8,64$.

4. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{7}{12}$; г) $0,25$.

5.

y_j	1	2
p_i	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

6.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,010	0,077	0,230	0,346	0,259	0,078

$M(X)=3,00$; $D(X)=1,20$.

7. $M(X)=0$.

8. $M(Z)=2,625$, $D(Z)=7,328125$, $\sigma(Z)=2,707$.

9. $M(X)=1,32$.

10. $D(X)=0,8976$; $\sigma_x=0,95$.

11. а) $\frac{d-c}{b-a}$; б) $\frac{d-a}{b-a}$; в) 1.

13. $x=\pi n, x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$.

14. 63.

15. Зеленый.
Решение:
Г/ГК/ГКБ/ГКБЗ/ГКБЗЖ/ГК/ГКБ/ГКБЗ/ГКБЗЖ

16. Указание. Для того, чтобы по условиям задачи разложить 13 мячей, нужно минимум 7 коробок.

ПОВТОРЕНИЕ

Общеобразовательное значение курса математики, как и любого другого предмета, состоит прежде всего в тех общих понятиях, которые он дает и которые расширяют кругозор и способы подхода человека к явлениям жизни. С этой точки зрения математика важна, во-первых, своей логикой, последовательностью и точностью выводов. Во-вторых, математика полезна тем, что она трудна. Ее абстрактные строгие рассуждения требуют больших и длительных умственных усилий, требуют не столько памяти, сколько понимания и соображения.

А.Д. Александров

Работа с учителем обозначена буквой А, домашняя работа – буквой Б.

Серия 1

1. Найдите производную функции $y = f(x)$.

А. $y = x^2\mathrm{tg}2x$. Б. $f(x) = (x+1)^4(x-2)^3$.

2. С помощью элементарных преобразований постройте график функции. Для каждой функции укажите область определения, множество значений, промежутки монотонности.

А. $y = -(x+3)^2 + 9$. Б. $y = \left||x-2|-1\right|$.

3. Решите уравнения:

А. $\cos\frac{\pi}{3}\sin 5x + \sin\frac{\pi}{3}\cos 5x = -\frac{1}{2}$; Б. $-\sin 7x\cos x = \sin 6x$.

4. Решите систему уравнений:

А. $\begin{cases} \sin x = \cos y = 1, \\ \sin^2 x - \cos^2 x = 1; \end{cases}$ Б. $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y = \frac{1}{6}. \end{cases}$

5. Решите уравнения:

А. $\cos(\arccos(x+2)) = x^2$; Б. $\sin(\arcsin(4x-1)) = 3x^2$.

6. А. Найдите уравнения касательных к графику функции $y = f(x)$ в точках пересечения этого графика с осью абсцисс: $y = 6x^2 - 5x + 1$.

Б. Найти уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точках пересечения этого графика с осью ординат: $y = 3x^3 + 2x + 5$.

7. А. Цена акции сначала уменьшилась на 20%, а затем увеличилась на 20%. На сколько процентов изменилась цена по сравнению с первоначальной?
Б. Цена акции сначала увеличилась на 40%, а затем уменьшилась на 40%. На сколько процентов изменилась цена по сравнению с первоначальной.

8. Найдите область значений функции:
А. $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-5$; Б. $y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$.

Серия 2

1. Найдите производные функций:
А. $f(x)=\cos^3 2x-x^4+\frac{1}{x^2+x}+2\sqrt{x}$; Б. $y=\sin^3 x^5$.

2. Исследуйте на четность и нечетность функции:
А. $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$; Б. $g(x)=\sin 2x+x^3$.

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке графика с абсциссой x_0:
А. $y=\frac{x^3+1}{3}$, $x_0=-1$. Б. $y=x\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

4. Решите уравнения:
А. $\cos 2x+\sqrt{2}\sin x=1$; Б. $6\cos^2 x-5\sin x+5=0$.

5. А. В зоопарке куском веревки длиной 100 м огораживают загон для зверей, имеющий форму равнобедренного треугольника, основанием которого служит стена павильона. Каким следует выбрать основание треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?
Б. Определите размеры открытого бассейна объемом 32 м^3 с квадратным дном, на облицовку дна и стен которого затрачивается наименьшее количество материала.

6. Изобразите схематически фрагмент графика функции $f(x)$ в окрестности точки разрыва x_0 (приведите пример такой функции), если:
А. $x_0=2$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=4$;
Б. $x_0=1$, $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=0$.

7. Найдите наименьший положительный период функции:
А. $y=\mathrm{tg}\,4x$; Б. $y=\mathrm{ctg}\frac{x}{3}$.

8. А. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что ни одна цифра в числе не повторяется?
Б. В соревнованиях участвовали 4 команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

Серия 3

1. Найдите производную функции:
А. $y=\sin(4x-1)^2$;
Б. $f(x)=\sqrt{\operatorname{ctg}x\cdot\sin\frac{x}{2}}$.

2. Исследуйте на четность и нечетность функции:
А. $f(x)=\dfrac{x^4+x^2+|x|+3}{x^2-1}$;
Б. $g(x)=\sin x\cos 3x\cos 4x$.

3. Найдите тангенс наклона касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке графика с абсциссой x_0:
А. $y=1-\sqrt[3]{x},\ x_0=1$;
Б. $y=x^2\cos x,\ x_0=1$.

4. Решите системы:
А. $\begin{cases}\cos x>-\dfrac{1}{2},\\ \cos x<\dfrac{\sqrt{2}}{2};\end{cases}$
Б. $\begin{cases}\sin x-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

5. А. Периметр прямоугольника равен 12 м. Каким должна быть длина сторон, чтобы его площадь была наибольшей?
Б. Из всех прямоугольников площадью 100 м^2 найдите тот, периметр которого наименьший.

6. Найдите:
А. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3}{1+5x^2}+\dfrac{1-3x^2}{3x+1}\right)$;
Б. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{1-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

7. Найдите наименьший положительный период функций:
А. $y=\sin 4x\cos x-\cos 4x\sin x$;
Б. $y=\cos 5x\cos 3x+\sin 5x\sin 3x$.

8. А. Учащиеся 2 класса изучают 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 разных предмета?

Б. Сколько трехзначных чисел (без повторения цифр в записи числа) можно составить из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$?

Серия 4

1. Исследуйте на четность и нечетность функции:
А. $f(x)=x^5+2x^3$; Б. $f(x)=2x^3-x|x|$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке:
А. $f(x)=9x+3x^2-x^3, [-2;2]$; Б. $f(x)=4x+\frac{1}{\sqrt{x}}-3, \left[\frac{1}{9};1\right]$.

3. Решить уравнение:
А. $\sin 3x=\sin x$; Б. $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos x$, число корней на $\left[-\pi;\frac{7\pi}{6}\right]$.

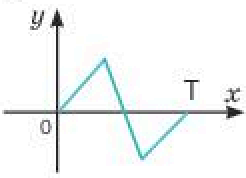
4. Найдите решение неравенства, принадлежащие указанному промежутку:
А. $\sin x\geq\frac{1}{2}, x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{6}\right)$;
Б. $\cos\frac{x}{2}>\frac{\sqrt{3}}{2}, x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

5. Найдите область определения функций:
А. $y=\arcsin\left(x^2+x-1\right)$;
Б. $y=\arccos\left(\sqrt{2-x}\right)$.

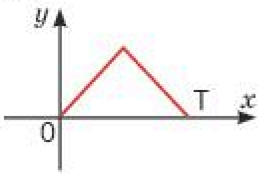
6. А. Лодка находится на озере на расстоянии 3 км от ближайшей точки A берега. Пассажир лодки желает достигнуть села B, находящегося на берегу на расстоянии 5 км от A (участок AB считаем прямолинейным). Лодка движется со скоростью 4 км/ч, а пассажир, выйдя из лодки, может в час пройти 5 км. К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы пассажир достиг села в кратчайшее время?
Б. Буровая вышка расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой надо направить курьера в населенный пункт, расположенный на шоссе в 15 км от упомянутой точки (считаем шоссе прямолинейным). Скорость курьера на велосипеде по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч. К какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь населенного пункта?

7. На рисунке изображена часть графика функции, имеющей период T. Достройте график этой функции на промежутке $[-T; 2T]$. Какой является данная функция-четной или нечетной?

А.



Б.



8. А. При формировании экипажа космического корабля имеется 10 претендентов на пост командира корабля, 20 – на пост бортинженера, 25 – на пост космонавта-исследователя. Ни один кандидат не претендует одновременно на два поста. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур или командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?

Б. Сколько двузначных чисел можно записать в десятичной системе счисления?

Серия 5

1. Найдите производную функций $y=f(x)$:

А. $y=(2x+1)^{10}$; Б. $f(x)=\sqrt{3x-7}$.

2. С помощью элементарных преобразований постройте график функций:

А. $y=-x^2+4|x|+5$; Б. $y=\cos 2x+1$.

3. Решите уравнения:

А. $\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}=1$; Б. $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-2=0$.

4. Решите неравенства:

А. $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$; Б. $-4\sin 2x\cos 2x\geq\sqrt{2}$.

5. Решите уравнения:

А. $(\mathrm{arcctg}\,x)^2-6\,\mathrm{arcctg}\,x+8=0$; Б. $2(\mathrm{arcctg}\,x)^2-5\,\mathrm{arctg}\,x+2=0$.

6. Найдите пределы:

А. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x^2+4}$; Б. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+2}{x^2+1}$.

7. Определите, являются ли функции непрерывными:

А. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ в точке $x_0=1$; Б. $f(x)=\dfrac{2+x}{2-x}$ в точке $x_0=-2$.

8. Найдите область определения функций: А. $y=\mathrm{ctg}3x$; Б. $y=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$.

Серия 6

1. Найдите пределы:

А. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-7x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+5x^2-7x+1}{2x^2+3x-5}$; Б. $\lim\limits_{x\to 17}\dfrac{4-\sqrt{x-1}}{x^2-17x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+4x^2-x-2}{3x^2+7x+2}$.

2. С помощью элементарных преобразований постройте график функций:

А. $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; Б. $y=-\left|\dfrac{3}{x+1}\right|$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

А. $y=x^3+x^2-16x-2$; Б. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

4. Решите уравнения:

А. $3\cos^2 x-\sin 2x-\sin^2 x=0$; Б. $5\cos x+2\sin x=3$.

5. Решите системы уравнений:

А. $\begin{cases}\cos x+\cos y=\sqrt{3},\\ x+y=\dfrac{\pi}{3};\end{cases}$ Б. $\begin{cases}x+y=\dfrac{7\pi}{3},\\ \sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

6. Вычислите:

А. $\sin\left(2\arccos\dfrac{12}{13}\right)$; Б. $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{4}{13}\right)$.

7. А. Число 18 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
Б. Число 12 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

8. Вычислите предел:

А. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$; Б. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x}{x^2+2}$.

Серия 7

1. Определите, является ли функции непрерывными:

А. $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ при } x\le -1, \\ 3x+4, \text{ при } x\ge -1 \end{cases}$ в точке $x_0=-1$;

Б. $g(x)=\begin{cases} 2x-3, \text{ при } x<1 \\ x^2-2, \text{ при } x\ge 1 \end{cases}$ в точке $x_0=1$.

2. Построй графики функций:

А. $y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$; Б. $y=2\cos\frac{x}{2}$.

3. Вычислите:

А. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; Б. $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4. Найдите производные функций:

А. $y=\sin^3 2x$; Б. $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x-2}$.

5. Найдите точки экстремума функций:

А. $f(x)=x+\cos x$; Б. $f(x)=2-x+\sin x$.

6. А. Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Б. Из вазы с фруктами, в которой лежат 9 яблок и 6 груш, надо выбрать 3 яблока и 2 груши. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

7. А. Найдите абсциссу x_0 точки графика функции $y = f(x)$, в которой касательная к нему параллельна заданной прямой: $y=x^2-3x+2$, прямая $2x+y=5$.

Б. Найдите абсциссу x_0 точки графика функции $y = f(x)$, в которой касательная к нему параллельна заданной прямой: $y=8\sin x+\sqrt{27}\operatorname{tg}x+x$, прямая $y=x+3$; $x_0\in[-\pi;0]$.

8. Найдите предел:

А. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{\sin x}$. Б. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5x^3}{1+5x^2}+\frac{1-3x^2}{3x+1}\right)$.

МНОЖЕСТВА НА ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

Бог создал целые числа, все остальное — дело рук человека.
Леопольд Кронекер

Числа $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \ldots$ и т. д. называются **натуральными.** Наименьшее натуральное число – это единица. Иногда говорят, что натуральные числа – это числа, которые мы используем для подсчета предметов. Однако предметов не может быть бесконечно много, в то время как натуральный ряд бесконечен. Множество натуральных чисел обозначается буквой N.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \ldots\}$$

Если к множеству натуральных чисел добавить нуль и все числа, противоположные натуральным, то получится множество **целых** чисел:

$$Z = \{\ldots, -11, -10, -9, -8, -7, -6, 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Все числа, равные отношениям $\frac{p}{q}$, где p – некоторое целое, а q – некоторое натуральное число, образуют множество **рациональных** чисел Q.

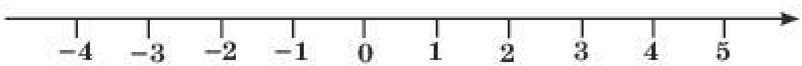
$$Q = \{\frac{p}{q}, \text{ где } p - \text{целое}, q - \text{натуральное}\}.$$

Примеры рациональных чисел: $\frac{3}{7}, -\frac{3}{7} = \frac{-3}{7}, 0 = \frac{0}{1}, -10 = \frac{-10}{1}$.

Ясно, что каждое натуральное число является целым, каждое целое – рациональным.

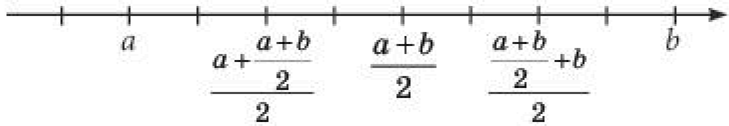
Нетрудно понять, что при умножении, сложении и делении рациональных чисел снова получаются рациональные числа.

Вы уже знаете, что числа удобно представлять на числовой оси в виде точек.



Заметим, что **между любыми двумя рациональными числами (точками) существует бесконечно много других рациональных чисел (точек).** Действительно, если a и b – рациональные числа $a<b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$, причем $\frac{a+b}{2}$ – тоже рациональное. Геометрически точка

$\frac{a+b}{2}$ – середина отрезка от a до b. Тогда между a и $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+b}{2}$ и b также можно найти хотя бы по одной рациональной точке, и т.д до бесконечности.



Аналогично можно показать, что **какой бы малый по длине отрезок числовой оси мы не рассматривали, на нем найдется бесконечно много рациональных точек.** Это, однако, не означает, что любая точка на числовой прямой соответствует какому-нибудь рациональному числу. Например, длина стороны квадрата, площадь которого равна 2, не выражается в виде дроби $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in Z$. Такую длину, как вы знаете, мы обозначаем $\sqrt{2}$. Таким образом, $\sqrt{2}$ – не рациональное число. Все числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными. Иррациональных чисел в некотором смысле больше рациональных. Объединение всех рациональных и иррациональных чисел дает множество действительных чисел R. $R = (-\infty;+\infty)$. Множество R иногда называют еще множеством вещественных чисел.

Странно слышать, когда в ответ на вопрос: «Сколько чисел между 1 и 3?» отвечают: «Между числами 1 и 3 находится одно число. Это число – два».

Между любыми двумя числами a и b, такими, что $a < b$, существует бесконечно много чисел. Например, запись $x \in (1;\ 3)$ означает, что рассматриваются все числа x, которые больше чем 1, но меньше чем 3. Заметим, что в множестве (1; 3) невозможно указать наибольший и наименьший элементы. Действительно, если бы в таком множестве число c оказалось бы наибольшим, то число $\frac{c+3}{2}$ таково, что $1 < c = \frac{c+c}{2} < \frac{c+3}{2} < \frac{3+3}{2} < 3$. Это значит, что число $\frac{c+3}{2}$ также принадлежит множеству и в то же время оно больше, чем c. Но мы предполагали, что наибольшим является число c. Противоречие.

Запись $x \in [1;\ 3]$ указывает, что рассматриваются все числа, не меньше чем 1, и в то же время не больше чем 3. В таком множестве 1 – наименьший элемент, 3 – наибольший. Таким образом, для любых чисел a и b таких, что $a < b$:

$$x \in (a;\ b) \Leftrightarrow a < x < b$$
$$x \in [a;\ b] \Leftrightarrow a \le x \le b$$

$$x \in [a;\, b) \Leftrightarrow a \le x < b$$

$$x \in (a;\, b] \Leftrightarrow a < x \le b$$

$$x \in (a;\, +\infty) \Leftrightarrow x > a$$

$$x \in [a;\, +\infty] \Leftrightarrow x \ge a$$

$$x \in (-\infty;\, b] \Leftrightarrow x \le b$$

$$x \in (-\infty;\, b] \Leftrightarrow x < b.$$

Пересечением двух множеств A и B называется совокупность элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B. Обозначение: $A \cap B$.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \in B.$$

Объединением двух множеств A и B называется совокупность элементов, принадлежащих **хотя бы одному** из двух множеств A или B. Обозначение: $A \cup B$.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ или } x \in B.$$

Заметим, что любой элемент пересечения принадлежит объединению.

Аналогично определяется пересечение и объединение большего числа множеств.

В школьном курсе решение **систем** условий (уравнений, неравенств и т.д.) будет означать поиск **пересечения множеств**, удовлетворяющих условиям; решение **совокупности** условий (уравнений, неравенств и т.д.) будет означать поиск **объединения множеств**, удовлетворяющих данным условиям.

Приведем пример. Большинство учеников в классе занимаются футболом или волейболом. К множеству $\boldsymbol{A}$ *отнесем всех учеников, которые занимаются футболом. К множесту* $\boldsymbol{B}$ *отнесем тех учеников, которые занимаются волейболом. Тогда* ***пересечением множеств*** $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *является совокупность всех учеников, которые занимаются обоими видами спорта.* ***Объединением множеств*** $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *явлется совокупность всех учеников, которые занимаются хотя бы одним видом, то есть или футболом, или волейболом, или обоими видами.*

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

А. Формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$
$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab;$$
$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab.$$

В. Основные тригонометрические формулы:

1. Формулы, связывающие функции одного аргумента:

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$; $\quad \operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\quad \operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$;

$\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1$; $\quad 1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\quad 1+\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

2. Формулы сложения:

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$; $\quad \sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$;

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$; $\quad \cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$;

$\operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$; $\quad \operatorname{tg}(x-y)=\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$.

3. Формулы двойного аргумента:

$\sin 2x=2\sin x\cos x$; $\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$;

$tg2x=\dfrac{2tgx}{1-tg^2x}$.

4. Формулы тройного аргумента:

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

5. Формулы понижения степени:

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$;

$\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$; $\cos^3 x = \dfrac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$.

6. Формулы преобразования суммы в произведение:

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$; $\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$;

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$; $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$;

$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$; $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$.

7. Формулы преобразования произведения в сумму:

$\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$; $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$;

$\sin x \sin y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$.

8. Формулы, использующие тангенс половинного аргумента:

$\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; $\cos x \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}$;

$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$; $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

С. Неравенства, содержащие знак абсолютной величины:

1. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$

2. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$

СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

Русский	Казахский	Английский
Арифметика		
Арифметический квадратный корень	Арифметикалық квадрат түбір	Arithmetical square root
Возведение в степень	Дәрежеге шығару	Involution, powering
Делимое	Бөлінгіш	Dividend
Делитель	Бөлгіш	Divisor
Квадрат числа	Санның квадраты	Square of number
Корень n-й степени	n-ші дәрежелі түбір	n-th root
Куб числа	Санның кубы	Cube of number
Основание степени	Дәреженің негізі	Base of power
Остаток	Қалдық	Remainder, residual
Подкоренное выражение	Түбір астындағы өрнек	Radical expression
Показатель степени	Дәреженің көрсеткіші дәреже көрсеткіші	Exponent, index of power
Признак делимости	Бөлінгіштік белгілері	Criterion of divisibility, divisibility test, test for divisibility
Произведение	Көбейтінді	Product
Радикал	Радикал	Radical
Разложение на множители	Көбейткіштерге жіктеу	Factorisation
Разность	Айырма	Difference between
Свойства степени	Дәреженің қасиеттері	Power properties
Степень	Дәреже	Power
Степень с рациональным показателем	Рационал көрсеткішті дәреже	Power with rational exponent
Сумма	Қосынды	Sum
Частное	Бөлінді	Quotient
Вектор		
Вектор	Вектор	Vector
Векторный метод	Векторлық әдіс	Vectorial method
Длина вектора	Вектордың ұзындығы	Lenght of vector
Коллинеарные векторы	Коллинеар векторлар	Collinear vectors
Компланарные векторы	Компланар векторлар	Coplanar vectors
Координаты вектора	Вектордың координаттары	Vector coordinates
Координаты точки	Нүктенің координаталары	Position of a point
Линейная комбинация векторов	Векторлардың сызықтық комбинациясы	Linear combination of vectors
Проекция вектора	Вектордың проекциясы	Vector projection
Противоположные векторы	Қарама-қарсы векторлар	Opposite vectors

Радиус-вектор	Радиус-вектор	Radius-vector
Скалярное произведение	Скаляр көбейтінді	Scalar product
Сонаправленные векторы	Бағыттас векторлар	Codirectional vectors
Составляющие вектора	Вектордың құраушылары	Vector component
Величина		
Бесконечно большая величина	Шексіз үлкен шама	Infinite
Бесконечно малая величина	Шексіз аз шама	Infinitesimal
Больше	Үлкен	Greater
Меньше	Кіші	Less
Неотрицательный	Теріс емес	Nonnegative
Неположительный	Оң емес	Non-positive
Отрицательные числа	Теріс сандар	Negative number
Отрицательный	Теріс	Negative
Положительный	Оң	Positive
Выражение		
Буквенное выражение	Әріпті өрнек	Literal expression
Двучлен	Екімүше	Binomial
Дробные выражения	Бөлшекті өрнектер	Fractional expression
Значение выражения	Өрнектің мәні	Value of expression
Квадрат двучлена	Екімүшенің квадраты	Square of binomial
Квадратный трехчлен	Квадрат үшмүше	Quadratic trinomial
Коэффициент	Коэффициент	Coefficient
Область допустимых значений переменной	Айнымалының мүмкін мәндерінің облысы	Admitted region of variable, tolerance range of variable
Освобождение от иррациональностей	Иррационалдықтан құтылу	Rationalization
Преобразование выражений	Өрнектерді түрлендіру	Expression transformation
Числовое выражение	Сандық өрнек	Numeral expression
Вычисление		
Приближенное вычисление	Жуық есептеу	Approximate calculation
Геометрия		
Геометрическая фигура	Геометриялық фигура	Geometric figure
Гомотетия	Гомотетия	Homothety
Длина отрезка	Кесіндінің ұзындығы	Length of segment
Задачи на построение	Салу есептері	Construction problems
Инверсия	Инверсия	Inversion
Кривая	Қисық	Curve
Криволинейная трапеция	Қисық-сызықты трапеция	Curvilinear trapezoid
Ломаная	Сынық	Polygonal curve
Луч	Сәуле	Ray
Наклонная	Көлбеу	Slanting line
Образ	Бейне	Image
Общий перпендикуляр	Ортақ перпендикуляр	Common perpendicular
Опорная прямая	Тірек түзуі	Line of support, supporting line

Ортогональное проектирование	Ортогональ кескіндеу	Orthogonal projection
Осевая симметрия	Өстік симметрия	Rotational symmetry
Отношение отрезков	Кесінділердің қатынасы	Segment ratio
Отрезок	Кесінді	Segment
Параллельное проектирование	Параллель кескіндеу	Parallel projection
Параллельные прямые	Параллель түзулер	Parallel lines
Параллельный перенос	Параллель көшіру	Parallel shift, parallel translation
Перпендикуляр	Перпендикуляр	Perpendicular
Плоская фигура	Жазық фигура	Plane figure
Построение	Салу	Construct
Преобразование плоскости	Жазықтықты түрлендіру	Plane transformation
Признак перпендикулярности	Перпендикулярлық белгісі	Test of perpendiculars
Признаки параллельности	Параллельдік белгілері	Test of parallels
Проекция	Проекция	Projection
Прямая	Түзу	Line
Прямая линия	Түзу сызық	Straight line
Секущая	Қиюшы	Secant
Серединный перпендикуляр	Орта перпендикуляр	Middle perpendicular
Сторона	Қабырға	Side
Центр гомотетии	Гомотетия центрі	Ray center
Центр масс	Масса центрі	Centre of mass
График		
Построение графика	График салу	Construction of graph
Преобразование графика	Графиктерді түрлендіру	Graph transformation
Преобразование графика функции	Функцияның графигін түрлендіру	Function graph transformation
Дробь		
Десятичная дробь	Ондық бөлшек	Decimal fraction
Доля	Үлес	Fracture
Дробная часть	Бөлшек бөлігі	Fractional part
Знаменатель	Бөлім	Denominator
Неправильная дробь	Бұрыс бөлшек	Unproper fraction
Несократимая дробь	Қысқартылмайтын бөлшек	Irreducible fraction
Обыкновенная дробь	Жай бөлшек	Vulgar fraction
Правильная дробь	Дұрыс бөлшек	Proper fraction
Рациональная дробь	Рационал бөлшек	Rational fraction
Сокращение дробей	Бөлшекті қысқарту	Reduction of fractions
Целая часть	Бүтін бөлігі	Integer part
Числитель	Алым	Numerator
Индукция		
Половина	Жарты	Half
Треть	Үштен бірі	Third
Индукция		

Базис индукции	Индукция базисі	Basis of induction
Индуктивное предположение	Индуктивті болжау	Induction hypothesis
Индуктивный шаг	Индуктивті қадам	Induction step
Метод математической индукции	Математикалық индукция әдісі	Method of mathematical induction
Инструмент		
Линейка	Сызғыш	Rule
Транспортир	Транспортир	Protractor
Циркуль	Циркуль	Compass
Интеграл		
Интегрирование по частям	Бөліктеп интегралдау	Partial integration
Неопределенный интеграл	Анықталмаған интеграл	Indefinite integral
Правила интегрирования	Интегралдау ережелері	Integration rule
Таблица интегралов	Интегралдау кестесі	Integral table
Комбинаторика		
Перестановка	Орналастыру	Commutation
Размещение	Алмастыру	Disposition
Сочетание	Теру	Combination
Факториал	Факториал	Factorial
Комплексные числа		
Действительная часть	Нақты бөлігі	Real part
Комплексное число	Комплекс сан	Complex number
Корень из комплексного числа	Комплекс санның түбірі	Root of complex number
Мнимая часть	Жорамал бөлігі	Imaginary part
Модуль комплексного числа	Комплекс санның модулі	Complex number modulus, modulus of complex number
Сопряженное комплексное число	Түйіндес комплекс сан	Complex conjugate
Тригонометрическая форма комплексного числа	Комплекс санның тригонометриялық түрі	Goniometric form of complex number
Координаты		
Абсцисса	Абсцисса	Abscissa
Координатная ось	Координаталық өс	Coordinate axis
Координатный луч	Координаттық сәуле	Coordinate ray
Метод координат	Координаттар әдісі	Coordinate method
Ордината	Ордината	Ordinate
Четверть (координатная)	Ширек	Quadrant
Кривые		
Вершина параболы	Параболаның төбесі	Vertex of parabola
Гипербола	Гипербола	Hyperbola
Логарифмы		
Основание логарифма	Логарифм негізі	Logarithmic base
Многоугольник		
Вершина	Төбесі	Vertex
Вписанный	Іштей сызылған	Inscribed

Вписанный многоугольник	Іштей сызылған көпбұрыш	Inscribed polygon
Выпуклая фигура	Дөңес фигура	Convex figure
Диагональ	Диагональ	Diagonal
Квадрат	Шаршы	Square
Многоугольник	Көпбұрыш	Polygon
Описанный многоугольник	Сырттай сызылған көпбұрыш	Circumscribed polygon
Параллелограмм	Параллелограмм	Parallelogram
Правило параллелограмма	Параллелограмм ережесі	Parallelogram law, parallelogram rule
Правильный многоугольник	Дұрыс көпбұрыш	Regular polygon
Прямоугольник	Тік төртбұрыш	Rectangle
Ромб	Ромб	Rhomb, rhombus
Трапеция	Трапеция	Trapezium
Многочлен		
Многочлен	Көпмүше	Polynomial
Однородный многочлен	Біртекті көпмүше	Homogeneous polynomial
Одночлен	Бірмүше	Monomial
Свободный член	Бос мүше	Absolute term
Симметрический многочлен	Симметриялық көпмүше	Symmetric polynomial
Старший коэффициент	Үлкен коэффициент	Leading coefficient
Трехчлен	Үшмүше	Trinomial
Формула n-го члена	n-ші мүшесінің формуласы	n-th term formula
Множество		
Бесконечное множество	Шексіз жиын, ақырсыз жиын	Infinite set
Конечное множество	Шекті жиын, ақырлы жиын	Finite set, finite aggregate
Множество	Жиын	Set
Подмножество	Ішкі жиын	Subset
Пустое множество	Бос жиын	Empty collection, empty set
Элемент множества	Жиынның элементі	Set member
Неравенство		
Двойное неравенство	Қос теңсіздік	Two-sided inequality
Доказательство неравенств	Теңсіздікті дәлелдеу	Inequality proving
Метод интервалов	Интервалдар әдісі	Interval method
Неравенство	Теңсіздік	Inequality
Неравенство о среднем	Орталар туралы теңсіздіктер	Mean value inequality
Свойства неравенств	Теңсіздіктің қасиеттері	Inequality properties
Система неравенств	Теңсіздік жүйелері	Simultaneous inequalities
Совокупность неравенств	Теңсіздік жиынтығы	Set of inequalities
Объем		
Кубический метр	Куб метр	Cubic meter
Кубический сантиметр	Куб сантиметр	Cubic centimeter
Объем	Көлем	Volume

Окружность		
Диаметр	Диаметр	Diameter
Длина окружности	Шеңбердің ұзындығы	Perimeter of circle
Дуга	Доға	Arc
Касательная	Жанама	Tangent
Круг	Дөңгелек	Circle
Окружность	Шеңбер	Circumference
Площадь круга	Дөңгелектің ауданы	Area of a circle
Сегмент	Сегмент	Segment
Сектор	Сектор	Sector
Уравнение окружности	Шеңбердің теңдеуі	Circumference equation
Хорда	Хорда	Chord
Центральный угол	Центрлік бұрыш	Central angle
Определение		
Аксиома	Аксиома	Axiom
Алгоритм	Алгоритм	Algorithm
Бином	Бином	Binomial
Достаточное условие	Жеткілікті шарт	Sufficient condition
Начальное условие	Бастапқы шарт	Starting condition
Необходимое условие	Қажетті шарт	Necessary condition
Принцип Дирихле	Дирихле принципі	Dirichlet principle
Площадь		
Квадратный метр	Шаршы метр	Square meter
Квадратный сантиметр	Шаршы сантиметр	Square centimeter
Площадь	Аудан	Area
Равновеликие фигуры	Тең шамалы фигуралар	Equal figures
Равносоставленные фигуры	Тең құрамдас фигуралар	Decomposition-equal figures
Подобие		
Подобие	Ұқсастық	Similarity
Подобные треугольники	Ұқсас үшбұрыштар	Similar triangles
Подобные фигуры	Ұқсас фигуралар	Similar figures
Признак подобия	Ұқсастық белгілері	Test of similarity
Подстановка		
Метод подстановки	Алмастыру әдісі (тәсілі)	Method of substitution
Подстановка	Алмастыру	Substitution
Последовательность		
Последовательность	Тізбек	Sequence
Рекуррентное соотношение	Рекуррентті арақатынас	Recurrence relation
Предел		
Замечательный предел	Тамаша шек	Remarkable limit
Односторонние пределы	Біржақты шектер	One-sided limit
Предел последовательности	Тізбек шегі	Limit of sequence
Прогрессия		
Арифметическая прогрессия	Арифметикалық прогрессия	Arithmetical progression

Бесконечная геометрическая прогрессия	Шектеусіз геометриялық прогрессия	Infinite geometrical progression
Геометрическая прогрессия	Геометриялық прогрессия	Geometrical progression
Знаменатель геометрической прогрессии	Геометриялық прогрессияның еселігі	Geometric ratio
Прогрессия	Прогрессия	Progression
Разность арифметической прогрессии	Арифметикалық прогрессияның айырымы	Arithmetical ratio
Производная		
Производная	Туынды	Derivative
Производная обратной функции	Кері функцияның туындысы	Derivative of reciprocal function
Производная сложной функции	Күрделі функцияның туындысы	Derivative of combined function, derivative of complicated function
Пропорция		
Коэффициент пропорциональности	Пропорционалдық коэффициент	Coefficient of proportionality
Обратная пропорциональность	Кері пропорционал	Reciprocal proportionality
Пропорциональное деление	Пропорционал бөлу	Proportional division
Пропорция	Пропорция	Proportion
Прямая пропорциональность	Тура пропорционал	Direct proportionality
Размер		
Длина	Ұзындық	Length
Ширина	Ені	Width
Решение		
Множество решений	Шешімдер жиыны	Solution set
Общее решение	Жалпы шешім	General solution
Решение треугольников	Үшбұрышты шешу	Solution of triangle
Частное решение	Дербес шешім	Particular solution
Сокращенное умножение		
Куб разности	Айырманың кубы	Cube of difference
Куб суммы	Қосындының кубы	Cube of sum
Разность кубов	Кубтардың айырмасы	Cube difference
Сумма кубов	Кубтардың қосындысы	Sum of cubes
Формула квадрата разности	Айырманың квадратының формуласы	Square of difference formula
Формула квадрата суммы двух выражений	Екі өрнектің қосындысының квадратының формуласы	Square of sum formula
Формула разности квадратов	Квадраттар айырмасының формуласы	Square difference formula
Формулы сокращенного умножения	Қысқаша көбейту формулары	Formulas of abridged multiplication
Статистика		
Достоверное событие	Нақты жағдай	Persistent event
Медиана ряда	Қатардың медианасы	Median of series

Мода ряда	Қатардың модасы	Mode of series
Размах ряда	Қатардың ауқымы	Spread of series
Среднее арифметическое	Арифметикалық ортасы	Arithmetic average, arithmetical mean arithmetic average
Элементарное событие	Элементарлық жағдай	Elementary event, simple event
Текстовые задачи		
Время	Уақыт	Time
Движение	Қозғалыс	Movement
Масштаб	Масштаб	Coverage
Объем работы	Жұмыс көлемі	Work content, volume of work
Производительность	Өнімділік	Productivity
Путь	Жол	Path, way
Расстояние	Арақашықтық	Distance
Скорость	Жылдамдық	Speed
Смесь	Қоспа	Mixture
Сплав	Қорытпа	Alloy
Средняя скорость	Орташа жылдамдық	Average speed
Боковая поверхность	Бүйір бет	Lateral surface
Выпуклые многогранники	Дөңес көпжақтар	Convex polyhedrons
Касание со сферой	Сферамен жанасу	Contact with sphere
Конус	Конус	Cone
Многогранник	Көпжақ	Polyhedron
Многогранный угол	Көпжақты бұрыш	Polyhedral angle
Описанные многогранники	Сырттай сызылған көпжақ	Circumscribed polyhedron
Опорная плоскость	Тірек жазықтығы	Plane of support, supporting plane
Осевое сечение	Осьтік қима	Axial section
Параллелепипед	Параллелепипед	Parallelepiped
Пересечение шара	Шардың қиылысуы	Ball crossing
Пирамида	Пирамида	Pyramid
Поверхность	Бет	Surface
Полная поверхность	Толық бет	Complete surface
Правильная пирамида	Дұрыс пирамида	Regular pyramid
Призма	Призма	Prism
Пространственные фигуры	Кеңістік фигуралары	Space figures
Прямой цилиндр	Тік цилиндр	Straight cylinder
Развертка	Жазба	Involute, evolvent
Ребро	Қыры	Edge
Сечение	Қима	Cut set, section
Сечение конуса	Конустың қимасы	Cone section
Сечение многогранника	Көпжақтың қимасы	Polyhedron section
Скрещивающиеся прямые	Айқас түзулер	Skew lines
Сфера	Сфера	Sphere
Тела вращения	Айналу денелері	Body of revolution

Усеченная пирамида	Қиық пирамида	Truncated pyramid
Цилиндр	Цилиндр	Cylinder
Шар	Шар	Ball
Эллипс	Эллипс	Ellipse
Тождество		
Тождественное преобразование	Тепе-тең түрлендіру	Identity substitution
Тождество	Тепе-теңдік	Identity
Точка		
Множество точек	Нүктелер жиыны	Set of points
Неподвижные точки	Қозғалмайтын нүктелер	Fixed points
Точка	Нүкте	Point
Точка перегиба	Иілу нүктесі	Point of inflection
Треугольник		
Биссектриса	Биссектриса	Bisector
Высота	Биіктік	Altitude
Гипотенуза	Гипотенуза	Hypotenuse
Катет	Катет	Cathetus
Медиана	Медиана	Median
Неравенство треугольника	Үшбұрыштың теңсіздігі	Triangle inequality
Ориентация	Бағдар	Orientation
Ортоцентр	Ортоцентр	Orthocenter
Основание	Табаны	Base
Периметр	Периметр	Perimeter
Правило треугольника	Үшбұрыш ережесі	Triangle law
Признаки равенства треугольников	Үшбұрыштардың теңдік белгілері	Test of triangles equality
Прямоугольный треугольник	Тікбұрышты үшбұрыш	Right-angled triangle
Равнобедренный треугольник	Теңбүйірлі үшбұрыш	Isosceles triangle
Равносторонний треугольник	Теңқабырғалы үшбұрыш	Equilateral triangle
Треугольник	Үшбұрыш	Triangle
Тригонометрия		
Единичная окружность	Бірлік шеңбер	Unit circumference
Косинус	Косинус	Cosine
Котангенс	Котангенс	Cotangent
Линия котангенсов	Котангенстер сызығы	Line of cotangents
Линия тангенсов	Тангенстер сызығы	Line of tangents
Обратные тригонометрические функции	Кері тригонометриялық функциялар	Inverse trigonometric functions
Основное тригонометрическое тождество	Негізгі тригонометриялық тепе-теңдік	Fundamental trigonometric identity
Простейшие тригонометрические уравнения	Қарапайым тригонометриялық теңдеулер	Elementary trigonometric equations
Синус	Синус	Sine

Тангенс	Тангенс	Tangent
Формулы двойного аргумента	Қос аргументтің формулары	Double-argument formula
Формулы половинного аргумента	Жарты аргументтің формулары	Half-argument formula
Формулы приведения	Келтіру формулары	Reduction formulas
Угол		
Вертикальные углы	Вертикаль бұрыштар	Vertical angles
Вписанный угол	Іштей сызылған бұрыш	Inscribed angle
Градус	Градус	Degree
Двугранный угол	Екіжақты бұрыш	Dihedral angle
Накрест лежащие углы	Айқыш бұрыштар	Alternate angles
Односторонние углы	Тұстас бұрыштар	Unilateral angles
Острый угол	Сүйір бұрыш	Sharp angle
Плоский угол	Жазық бұрыш	Plane angle
Плоскость	Жазықтық	Plane
Поворот	Бұру	Rotating
Прямой угол	Тік бұрыш	Right angle
Радиан	Радиан	Radian
Развернутый угол	Жазыңқы бұрыш	Flat angle, straight angle
Смежные углы	Сыбайлас бұрыштар	Adjacent angles
Соответственные углы	Сәйкес бұрыштар	Corresponding angles
Трехгранный угол	Үшжақты бұрыш	Trihedral angle
Тупой угол	Доғал бұрыш	Blunt angle
Угол	Бұрыш	Angle
Уравнение		
Биквадратное уравнение	Биквадрат теңдеу	Biquadratic equation
Графический метод	Графиктік әдіс	Graphic method
Двойной аргумент	Қос аргумент	Double argument
Дискриминант	Дискриминант	Discriminant
Дифференциальные уравнения	Дифференциалдық теңдеулер	Differential equation
Замена переменной	Айнымалыны алмастыру	Change of variable
Иррациональное уравнение	Иррационал теңдеу	Irrational equation
Квадратное уравнение	Квадрат теңдеу	Quadratic equation
Корень уравнения	Теңдеудің түбірі	Root of equation
Метод вспомогательного аргумента	Қосымша аргумент әдісі	Method of auxiliary argument
Параметр	Параметр	Parameter
Переменная	Айнымалы	Variable
Потеря корней	Түбір жоғалту	Loss of roots
Приобретение посторонних корней	Бөгде түбірдің пайда болуы	Acquisition of extraneous root
Равносильные уравнения	Мәндес теңдеулер	Equivalent equations
Рациональное уравнение	Рационал теңдеу	Rational equation
Рациональные корни уравнения	Теңдеудің рационал түбірлері	Rational roots of equations
Симметрические уравнения	Симметриялық теңдеулер	Symmetrical equations

Угловой коэффициент	Бұрыштық коэффициент	Angular coefficient
Уравнение	Теңдеу	Equation
Уравнение второго порядка	Екінші ретті теңдеу	Second order equation
Уравнение плоскости	Жазықтықтың теңдеуі	Equation of plane
Уравнение прямой	Түзудің теңдеуі	Equation of line
Формулы понижения степени уравнения	Дәрежені төмендету формулалары	Formula for depression of equation
Целые корни уравнения	Теңдеудің бүтін түбірлері	Integer roots of equations
Функция		
Асимптота	Асимптота	Asymptote
Вертикальная асимптота	Тік асимптота	Vertical asymptote
Взаимно обратные функции	Өзара кері функциялар	Mutually inverse functions
Вогнутость	Ойыс	Concavity
Возрастание	Өсуі	Increase
Возрастающая функция	Өспелі функция	Increasing function
Вторая производная	Екінші ретті туынды	Second derivative
Горизонтальная асимптота	Көлденең асимптота	Horizontal asymptote
График	График	Graph, plot
Дифференциал	Дифференциал	Differential
Дробно-линейная функция	Бөлшек-сызықтық функция	Homographic function
Квадратичная функция	Квадраттық функция	Quadratic function
Композиция функций	Функциялар композициясы	Composition of functions
Линейная функция	Сызықтық функция	Linear function, affine function
Монотонность	Бірсарындылық	Monotony
Наибольшее значение функции	Функцияның ең үлкен мәні	Maximum
Наименьшее значение функции	Функцияның ең кіші мәні	Minimum
Наклонная асимптота	Көлбеу асимптота	Oblique asymptote
Непрерывность	Үзіліссіздік	Continuity
Нечетная функция	Тақ функция	Odd function
Область значений функции	Функцияның мәндерінің жиыны	Range
Область определения функции	Функцияның анықталу аймағы	Function domain
Первообразная	Алғашқы функция	Primitive
Период	Период	Period
Показательная функция	Көрсеткіштік функция	Exponential function
Половинный аргумент	Жарты аргумент	Half-argument
Приращение	Өсімше	Increment
Промежуток, интервал	Аралық, интервал	Interval
Прообраз	Алғашқы бейне	Inverse image, original
Разрывность	Үзілістік	Discontinuity
Степенная функция	Дәрежелік функция	Power function
Тригонометрические функции	Тригонометриялық функциялар	Trigonometric functions
Тройной аргумент	Үшінші аргумент	Triple argument
Убывание	Кемуі	Decrease

Убывающая функция	Кемімелі функция	Decreasing function
Функция	Функция	Function
Четная функция	Жұп функция	Even function
Числовые функции	Сандық функциялар	Numerical function
Экстремум	Экстремум	Extremum
Цифра		
Разряд	Разряд	Digit, position
Цифра	Цифр	Numeral, figure
Число		
Взаимно простые числа	Өзара жай сандар	Coprime numbers, relative primes
Действительные числа	Нақты сандар	Real numbers
Иррациональные числа	Иррационал сандар	Irrational numbers
Кратное	Еселік	Multiple
Множество натуральных чисел	Натурал сандар жиыны	Set of natural numbers
Множество рациональных чисел	Рационал сандар жиыны	Set of rational numbers
Множество целых чисел	Бүтін сандар жиыны	Set of integer numbers
Модуль числа	Санның модулі	Module, modulus
Натуральные числа	Натурал сандар	Natural numbers
Нечетность	Тақтық	Oddness
Отношение чисел	Сандардың қатынасы	Numbers ratio
Положительные числа	Оң сандар	Positive numbers
Простые числа	Жай сандар	Prime numbers
Противоположные числа	Қарама-қарсы сандар	Opposite numbers
Рациональные числа	Рационал сандар	Rational numbers
Решить уравнение	Теңдеуді шешу	Solve equation
Смешанное число	Аралас сан	Mixed number
Составные числа	Құрама сандар	Composite numbers
Сравните числа	Сандарды салыстыру	Compare numbers
Четность	Жұптық	Evenness
Число	Сан	Number

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Веб-сайт: www.esepterqory.kz
2. Сборник задач по математике: Под ред.: М.И. Сканави. – М., 2005.
3. Элементар математика есептерінің жинағы. Т.Н. Бияров, М.Т. Молдабеков. – Алматы: Кітап, 1992.
4. 3000 конкурсных задач. Е.Д. Куланин и др. – М., 2003.
5. Веб-сайт: problem.ru
6. Задачи международного конкурса Кенгуру.
7. Википедия – свободная энциклопедия. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org

Оқулық басылым *Учебное издание*

Олег Владимирович Пак
Дархан Ардақұлы
Елена Викторовна Ескендирова

АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

2-бөлім
Қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы жалпы білім беретін мектептің 10-сынып оқушыларына арналған оқулық

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Часть 2
Учебник для учащихся 10 класса общеобразовательной школы общественно-гуманитарного направления

Арнайы редакторы / спецредактор – З. Н. Киябаева
Дизайн – Е. А. Ибрашов
Суретін салған / Художник – Б. Б. Булатов
Мұқаба / Обложка: Е. С. Жузбаев, Б. Б. Булатов, А. М. Әбдіразах
Беттеуші / Верстка – М. С. Шелекбаева

Басуға 22.07.2019 ж. қол қойылды.
Пішімі 70x100 $^1/_{16}$. Есептік баспа табағы 5,74.
Шартты баспа табағы 13,55. Офсеттік басылым.
Әріп түрі «Open Sans». Офсеттік қағаз.
Таралымы 1300 дана. Тапсырыс № 2183.

Сапасы жөнінде мына мекемеге хабарласыңыз:
Қазақстан Республикасы,
050012, Алматы қаласы, Жамбыл көшесі, 111-үй,
«АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ» ЖШС,
тел. +7 (727) 250 29 58, факс +7 (727) 292 81 10.
e-mail: info@almatykitap.kz

Сапа және қауіпсіздік стандарттарына сай.
Сертификация қарастырылмаған.
Сақтау мерзімі шектелмеген.

Подписано в печать 22.07.2019 г.
Формат 70x100 $^1/_{16}$. Уч.-изд. л. 5,74.
Усл. печ. л. 13,55. Печать офсетная.
Гарнитура «Open Sans». Бумага офсетная.
Тираж 1300 экз. Заказ № 2183

С претензиями по качеству обращаться:
Республика Казахстан,
050012, г. Алматы, ул. Жамбыла, 111,
ТОО «АЛМАТЫКІТАП БАСПАСЫ»,
тел. +7 (727) 250 29 58; факс +7 (727) 292 81 10.
e-mail: info@almatykitap.kz

Соответствует всем стандартам качества и безопасности.
Сертификация не предусмотрена.
Срок годности не ограничен.

Қазақстанда басылды
«Реформа» ЖШС
Алматы қ., Ақбұлақ ы-ауд., Шарипов к-сі, 40Б-үй

Отпечатано в Казахстане
ТОО «Реформа»,
г. Алматы, мкр. Акбулак, ул. Шарипова, д. 40Б