А. Е. Абылкасымова З. А. Жумагулова

АЛГЕБРА и НАЧАЛА АНАЛИЗА

10

Учебник для 10 класса
общественно-гуманитарного направления
общеобразовательных школ

Утверждено Министерством образования и науки Республики Казахстан

Алматы "Мектеп" 2019

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72
А17

Условные обозначения:

— проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями

— определения, правила, свойства

— вопросы на закрепление материала

— конец доказательства теоремы или свойства

— задания для самостоятельного выполнения

— дополнительные материалы

А — упражнения, обязательные для всех учащихся

В — упражнения средней сложности

Абылкасымова А.Е., Жумагулова З.А.
А17 **Алгебра и начала анализа.** Учебник для 10 кл. обществ.-гуманит. направления общеобразоват. шк. — Алматы: Мектеп, 2019. — 160 с., ил.

ISBN 978—601—07—1142—6

А $\frac{4306020503—034}{404(05)—19}$ 48(1)—19

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72

ISBN 978—601—07—1142—6

ВВЕДЕНИЕ

Дорогие учащиеся! Предлагаемый учебник является продолжением изучения курса алгебры в предыдущих классах и началом изучения элементов математического анализа. Целью введения в школьную программу курса алгебры и начал математического анализа является сохранение преемственности между элементарной и высшей математикой.

В данном учебнике глубже рассматривается понятие функции, ее свойства и виды, способы задания, графики. Вы ознакомитесь с понятиями *обратная функция* , *сложная функция* , научитесь строить графики функций с помощью простейших преобразований.

Вы ознакомитесь с основными свойствами и графиками тригонометрических функций, с понятиями обратных тригонометрических функций и их графиками. Приобретете умения и навыки решения тригонометрических уравнений и тригонометрических неравенств.

Вы ознакомитесь с понятиями предела и непрерывности функции в точке и на отрезке, их свойствами, производной функции, научитесь применять производные для исследования функций. Расширите знания материалами по теории вероятности.

Учебник состоит из 7 глав и 24 параграфов.

С учетом профильного направления учебника даны алгоритмы решения задач, упражнения и задания для самостоятельного выполнения, вопросы на закрепление, тестовые задания для проверки знаний, упражнения для совместного решения, задания на составление формулировок правил и на доказательство формул, задания на математическую грамотность.

Упражнения каждого параграфа разделены на две группы: **А** — обязательные упражнения для всех учащихся; **В** — упражнения средней сложности. После овладения навыками решения упражнений группы **А**, в зависимости от возможностей и способностей учащихся, необходимо перейти к решению упражнений группы **В**.

В учебник также включены упражнения для повторения курсов алгебры 7—9 классов и курса алгебры и начал анализа 10 класса.

В конце учебника имеется глоссарий, а для проверки правильности решения задач и упражнений даны ответы.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ 7—9 КЛАССОВ

1. Упростите выражение:

а) $\frac{3-2b}{a+b}\cdot\frac{9b+9a}{4b^2-9}-\frac{6b}{2b+3}$;

б) $\frac{16a^2-25c^2}{ac+c^2}:\frac{5c-4a}{3c}+\frac{13a+14c}{a+c}$;

в) $\left(\frac{b+2}{b^2-3b+9}-\frac{6}{b^3+27}\right):\frac{3b+15}{2b^2-6b+18}$;

г) $\left(\frac{a-1}{a^2+2a+4}-\frac{2}{a^3-8}\right):\frac{3-a}{a^2+2a+4}$;

д) $\frac{2a+1}{a-7}+\left(\frac{a}{a+8}+\frac{a}{7-a}\right):\frac{a}{8+a}$;

е) $\left(\frac{b}{2b-3}-\frac{b}{3+2b}\right):\frac{b}{9+12b+4b^2}+\frac{45-6b}{3-2b}$;

ж) $25\sqrt{b}-0{,}5\sqrt{4b}+100\sqrt{0{,}16b}$;

з) $\sqrt{98a}+3\sqrt{242a}-17\sqrt{512a}$.

2. Решите уравнение:

а) $(x-4)^2-6=(2+x)^2$;
б) $(5-y)^2+17=(y-3)^2$;
в) $10+(3x-1)^2=20-6x$;
г) $7x+x(x-7)=(2x+5)(5-2x)$;
д) $(3x+2)(4x-1)-12=x(10+11x)$;
е) $2y(3y-4)+24y=(7y-3)(2+y)$;
ж) $x^2-x+2(x-1)^2=3x-2$;
з) $31-3x-x^2=20x+7(x-2)^2$.

3. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{3}{x+7}=\frac{2}{9-x}$;
б) $\frac{x+5}{3}=\frac{5}{3+x}$;
в) $\frac{x+1}{x-2}=\frac{2+x}{1+x}$;
г) $\frac{x}{x-3}-\frac{4}{3-x}=0$;
д) $\frac{x}{x-5}+\frac{6}{25-x^2}=0$;
е) $\frac{x}{4+x}+\frac{x}{5-x}=\frac{x^2}{x-5}$;
ж) $\frac{6}{x^2-4}-\frac{3}{x-2}=\frac{1}{x+2}$.

4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x+y=7,\\x^2-9y=7;\end{cases}$
б) $\begin{cases}2x-y=-1,\\5x-y^2=-4;\end{cases}$
в) $\begin{cases}xy=12,\\\frac{3}{x}-\frac{1}{y}=\frac{5}{12};\end{cases}$
г) $\begin{cases}xy=2{,}5,\\\frac{15}{x}-\frac{1}{y}=1.\end{cases}$

5. Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases}x+y=2,\\y=x^2+1;\end{cases}$
б) $\begin{cases}x^2+y^2=10,\\x+y=4;\end{cases}$
в) $\begin{cases}4x-y=1,\\y=\frac{3}{x};\end{cases}$
г) $\begin{cases}x^2+y^2=9,\\y=\frac{1}{3}.\end{cases}$

6. Решите неравенство, используя график квадратичной функции и метод интервалов:

а) $x^2 - 7x + 12 \mid 0$; б) $x^2 + 6x - 16 < 0$;

в) $-x^2 + 7x - 10 \mid 0$; г) $-7x^2 + 2x + 5 < 0$.

7. Решите неравенство:

а) $\dfrac{x^2 - 4x}{9 + x} \mid 0$; б) $\dfrac{2x - x^2}{6 - x} \mid 0$; в) $\dfrac{x + 7}{3x - x^2} > 0$;

г) $\dfrac{5 - x}{x^2 + 4x} < 0$; д) $\dfrac{1 + |x|}{x - 1} < 0$; е) $\dfrac{|x| - 4}{5 + x} \mid 0$.

8. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $(x + 1)(x - 2)(x - 3) > 0$; б) $(x + 2)(x + 4)(x - 8) > 0$;

в) $(x + 7)(x + 1)(x - 6)^2 < 0$; г) $(x + 3)^2(x - 1)(x - 5) < 0$.

9. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $(x + 1)(x - 4)(x - 5) \text{ m } 0$; б) $(x + 2)(x - 2)(x - 3) < 0$;

в) $(x - 3)(x - 8)^2 \text{ m } 0$; г) $(x + 5)^2(x + 1) < 0$.

10. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 6x - 16 < 0, \\ x - 5 \mid 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 2x - 24 \mid 0, \\ 3 - x > 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \text{ m } 0, \\ x^2 - 5x + 6 \mid 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 9 - x^2 \mid 0, \\ x^2 + 3x - 28 < 0. \end{cases}$

11. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданных системой неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 3x > 0, \\ x - 4 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - x^2 \text{ m } 0, \\ 3 - x > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ |x| + 1 \mid 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y^2 + x^2 < 16, \\ 2x - 1 \text{ m } 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y + x^2 < 0, \\ y^2 + x^2 \text{ m } 4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 1 - x^2 \text{ m } 0, \\ 1 + |x| < 0. \end{cases}$

12. Постройте график функции и найдите множество значений:

а) $y = x^2 - 8x$; б) $y = -x^2 + 7x$; в) $y = \sqrt{x + 1} + 1$;

г) $y = 2 - \sqrt{x + 2}$; д) $y = x^2 - |x|$; е) $y = -x^2 + |x|$.

13. а) Первое натуральное число составляет 75% от второго натурального числа. Найдите натуральные числа, если значение их произведений равно 1200;

б) если числитель дроби увеличить на 2, а знаменатель на 3, то получим дробь на $\frac{49}{35}$ больше данной дроби. Найдите первоначальную дробь;

в) значение суммы цифр двузначного числа равно 9, а значение разности квадратов его цифр равно 27. Найдите двузначное число;

г) катер проплыл по течению реки 36 км, против течения 48 км. На весь путь потрачено 6 ч времени. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 3 км/ч;

д) промежуток 180 км первый поезд проходит на 1,5 ч быстрее, чем второй поезд. Найдите скорость каждого поезда, если поезда вместе за 3 ч проезжают 162 км.

14. а) Найдите разность, девятый член и значение суммы первых десяти членов арифметической прогрессии 3,2; 4; 4,8; ... ;

б) найдите седьмой член и значение суммы первых двадцати членов арифметической прогрессии 40; 39,6; 39,2; ... ;

в) шестой член арифметической прогрессии равен 35, а значение суммы первых восьми членов равно 220. Найдите первый член и разность прогрессии;

г) значение разности второго и восьмого членов арифметической прогрессии равно –60, суммы третьего и седьмого членов равно –40. Найдите первый член прогрессии.

15. а) Найдите знаменатель, седьмой член и значение суммы первых восьми членов геометрической прогрессии 1,5; 3; 6; ... ;

б) найдите пятый член и значение суммы первых шести членов геометрической прогрессии $\frac{2}{3}$; –2; 6; ... ;

в) пятый член геометрической прогрессии равен 4, а значение суммы первых трех членов равно 112. Найдите первый член и знаменатель прогрессии;

г) пятый член геометрической прогрессии равен $\frac{1}{3}$, разность третьего и первого членов равна –24. Найдите первый член прогрессии, если все члены прогрессии положительные числа.

16. Вычислите значение выражения:

а) $\sin 30° - 2\cos 60° + \mathrm{ctg}\,45° - \mathrm{tg}\,180°$;

б) $\sin 60° - 8\,\mathrm{tg}\,45° - \cos 30° - 8\,\mathrm{tg}\,135°$;

в) $-\cos 300° + \sin 30° - \mathrm{ctg}\,120° + \mathrm{tg}\,210°$;

г) $\operatorname{tg}60^\circ - \operatorname{ctg}30^\circ + \sin120^\circ - 3\cos210^\circ$;

д) $-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 4\sin\frac{\pi}{6} - 2\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} + 3\operatorname{tg}0^\circ$;

е) $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - 9\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4} + 5\operatorname{ctg}0{,}5\pi$.

17. а) Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $\sin2\alpha = -\frac{24}{25}$;

б) найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\sin2\alpha = -\frac{24}{25}$.

18. Упростите выражение:

а) $\frac{4\cos4\alpha}{\operatorname{ctg}2\alpha - \operatorname{tg}2\alpha}$; б) $\frac{\sin2\alpha + \operatorname{tg}2\alpha}{1+\cos2\alpha}$; в) $\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}2\alpha}$;

г) $\frac{\cos4\alpha + \sin^2 2\alpha}{0{,}5\sin4\alpha}$; д) $\frac{\sin(2\pi - 2\alpha)}{\cos(\alpha+\pi)\cdot\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}$;

е) $\frac{2 - 2\sin^2(\alpha + 0{,}5\pi)}{1 - \cos(\alpha - \pi)} - 2\sin(\alpha + 1{,}5\pi)$;

ж) $\frac{\cos(\pi+\alpha)\cdot\cos(1{,}5 - 2\alpha)}{2\operatorname{ctg}(\alpha + 0{,}5\pi)}$; з) $\frac{2\sin^2(\alpha - 2\pi) - 2}{\cos(\alpha + 1{,}5\pi) - 1} - 2\cos(1{,}5\pi + \alpha)$.

19. Докажите тождество:

а) $\frac{\sin3\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha + \cos3\alpha}\cdot\cos^2 2\alpha = 0{,}5$;

б) $\frac{\sin3\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha - \cos3\alpha}\cdot\sin^2 2\alpha - 0{,}5 = 0$;

в) $\frac{\sin3\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos3\alpha}{0{,}5\cos2\alpha\sin4\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha = 1$;

г) $\frac{\sin3\beta\sin6\beta}{\cos4\beta\cos\beta - \sin4\beta\sin\beta} + 2\cos^2 3\beta = 1$.

Задания на математическую грамотность

20. Вставьте вместо звездочек арифметические действия так, чтобы равенство (8*5) * (660*11) = 100 было верным:

A) (·), (+), (·); B) (+), (·), (–); C) (·), (+), (·);
D) (·), (–), (:); E) (·), (+), (:).

21. Если $6a = 25$ и $3b = 5$, то найдите отношение $\frac{a}{b}$:

A) 0,4; B) $\frac{5}{6}$; C) 2,5; D) 1,2; E) 6.

22. Припишите к числу 61 слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число было кратным числу 49:

A) 6615; B) 7625; C) 8615; D) 7614; E) 8616.

23. Какой процент составляют числа, делящиеся на 3, от последовательности 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26:

A) 10%; B) 25%; C) 30%; D) 40%; E) 50%?

24. Если $(a-b)^2 = 64$ и $ab = 33$, то найдите значение выражения $(a+b)^2$:

A) 169; B) 144; C) 180; D) 175; E) 196.

25. Найдите наименьшее трехзначное число, которое при делении на 9 в остатке дает число 6.

A) 117; B) 119; C) 118; D) 116; E) 114.

26. Числа в таблице 1 составлены по определенной закономерности. Найдите неизвестное число:

Таблица 1

2	6	66	5478
3	11	83	?

A) 5627; B) 5629; C) 5637; D) 5617; E) 5619.

27. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 6; 8; 1:

A) 8; B) 4; C) 10; D) 12; E) 6?

28. Некоторые текущие расходы в течение месяца предприятия представлены в виде диаграммы (рис. 1). Общая сумма расходов составляет 3 000 000 тенге. Найдите расходы предприятия на коммунальные услуги:

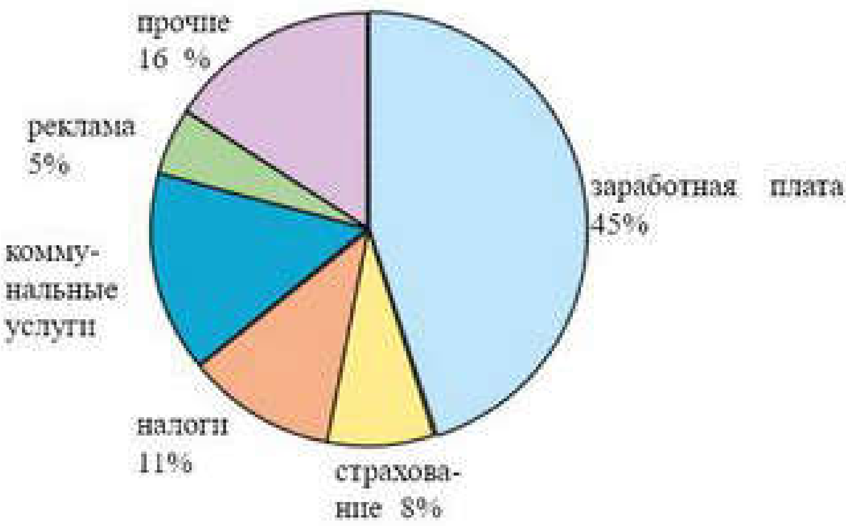


Рис. 1

A) 150 050; B) 150 150; C) 150 000; D) 150 200; E) 150 300.

ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

1

§1. ФУНКЦИЯ И СПОСОБЫ ЕЕ ЗАДАНИЯ

Ключевые понятия

Функция, область определения, множество значений, способы задания функции

Вы углубите свои знания о функциях.

Заполните таблицу 2.

Таблица 2

Функция	Область определения	Множество значений	График
$y = ax + b$			
$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$			
$y = ax^3$			
$y = \frac{k}{x},\ k \neq 0$			
$y = \sqrt{x},\ x \geq 0$			

Правило, или закономерность, по которому каждому значению x из множества X соответствует единственное значение y из множества Y, называется ***функцией***.

Обозначение функции: $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = g(x)$ и т. д., где x — *независимая переменная*, *или аргумент*; y — *зависимая переменная, или функция*; f, φ, g — *правило*, *или закономерность*.

ВЫ ЗНАЕТЕ:

1. Множество значений независимой переменной, при которых функция принимает единственное значение, называется *областью определения функции* (D).

2. Значения функции, соответствующие каждому значению независимой переменной из области определения, составляют *множество значений функции* (E).

Следовательно, множество X из определения функции является ее областью определения, а множество Y — множеством значений.

ПРИМЕР

1. Найдем области определений функций:

а) $y = x^2 + 2x - 5$; б) $y = \dfrac{2}{x+1}$; в) $y = \sqrt{x}$.

Решение .

а) $y = x^2 + 2x - 5$ задана в виде многочлена целая рациональная функция, поэтому ее значение можно вычислить при любых значениях аргумента. Следовательно, областью определения данной функции является множество всех действительных чисел, т. е. $D(y) = R$;

б) $y = \dfrac{2}{x+1}$ — дробно-рациональная функция, ее знаменатель не должен равняться нулю, т. е. $x + 1 \neq 0$ или $x \neq -1$, так как при $x = -1$ значение функции не определено. Следовательно, областью определения функции является множество всех действительных чисел, кроме числа -1, т. е. $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;

в) для того, чтобы найти область определения функции $y = \sqrt{x}$, необходимо взять подкоренное выражение неотрицательным, т. е. $x \geq 0$. Тогда $D(y) = [0; +\infty)$.

Ответ : а) R; б) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; в) $[0; +\infty)$.

ПРИМЕР

2. Найдем множество значений функции $y = 3\sin x$.

Решение. Известно, что множеством значений функции $y = \sin x$ является промежуток $[-1; 1]$, т. е. $-1 \leq \sin x \leq 1$. Чтобы найти множество значений данной функции, каждую часть двойного неравенства умножим на число 3, тогда получим: $-3 \leq 3\sin x \leq 3$. Следовательно, множеством значений данной функции является промежуток $[-3; 3]$.

Ответ : $[-3; 3]$.

Таким образом:

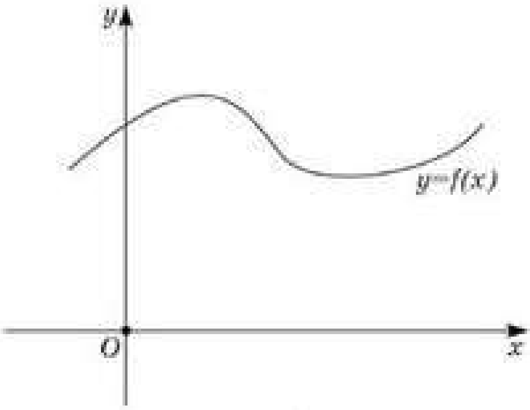
1) областью определения целой рациональной функции (задана в виде многочлена) является множество всех действительных чисел;

2) областью определения дробно-рациональной функции является множество всех значений аргумента, за исключением тех значений аргумента, при которых знаменатель равен нулю;

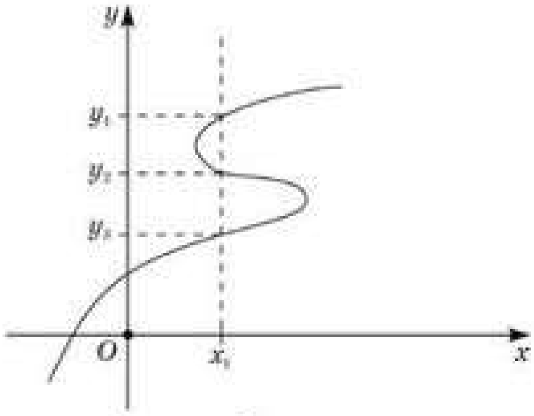
3) область определения функции, заданной в виде иррационального выражения, зависит от показателя корня, т. е. если показатель корня — нечетное число, то областью определения является множество всех действительных чисел, кроме чисел, при которых знаменатель равен нулю; если показатель корня — четное число, то областью определения является множество значений аргумента, при которых подкоренное выражение неотрицательно, если корень находится в числителе, и положительно, если корень — в знаменателе;

4) области определений сложных трансцендентных функций находятся на основе областей определений соответствующих элементарных функций;

5) если функция задана в виде алгебраической суммы различных функций, то ее областью определения является пересечение областей определений всех слагаемых функций.



а)



б)

Рис. 2

ВЫ ЗНАЕТЕ: Геометрическим изображением функции $y = f(x)$ является график, линия, представленная геометрическим местом точек $(x; f(x))$ координатной плоскости, абсциссы которых — независимые переменные x, а ординаты — зависимые переменные $f(x)$ (рис. 2, *а*).

Кривая, изображенная на рисунке 2, *б*, не может быть графиком функции, так как значению аргумента x_1 соответствуют три разных значения функции: y_1, y_2, y_3.

Вы углубите свои знания о способах задания функции.

Известно, что функция может быть задана табличным, графическим и аналитическим способами.

Табличный способ задания функции. Сведения о прогнозе погоды за сутки в зимнее время в одном из населенных пунктов даны в таблице 3.

Таблица 3

t(ч)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
T(°С)	–12	–15	–16	–12	–6	–4	–6	–9	–11

В первой строке таблицы указаны значения времени t (за сутки), во второй — значения температуры T, соответствующие значениям времени. Следовательно, в таблице показана зависимость между температурой и временем суток.

Графический способ задания функции. На рисунке 3 изображен график функции $y = f(x)$. По графику функции можно определить следующее:

1) область определения $D(f) = [-5; 5]$;

2) множество значений $E(f) = [-3; 3]$;

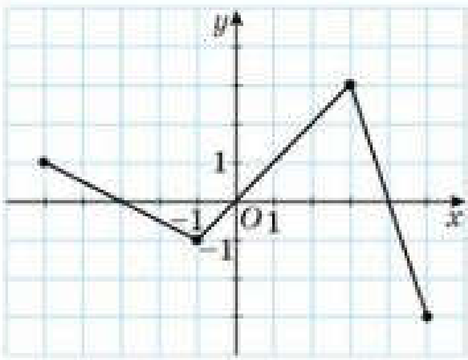


Рис. 3

3) нули функции: $x = -3;\ 0;\ 4;$

4) $f(-5) = 1;\ f(0) = 0;\ f(2) = 2;\ f(3) = 3;\ f(4) = 0;\ f(5) = -3.$

Графический способ очень часто применяется в повседневной жизни. В метеорологии барограф вычерчивает барограмму — график изменения атмосферного давления, в медицине электрокардиограф вычерчивает электрокардиограмму — график работы сердца и т. д. По графику можно составить общее впечатление о том, как протекает исследуемый процесс.

Аналитический способ задания функции .

Функции: а) $f(x) = x^2 + \dfrac{1-x}{x}$; б) $f(x) = \sin x + x$ заданы аналитическим способом.

ЗАПОМНИТЕ

1. При *табличном способе* задания функции для каждого значения аргумента, соответственно, задается значение функции.

2. Преимуществом *графического способа* является его наглядность.

3. *Аналитический способ* более удобен при проведении полного исследования функции.

1. Какое множество соответствует области определения функции?
2. Какие условия рассматриваются для нахождения области определения функции? Приведите примеры.
3. Может ли прямая: а) $x = a$; б) $y = b$ пересекать график функции $y = f(x)$ в нескольких точках? Ответ обоснуйте.

Упражнения

А

1.1. Найдите значение функции $y = f(x)$ в заданных точках:

а) $f(x) = 2x^2 + 3,\ x = -1;\ 2{,}5;\ 3;$ б) $f(x) = \dfrac{1}{3} - 5x,\ x = -0{,}5;\ \dfrac{1}{15};\ 0;$

в) $f(x) = \dfrac{5}{x-3} + 2,\ x = 4;\ 5;\ \dfrac{1}{2};$ г) $f(x) = \dfrac{2}{2+x},\ x = -1;\ 0;\ -\dfrac{1}{5}.$

1.2. Найдите значения $f(-2),\ f(0{,}5),\ f(1)$ для функции:

а) $f(x) = x^2 + 2;$ б) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4;$

в) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x+4};$ г) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}.$

1.3. Найдите область определения функции:

а) $g(x) = 2{,}5x - 4{,}2;$ б) $g(x) = 3x^2 - 7x + 4;$

в) $g(x) = \dfrac{2}{2x+1};$ г) $g(x) = \dfrac{2}{3x} + 3.$

1.4. Если $f(x) = -\frac{1}{3x} - x$ и $g(x) = \frac{3}{x} + x$, то найдите:

а) $f(1) + g(1) + g\left(-\frac{1}{3}\right)$; б) $f\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(-\frac{1}{5}\right)$;

в) $f(-2) - g(-3)$; г) $4f(2) + 3g\left(\frac{1}{9}\right)$.

1.5. Какие кривые, данные на рисунке 4, не являются графиками функций?

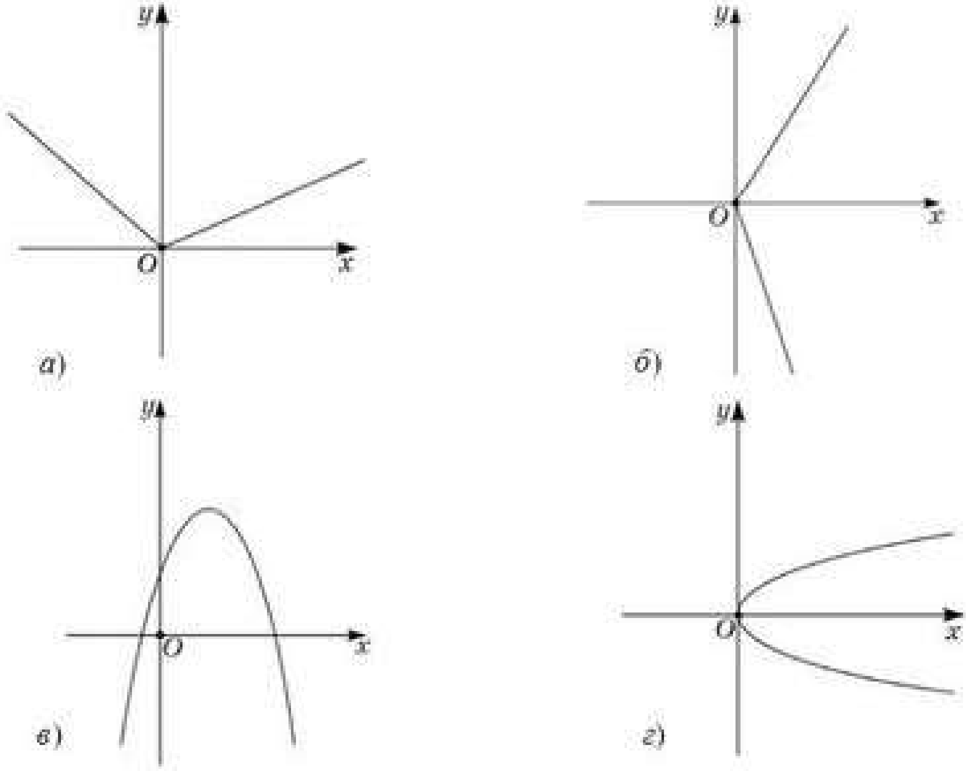


Рис. 4

1.6. Дана функция $f(x) = x^2 - 3x + 4$. При каких значениях аргумента выполняется равенство:
а) $f(x) = 4$; б) $f(x) = 9$; в) $f(x) = 19$; г) $f(x) = -11$?

1.7. Функция задана формулой $f(x) = x^2 - 5x + 2$. Докажите справедливость равенств: $f(2) = -4$ и $f(-1) = 8$.

B

1.8. Найдите значение функции $y = g(x)$ в заданных точках:

а) $g(x) = x^2 - \frac{x+2}{x}$; $x_1 = -\frac{1}{4}$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1{,}5$;

б) $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$; $x_1 = 4$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$;

в) $g(x) = 3 - \cos 2x$; $x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{4}$; $x_3 = -\frac{\pi}{4}$;

г) $g(x) = \frac{2}{x^2} + 3x$; $x_1 = t$; $x_2 = t + 2$; $x_3 = \frac{2}{t}$.

1.9. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = 0{,}5 - \sqrt{x-3}$; б) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7x + 5}$;

в) $f(x) = \dfrac{x+5}{16x^2 - 1}$; г) $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{x+1}{4x^2 - 9}$.

1.10. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $y = x^2 - 4x + 4$; б) $y = \dfrac{3}{x} - 5$;

в) $y = \dfrac{1}{2} - 2\sin x$; г) $y = 5\cos\dfrac{x}{2}$.

1.11. Даны функции $f(x) = \dfrac{3}{x} - 2x^2$ и $g(x) = \dfrac{4}{x} + 2$. Найдите:

а) $f(-3) + g(-2) + f(1)$; б) $f(0{,}5) - g\left(\dfrac{1}{4}\right)$;

в) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot g(-2) - \dfrac{g(0{,}5)}{f(3)}$; г) $3f(a) + 4g(a)$.

1.12. Даны функции $f(x) = \dfrac{1+x}{x} + 1$ и $g(x) = \dfrac{3x}{2-x} - 4$. Сравните значения этих функций при $x = -1$:

а) $f(x) < g(x)$; б) $f(x) > g(x)$;

в) $f(x) = g(x)$; г) $f(x)$ m $g(x)$.

1.13. На рисунке 5 дан график функции $y = f(x)$. Найдите:

а) область определения функции;
б) множество значений функции;
в) нули функции;
г) значения функций $f(-4)$, $f(0)$ и $f(4)$.

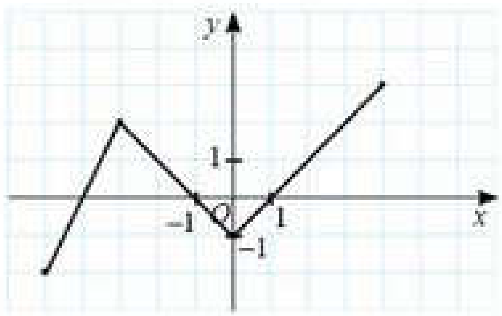


Рис. 5

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Линейная функция, квадратичная функция, обратная пропорциональность, вектор, задание вектора с помощью координат, виды преобразования фигур, в том числе симметричность относительно прямой, параллельный перенос, гомотетия.

§ 2. ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Ключевые понятия

Функция, график функции, преобразования

Вы научитесь выполнять преобразования графиков функций.

ВЫ ЗНАЕТЕ: Графиком линейной функции $y = ax + b$ является прямая, графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, является парабола, графиком обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, является гипербола.

Рассмотрим способы построения графика функции вида $y = kf(ax + b) + d$ (где k, a, b, d — действительные числа, не равные нулю) с помощью простейших преобразований.

ПРИМЕР **1.** Построим в одной координатной плоскости графики функций: $y = x$, $y = x + 2$, $y = x - 2$ (рис. 6). Теперь сравним расположения графиков функций $y = x + 2$ и $y = x - 2$ с графиком функции $y = x$. Видим, что графики функций $y = x + 2$ и $y = x - 2$ получены из графика функции $y = x$ с использованием параллельного переноса, соответственно, вверх и вниз на 2 единицы.

Следовательно, для того, чтобы изобразить график функции $y = f(x) + d$, нужно график функции $y = f(x)$ параллельно перенести вдоль оси Oy на d единиц в положительном направлении при $d > 0$, а при $d < 0$ — в отрицательном направлении (рис. 7).

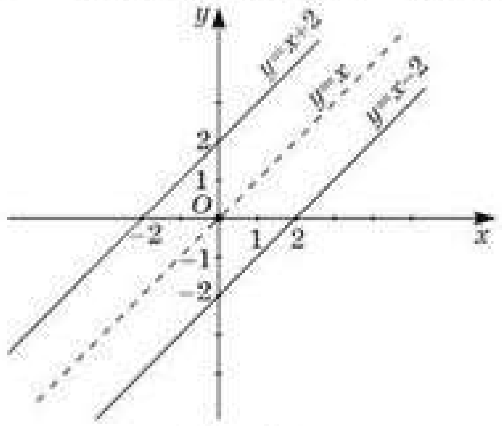


Рис. 6

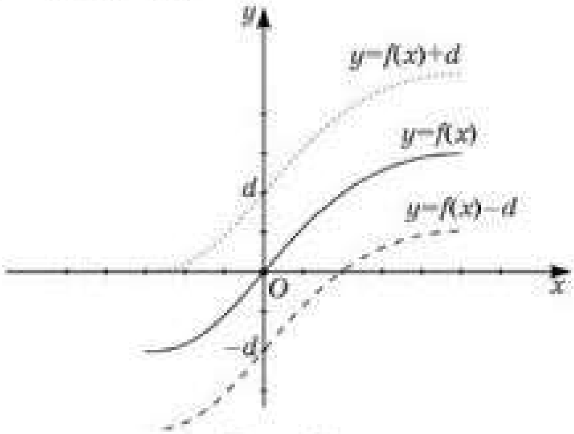


Рис. 7

ОБЪЯСНИТЕ

Какие преобразования использовали к графику функции $y = \frac{1}{x}$, чтобы получить график функции $y = \frac{1}{x} + 1$ (рис. 8)?

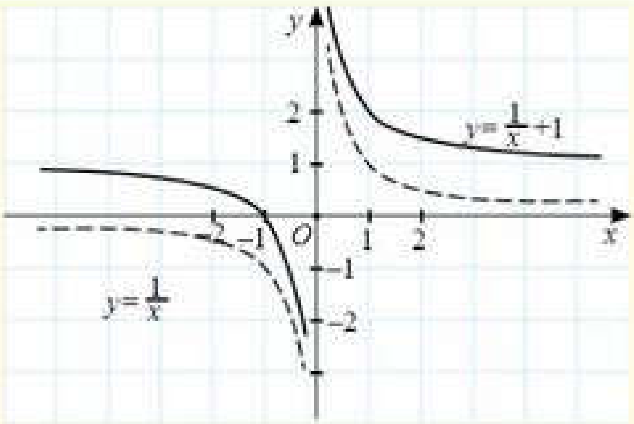


Рис. 8

ПРИМЕР **2.** Построим в одной координатной плоскости графики функций: $y = x$, $y = 2x$ и $y = \frac{1}{2}x$ (рис. 9). Теперь сравним расположения графиков

ПРИМЕР

функций $y = 2x$ и $y = \frac{1}{2}x$ с графиком функции $y = x$. Видим, что графики функций $y = 2x$ и $y = \frac{1}{2}x$ получены из графика функции $y = x$ с использованием, соответственно, растяжением и сжатием.

Следовательно, график функции $y = kf(x)$, где $k \neq 0$ — некоторое число, получаем из графика функции $y = f(x)$ при $|k| > 1$ растяжением в $|k|$ раз вдоль оси Oy, а при $|k| < 1$ — сжатием в $\left(\frac{1}{|k|}\right)$ раз вдоль оси Oy (рис. 10).

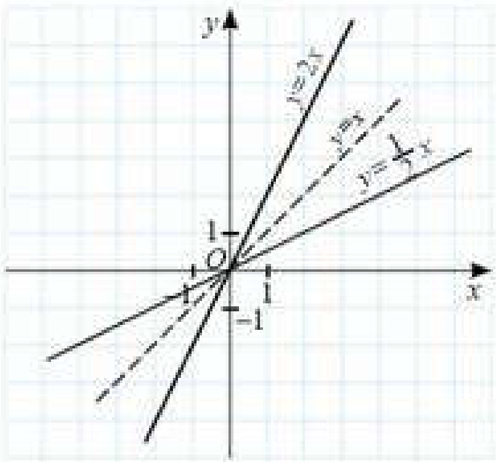


Рис. 9

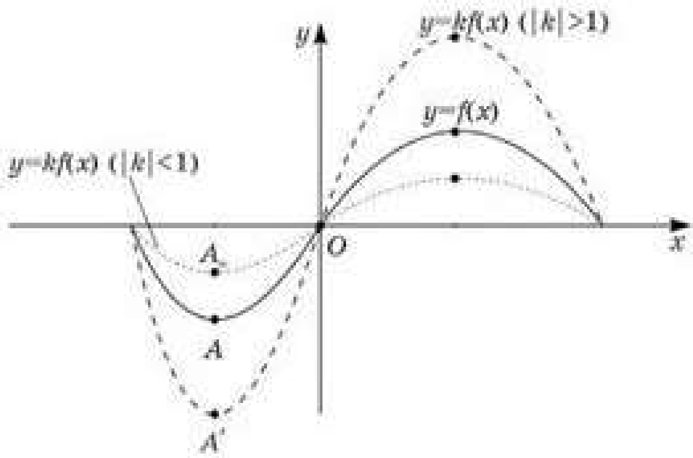


Рис. 10

В частности, если $|k| > 1$ ($|k| < 1$), то все ординаты точек графика функции $y = f(x)$ при переходе в точки графика функции $y = kf(x)$ увеличиваются (уменьшаются) в $|k|$ раз (в $\left(\frac{1}{|k|}\right)$ раз).

Если же $k < 0$, то построим сначала график функции $y = |k|f(x)$, затем строим симметричный с ним относительно оси Ox искомый график функции $y = kf(x)$.

ОБЪЯСНИТЕ

Какое преобразование использовали к графику функции $y = x^2$, чтобы получить график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 11)?

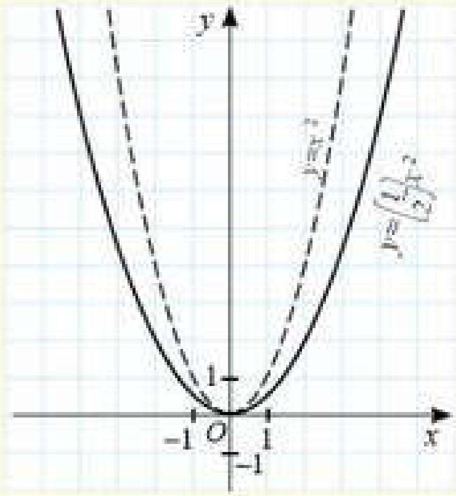


Рис. 11

ПРИМЕР **3.** В одной координатной плоскости построим графики функций $y = x^2$, $y = (x + 1)^2$ (рис. 12).

ОБЪЯСНИТЕ

Как получили график функции $y = (x + 1)^2$ из графика функции $y = x^2$ (рис. 12)?

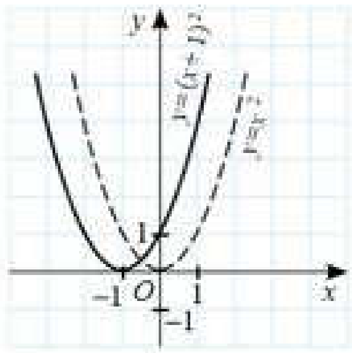


Рис. 12

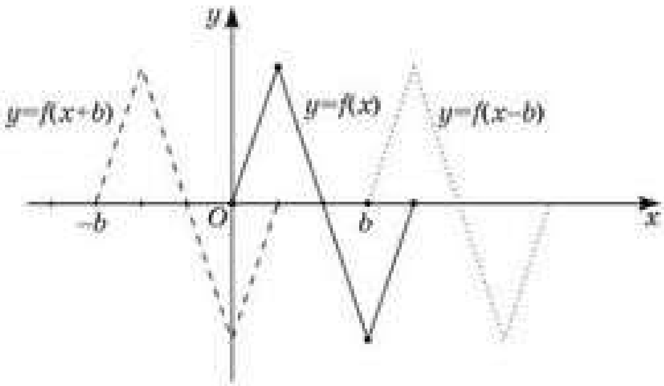


Рис. 13

График функции $y = f(x + b)$, *где* $b \neq 0$ — *некоторое число, получаем путем параллельного переноса графика функции* $y = f(x)$ *вдоль оси* Ox *на* $|b|$ *единиц в положительном направлении при* $b < 0$ *и в отрицательном направлении — при* $b > 0$ (рис. 13).

ПРИМЕР **4.** Построим графики функций: а) $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$; б) $y = (2x)^2$.

Для этого сначала построим график функции $y = x^2$. Затем его преобразуем следующим образом: а) растяжением от оси Oy в 2 раза (рис. 14, *а*); б) сжатием к оси Oy в 2 раза (рис. 14, *б*).

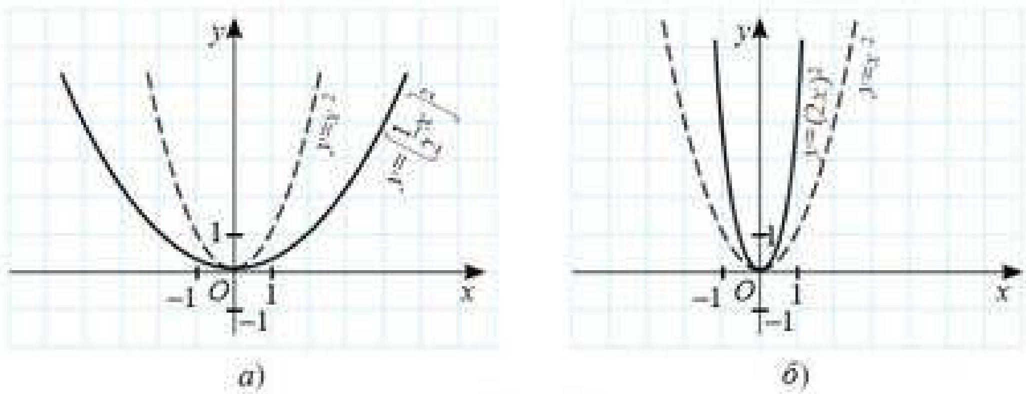


Рис. 14

График функции $y = f(ax)$, *где* $a \neq 0$ — *некоторое число, получаем из графика функции* $y = f(x)$ *сжатием в* $|a|$ *раз при* $|a| > 1$ *и растяжением в* $\frac{1}{|a|}$ *раз при* $|a| < 1$ *относительно оси* Ox (рис. 15).

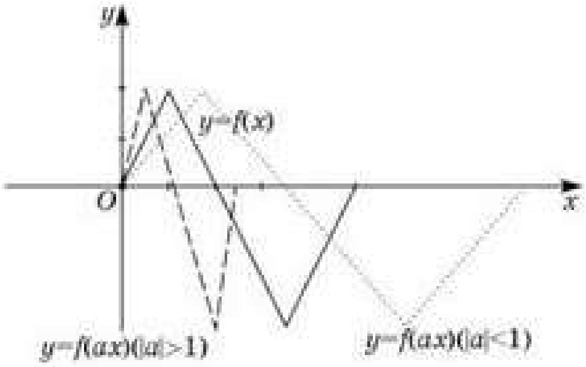


Рис. 15

Рассмотрим пример, где для построения графика используется более одного преобразования.

ПРИМЕР

5. Построим график функции $y = (x - 2)^2 + 3$.

Решение. Чтобы построить график данной функции:

1) построим график функции $y = x^2$;

2) полученную параболу параллельно перенесем вдоль оси Ox в положительном направлении на две единицы;

3) последнюю параболу параллельно перенесем вдоль оси Oy в положительном направлении на три единицы (рис. 16).

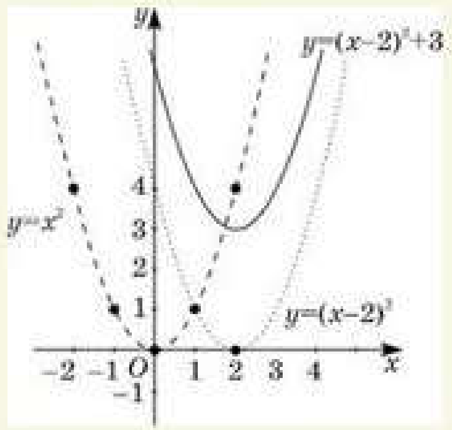


Рис. 16

Следовательно, график функции $y = kf(ax + b) + d$ *получаем из графика функции* $y = f(x)$, *последовательно используя в том или ином соответствующем порядке все выше приведенные четыре вида преобразования.*

Назовите виды преобразований, которые используются для построения графика функции $y = (2x + 1)^2 - 4$.

1. В каких случаях для построения графика функции используются простейшие преобразования?
2. Чем отличается построение графиков функций $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$ в результате преобразований? Приведите пример.
3. В чем сходство преобразований графика функции $y = f(x)$ при построении графиков функций $y = -af(x)$, $y = f(-ax)$?

Упражнения

A

2.1. Используя график функции $y = x$, постройте в одной координатной плоскости графики функций $y = 3x$; $y = -2x$; $y = x + 2$; $y = -4x - 1$.

2.2. Постройте в одной координатной плоскости графики функций $y = \frac{1}{x} + 1$; $y = -\frac{1}{x} + 1{,}5$; $y = \frac{1}{x+1} - 2$, используя график функции $y = \frac{1}{x}$.

2.3. Какой кривой является график функции:

а) $y = \sin\frac{\pi}{2} - 2x^2$; б) $y = 2\cos 0 + \frac{2}{x}$;

в) $y = 4\sin\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}x^3$; г) $y = -\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$?

2.4. Постройте в одной координатной плоскости графики следующих функций: а) $y = -2x^2$; б) $y = x^2 + \frac{1}{2}$; в) $y = -x^2 + 5$; г) $y = 3x^2$.

2.5. Постройте в одной координатной плоскости графики следующих функций, используя график функции $y = \sqrt{x}$:

а) $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{4}$; б) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{2}$; в) $y = 3\sqrt{x} - 1$.

B

2.6. Какие преобразования необходимо выполнить, чтобы получить график функции: а) $y = 2(3 + x)^2 - 5$; б) $y = -2(x - 1)^2 + 4$ при помощи графика функции $y = x^2$? Постройте график.

2.7. Используя график функции $y = x^3$, постройте график функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = x^3 + 4$; б) $f(x) = -x^3 - 3$;

в) $f(x) = -2x^3 + 1$; г) $f(x) = 2(x - 1)^3 - 5$.

ПОВТОРИТЕ

2.8. С помощью графика определите, пересекаются ли графики функций:

а) $y = x^2 - 2x$ и $y = -1$; б) $y = x^2 - 5x + 4$ и $y = -\frac{3}{x}$?

2.9. Графическим способом найдите количество корней уравнения:

а) $x^2 = \frac{1}{x}$; б) $x^2 - 1 = \sqrt{x}$.

2.10. Укажите, формуле какой функции соответствуют данные таблицы 4, если $y = 2x + 1$, $y = 2x^2 + 1$, $y = x^3 - 3$.

Таблица 4

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

2.11. Сравните значения $f(1)$ и $g(1)$, если $f(x) = x^4 + x^2 - 10$ и $g(x) = x^3 + x - 9$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, область определения и множество значений, график функции, способы задания, простейшие преобразования графиков функции.

§3. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

Ключевые понятия

Функция, свойства функции

Вы расширите свои знания о свойствах функции.

Для того, чтобы дать определение четности и нечетности функции, сначала введем определение понятия симметричного множества.

Если во множестве X вместе с элементом x содержится элемент $(-x)$, то данное множество называется ***симметричным множеством*** .

Например, $(-5;\ 5)$, $[-b;\ b]$, $(-\infty;\ +\infty)$ — симметричные множества.

Если область определения функции $y = f(x)$ является симметричным множеством и для любого значения аргумента x выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$), то функция называется ***четной*** *(****нечетной*** *)* ***функцией*** .

Отсюда следует, что некоторые функции обладают свойством четности или нечетности. Если же хотя бы одно из условий в определении не выполняется, то функция является ни четной, ни нечетной. Такие функции называются *функциями общего вида* .

ПРИМЕР

1. Определим четность или нечетность функций:

а) $f(x) = 5x^2$; б) $f(x) = x^3 - x$; в) $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$.

Решение. Используя данное определение четной и нечетной функций, имеем:

а) $f(-x) = 5(-x)^2 = 5x^2 = f(x)$ — четная функция;

б) $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$ — нечетная функция;

в) $f(-x) = 2(-x)^2 + \dfrac{1}{-x} = 2x^2 - \dfrac{1}{x}$ — функция ни четная, ни нечетная.

Ответ : а) четная; б) нечетная; в) ни четная, ни нечетная.

Графики четных и нечетных функций имеют характерные свойства, а именно: *график четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.*

ПРИМЕР

2. По графикам, данным на рисунках 17—19, определим четные и нечетные функции.

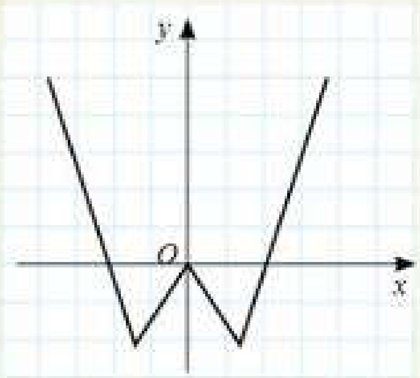


Рис. 17

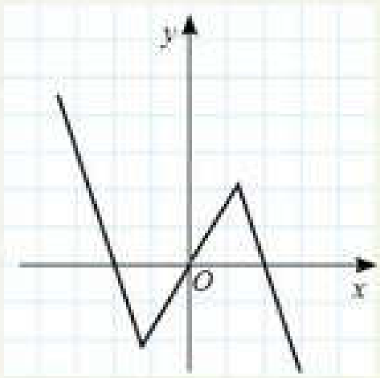


Рис. 18

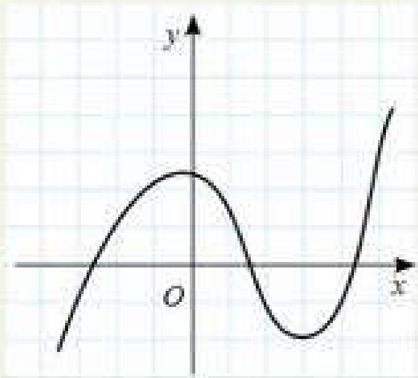


Рис. 19

Решение. Используя свойства графика четной и нечетной функций, приходим к следующему выводу:

а) график симметричен относительно оси Oy, следовательно, данная функция четная (рис. 17);

б) график симметричен относительно начала координат, поэтому функция нечетная (рис. 18);

в) в графике нет симметричности, поэтому функция ни четная, ни нечетная (рис. 19).

Если найдется такое число $T \neq 0$, что для любых x области определения функции $y = f(x)$ выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$, то функция называется ***периодической функцией.***

Число $T \neq 0$ называется *периодом функции* .

ПРИМЕР

3. Найдем период функции $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Решение. Из курса 9 класса известно, что для функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, соответственно, выполняются равенства $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, а для функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, соответственно, выполняются равенства $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$. Следовательно, для функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ число $T = 2\pi$, а для функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ число $T = \pi$.

Если период функции $y = f(x)$ равен числу $T \neq 0$, тогда число $n \cdot T$ (где n — любое целое число) также будет периодом данной функции.

Таким образом, для тригонометрических функций выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} &\sin(x + 2\pi n) = \sin x, && n \in Z; \\ &\cos(x + 2\pi n) = \cos x, && n \in Z; \\ &\mathrm{tg}(x + \pi n) = \mathrm{tg}\, x, && n \in Z; \\ &\mathrm{ctg}(x + \pi n) = \mathrm{ctg}\, x, && n \in Z. \end{aligned} \qquad (1)$$

Докажем справедливость равенства $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$.

Доказательство. Для этого используем одну из формул сложения, изученных в 9 классе, а именно: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. Тогда $\sin(x + 2\pi n) = \sin x \cos 2\pi n + \cos x \sin 2\pi n$. Учитывая, что $\cos 2\pi n = 1$, $\sin 2\pi n = 0$, получим $\sin(x + 2\pi n) = \sin x \cdot 1 + \cos x \cdot 0 = \sin x$. Следовательно, $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$.

Наименьший положительный период принимается за период функции, например, наименьший положительный период функций $\sin x$, $\cos x$ равен 2π, а для функций $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$ равен π.

Справедливость остальных равенств из формулы (1) докажите самостоятельно.

Для построения графика периодической функции достаточно построить ее график на отрезке длиной, равной T, а затем произвести параллельный перенос его вдоль оси Ox в оба направления (рис. 20).

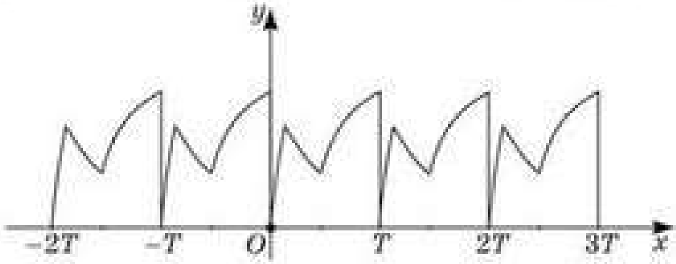


Рис. 20

Определение периода любой периодической функции основано на следующем свойстве:

если функция $y = f(x)$ — периодическая функция и ее период равен числу T, то функция $y = kf(ax + b)$ (где k, $a \neq 0$ и b — постоянные) тоже будет периодической и ее период будет равен числу $\frac{T}{|a|}$.

ПРИМЕР

4. Найдем период функции $y = \cos(3x - 1)$.

Решение. Наименьший положительный период функции $y = \cos x$ равен 2π, а по условию $a = 3$. Тогда получаем, что $\frac{T}{|a|} = \frac{2\pi}{3}$, т. е. период данной функции равен $\frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

Если абсолютная величина значений функции в любых точках из области определения функции не больше числа b, где $b > 0$, т. е. $|f(x_0)| \le b$, $x_0 \in X$, то функция на данном множестве называется ***ограниченной функцией.*** *Если же неравенство не выполняется, то функция называется* ***неограниченной*** .

ПРИМЕР

5. Докажем, что функция $f(x) = 1 + \sin 2x$ — ограниченная.

Доказательство . Известно, что $|\sin x| \le 1$. Отсюда имеем, что $|\sin 2x| \le 1$ или $-1 \le \sin 2x \le 1$. Прибавим единицу ко всем частям последнего двойного неравенства и получим $0 \le 1 + \sin 2x \le 2$. Отсюда следует, что множество значений данной функции $E(f) = [0;\ 2]$, т. е. она ограничена.

Промежутки из области определения функции, в которых функция принимает только положительные значения (график функции находится выше оси Ox) или только отрицательные значения (график функции находится ниже оси Ox), называются ***промежутками знакопостоянства функции*** .

ПРИМЕР

6. Определим промежутки знакопостоянства функций:

а) $y = x + 1$; б) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x}$.

Решение . а) Найдем нули функции, т. е. $x + 1 = 0$, $x = -1$. Теперь, используя метод интервалов, определим знаки функции, тогда на интервале $(-\infty;\ -1)$ данная функция принимает отрицательные значения, а на интервале $(-1;\ +\infty)$ — положительные значения; б) знак функции зависит от знака знаменателя, так как числитель при любом значении x больше нуля. Тогда выражение в знаменателе принимает отрицательные значения на интервале $(-\infty;\ 0)$ и положительные значения на интервале $(0;\ +\infty)$.

Если в области определения функции $y = f(x)$ для любых чисел $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), то функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** ***(убывающей*** ***) функцией*** .

Если в области определения функции $y = f(x)$ для любых чисел $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$), то функция $y = f(x)$ называется ***неубывающей (невозрастающей) функцией.***

Возрастающие, убывающие, неубывающие и невозрастающие функции называются *монотонными функциями* .

При исследовании функции около некоторой точки используют понятие *окрестность точки* .

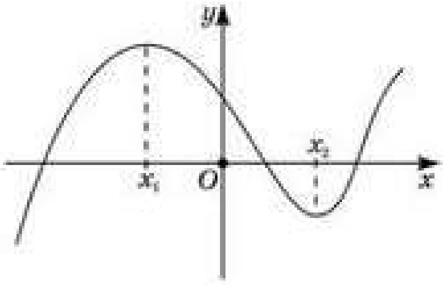


Рис. 21

> ***Окрестностью точки*** *называется любой промежуток, содержащий данную точку.*

На рисунке 21 в окрестности точки x_1(x_2) график функции переходит от возрастания к убыванию (от убывания к возрастанию). Такую точку называют *точкой максимума* (x_{max}) (*минимума* (x_{min})).

> *Если для всех x, взятых из некоторой окрестности точки* x_0, *выполняется неравенство* $f(x) \geq f(x_0)$ $(f(x) \leq f(x_0))$, *то точку* x_0 называют ***точкой минимума*** (***максимума***) ***функции***.

Точки минимума и точки максимума объединяются под общим названием *точки экстремума*. Значения функции в этих точках, соответственно, называются *минимумами* и *максимумами* функции, или *экстремумами функции*.

1. Если областью определения четной функции является отрезок $[a; b]$, то что можно сказать о числах a и b?
2. Существует ли нечетная функция, принимающая только положительные значения? Ответ поясните.
3. Если функция $y = f(x)$ на множестве действительных чисел возрастает, то функция $y = -f(x)$ будет возрастающей или убывающей?
4. Что означает понятие *периодичность функции*?
5. Как определить промежутки знакопостоянства функции?

Упражнения

А

3.1. Является ли четной функция:

а) $f(x) = -3x^4 + 2,5x^2$; б) $f(x) = \cos\frac{2x}{3} - 4x^2 + x$;

в) $f(x) = 5\sin^2 x + \frac{1}{2} - x$; г) $f(x) = -2,5x^6 - 5$?

3.2. Является ли нечетной функция:

а) $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 1$; б) $f(x) = \sin x - 2x^3$;

в) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 \cdot \operatorname{ctg} x^2$; г) $f(x) = 2x|x| - 3x - 1$?

3.3. Верно ли, что для функции $y = f(x)$ число T является периодом:

а) $f(x) = 2\sin\frac{1}{3}x$, $T = 6\pi$; б) $f(x) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{8}\right)x$, $T = 10\pi$;

в) $f(x) = \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + 1,\ T = \frac{\pi}{3}$; г) $f(x) = \operatorname{tg}5x + 2{,}5,\ T = \frac{\pi}{5}$?

3.4. На рисунке 22, *а—в* построен график функции $y = f(x)$ для всех x, удовлетворяющих условию $x \geq 0$ ($x \leq 0$). Постройте график функции $f(x)$, если известно: а) $f(x)$ — нечетная функция; б) $f(x)$ — четная функция; в) $f(x)$ — ни четная, ни нечетная функция.

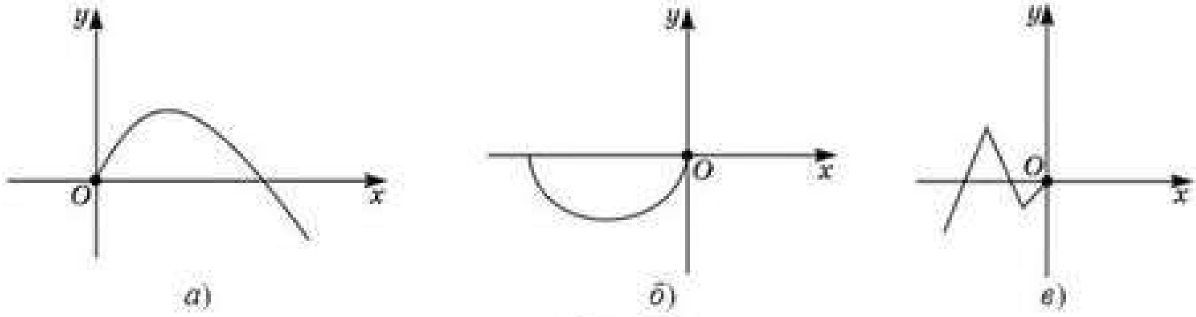


Рис. 22

3.5. На рисунках 23—24 изображена часть графика функции. По графику найдите: 1) координаты точек пересечений графика функции с осями координат; 2) промежутки возрастания и убывания; 3) промежутки знакопостоянства функции.

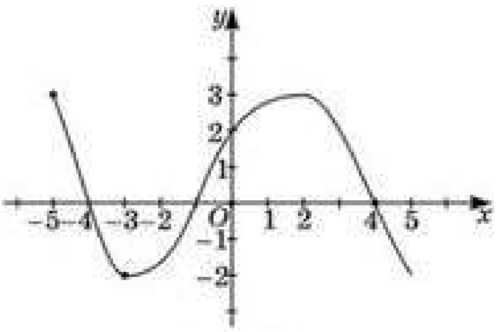


Рис. 23

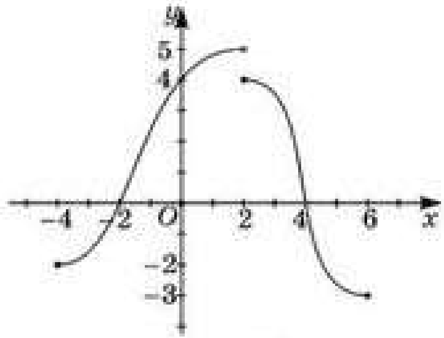


Рис. 24

B

3.6. Докажите четность или нечетность функции:

а) $y = \frac{2}{3}x^4 + 4|x|$; б) $f(x) = |x| - 2x^2$;

в) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{0{,}5\sin 2x}$; г) $f(x) = \frac{x(x-3)}{\cos 3x}$.

3.7. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $f(x) = \cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x$;

в) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right)$; г) $f(x) = 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

3.8. Используя данные, постройте эскиз графика функции $f(x)$:

а) функция на промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ возрастает, на промежутке $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ — убывает;

б) функция на промежутках $(-\infty; 1]$ и $[3; +\infty)$ возрастает, на промежутке $[1; 3]$ — убывает;

в) функция на промежутках $(-\infty; -4]$ и $[1; +\infty)$ убывает, на промежутке $[-4; 1]$ — возрастает;

г) $x_{max} = -1$, $x_{min} = 2$, $f(-1) = 2$, $f(2) = -3$;

д) $f(x)$ — четная функция, $x_{max} = 0$, $x_{min} = 1$, $f(0) = 4$, $f(1) = 0$;

е) $f(x)$ — нечетная функция, $x_{min} = 5$, $f(0) = 2$, $f(5) = -3$.

3.9. Используя простейшие преобразования, постройте график функции:

а) $y = 2x - x^2$; б) $y = \dfrac{1}{x+2} - 3$.

По графику определите промежутки возрастания и убывания, точки экстремума, промежутки знакопостоянства.

3.10. Известно, что функция $y = f(x)$ — четная. Дополняя формулу функции, каким алгебраическим слагаемым можно получить: 1) четную функцию; 2) функцию общего вида:

а) $f(x) = 2x^2$; б) $f(x) = x^4 - x^2$?

3.11. Известно, что функция $y = f(x)$ — нечетная. Дополняя формулу функции, каким алгебраическим слагаемым можно получить: 1) нечетную функцию; 2) функцию общего вида:

а) $f(x) = -3x^3$; б) $f(x) = x + x^3$?

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, виды функции, свойства и график функции, аргумент, область определения и множество значений функции, выражение одной переменной через другую переменную.

§4. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ. СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ

Ключевые понятия

Функция, обратная функция, сложная функция, график функции

Вы ознакомитесь с понятием *обратная функция*, научитесь находить обратную функцию к данной, узнаете о свойстве взаимно-обратных функций.

Если функция $y = f(x)$ определена и монотонно возрастает (убывает) на множестве $x \in X$, областью значений является множество

$y \in Y$, тогда существует обратная функция, причем эта функция определена и возрастает (убывает) на Y.

Графики взаимно-обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Рассмотрим пример.

ПРИМЕР **1.** Дана линейная функция $y = 3x + 5$. Найдем обратную ей функцию.

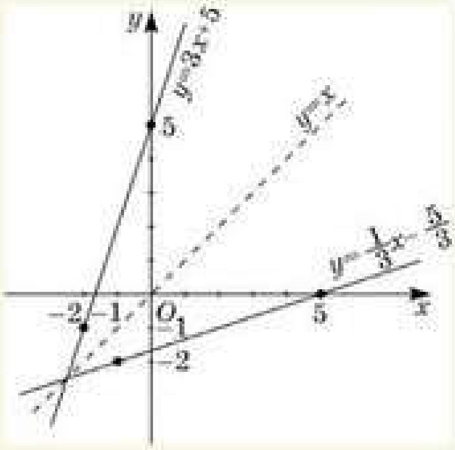


Рис. 25

Решение. Данная линейная функция определена при любом значении x и является монотонно возрастающей функцией. Следовательно, можно найти обратную ей функцию. Для ее определения выразим переменную x через переменную y. Тогда $3x = y - 5$, или $x = \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$. В последнем равенстве поменяем местами переменные x и y. (В общем случае в математике при определении обратной функции аргументом оставляют x, функцией — y). Таким образом, получаем функцию $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$. Она является обратной функцией к функции $y = 3x + 5$. Тогда функция $y = 3x + 5$ — прямая, а функция $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ — обратная. Все эти функции монотонно возрастающие. Графики функций даны на рисунке 25.

Ответ: $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему функция $y = \sqrt{x}$ является обратной функцией к функции $y = x^2$ при $x \geq 0$?

Вы ознакомитесь с понятием *сложная функция*, научитесь распознавать сложную функцию и составлять композицию функций.

Пусть дана функция $y = f(u)$ с областью определения $u \in U$, с множеством значений Y и пусть переменная u, в свою очередь, зависит от переменной x, т. е. $u = g(x)$, $x \in X$.

Тогда функция $y = f(g(x))$ от аргумента x, определенная на множестве X, называется *сложной функцией*. Общий вид сложной функции:

$$y = f(g(x)).$$

Например, функция $y = \sqrt{2x + 1}$ является сложной функцией, определенной при $x \geq -\frac{1}{2}$, так как $y = \sqrt{u}$, $u = 2x + 1$.

ПРИМЕР **2.** Даны функции $v = x + 1$ и $u = \sqrt{x}$. Составим сложные функции $y = v(u(x))$, $y = u(v(x))$.

Решение. Допустим, что $y = v(u(x))$, тогда $y = \sqrt{x} + 1$ при $x \in [0; +\infty)$; если $y = u(v(x))$, то $y = \sqrt{x + 1}$ при $x \in [-1; +\infty)$.

1. Всякой ли функции можно найти обратную функцию? Ответ объясните.
2. Являются ли сложными функции: $y = x^2$, $y = (3x + 5)^2$?

Упражнения

А

4.1. Найдите обратную функцию к функции:

а) $y = 7x + 2$; б) $y = \frac{2x}{3}$; в) $y = 5 - x$.

4.2. Назовите функции f и g, составляющие функцию $y = f(g(x))$, если:

а) $y = (x + 1)^2$; б) $y = \sqrt{2x}$.

4.3. При каких значениях переменной x функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ являются взаимно-обратными?

4.4. Составьте все возможные сложные функции из функций $y = 2x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$.

B

4.5. Найдите обратную функцию следующей функции при $x \geq 0$:
а) $y = 2x + 3$; б) $y = -6x + 9$ и постройте их графики.

4.6. Составьте сложные функции, если $f(x) = \frac{2}{x^3}$; $g(x) = 3x - 5$.

4.7. Составьте обратную функцию к функции $g(x) = 3x^2 - 2$ при $x \geq 0$.

4.8. Составьте все возможные сложные функции, если $f(x) = 2x^2$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$.

4.9. Укажите двумя способами, из каких функций составлена функция $y = \sqrt{\frac{3}{x}}$.

4.10. Известно, что $f(x) = x$; $g(x) = \sqrt{x}$, $\varphi(x) = x^2 - 3$. Составьте сложную функцию $f(g(\varphi(x)))$ и найдите ее область определения.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{x-2}$:

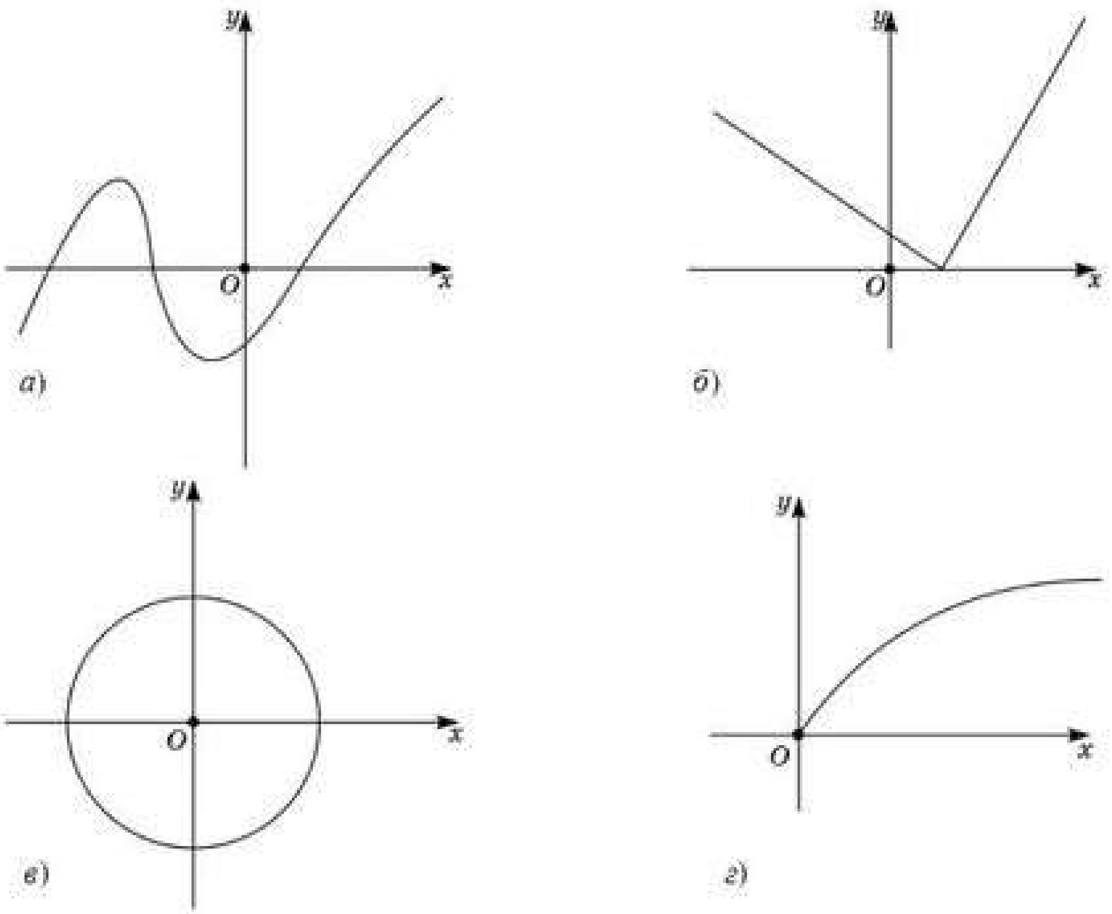
A) $[-2; +\infty)$; B) $(2; +\infty)$; C) $[2; +\infty)$; D) $(-\infty; 2)$.

2. Найдите значение функции $f(x) = x^2 - 2x + 1$ при $x_0 = 3$:

A) 4; B) –2; C) –1; D) 2.

3. Какая из кривых, изображенных на рисунке, не является графиком функции:

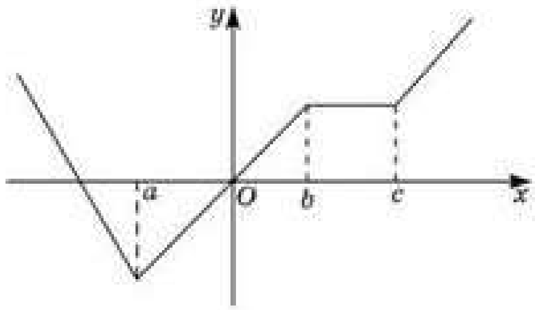
A) *а*; B) *б*; C) *в*; D) *г*?



4. Какая из функций является четной:

A) $y = 2\cos x$; B) $y = 1{,}5\sin x$; C) $y = x$; D) $y = \operatorname{tg} x$?

5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Укажите промежутки возрастания этой функции:



A) $[a;\ b]$ и $[c;\ +\infty)$;
B) $(-\infty;\ a]$ и $[b;\ +\infty)$;
C) $(-\infty;\ a]$;
D) $[a;\ b]$.

6. Используя рисунок задания 5, найдите промежутки убывания функции:

A) $[a;\ b]$ и $[c;\ +\infty)$; B) $(-\infty;\ a]$ и $[b;\ +\infty)$;
C) $(-\infty;\ a]$; D) $[a;\ b]$.

7. Найдите область определения функции $f(x) = \dfrac{x+10}{(x+4)(x+1)}$:

A) $x \neq 4$; B) $x \neq 1,\ x \neq -4$;
C) $x \neq 1$; D) $x \neq -4,\ x \neq -1$.

8. Укажите нечетную функцию:

A) $y = -\sin^2 x$; B) $y = \sin x$;
C) $y = \cos x$; D) $y = \cos^2 x$.

9. Найдите значение функции $f(x) = \sqrt{2}\cos 4x + \sqrt{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$:

A) $\sqrt{2}$; B) 0;
C) $2\sqrt{2}$; D) $-\sqrt{2}$.

10. Каково множество значений функции $y = 7{,}8 - 5x$:

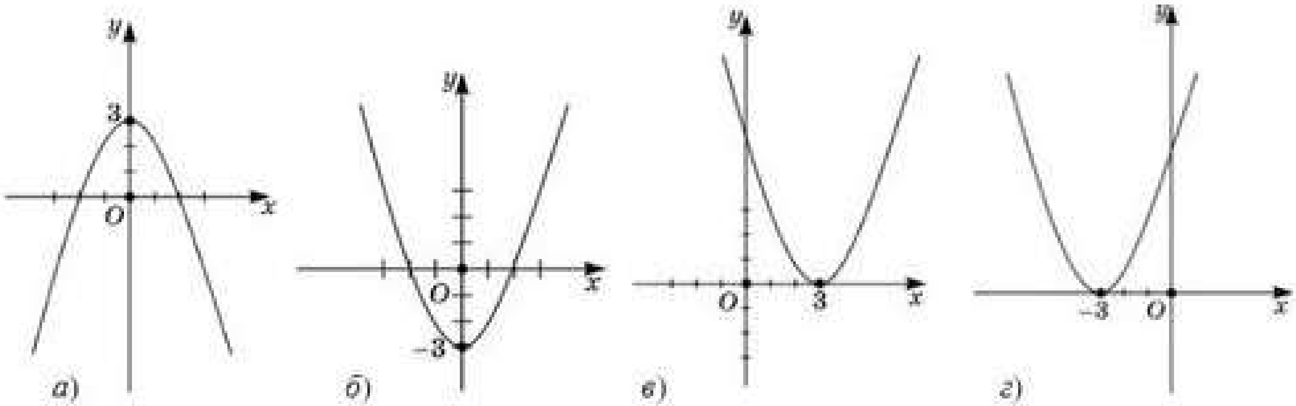
A) R; B) Q; C) Z; D) N?

11. Найдите значение выражения $3f(x) - 2g(x)$, если $f(x) = \frac{x+8}{4+x}$, $g(x) = \frac{2}{1-x}$ и $x = 0$:

A) 2; B) 2,5; C) 1; D) –2,5.

12. На каком рисунке изображен график функции $y = (x-3)^2$:

A) *а*; B) *б*; C) *в*; D) *г*?



13. Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{x}}{(x+2)(x-5)}$:

A) $[0;\ 2) \cup (2;\ 5)$; B) $(-\infty;\ 2) \cup (5;\ +\infty)$;
C) $[0;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$; D) $[0;\ +\infty]$.

14. Укажите нечетную функцию:

A) $y = |x| + x$; B) $y = |x| + x^2$;
C) $y = x^2|x|$; D) $y = -x|x|$.

15. Найдите множество значений функции $y = \cos x + 1$:

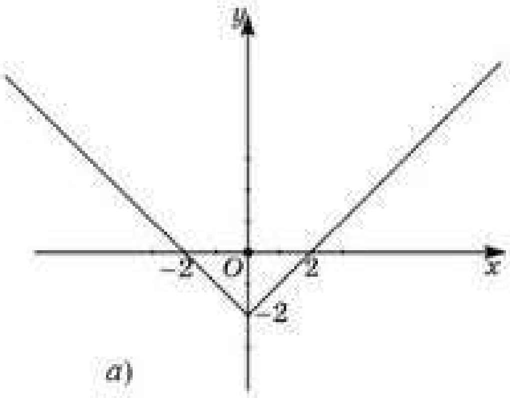
A) $[-1;\ 1]$; B) $[0;\ 1]$;
C) $[-2;\ 0]$; D) $[0;\ 2]$.

16. Запишите обратную функцию к функции $y(x) = 2 + x$:

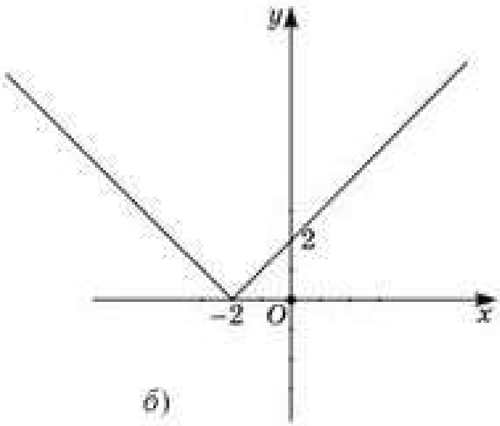
A) $x(y) = 2 - y$; B) $x(y) = y + 2$;
C) $x(y) = y$; D) $x(y) = y - 2$.

17. На каком рисунке изображен график функции $y = |x + 2|$:

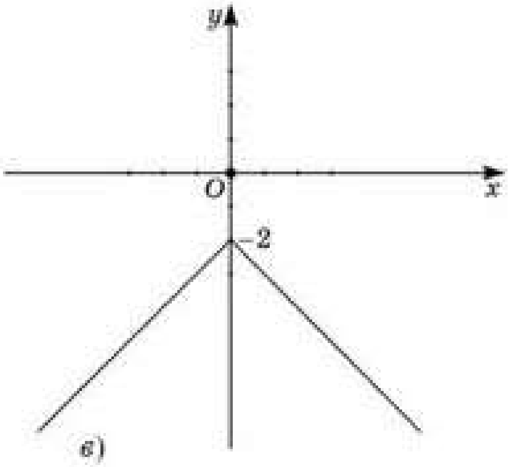
A) *а*; B) *б*; C) *в*; D) *г*?



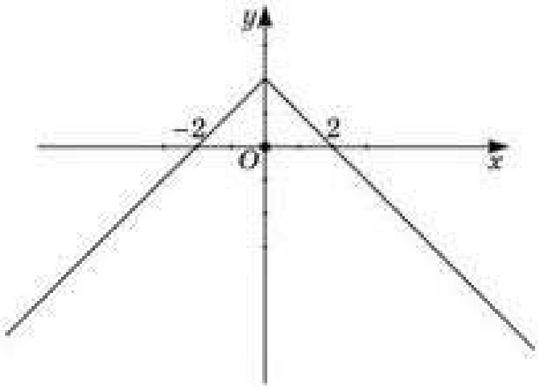
а)



б)



в)



г)

18. Укажите четную функцию:

A) $y = x^3 - \cos x$; B) $y = x^2 - \cos x$;
C) $y = x - \sin x$; D) $y = x^3 - \sin 5x$.

19. Найдите множество значений функции $y = \sin x - 2$:

A) $(-\infty;\ 0]$; B) $[-3;\ -1]$;
C) $[0;\ 2]$; D) $(-2;\ 0]$.

20. Найдите область определения функции $y = \dfrac{5 - x}{1 + x^2}$:

A) $x \neq -2$; $x \neq 2$; B) $x \neq 0$;
C) $x \neq -2$; D) x — любое число.

21. Найдите область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 4}$:

A) $x \neq 4$; B) $x \neq -4$;
C) $x \geq 0$; $x \neq 4$; D) $x \geq 0$.

22. Найдите множество значений функции $y = \dfrac{1}{x + 1} - 7$:

A) $y \neq -1$; B) $y \neq -7$;
C) $y \neq 1$; D) $y \neq 7$.

Задания на математическую грамотность

23. Мяч сбросили с высоты 16 м и он подпрыгивает на одну четверть высоты падения. Сколько метров пролетит мяч до полной остановки:

A) 26; B) 25; C) 27; D) 16; E) 24?

24. Три мальчика бросают мяч в баскетбольную корзину. Каждый сделал по 10 бросков. Заполните таблицу 5 и найдите значения a и b:

Таблица 5

Участник	Количество попаданий в корзину	Процент попадания
Первый	8	a
Второй	b	25%
Третий	5	50%

A) 50%; B) 25%; C) 30%; D) 70%; E) 80%.

25. Если $7x = 10$ и $49y = 25$, то найдите значение выражения $\frac{25x}{28y}+1{,}5$:

A) 1,5; B) 2,65; C) 4; D) 5; E) 6,5.

26. За один день типография расходует 20 пачек бумаги. Сколько пачек необходимо типографии за 3 недели:

A) 300; B) 400; C) 440; D) 350; E) 420?

27. На диаграмме показан ежемесячный расход семьи из 5 человек на некоторые продукты. Сколько тенге тратит семья в месяц на молоко и творог (рис. 26):

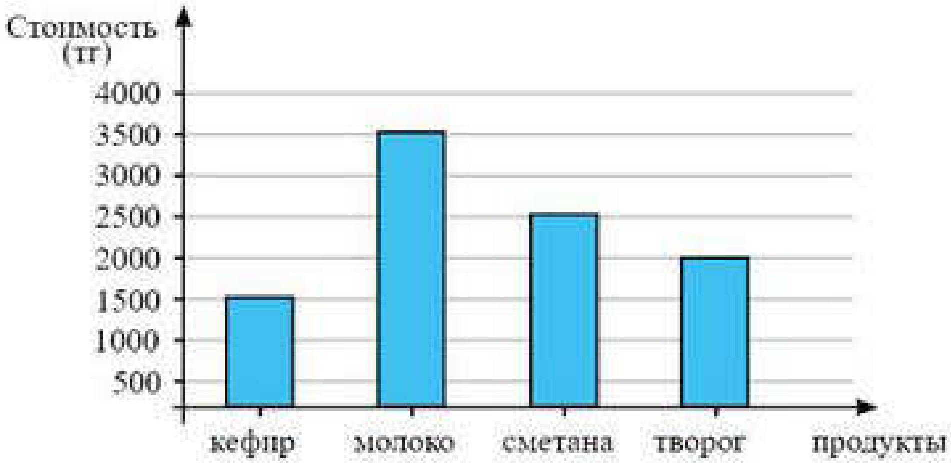


Рис. 26

A) 5500 тг; B) 5000 тг; C) 1100 тг; D) 1000 тг; E) 2000 тг?

ÈÑÒÎÐÈ×ÅÑÊÀß ÑÏÐÀÂÊÀ

Èäåÿ ôóíêöèîíàëüíîé çàâèñèìîñòè âîñõîäèò ê äðåâíîñòè, îíà ñîäåðæèòñÿ óæå â ïåðâûõ ìàòåìàòè÷åñêè âûðàæåííûõ ñîîòíîøåíèÿõ ìåæäó âåëè÷èíàìè, â ïåðâûõ ïðàâèëàõ äåéñòâèé íàä ÷èñëàìè, â ïåðâûõ ôîðìóëàõ äëÿ íàõîæäåíèÿ ïëîùàäè è îáúåìà òåõ èëè èíûõ ôèãóð.

ßâíî è âïîëíå ñîçíàòåëüíî ïðèìåíÿåòñÿ ïîíÿòèå ôóíêöèè è ñèñòåìàòè÷åñêè èçó÷àåòñÿ ôóíêöèîíàëüíàÿ çàâèñèìîñòü ëèøü ñ XVII â. â ñâÿçè ñ ïðîíèêíîâåíèåì â ìàòåìàòèêó èäåè î ïåðåìåííûõ.

×åòêîãî ïðåäñòàâëåíèÿ î ïîíÿòèè ôóíêöèè òîãäà åùå íå áûëî è ïåðâîå åå ïðåäñòàâëåíèå áûëî ïðåäëîæåíî Ð. Äåêàðòîì, êîòîðûé ñèñòåìàòè÷åñêè ðàññìàòðèâàë â ñâîåé “Ãåîìåòðèè” ëèøü òå êðèâûå, êîòîðûå ìîæíî òî÷íî ïðåäñòàâèòü ñ ïîìîùüþ óðàâíåíèé, ïðè÷åì ïðåèìóùåñòâåííî àëãåáðàè÷åñêèõ. Ïîñòåïåííî ïîíÿòèå *ôóíêöèè* ñòàëî îòîæäåñòâëÿòüñÿ ñ ïîíÿòèåì àíàëèòè÷åñêîãî âûðàæåíèÿ — *ôîðìóëû*.

Ñëîâî *ôóíêöèÿ* (ëàò. *functio — èñïîëíåíèå, îñóùåñòâëåíèå*) Ã. Ëåéáíèö óïîòðåáëÿë ñ 1673 ã. â ñìûñëå ðîëè (âåëè÷èíà, âûïîëíÿþùàÿ òó èëè èíóþ çàäà÷ó).

Êàê òåðìèí âûðàæåíèå *ôóíêöèÿ* *îò* *õ* ñòàëî óïîòðåáëÿòüñÿ Ã. Ëåéáíèöåì è È. Áåðíóëëè íà÷èíàÿ ñ 1698 ã. Г. Ëåéáíèö ââåë òàêæå òåðìèíû *ïåðåìåííàÿ* è *êîíñòàíòà* (ïîñòîÿííàÿ). Òî÷íîå îïðåäåëåíèå ôóíêöèè âïåðâûå áûëî äàíî â 1718 ã. îäíèì èç ó÷åíèêîâ è ñîòðóäíèêîâ Г.В. Ëåéáíèöà, âûäàþùèìñÿ øâåéöàðñêèì ìàòåìàòèêîì È. Áåðíóëëè: “*Ôóíêöèåé ïåðåìåííîé âåëè÷èíû* íàçûâàþò êîëè÷åñòâî, îáðàçîâàííîå êàêèì óãîäíî ñïîñîáîì èç ýòîé ïåðåìåííîé âåëè÷èíû è ïîñòîÿííûõ”.

Ë. Ýéëåð â ñâîåé êíèãå “Ââåäåíèå â àíàëèç” (1748 ã.) ñôîðìóëèðîâàë îïðåäåëåíèå ôóíêöèè òàê: “Ôóíêöèÿ ïåðåìåííîãî êîëè÷åñòâà åñòü àíàëèòè÷åñêîå âûðàæåíèå, ñîñòàâëåííîå êàêèì-ëèáî ñïîñîáîì èç ýòîãî ïåðåìåííîãî êîëè÷åñòâà è ÷èñåë èëè ïîñòîÿííûõ êîëè÷åñòâ”.

Ë. Ýéëåð æå ââåë è ïðèíÿòûå ñåé÷àñ îáîçíà÷åíèÿ äëÿ ôóíêöèé.

Ñîâðåìåííîå îïðåäåëåíèå ÷èñëîâîé ôóíêöèè, â êîòîðîì ýòî ïîíÿòèå îñâîáîæäàëîñü îò ñïîñîáà çàäàíèÿ, áûëî äàíî íåçàâèñèìî äðóã îò äðóãà ðóññêèì ìàòåìàòèêîì Í. È. Ëîáà÷åâñêèì (1834 ã.) è íåìåöêèì ìàòåìàòèêîì Ï. Äèðèõëå (1837 ã.).

Áûëî äàíî ñëåäóþùåå îïðåäåëåíèå ïîíÿòèÿ ôóíêöèè: “*ó* åñòü ôóíêöèÿ ïåðåìåííîé *õ*, åñëè êàæäîìó çíà÷åíèþ *õ* (íà ýòîì îòðåçêå) ñîîòâåòñòâóåò ñîâåðøåííî îïðåäåëåííîå çíà÷åíèå *ó*, ïðè÷åì íå âàæíî, êàêèì îáðàçîì óñòàíîâëåíî ýòî ñîîòâåò-ñòâèå — àíàëèòè÷åñêîé ôîðìóëîé, ãðàôèêîì, òàáëèöåé, ëèáî äàæå ïðîñòî ñëîâàìè”.

Ñîâðåìåííîå ïîíÿòèå ôóíêöèè ñ ïðîèçâîëüíûìè îáëàñòÿìè îïðåäåëåíèÿ è ìíîæåñòâîì çíà÷åíèé ñôîðìóëèðîâàíî â íà÷àëå ÕÕ â. â òðóäàõ ñîçäàòåëÿ òåîðèè ìíîæåñòâà Ã. Êàíòîðà.

Ñëîæíûé è äëèòåëüíûé ïóòü ðàçâèòèÿ ïîíÿòèÿ ôóíêöèè äîâîëüíî òèïè÷åí. Äëÿ òîãî, ÷òîáû îñîçíàòü íåîáõîäèìîñòü ââåäåíèÿ íîâîãî ïîíÿòèÿ, òðåáóåòñÿ âûäåëèòü åãî â ïðîöåññå ðåøåíèÿ ìíîãèõ êîíêðåòíûõ çàäà÷, äàòü îïðåäåëåíèå, ïî âîçìîæíîñòè òî÷íî îòðàæàþùåå åãî ñìûñë.

Íîâûå îòêðûòèÿ è çàïðîñû åñòåñòâîçíàíèÿ è äðóãèõ íàóê ïðèâåëè ê ðàñøèðåíèþ ïîíÿòèÿ ôóíêöèè è äðóãèõ ìàòåìàòè÷åñêèõ ïîíÿòèé.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, свойства и графики функций, определения тригонометрических функций, таблица значений тригонометрических функций, тригонометрические тождества.

2 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Ключевые понятия

Функция, тригонометрия, синус, косинус, тангенс, котангенс

Вы ознакомитесь со свойствами тригонометрических функций и научитесь строить их графики.

В курсе алгебры для 9 класса вы ознакомились с определениями, формулами и некоторыми свойствами тригонометрических функций. Учитывая эти сведения и алгоритм построения графика функции, рассмотрим построение графиков тригонометрических функций.

I. Функция $y = \sin x$.

1) Область определения — множество всех действительных чисел, т. е. $x \in R$;

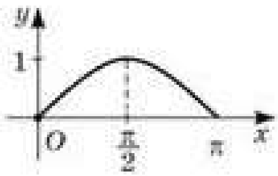
2) множество значений — $[-1;\ 1]$, т. е. $y \in [-1;\ 1]$;

3) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ — функция периодическая, наименьший положительный период равен 2π;

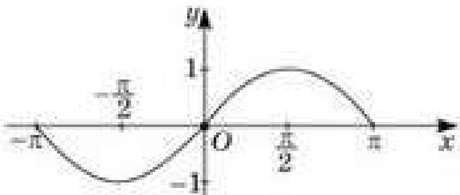
4) функция нечетная, так как $\sin(-x) = -\sin x$.

Отметив точки $(0;\ 0)$, $\left(\frac{\pi}{6};\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6};\frac{1}{2}\right)$, $(\pi;\ 0)$ на координатной плоскости, построим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0;\ \pi]$ (рис. 27, *а*).

$y = \sin x$ — нечетная функция, поэтому ее график симметричен относительно начала координат. Учитывая это свойство, продолжим построение графика на отрезке $[-\pi;\ 0]$. Получим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ (рис. 27, *б*). Построен график функции в промежутке одного периода.



а



б

Рис. 27

Далее, используя свойство периодичности данной функции, строим ее график на всей области определения (рис. 28):

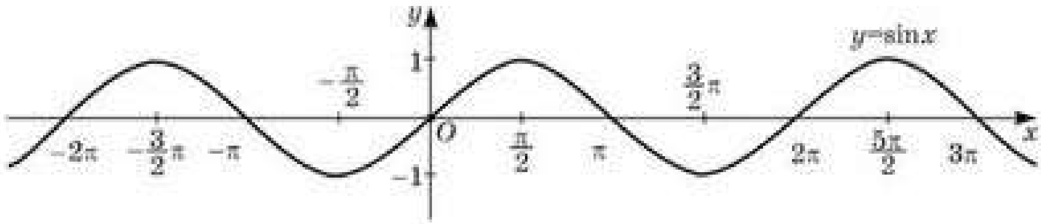


Рис. 28

5) на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in Z$ функция монотонно возрастает, на отрезках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in Z$ — монотонно убывает.

График функции $y = \sin x$ называют *синусоидой*.

II. Функция $y = \cos x$.

1) Область определения — множество всех действительных чисел, т. е. $x \in R$;

2) множество значений — $[-1; 1]$, т. е. $y \in [-1; 1]$;

3) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ — функция периодическая, наименьший положительный период равен 2π;

4) функция четная, так как $\cos(-x) = \cos x$.

Отметив точки $(0; 1)$, $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}; -\frac{1}{2}\right)$, $(\pi; -1)$ на координатной плоскости, построим график функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ (рис. 29).

$y = \cos x$ — четная функция, поэтому ее график симметричен относительно оси Oy. Используя это свойство, продолжим построение графика на отрезке $[-\pi; 0]$. Получим график функции $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 30). Построен график функции в промежутке одного периода.

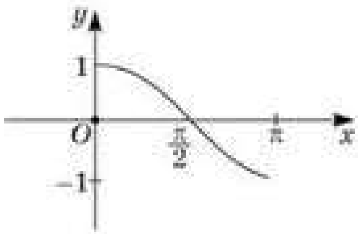


Рис. 29

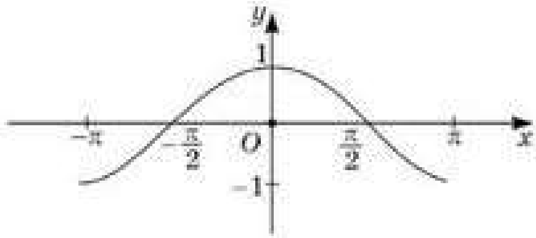


Рис. 30

Далее, учитывая периодичность данной функции, строим график на всей области определения функции (рис. 31).

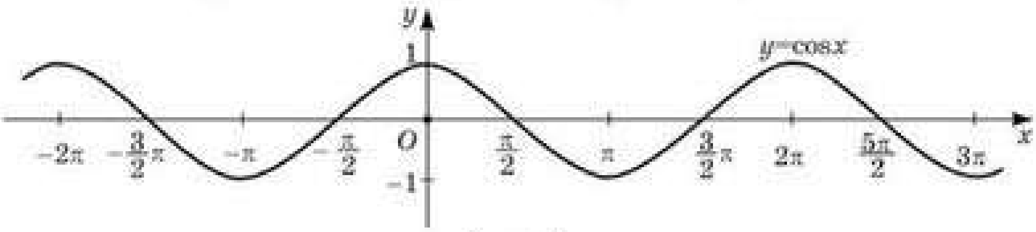


Рис. 31

5) на отрезках $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$ функция монотонно убывает, на отрезках $[-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n]$, $n \in Z$ — монотонно возрастает.

График функции $y = \cos x$ называют *косинусоидой* .

Известно, что $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Следовательно, график функции $y = \cos x$ также можно получить из график а функции $y = \sin x$, используя параллельный перенос вдоль оси Ox в отрицательном направлении на промежуток, равный $\frac{\pi}{2}$.

III. Функция $y = \operatorname{tg} x$.

1) Область определения — множество всех действительных чисел, кроме $\{x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \circ Z\}$, так как $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

2) множество значений — множество всех действительных чисел, т. е. $y \in R$;

3) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$ — функция периодическая, наименьший положительный период равен π;

4) функция нечетная, так как $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

Отметив точки $(0;\ 0)$, $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4};\ 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{3};\ \sqrt{3}\right)$ на координатной плоскости, построим график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $[0;\ \frac{\pi}{2})$ (рис. 32). Затем, учитывая нечетность функции, продолжим его на промежу тке $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$. Тогда получим график $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 33).

Получим график функции в промежутке одного периода. Учитывая периодичность данной функции, построим график на всей области определения функции (рис. 34);

5) на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$ функция монотонно возрастает.

График функции $y = \operatorname{tg} x$ называют *тангенсоидой* .

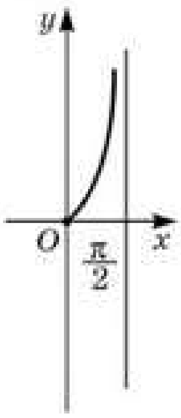


Рис. 32

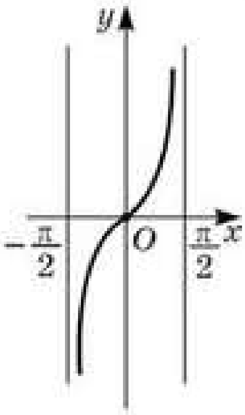


Рис. 33

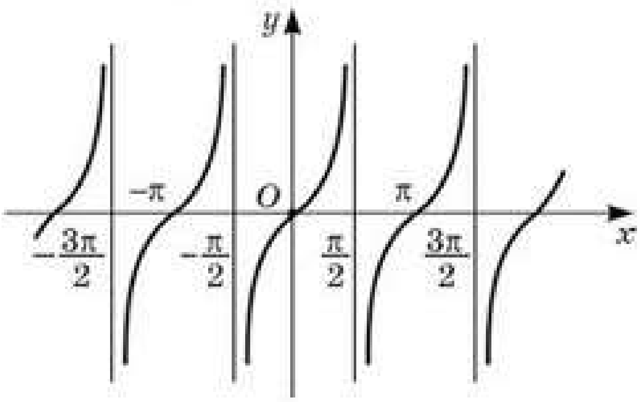


Рис. 34

IV. Функция $y = \operatorname{ctg} x$.

Используя свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$, самостоятельно постройте ее график.

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ называют *котангенсоидой*.

Рассмотрим примеры на построение графика тригонометрических функций с помощью простейших преобразований.

ПРИМЕР Построим график функции $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Сначала строим график функции $y = \operatorname{ctg} x$, затем данный график параллельно переносим вдоль оси Ox в отрицательном направлении на промежуток, равный $\frac{\pi}{6}$ (рис. 35).

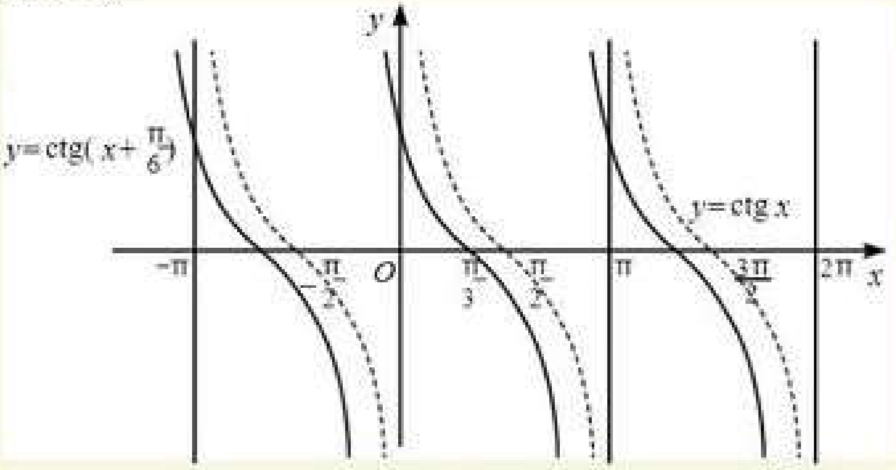


Рис. 35

ОБЪЯСНИТЕ

Как построили график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ (рис. 36)?

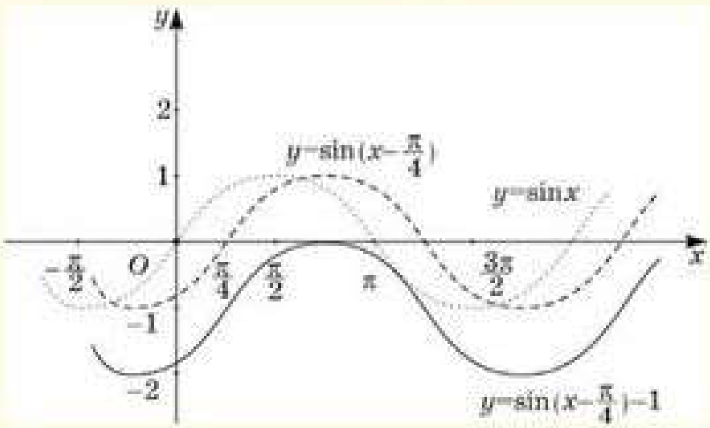


Рис. 36

1. Имеет ли кривая синусоида монотонно возрастающие или монотонно убывающие промежутки?
2. Почему значение функции $y = \cos x$ не превышает 1?

3. Какие еще свойства показывают числа 1 и −1, кроме того, что являются значениями функции $y = \sin x$?
4. Перечислите свойства функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$, показывающие их различие.
5. Почему множество всех действительных чисел не может быть областью определения функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$?

Упражнения

А

5.1. Выясните четность и нечетность функции:

а) $y = x\cos x$; б) $y = \dfrac{\cos 5x + 1}{x}$;

в) $y = \dfrac{\sin^2 x}{x^2 - 1}$; г) $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{4 - x^4}$.

5.2. Используя простейшие преобразования, постройте график функции $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$. Укажите отличие полученного графика от графика функции $y = \sin x$.

5.3. Постройте график функции $y = f(x)$:

а) $y = 1 + \cos x$; б) $y = \sin x - 3$;

в) $y = \operatorname{tg} x - 1$; г) $y = -2 + \operatorname{ctg} x$.

5.4. Постройте график функции:

а) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right)$.

В

5.5. Постройте график функции $y = f(x)$:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos 3x$; в) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

г) $y = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$. д) $y = 3 - \sin\dfrac{x}{2}$; е) $y = \cos 0{,}5x - 2$.

5.6. Найдите наименьший положительный период функции $y=f(x)$:

а) $f(x) = \sin 7x$; б) $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{2x}{3}$; в) $f(x) = \cos\dfrac{x}{6}$;

г) $f(x) = \operatorname{ctg} 8x$; д) $f(x) = \sin 0{,}25x$; е) $f(x) = \cos 2{,}5x$.

5.7. Постройте график функции, используя простейшие преобразования:

а) $y = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2$; б) $y = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{x}{2}\right) - 1$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, область определения, множество значений, свойства, понятие обратной функции и способ ее составления, свойства и графики тригонометрических функций.

§6. АРКСИНУС, АРККОСИНУС, АРКТАНГЕНС, АРККОТАНГЕНС

Ключевые понятия

Функция, обратная функция, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс

Вы ознакомитесь с обратными тригонометрическими функциями, научитесь находить значения арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса.

Заполните таблицу 6:

Таблица 6

Функция	Функция, обратная данной функции
$y = 2x$	
$y = x - 2$	
$y = -x + 3$	
$y = x^2$ (где $x \geq 0$)	

ОБЪЯСНИТЕ

Почему в четвертом задании дано дополнительное условие?

На основе определения обратной функции, признаков ее существования введем понятия обратных тригонометрических функций.

I. Функция, обратная функции $y = \sin x$.

Функция $y = \sin x$ определена, монотонно возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и принимает все свои значения $y \in [-1; 1]$. Следовательно, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ имеет обратную функцию.

Функцию, обратную функции $y = \sin x$, обозначают **$y = \arcsin$ ō** и читают **"арксинус икс"**. Тогда функция $y = \arcsin x$ определена на отрезке $[-1; 1]$ и является монотонно возрастающей, множество значений функции $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

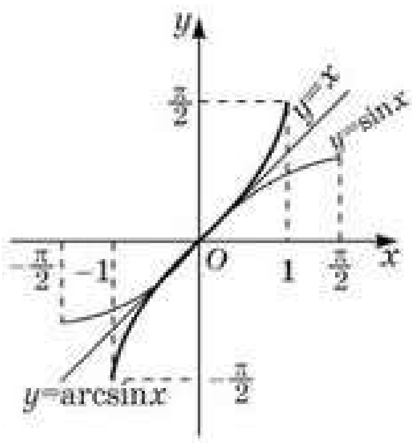


Рис. 37

График функции $y = \arcsin x$ симметричен графику функции $y = \sin x$ относительно прямой $y = x$. Прямая $y = x$ является осью симметрии (рис. 37).

Перечислим свойства обратной тригонометрической функции $y = \arcsin x$:

1) область определения — отрезок $[-1;\ 1]$;

2) множество значений — $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ — функция нечетная;

4) функция, монотонно возрастающая.

Для любого $x \in [-1;\ 1]$ выполняется равенство $\sin(\arcsin x) = x$, где $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $-1 \le \sin x \le 1$ — прямая функция; $y = \arcsin x$, $x \in [-1;\ 1]$, $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$ — обратная функция.

ПРИМЕР

1. Вычислим значение $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. По определению $y = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ означает $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, $y = \frac{\pi}{4}$, тогда $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

ОБЪЯСНИТЕ

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

II. *Функция, обратная функции* $y = \cos x$.

Функция $y = \cos x$ определена, монотонно убывает на отрезке $[0;\ \pi]$ и принимает все свои значения в промежутке $[-1;\ 1]$. Следовательно, на отрезке $[0;\ \pi]$ функция имеет обратную функцию.

Функцию, обратную функции $y = \cos x$, обозначают $\boldsymbol{y = \arccos x}$ и читают "**арккосинус икс**". Тогда функция $y = \arccos x$ определена на отрезке $[-1;\ 1]$ и является монотонно убывающей, множество значений изменяется на отрезке $[0;\ \pi]$.

График функции $y = \arccos x$ симметричен графику функции $y = \cos x$ относительно прямой $y = x$. Прямая $y = x$ является осью симметрии (рис. 38).

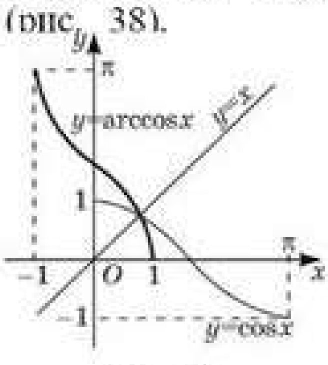


Рис. 38

Перечислим свойства обратной тригонометрической функции $y = \arccos x$:

1) область определения — $[-1;\ 1]$;

2) множество значений — $[0;\ \pi]$;

3) функция ни четная, ни нечетная;

4) функция, монотонно убывающая.

Для любого $x \in [-1;\ 1]$ выполняется равенство

$\cos(\arccos x) = x$, где $0 \leq \arccos x \leq \pi$.

$y = \cos x$, $x \in [0;\ \pi]$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ — прямая функция;

$y = \arccos x$, $x \in [-1;\ 1]$, $0 \leq \arccos x \leq \pi$ — обратная функция.

Для любого $x \in [-1;\ 1]$ верно равенство $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$, или

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x. \qquad (1)$$

Справедливость данного равенства можно видеть из графика функции $y = \arccos x$ (рис. 39).

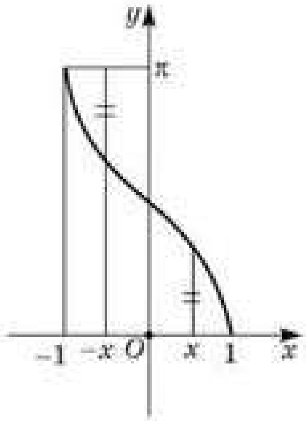


Рис. 39

ПРИМЕР

2. Вычислим значение $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Чтобы найти значение выражения $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, используем тождество (1). Тогда $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

ОБЪЯСНИТЕ

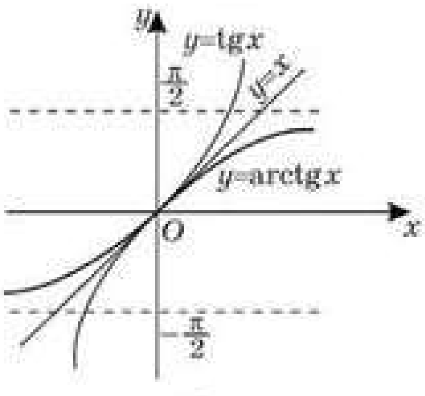
Почему $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$?

III. Функция, обратная функции $y = \operatorname{tg} x$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена, монотонно возрастает на интервале $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и принимает все свои значения $(-\infty; +\infty)$.

Следовательно, на интервале $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет обратную функцию.

Функцию, обратную функции $y = \operatorname{tg} x$, обозначают $y = \operatorname{arctg} x$ и читают **“арктангенс икс”**. Тогда функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена на множестве действительных чисел и является монотонно возрастающей, множество значений изменяется на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



а
Рис. 40

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен графику функции $y = \operatorname{tg} x$ относительно прямой $y = x$. Прямая $y = x$ является осью симметрии (рис. 40, *а*).

Перечислим свойства обратной тригонометрической функции $y = \operatorname{arctg} x$:

1) область определения — множество всех действительных чисел $x \in R$;

2) множество значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ — функция нечетная;

4) функция, монотонно возрастающая.

Для любого $x \in R$ выполняется равенство $x = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, где $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$.

ПРИМЕР **3.** Вычислим значение $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

Решение . $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ по определению $\operatorname{tg} y = \sqrt{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, $y = \frac{\pi}{3}$, тогда $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

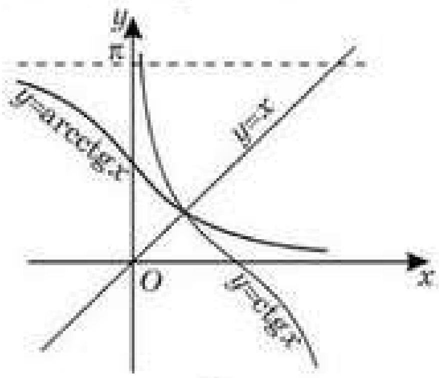
Ответ : $\frac{\pi}{3}$.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$?

IV. Функция, обратная функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена, монотонно убывает на интервале $(0; \pi)$ и принимает все свои значения на R. Следовательно, на отрезке функция $y = \operatorname{ctg} x$ имеет обратную функцию.



б

Рис. 40

Функцию, обратную функции $y = \operatorname{ctg} x$, обозначают $\boldsymbol{y = \operatorname{arcctg} \delta}$ и читают **"арккотангенс икс"**. Тогда функция $y = \operatorname{arcctg} x$ определена на множестве действительных чисел и является монотонно убывающей, множество значений изменяется на промежутке $(0; \pi)$.

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ симметричен графику функции $y = \operatorname{ctg} x$ относительно прямой $y = x$. Прямая $y = x$ является осью симметрии (рис. 40, *б*).

Перечислим свойства обратной тригонометрической функции $y = \operatorname{arcctg} x$:

1) область определения — множество всех действительных чисел, $x \in R$;

2) множество значений — интервал $(0; \pi)$;

3) функция ни нечетная, ни четная;

4) функция, монотонно убывающая.

Для любого $x \in R$ выполняется равенство $x = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$, где $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$. Для любого $x \in R$ верно равенство

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \qquad (2)$$

ПРИМЕР **4.** Вычислим значение $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

Решение. Используя тождество (2), имеем: $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{5\pi}{6}$.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$?

Обратные тригонометрические функции используются при упрощении выражений и нахождении значений выражений, решении уравнений, доказательстве тождеств.

ПРИМЕР **5.** Найдем $\cos(\arcsin x)$, если известно, что аргумент x изменяется на отрезке $[-1;\ 1]$.

Решение. Возьмем $\arcsin x = y$. Тогда $x = \sin y$ и $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Чтобы определить $\cos y$, испол ьзуем тождество $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$. Тогда $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$, где $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому $\cos y \geq 0$. Следовательно, $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, т. е. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Ответ: $\sqrt{1 - x^2}$.

ПРИМЕР **6.** Вычислим значение выражения $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

Решение. Сначала обозначим $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ через φ, т. е. $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = \varphi$. Тогда $\cos\varphi = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. Теперь вычислим $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Для этого используем формулу половин ного угла $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}$, тогда $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{8}{2} = 4$. Отсюда $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = 2$ и $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = -2$. Так как $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, то $\frac{\pi}{4} < \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$. На интер вале $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ имеем: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = 2$. Следовательно, $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = 2$.

Ответ: 2.

ЗАПОМНИТЕ

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, где $x \in [-1;\ 1]$.
2. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

?

1. Почему функцию, обратную функции $y = \sin x$, рассматриваем только на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?
2. Какие условия должны выполняться, чтобы существовала функция, обратная функции $y = \operatorname{ctg} x$?

Упражнения

A

6.1. Вычислите:

а) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; д) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; е) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

6.2. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg} 1$; б) $\arcsin(-1) - \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

в) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg} \sqrt{3}$; г) $\arcsin 1 + \operatorname{arcctg} \sqrt{3}$.

6.3. Сравните:

а) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arcsin \frac{1}{2}$ и $\operatorname{arctg} 1$;

в) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$; г) $\operatorname{arcctg}(-1)$ и $\operatorname{arctg}(-1)$.

6.4. Найдите значение выражения:

а) $\cos \left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; б) $\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right)\right)$;

в) $\sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\cos \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6.5. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{arcctg} 1 - \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{arcctg} \sqrt{3}$;

в) $\arcsin (-1) - \frac{3}{2} \arccos \frac{1}{2} + 3 \operatorname{arcctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

г) $-4 \cdot \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 8 \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 15 \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

B

Вычислите (6.6—6.7) :

6.6. а) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$; б) $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

в) $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$; г) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

6.7. а) $\operatorname{tg}\left(\pi+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$;

в) $\cos(\pi-\arcsin(-1))$; г) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\arccos(-1)\right)$.

Найдите значения выражений с помощью калькулятора или таблиц (6.8—6.9) :

6.8. а) $\arcsin 0,5005$; б) $\arccos 0,8091$.

6.9. а) $\operatorname{arctg} 3,5$; б) $\arccos 0,2184$.

6.10. Решите уравнение:

а) $\operatorname{arctg} 2x=\frac{\pi}{6}$; б) $\operatorname{arcctg}(-3x)=\frac{\pi}{4}$;

в) $2\arcsin(5x-1)=-\frac{\pi}{2}$; г) $3\arccos(2x+3)=\frac{5\pi}{2}$.

6.11. Имеет ли смысл выражение:

а) $\arcsin\sqrt{5}$; б) $\operatorname{arctg}\sqrt{7}$;

в) $\arccos\sqrt{3}$; г) $\operatorname{arcctg} 0$?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найдите область определения функции $y=\frac{x}{\cos x}$:

A) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; B) $x\neq 2\pi n,\ n\in Z$;

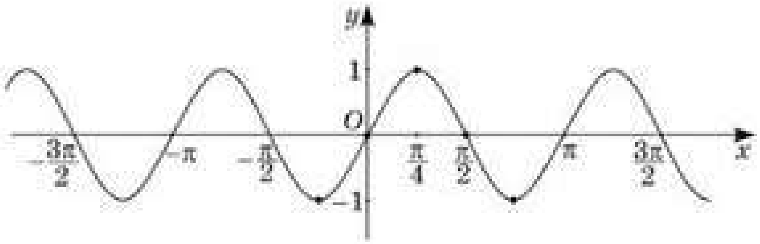
C) $x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; D) $x\neq\pi n,\ n\in Z$.

2. Найдите множество значений функции $y=3+2\cos x$:

A) $[-1;\ 3]$; B) $[-5;\ 0]$; C) $[1;\ 5]$; D) $[3;\ 5]$.

3. График какой функции изображен на рисунке:

A) $y=\sin 2x$; B) $y=\cos\frac{x}{2}$; C) $y=\cos 2x$; D) $y=\sin\frac{x}{2}$?



4. Найдите область определения функции $y = \sin 4x + \frac{1}{x-3}$:

A) $(-\infty;\ 3)$; B) $(-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$; C) $[0;\ 3]$; D) $(-3;\ +\infty)$.

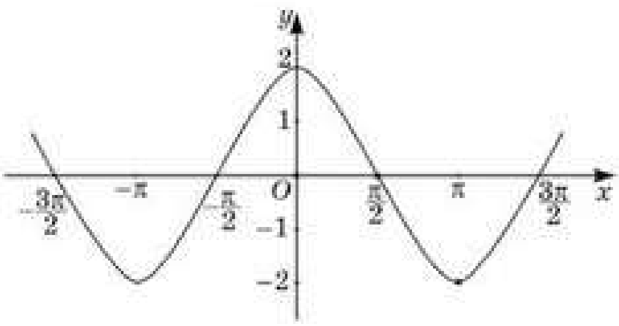
5. Найдите множество значений функции $y = 3\cos^2 x - 1$:

A) $[1;\ 2]$; B) $[-1;\ 3]$; C) $[-1;\ 2]$; D) $[0;\ 3]$.

6. Чему равно значение выражения $\arcsin\frac{1}{2} - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$:

A) $\frac{\pi}{3}$; B) $\frac{\pi}{6}$; C) $\frac{\pi}{4}$; D) 0?

7. График какой функции изображен на рисунке:



A. $y = \cos 2x$; B. $y = -2\cos x$;
C. $y = 2\cos x$; D. $y = 2\sin x$?

8. Вычислите значения выражения $\arcsin 1 + \arccos 0 - 2\operatorname{arctg} 0$:

A) 0; B) –1; C) 1; D) 2.

9. Сравните числа $\arcsin\frac{1}{2}$ и $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

A) $\arcsin\frac{1}{2} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; B) $\arcsin\frac{1}{2} > \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

C) $\arcsin\frac{1}{2} < \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; D) $\arcsin\frac{1}{2}$ m $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

10. Сколько простейших преобразований нужно выполнить, чтобы получить график функции $y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$, используя график функции $y = \cos x$:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5?

11. Чему равен квадрат значения выражения $\operatorname{arctg}0 - \arccos\frac{1}{2} - \arcsin\frac{1}{2} + \operatorname{arcctg}0$:

A) 2; B) 1; C) 4; D) 0?

Задания на математическую грамотность

12. Площадь квадрата равна 81 см^2. Найдите периметр второго квадрата, если длина его стороны составляет 25% от длины стороны первого квадрата:

A) 18; B) 10; C) 4; D) 9; E) 15.

13. 15 кг груш и 6 кг яблок стоят столько, сколько 5 кг груш и 18 кг яблок. Во сколько раз цена 1 кг груш больше цены 1 кг яблок:

A) в 2 раза; B) в 3 раза. C) в 2,5 раза;
D) в 1,5 раза; E) в 1,2 раза?

14. Найдите наибольшее трехзначное число, при делении которого на 25 остаток будет равен единице:

A) 976; B) 975. C) 974; D) 966; E) 964.

15. Числа в таблицах составлены по определенной закономерности. Найдите неизвестное число:

3	5
4	60

2	6
5	60

4	7
5	?

A) 150; B) 160. C) 140; D) 130; E) 170.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Определение, свойства, графики и формулы тригонометрических функций, обратные тригонометрические функции, тождественные преобразования .

3 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 7. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Ключевые понятия

Уравнение, тригонометрия, решение уравнения

Вы ознакомитесь с понятием *простейшие тригонометрические уравнения,* научитесь решать простейшие тригонометрические уравнения.

ВЫ ЗНАЕТЕ: Способы решения линейных, квадратных, дробно-рациональных уравнений, тригонометрические тождества и формулы, свойства тригонометрических функций, способы решения алгебраических уравнений.

Уравнение с неизвестной переменной, заданной в виде аргумента тригонометрической функции, называется ***тригонометрическим уравнением*** .

Например , $2\sin x = 1$; $\operatorname{ctg} x = 1$; $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -2$;
$3\cos x = 7 \cdot \sin x$; $4\sin^2 x + 2 \cdot \cos^2 x = 3\sin^2 x$;
$\cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x \cdot \cos 2x$ и др.

Уравнения видов

$$\sin x = a;\ \cos x = a;\ \operatorname{tg} x = a;\ \operatorname{ctg} x = a \qquad (1)$$

(*где a — действительное число*) *называются* ***простейшими тригонометрическими уравнениями.***

Решить тригонометрическое уравнение — значит найти значения аргумента, приводящие данное уравнение в верное тождество.

Решение тригонометрического уравнения имеет свои особенности:

1) если тригонометрическое уравнение имеет одно решение, то оно имеет бесконечное множество решений;

2) тригонометрическое уравнение нельзя делить на тригонометрическую функцию, являющуюся множителем обеих частей уравнения, так как при решении теряется хотя бы одно решение.

Любое тригонометрическое уравнение после тождественных преобразований приводится хотя бы к одному из простейших уравнений (1).

Рассмотрим простейшие тригонометрические уравнения.

I. *Решение уравнения вида* $\sin x = a$.

Область определения функции $y = \sin x$ — множество всех действительных чисел, т. е. $x \in R$. Множество значений — отрезок $[-1; 1]$, т. е. $|\sin x| \le 1$ — функция ограниченная, поэтому $\sin x = a$ имеет решения только при выполнении условия $|a| \le 1$. Если же число a по модулю больше единицы, т. е. $|a| > 1$, то уравнение не имеет решения.

Теперь рассмотрим решение уравнения $\sin x = a$. Для этого в одной координатной плоскости построим графики функций $y = \sin x$ и $y = a$ (рис. 41).

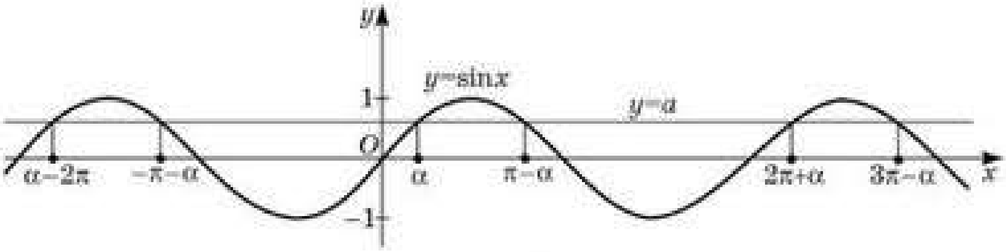


Рис. 41

Синусоида пересекается с прямой $y = a$, параллельной оси абсцисс, в бесконечном множестве точек. Абсциссы точек пересечения являются решениями уравнения $\sin x = a$. Так как функция $\sin x$ периодическая и ее наименьший положительный период равен 2π, то достаточно найти решения на промежутке $[0; 2\pi]$, равном одному периоду. При изменении аргумента на указанном отрезке абсциссы точек пересечения равны: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \pi - \alpha$. Остальные решения определяются свойством периодичности.

Учитывая, что период функции $\sin x$ равен $2\pi k$, получим формулы решения уравнений:

$$x = \alpha + 2\pi k,\ k \in Z. \tag{2}$$

$$x = \pi - \alpha + 2\pi k,\ k \in Z. \tag{3}$$

Эти решения можно объединить в одну формулу:

$$x = (-1)^n \alpha + \pi n;\ n \in Z. \tag{4}$$

Найдем решения, записанные формулами (2) и (3) из формулы (4). Для этого возьмем $n = 2k$. Тогда из формулы (4) получим формулу (2):

$$x = (-1)^{2k}\alpha + 2\pi k = \alpha + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Пусть теперь $n = 2k + 1$. Тогда формула (4) примет вид

$$x = (-1)^{2k+1}\alpha + \pi(2k + 1) = -\alpha + 2\pi k + \pi = \pi - \alpha + 2\pi k,\ k \in Z,$$

что является формулой (3).

Учитывая, что если $\sin \alpha = a$, то $\alpha = \arcsin a$, запишем формулу (4) в следующем виде:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n;\ n \in Z. \tag{5}$$

Формула (5) *является общим видом решения уравнения* $\sin x = a$. *Частные случаи решений уравнения* $\sin x = a$ даны в таблице 7.

Таблица 7

$\sin x = 1$	$\sin x = -1$	$\sin x = 0$
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = \pi n,\ n \in Z$

ПРИМЕР **1.** Решим уравнение $2\sin x = \sqrt{3}$.

Решение. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Используя формулу (5), получим $x = (-1)^n \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n,\ n \in Z$. Если учесть, что $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, имеем $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$. Это решение в радианах, а решение в градусах имеет вид:

$$x = (-1)^n \cdot 60° + 180° \cdot n,\ \ n \in Z.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$ или $(-1)^n \cdot 60° + 180° \cdot n,\ n \in Z$.

Решения тригонометрических уравнений можно записать и в радианах, и в градусах.

ОБЪЯСНИТЕ

Как решили уравнение $2\sin(2x - 1) = 1$?

Решение. $\sin(2x - 1) = \frac{1}{2}$; $2x - 1 = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$; $n \in Z$;

$2x = 1 + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in Z$, $x = \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n,\ n \in Z$.

Ответ: $\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n,\ n \in Z$.

II. *Решение уравнения* $\cos x = a$.

Область определения функции $y = \cos x$ — множество всех действительных чисел, т. е. $x \in R$. Множество значений — отрезок $[-1;\ 1]$, т. е. $|\cos x| \leq 1$ — функция ограниченная, поэтому при $|a| > 1$ уравнение $\cos x = a$ не имеет решения. Следовательно, число a должно удовлетворять условию $|a| \leq 1$. Теперь рассмотрим решение уравнения при $\cos x = a$. Для этого в одной координатной плоскости построим графики функций $y = \cos x$ и $y = a$ (рис. 42).

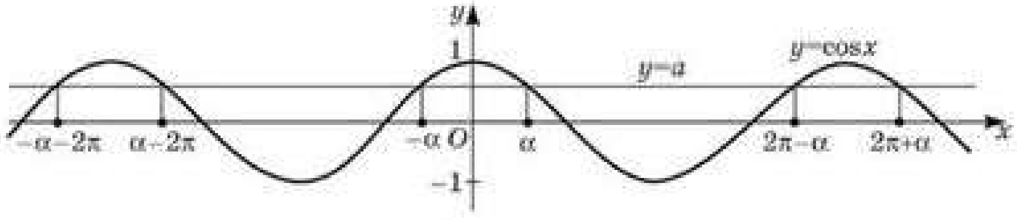


Рис. 42

Косинусоида пересекается с прямой $y = a$, параллельной оси абсцисс в бесконечном множестве точек. Абсциссы точек пересечения являются решениями уравнения $\cos x = a$. Так как функция периодическая и наименьший положительный период равен 2π, то достаточно найти решения в одном периоде. Остальные решения определяются свойством периодичности. При изменении аргумента на отрезке $[-\pi; \pi]$ абсциссы точек — противоположные числа, т. е. если одним из решений уравнения является число α, то вторым решением будет $-\alpha$.

Учитывая, что период функции $\cos x$ равен $2\pi k$, получаем формулы для записи всех решений уравнений:

$$x = \alpha + 2\pi n,\ n \in Z; \qquad (6)$$

$$x = -\alpha + 2\pi n,\ n \in Z. \qquad (7)$$

Формулы (6) и (7) можно объединить в одну формулу:

$$x = \pm\alpha + 2\pi n;\ n \in Z. \qquad (8)$$

Учитывая, что если $\cos\alpha = a$, то $\alpha = \arccos a$, формулу (8) запишем в следующем виде:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n;\ n \in Z. \qquad (9)$$

Формула (9) *является общим видом решения уравнения* $\cos x = a$. *Частные случаи решений уравнения* $\cos x = a$ даны в таблице 8:

Таблица 8

$\cos x = 1$	$\cos x = -1$	$\cos x = 0$
$x = 2\pi n,\ n \in Z$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2}\ \pi n,\ n \in Z$

ПРИМЕР

2. Решим уравнение $2\cos x = -1$.

Решение. $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$

$x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{2}) + 2\pi n;\ n \in Z;\ x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n;\ n \in Z;\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z.$

Ответ : $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z.$

ОБЪЯСНИТЕ

Почему уравнение $3\cos x = 4$ не имеет решения?

III. *Рассмотрим решение уравнений* $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$.

Множество значений функции $y = \operatorname{tg} x$ — множество всех действительных чисел, т. е. $\operatorname{tg} x \in R$, поэтому уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решение при любом значении a. Чтобы определить общий вид решения уравнения, построим в одной координатной плоскости графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = a$ (рис. 43).

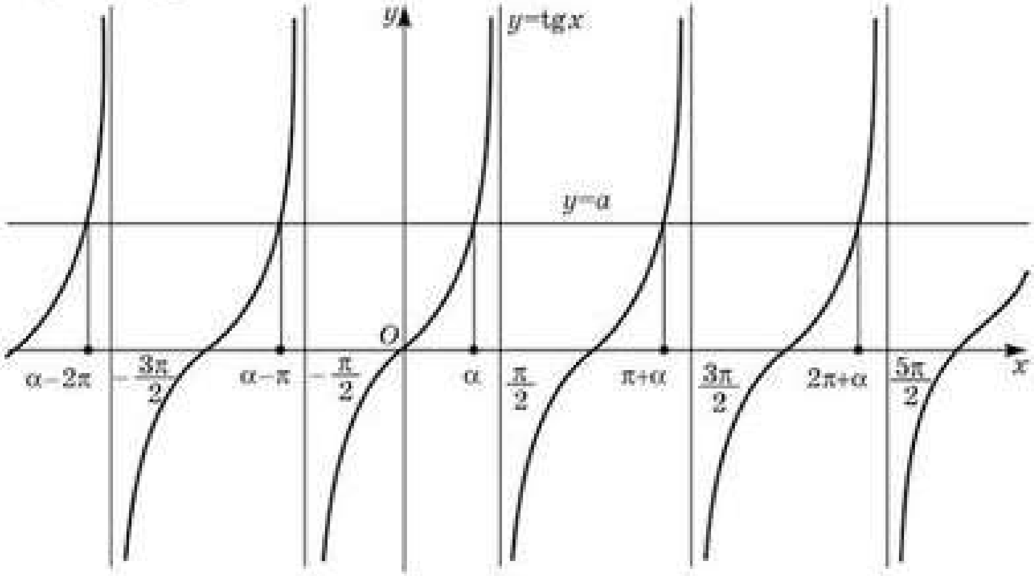


Рис. 43

Тангенсоида и прямая $y = a$ в промежутке одного периода пересекаются в одной точке. Абсцисса точки пересечения является решением уравнения $\operatorname{tg} x = a$. Учитывая периодичность функции, наименьший положительный период которой равен π, можно найти остальные решения. Решением уравне ния $\operatorname{tg} x = a$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ явля ется α, тогда решение уравнени я определяется формулой $x = \alpha + \pi n$; $n \in Z$. Если учесть, что $\operatorname{tg} \alpha = a$ и $\alpha = \operatorname{arctg} a$, то последняя формула примет вид:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z. \qquad (10)$$

Формула (10) *является общим видом решения уравнения* $\operatorname{tg} x = a$.

Таким же образом определяем, что общим решением уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ будет формула

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z. \qquad (11)$$

Частные случаи решений уравнений $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ даны в таблицах 9, 10:

Таблица 9

$\operatorname{tg} x = 1$	$\operatorname{tg} x = -1$	$\operatorname{tg} x = 0$
$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = \pi n,\ n \in Z$

Таблица 10

$\operatorname{ctg} x = 1$	$\operatorname{ctg} x = -1$	$\operatorname{ctg} x = 0$
$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

ПРИМЕР **3.** Решим уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Решение. $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n,\ n \in Z$. Если учесть, что $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, то получим $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

ОБЪЯСНИТЕ

Как решили уравнение $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 1$?

Решение. $\frac{x}{2} = \operatorname{arcctg} 1 + n\pi;\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

ПРИМЕР **4.** Найдем решение уравнения $2\sin x = \sqrt{3}$, принадлежащее промежутку $[-\pi; \pi]$.

Решение. Вначале найдем общее решение данного уравнения: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k,\ k \in Z$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$. Теперь, подставляя вместо n целые числа, найдем решения, принадлежащие данному промежутку. При $n = 0$ получаем $x = (-1)^0 \frac{\pi}{3} + \pi \cdot 0 = \frac{\pi}{3}$. При $n = 1$ имеем $-\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$; при $n = -1$ имеем $-\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{4\pi}{3}$ и т. д. Следовательно,

$\frac{\pi}{3} \in [-\pi; \pi]$;

$\frac{2\pi}{3} \in [-\pi; \pi]$;

$-\frac{4\pi}{3} \notin [-\pi; \pi]$.

Ответ: $\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}$.

?

1. Назовите отличия между тригонометрическими и алгебраическими уравнениями.
2. Почему тригонометрические уравнения имеют бесконечное множество решений? Встречаются ли такие случаи в алгебраических уравнениях? Объясните причину.
3. Какое преобразование используется в случае, когда в обеих частях тригонометрического уравнения дана одна и та же тригонометрическая функция в виде множителя?
4. Можно ли сказать, что уравнение $2\sin x + \cos x = 3$ является простейшим тригонометрическим уравнением?

Упражнения

А

Решите уравнения **(7.1—7.4):**

7.1. а) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\cos x = \frac{1}{2}$; г) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.2. а) $\operatorname{tg} x = 2$; б) $\operatorname{ctg} x = -3$;

в) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

7.3. а) $\sin \frac{x}{3} = 0$; б) $\cos 2x = 0$;

в) $5\cos 3x - 5 = 0$; г) $6\sin 5x - 6 = 0$.

7.4. а) $\operatorname{tg}(x - 2) = 0$; б) $\operatorname{ctg}(x + 3) = 0$;

в) $2 \cdot \sin 3x + 1 = 0$; г) $\cos \frac{x}{2} - 0{,}5 = 0$.

Найдите решения уравнений, принадлежащие данному промежутку **(7.5—7.6):**

7.5. а) $\sin \varphi = -1,\ \ \varphi \in [0;\ 2\pi]$; б) $\operatorname{ctg} \varphi = 1,\ \ \varphi \in [-\pi;\ \pi]$;

в) $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3},\ \ \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; г) $\cos \varphi = -1,\ \ \varphi \in [0;\ 2\pi]$.

7.6. а) $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ \varphi \in [-\pi;\ \pi]$; б) $2\cos \varphi = \sqrt{3},\ \varphi \in [-\pi;\ \pi]$;

в) $\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3},\ \ \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \ \varphi \in (0;\ \pi)$.

B

Решите уравнения **(7.7—7.12):**

7.7. а) $3\operatorname{tg} 2x - \sqrt{3} = 0$; б) $-\sqrt{3}\operatorname{ctg} 4x + 3 = 0$;

в) $2\sin 2x - \sqrt{2} = 0$; г) $-2\cos 2x + \sqrt{3} = 0$.

7.8. а) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$; б) $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$;

в) $\operatorname{tg}\left(\pi + \frac{x}{3}\right) - 1 = 0$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = \sqrt{3}$.

7.9. а) $3\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3} + 2\right) = -4$; б) $4\operatorname{ctg}\left(\frac{3x}{2} - 1\right) - 3 = 0$;

в) $2\sin\left(\frac{2x}{5} + 3\right) = \sqrt{3}$; г) $\sqrt{3}\cos\left(\frac{5x}{2} - 1\right) + 2 = 0$.

7.10. а) $\sin 3x \cdot \cos 3x = -\frac{1}{2}$; б) $\sin^2 2x - \cos^2 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\frac{2\operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = \sqrt{3}$; г) $2\sin^2 4x - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.11. а) $\sin 6x - \sin 4x = 0$; б) $\cos 5x + \cos 3x = 0$.

7.12. а) $\cos 7x - \cos 5x = 0$; б) $\sin 9x - \sin 13x = 0$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Способы решения уравнений и систем уравнений, виды преобразований выражений, тригонометрические тождества и формулы, общие решения простейших тригонометрических уравнений.

§8. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ключевые понятия

Уравнения, тригонометрическое уравнение, способы решения уравнения

Вы ознакомитесь с различными способами решения тригонометрических уравнений.

В предыдущем параграфе были даны решения простейших тригонометрических уравнений. Теперь рассмотрим, как решаются тригонометрические уравнения в общем случае. Как было отмечено выше, чтобы решить тригонометрическое уравнение, необходимо путем тождественных преобразований привести его к простейшему тригонометрическому уравнению.

В этом параграфе рассмотрим примеры различных видов тригонометрических уравнений и способы их решен ия.

Вы научитесь решать тригонометрические уравнения, содержащие одну тригонометрическую функцию.

ПРИМЕР

1. Решим уравнение $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$.

Решение. Данное уравнение является квадратным уравнением относительно функции $\cos x$. Применив замену $\cos x = u$, получим квадратное уравнение $2u^2 + 3u - 2 = 0$, корни которого $u_1 = -2$; $u_2 = \frac{1}{2}$.

Переходим к двум простейшим уравнениям относительно функции $\cos x$: $\cos x = -2$ и $\cos x = \frac{1}{2}$. Теперь рассмотрим решение каждого уравнения в отдельности:

$\cos x = -2$ не имеет решения, так как $|-2| > 1$.

$\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Вы научитесь решать тригонометрические уравнения с помощью тригонометрических формул.

ПРИМЕР **2.** Решим уравнение $\sin 2x = \frac{3}{2}\sin x$.

Решение. В уравнении дана одна функция с различными аргументами, поэтому, используя формулу $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, приведем данное уравнение к функциям с одинаковыми аргументами: $2\sin x\cos x = \frac{3}{2}\sin x$; $2\sin x\cos x - \frac{3}{2}\sin x = 0$. Функцию $\sin x$ как общий множитель вынесем за скобки: $\sin x(2\cos x - \frac{3}{2}) = 0$. Теперь переходим к двум простейшим уравнениям: $\sin x = 0$; $2\cos x - \frac{3}{2} = 0$ и находи м их решения.

Тогда $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$; $2\cos x = \frac{3}{2}$ или $\cos x = \frac{3}{4}$.

Отсюда $x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ : πn, $n \in Z$; $\pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

ПРИМЕР **3.** Решим уравнение $3\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 0$.

Решение. Из формулы $\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x = 1$ выразим $\operatorname{tg} x$ через $\operatorname{ctg} x$, т. е. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$, и подставим в данное уравнение: $3\frac{1}{\operatorname{ctg} x} - \operatorname{ctg} x = 0$, $3 - \operatorname{ctg}^2 x = 0$, $\operatorname{ctg}^2 x = 3$.

Тогда $\operatorname{ctg} x = \pm\sqrt{3}$, т. е. $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

$\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$, $x = \pi - \frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ : $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; $\frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

ПРИМЕР **4.** Решим уравнение $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

Решение. Чтобы решить данное уравнение, сгруппируем слагаемые следующим образом: $(\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 0$. Теперь для выражения в скобке применим формулу и получим: $2\cos\frac{x-3x}{2}\cdot\cos\frac{x-3x}{2} + \cos 2x = 2\cos 2x \times \cos(-x) + \cos 2x = 0$; $\cos 2x\ (2\cos x + 1) = 0$; $\cos 2x = 0$ или $2\cos x + 1 = 0$.

$\cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$;

$2\cos x + 1 = 0$; $2\cos x = -1$; $\cos x = -\frac{1}{2}$;

$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k$ или $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ : $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

ПРИМЕР **5.** Решим уравнение $\cos 4x \cos 2x = \cos 5x \cos x$.

Решение. Используем формулу преобразования произведения косинусов разных аргументов в сумму и получим:

$\cos 4x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)$ и $\cos 5x \cos x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x)$.

Данное уравнен ие при мет следующий вид: $\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x)$;

$\cos 6x + \cos 2x - \cos 6x - \cos 4x = 0$, $\cos 2x - \cos 4x = 0$.

Теперь используем формулу преобразования разности косинусов в произведение и получим: $2\sin 3x \sin x = 0$.

Если $\sin 3x = 0$, то $3x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{3}n$, $n \in Z$. Если $\sin x = 0$, то $x = \pi k$, $k \in Z$.

Полученные два вида решений можно выразить через $x = \frac{\pi}{3}n$, $n \in Z$.

Ответ : $\frac{\pi}{3}n$, $n \in Z$.

! Вы научитесь решать однородные тригонометрические уравнения.

Однородным тригонометрическим уравнением *называется тригонометрическое уравнение, в котором показатели степени каждого слагаемого равны .*

ПРИМЕР **6.** Решим уравнение $10\sin^2 x = 1 + 3\cos^2 x$.

Решение . Заменим единицу основным тригонометрическим тождеством $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Тогда $10\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x + 3\cos^2 x$, или $9\sin^2 x - 4\cos^2 x = 0$.

В полученном уравнении показатель степени каждого слагаемого равен 2. Следовательно, уравнение является однородным уравнением второй степени. Чтобы решить это уравнение, можно обе части уравнения почленно разделить на $\cos^2 x \neq 0$, или $\sin^2 x \neq 0$.

Если разделим уравнение на $\cos^2 x \neq 0$, то получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$; если же разделим на $\sin^2 x \neq 0$, то получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{ctg} x$. Рассмотрим первый случай:

$$\frac{9\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{4\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;\ 9\operatorname{tg}^2 x - 4 = 0;$$

$(3\operatorname{tg} x - 2) \cdot (3\operatorname{tg} x + 2) = 0$;

$3\operatorname{tg} x - 2 = 0$; $3\operatorname{tg} x + 2 = 0$.

Тогда $3\operatorname{tg} x = 2$; $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$, $x_1 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k$, $k \in Z$;

$3\operatorname{tg} x = -2$; $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}$, $x_2 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi n$, $n \in Z$.

Учитывая, что $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, получим $x_2 = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ : $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k$, $k \in Z$; $-\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

1. Почему тригонометрические уравнения имеют бесконечное множество решений?
2. Чем отличается решение тригонометрических уравнений от решений алгебраических уравнений?

Упражнения

А

Решите уравнения **(8.1—8.4):**

8.1. а) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$; б) $2\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$; в) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; г) $6\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$.

8.2. а) $3\cos^2 x + 10\cos x + 3 = 0$; б) $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$; в) $2 + \cos^2 x = 2\sin x$; г) $3 - 3\cos x = 2\sin^2 x$.

8.3. а) $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 4$; б) $\operatorname{tg} x - 4\operatorname{ctg} x = 3$; в) $\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$; г) $\operatorname{ctg}^2 x - 3 = 0$.

8.4. а) $\cos 7x + \cos x = 0$; б) $\sin 7x - \sin x = 0$; в) $\sin^2 x + \sin 2x = 1$; г) $\cos^2 x - \sin 2x = 1$.

Найдите корни уравнений **(8.5—8.6):**

8.5. а) $3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 2\cos^2 x$;
б) $2\cos^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0$.

8.6. а) $9\sin x \cos x - 7\cos^2 x = 2\sin^2 x$;
б) $2\sin^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x$.

В

Решите уравнения **(8.7—8.12):**

8.7. а) $5\sin^2 x + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 4$; б) $6\cos^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 7$.

8.8. а) $4\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 3$; б) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos x - 1$.

8.9. а) $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$; б) $\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$.

8.10. а) $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x$; б) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\operatorname{ctg} x = 2$; в) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1$; г) $3\sin 2x + \cos 2x = 2\cos^2 x$; д) $\cos^2 x + 4\sin^2 x = 2\sin 2x$.

8.11. а) $6\sin^2 x = 4 + \sin 2x$; б) $3\sin 2x + 8\cos^2 x = 7$.

8.12. а) $\sin 2x \cdot \cos 4x = \sin 7x \cdot \sin 9x$;
б) $\cos 10x \cdot \cos 7x - \cos 2x \cdot \cos 15x = 0$;
в) $\sin 5x \cdot \sin 3x + \cos 7x \cdot \cos x = 0$;

г) $\cos x \cdot \sin 5x = \cos 2x \cdot \sin 4x$;
д) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;
е) $\sin 3x \cdot \sin^2 x = \sin 3x \cdot \cos^2 x$.

Найдите корни уравнений **(8.13—8.14):**

8.13. а) $2\sin^2 2x + 3\cos^2 2x = 5\sin 2x \cdot \cos 2x$;
б) $3\sin^2 2x - \sin 2x \cdot \cos 2x - 4\cos^2 2x = 0$.

8.14. а) $3\sin^2 \frac{x}{3} + 2\cos^2 \frac{x}{3} - 7\sin \frac{x}{3} \cdot \cos \frac{x}{3} = 0$;
б) $2\cos^2 3x + \sin^2 3x - 3\sin 3x \cdot \cos 3x = 0$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Тригонометрические функции, область определения, множество значений, свойства и графики, тригонометрические формулы, обратные тригонометрические формулы.

§9. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Ключевые понятия

Неравенства, тригонометрическое неравенство, график функции

Вы усвоите понятие *тригонометрическое неравенство* и научитесь решать тригонометрические неравенства.

Вы рассмотрели решение тригонометрических уравнений и убедились, что любое тригонометрическое уравнение путем преобразований приводится к простейшим тригонометрическим уравнениям.

Решение тригонометрических неравенств так же, как и решение тригонометрических уравнений, сводится к решению простейших тригонометрических неравенств. Так, любое тригонометрическое неравенство с помощью тождественных преобразований приводится к одному из следующих видов неравенств:

$$\begin{aligned}
&\sin x \leq a;\ \sin x \geq a;\ \sin x < a;\ \sin x > a;\\
&\cos x \leq a;\ \cos x \geq a;\ \cos x < a;\ \cos x > a;\\
&\operatorname{tg} x \leq a;\ \operatorname{tg} x \geq a;\ \operatorname{tg} x < a;\ \operatorname{tg} x > a;\\
&\operatorname{ctg} x \leq a;\ \operatorname{ctg} x \geq a;\ \operatorname{ctg} x < a;\ \operatorname{ctg} x > a,
\end{aligned} \qquad (1)$$

где a — любое действительное число, т. е. $a \in R$.

Неравенства вида (1) называются ***простейшими тригонометрическими неравенствами.***

Простейшие тригонометрические неравенства решают графически: с помощью графика тригонометрической функции или с помощью единичной окружности.

АЛГОРИТМ Алгоритм решения тригонометрических неравенств с помощью графика тригонометрической функции:

1) привести тригонометрическое неравенство к одному из простейших неравенств вида (1);

2) построить в одной координатной плоскости график тригонометрической функции, данной в неравенстве, и провести прямую $y = a$;

3) отметить точки пересечения графиков функций;

4) определить части кривой, а затем основной промежуток изменения аргумента функции, удовлетворяющий данному тригонометрическому неравенству;

5) найти значения концов основного промежутка, учитывая значение соответствующей обратной тригонометрической функции;

6) используя периодичность рассматриваемой функции, определить общее решение неравенства.

ПРИМЕР **1.** Решим неравенство $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

Решение. Данное неравенство задано в виде простейшего тригонометрического неравенства, следовательно, решение начинаем со второго пункта алгоритма. В одной координатной плоскости построим график функции $y = \sin x$ и проведем прямую $y = \frac{1}{2}$.

Тогда прямая пересечет синусоиду в бесконечном множестве точек (рис. 44.1). Части синусоиды, удовлетворяющие данному неравенству, расположены выше прямой $y = \frac{1}{2}$. Концы первого отрезка, лежащего в правой части оси абсцисс, отметим через x_1 и x_2. Учитывая, что $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, вычислим значения $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Тогда $\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}$. Теперь, используя периодичность функции $y = \sin x$, запишем общий вид решения данного неравенства: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

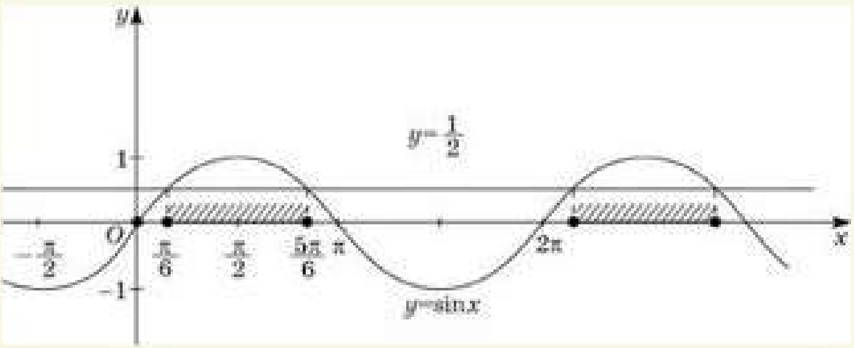


Рис. 44.1

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

АЛГОРИТМ Алгоритм решения тригонометрического неравенства с помощью единичной окружности:

1) построить единичную окружность;

2) отметить значение аркфункции аргумента правой части неравенства на дуге окружности;

3) провести прямую, проходящую через значение аркфункции параллельно оси Ox или оси Oy;

4) выделить дугу окружности, являющуюся множеством решений тригонометрических неравенств;

5) записать ответ.

ПРИМЕР **2.** Решим неравенство $\sin x \ge \frac{1}{2}$ с помощью единичной окружности.

$\alpha = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $b = \pi - \arcsin \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Значит, $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}$ (рис. 44.2).

Учитывая периодичность, имеем:

$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

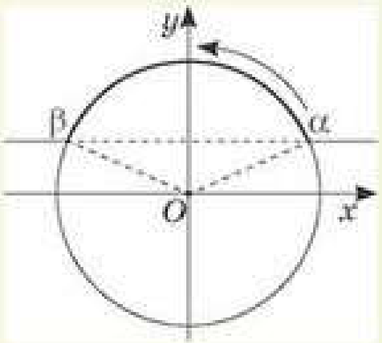


Рис. 44.2

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

ПРИМЕР **3.** Решим неравенство $\operatorname{tg} x < 1$.

Решение. Чтобы решить неравенство $\operatorname{tg} x < 1$, построим в одной координатной плоскости график функции $y = \operatorname{tg} x$ и прямую $y = 1$ (рис. 45). Тогда прямая $y = 1$ пересекается с тангенсоидой в бесконечном множестве точек (в каждом периоде — одна точка пересечения). Части тангенсоиды, удовлетворяющие данному неравенству, расположены ниже прямой $y = 1$.

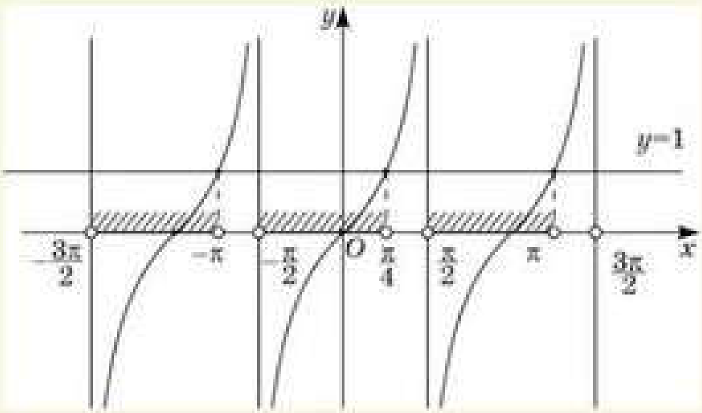


Рис. 45

Если учесть, что $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, то на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ абсцисса точки пересечения равна $x = \frac{\pi}{4}$. Основным промежутком данного неравенства будет интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$, т. е. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$. Теперь, учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, напишем все решения данного неравенства: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ : $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right),\ n \in Z$.

ПРИМЕР

4. Решим неравенство $\operatorname{ctg} x \mid \sqrt{3}$.

Решение. По алгоритму решения тригонометрических неравенств вначале построим в одной координатной плоскости график функции $y = \operatorname{ctg} x$ и прямую $y = \sqrt{3}$ (рис. 46). Прямая $y = \sqrt{3}$ пере секается с котангенсоидой в бесконечном множестве точек (в каждом периоде — одна точка пересечения). Части котангенсоиды, удовлетворяющие данному неравенству, расположены выше прямой $y = \sqrt{3}$. Основной промежуток, удовлетворяющий данному неравенству, будет $\left(0; \frac{\pi}{6}\right]$ или $0 < x \text{ m } \frac{\pi}{6}$, так как $\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$.

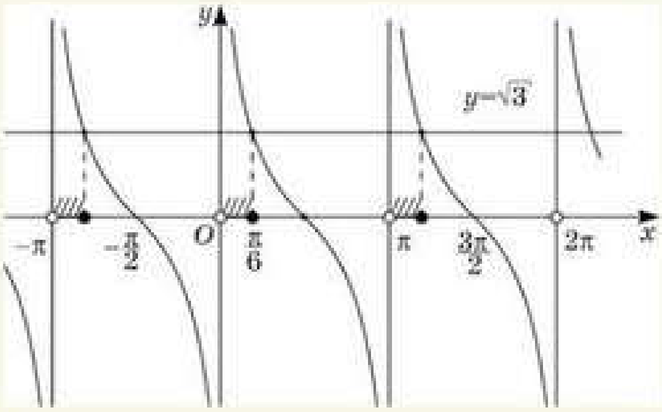


Рис. 46

Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{ctg} x$, напишем общее решение неравенства: $\pi n < x \text{ m } \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ : $\left(\pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right],\ n \in Z$.

ПРИМЕР

5. Решим неравенство $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \mid \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. В одной координатной плоскости построим график функции $y = \cos x$ и прямую $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Прямая пересечет косинусоиду в бесконечном множестве точек (рис. 47).

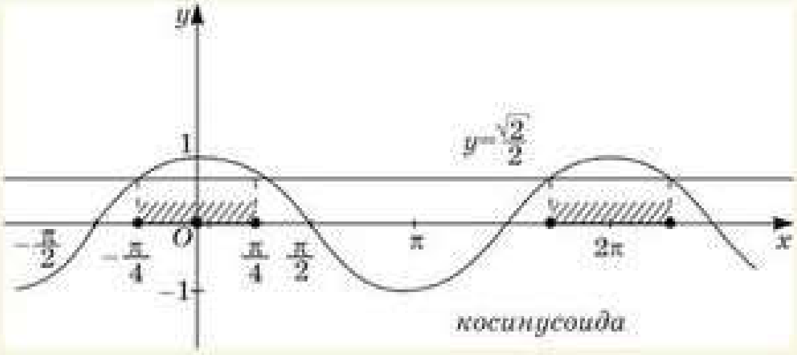


Рис. 47

Части косинусоиды, удовлетворяющие данному неравенству, расположены выше прямой $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Основной отрезок решения: $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$. Тогда $-\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{4}$. Если учесть периодичность функции $y=\cos x$, то получим следующее неравенство:

$$-\frac{\pi}{4}+2n\pi\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{4}+2n\pi,\quad n\in Z.$$

Теперь из каждой части неравенства вычтем $\frac{\pi}{6}$:

$$-\frac{5\pi}{12}+2\pi n\le x\le\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ : $\left[-\frac{5\pi}{12}+2\pi n;\ \frac{\pi}{12}+2\pi n\right]$, $n\in Z$.

1. Чем отличается решение тригонометрического неравенства от решения алгебраического неравенства?
2. Имеется ли сходство между решением тригонометрического неравенства и тригонометрического уравнения? Ответ обоснуйте.
3. Применяются ли при решении тригонометрических неравенств свойства тригонометрических функций?

Упражнения

A

Решите неравенства **(9.1—9.2):**

9.1. а) $\sin x>0$; б) $\cos x\le 0$; в) $\mathrm{tg}\,x\le 0$; г) $\mathrm{ctg}\,x>0$.

9.2. а) $\sin x\ge 0{,}5$; б) $2\cos x\ge-\sqrt{3}$; в) $\sin x\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-3\mathrm{tg}\,x\le\sqrt{3}$;

д) $\sin 3x>-\frac{1}{2}$; е) $\cos 2x<-\frac{1}{2}$; ж) $\mathrm{tg}\,5x\ge-1$; з) $\mathrm{ctg}\,4x\le-1$.

Найдите решения неравенств на заданном промежутке **(9.3—9.4)** :

9.3. а) $\cos 2x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-\pi; \pi]$; б) $\sin \frac{x}{3} < \frac{1}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

9.4. а) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \geq 1$, $x \in (0; \pi)$; б) $\operatorname{tg} 4x > -\sqrt{3}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

B

9.5. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{\cos \frac{x}{4} + 2}$; б) $y = \sqrt{\sin \frac{x}{3} - 2}$.

Решите неравенства **(9.6—9.8)** :

9.6. а) $\cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin x \cdot \sin \frac{\pi}{5} - \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{5} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin 5x \cdot \cos 5x \leq 0{,}25$;

г) $\sin^2 4x - \cos^2 4x > -0{,}5$.

9.7. а) $2\cos 2x > -1$; б) $2\sin 4x < -1$;

в) $-\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$; г) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geq 1$.

9.8. а) $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \leq 1$; б) $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leq \sqrt{2}$;

в) $3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > \sqrt{3}$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) < -1$.

9.9. Имеет ли решение неравенство:

а) $4\sin x - 2 \geq 0$;

б) $2\operatorname{tg} 2x + 2 > 0$;

в) $5\cos 3x + 2 \leq 7$?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}$:

A) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$;

B) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$;

C) $-\frac{\pi}{3} + \pi n \le x \le \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$;

D) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

2. Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$:

A) $2\pi n,\ n \in Z$; B) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

C) $-\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; D) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

3. Решите уравнение $\cos \frac{x}{2} = 0$:

A) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} n,\ n \in Z$; B) $\pi + 2\pi n,\ n \in Z$;

C) $\pi + 4\pi n,\ n \in Z$; D) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

4. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$:

A) $0 \le x < \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$; B) $0 < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;

C) $\pi n \le x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; D) $0 \le x \le \pi n,\ n \in Z$.

5. Найдите корни уравнения $\sqrt{2} \sin x - 1 = 0$:

A) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$; B) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

C) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$; D) $\frac{\pi}{2} + 3\pi n,\ n \in Z$.

6. Решите неравенство $\operatorname{tg} x \le \sqrt{3}$:

A) $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right],\ n \in Z$; B) $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z$;

C) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right],\ n \in Z$; D) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in Z$.

7. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = 7$:

A) $-\operatorname{arctg} 7 + \pi k,\ k \in Z$; B) $\operatorname{arcctg} 7 + \pi k,\ k \in Z$;

C) $\operatorname{arctg} 7$; D) $-\operatorname{arcctg} 7 + \pi k,\ k \in Z$.

8. Найдите абсциссу точки пересечения графика функции $y = \operatorname{tg} x$ с осью Oy:

A) 0; B) $\frac{\pi}{2},\ n \in Z$; C) $\pi n,\ n \in Z$; D) $-\frac{\pi}{2},\ n \in Z$.

9. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$:

A) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$; B) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$;

C) $\frac{7\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z$; D) $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

10. Сколько корней имеет уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

A) 4; B) 3; C) 2; D) 1?

11. Решите уравнение $4\sin^2 x = \cos^2 x$:

A) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; B) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

C) $\pm\mathrm{arctg}2 + \pi n,\ n \in Z$; D) $\pm\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

12. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 0$:

A) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; B) -1; C) 1; D) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

13. Решите двойное неравенство $0 \le \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$:

A) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in Z$;

B) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z$;

C) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in Z$;

D) $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z$.

14. Решите уравнение $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

A) $\pm\frac{x}{2} + 4\pi k,\ k \in Z$; B) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$;

C) $(-1)^k\frac{\pi}{4} + 4\pi k,\ k \in Z$; D) $\pm\frac{\pi}{8} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Задания на математическую грамотность

15. Какой процент составляют числа, делящиеся на 5, от чисел последовательности 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20:

A) 50%; B) 75%; C) 20%; D) 25%; E) 30%?

16. Из 400 деталей 15 деталей бракованные. Найдите вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бракованной:

A) $\frac{1}{20}$; B) $\frac{3}{300}$; C) $\frac{3}{80}$; D) $\frac{1}{80}$; E) $\frac{1}{100}$.

17. Какому промежутку принадлежат решения квадратного уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0$:

A) $(0;\ 5)$; B) $[2;\ 3]$; C) $(0;\ 5]$; D) $(1;\ 6)$; E) $(2;\ 3)$?

18. Числа в таблице составлены по определенной последовательности. Найдите неизвестное число:

5	10	30	80	?

A) 100; B) 200; C) 150; D) 240. E) 220.

ÈÑÒÎÐÈЧÅÑÊÈÅ ÑÂÅÄÅÍÈЯ

Íà ïîðîãå XVII â. â ðàçâèòèè òðèãîíîìåòðèè íàìåòèëîñü íîâîå íàïðàâ-ëåíèå — àíàëèòè+åñêîå. Åñëè äî ýòîãî ãëàâíîé çàäà+åé òðèãîíîìåòðèè ñ+èòàëîñü ðåøåíèå òðåóãîëüíèêîâ, âû+èñëåíèå ýëåìåíòîâ ãåîìåòðè+åñêèõ ôèãóð, à ðàçâèòèå ó+åíèÿ î òðèãîíîìåòðè+åñêèõ ôóíêöèÿõ ñòðîèëîñü íà ãåîìåòðè+åñêîé îñíîâå, òî â XVII—ÕIÕ ââ. òðèãîíîìåòðèÿ ïîñòåïåííî ñòàíîâèòñÿ îäíîé èç ãëàâ ìàòåìàòè+åñêîãî àíàëèçà. Îíà íàõîäèò øèðîêîå ïðèìåíåíèå â ìåõàíèêå, ôèçèêå è òåõíèêå, îñîáåííî ïðè èçó+åíèè êîëåáàòåëüíûõ äâèæåíèé è äðóãèõ ïåðèîäè-+åñêèõ ïðîöåññîâ. Î ñâîéñòâå ïåðèîäè+íîñòè òðèãîíîìåòðè+åñêèõ ôóíêöèé çíàë åùå Ô. Âèåò, ïåðâûå ìàòåìàòè+åñêèå èññëåäîâàíèÿ êîòîðîãî îòíîñèëèñü ê òðèãîíîìåòðèè. Øâåéöàðñêèé ìàòåìàòèê È. Áåðíóëëè ñòàë ïðèìåíÿòü ñèìâîëû òðèãîíîìåòðè+åñêèõ ôóíêöèé. È åñëè ðàçâèòèå àëãåáðàè+åñêîé ñèìâîëèêè, ââåäåíèå îòðèöàòåëüíûõ +èñåë è íàïðàâëåííûõ îòðåçêîâ ñïîñîáñòâîâàëè ðàñøèðåíèþ ïîíÿòèÿ óãëà è äóãè, òî ðàçâèòèå ó+åíèÿ î êîëåáàòåëüíûõ äâèæåíèÿõ, î çâóêîâûõ, ñâåòîâûõ è ýëåêòðîìàãíèòíûõ âîëíàõ ïðèâåëî ê òîìó, +òî îñíîâíûì ñîäåðæàíèåì òðèãîíîìåòðèè ñòàëî èçó+åíèå è îïèñàíèå êîëåáàòåëüíûõ ïðîöåññîâ. Èç ôèçèêè èçâåñòíî, +òî óðàâíåíèå ãàðìî-íè+åñêîãî êîëåáàíèÿ (íàïðèìåð, êîëåáàíèÿ ìàÿòíèêà, ïåðåìåííîãî ýëåêòðè+åñêîãî òîêà) èìååò âèä:

$$y = A\sin(\omega x + a).$$

Ãðàôèêàìè ãàðìîíè+åñêèõ êîëåáàíèé ÿâëÿþòñÿ ñèíóñîèäû, ïîýòîìó â ôèçèêå è òåõíèêå ñàìè ãàðìîíè+åñêèå êîëåáàíèÿ +àñòî íàçûâàþòñÿ *ñèíóñîèäàëüíûìè êîëåáàíèÿìè*.

Ñîâðåìåííûå îáîçíà+åíèÿ arcsin è arctg ïîÿâèëèñü â 1792 ã. â ðàáîòàõ âåíñêîãî ìàòåìàòèêà Г. М. Øåðôåðà è èçâåñòíîãî ôðàíöóçñêîãî ó+åíîãî Æ. Ë. Ëàãðàíæà, õîòÿ íåñêîëüêî ðàíåå èõ óæå ðàññìàòðèâàë Ä. Áåðíóëëè, óïîòðåáëÿâøèé èíóþ ñèìâîëèêó. Íî îáùåóïîòðåáèòåëüíûìè ýòè ñèìâîëû ñòàëè ëèøü â êîíöå XVIII ñòîëåòèÿ. Ïðèñòàâêà “àðê” ïðîèñõîäèò îò ëàò. *arcus* (*ëóê*, *äóãà*), +òî âïîëíå ñîãëàñóåòñÿ ñî ñìûñëîì ïîíÿòèÿ: arcsin x, íàïðèìåð, — ýòî óãîë (ìîæíî ñêàçàòü, è äóãà), ñèíóñ êîòîðîãî ðàâåí x.

Ðàñøèðåíèå ïðåäñòàâëåíèé î òðèãîíîìåòðè+åñêèõ ôóíêöèÿõ ïðèâåëî ê ïîñòðîåíèþ èõ íà íîâîé, àíàëèòè+åñêîé áàçå: òðèãîíîìåòðè+åñêèå ôóíêöèè ïðåäñòàâëÿþòñÿ íåçàâèñèìî îò íàóêè ãåîìåòðèè ïðè ïîìîùè ñòåïåííûõ ðÿäîâ è äðóãèõ ïîíÿòèé ìàòåìàòè+åñêîãî àíàëèçà.

Ðàçâèòèþ àíàëèòè+åñêîé òåîðèè òðèãîíîìåòðè+åñêèõ ôóíêöèé ñïîñîáñòâîâàëè È. Íüþòîí è Ë. Ýéëåð, ïîýòîìó îñíîâîïîëîæíèêîì ýòîé òåîðèè ñëåäóåò ñ+èòàòü Ë. Ýéëåðà. Îí ïðèäàë âñåé òðèãîíîìåòðèè ñîâðåìåííûé âèä. Äàëüíåéøåå ðàçâèòèå òåîðèè áûëî ïðîäîëæåíî â ÕIÕ â. Í. È. Ëîáà+åâñêèì è äðóãèìè ó+åíûìè.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Событие, элементарное событие, частота, относительная частота, вероятность, статистика, статистическая вероятность, классическое определение вероятности.

4 ВЕРОЯТНОСТЬ

§10. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Ключевые понятия

Вероятность, событие, виды события, свойства вероятности

Вы ознакомитесь с понятием *случайное событие*, видами случайного события; научитесь вычислять вероятность случайных событий, применяя свойства вероятностей.

Событием называется результат некоторого опыта.

Событие называется ***случайным***, если в данном опыте оно может наступить, но может и не наступить.

Обозначение случайного события: A, B, C, ...

Событие называется ***достоверным***, если в данном опыте оно обязательно наступит.

Событие называется ***невозможным***, если в данном опыте оно наступить не может.

Событие A называется *частным случаем события* B, если при наступлении A наступает и B.

События A и B называются *равными*, если каждое из них является частным случаем другого.

Равенство событий A и B записывают: $A = B$.

Событием, противоположным событию A, называется событие $\overline{A}$, которое наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.

События называются *совместными*, если наступление одного из них не исключает наступления другого.

События называются *несовместными*, если наступление одного из них исключает наступление другого.

В практике обычно проводят не одно, а несколько испытаний или опытов в одних и тех же условиях. Количество испытаний может быть большим. Число испытаний увеличивают, чтобы узнать, насколько часто появляется некоторое событие.

Вероятность события A обозначается: $P(A)$.

ВЫ ЗНАЕТЕ: Вероятность события A вычисляется по формуле:

$P(A) = \frac{m}{n}$, где m — число появлений события A при n испытаниях.

Например, вероятность события A — "выпадет "орел" и события B — "выпадет "решка" можно записать так: $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}5$, или $P(A) = 50\%$, $P(B) = 50\%$.

Свойства вероятности

Свойство 1. Вероятность появления достоверного события равна 1.

Свойство 2. Вероятность появления невозможного события равна 0.

Свойство 3. Вероятность наступления событий, образующих полную группу, равна 1.

Свойство 4. Вероятность наступления противоположного события равна разнице между единицей и вероятностью наступления события, т. е. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Важное достоинство классического определения вероятности события состоит в том, что с его помощью вероятность события можно определить, не прибегая к опыту, а исходя из логических рассуждений.

1. В каких случаях можно найти вероятность события без проведения испытаний?
2. Какие значения принимает вероятность события?

Упражнения

А

10.1. При бросании игрального кубика выпадает одна из цифр от 1 до 6. Найдите вероятность события:

1) выпадет цифра 3;
2) выпадет цифра 2 или 3;
3) выпадет цифра 1 или 5;
4) выпадет нечетная цифра.

10.2. В урне 3 белых и 7 красных шаров. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется:

а) белый; б) красный.

10.3. В урне 2 красных и 6 синих шаров. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется:

а) красный; б) синий.

10.4. В классе 30 учащихся, из которых 6 учатся на отлично, 16 — на хорошо. Какова вероятность того, что наугад вызванный к доске учащийся:

а) отличник или ударник; б) не является отличником?

В

10.5. Монета брошена два раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз монета выпадет со стороной "число"?

10.6. Брошены три монеты. Какова вероятность того, что монета ровно два раза выпадет со стороной "число"?

10.7. Случайным образом выбрали двузначное число. Найдите вероятность того, что оно:

а) оканчивается единицей; б) состоит из одинаковых цифр; в) не является квадратом целого числа.

10.8. Ербол задумал двузначное число. Найдите вероятность того, что задуманное число является кратным числам 2 и 5.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Испытание, событи е, случайное событие, частота случайного события, вероятность, статистика, статистические данные, генеральная совокупность, выбор ка, статистический вывод.

§11. ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Ключевые понятия

Вероятность события, правило сложения, правило умножения, полная группа

Вы ознакомитесь с понятиями *условная вероятность, сумма событий, произведение событий,* с теоремами сложения и умножения вероятностей; научитесь решать задачи с применением указанных теорем.

ВЫ ЗНАЕТЕ:

Вероят ность — это характеристика степени появления некоторого события при тех или иных определенных условиях.

Вспомним утверждения о том, что:

1) если событие невозможно, то вероятность его появления равна нулю;

2) если появление события абсолютно достоверно, то его вероятность равна 1;

3) если же некоторое событие возможно, но его появление не абсолютно достоверно, то вероятностью его появления будет число, заключенное между 0 и 1.

Например, "выпадение герба" и "выпадение надписи" при бросании монеты — несовместимые события.

***Суммой* $A + B$ *двух событий* A *и* B** *называют событие, состоящее в появлении события A или события B, или обоих вместе.*

В частности, если события A и B несовместимые, то $A + B$ — событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Аналогично определяется сумма нескольких событий.

Пусть события A и B — несовместимые. Обозначим вероятность появления события B через $P(B)$. Как найти вероятность $P(A + B)$ того, что наступит либо событие A, либо событие B? Ответ на этот вопрос дает теорема сложения.

Теорема 1 (*сложение вероятностей несовместимых событий*).

Вероятность появления одного из двух несовместимых событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

ПРИМЕР

1. В урне находятся 30 шариков: 15 — красного цвета, 10 — синего и 5 — зеленого. Найдем вероятность того, что наугад извлеченный шарик окажется не зеленым (событие A).

Решение. Событие A наступит, если извлеченный наугад шарик окажется либо красного цвета (событие B), либо синего цвета (событие C), т. е. событие A есть сумма несовместимых событий B и C. Поэтому, применяя теорему 1, получим:

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Ответ: $\frac{5}{6}$.

Система событий

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n \qquad (1)$$

называется ***полной группой событий*** *для данного испытания, если любым исходом его является одно и только одно событие этой группы.*

Иными словами, для полной группы событий (1) должны быть выполнены следующие условия:

1) событие A_i достоверно при любом i от 1 до n;

2) события A_i и A_j попарно несовместимы, т. е. $A_iA_j = 0$ $(i \neq j)$, где 0 — событие невозможное.

Простейшим примером полной группы событий является пара событий: A и $\overline{A}$ (где $\overline{A}$ — событие, противоположное событию A).

Теорема 2. *Сумма вероятностей полной группы событий равна единице*.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \qquad (2)$$

Произведением двух событий А и В *называют событие АВ, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий.*

Например, если в ящике содержатся детали, изготовленные заводами № 1 и № 2, A — появление стандартной детали, B — деталь изготовлена заводом № 1, то AB — появление стандартной детали завода № 1.

Пусть события A и B — независимые, причем вероятности этих событий $P(A)$ и $P(B)$ известны. Как найти вероятность совмещения событий A и B? Ответ на этот вопрос дает теорема умножения.

Теорема 3 (*умножение вероятностей независимых событий*).

Вероятность совместного появления двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Поясним содержание этой теоремы.

ПРИМЕР **2.** Если бросить монету и игральную кость, то какова вероятность того, что монета упадет гербом вверх и вместе с тем на игральной кости выпадет пятерка?

Решение. $\frac{1}{2}$ есть вероятность появления герба и $\frac{1}{6}$ есть вероятность появления на кости пяти очков. Вероятность совмещения этих двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Ответ: $\frac{1}{12}$.

Теорема умножения вероятностей распространяется и на случай, когда число событий больше двух.

ПРИМЕР **3.** Какова вероятность того, что при десятикратном бросании монеты герб выпадает 10 раз?

Решение. Выпадение герба или надписи при каждом бросании не зависит от результатов предыдущих бросаний, поэтому здесь идет речь о совмещении десяти независимых событий.

Вероятность появления герба при однократном бросании монеты равна $\frac{1}{2}$, поэтому искомая вероятность равна $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$, т. е. $\frac{1}{1024}$.

Здесь вероятность получилась очень маленькая. Это означает, что почти невозможно ожидать, что при десятикратном бросании монеты герб выпадет 10 раз.

Условной вероятностью $P_A(B)$ *называется вероятность появления события В, вычисленная в предположении, что событие А уже наступило.*

Пусть события A и B — зависимые, причем вероятности $P(A)$ и $P_A(B)$ известны. Как найти вероятность совмещения этих событий? Ответ на этот вопрос содержится в теореме умножения вероятностей зависимых событий.

Теорема 4 (*умножение вероятностей зависимых событий*).

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Эта теорема распространяется и на случай более двух зависимых событий. Например, для трех зависимых событий:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

Здесь символ $P_{AB}(C)$ означает вероятность появления события C, вычисленную в предположении, что события A и B уже произошли.

ПРИМЕР **4.** В учебных мастерских технического лицея изготавливаются детали на трех станках. Вероятность изготовления детали на первом станке равна 0,6. Вероятность появления годной детали на первом станке равна 0,8. Найдем вероятность того, что годная деталь изготовлена на первом станке.

Решение. Обозначим события: A — "деталь изготовлена на первом станке", B — "деталь годная". По условию примера имеем: $P(A) = 0,6$ и $P_A(B) = 0,8$. Тогда по теореме 4 получаем:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48.$$

Ответ: 0,48.

1. Чем отличается зависимое событие от независимого?
2. В чем сходство вычисления суммы вероятностей несовместимых событий и произведения вероятностей независимых событий?

Упражнения

А

11.1. Мишень состоит из трех концентрических кругов, образующих три зоны: круг (I) и два кольца (II и III). Вероятность того, что попадание будет в зонах I, II и III, равна, соответственно, 0,45; 0,30; 0,15. Какова вероятность того, что пуля попадет в мишень?

11.2. Вероятность того, что день будет ясным: $p = 0,75$. Найдите вероятность q того, что день будет облачным.

11.3. На заочное отделение университета поступают контрольные работы из городов A, B и C. Вероятность поступления из города A равна 0,6, из города B — 0,1. Найдите вероятность того, что очередная работа поступит из города C.

11.4. Подбросили две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков окажется больше пяти?

11.5. Два стрелка стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,9, для второго — 0,8. Найдите вероятность того, что: 1) оба стрелка попадут в цель; 2) хотя бы один стрелок попадет в цель.

B

11.6. Подбрасываются одновременно два кубика. Какова вероятность того, что одновременно выпадут две четверки ?

11.7. Вероятность того, что взятое наугад изделие фабрики является пригодным, равна $\frac{92}{100}$; вероятность того, что взятое наугад годное изделие является изделием первого сорта, равна $\frac{72}{100}$. Какова вероятность того, что взятое наугад изделие фабрики является изделием первого сорта?

11.8. 1) В урне находятся 2 белых, 3 красных и 5 синих, одинаковых по размеру, шаров. Какова вероятность, что шар, случайным образом извлеченный из урны, будет цветным (не белым)?
2) В урне находятся 7 белых и 3 черных шара. Какова вероятность извлечения из урны белого шара после удаления из нее одного шара, который является белым (событие B) или черным (событие C)?

11.9. В урне находятся 4 белых и 7 черных шаров. Вынимают последовательно два шара, не возвращая их обратно. Какова вероятность того, что первый шар будет белым, а второй — черным?

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Множество действительных чисел, функция, область определения, множество значений, график функции, окрестность точки.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. События, которые в результате испытания могут наступить одновременно, называются:
A) достоверными;
B) невозможными;
C) несовместимыми;
D) противоположными;
E) равновозможными.

2. События, которые в данном опыте наступят обязательно, называются:
A) достоверными;

B) невозможными;

C) несовместимыми;

D) противоположными;

E) равновозможными.

3. Если наступление одного события исключает наступление другого, то такие события называются:

A) достоверными;

B) невозможными;

C) несовместимыми;

D) противоположными;

E) равновозможными.

4. Вероятность появления невозможного события равна:

A) 1; B) 0; C) –1;

D) неположительному числу;

E) отрицательному числу.

5. В корзине лежат 3 белых и 12 красных шаров. Из корзины вынимается один шар. Вероятность того, что взятый шар окажется красным, равна:

A) 0,7; B) 0,2; C) 0,8 ; D) 0,75; E) 0,4.

6. В корзине лежат 3 белых и 12 красных шаров. Из корзины вынимается один шар. Вероятность того, что взятый шар окажется белым, равна:

A) 0,7; B) 0,2; C) 0,8; D) 0,75; E) 0,4.

7. В корзине лежат 9 желтых, 9 белых и 12 красных шаров. Из корзины вынимается один шар. Вероятность того, что взятый шар окажется не белым, равна:

A) 0,7; B) 0,2; C) 0,8; D) 0,75; E) 0,4.

8. Если бросить монету и кубик, то найдите вероятность того, что монета упадет гербом вверх и вместе с тем на кубике выпадет число, являющееся делителем числа 12:

A) $\frac{7}{6}$; B) $\frac{5}{6}$; C) 1; D) 0,75; E) 0,5.

9. Кубик бросают дважды. Какова вероятность того, что первым выпадет число 5, а вторым — четное число :

A) $\frac{7}{6}$; B) $\frac{1}{12}$; C) 1 ; D) 0,75 ; E) 0,5?

Задания на математическую грамотность

10. Каждое простейшее животное инфузория–туфелька размножается делением на 2 части. Сколько инфузорий было первоначально, если после четырехкратного деления их стало 96:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

11. 2 кг яблок и 5 кг груш стоят 3100 тг. Сколько стоят 20 кг груш и 8 кг яблок:

A) 12 000 тг; B) 9300 тг; C) 12 400 тг; D) 15 500 тг; E) 16 000 тг?

12. Какие из чисел 165; 175; 385 можно представить в виде произведения простых различных чисел, больших числа 3:

A) 165; 175; B) 175; 385; C) 165; D) 175; E) 385?

13. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 6; 9; 0, если цифры повторяются:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

14. Квадрат разделен на четыре равных квадрата, периметр которых равен 5 см. На сколько процентов периметр данного квадрата больше периметра меньшего квадрата:

A) 20%; B) 100%; C) 25%; D) 50%; E) 150%?

15. Имена пяти учащихся класса начинаются на букву “А”. Найдите вероятность того, что имя учащегося, вызванного к доске, начинается не на букву “А”, если в классе 35 учащихся:

A) $\frac{7}{6}$; B) $\frac{6}{7}$; C) 1; D) $\frac{1}{7}$; E) 0,5.

ПРОИЗВОДНАЯ 5

§ 12. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Ключевые понятия

Функция, предел функции, непрерывность функции, точка разрыва

Вы узнаете, что такое *предел функции в точке, непрерывность функции и точки разрыва, непрерывная и разрывная функции,* научитесь находить предел функции, овладеете навыками исследования функции на непрерывность.

В математическом анализе наряду с понятием функциональной зависимости одним из важных является понятие *предела функции*. Введем понятие предела функции посредством рассмотрения примеров.

ПРИМЕР

1. Определим предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к двум ($x \to 2$): а) $f(x) = 1 + x^2$; б) $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$.

Решение. Точка $x = 2$ принадлежит области определения данных функций, поэтому их пределы в точке равны значениям этих функций в этой точке $x = 2$: а) $f(2) = 1 + 2^2 = 5$; б) $f(2) = \dfrac{2+2}{2} = 2$.

Таким образом, если число, к которому стремится аргумент x, принадлежит области определения функции, то значение функции в этой точке равняется ее пределу в этой точке.

Это утверждение записывают в следующем виде:

$$\text{если } x \to x_0, \text{ то } f(x) \to f(x_0).$$

Встречаются случаи, когда необходимо найти предел функции в точках, которые не принадлежат области определения функции. В таких случаях пишут: при $x \to x_0$, $f(x) \to a$, где a — действительное число. Но может быть и так, что число a невозможно найти, тогда говорят, что функция не имеет предела в точке $x = x_0$.

$f(x_0)$ и a называются *предельными значениями функции в точке* x_0.

Число b называется ***пределом функции*** *$f(x)$ при $x \to a$ (читается: "при x стремящемся к a"), если по мере того как x приближается к a — будь то справа или слева, — значение $f(x)$ стремится к b. Предел, т. е. число b еще называют* ***предельным значением функции***.

Число b называется ***пределом функции*** *$f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого наперед заданного положительного числа ε можно найти положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. ($f(x) \to b$ при $x \to a$).*

ПРИМЕР **2.** Найдем предельные значения функции: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ при $x \to 2$.

Решение. Точка $x = 2$ не принадлежит области определения данных функций, но, применяя преобразование, можно вычислить предельные значения данных функций при $x \to 2$:

а) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$, отсюда $f(2) = 2 + 2 = 4$.

ОБЪЯСНИТЕ

Как нашли значение функции при $x \to 2$?

$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x + 2}$; $f(2) = \frac{2 + 3}{2 + 2} = \frac{5}{4}$.

Если функция $f(x)$ определена в точке x_0 и предельное значение функции при $x \to x_0$ равно ее значению в этой точке, то $f(x)$ называется ***непрерывной функцией в точке*** x_0.

Точка x_0, данная в определении, называется *точкой непрерывности*.

Из определения непрерывной функции можно выделить три момента, а именно:

1) функция должна быть определена в точке x_0;

2) должен существовать предел функции в точке x_0;

3) этот предел должен быть равен значению функции в точке x_0; при $x \to x_0$ имеем $f(x) \to f(x_0)$.

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то функция в точке x_0 не является непрерывной. В этом случае точка x_0 является ***точкой разрыва***, *а функция называется* ***разрывной***.

Если функция $y = f(x)$ непрерывная, то ее график будет сплошной кривой.

Свойства непрерывных функций в точке: если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то сумма $f(x) + \varphi(x)$, произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ и частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ $(\varphi(x_0) \neq 0)$ этих функций будут непрерывными функциями в точке x_0.

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке множества (отрезка), то она называется ***непрерывной функцией на данном множестве (отрезке)***.

Свойства непрерывных функций на отрезке:

1) *если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$ и не обращается в нуль, то она сохраняет свой знак на данном отрезке;*

2) *если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, то:* а) *она является ограниченной функцией на отрезке;* б) *принимает свои наибольшее и*

наименьшее значения на данном отрезке и выполняется неравенство $m \le f(x) \le M$, *где* m *— наименьшее значение функции, а* M *— наибольшее значение функции* ;

3) *если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и на концах отрезка принимает значения с разными знаками, то она обращается в нуль хотя бы в одной точке отрезка* $[a; b]$.

ПРИМЕР

3. Возьмем функци ю $f(x) = \frac{1}{x}$. Вам известно, что это обратно пропорциональная зависимость . Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел, за исключением числа нуль. Следовательно, точка $x = 0$ является точкой разрыва функции, т. е. функция будет разрывной. Данное заключение можно подтвердить графиком функции (рис. 48).

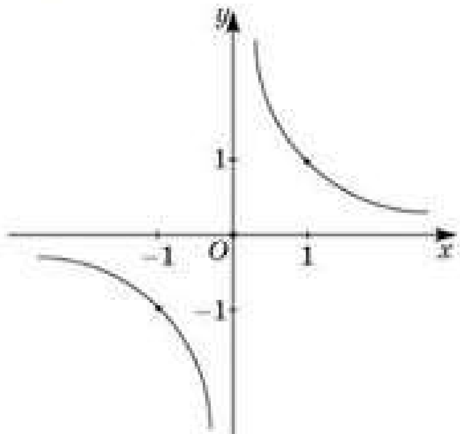


Рис. 48

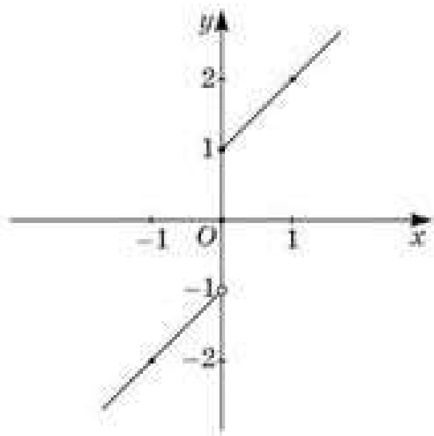


Рис. 49

ПРИМЕР

4. Построим график функции $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ если } x \ge 0, \\ x - 1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

Определим, является ли функция в точке $x = 0$ непрерывной.

Решение . Функция задана двумя формулами: $f(x) = x + 1$ при $x \ge 0$ и $f(x) = x - 1$ при $x < 0$.

Графиком этих функций является прямая, поэтому определим координаты двух точек для функции $f(x) = x + 1$ при $x \ge 0$ и для функции $f(x) = x - 1$ при $x < 0$. Тогда в первом случае строим прямую, проходящую через точки (0; 1), (1; 2), а во втором случае — прямую, проходящую через точки (–1; –2), (–0,5; –1,5) (рис. 49). График функции $f(x)$ не будет сплошной линией. Следовательно, в точке $x = 0$ функция не является непрерывной.

?

1. Имеются ли отличия между непрерывностью в точке и непрерывностью на отрезке?
2. Верен ли вывод, что если функция $f(x)$ в точке x_0 разрывна, тогда в этой точке функция не имеет предела?
3. Если функция $f(x)$ в точке x_0 непрерывна, а функция $g(x)$ в точке x_0 разрывна, то что можно сказать о сумме, произведении, частном этих функций?

Упражнения

A

12.1. Найдите предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$:

а) $f(x) = 3x + 2,\ x \to 2$; б) $f(x) = 4x^3 - 3x,\ x \to -1$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3},\ x \to -3$; г) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4},\ x \to 2$.

12.2. Определите значение предела функции $y = f(x)$ в точках $x_0 = -2$; $x_0 = -0{,}5$:

а) $f(x) = 4x - 5$; б) $f(x) = 5x - 2$.

12.3. Постройте график функции $y = f(x)$. Выясните, является ли данная функция в точке x_0 непрерывной:

а) $y = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0, \\ x+1, \text{ если } x < 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$; б) $y = \begin{cases} x+1, \text{если } x \geq 0, \\ -x \text{ если } x < 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

12.4. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на непрерывность:

а) $y = \dfrac{6}{3 - x}$; б) $y = \dfrac{x}{2{,}5 + x}$; в) $y = \dfrac{5}{x(x + 1)}$; г) $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$.

12.5. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на непрерывность:

а) $y = \dfrac{5}{\cos x}$; б) $y = -\dfrac{2}{\sin x}$.

B

12.6. Найдите предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$:

а) $f(x) = \dfrac{2x + x^2}{x - 2},\ x \to 2$; б) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x + 1},\ x \to -1$;

в) $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x - 3},\ x \to 3$; г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^4 - 16},\ x \to 2$;

д) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 5x + 4},\ x \to 1$; е) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x - 4}{3x^2 - 7x - 6},\ x \to -\dfrac{2}{3}$;

ж) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4},\ x \to 4$; з) $f(x) = \dfrac{4x - x^3}{2x^2 + 3x - 2},\ x \to -2$.

12.7. Постройте график функции $y = f(x)$. Выясните, является ли функция в точке x_0 непрерывной:

а) $f(x) = \begin{cases} -3, \text{ если } x < 0, \\ x, \text{ если } x \geq 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } x < 0, \\ x^2 + 2, \text{ если } x \geq 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ если } 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ x - 4, \text{ если } x \ \mathrm{m}\ 0; \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, \text{ если } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{4}, \\ x - \dfrac{\pi}{4}, \text{ если } x \geq \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

12.8. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на непрерывность:

а) $y = \dfrac{25}{x^2 + 25}$; б) $y = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 4}$; в) $y = \dfrac{4x}{x^2 + x}$; г) $y = \dfrac{x}{1 - \cos x}$.

12.9. Приведите пример функции, являющейся непрерывной:

а) в каждой точке числовой прямой;

б) во всех точках, кроме $x = 0$;

в) во всех точках, кроме $x = 0$ и $x = 1$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Аргумент, функция, область определения функции, предел функции в точке, непрерывность функции в точке.

§ 13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Ключевые понятия

Функция, производная, приращение, дифференциал

Вы узнаете *определение производной*, научитесь находить производную, используя определение производной.

Рассмотрение функции как математической модели простейших движений, процессов и т. д. — это не только рассмотрение значения какой-либо величины, но и необходимость исследования их изменений.

Пусть $y = f(x)$ — непрерывная функция, а точки x и x_1 — два значения аргумента из области ее определения.

> *Разность значений аргумента $x_1 - x$ называют* ***приращением аргумента*** *в точке x.*

Приращение аргумента обозначается через Δx и этот символ читается "дельта икс".

Возьмем произвольную точку x из области определения функции $y = f(x)$. Допустим, аргумент x принимает приращение Δx, после чего значение аргумента будет равным $x + \Delta x$. Знак приращения может быть и положительным, и отрицательным. Если $\Delta x > 0$, то точка $x + \Delta x$ находится в правой части от x; если $\Delta x < 0$, то точка $x + \Delta x$ находится в левой части от x (рис. 50):

Рис. 50

Тогда приращение аргумента можно написать следующим равенством:

$$\Delta x = (x + \Delta x) - x. \qquad (1)$$

Следовательно, *приращение аргумента* — это разность его значений в двух точках.

Если аргумент x принимает приращение , то непрерывная функция $y = f(x)$ принимает соответствующее приращение . Это ***приращение функции*** *обозначается символом Δy и определяется равенством* $\Delta y = (y + \Delta y) - y$, или

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{2}$$

Таким образом, *приращение функции* равно разности ее значений в двух точках.

ПРИМЕР **1.** Найдем приращение функции $y = x^3$ при изменении аргумента от значения x до значения $(x + \Delta x)$.

Решение . Используя формулу (2), получим $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3 \cdot x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3$.

$\Delta y = (3x^2 + 3 \cdot x \cdot \Delta x + \Delta x^2) \cdot \Delta x$.

Если приращение функции разделим на приращение аргумента, получим разностное отношен ие:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Если разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ имеет предел при Δx, стремя щемся к нулю, то этот предел называют ***производной функции*** *$y = f(x)$ в точке x.*

Производная функции $y = f(x)$ в точке x обозначается:

$$y' = f'(x). \tag{4}$$

Итак, если $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$ или $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \to f'(x)$

($f'(x)$ читается как “эф штрих от x”).

Нахождение производной функ ции называют *дифференцированием* .

Если в точке x функция имеет производную, то функция $f(x)$ называется ***дифференцируемой*** *в этой точке. Если функция дифференцируема во всех точках промежутка, то функция называется* ***дифференцируемой на промежутке*** .

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой же точке. Обратное утверждение не всегда верно.

АЛГОРИТМ

Алгоритм нахождения производной:

1) дать аргументу приращение Δx;

2) соответственно приращению аргумента Δx найти приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

3) найти отношение приращения функции к приращению аргумента $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

4) найти предел отношения при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, т. е. найти предел $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Рассмотрим примеры на нахождение производной с помощью данного алгоритма.

ПРИМЕР

2. Найдем производную функции:

а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = \sqrt{x}$; в) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Решение. Для нахождения используем данный алгоритм.

а) Найдем производную функции $f(x) = x^2$:

1) $x + \Delta x$;

2) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$
$= 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;

4) если $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x$, отсюда $f'(x) = 2x$, т. е. $(x^2)' = 2x$;

б) найдем производную функции $f(x) = \sqrt{x}$:

1) $x + \Delta x$;

2) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} =$

$$= \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{x + \Delta x - x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}};$$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} : \Delta x = \dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$;

4) если $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, тогда $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, т. е. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) найдем производную функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$:

1) $x + \Delta x$;

2) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\dfrac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{\Delta x}{x(x + \Delta x)} : \Delta x = -\dfrac{1}{x(x + \Delta x)}$;

4) если $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to -\dfrac{1}{x^2}$, тогда $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ или $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Из рассмотренного примера получили: $(x^2)' = 2x$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Ответ: а) $2x$; б) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; в) $-\dfrac{1}{x^2}$.

Аналогично найдем производные функций $f(x) = C$ (C — постоянная), $f(x) = x$. Получим, что $C' = 0$, $(x)' = 1$.

1. Какая связь существует между приращениями аргумента и функции? Ответ обоснуйте.
2. В чем различие между понятиями *функция дифференцируема в точке* и *дифференцируема на отрезке* ?
3. Как можно объяснить связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке?

Упражнения

А

13.1. Найдите приращение функции $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x) = 1 + 2x$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}01$;
б) $f(x) = -5x + 1{,}6$, $x_0 = -5$, $\Delta x = -0{,}1$;
в) $f(x) = 3x^2 - 1$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$;
г) $f(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = -3$, $\Delta x = -0{,}3$.

13.2. а) Длины сторон прямоугольника равны 5 см и 12 см. Чему будут равны приращения периметра и площади прямоугольника, если его ширину увеличить на 0,8 см, а длину — на 0,6 см?
б) Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 4 см. Чему будет равно приращение площади, если катеты, соответственно, увеличить на 0,4 см и 0,2 см?

13.3. Найдите Δx и Δf в точке x_0:

а) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{3}$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{4}$.

В

13.4. Выразите функцию $f(x)$ через приращение Δx в точке x_0:
а) $f(x) = x^2 + x$; б) $f(x) = 2x^2 - x$.

13.5. Найдите производную функции $f(x)$ в точке x_0, используя алгоритм нахождения производной:
а) $f(x) = 3x^2 + 1$, $x_0 = -2$; б) $f(x) = x^2 - 2$, $x_0 = -1$.

13.6. Найдите Δx и Δf в точке x_0:

а) $f(x) = \frac{1}{2} + \sin x$; $x_0 = \frac{3\pi}{4}$; $x = \frac{2\pi}{3}$;

б) $f(x) = \operatorname{ctg} x - \sqrt{3}$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{3}$.

13.7. Найдите приращение функции $y = f(x)$, если значение аргумента при прибавлении приращения аргумента Δx равно x_1:
а) $f(x) = \sqrt{x}$, $\Delta x = 0{,}29$, $x_1 = 2{,}25$;
б) $f(x) = \sqrt{x}$, $\Delta x = 0{,}25$, $x_1 = 1{,}69$.

13.8. Число жителей страны в момент времени t равно $f(t)$. Каков смысл приращения этой функции при изменении от t_0 к $t_0 + \Delta t$?

13.9. Температура стержня в точке, находящейся на расстоянии x от его левого конца, равна $f(x)$. Какой физический смысл имеет приращение функции $f(x)$ при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$?

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, предел функции, приращения аргумента, приращения функции, производная, степенная функция.

§ 14. ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Ключевые понятия

Функция, производная, правила нахождения производных

Вы ознакомитесь с правилами нахождения производных, формулой производной степенной функции, научитесь использовать их при решении примеров, расширите знания о производной.

Значения функций $u(x)$, $v(x)$ и их производных в точке x обозначим для краткости так: $u(x) = u$, $v(x) = v$, $u'(x) = u'$, $v'(x) = v'$.

Правило 1. *Если функции u, v дифференцируемы в точке x, то в этой точке существует производная суммы этих функций, которая вычисляется по формуле*

$$(u + v)' = u' + v'. \qquad (1)$$

Доказательство. Для доказательства используем определение производной и алгоритм нахождения производной. Обозначим сумму двух функций через $u + v = F(x)$.

Пусть аргумент x принимает приращение Δx.

Тогда $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = u(x + \Delta x) - u(x) + v(x + \Delta x) - v(x)$.

Разделим приращение функции на приращение аргумента:

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Теперь найдем предел при $\Delta x \to 0$ и по определению производной получим: $F'(x) = u' + v'$. Следовательно, $(u + v)' = u' + v'$.

Аналогично можно доказать следующее правило.

Правило 2. *Если функции u, v дифференцируемы в точке x, то в этой точке существует производная разности этих функций, которая вычисляется по формуле*

$$(u - v)' = u' - v'. \qquad (2)$$

Самостоятельно докажите формулу (2).

ПРИМЕР **1.** Найдем производную функции $f(x) = x^2 - x + 5$.

Решение. $f'(x) = (x^2 - x + 5)' = (x^2)' - (x)' + (5)' = 2x - 1 + 0 = 2x - 1$.

Ответ: $2x - 1$.

ОБЪЯСНИТЕ

Как нашли производную функции $(10 + x - x^2)' = 1 - 2x$?

Правило 3. *Если функции u, v дифференцируемы в точке x, то в этой точке существует производная произведения этих функций, которая вычисляется по формуле*

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'. \qquad (3)$$

Следствие. *Если функция v имеет производную в точке x, а C — постоянная, то в этой точке существует производная функции Cv, которая вычисляется по формуле*

$$(Cv)' = C \cdot v'. \qquad (4)$$

Докажите самостоятельно формулу (4), используя третье правило.

ПРИМЕР **2.** Найдем производную функции $y = 15x^2$.

Решение. $C = 15$, $v = x^2$. По формуле (4) получим $y' = (15x^2)' = 15 \cdot (x^2)' = 15 \cdot 2x = 30x$.

Ответ: $30x$.

ОБЪЯСНИТЕ

Как нашли производную функции: $y = 6x^2 - 3x + 1$?

$y' = (6x^2 - 3x + 1)' = 12x - 3$.

Правило 4. *Если функции u, v дифференцируемы в точке x, причем $v \neq 0$, то в этой точке существует производная частного $\frac{u}{v}$ этих функций , которая вычисляется по формуле*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \qquad (5)$$

ПРИМЕР

3. Найдем производную функции $y = \frac{x^2}{x^2+1}$.

Решение . $y' = \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{2x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Ответ : $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Производная степенной функции $y = x^n$ для любого $n \in N$ вычисляется по формуле

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (6)$$

ПРИМЕР

4. Найдем производные функций:

а) $y = x^6$; б) $y = 5x^4 + x^9$; в) $y = \frac{1}{2}x^8 - \frac{3}{x^7}$.

Решение . а) $y' = (x^6)' = 6 \cdot x^{6-1} = 6x^5$;

б) $y' = (5x^4 + x^9)' = 5(x^4)' + (x^9)' = 5 \cdot 4x^3 + 9x^8 = 20x^3 + 9x^8$;

в) $y' = \left(\frac{1}{2}x^8 - \frac{3}{x^7}\right)' = \frac{1}{2} \cdot (x^8)' - 3 \cdot (x^{-7})' = \frac{1}{2} \cdot 8x^7 - 3 \cdot (-7) \cdot x^{-7-1} = 4x^7 + \frac{21}{x^8}$.

Ответ : а) $6x^5$; б) $20x^3 + 9x^8$; в) $4x^7 + \frac{21}{x^8}$.

?

1. Как находится производная, если количество слагаемых больше 2?
2. Какое условие должно выполняться при нахождении производной частного?
3. Можно ли рассматривать производную частного как производную произведения двух функций?

Упражнения

А

14.1. Найдите производную функции:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4$; б) $f(x) = 4x^8 + \sqrt{x}$;

в) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^4$;
г) $f(x) = 4x^6 + 7x^5 + 1$;
д) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3x - 4$;
е) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x$;
ж) $f(x) = 2\sqrt{x} - 2$;
з) $f(x) = -5x^2 + x + 1$.

14.2. Решите уравнение $f'(x) = 0$:
а) $f(x) = 4x^2 + 2x$;
б) $f(x) = 3x^2 - 4x$;
в) $f(x) = x^2 + x - 1$;
г) $f(x) = -0{,}5x^2 - 4x + 0{,}1$.

14.3. Вычислите производную функции $f(x)$ и ее значения в точке x_0:
а) $f(x) = x^2(x - 1)$, $x_0 = -1$;
б) $f(x) = \frac{2x+1}{x}$, $x_0 = -1$;
в) $f(x) = 3x(x + 1)$, $x_0 = -\frac{2}{3}$;
г) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x_0 = 1$.

14.4. Решите неравенство $f'(x) > 0$:
а) $f(x) = 18x^2 - 7x + 1$;
б) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 5x + 2$;
в) $f(x) = 1 + 3x - x^2$;
г) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{6}{7}$.

14.5. Найдите производную функции :
а) $f(x) = (x + 5)(x - 4)$;
б) $f(x) = \sqrt{2}\,x^2 - (3x - 2)(5x + 1)$;
в) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$;
г) $f(x) = \frac{3x - x^2}{x + 2}$.

B

14.6. Найдите производную функции:
а) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{3 + x^2}$;
б) $f(x) = \frac{16 - x^4}{x^2 - 4}$.
в) $f(x) = \frac{3x^3 - 1}{x^3}$;
г) $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$.

14.7. Найдите производную функции $f(x)$ и вычислите ее значение в точке x_0:
а) $f(x) = 4x^4 - 5x^2$, $x_0 = 2$;
б) $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 1$, $x_0 = -2$.

14.8. Вычислите $f'(-1)$, если:
а) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$;
б) $f(x) = \frac{x}{2x-1}$;
в) $f(x) = \frac{3}{2x+2}$;
г) $f(x) = \frac{x+4}{2x-1}$.

14.9. Решите уравнение $f'(x) = 0$:
а) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;
б) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$.

14.10. Решите неравенство $f'(x) > 0$:
а) $f(x) = 12x^3 + 18x^2 - 7$;
б) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$.

14.11. Решите неравенство $f'(x)$ m 0:

а) $f(x) = x^3 + 0{,}5x^2 - 4x + 2$; б) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 0{,}5x^2 + 2x$.

14.12. Сравните значения $f'(0)$ и $g'(0)$, если $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ и $g(x) = x^4 + 3x^3 - 3x$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, график функции, приращение аргумента и функции, определение производной, касательная, правила нахождения производных.

§15. ФИЗИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ. КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

Ключевые понятия

Функция, производная, график функции, касательная

Вы будете знать физический и геометрический смысл производной, общий вид уравнения касательной, научитесь решать задачи на использование геометрического и физического смысла производной.

Физический смысл производной

Путь, пройденный физическим телом за время t, задан функцией $s(t)$, а путь, пройденный данным телом за время $t + \Delta t$, определяется функцией $s(t + \Delta t)$. Тогда величина пути в момент времени от t до $t + \Delta t$ определяется разностью $s(t + \Delta t) - s(t)$.

Если эту разность разделить на Δt, то получим среднюю скорость движущегося тела: $\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$, т. е. $v_{ср.} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$.

Если в последнем выражении перейти к пределу при $\Delta t \to 0$, то получим, что средняя скорость стремится к скорости в момент t, т. е. $v_{ср.} \to v(t)$, или получим равенство:

$$v(t) = s'(t), \qquad (1)$$

где $s(t)$ — путь, пройденный телом на момент времени t; $v(t) = s'(t)$ — мгновенная скорость движущегося тела в момент времени t.

ВЫ ЗНАЕТЕ: Путь, пройденный за время t телом, свободно падающим вертикально вниз, определяется формулой $h(t) = g\frac{t^2}{2}$.

В момент времени t скорость будет равна $v(t) = h'(t) = \left(g\frac{t^2}{2}\right)' = g\frac{2t}{2} = gt$, т. е. $h'(t) = v(t) = gt$, где $g = 9{,}81$ м/с^2 — ускорение свободного падения тела. Тогда $v(t) = gt$ является мгновенной скоростью в момент времени t функции $h(t) = g\frac{t^2}{2}$.

В общем случае производная функции $y = f(x)$ в точке x определяет скорость изменения функции в этой точке. Это физический смысл производной.

Если рассмотреть производную от скорости $v'(t)$, то получим $v'(t) = (gt)' = g$. Следовательно, производная от скорости есть ускорение.

ПРИМЕР

1. Путь, пройденный материальным телом за время t, задан формулой $s(t) = t^2 + 2$. Найдем мгновенную скорость и ускорение в момент времени $t = 5$ с.

Решение. Для определения формулы мгновенной скорости найдем производную от формулы пути $s(t) = t^2 + 2$. Затем вычислим значение скорости за данное время, т. е. $v(t) = s'(t) = 2t$, тогда $v(5) = 2 \cdot 5 = 10$.

Для определения ускорения найдем производную от скорости: $a(t) = v'(t) = (2t)' = 2$, тогда $a(5) = 2$.

Ответ: 10 м/с; 2 м/с ^{2}.

Геометрический смысл производной

Предположим, что функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в точке x_0. Определим геометрический смысл производной. Пусть графиком функции $f(x)$ будет кривая AB (рис. 51). Точки N_0 и N принадлежат AB. Проведем через эти точки секущую TT'. Угол между секущей и положительным направлением оси Ox обозначим через β. Проведя прямую N_0E параллельно оси Ox, а через точку N — прямую NE параллельно оси Oy, получим прямоугольный треугольник:

$$\Delta N_0EN \ (\angle N_0EN = 90°),$$

где $\angle EN_0N = \beta$, $MN_0 = E_1E = f(x_0)$, так как $N_0(x_0, f(x_0))$ и $MN_0 \parallel E_1E$.

$$N_0E = \Delta x,\ E_1N = f(x_0 + \Delta x),\ EN = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y.\ \frac{EN}{N_0E} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\beta.$$

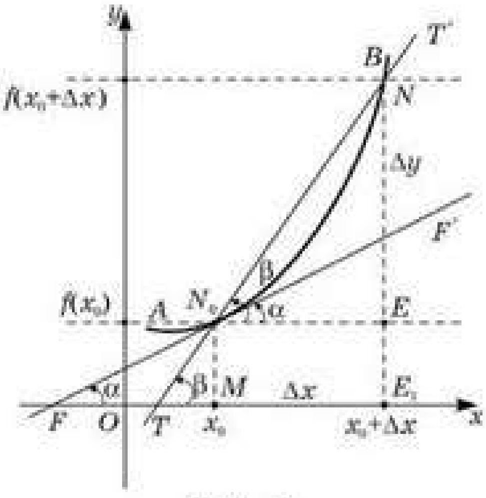


Рис. 51

Пусть точка N_0 — неподвижная точка на кривой AB. При передвижении точки N вдоль кривой она совпадет с точкой N_0.

Тогда секущая TT' совпадет с касательной к кривой в точке N_0, т. е. перейдет в FF'. Угол между секущей и положительным направлением Ox перейдет в угол между касательной и положительным направлением оси Ox, т. е. $\beta \to \alpha$ при $\Delta x \to 0$ (рис. 51).

Запишем вышеописанное в следующем виде: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to$ $\to f'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$; $\beta \to \alpha$, отсюда $\operatorname{tg}\beta \to \operatorname{tg}\alpha = k$ при $\Delta x \to 0$.

Следовательно, производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$, т. е.

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = k. \tag{2}$$

Формула (2) дает *геометрический смысл производной*.

Геометрический смысл производной имеет большое значение при исследовании функции.

ПРИМЕР **2.** Найдем значение угла между положительным направлением оси Ox и касательной, проведенной к графику функции $y = x^2$ в точке $N_0(1; 1)$.

Решение. Искомый угол можно найти из формулы (2). Для этого вычислим производную от данной функции: $f'(x) = 2x$. Тогда по формуле (2) имеем $f'(1) = \operatorname{tg}\alpha = 2 \cdot 1 = 2$. Следовательно, искомый угол будет равен $\alpha = \operatorname{arctg} 2$.

Ответ: arctg 2.

Если угол между положительным направлением оси Ox и касательной, проведенной к графику функции в заданной точке:

а) острый, то производная положительная;

б) тупой, то производная отрицательная;

в) равен нулю, то производная в этой точке равна нулю.

Уравнение касательной, проведенной к графику функции в точке

Пусть будут даны функция $y = f(x)$, точка $N_0(x_0; y_0)$ и $f'(x_0)$ — производная в этой точке. Составим уравнение касательной, проведенной через точку $N_0(x_0; y_0)$, к графику функции. Так как касательная является прямой, то ее уравнение будет иметь вид $y = kx + b$. Учитывая, что $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, получим $f(x_0) = f'(x_0)\,x_0 + b$. Отсюда $b = f(x_0) - f'(x_0)\,x_0$. Подставляя полученное выражение в общее уравнение прямой $y = f'(x_0)\,x + b$, получим:

$$y = f'(x_0)\,x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

или

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{3}$$

Уравнение (3) является *уравнением касательной* к графику функции.

Используя геометрический смысл производной, дадим наглядное пояснение того, что существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке B с абсциссой, равной b из интервала $(a; c)$, параллельная секущей, проходящей через точки $A_1(a; f(a))$ и $C_1(c; f(c))$.

Рассмотрим прямую A_1C_1, параллельную касательной AC, проведенной через точку B графика функции $y = f(x)$ (рис. 52). Тогда угол α

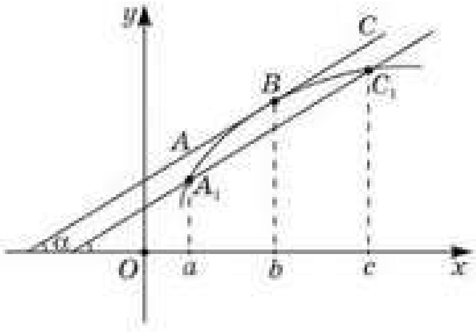


Рис. 52

равен углу наклона секущей A_1C_1, т. е. $f'(b) = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.

Таким образом, если функция дифференцируема на интервале $(a; c)$, то оказывается, найдется точка $b \in (a; c)$, для которой выполняется равенство

$$f'(b) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}. \qquad (4)$$

Формула (4) называется *формулой Лагранжа* .

Для того, чтобы написать уравнение касательной к графику функции $f(x)$, проходящей через точку с абсциссой x_0, используется следующий алгоритм:

АЛГОРИТМ

Алгоритм нахождения уравнения касательной:

1) найти значение функции $f(x)$ при x_0;

2) найти производную функции $f(x)$;

3) вычислить значение производной в точке x_0, т. е. $f'(x_0)$;

4) найденные значения подставить в уравнение (3) и получить уравнение касательной.

ПРИМЕР

3. Напишем уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 2x - 1$, проходящей через точку с абсциссой $x_0 = 3$.

Решение . Используем алгоритм составления уравнения касательной:

1) $x_0 = 3$, тогда $f(3) = 3^2 - 3 \cdot 2 - 1 = 2$;

2) $f'(x) = (x^2 - 2x - 1)' = 2x - 2$;

3) $f'(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$;

4) найденные значения подставим в уравнение (3). Тогда $y = 2 + 4 \cdot (x - 3) = 2 + 4x - 12 = 4x - 10$. Следовательно, уравнение касательной имеет вид $y = 4x - 10$.

Ответ : $y = 4x - 10$.

ПРИМЕР

4. Найдем точку пересечения касательных к графику функции $y = 2x^2 - 4x + 5$, проходящих через точки $(0; 5)$ и $(2; 5)$.

Решение . 1) Составим уравнение касательной к графику данной функции, проходящей через точку $(0; 5)$.

При $x_0 = 0$ имеем $f(0) = 5$;

$f'(x) = (2x^2 - 4x + 5)' = 4x - 4$;

$f'(0) = 4 \cdot 0 - 4 = -4$.

Подставим найденные значения в уравнение (2). Тогда $y = 5 + (-4) \cdot (x - 0) = 5 - 4x$. Следовательно, уравнением касательной, проходящей через точку $(0; 5)$, будет $4x + y = 5$;

2) составим уравнение касательной к графику данной функции, проходящей через точку $(2; 5)$.

При $x_0 = 2$ имеем $f(2) = 5$;

$f'(x) = (2x^2 - 4x + 5)' = 4x - 4$;

$f'(2) = 4 \cdot 2 - 4 = 4$.

Теперь найденные значения подставим в (3) формулу. Тогда $y = 5 + 4(x - 2) = 4x - 3$. Следовательно, уравнение касательной, проходящей через точку (2; 5), имеет вид $4x - y = 3$;

3) далее составим систему из уравнений $4x + y = 5$ и $4x - y = 3$. Решая систему получим $x = 1$ и $y = 1$. Следовательно, точка пересечения касательных — (1; 1).

Ответ : (1; 1).

1. Как вы считаете: *физический смысл производной* — это мгновенная или средняя скорость? Ответ обоснуйте.
2. Какая связь существует между касательной, проведенной к графику функции через любую точку, и понятием *производная* ?

Упражнения

A

15.1. а) Точка движется по закону $x(t) = 2t^2 + 3$. Найдите скорость движения при $t = 2$ (время измеряется в секундах, координата — в метрах).

б) Точка движется по закону $x(t) = 15t^2 + 6t$. Найдите формулу вычисления скорости в любой момент времени. Вычислите скорость и ускорение при $t = 1$ (время измеряется в секундах, координата — в метрах).

в) Точка движется по закону $x(t) = t^2 + 4t - 1$. Вычислите скорость движения тела через 1 с с начала движения (время измеряется в секундах, координата — в метрах).

15.2. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной через точку A, к графику функции $f(x)$:

а) $f(x) = 2x^2 + 2$, $A(0;\ 2)$; б) $f(x) = 3x^2 - 1$, $A(2;\ 11)$;
в) $f(x) = 4x^2 + 3x$, $A(1;\ 7)$.

15.3. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = 4x^2 - 2$, $x_0 = -1$; б) $f(x) = 3x^2 + 1$, $x_0 = 1$;
в) $f(x) = 1 - 5x^2$, $x_0 = 1$.

15.4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке A:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$, $A(0;\ 1)$; б) $f(x) = 3 - x^2$, $A(-1;\ 2)$.

B

15.5. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 5$, $x_0 = -1$; б) $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + 3$, $x_0 = 1$.

15.6. Найдите угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(a; f(a))$:

а) $f(x) = x^2 - 0{,}5x + 1$, $a = 1$; б) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{7}$, $a = 1{,}5$.

15.7. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x_0:

а) $f(x) = 3 - x + 2x^2$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = 4x^2 + x - 1$, $x_0 = 2$.

15.8. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, параллельной оси абсцисс:

а) $y = 2 + x^2$; б) $y = -x^2$;

в) $y = x^2 - 3$; г) $y = x^2 - 2x$.

15.9. В какой точке пересекаются касательные к графику функции $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2$, проведенные в точках $(-1; 2)$ и $(2; 0{,}5)$?

15.10. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке пересечения графика функц ии с осью ординат:

а) $y = -2x + x^2$; б) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x$.

15.11. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 3 - x^2$, параллельной прямой $x + 1$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, область определения, множество значений, производная, правила вычисления производных.

§ 16. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Ключевые понятия

Функция, сложная функция, производная

Вы ознакомитесь с формулой нахождения производной сложной функции, научитесь находить производную сложной функции.

Вы знаете, что такое *сложная функция* и умеете ее составлять.

ВСПОМНИТЕ

1) Если $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$, то составьте сложные функции $f(g(x))$, $g(f(x))$.

2) Если $y = 3 + \sqrt{x}$, то найдите $f(x)$ и $g(x)$.

Если функция $u = g(x)$ имеет в данной точке x производную, а функция $y = f(u)$ в соответствующей точке u имеет производную (по *аргументу u), то и сложная функция $y = f[g(x)]$ имеет в точке x производную , которая находится по формуле*

$$y' = f'(g(x))\, g'(x). \qquad (1)$$

ПРИМЕР **1.** Найдем производные функций:

а) $y = (6x - 13)^5$; б) $y = \sqrt{1 - x^3}$.

Решение . а) $f(u) = u^5$, $u = g(x) = 6x - 13$, тогда $f'(u) = 5u^4$, $g'(x) = 6$.

Используя формулу (1), имеем:

а) $y' = 5\ u^4\ u' = 5(6x - 13)^4 \cdot 6 = 30\ (6x - 13)^4$;

б) $f(u) = \sqrt{u}$, $u(x) = 1 - x^3$, тогда $f'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$, $u'(x) = -3x^2$;

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\ u' = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^3}}(-3x^2) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{1 - x^3}}.$$

Ответ : а) $30(6x - 3)^4$; б) $-\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1 - x^3}}$.

ОБЪЯСНИТЕ

Как нашли производную функции $(x^5 + 3x - \sqrt{x+1})' = 5x^4 + 3 - \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$?

? **1.** Являются ли сложными функции $y = x^n$, $y = (3x + 5)^n$, $y = \cos x$, $y = \cos(1+3x^2)$?

Упражнения

А

16.1. Напишите функции $f(x)$ и $g(x)$, составляющие функцию $y = f(g(x))$:

а) $y = (2x - 1)^2$; б) $y = \sqrt{3x + 2}$; в) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$; г) $y = \operatorname{tg}\ 4x$.

16.2. Составьте сложные функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$:

а) $f(x) = \cos x$, $g(x) = 2x$; б) $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x + 1$;

в) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 4x - 1$; г) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{2}{x + 1}$.

Найдите производные функций **(16.3—16.4)** :

16.3. а) $f(x) = \sqrt{x+15}$; б) $f(x) = \sqrt{7-8x}$;

в) $f(x) = (-x^2 + 5)^3$; г) $f(x) = (-8x^2 + 1)^4$.

16.4. а) $f(x) = 5(3x + x^3 - 4x^4)^3$; б) $f(x) = (4x^2 - x^4)^2$;

в) $f(x) = (3\sqrt{x} - 2x^2 + x^5)^5$; г) $f(x) = (4\sqrt{x} + 6x^2 - 5x)^5$.

B

16.5. Составьте сложные функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$:

а) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \dfrac{2}{x^3 - 1}$; б) $f(x) = 3x^3 + 2x^2$, $g(x) = \operatorname{tg} x$.

16.6. Найдите производную функции:

а) $f(x) = (7x^5 - 3x^7)^{17} + (6x - 3x^3)^{13}$;

б) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3} - 9x^3\right)^{27} - \left(\dfrac{1}{5}x + 9\right)^{30}$;

в) $f(x) = (4 - 5x)^{10} - (5 - 4x)^{20}$;

г) $f(x) = (x^5 - 4x)^{13} + \left(\dfrac{1}{6} - 5x^6\right)^{14}$.

Найдите производные функций (16.7—16.9):

16.7. а) $f(x) = \left(4 + \dfrac{1}{x^2}\right)^3$; б) $f(x) = \left(5 - \dfrac{4}{x}\right)^2$.

16.8. а) $f(x) = \dfrac{12}{x - \sqrt{x}} - (x - 6)^2$; б) $f(x) = \dfrac{10}{x + \sqrt{x}} + \left(\sqrt{x} - 1\right)^3$.

16.9. а) $f(x) = \sqrt{1 - 3x^2} + \dfrac{1}{x^2 + 4}$; б) $f(x) = (8 - 3x^6)^3 - \dfrac{x^2}{5 - x^2}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Производная, определение производной, правила вычисления производных, производная сложной функции, тригонометрические функции, формулы тригонометрии.

§ 17. ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ключевые понятия

Функция, производная, тригонометрические функции

Вы ознакомитесь с формулами производных тригонометрических функций, научитесь находить производную тригонометрических функций.

I. Производная функции $y = \sin x$.

Пусть аргумент x принимает приращение Δx. Тогда, соответственно, получим значение функции $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$.

Отсюда приращение функции: $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot$
$\cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = 2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

Разделим приращение функции на приращение аргумента, тогда
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = 2 \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

В последнем равенстве перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$y' = 1 \cdot \cos x = \cos x,$$

так как при $\Delta x \to 0$ выражение $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$ (по формуле $\frac{\sin x}{x} \to 1$, при $x \to 0$, которая рассматривается в высшей математике), а выражение $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos(x + 0) = \cos x$.

Таким образом,

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x.} \quad (1)$$

II. Производная функции $y = \cos x$.

Используем формулу приведения: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ и формулу производной сложной функции. Тогда $y' = (\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \times$
$\times \left(\frac{\pi}{2} + x\right)' = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$.

Следовательно,

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x.} \quad (2)$$

III. Производная функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Учитывая, что $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\sin x \neq 0$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$ и правило нахождения производной частного, получим:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Таким образом,

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.} \quad (3)$$

IV. Производная функции $y = \operatorname{tg} x$.

Аналогично можно получить формулу производной функции $y = \operatorname{tg} x$:

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}} \quad (4)$$

Формулу (4) докажите самостоятельно.

ПРИМЕР

1. Найдем производные функций:
а) $y = 3\sin x$; б) $y = 7{,}5 - \cos 4x$; в) $y = 2\sin^2 x$;
г) $y = \operatorname{ctg} 3x - \operatorname{tg} 3x$.

Решение. а) $y' = (3\sin x)' = 3\cos x$;
б) $y' = (7{,}5 - \cos 4x)' = (7{,}5)' - (\cos 4x)'(4x)' = 0 - (-\sin 4x)4 = 4\sin 4x$;
в) $y' = (2\sin^2 x)' = 2(\sin^2 x)' = 2 \cdot 2\sin x(\sin x)' = 4\sin x\cos x = 2(2\sin x\cos x) = 2\sin 2x$;

г) $y' = (\operatorname{ctg} 3x - \operatorname{tg} 3x)' = (\operatorname{ctg} 3x)' - (\operatorname{tg} 3x)' = -\frac{1}{\sin^2 3x}(3x)' \cdot \frac{1}{\cos^2 3x}(3x)' = \cdot\frac{3}{\sin^2 3x} - \frac{3}{\cos^2 3x} = -\frac{3\cdot(\cos^2 3x + \sin^2 3x)}{\sin^2 3x\cos^2 3x} = -\frac{3}{\frac{1}{4}4\sin^2 3x\cos^2 3x} = -\frac{12}{\sin^2 6x}$.

Ответ: а) $3\cos x$; б) $4\sin 4x$; в) $2\sin 2x$; г) $-\frac{12}{\sin^2 6x}$.

ЗАПОМНИТЕ

$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$;
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

?

1. Можно ли сказать, что в любой точке области определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ существуют их производные?
2. Можно ли сказать, что в любой точке области определения функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ существуют их производные? Ответ обоснуйте.
3. Как объяснить геометрический смысл производной для функции $y = \sin x$?

Упражнения

А

Найдите производные тригонометрических функций **(17.1—17.4):**

17.1. а) $f(x) = 3\sin x + 2\cos x$; б) $f(x) = \operatorname{ctg} x - 1$;
в) $y = \operatorname{tg} x + \sin x$; г) $f(x) = 2\cos x - \operatorname{tg} x$.

17.2. а) $f(x) = 2x + 2\operatorname{tg} x$; б) $f(x) = 4x\operatorname{ctg} x$;
в) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; г) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

17.3. а) $f(x) = -\cos 2x + \sin 2x$; б) $f(x) = 3x + \cos 4x$;
в) $f(x) = x^3 - 2\sin 2x$; г) $f(x) = 2\operatorname{tg} 2x$.

17.4. а) $f(x) = -3\operatorname{ctg} x - 4x^3$; б) $f(x) = \sin 2x + \operatorname{tg} x$;
в) $f(x) = 4 - \frac{1}{4}\operatorname{tg} x$; г) $f(x) = x^2\operatorname{ctg} x$.

17.5. Вычислите производную функции в заданной точке:
а) $f(x) = \cos x + 1$, $x = \frac{\pi}{6}$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x - 2$, $x = \frac{\pi}{3}$;
в) $f(x) = \frac{2\sin x}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$; г) $f(x) = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg} x$, $x = \frac{\pi}{3}$.

17.6. Решите уравнение $f'(x) = 0$:
а) $f(x) = -\sin x - 1$; б) $f(x) = \cos 4x + 1$.

17.7. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:
а) $f(x) = \sin x$; $x_0 = \frac{2\pi}{3}$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

17.8. Решите уравнение $f'(x) = 0$:
а) $f(x) = 3\sin 2x$; б) $f(x) = 4\cos 2x$.

B

Найдите производные функций **(17.9—17.11):**

17.9. а) $f(x) = \cos x \cdot (\cos x - 1)$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x(\cos x + 2)$;
в) $f(x) = \sin x(\operatorname{ctg} x - 1)$; г) $f(x) = (4x - 1) \cdot \sin x$.

17.10. а) $f(x) = \cos^2 x - 1$; б) $f(x) = 3\sin^2 2x + 2x$;
в) $f(x) = (\sin 2x + 1)^2$; г) $f(x) = (\cos 2x + \sin 2x)^3$.

17.11. а) $f(x) = \frac{3x + 4}{\cos x}$; б) $f(x) = \frac{5x - 2}{\sin x}$;
в) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{3 + x}$; г) $f(x) = \frac{x - 2}{\operatorname{ctg} x}$.

17.12. Решите уравнение $f'(x) = 0$:
а) $f(x) = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{2}x$; б) $f(x) = \sqrt{2}(x - 1) + \cos 2x$.

17.13. Решите неравенство $f'(x) > 0$:
а) $f(x) = \cos x + \frac{x}{2}$; б) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$.

17.14. Найдите область определения производной функции:
а) $f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$; б) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} + \sin x}$.

17.15. Вычислите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$:
а) $f(x) = \sin\left(x^2 + x + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $f(x) = \frac{4}{3}\operatorname{tg}(x^3 + x)$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, значение функции, величина, окрестность точки, производная, правила и формулы производных, уравнение касательной, градусная и радианная меры.

§ 18. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Ключевые понятия

Функция, значение функции, приращение, приближенное значение

Вы ознакомитесь с формулами приближенного вычисления; научитесь вычислять приближенные значения.

Введение формул приближенного вычисления начнем с рассмотрения примера.

ПРИМЕР **1.** Дана функция $f(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^2 - x + 15$. Вычислим значение функции в точке $x = 1{,}98$.

Решение. Значение 1,98 находится в окрестности точки $x_0 = 2$, а значение искомой функции при $x_0 = 2$ вычислить легко $f(2) = -11$. График функции в окрестности $x_0 = 2$ близок к прямой $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, т. е. касательной в точке с абсциссой $x_0 = 2$, поэтому $f(1{,}98) \approx y(1{,}98)$. Найдем $f'(x) = 6x^5 - 15x^4 + 4x - 1$, $f'(x_0) = f'(2) = -41$ и $f(x) \approx y(x) = -11 + (-41) \cdot (-0{,}02) = -10{,}16$. Вычисляя с помощью калькулятора, получим $f(1{,}98) \approx -10{,}1795$.

Ответ: $\approx -10{,}1795$.

Вообще для дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ при Δx, мало отличающихся от нуля, ее график близок к касательной (проведенной в точке графика с абсциссой x_0), т. е. при малых Δx:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \qquad (1)$$

Теперь из формулы (1) выведем формулу приближенного вычисления:

$$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x. \qquad (2)$$

Доказательство.

Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $x = x_0 + \Delta x$. Возьмем $x_0 = 1$, тогда $x = 1 + \Delta x$.

Найдем $f(x_0) = f(1) = 1$ и $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, отсюда $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2}$.

По формуле (1) получим: $f(x) = \sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$. ◻

ПРИМЕР **2.** Вычислим значения: а) $\sqrt{0{,}98}$; б) $\sqrt{25{,}5}$.

Решение . а) $\sqrt{0{,}98} = \sqrt{1+(-0{,}02)} \approx 1 + \frac{1}{2}(-0{,}02) = 0{,}99$;

б) $\sqrt{25{,}5} = \sqrt{25+0{,}5} = \sqrt{25(1+0{,}02)} = 5\sqrt{(1-0{,}02)} \approx 5(1 + \frac{1}{2}\ 0{,}02) = 5{,}05$.

Ответ : а) 0,99; б) 5,05.

Общая формула приближенного вычисления:

$$(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\,\Delta x, \text{ где } n \text{ — целое число} \quad (3)$$

Доказательство.

Предположим, $f(x) = x^n$. Возьмем $x_0 = 1$ и $x = x_0 + \Delta x$, тогда $x = 1 + \Delta x$. Найдем $f(x_0) = f(1) = 1$ и $f'(x) = nx^{n-1}$, отсюда $f'(x_0) = f'(1) = n$. По формуле (1) получим: $f(x) = (1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\,\Delta x$. ◼

ПРИМЕР **3.** Вычислим $(1{,}007)^{200}$.

Решение . $(1{,}007)^{200} = (1 + 0{,}007)^{200} \approx 1 + 200 \cdot 0{,}007 = 2{,}4$.

Ответ : 2,4.

ПРИМЕР **4.** Найдем значение выражения $\sin 33°$.

Решение . По формуле (1) $\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot (x - x_0)$. Переведем градусную меру в радианную:

$33° = 30° + 3° = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180} \cdot 3° = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60}$. Тогда $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60}$; $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Следовательно, $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{60} =$

$= \frac{1}{2}(1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{60}) \approx \frac{1}{2} \cdot 1{,}0907 = 0{,}545$.

Ответ : 0,545.

1. На основе какой формулы получены формулы приближенного вычисления?
2. Почему формулы приближенного вычисления имеют несколько видов? Ответ обоснуйте.

Упражнения

А

18.1. Используя формулу (1), вычислите значения функции $f(x)$ при значениях аргумента x_1 и x_2:

а) $f(x) = x^3 + 3x$, $x_1 = 1{,}998$, $x_2 = 6{,}002$;

б) $f(x) = x^2 - x^5$, $x_1 = 3{,}03$, $x_2 = 2{,}997$;

в) $f(x) = 2x - x^4$, $x_1 = 5{,}002$, $x_2 = 3{,}995$;

г) $f(x) = 3x^2 + 2x^3$, $x_2 = 4{,}996$, $x_2 = 7{,}02$.

18.2. Используя формулы (2) и (3), вычислите приближенные значения выражений :

а) $1{,}003^{100}$; б) $0{,}996^{16}$;

в) $0{,}997^{40}$; г) $1{,}002^{200}$;

д) $\sqrt{1{,}003}$; е) $\sqrt{1{,}004}$; ж) $\sqrt{4{,}008}$.

B

Используя формулы (1)—(3), вычислите приближенные значения выражений **(18.3—18.6):**

18.3. а) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0{,}004\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+0{,}02\right)$; в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-0{,}05\right)$.

18.4. а) $\frac{1}{1{,}002^{40}}$; б) $\frac{1}{1{,}002^{50}}$; в) $\frac{1}{0{,}996^{6}}$.

18.5. а) $\sqrt{9{,}27}$; б) $\sqrt{4{,}16}$; в) $\sqrt{16{,}32}$.

18.6. а) $\cos 35°$; б) $\operatorname{tg} 46°$; в) $\operatorname{ctg} 87°$.

18.7. Сравните значения функций $f(x)$ и $g(x)$ при x_0:

а) $f(x) = x^2 - 4x^5$, $g(x) = x^3 - 3x^4$, $x_0 = 3{,}998$;

б) $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = 1 - x^4$; $x_0 = 1{,}999$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Вычислите производную функции $y = 3x^3 - 4x^2$:

A) $\frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3$; B) $9x - 9$; C) $9x^2 - 9x$; D) $9x^2 - 8x$.

2. Прямая $y = x - 2$ касается графика функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$. Найдите $f(-1)$:

A) –3; B) 2; C) 3; D) –2.

3. Найдите производную функции $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$ и вычислите значение выражения $f'(0) + f'(-1)$:

A) –40; B) 20; C) 25; D) –10.

4. Найдите производную функции $y(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$:

A) $\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; B) $\frac{1}{2\sqrt{(x^2+1)^3}}$; C) $-\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; D) $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$.

5. Найдите производную функции $y = \left(\frac{1}{2}x + 5\right)^{10}$:

A) $10\left(\frac{1}{2}x + 5\right)^{11}$; B) $5\left(\frac{1}{2}x + 5\right)^{9}$; C) $\left(\frac{1}{2}x - 6\right)^{9}$; D) $8\left(\frac{1}{2}x - 6\right)^{9}$.

6. Найдите производную функции $y(x) = \operatorname{ctg} x$ и вычислите ее значение при $x = \frac{\pi}{6}$:

A) $\frac{3}{4}$; B) $\frac{4}{3}$; C) –4; D) 4.

7. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2x^3 - 5x$ в точке $M(2; 6)$:

A) $\operatorname{tg}\alpha = 29$; B) $\operatorname{tg}\alpha = 19$; C) $\operatorname{tg}\alpha = 13$; D) $\operatorname{tg}\alpha = 17$.

8. Найдите производную функции $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)$:

A) $2x^8$; B) $4x^3$; C) $8x^2$; D) $4x^5$.

9. Найдите производную функции $y = \sin 3x$:

A. $\sin 3x$; B. $3\cos 3x$; C. $-\sin 3x$; D. $-3\sin 3x$.

10. Если $f(x) = (1 - 2x) \cdot (2x + 1)$, то найдите $f'(1)$:

A) –8; B) –4; C) 2; D) 0.

11. Уравнение касательной к графику функции $y = x^4 + x$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$:

A) $y = 3x + 3$; B) $y = -3x - 3$; C) $y = 3x + 7$; D) $y = x - 7$.

12. В точке с абсциссой $x = 1$ к графику функции $f(x) = \sqrt{x}$ проведена касательная. Найдите ординату точки касательной с абсциссой $x = 31$:

A) 17; B) 19; C) 16; D) 15.

13. Найдите производную функции $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$:

A) $2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; B) $2x^2 + 2\sqrt{x}$; C) $-2x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; D) $2x^2 + \frac{1}{x}$.

14. Найдите производную функции $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ и вычислите ее значение при $x = -\frac{3}{4}\pi$:

A) нет решения; B) $-\frac{3}{4}$; C) 2; D) –2.

15. Материальная точка движется по закону $S = t^3 + 2t^2 - 4$. Найдите скорость в момент времени $t = 2$:

A) 20; B) 27; C) 34; D) 16.

16. Найдите производную функции $f(x) = \frac{1}{\cos 5x}$:

A) $\frac{5\operatorname{tg} 5x}{\cos 5x}$; B) $\operatorname{tg} 5x + 1$; C) $\frac{1}{\operatorname{tg} 5x}$; D) $-\frac{\sin 5x}{5\cos^2 5x}$.

17. Найдите производную функции $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{4}$:

A) $\dfrac{4}{\cos^2\dfrac{x}{4}}$; B) $\dfrac{4}{\sin^2\dfrac{x}{4}}$; C) $\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{x}{4}}$; D) $\dfrac{1}{4\cos^2\dfrac{x}{4}}$.

18. Дана функция $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 10$. Решите уравнение $f'(x) = 0$:

A) –3; –1; B) –3; 1; C) 3; –1; D) 2; –3.

19. Дана функция $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$. Решите неравенство $f'(x)\ |\ 0$:

A) (–2; 2); B) $(-\infty; -2]$; C) $(2; +\infty)$; D) $[2; +\infty)$.

20. Найдите производную функции $f(x) = \cos 10x \cos 6x + \sin 10x \sin 6x$:

A) $-4\cos 4x$; B) $-4\sin 4x$; C) $4\sin 4x$; D) $4\cos 4x$.

Задания на математическую грамотность

21. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 2; 3; 8 так, чтобы цифры были разные:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

22. Покупатель по дисконтной карте купил товар с 10%-ной скидкой и заплатил 9045 тг. Найдите цену товара без скидки:

A) 10 050 тг; B) 10 500 тг; C) 15 000 тг; D) 10 005 тг; E) 10 550 тг.

23. Если $x \cdot y = x^3 - y^2$, то найдите значение выражения $5 \cdot (4 \cdot 8)$:

A) –61; B) 253; C) 61; D) –3; E) 125.

24. В корзине лежат 9 желтых, 9 белых и 12 красных шаров. Из корзины вынимается один шар. Вероятность того, что взятый шар окажется не желтым, равна:

A) 0,7; B) 0,2;
C) 0,8; D) 0,75;
E) 0,4.

25. На диаграмме указано количество шаров из четырех цветов, приобретенных на праздник (рис. 53). На сколько процентов шары зеленого цвета меньше шаров красного цвета:

A) 50%; B) 25%;
C) 15%; D) 40%;
E) 62,5%?

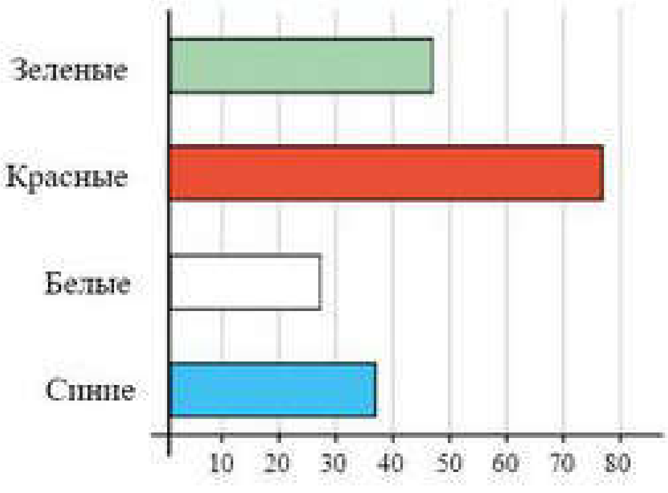


Рис. 53

ÈÑÒÎÐÈ×ÅÑÊÀß ÑÏÐÀÂÊÀ

Ìíîãèå ïîíÿòèÿ äèôôåðåíöèàëüíîãî èñ÷èñëåíèÿ — *ïðîèçâîäíàÿ* — âîçíèêëè â XVII â. â ñâÿçè ñ íåîáõîäèìîñòüþ ðåøåíèÿ çàäà÷ ôèçèêè, ìåõàíèêè è ìàòåìàòèêè. Ïåðâûå çàäà÷è áûëè ñâÿçàíû ñ äâóìÿ âîïðîñàìè: îïðåäåëåíèÿ ñêîðîñòè ïðÿìîëèíåéíîãî íåðàâíîìåðíîãî äâèæåíèÿ è ïîñòðîåíèÿ êàñàòåëüíîé è íîðìàëè ê êðèâîé. Ìàòåìàòèêè XV—XVII ââ. äîëãî áèëèñü íàä ïðîáëåìîé íàõîäèòü ìåòîäû ïîñòðîåíèÿ êàñàòåëüíîé â ëþáîé òî÷êå êðèâîé.

Ìåòîäîëîãèÿ ÷àñòíûõ ñëó÷àåâ ðåøåíèÿ çàäà÷ áûëè ïîëó÷åíû åùå â äðåâíîñòè. Òàê, â "Íà÷àëàõ" Åâêëèäà äàí ñïîñîá ïîñòðîåíèÿ êàñàòåëüíîé ê îêðóæíîñòè. Àðõèìåä ïîñòðîèë êàñàòåëüíóþ ê ñïèðàëè, ñâîåé äëÿ íèõ, Àïîëëîíèé — ê ýëëèïñó, ãèïåðáîëå è ïàðàáîëå. Îäíàêî äðåâíåãðå÷åñêèå ó÷åíûå íå ðåøèëè çàäà÷ó îá ïîòåðå, ò. å. íå íàøëè îáùåãî ìåòîäà, ïðèãîäíîãî äëÿ ïîñòðîåíèÿ êàñàòåëüíîé ê ëþáîé ïëîñêîé êðèâîé â ïðîèçâîëüíîé åå òî÷êå.

C íà÷àëà XVII â. ìíîãèå ó÷åíûå, â òîì ÷èñëå Э. Òîððè÷åëëè, B. Âèâèàíè, Ж. Ðîáåðâàëü, II. Áàððîó ïûòàëèñü íàéòè ðåøåíèå ñ ïîìîùüþ ìåõàíèêè, ïðåäëàãàÿ è êèíåìàòè÷åñêèé ïîäõîä. Ïåðâûå íàéòè ñïîñîá ïîñòðîåíèÿ êàñàòåëüíîé è äèôôåðåíöèàëüíîãî ìåòîäà áûë èçëîæåí â "Ãåîìåòðèè" P. Äåêàðòà. Äàëåå ìåòîä è äàæíûé äëÿ äèôôåðåíöèàëüíîãî èñ÷èñëåíèÿ ñòàë ìåòîä ïîñòðîåíèÿ êàñàòåëüíûõ П. Ôåðìà.

Íåîáõîäèìî íà ðåçóëüòàòàõ èññëåäîâàíèé П. Ôåðìà è ìåòîäîâ äðóãèõ ó÷åíûõ, Г.В. Ëåéáíèö çíà÷èòåëüíî ðàñøèð ïðèìåíåíèå òðåóãîëüíèêà â äèôôåðåíöèàëüíîì èñ÷èñëåíèè.

Îáîçíà÷åíèå ïîíÿòèÿ ïðîèçâîäíîé $\frac{dy}{dx}$ ââåë Г. В. Ëåéáíèö. О него ïîíÿòèå ïîíÿòèå áûëî ïðîèçâîäíàÿ, äëÿ êîòîðîé îí äàë íàçâàíèå ôëþêñèÿ íà êíèã, à äèôôåðåíöèàë.

Â ñåðåäèíå XVIII â. Ýéëåð ñòàë èñïîëüçîâàòü îáîçíà÷åíèå Δ äëÿ îáîçíà÷åíèÿ ïðèðàùåíèÿ ïåðåìåííîé âåëè÷èí, ò. å. $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$ è ò. ä.

Îáîçíà÷åíèå y' è $f'(x)$ ïðîèçâîäíîé ââåë Ж.Л. Ëàãðàíæ.

Ïîçæå ïðåäìåòîì è îòðàñëü ïðèëîæåíèé, ïîëó÷åííûå, êàêèå âîçíèêëè òàêæå åãî ïîíÿòèå â ìåõàíèêå è òåõíèêå. Òàêæå âàæíûõ ïîíÿòèÿ íà ñêîðîñòè ïî ôèçèêå, òàêæå ïîíÿòèÿ ïî ñèëå÷åñòâà òåìà ïî ôîðìóëàì, ñêîðîñòü ðàçëè÷íûõ ïðîöåññîâ ïðîèçâîäíûõ ïî ïðàâèëó è ò. ï. Èçó÷åíèå ñâîéñòâ è ñìûñëà âû÷èñëåíèÿ ïðîèçâîäíûõ, à òàêæå èõ ïðèìåíåíèå è èññëåäîâàíèþ ôóíêöèè ñîñòàâëÿþò ãëàâíûé ïðåäìåò *äèôôåðåíöèàëüíîãî èñ÷èñëåíèÿ*.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, область определения, множество значений, производная, правила нахождения и формулы производных, координатная прямая, числовой промежуток, метод интервалов.

6 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 19. ПРИЗНАКИ ВОЗРАСТАНИЯ И УБЫВАНИЯ ФУНКЦИИ

Ключевые понятия

Функция, промежуток возрастания, промежуток убывания, производная

Вы ознакомитесь с признаками возрастания и убывания функции, овладеете навыками нахождения промежутков возрастания и убывания функции с помощью производной.

ВЫ ЗНАЕТЕ: Геометрическим изображением функции является ее график, а график — это линия, т. е. геометрическое место точек $(x; y)$ на координатной плоскости. Вы умеете находить промежутки возрастания и убывания функции по ее графику, используя определения возрастающей и убывающей функций.

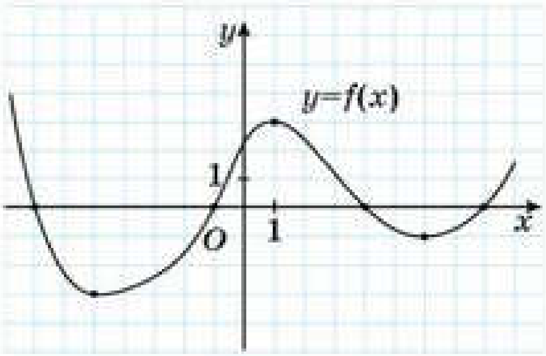


Рис. 54

Дан график функции $y = f(x)$ (рис. 54).

По графику найдите :
1) область определения;
2) множество значений;
3) промежутки возрастания;
4) промежутки убывания.

Рассмотрим способы нахождения промежутков возрастания и убывания функции с помощью производной. Для этого вначале приведем достаточные условия для нахождения промежутков возрастания и убывания функции.

Если для дифференцируемой функции $f(x)$ в каждой точке промежутка X производная функции $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то на данном промежутке X функция возрастает (убывает).

Доказательство .

Для доказательства используем формулу Ж. Л. Лагранжа. Возьмем любые две точки x_1, x_2 из промежутка X, причем $x_1 < x_2$.

Тогда по формуле Ж. Л. Лагранжа

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(a), \qquad (1)$$

т. е. найдется число a из промежутка $(x_1; x_2)$, для которого выполняется равенство (1). Из принадлежности точек $x_1 < x_2$ промежутку X следует, что число a также принадлежит этому промежутку, т. е. $x_1 < a < x_2$.

Если для любого x из промежутка X выполняется условие $f'(x) > 0$, то и $f'(a) > 0$. Мы имеем $x_2 - x_1 > 0$, значит из равенства (1) следует, что $f(x_2)-f(x_1) > 0$, или $f(x_1)<f(x_2)$. Следовательно, по определению возрастающей функции, $f(x)$ возрастает на промежутке X.

Если же для любого x из промежутка X выполняется условие $f'(x) < 0$, то и $f'(a) < 0$. Мы имеем $x_2 - x_1 > 0$. Значит, из равенства (1) следует, что $f(x_2) - f(x_1) < 0$, или $f(x_1) > f(x_2)$. Следовательно, по определению убывающей функции, $f(x)$ убывает на промежутке X. ◪

АЛГОРИТМ Алгоритм нахождения промежутков возрастания и убывания функции:

1) найти область определения функции;
2) найти производную функции;
3) решить неравенство $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$;
4) используя утверждение теоремы, найти промежутки возрастания и убывания функции, т. е. получим, что решения последних неравенств будут промежутками возрастания и убывания функции.

Примечание: если функция $f(x)$ непрерывна на концах промежутка, то эти точки входят в найденные промежутки.

Рассмотрим примеры на применен ие данного алгоритма.

ПРИМЕР **1.** Найдем промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 3x^2 - 12x$.

Решение. 1) Областью определения функции является множество всех действительных чисел;

2) $f'(x) = (3x^2 - 12x)' = 6x - 12$;

3) $f'(x) > 0$, $6x - 12 > 0$, $6x > 12$, $x > 2$, тогда при $x < 2$ получим $f'(x) < 0$;

4) по теореме при $x > 2$ функция возрастает, так как $f'(x) > 0$, при $x < 2$ функция убывает, так как на этом промежутке $f'(x) < 0$.

Ответ: в $(-\infty; 2]$ — функция убывает, в $[2; +\infty)$ — функция возрастает.

ПРИМЕР **2.** Найдем промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2$.

Решение. 1) $D(f) = R$, т. е. множество всех действительных чисел;

2) $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 2\right)' = x^2 - 4;$

3) $f'(x) > 0$, $x^2 - 4 > 0$. Полученное неравенство решим методом интервалов: $x^2 - 4 = 0$, $x_{1,2} = \pm 2$. С помощью точек ± 2 разобьем область определения функции на три интервала и определим знаки производной на каждом из них.

Например, из интервала $(2; +\infty)$ возьмем $x = 3$ и определим знак производной функции. $f'(3) = 3^2 - 4 = 5 > 0$, т. е. при $x > 2$ имеем $f'(x) > 0$. Знаки производной на остальных интервалах ставим чередуя (рис. 55, *а*):

а

Рис. 55

4) функция на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$ возрастает, а на промежутке $[-2; 2]$ — убывает.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ — промежуток возрастания, $[-2; 2]$ — промежуток убывания.

ПРИМЕР 3. Найдем промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 0{,}25x^4 - x$.

Решение. 1) Область определения функции — множество действительных чисел;

2) $f'(x) = (0{,}25x^4 - x)' = x^3 - 1;$

3) $f'(x) > 0$, $x^3 - 1 > 0$. Данное неравенство решаем методом интервалов, т. е. $x^3 - 1 = 0$, $x^3 = 1$, $x = 1$. Область определения функции разделим на два интервала.

При $x = 0$ функция $f'(0) = 0^3 - 1 = -1$. Отсюда имеем: при $x < 1$ $f'(x) < 0$ и при $x > 1$ $f'(x) > 0$ (рис. 55, *б*);

4) на промежутке $(-\infty; 1]$ функция убывает, на промежутке $[1; +\infty)$ — возрастает.

б

Рис. 55

Ответ: на $(-\infty; 1]$ — функция убывает; на $[1; +\infty)$ — функция возрастает.

ПРИМЕР 4. Найдем промежутки убывания и возрастания функции $f(x) = \sin x - 2x$.

Решение. 1) Область определения — множество всех действительных чисел;

2) $f'(x) = (\sin x - 2x)' = \cos x - 2;$

3) определим знак производной. Так как $|\cos x| \leq 1$, поэтому выражение $\cos x - 2$ при любом значении x будет меньше нуля, т. е. $f'(x) < 0$ при любых $x \in R$. Таким образом, данная функция является монотонно убывающей на множестве действительных чисел.

Ответ: функция убывает на R.

?

1. Почему функция $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$ убывает? Ответ обоснуйте.
2. Функция на некотором промежутке монотонно возрастает. Следует ли из этого, что производная функции положительна?
3. Что является графиком функции, производная которой на множестве действительных чисел равна 1? Ответ обоснуйте.

Упражнения

А

19.1. На рисунке 56, *а* изображен график функции $y = f(x)$. По графику найдите промежутки, на которых производная функции: а) положительная; б) отрицательная.

19.2. На рисунке 56, *б* дан график производной функции $y = f(x)$. С помощью графика определите промежутки: а) возрастания; б) убывания; в) знакопостоянства.

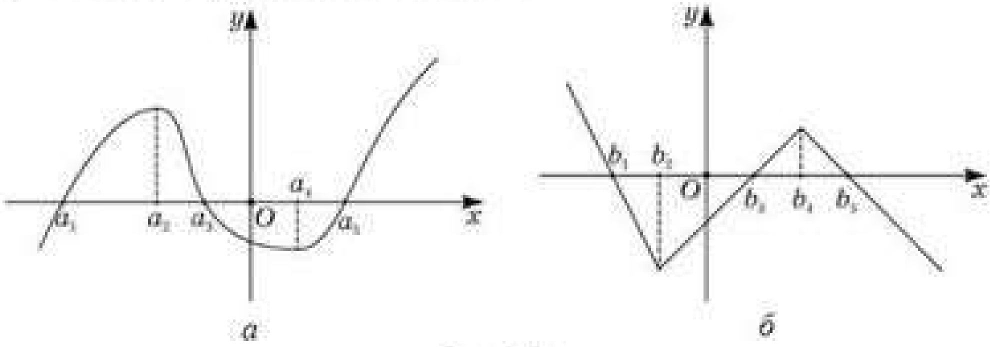


Рис. 56

19.3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$:

а) $f(x) = x + 4$; б) $f(x) = 3x + x^2$; в) $f(x) = 2x^2 - x$; г) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

19.4. Докажите, что данная функция в области определения является возрастающей:

а) $y = \dfrac{1}{5} + 3{,}1x$; б) $y = -\dfrac{4}{x}$; в) $y = 2x^3 + 1{,}4$; г) $y = 3 - \dfrac{2}{x}$.

19.5. Докажите, что данная функция в области определения является убывающей:

а) $y = 7 - 5x$; б) $y = 2 - 3x^3$; в) $y = \dfrac{2}{x}$; г) $y = 6 + \dfrac{3}{x}$.

В

19.6. Найдите промежутки возрастания (убывания) функции:

а) $f(x) = x^3 + 4x - 7$; б) $f(x) = 5x^2 - 3x - 8$;

в) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$; г) $y = 3x^3 - x - 2$.

19.7. Докажите, что функция $y = f(x)$ является возрастающей:

а) $y = x^3 + x$; б) $y = -\dfrac{4}{x}$.

19.8. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $f(x) = x^3 - 3x + 5$; б) $f(x) = x^3 - 4x + 7$;

в) $f(x) = x^5 + 5$; г) $y = x^4 - 4x$.

19.9. Докажите, что на множестве действительных чисел функция $f(x)$ является убывающей, а $g(x)$ — возрастающей:

а) $f(x) = 5 - x^7$; б) $g(x) = 4 + \frac{2}{3}x^3$;
в) $f(x) = -8x - \sin 2x$; г) $g(x) = -\cos 6x + 7x$.

19.10. При каком значении a на множестве действительных чисел функция $f(x) = \frac{x^3}{3} + ax^2 + x$ является возрастающей?

19.11. Найдите число целых значений x на промежутке убывания функции.

19.12. Производная функции $f(x)$ равна $f'(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 2)^2$. Найдите сумму длин промежутков убывания функции.

19.13. Производная функции $f(x)$ равна $f'(x) = (x^2-1)(x^2 - 9)(x^2 - 16)$. Найдите сумму длин промежутков убывания функции.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, область определения функции, правила нахождения и формулы производных, признаки возрастания и убывания функции.

§20. КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ И ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Ключевые понятия

Функция, область определения функции, критические точки, экстремумы функции

Вы ознакомитесь с понятием *критическая точка функции*, условием существования производной функции; научитесь находить критические точки и экстремумы функции с помощью ее производной.

ВСПОМНИТЕ

Укажите точки экстремума, назовите точки минимума и максимума, используя рисунки 55, 56.

При исследовании функции и построении ее графика нужно не только уметь находить промежутки возрастания и убывания функций, которые вы научились находить с помощью производной в предыдущем параграфе, но также надо уметь находить *критические точки* и *экстремумы функции* .

Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются ***критическими точками*** .

Критические точки могут быть точками экстремума.

Необходимое условие существования экстремума функции.

Теорема. *Если точка x_0 является точкой экстремума и в окрестности этой точки функция имеет производную $f'(x)$, то она в этой точке равна нулю, т. е. $f'(x_0) = 0$.*

Теорема, обратная этой теореме, не всегда верна, т. е. не всякая критическая точка может быть точкой экстремума. Приведем пример.

ПРИМЕР

1. Дана функция $y = x^3 - 1$. Найдем производную функции. Производная функции $f'(x) = 3x^2$ всюду неотрицательна. В точке $x = 0$ производная $f'(0) = 0$.

Из графика (рис. 57) видно, что точка $x = 0$ не является точкой экстремума, хотя она критическая точка.

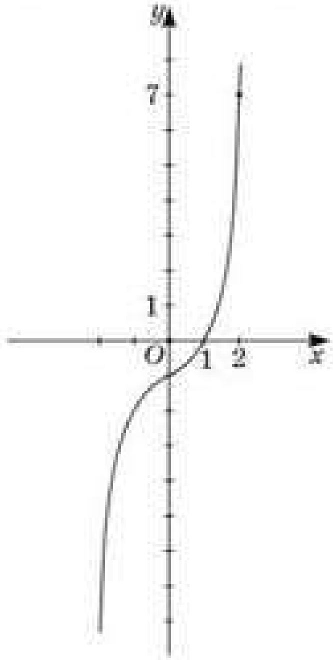


Рис. 57

Достаточные условия существования точек экстремума (максимума и минимума).

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и на интервале $(a; x_0)$ $f'(x) > 0$, ($f'(x) < 0$), а на интервале $(x_0; b)$ $f'(x) < 0$, ($f'(x) > 0$), то точка x_0 является точкой максимума (минимума) функции $f(x)$.*

Удобно пользоваться упрощенной формулировкой этого условия: если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то x_0 является точкой максимума (минимума).

Доказательство теоремы приведем для точки максимума.

Доказательство.

Если функция на интервале $(a; x_0)$ непрерывна и $f'(x) > 0$, тогда на промежутке $(a; x_0]$ функция возрастает, поэтому для любого x выполняется условие $f(x) < f(x_0)$. Если функция на промежутке $[x_0; b)$ непрерывна и $f'(x) < 0$, то она на $[x_0; b)$ убывает, поэтому на интервале $(x_0; b)$ для всех x выполняется условие $f(x) < f(x_0)$. Следовательно, точка x_0 является точкой максимума функции. ◻

Самостоятельно докажите, что точка x_0 является точкой минимума.

АЛГОРИТМ

Алгоритм нахождения точек экстремума функции:

1) найти производную функции;

2) найти критические точки, т. е. решить уравнение $f'(x) = 0$;

3) с помощью метода интервалов определить знаки производной в окрестностях критических точек;

4) используя достаточные условия существования экстремума, найти точки максимума и минимума.

Рассмотрим примеры на нахождение точек экстремума.

ПРИМЕР **2.** Найдем точки экстремума функции $y = 2x^3 - x^2 - 4x + 5$.

Решение . Для нахождения точек экстремума используем данный алгоритм:

1) $y' = (2x^3 - x^2 - 4x + 5)' = 6x^2 - 2x - 4 = 2(3x^2 - x - 2)$;

2) $2(3x^2 - x - 2) = 0$, $3x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 1$;

3) используя критические точки $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 1$, разделим область определения функции на промежутки и определим знаки производной на каждом из промежутков. Например, из промежутка $\left[-\frac{2}{3};\ 1\right]$ возьмем точку $x = 0$. Найдем $f'(0) = 2\cdot(3\cdot 0^2 - 0 - 2) = -4 < 0$. Знаки производной на других интервалах показаны на рисунке 58:

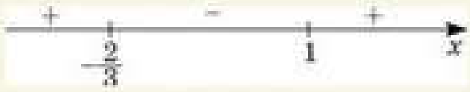


Рис. 58

4) в критической точке $x = -\frac{2}{3}$ производная функции меняет свой знак с плюса на минус, а в критической точке $x_2 = 1$ — с минуса на плюс. Таким образом, по достаточным условиям существования точек экстремума $x_1 = -\frac{2}{3}$ — точка максимума, а $x_2 = 1$ — точка минимума функции.

Ответ : $x_{max} = -\frac{2}{3}$, $x_{min} = 1$.

ПРИМЕР **3.** Найдем экстремумы функции $y = -\frac{2}{3}x^3 + 8x + 10$.

Решение . 1) Областью определения функции является множество действительных чисел;

2) $y'(x) = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 8x + 10\right)' = -2x^2 + 8 = -2(x^2 - 4)$;

3) $y'(x) = 0$, $-2(x^2 - 4) = 0$, $x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$.

Разделим область определения функции на интервалы и определим знаки производной на интервалах. Например, из промежутка $[-2;\ 2]$ возьмем точку $x = 0$. Найдем $f'(0) = -2\cdot 0^2 + 8 = 8 > 0$, тогда знаки производной на интервалах можно показать следующим образом (рис. 59):

Рис. 59

4) $x_1 = -2$ — точка минимума, $x_2 = 2$ — точка максимума. Теперь вычислим значения функции в точках экстремума:

$f(-2) = -\frac{2}{3}\cdot(-2)^3 + 8\cdot(-2) + 10 = \frac{16}{3} - 6 = \frac{16 - 18}{3} = -\frac{2}{3}$ — минимум функции,

а $f(2) = -\frac{2}{3}\cdot 2^3 + 8\cdot 2 + 10 = -\frac{16}{3} + 26 = \frac{-16 + 78}{3} = \frac{62}{3}$ — максимум функции.

Ответ : $\min f(x) = f(-2) = -\frac{2}{3}$; $\max f(x) = f(2) = \frac{62}{3}$.

ПРИМЕР 4. Выясним, сколько действительных корней имеет уравнение $-12x^4 + 16x^3 - 3 = 0$ на отрезке $[0;\ 1]$.

Решение . Рассмотрим функцию $f(x) = -12x^4 + 16x^3 - 3$. Областью определения функции является множество всех действительных чисел. Найдем критические точки функции $f(x)$, для этого вычислим ее производную $f'(x) = (-12x^4 + 16x^3 - 3)' = -48x^3 + 48x^2 = -48x^2(x - 1)$.

Теперь решим уравнение $f'(x) = 0$, т. е. $48x^2(x - 1) = 0$. Производная равна нулю в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Вычислим значения функции $f(x)$ в критических точках: $f(0) = -12 \cdot 0^4 + 16 \cdot 0^3 - 3 = -3$; $f(1) = -12 \cdot 1^4 + 16 \cdot 1^3 - 3 = 1$. На отрезке $[0;\ 1]$ функция $f(x)$ возрастает от -3 до 1. Тогда по свойству непрерывных функций на отрезке в промежутке $[0;\ 1]$ функция $f(x)$ обращается в нуль только в одной точке. Следовательно, уравнение имеет один действительный корень.

Ответ : один действительный коре нь.

?

1. Может ли быть точкой экстремума $x = a$ для функции $f(x)$, определенной на промежутке $[a;\ b]$?
2. Могут ли быть точки экстремума у убывающей функции?
3. Может ли иметь четная (нечетная) функция одну, две, три точки экстремума? Ответ обоснуйте.

Упражнения

А

20.1 . С помощью графика функции $f(x)$ найдите промежутки ее возрастания, убывания и точки экстремума (рис. 60):

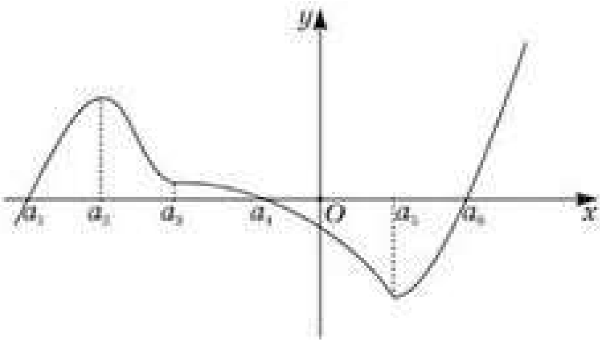


Рис. 60

Найдите критические точки функции. Укажите, какие из них являются точками минимума, какие — точками максимума **(20.2—20.3)** :

20.2. а) $f(x) = 3x^2 - 2$; б) $f(x) = 7x^2 + 3$;

в) $f(x) = 3x - x^2 + 1$; г) $f(x) = 5x^2 - 8x - 3$.

20.3. а) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$; б) $f(x) = -4x^2 + 1$;

в) $f(x) = x^2 - \frac{x}{3}$; г) $f(x) = -x^2 + 3x$.

20.4. Докажите, что данная функция не имеет точек экстремума:

а) $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{9}{x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x} - 5x$.

B

20.5. Найдите точки минимума и максимума функции:

а) $f(x) = \frac{1}{5}\cos x + 1$; б) $f(x) = x + 2\sin x$.

20.6. Найдите критические точки функции. Определите, какие из них являются точками максимума, какие — точками минимума:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x - x^3$; б) $f(x) = 2x^4 - 8x$;

в) $f(x) = x^4 - 32x + 1$; г) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;

д) $y = x^2(x + 1)$; е) $y = 3x^4 + 4x^3$.

20.7. Используя следующие свойства, постройте эскиз графика функции:

а) $D(f) = [-2;\ 4]$; при $x \in (-2;\ 1)$ $f'(x) < 0$; при $x \in (1;\ 4)$ $f'(x) > 0$;

б) $D(f) = [-2;\ 4]$; при $x \in (-2;\ -1)$ $f'(x) > 0$; при $x \in (-1;\ 4)$ $f'(x) < 0$;

в) $D(f) = [a;\ b]$; x_1 — точка минимума, x_2 — точка максимума и $f(a) < f(b)$;

г) $D(f) = [a;\ b]$; x_1 — точка минимума, x_2 — точка максимума и $f(a) = f(b)$.

20.8. Докажите, что функция $f(x)$ не имеет критических точек:

а) $f(x) = 15 + x$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x + 1$;

в) $f(x) = x^3 + 2$; г) $f(x) = x^5 + x$.

20.9. Найдите экстремумы функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = \frac{3}{x} - 12x^2$; б) $f(x) = \frac{2}{x} - x^2$.

20.10. Найдите, сколько корней имеет уравнение на заданном отрезке:

а) $x^3 - 12x + 10 = 0$, $[-2;\ 2]$;

б) $x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$, $[-1;\ 1]$.

20.11. Найдите критические точки функции:

а) $f(x) = (x - 1)^2\,(x + 2)^2$; б) $f(x) = (x + 1)^2\,(x - 2)^2$.

20.12. Приведите примеры функций, имеющих бесконечное число точек экстремума.

20.13. Найдите сумму ординат точек экстремума функции $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, область определения, множество значений, график и свойства функции, правила нахождения и формулы производной, признаки возрастания и убывания функции, точки экстремума.

§21. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

Ключевые понятия

Исследование функции, свойства функции, график функции

Вы ознакомитесь с алгоритмом исследования функции с помощью производной, научитесь строить графики функции на основе исследований.

ВЫ ЗНАЕТЕ: Области определения функции, ознакомились с ее свойствами, научились находить промежутки возрастания и убывания с помощью производной, экстремумы функции.

Систематизируя эти знания, научимся проводить исследование функции с помощью производной и на основе исследования строить график.

АЛГОРИТМ Алгоритм исследования функции с помощью производной и построения ее графика:

1) найти область определения функции;
2) определить четность, нечетность и периодичность функции;
3) найти координаты точек пересечения графика функции с осями координат;
4) найти промежутки знакопостоянства функции;
5) найти промежутки возрастания и убывания, экстремумы;
6) занести все полученные данные в таблицу;
7) построить график функции.

ПРИМЕР **1.** Исследуем функцию $y = x^3 + 3x^2$ и построим график.

Решение. Для этого используем алгоритм исследования функции:

1) задана рациональная функция, поэтому ее областью определения является множество всех действительных чисел, т. е. $D(y) = R$;

2) $y(-x) = (-x)^3 + 3\cdot(-x)^2(-x)^2 = -x^3 + 3x^2$ — функция ни четная, ни нечетная; она непериодическая;

3) найдем точки пересечения графика функции с осями координат:

с осью Oy: $x = 0$, $y = 0^3 + 3\cdot 0^2 = 0$, $(0;\ 0)$;

с осью Ox: $y = 0$, $x^3 + 3x^2 = 0$, $x^2(x + 3) = 0$, $(0;\ 0)$, $(-3;\ 0)$;

4) чтобы определить промежутки знакопостоянства функции, разобьем область определения на интервалы, используя точки $x = 0$ и $x = -3$, и определим знаки функции на интервалах. Например, $x = 2$, $y(2) = 2^3 + 3\cdot 2^2 = 20 > 0$; $x = -2$, $y(-2) = 4 > 0$; $x = -4$, $y(-4) = -16 < 0$ (рис. 61).

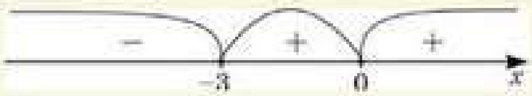


Рис. 61

ПРИМЕР

Отсюда на промежутках $(-3;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ функция $f(x) > 0$, на промежутке $(-\infty;\ -3)$ функция $f(x) < 0$;

5) $y' = (x^3 + 3x^2)' = 3x^2 + 6x$, $3x^2 + 6x = 0$ или $3x(x + 2) = 0$.

Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ есть критические точки.

Разобьем область определения функции на интервалы с помощью $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ и, используя метод интервалов, определим знаки производной на интер валах.

Для этого возьмем точку $x = 1$, принадлежащую промежутку $[0;\ +\infty)$, и определим знак производной функции $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 9 > 0$, т. е. при $x > 0$ $f'(x) > 0$. По методу интервалов определим знаки производной на других промежутках (рис. 62):

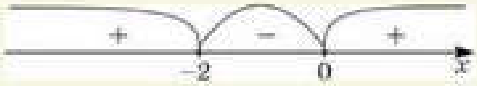


Рис. 62

На промежутках $(-\infty;\ -2]$ и $[0;\ +\infty)$ функция возрастает, так как $f'(x) > 0$; на промежутке $[-2;\ 0]$ функция убывает, так как $f'(x) < 0$.

Отсюда $x = -2$ — точка максимума; $x = 0$ — точка минимума.

Вычислим значения функции в точках экстремума:

$y(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 = 4$; $(-2;\ 4)$; $(0;\ 0)$; $y(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0$.

Получим точки графика $(-2;\ 4)$; $(0;\ 0)$;

6) занесем полученные данные в таблицу 11:

Таблица 11

x	$(-\infty;\ -3)$	-3	$(-3;\ -2)$	-2	$(-2;\ 0)$	0	$(0;\ +\infty)$
$f'(x)$	+	9	+	0	–	0	+
$f(x)$	Отрицательна, монотонно возрастает	0	Положительна, монотонно возрастает	4 max	Положительна, монотонно убывает	0 min	Положительна, монотонно возрастает

7) строим график функции. График функции дан на рисунке 63.

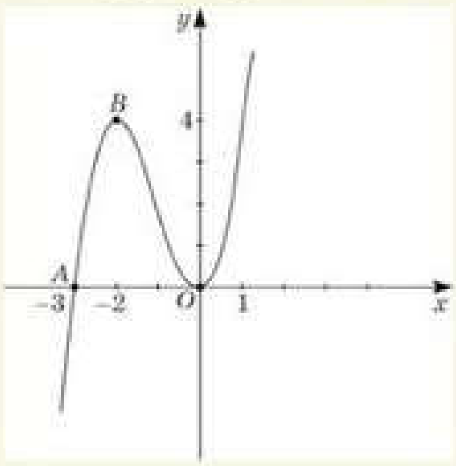


Рис. 63

1. Какие свойства функции, исходя из 2-го пункта алгоритма исследования функции, выполняются одновременно? Ответ обоснуйте.
2. В каких случаях 5-й пункт алгоритма не рассматривается полностью? Ответ обоснуйте.

Упражнения

A

21.1. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y = 2x + 1$; б) $y = 5 - x$;

в) $y = x^2 + 3x - 5$; г) $y = (x - 2)^2$.

21.2. Найдите промежутки возрастания и убывания, экстремумы функции:

а) $y = -0{,}5x^2 + x$; б) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$;

в) $y = 2x^2 - x + 3$; г) $y = 5x - 2x^2 - 2$.

21.3. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y = 4x - x^2$; б) $y = 8x - \frac{1}{4}x^2$;

в) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$; г) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$;

д) $y = 3x^2 - 10x + 3$; е) $y = 2x^2 + 5x + 2$.

21.4. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $f(x) = x^3 + 1$; б) $f(x) = x^3 + 3x - 5$;

в) $f(x) = 2x - \cos x$; г) $f(x) = -3x + \sin x$.

B

Исследуйте функции и постройте их графики **(21.5—21.7)**:

21.5. а) $y = x^2(x + 3)$; б) $y = x^3 + 3x - 5$.

21.6. а) $y = 4x - x^4$; б) $y = x^4 - 8x^2$.

21.7. а) $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, область определения функции, значения функции, производная, критические точки, свойства непрерывных функций на отрезке.

§ 22. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Ключевые понятия

Функция, значение функции, наибольшее значение, наименьшее значение

Вы овладеете навыками нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке, использования их при решении задач, в том числе геометрических.

На практике очень часто встречаются задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке. В данном параграфе рассмотрим способы нахождения таких значений с помощью производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную во всех внутренних точках отрезка. Теорема о существовании наибольшего и наименьшего значений таких функций была дана в § 12 главы V.

АЛГОРИТМ Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке:

1) найти производную функции $f'(x)$;

2) решить уравнение $f'(x) = 0$ и определить критические точки;

3) выяснить, принадлежат ли полученные критические точки данному отрезку;

4) найти значения функции на концах отрезка и в критических точках, принадлежащих отрезку;

5) сравнивая полученные значения функции, определить наибольшее и наименьшее значения.

ПРИМЕР **1.** Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x^2$ на отрезке $[-2; 4]$.

Решение. Используем данный алгоритм:

1) $f'(x) = 3x^2 - 6x$;

2) решим уравнение $f'(x) = 0$:

$3x^2 - 6x = 0$ $3x(x - 2) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$;

3) $0 \in [-2; 4]$, $2 \in [-2; 4]$;

4) $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$,

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$,

$f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 = 16$,

$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 = -20$;

5) итак, $f(0) = 0$; $f(2) = -4$; $f(4) = 16$; $f(-2) = -20$. Наименьшее значение функции $f(-2) = -20$; наибольшее значение функции $f(4) = 16$.

Ответ: 16; –20.

ПРИМЕР **2.** Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Решение. Используя данный алгоритм получим:

1) $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x^2}$;

2) решим уравнение $3x^2 - \dfrac{3}{x^2} = 0$:
$3x^4 - 3 = 0$,
$3(x^4 - 1) = 0$, $x^4 - 1 = 0$, $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 + 1 \neq 0$, $x_{1,2} = \pm 1$;

3) $x_1 = -1$ не принадлежит отрезку $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$, поэтому вычислим значения функции в точках $x = 1$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 2$;

4) $f(1) = 1^3 + \dfrac{3}{1} = 1 + 3 = 4$,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + 6 = 6\frac{1}{8} = 6{,}125, \quad f(2) = 2^3 + \frac{3}{2} = 8 + 1{,}5 = 9{,}5.$$

Из полученных значений функции $f(1) = 4$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 6{,}125$, $f(2) = 9{,}5$; наименьшее значение $f(1) = 4$, наибольшее значение $f(2) = 9{,}5$.

Ответ: 9,5; 4.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции встречается при решении практических задач. В таких случаях часто используется следующее свойство непрерывных функций: если на данном промежутке функция непрерывна и имеет только один экстремум, то в случае минимума он будет наименьшим значением функции, в случае максимума — наибольшим значением функции.

ПРИМЕР **3.** Из квадратного листа жести со стороной a надо изготовить открытую сверху коробку, вырезав по углам квадратики и загнув образовавшиеся кромки (рис. 64). Определим, какой должна быть длина стороны вырезанного квадратика, чтобы объем коробки был максимальным.

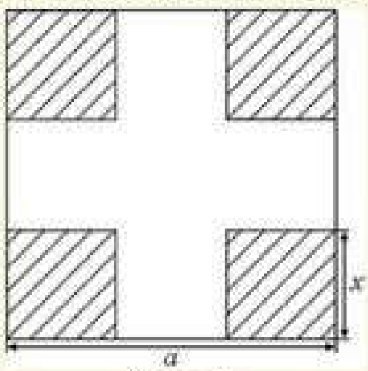


Рис. 64

Решение. Обозначим через x длину стороны вырезанного квадрата. Тогда длина стороны основания коробки будет $a - 2x$, объем — $V(x) = (a - 2x)^2 x = (a^2 - 4ax + 4x^2)x = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$, где $x \in \left[0; \dfrac{a}{2}\right]$ (так как $a - 2x \geq 0$). Теперь определим наибольшее значение функции $V(x)$ на отрезке $\left[0; \dfrac{a}{2}\right]$:

ПРИМЕР $V'(x) = (a^2x - 4ax^2 + 4x^3)' = a^2 - 8ax + 12x^2$;

$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$, отсюда $x_1 = \frac{a}{6}$, $x_2 = \frac{a}{2}$;

$\frac{a}{6} \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$; $\frac{a}{2} \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$. Вычислим значение $V(x)$ в точках $x = 0$, $x = \frac{a}{6}$, $x = \frac{a}{2}$:

$V(0) = 0$, $V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$, $V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$.

Следовательно, коробка будет иметь наибольший объем, если сторона вырезанного квадрата будет равна $\frac{a}{6}$.

Ответ: $\frac{a}{6}$.

1. Обязательно ли значение функции в точке максимума должно быть равным наибольшему значению функции?
2. Пусть $f(x_0)$ — наибольшее (наименьшее) значение функции на отрезке $[a; b]$. Следует ли из этого, что точка является точкой максимума (минимума)?
3. Может ли непрерывная функция иметь наибольшее или наименьшее значение на некотором: а) отрезке; б) ограниченном промежутке? Ответ обоснуйте.

Упражнения

А

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на заданных промежутках **(22.1—22.3)**:

22.1. а) $f(x) = 2x - 3$, $[-1; 1]$; б) $f(x) = 5 - 3x$, $[-2; 1]$.

22.2. а) $f(x) = 2x^2 - 8x$, $[-2; 1]$; б) $f(x) = x - \frac{4}{x}$, $[1; 4]$.

22.3. а) $f(x) = \frac{x - 1}{3x}$, $[-2; 0]$; б) $f(x) = \frac{2x}{x + 1}$, $[-2; 0]$.

22.4. а) Число 7 разложите на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим;
б) число 10 разложите на два слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

22.5. а) На какие два положительных множителя нужно разложить число 64, чтобы сумма множителей была наименьшей?
б) На какие два положительных множителя нужно разложить число 100, чтобы сумма множителей была наибольшей?

22.6. а) Материальная точка движется по закону $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t + 3$. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции за первые 2 с;
б) материальная точка движется по закону $x(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 - 3t + 10$. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции за первые 4 с.

В

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на заданных промежутках **(22.7—22.10):**

22.7. а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 2$, $[-4;\ 2]$;
б) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$, $[1;\ 4]$.

22.8. а) $f(x) = 2x^2 - \frac{8}{x} + 3$, $[-5;\ 1]$; б) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2} - 5$, $[\frac{1}{2};\ 3]$.

22.9. а) $f(x) = \sin x + x$, $[-\pi;\ \pi]$; б) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$, $[0;\ 2\pi]$.

22.10. а) $f(x) = \frac{1}{x} + x^2$, $[0,5;\ 1]$; б) $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$, $[-1;\ 0]$.

22.11. а) На какие два положительных слагаемых нужно разложить число 75, чтобы произведение одного из них на квадратный корень другого было наибольшим?
б) Число 32 разложите на два положительных множителя так, чтобы сумма первого множителя и квадратного корня из второго множителя была наименьшей.

22.12. а) Число 18 разложите на два слагаемых так, чтобы сумма удвоенного одного слагаемого и квадрата другого слагаемого была наименьшей;
б) число 16 разложите на два слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

22.13. а) Определите, какой из всех прямоугольников, вписанных в окружность радиусом 1 см, имеет наибольшую площадь. Найдите эту площадь;
б) данный отрезок, равный 12 см, требуется согнуть под прямым углом так, чтобы площадь квадрата, построенного на отрезке, соединяющем концы согнутого отрезка, была наименьшей.

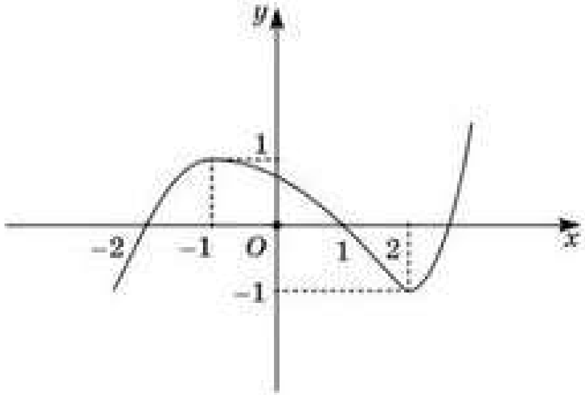
22.14. а) Прямоугольный участок нужно оградить забором длиной в 80 м так, чтобы площадь была наибольшей. Найдите размеры участка;
б) прямоугольный участок нужно оградить с трех сторон забором длиной в 16 м так, чтобы площадь была наибольшей. Найдите размеры участка.

22.15. а) Найдите острые углы прямоугольного треугольника с суммой гипотенузы и одного катета, равной 21, и имеющего наибольшую площадь среди прямоугольных треугольников;
б) среди прямоугольных треугольников с гипотенузой, равной $\sqrt{2}$, найдите прямоугольный треугольник с наибольшим периметром.

22.16. Вокруг прямоугольного поля площадью $S = 400$ га должны быть посажены со всех сторон деревья в виде полосы шириной $l = 10$ м. Каковы должны быть линейные размеры поля, чтобы площадь, занимаемая деревьями, была наименьшей?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции по данному графику:



A) $(-1;\ 2)$ — возрастает; $(-\infty;\ -1)$ и $(2;\ +\infty)$ — убывает;
B) $(-2;\ 1)$ — убывает; $(1;\ +\infty)$ — возрастает;
C) $(-\infty;\ -1]$ и $[2;\ +\infty)$ — возрастает; $[-1;\ 2]$ — убывает;
D) $(-\infty;\ -1)$ и $(2;\ +\infty)$ — убывает; $(-1;\ 2)$ — возрастает.

2. Найдите точки экстремума функции по графику, данному в задании 1:
A) $x_{min} = -2,\ x_{max} = 1$; B) $x_{min} = -1,\ x_{max} = 2$;
C) $x_{min} = 2,\ x_{max} = -1$; D) $x_{min} = 1,\ x_{max} = 1$.

3. Найдите промежуток убывания функции $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$:
A) $[-1;\ 0)$; B) $[1;\ +\infty)$; C) $[-1;\ 0]$; D) $(-\infty;\ -1]$.

4. Вычислите точки экстремума функции $f(x) = 0{,}5x^4 - 2x$:
A) $x_{max} = 1,\ x_{min} = -1$; B) $x_{max} = -1,\ x_{min} = 1$;
C) $x_{min} = 1$; D) $x_{max} = -1$.

5. Найдите промежуток возрастания функции $f(x) = x\ \ + 5$:
A) $(-\infty;\ +\infty)$; B) $(-\infty;\ 5)$; C) $(5;\ +\infty)$; D) нет.

6. Определите количество критических точек функции $y = \frac{x^2 - 1}{x}$:
A) нет; B) 5; C) 2; D) –5.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x$ на отрезке $[0;\ 1]$:
A) 2; 0; B) 0; –2; C) 3; 0; D) –3; 0.

8. Найдите промежутки возрастания функции $y = 3x^2 - x^3$:
A) $(-\infty;\ -2]$ и $[0;\ +\infty)$; B) $(-\infty;\ -2]$ и $[0;\ +\infty)$;
C) $(-\infty;\ 0]$ и $[2;\ +\infty)$; D) $[0;\ 2]$.

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt{3}x + \sin 2x$ на отрезке $[0;\ \pi]$:
A) $\frac{\pi}{6};\ \pi$; B) $\pi\sqrt{3};\ \pi$; C) $0;\ \pi\sqrt{3}$; D) $0;\ \pi$.

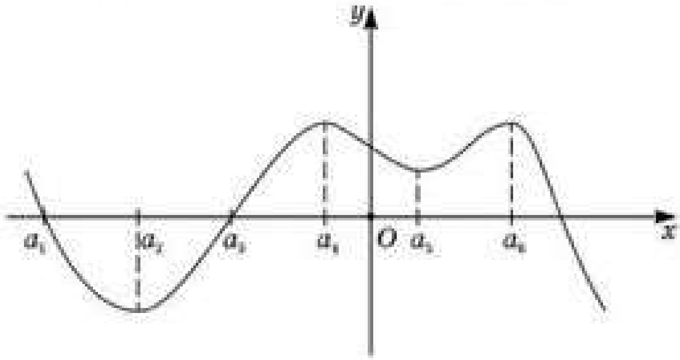
10. Вычислите максимум функции $f(x) = -x^3 - 2$:

A) 2; B) –2; C) 0; D) нет.

11. Найдите точку минимума функции $f(x) = x^2 - 1$:

A) $x_{min} = -3$; B) $x_{min} = -1$; C) $x_{min} = 1$; D) $x_{min} = 0$.

12. Найдите точки экстремума по заданному графику функции:



A) a_1; a_3; a_6; B) a_1; a_4; C) a_2; a_4; a_5; a_6; D) a_1; a_4; a_6.

13. Вычислите наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 8x$ на отрезке $[-2; 1]$:

A) 2; B) –7; C) 3; D) 1.

14. Найдите промежутки убывания функции $y = 1 - x^2$:

A) $[-1; 1]$; B) $[-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$;
C) $(-\infty; 0]$; D) $[0; +\infty)$.

15. Производная функции $f(x)$ равна $f'(x) = x(4 - x)$. Найдите сумму длин промежутков возрастания функции:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5.

16. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \frac{1}{3}\sin 3x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

A) 9; 1. B) –1; 0. C) $\frac{1}{3}$; 0. D) 0; $-\frac{1}{3}$.

17. Найдите промежутки убывания функции $y(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$:

A) нет; B) $[-3; 3]$;
C) $(-\infty; -3]$ и $[0; 3)$; D) $(-\infty; -3)$ и $(0; +\infty)$.

18. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 2$ на отрезке $[2; 3]$:

A) 4; 1; B) –4; 7; C) 2; 7; D) 6; 12.

19. Найдите нули функции $y = \frac{3}{x} - \frac{x}{3}$:

A) –3; 0; 3; B) 3; –3; C) –3; 0; D) 0; 3.

20. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 4\sin^2 x + 5\cos^2 x$:
A) -2; B) 0; C) 5; D) 2.

21. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt{2}x + \cos 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$:
A) 1; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\left[\frac{\pi}{4} + 1\right]$; B) 0; $\pi\sqrt{2}$; C) $\frac{\pi}{4}$; π; D) $\pi\sqrt{2}$; π.

Задания на математическую грамотность

22. Сколько трехзначных нечетных чисел можно составить из цифр 2; 3; 5 так, чтобы цифры были разные:
A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

23. Две бригады отремонтировали 40 км дороги. Первая бригада в день ремонтировала 9,5 км, вторая бригада — 7 км дороги. Если первая бригада работала на один день меньше, чем вторая, то укажите верное утверждение:
A) первая бригада работала три дня, вторая бригада — четыре дня;
B) первая бригада работала четыре дня, вторая бригада — три дня;
C) первая бригада отремонтировала на 3 км больше, чем вторая бригада;
D) вторая бригада отремонтировала на 2 км больше, чем первая бригада;
E) вторая бригада отремонтировала на 3 км больше, чем первая бригада.

24. Сколько натуральных чисел, кратных 7, принадлежат промежутку [209; 245):
A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

25. На сколько процентов изменится значение произведения двух чисел, если одно из них уменьшить на 25%, а другое уменьшить на 40%:
A) уменьшится на 40%; B) уменьшится на 45%;
C) уменьшится на 20%; D) уменьшится на 50%;
E) увеличится на 35%?

ÈÑÒÎÐÈ×ÅÑÊÀß ÑÏÐÀÂÊÀ

Ëàòèíñêèå ñëîâà *maximum* è *minimum* îçíà+àþò, ñîîòâåòñòâåííî, *íàèáîëüøåå* è *íàèìåíüøåå* çíà+åíèÿ. Íåêîòîðûå +àñòíûå âîïðîñû îòûñêàíèÿ íàèáîëüøèõ è íàèìåíüøèõ çíà+åíèé ãåîìåòðè+åñêèõ âåëè+èí çíàêîìû åùå äðåâíåãðå+åñêèì ìàòåìàòèêàì.

Â 27-ì ïðåäëîæåíèè VI êíèãè “Íà+àë” Åâêëèäà äîêàçûâàåòñÿ (+èñòî ãåîìåòðè+åñêè) ïðåäëîæåíèå, ñîäåðæàíèå êîòîðîãî ñâîäèòñÿ ê ñëåäóþùåìó: èç âñåõ ïàðàëëåëîãðàììîâ, âïèñàííûõ â äàííûé òðåóãîëüíèê, íàèáîëüøóþ ïëîùàäü èìååò òîò, îñíîâàíèå êîòîðîãî ðàâíî ïîëîâèíå îñíîâàíèÿ òðåóãîëüíèêà.

Â íà+àëå ÕVII â. ðàçíîîáðàçíûå çàäà+è åñòåñòâîçíàíèÿ, íàóêè è òåõíèêè òðåáîâàëè ñîçäàíèÿ íîâûõ ìåòîäîâ äëÿ íàõîæäåíèÿ íàèáîëüøèõ è íàèìåíüøèõ çíà+åíèé âåëè+èí. Óæå È. Êåïëåð (1615) âûñêàçàë èäåþ î òîì, +òî âáëèçè ìàêñèìóìà âåëè+èíû èçìåíåíèÿ åå íåçàìåòíû, ïðåäâîñõèòèâ, òàêèì îáðàçîì, èäåþ ïðèðàâíèâàíèÿ ê íóëþ ïðîèçâîäíîé ïðè îòûñêàíèè ýêñòðåìóìà. Он â ñâîåé ðàáîòå “Ìåòîä èññëåäîâàíèÿ ìàêñèìóìà è ìèíèìóìà” íå èñïîëüçóåò ïîíÿòèÿ ïðåäåëà è ïðîèçâîäíîé, åãî ìåòîä ïîèñêà ýêñòðåìóìà ñîâïàäàåò, ïî ñóùåñòâó, ñ ìåòîäîì Ã. Ëåéáíèöà è È. Íüþòîíà, êîòîðûå ïîëüçóþòñÿ èì, è â îñíîâå êîòîðîãî ëåæèò ïðèðàâíèâàíèå ê íóëþ ïðîèçâîäíîé.

Ï. Ôåðìà ïðèìåíèë ñâîé ìåòîä ê ðåøåíèþ çàäà+, â êîòîðûõ íóæíî íàéòè íàèáîëüøèé, öèëèíäð ìàêñèìàëüíûé âïèñàí â øàð, è ê ðåøåíèþ äðóãèõ çàäà+. Ñëåäóåò îòìåòèòü, +òî он ïðèìåíÿë ñâîé ìåòîä ëèøü ê öåëûì àëãåáðàè+åñêèì ôóíêöèÿì. Ó íåãî åùå íåò êðèòåðèÿ ðàçëè+åíèÿ ýêñòðåìóìà (ìàêñèìóìà îò ìèíèìóìà). Îí æå ñìîã ïîçæå ñêàçàòü î ïðàâèëå íàõîæäåíèÿ ìàêñèìóìà è ìèíèìóìà, ïðåäëîæåííîì ãîëëàíäöåì Ãóääå â 1658 ã.

È. Íüþòîí (1671), ãîâîðÿ î îïðåäåëåíèè íàèáîëüøèõ è íàèìåíüøèõ çíà+åíèé âåëè+èí, ôîðìóëèðîâàë òàê íàçûâàåìîå ïðàâèëî ìîìåíòîâ: “Êîãäà âåëè+èíà åñòü íàèáîëüøàÿ èëè íàèìåíüøàÿ èç âñåõ âîçìîæíûõ, òî îíà â ýòîò ìîìåíò íå òå+åò íè âïåðåä, íè íàçàä”. Íüþòîí ïðèâîäèò äâà ïðèìåðà è ñàì îòìå+àåò, +òî åãî ïðàâèëî áîëåå îáùåå, +åì ïðàâèëî Ãóääå, òàê êàê åãî ìîæíî ïðèìåíÿòü è ê èððàöèîíàëüíîñòÿì.

Â èññëåäîâàíèå ïðîáëåìû ìàêñèìóìà è ìèíèìóìà âàæíûé âêëàä âíåñ Ã. Ëåéáíèö. Â ñâîåì “Íîâîì ìåòîäå” (1684) îí ïðèìåíÿåò ïîíÿòèå äèôôåðåíöèàëà äëÿ èññëåäîâàíèÿ âîçðàñòàíèÿ è óáûâàíèÿ ôóíêöèè, ò. å. ðå+ü èäåò î èçó+åíèè ñàìîé òåîðåìû: +òî åñëè ïðîèçâîäíàÿ (ó Ã. Ëåéáíèöà — äèôôåðåíöèàë) ôóíêöèè $y(x)$ íà íåêîòîðîì ó+àñòêå èçìåíåíèÿ àðãóìåíòà ïîëîæèòåëüíà, òî äàííàÿ ôóíêöèÿ âîçðàñòàåò íà ýòîì ó+àñòêå; åñëè æå ïðîèçâîäíàÿ îòðèöàòåëüíà — ôóíêöèÿ óáûâàåò. Â ñëó+àå æå ýêñòðåìóìà ôóíêöèè íàèáîëüøàÿ èëè íàèìåíüøàÿ îðäèíàòà îïðåäåëÿåòñÿ óñëîâèåì, +òî êàñàòåëüíàÿ íå íàêëîíåíà íè â îäíó, íè â äðóãóþ ñòîðîíó, ò. å. äèôôåðåíöèàë $dy = 0$; ïðè ýòîì îðäèíàòû “íå âîçðàñòàþò, íå óáûâàþò, íî íàõîäÿòñÿ â ïîêîå”.

Â ñâîåì “Äèôôåðåíöèàëüíîì èñ+èñëåíèè” (1755) Ë. Ýéëåð ïîëó+àåò àáñîëþòíûå ýêñòðåìóìû èç ýêñòðåìóìîâ îòíîñèòåëüíûõ, ò. å. ìåñòíîãî õàðàêòåðà, ïîä+åðêèâàÿ, +òî çíà+åíèå ôóíêöèè, íàïðèìåð, â òî+êå ìàêñèìóìà, âîîáùå íå ñîâïàäàåò ñ íàèáîëüøèì çíà+åíèåì ýòîé ôóíêöèè â öåëîì. Îí ðàññìàòðèâàåò òàêæå ìàêñèìóìû è ìèíèìóìû ôóíêöèè ìíîãèõ ïåðåìåííûõ: $f(x, y, z, \dots, u)$. Äëÿ èññëåäîâàíèÿ ôóíêöèè íà ìàêñèìóì è ìèíèìóì Л. Ýéëåð ïîëüçóåòñÿ íå òîëüêî ïåðâîé è âòîðîé ïðîèçâîäíûìè, íî è ïðîèçâîäíûìè áîëåå âûñîêèõ ïîðÿäêîâ.

Ó+åíèå î ìàêñèìóìàõ è ìèíèìóìàõ íàøëî ðàçíîîáðàçíîå è âàæíåéøåå ïðàêòè+åñêîå ïðèìåíåíèå â íàøó ýïîõó, êîãäà âîïðîñû ïîâûøåíèÿ ïðîèçâîäèòåëüíîñòè òðóäà, ñâÿçàííûå ñ ðàöèîíàëüíûì èñïîëüçîâàíèåì âðåìåíè, ñûðüÿ äëÿ òîïëèâà è ò. ï., èìåþò ïåðâîñòåïåííîå çíà+åíèå â ýêîíîìèêå è æèçíè íàøåé ñòðàíû.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Случайные события и их виды, классическая формула вероятностей событий, зависимые и независимые события, формулы вычисления их вероятностей.

7 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

§23. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА И ЕЕ ВИДЫ. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Ключевые понятия

Случайная величина, закон распределения, дискретная случайная величина, непрерывная случайная величина

Вы ознакомитесь с понятием *случайная величина* и ее видами, научитесь решать задачи на их применение.

ВЫ ЗНАЕТЕ: При определенных условиях выполняются испытания. Итоги испытаний принимаются за событие. События делятся на три группы: 1) *истинные* ; 2) *невыполнимые* ; 3) *случайные* .

Например, "при известном атмосферном давлении и температуре 20°С вода сохраняет свое жидкое состояние", "в природе, в зависимости от времени года, в определенные часы суток день и ночь непрерывно сменяются", "смена дня и ночи, светлый день, темная ночь" — истинные события.

ВЫ ЗНАЕТЕ: В теории вероятностей особенно привлекают события случайные. Случайные события делятся на четыре вида: *совместимые, несовместимые, равновозможные, противоположные* .

При исследовании случайных событий важно изучение числовых свойств и оценивание этих событий. Для определения числовых характеристик в теории вероятностей вводится понятие *случайная величина* .

Случайной величиной *называют величину, которая в результате испытания принимает наперед неизвестное значение, зависящее от многих причин , которые нельзя учесть.*

Приведем примеры случайных величин:

1) количество новорожденных за одни сутки в родильных домах г. Алматы;

2) количество выстрелов, производимых до попадания в цель;

3) расстояние, преодолеваемое артиллерийским снарядом при выстреле;

4) количество электроэнергии, потребляемой любым предприятием или любой семьей (в определенное время суток, за месяц, за год).

Случайные величины, указанные в примерах, нельзя определить до проведения испытаний.

В теории вероятностей случайные события обозначают посредством прописных букв латинского алфавита (X; Y; Z; ...), а их значения — строчными буквами (x_1; y_1; z_1; ...).

Случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями, называется ***дискретной случайной величиной***.

Из вышеприведенных примеров первые два являются дискретными случайными величинами.

Непрерывными случайными величинами *называются случайные величины, значения которых расположены на непрерывном отрезке* $[a; b]$, *где* $a < b$, a *и* b *— изолированные действительные числа*.

Из вышеприведенных примеров 3-й и 4-й являются непрерывными случайными величинами.

Примечание. Учитывая направление учебника, дискретные случайные величины рассматриваются в отдельных, изолированных значениях, а непрерывные случайные величины — на отрезке.

Возьмем случайную величину X. Пусть принимаемые значения этой величины будут $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n$, а соответствующие им вероятности — $p_1, p_2, p_3, ..., p_{n-1}, p_n$. Можно составить таблицу 12.

Таблица 12

X	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-2}	p_{n-1}	p_n

В таблице 12 вероятность событий $X = x_1$ есть p_1, вероятность событий $X = x_2$ есть p_2, вероятность событий $X = x_3$ есть p_3, ..., вероятность событий $X = x_{n-1}$ есть p_{n-1}, а вероятность событий $X = x_n$ есть p_n.

Соответствие, заданное таблицей, называют ***законом распределения случайной величины***.

Так как случайная величина обязательно примет одно из своих возможных значений, то выполняется равенство:

$$p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_{n-1} + p_n = 1. \qquad (1)$$

ПРИМЕР

1. Всего 10 тыс. лотерейных билетов. Из них один билет с выигрышем в 5 тыс. тенге, сто билетов с выигрышем в 1000 тенге, тысяча билетов с выигрышем по 100 тенге, а остальные билеты безвыигрышные. Возможность выиграть купившего один билет — случайная величина X. Составим таблицу закона распределения этой случайной величины.

Решение. По условию примера, 5 тыс. тенге выигрывает один билет, 1000 тенге — сто билетов, 100 тенге — тысяча билетов. Найдем вероятности каждого из них.

$$x_1 = 5000,\ p_1 = \frac{1}{10000} = 0{,}0001;$$

$$x_2 = 1000,\ p_2 = \frac{100}{10000} = 0{,}01;$$

$$x_3 = 100,\ p_3 = \frac{1000}{10000} = 0{,}1.$$

Тогда вероятность безвыигрышных билетов можно найти по формуле (1). $p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 = 1 - 0{,}0001 - 0{,}01 - 0{,}1 = 0{,}8899$. Следовательно, закон распределения случайной величины X можно задать таблицей 13.

Таблица 13

X	5000	1000	100	0
P	0,0001	0,01	0,1	0,8899

ПРИМЕР

2. Вероятность попадания первого стрелка в мишень — 0,8. Вероятность попадания второго стрелка в мишень — 0,75. Каждый из них сделал по одному выстрелу. Случайная величина X — это число попаданий в мишень. Определите закон распределения случайной величины X.

Решение. Распишем возможные значения, принимаемые случайной величиной X:

1) $x_1 = 0$ (непопадание в мишень обоих стрелков), соответственно, вероятность этого события: $P(\vec{A} \cdot \vec{B}) = P(\vec{A}) \cdot P(\vec{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05$.

(Попадание или непопадание стрелков в мишень является независимым событием).

2) $x_2 = 1$ (попадание в мишень одного стрелка). Вероятность, соответствующая этому событию: $P(A\vec{B} + \vec{A}B) = P(A) \cdot P(\vec{B}) + P(\vec{A}) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0{,}75 = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35$.

3) $x_3 = 2$ (попадание в мишень обоих стрелков). Вероятность этого события: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}75 = 0{,}6$.

Тогда закон распределения случайной величины можно дать в виде таблицы 14.

Таблица 14

X	0	1	2
P	0,05	0,35	0,6

?

1. Какое влияние оказывают виды случайных событий на случайные величины?
2. Как можно объяснить различие между случайными событиями и случайными величинами?
3. Какие элементы необходимы для составления закона распределения случайной величины?
4. Почему нельзя определить случайную величину без проведения испытаний?

Упражнения

A

23.1. Имеется закон распределения случайной величины (табл. 15):

Таблица 15

X	4	7	10	13	17
P	0,05	?	?	?	?

Заполните таблицу, учитывая, что доли неизвестных вероятностей равны между собой.

23.2. В таблице 16 дан закон распределения случайной величины.

Таблица 16

X	2	?	?	?	?	12
P	0,05	?	?	?	?	0,05

Заполните таблицу, учитывая, что неизвестные значения случайной величины вместе с данными составляют арифметическую прогрессию, а доли неизвестных вероятностей пропорциональны числам 1 : 3, 5 : 3, 5 : 1.

23.3. Дана арифметическая прогрессия из четырех членов, причем значения средних членов равны 8 и 12. Составьте закон распределения случайной величины, если вероятность средних членов в четыре раза больше вероятностей крайних членов.

23.4. Стрелок производит три независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле составляет 0,9. Составьте закон распределения числа попаданий.

B

23.5. Стрелок, имеющий четыре патрона, производит выстрелы до попадания в цель. Вероятность попадания в цель — 0,6. Напишите закон расположения потраченных стрелком патронов для попадания в цель.

23.6. Продано 100 лотерейных билетов, причем один билет обеспечивает выигрыш владельцу 500 тенге, десять билетов — по 100 тенге, 50 билетов — по 50 тенге, а остальные билеты безвыигрышные. Составьте закон распределения выигрыша для владельца одного билета.

23.7. Монета брошена один раз. Найдите закон распределения выпадания монеты стороной, на которой изображен герб.

23.8. Два стрелка целятся по мишеням. Вероятность попадания их в мишень, соответственно, равна 0,9 и 0,8. Стрелки по очереди производят по одному выстрелу. Случайная величина X — это число попадания в цель. Напишите закон распределения этой случайной величины.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Случайное событие и случайная величина, их виды, закон распределения случайной величины.

§ 24. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Ключевые понятия

Случайная величина, математическое ожидание, дисперсия, среднее математическое отклонение

Вы ознакомитесь с понятиями *математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение*, их свойствами и формулами, научитесь решать примеры на вычисление числовых характеристик случайной величины.

Закон распределения дает полную характеристику случайной величины. Иногда важно получить некоторое суммарное представление о случайной величине. В таких случаях необходимо определить числа, являющиеся числовыми характеристиками случайной величины, такими, как математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение.

Рассмотрим каждую числовую характеристику.

I. Математическое ожидание.

Пусть закон распределения дискретной случайной величины задан таблицей 17:

Таблица 17

X	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-2}	p_{n-1}	p_n

Сумму произведений значений случайной величины X на соответствующие значения вероятностей называют ***математическим ожиданием***.

Обозначение математического ожидания: $M(X)$.

Формула вычисления математического ожидания:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_{n-1}p_{n-1} + x_np_n. \quad (1)$$

ПРИМЕР

1. Вычислим математические ожидания случайных величин, законы распределения которых заданы таблицами 18, 19:

Таблица 18

X	3	7	11	13	16
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Таблица 19

Y	2	5	8	9	12
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Решение . Для вычисления математического ожидания применим формулу (1).

1) $M(X) = 3 \cdot 0,1 + 7 \cdot 0,2 + 11 \cdot 0,4 + 13 \cdot 0,2 + 16 \cdot 0,1 = 10,3$;

2) $M(Y) = 2 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,2 + 8 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,2 + 12 \cdot 0,1 = 7,4$.

Ответы : 1) 10,3; 2) 7,4.

Определим среднее арифметическое значение случайной величины для каждого случая примера 1:

$$\bar{x} = \frac{3+7+11+13+16}{5} = 10; \qquad \bar{y} = \frac{2+5+8+9+12}{5} = 7,2.$$

Сравнивая полученные значения, можно прийти к следующему заключению:

1) *математическое ожидание* — это величина, приближенно равная значению среднего арифметического значения случайной величины, т. е. $M(X) \approx \bar{x}$, $M(Y) \approx \bar{y}$.

2) В случае, когда значения случайной величины образуют возрастающую последовательность, то значения случайной величины, которые меньше математического ожидания, расположены в левой части таблицы закона распределения, а те, что больше, — в правой части.

Поясним утверждение, почему математическое ожидание близко расположено к среднему арифметическому значению случайной величины.

Допустим, произведено n испытаний, в результате которых случайная величина x значение x_1 приняла m_1 раз, значение x_2 приняла m_2 раза, ... , значение x_{k-1} приняла m_{k-1} раз, значение x_k приняла m_k раз $(m_1 + m_2 + ... + m_k = n)$.

Тогда сумма всех значений, принятых величиной X за n испытаний, равна:

$$m_1x_1 + m_2x_2 + ... + x_km_k.$$

Следовательно, на одно испытание в среднем приходится значение случайной величины, равное:

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_kx_k}{n} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + ... + x_k \cdot \frac{m_k}{n}, \qquad (2)$$

где $\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, ..., \frac{m_k}{n}$ являются относительными частотами появления значений $x_1, x_2, ... , x_k$.

С увеличением числа испытаний имеем: $\frac{m_1}{n} \to p_1, \frac{m_2}{n} \to p_2, ..., \frac{m_k}{n} \to p_k$. Таким образом, получаем величину, равную математическому ожиданию.

ПРИМЕР

2. В компании, в которой работают 10 человек, заработная плата распределяется следующим образом: двое получают по 20 тыс. тенге, трое — по 40 тыс. тенге, четверо — по 80 тыс. тенге, а один получает 100 тыс. тенге. Ежемесячно на зарплату выделяется 580 тыс. тенге. Сколько получал бы каждый работник, если всем работникам платили бы одинаково?

Решение. Пусть случайной величиной является размер зарплаты. Напишем закон распределения этой случайной величины (табл. 20).

Таблица 20

20 тыс. тг	40 тыс. тг	80 тыс. тг	100 тыс. тг
$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$

Если работники компании получали бы одинаковую зарплату, то каждый из них получил бы по 58 тыс. тенге. Это среднемесячная зарплата. Математическое ожидание должно дать величину среднемесячной зарплаты:

$$M(X) = 20000 \cdot \frac{2}{10} + 40000 \cdot \frac{3}{10} + 80000 \cdot \frac{4}{10} + 100000 \cdot \frac{1}{10} = 58\ 000.$$

Таким образом, среднемесячная зарплата равна математическому ожиданию.

Ответ: 58 тыс. тенге.

ЗАПОМНИТЕ

Свойства математического ожидания:

1) если C — постоянная, то

$$M(C) = C, \tag{3}$$

$$M(CX) = CM(X); \tag{4}$$

2) если X, Y, Z — случайные величины, то

$$M(X + Y + Z) = M(X) + M(Y) + M(Z). \tag{5}$$

ПРИМЕР

3. Используя математические ожидания случайных величин X и Y, найденные в примере 1, вычислим: 1) $M(2X)$, 2) $M(4Y)$, 3) $M(5X - 3Y)$.

Решение. Из примера 1 известно, что $M(X) = 10{,}3$; $M(Y) = 7{,}4$. Тогда по формуле (4) имеем: 1) $M(2X) = 2 \cdot M(X) = 2 \cdot 10{,}3 = 20{,}6$;

2) $M(4Y) = 4 \cdot M(Y) = 4 \cdot 7{,}4 = 29{,}6$.

Теперь, используя сначала формулу (5), затем формулу (6), получим:

3) $M(5X - 3Y) = 5M(X) - 3M(Y) = 5 \cdot 10{,}3 - 3 \cdot 7{,}4 = 51{,}5 - 22{,}2 = 29{,}3$.

Ответ: 1) 20, 6; 2) 29,6; 3) 29,3.

Мы узнали, что *математическое ожидание* — это числовая характеристика, приблизительно равная значению среднего арифметического случайной величины.

Как расположены другие значения случайной величины относительно среднего арифметического, неизвестно.

Решение этой проблемы имеет большое практическое значение. Например, средний показатель производительности труда заводов республики не является показателем производительности труда отдельного завода, она остается без внимания. Средний урожай, полученный в кооперативном хозяйстве, еще ничего не говорит об урожайности отдельных полей. Для исследования расположения возможных значений случайной величины относительно среднего значения остановимся на других числовых характеристиках случайной величины — дисперсии, среднем квадратичном отклонении.

Вычислим математическое ожидание $\{X - M(X)\}$ случайной величины. $X - M(X)$ показывает разность между средним значением и математическим ожиданием. Эту разность в теории вероятностей называют *отклонением* .

Составим закон распределения отклонения (табл. 21):

Таблица 21

$X - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	...	$x_n - M(X)$
p	p_1	p_2	...	p_n

Теперь вычислим среднее значение или математическое ожидание отклонения. $M(X)$ — постоянная величина, поэтому $M[M(X)]$, т. е. математическое ожидание постоянной равно этой же постоянной. Отсюда $M[X - M(X)] = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) = 0$.

Таким образом, среднее значение отклонения случайной величины равно нулю. Следовательно, среднее значение отклонения не исследует закон расположения значений случайной величины. В теории вероятностей для исследования закона распределения случайной величины рассматривается математическое ожидание от квадрата отклонения.

II. Дисперсия.

***Дисперсией** случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.*

Обозначение дисперсии: $D(X)$.

Формула вычисления дисперсии:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \quad (6)$$

ЗАПОМНИТЕ

Свойства дисперсии :

1) если C — постоянная, то дисперсия от постоянной равна нулю, т. е.

$$D(C) = 0; \quad (7)$$

постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат, т. е.

$$D(CX) = C^2D(X); \quad (8)$$

2) $D(X) = M(X^2) - M^2(X);$ (9)

3) если X и Y — случайные величины, то

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y). \quad (10)$$

Используя свойства математического ожидания, докажем, что формулы (6) и (9) равносильны.

Доказательство: $M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] =$
$= M(X^2) - 2M(X) \cdot M(M(X)) + M^2(X) = M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + M^2(X) =$
$= M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$

Следовательно, формула (9) также является *формулой вычисления дисперсии*.

ПРИМЕР

4. Используя таблицу 22, вычислим дисперсию случайной величины X:

Таблица 22

X	5	7	10	15
P	0,2	0,5	0,2	0,1

Решение. Вначале определим математическое ожидание.
$M(X) = 5 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 0{,}2 + 15 \cdot 0{,}1 = 8.$

Составим закон распределения величины $[X - M(X)]^2$. Для этого вычислим значение x_1:

$[X - M(X)]^2 = (5 - 8)^2 = (-3)^2 = 9$, соответственно $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, $x_4 = 49$.

Таблица 23

$[X - M(X)]^2$	9	1	4	49
P	0,2	0,5	0,2	0,1

Тогда по формуле (6) находим дисперсию.
$D(X) = M[X - M(X)]^2 = 9 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}2 + 49 \cdot 0{,}1 = 8.$

Ответ: 8.

III. Среднее квадратичное отклонение.

Средним квадратичным отклонением *случайной величины называется величина квадратного корня из ее дисперсии*.

Обозначение среднего квадратичного отклонения: $\sigma(X)$.
Формула вычисления среднего квадратичного отклонения:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(x)}. \quad (11)$$

ПРИМЕР **5.** Найдем среднее квадратичное отклонение случайной величины из примера 4.

Решение. По вычислению $D(X) = 8$. Тогда по формуле (11) имеем: $\sigma(X) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Рассмотрим примеры нахождения перечисленных числовых характеристик случайной величины.

ПРИМЕР **6.** Законы распределения случайных величин X и Y заданы таблицами 24, 25:

Таблица 24

X	3	5	8	10	12
P	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

Таблица 25

Y	2	5	8	12	14
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Вычислим следующие значения: 1) $M(X)$, $M(Y)$, 2) $D(X)$, $D(Y)$, 3) $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$, 4) $D(3X - 2Y)$.

Решение. Вычислим математические ожидания:

1) $M(X) = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}2 + 12 \cdot 0{,}1 = 7{,}4$;

$M(Y) = 2 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}3 + 12 \cdot 0{,}3 + 14 \cdot 0{,}1 = 8{,}6$;

2) для вычисления дисперсии случайных величин X и Y заполним, соответственно, таблицы 26, 27:

Таблица 26

X	9	25	64	100	144
P	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

Таблица 27

Y^2	1	25	64	144	196
p	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

$M(X^2) = 9 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}3 + 64 \cdot 0{,}3 + 100 \cdot 0{,}2 + 144 \cdot 0{,}1 = 62$;

$M(Y^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}2 + 64 \cdot 0{,}3 + 144 \cdot 0{,}3 + 196 \cdot 0{,}1 = 87{,}4$.

Тогда $D(X) = 62 - 7{,}4^2 = 62 - 54{,}76 = 7{,}24$,

$D(Y) = 87{,}4 - 8{,}6^2 = 87{,}4 - 73{,}96 = 13{,}44$;

3) $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7{,}24} \approx 2{,}7$,

$\sigma(X) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{13{,}44} \approx 3{,}7$;

4) $D(3X - 2Y) = 9D(X) + 4D(Y) = 9 \cdot 7{,}24 + 4 \cdot 13{,}44 = 65{,}16 + 53{,}76 = 118{,}92$.

Ответ: 1) 7,4; 8,6; 2) 7,24; 13,44; 3) $\approx 2{,}7$; $\approx 3{,}7$; 4) 118,92.

?

1. Какое свойство случайной величины определяют с помощью математического ожидания?
2. Какой числовой характеристике случайной величины соответствует среднее арифметическое?
3. Как объяснить геометрическую интерпретацию дисперсии и среднего квадратичного отклонения?
4. Необходимы ли другие данные, кроме закона распределения, для вычисления $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$? Ответ обоснуйте.

Упражнения

А

24.1. Закон распределения случайной величины задан таблицей 28:

Таблица 28

X	2	4	7	9	12
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найдите математическое ожидание.

24.2. Вычислите дисперсию, если закон распределения случайной величины задан таблицей 29:

Таблица 29

X	3	8	12	16	18
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

24.3. Найдите среднее квадратичное отклонение, используя закон распределения случайной величины, заданный таблицей 30:

Таблица 30

X	2	5	7	10
P	0,2	0,4	0,2	0,2

24.4 Заполните неполный закон распределения случайной величины, заданный в виде таблицы 31:

Таблица 31

X	3	21	30	50
P	0,25	?	0,25	0,25

Найдите дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

24.5. Используя закон распределения случайной величины X, найдите $M(X)$ (табл. 32, 33):

Таблица 32

X	1	2	3
P	0,7	0,1	0,2

Таблица 33

Y	–1	1	2
p	0,4	0,1	0,5

24.6. Вычислите $D(X)$, используя закон распределения случайной величины Y (табл. 34, 35):

Таблица 34

Y	–2	–1	1	2	3
P	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

Таблица 35

Y	–2	–1	1	2
p	0,1	0,2	0,5	0,2

24.7. Используя данные из упражнений 24.5, 24.6, вычислите среднее квадратичное отклонение.

B

24.8. Заполните таблицу, задающую закон распределения случайной величины X, если доли неизвестных вероятностей одинаковы. Используя таблицу 36, найдите $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$:

Таблица 36

X	3	7	12	15	18	21
P	0,1	0,1	?	?	0,1	0,1

24.9. Вычислите $M(X+Y)$, $D(X+Y)$, если случайные величины X и Y распределены по следующему закону (табл. 37, 38):

Таблица 37

X	6	10	14	20
P	$\frac{1}{4}$	0,2	0,3	$\frac{1}{4}$

Таблица 38

Y	3	8	11	16
p	0,2	0,3	0,3	0,2

24.10. Используя таблицы 37, 38 из задания 24.9, найдите $\sigma(X+Y)$, $\sigma(X+2Y)$.

24.11. Законы распределения случайных величин X и Y заданы таблицами 39, 40:

Таблица 39

X	3	21	30
P	0,25	?	0,45

Таблица 40

Y	24	26	28
p	0,25	0,25	?

Вычислите следующие величины: $M(X)$, $M(Y)$; $M(X - M(X)$, $M(Y - M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$.

24.12. Законы распределения точного попадания двух стрелков при одном выстреле заданы таблицами 41, 42:

Таблица 41

X	8	8	10
P	0,4	0,1	0,5

Таблица 42

Y	8	9	10
p	0,2	0,5	0,3

Какой стрелок точно попадет в цель?

24.13. Найдите величины $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $M(2X+5)$, $D(2X+5)$, если закон распределения случайной величины задан таблицей 43:

Таблица 43

X	2	3	4	5
P	0,3	0,1	0,5	0,1

24.14. $X(-1;\ 0;\ 1)$ и $M(X) = 0{,}1$; $M(X^2) = 0{,}9$. Найдите вероятности, соответствующие значениям случайной величины, и составьте закон распределения.

24.15. X и Y — независимые случайные величины, причем $D(X) = 2$, $D(Y) = 5$. Вычислите $D(3X + Y)$ и $D(3Y - 2X)$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Имеются четыре стандартных и одна нестандартная деталь. Случайно выбираются две детали. Найдите вероятность того, что выбранные две детали окажутся стандартными:

A) 0,4; B) 0,6; C) 0,5; D) 0,7.

2. Неполный закон распределения случайной величины X задан таблицей 44:

Таблица 44

X	5	8	12	15	18
P	0,2	?	?	?	0,2

Если есть неизвестные вероятности, пропорциональные числам 1: 2 : 1, то заполните таблицу закона распределения:

A) *Таблица* 45

X	5	8	12	15	18
P	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2

B) *Таблица* 46

X	5	8	12	15	8
p	0,2	0,2	0,5	0,2	0,2

C) *Таблица* 47

X	5	8	12	15	18
P	0,2	0,15	0,3	0,15	0,2

D) *Таблица* 48

X	5	8	12	15	8
p	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

3. Закон распределения случайной величины X задан в следующем виде (табл. 49):

Таблица 49

X	5	?	?	?	17
P	0,05	?	?	?	0,05

Заполните таблицу 49 закона распределения, если неизвестные значения случайной величины X вместе с данными значениями составляют арифметическую прогрессию, а соответствующие им значения вероятностей равны между собой (табл. 50—53) :

A) *Таблица* 50

X	5	8	11	14	17
P	0,05	0,3	0,3	0,3	0,05

B) *Таблица* 51

X	5	8	12	15	17
p	0,02	0,3	0,3	0,3	0,8

C) *Таблица* 52

X	5	8	11	14	17
P	0,05	0,2	0,3	0,4	0,05

D) *Таблица* 53

X	5	8	12	15	18
p	0,05	0,3	0,3	0,3	0,5

4. Дан закон распределения случайной величины X (табл. 54):

Таблица 54

X	1	3	5	8	12
P	0,125	0,25	0,25	0,25	0,125

Найдите значения $M(X)$, $M[X - M(X)]$, $M(5X)$:
A) 5,625; 0; 28,25;
B) 28,125; 5,65; 0;
C) 5,625; 0; 28,125;
D) 5,65; 0; 28,25.

5. Закон распределения случайной величины задан таблицей 55:

Таблица 55

X	3	7	11	16	18
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Вычислите дисперсию и среднее квадратичное отклонение:
A) $D(X) = 20{,}25$, $\sigma(X) = 4{,}5$;
B) $D(X) = 4{,}4$, $\sigma(X) = 19{,}49$;
C) $D(X) = 12{,}25$, $\sigma(X) = 3{,}5$;
D) $D(X) = 19{,}49$, $\sigma(X) \approx 4{,}4$.

6 По заданному закону распределения случайной величины найдите $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ (табл. 56):

Таблица 56

X	3	4	7	9	18
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

A) $M(X) = 6{,}7$, $D(X) = 6{,}61$, $\sigma(X) \approx 2{,}57$;
B) $M(X) = 6$, $D(X) = 5$, $\sigma(X) \approx \sqrt{5}$;
C) $M(X) = 6{,}61$, $D(X) = 6{,}7$, $\sigma(X) = 2{,}57$;
D) $M(X) = 6$, $D(X) = 4$, $\sigma(X) = 2$.

7. Законы распределения случайных величин X и Y заданы соответственно таблицами 57, 58:

Таблица 57

X	1	3	5	7	9
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Таблица 58

Y	3	5	8	12	15
P	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

Вычислите: 1) $M(3X - 4Y)$; 2) $D(2X + 3Y)$:
A) 7,5; 60,59;
B) 2,3; 60,59;
C) 7,5; 139,33;
D) 2,3; 139,33.

8. Вероятность попадания с одного выстрела в цель первого стрелка 0,9, а второго стрелка — 0,95. Если случайная величина X — число попадания в цель, то составьте закон распределения случайной величины X (табл. 59—62):

Таблица 59

A) X	0	1	2
C) P	0,14	0,855	0,005

Таблица 60

B) X	0	1	2
D) p	0,14	0,005	0,855

Таблица 61

A) X	0	1	2
C) P	0,855	0,14	0,005

Таблица 62

B) X	0	1	2
D) p	0,005	0,14	0,855

9. Экзаменационные билеты состоят из трех вопросов. Вероятность ответа учащегося на любой вопрос равна 0,8. Случайная величина X — это число вопросов, на которые может ответить учащийся. Составьте закон распределения этой величины (табл. 63—66):

Таблица 63

A) X	0	1	2	3
C) P	0,008	0,096	0,384	0,512

Таблица 64

B) X	0	1	2	3
D) p	0,512	0,096	0,384	0,008

Таблица 65

A) X	0	1	2	3
C) P	0,096	0,384	0,008	0,512

Таблица 66

B) X	0	1	2	3
D) p	0,384	0,008	0,512	0,096

Задания на математическую грамотность

10. У покупателя 20 000 тг. На эту сумму до акции можно было купить два одинаковых товара, а со скидкой на эту сумму он купил четыре товара. На сколько процентов снижена цена товара во время акции:
A) 20 %; B) 30%; C) 25%; D) 50%; E) 75%?

11. Сколько натуральных чисел, кратных 3, принадлежат промежутку (111; 123]:
A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

12. Найдите число, которое на 1279 больше, чем разность наибольшего четырехзначного числа и наименьшего четырехзначного числа, составленных из цифр 9; 1; 0; 8:
A) 9000; B) 9090; C) 10 000; D) 9990; E) 9900.

13. Для ремонта нужно купить обои. Цена на обои в трех магазинах разная, но есть скидка в каждом магазине (табл. 67).

Таблица 67

	Цена товара (один рулон)	Скидка (%)
Первый магазин	8600 тг	10%
Второй магазин	7000 тг	5%
Третий магазин	8000 тг	15%

Укажите верное утверждение:
A) цена за один рулон в третьем магазине больше, чем цена в остальных магазинах;
B) цена за один рулон в третьем магазине меньше, чем цена в остальных магазинах;
C) учитывая скидки, выгодно купить обои в первом магазине;
D) стоимость двух рулонов обоев во втором магазине больше, чем стоимость двух рулонов обоев в третьем магазине;
E) стоимость двух рулонов обоев во втором магазине меньше, чем сумма цен за один рулон в первом и третьем магазинах.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСЫ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА 10 КЛАССА

I. Вычисления

1. Найдите значение функции $y = f(x)$ в заданных точках:

а) $f(x) = 0{,}5x - 4{,}9$; $x = 0;\ 2;\ 9$;

б) $f(x) = x - x^2$; $x = \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 7$;

в) $f(x) = x^2 + 2$; $x = 1;\ -1;\ -3$;

г) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 5}$; $x = -4;\ -6;\ 0$.

2. Вычислите $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f(-\pi)$, если:

а) $f(x) = \sin 3x - x$; б) $f(x) = 5\,\mathrm{tg}\,x - 5\sqrt{3}$;

в) $f(x) = \cos 2x - \sin x$; г) $f(x) = \frac{x}{\cos x}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\arccos(-1) - 5\,\mathrm{arctg}\,1 - \arcsin(-1)$;

б) $\arcsin 1 + 6\,\mathrm{arcctg}\,1 - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

в) $\mathrm{arctg}(-1) - \mathrm{arcctg}(-1) - 6\arccos 0$;

г) $\mathrm{arcctg}\,1 \cdot \arccos 1 + \mathrm{arcctg}\sqrt{3} \cdot \arcsin 0$;

д) $\frac{6}{\pi}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{arctg}(\sqrt{3}\right)$;

е) $-\frac{6}{\pi}\left(\mathrm{arctg}\sqrt{3} - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.

4. Найдите предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$:

а) $f(x) = x^2 - 1$, $x \to 1$; б) $f(x) = \sin^2 x$, $x \to \frac{3\pi}{2}$;

в) $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 6}$, $x \to 6$; г) $f(x) = \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 49}$, $x \to 7$.

5. Найдите приближенное значение приращения функции:

а) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 80$ при $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}001$;

б) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7}$ при $x_0 = 3$ и $\Delta x = 0{,}1$.

6. Сторона квадрата равна 5 см. Найдите приближенное приращение его площади при увеличении стороны на 0,01 см.

7. Вычислите производную функции:

а) $f(x) = x^2 + 0{,}5x$; б) $f(x) = -3x^3 + 10x^2$;

в) $f(x) = x + 10\sqrt{x}$; г) $f(x) = \sin x - \cos x + 5$;

д) $f(x) = \frac{x^3}{x^3 + 1}$; е) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$.

8. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в заданных точках:

а) $f(x) = x^2 - 6x$; $x = 0$; б) $f(x) = x \cdot \mathrm{tg}\,x$; $x = \pi$;

в) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$; $x = 2$;

г) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$; $x = -2$.

9. Вычислите производную функции:

а) $f(x) = \dfrac{1}{7}x^7 + \cos x$; б) $f(x) = \dfrac{1}{12}x^6 - \sin x$;

в) $f(x) = x^6 \cdot (x^4 - 1)$; г) $f(x) = x^{11} \cdot (x^7 + 2)$;

д) $f(x) = \dfrac{2}{x^8} - x^8$; е) $f(x) = \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{3}{x^5}$.

10. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = 3t^2 + 5$. Найдите скорость тела в момент времени $t = 2$ (время измеряется в секундах, координата — в метрах).

11. Найдите скорость движения тела в момент времени $t = 5$, если закон движения задан формулой $s(t) = 4t^2 - 3$ (время измеряется в секундах, координата — в метрах).

12. Когда скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = t^2 - 4t + 5$, равна нулю?

13. Найдите скорость и ускорение точки в указанные моменты времени t, движущейся прямолинейно по закону:
а) $s(t) = t^3 - 6t + 8$; $t = 3$; б) $s(t) = t^3 - 2t^2 + 1$; $t = 2$ (время измеряется в секундах, координата — в метрах).

14. Найдите производную сложной функции:

а) $f(x) = (x^3 - 6)^{110}$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$;

в) $f(x) = \sin^5(6x - 1)$; г) $f(x) = 2\cos^4\left(\dfrac{\pi}{3} - x^4\right)$.

15. Найдите значение $f'(x_0)$, если:

а) $f(x) = (x^6 + x)^3 - 15$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = \mathrm{tg}^4\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $x_0 = 0$;

в) $f(x) = \sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; г) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x^3$, $x_0 = 0$.

16. Найдите приближенное значение степени:
а) $(1{,}012)^3$; б) $(1{,}005)^{10}$; в) $(0{,}975)^4$; г) $(3{,}027)^4$.

17. Вычислите приближенное значение корня:
а) $\sqrt{1{,}006}$; б) $\sqrt{24{,}84}$; в) $\sqrt{99{,}5}$; г) $\sqrt{1{,}3}$.

18. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на заданном промежутке:

а) $f(x) = x - x^2$, $[1;\ 2]$; б) $f(x) = x^2 + x + 1$, $[0;\ 1]$;

в) $f(x) = x^3 - 3x + 7$, $[-3;\ 1]$; г) $f(x) = 3x^3 - x + 1$, $[-2;\ 3]$.

19. Какова наибольшая площадь прямоугольного участка, который нужно огородить забором длиной 50 м?

20. Какой должна быть наименьшая длина ограды, которой можно было бы огородить прямоугольный участок площадью 400 м^2?

21. Разложите число 5 на два слагаемых, сумма кубов которых будет наименьшей.

22. Сумма основания и высоты прямоугольного треугольника равна 12 см. Каким должно быть основание, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

II. Уравнения и системы уравнений

Решите уравнения **(23—27):**

23. а) $\cos 5x \cdot \operatorname{tg} x = 0$; б) $\sin 3x \cdot \operatorname{tg} x = 0$;

в) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3} = 0$; г) $3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sqrt{3} = 0$.

24. а) $\cos 5x = \cos 3x$; б) $\sin 5x = \sin 3x$;

в) $\sin 6x + \sin 2x = \sin 4x$; г) $\cos 2x - \sin 4x = 0$.

25. а) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$; б) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$;

в) $3\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$; г) $4\operatorname{ctg}^2 x - 6\operatorname{ctg} x + 2 = 0$.

26. а) $\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x = 0$; б) $2 - \sin x = 2\cos^2 x$;

в) $\sin 2x = 2\sqrt{3}\sin^2 x$; г) $\cos^2 x + 3\sin^2 x - 3 = 0$.

27. а) $3\sin^2 x + \cos^2 x = 2\sin 2x$; б) $\sqrt{3}\sin 2x - 6\cos^2 x = -3$;

в) $\sin^2 x + \frac{3}{2}\cos^2 x = \frac{5}{2}\sin x \cdot \cos x$; г) $6\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 5\cos^2 x = 2$.

Решите уравнения $f'(x) = 0$ **(28—31):**

28. а) $f(x) = x^2 + 2x$; б) $f(x) = x - x^2$;

в) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2{,}5x^2 + 6x$; г) $f(x) = 3x^3 - 15x^2 + 25x$.

29. а) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^3 + 20x$; б) $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 3x$;

в) $f(x) = x^7 - 7x$; г) $f(x) = 0{,}25x^8 + 2x$.

30. а) $f(x) = \sin x + x$; б) $f(x) = x - \cos x$.

31. а) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$; б) $f(x) = x + \operatorname{ctg} x$.

III. Неравенства

Решите неравенства **(32—36):**

32. а) $\sin 2x \;\mathrm{l}\; -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \;\mathrm{m}\; \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \;\mathrm{j}\; 1$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \mathrm{k}\; 1$.

33. а) $\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x \;\mathrm{j}\; \frac{1}{2}$;

б) $\cos 6x \cdot \cos x - \sin 6x \cdot \sin x \;\mathrm{j}\; \frac{\sqrt{3}}{2}$.

34. а) $\frac{2\mathrm{tg}2x}{1-\mathrm{tg}^2 2x}$ m$\sqrt{3}$; б) $\frac{1-\mathrm{tg}^2 3x}{2\mathrm{tg}3x}$ j $-\sqrt{3}$.

35. а) $\cos^2 x + \frac{1}{2}$ j $\sin^2 x$; б) $4\sin 2x \cdot \cos 2x - \sqrt{2}$ m 0.

36. а) $\frac{1}{\mathrm{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ l $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{1}{\mathrm{tg}x-\frac{\pi}{3}}$ m -1.

Решите системы неравенств **(37—38):**

37. а) $\begin{cases}\sin x \geqslant 0;\\ \cos x \leqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2\sin x \leqslant 0;\\ 3\cos x > 0.\end{cases}$

38. а) $\begin{cases}\mathrm{tg}x < 0;\\ \mathrm{ctg}x < 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\mathrm{tg}x > 0;\\ \sin x \geqslant 0.\end{cases}$

39. Решите неравенство $f'(x)$ k $g'(x)$, если:
а) $f(x) = -x^2 + x$, $g(x) = x - 10$; б) $f(x) = x^3 - x^2$, $g(x) = 3x - x^2$;
в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -x$; г) $f(x) = \frac{x^3+2}{x}$, $g(x) = 6x + \frac{2}{x}$.

40. Решите неравенство $f'(x)$ l 0, если:
а) $f(x) = x^2 - 1$; б) $f(x) = x + 2x^2$;
в) $f(x) = 3x + x^3$; г) $f(x) = 6 + x^3$.

41. Решите неравенство $f'(x)$ m 0, если:
а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$; б) $f(x) = x^3 - 5{,}5x^2 - 20x$;
в) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 15$; г) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 20$.

42. Решите неравенство $f'(x)$ j 0, если:
а) $f(x) = -\cos(2x - 1) - x$; б) $f(x) = -\sin(x + 1) + 0{,}5x$;
в) $f(x) = 2\sin x - \sqrt{3}x$; г) $f(x) = \frac{1}{4}\cos 8x + \sqrt{2}x$.

IV. Функция

43. Найдите область определения функции:
а) $y = \sqrt{4-x}$; б) $y = \sin x + \sqrt{x}$;
в) $y = \frac{x+1}{x^2-4}$; г) $y = \frac{x+2}{x^2-5x+6}$.

44. Найдите множество значений функции:
а) $y = x^2 + 2x - 10$; б) $y = \frac{1}{x-40}$;
в) $y = 8\cos x$; г) $y = 3 + 2\sin x$.

45. Постройте график функции $y = x^2$ на отрезке [0; 3]. Продолжите данный график, если функция:
а) четная;
б) нечетная;
в) ни четная, ни нечетная.

46. Исследуйте функцию на четность и нечетность:

а) $f(x) = x^5 - x^{21}$;   б) $f(x) = \sin x - \sin 3x$;

в) $f(x) = x^2 + \cos^3 x$;   г) $f(x) = \sin^4 x - x$;

д) $f(x) = \dfrac{x}{\cos x} + \operatorname{tg} x$;   е) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + \dfrac{x^3}{\sin x}$.

47. Изобразив на промежутке $[0;\ 3]$ часть графика периодической функции $y = f(x)$ с периодом, равным числу 3, продолжите его на промежутке $[-3;\ 9]$.

48. Найдите период функции:

а) $y = 3\cos 3x$;   б) $y = 2\sin \dfrac{1}{x}$;

в) $y = -4\operatorname{tg}(x + 2)$;   г) $y = \operatorname{ctg}(3 - 2x)$.

49. Изобразите схематически график функции $f(x)$, непрерывной на всей числовой прямой:

а) возрастающей на промежутках $(-\infty;\ -1] \cup [3;\ +\infty)$, убывающей на отрезке $[-1;\ 3]$ и такой, что $f(-1) = 4$, $f(3) = -2$;

б) убывающей на промежутках $(-\infty;\ 2] \cup [4;\ +\infty)$, возрастающей на отрезке $[2;\ 4]$ и такой, что $f(2) = -1$, $f(4) = 3$;

в) возрастающей на промежутках $(-\infty;\ -5] \cup [3;\ 6]$, убывающей на промежутках $[-5;\ 3] \cup [6;\ +\infty)$ и такой, что $f(-5) = 0$, $f(3) = -3$, $f(6) = 2$;

г) убывающей на промежутках $(-\infty;\ -4] \cup [0;\ 2]$, возрастающей на промежутках $[-4;\ 0] \cup [2;\ +\infty)$ и такой, что $f(-4) = -2$, $f(0) = 2$, $f(2) = -5$.

50. Используя простейшие преобразования графиков, постройте графики следующих функций:

а) $y = x^2 - 2x + 5$;   б) $y = x^2 + 4$;

в) $y = 2 - \dfrac{1}{x}$;   г) $y = 1 + \dfrac{2}{x-3}$;

д) $y = 2\sin x$;   е) $y = 2 + \cos x$;

ж) $y = 1 + 3\sin 2x$;   з) $y = 3\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right)$;

и) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2$;   к) $y = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right) - 1$.

51. Найдите обратную функцию и область ее определения для функции, заданной в указанном промежутке:

а) $f(x) = 2x + 3$, $x \in R$;

б) $f(x) = (x - 1)^2$, $x \in [0;\ +\infty)$;

в) $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [0;\ +\infty)$.

52. Найдите точки разрыва функции:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$;   б) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$;

в) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-9}$;　　г) $f(x) = \dfrac{x-3}{x(x+1)(x^2-25)}$;

д) $f(x) = \dfrac{x-1}{\cos x}$;　　е) $f(x) = \dfrac{3}{\sin x}$.

53. Составьте все возможные сложные функции, если:
$g(x) = x^3 + 1$;　　$\varphi(x) = \sqrt{x}$;　　$u(x) = \dfrac{2}{x}$.

54. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:
а) $y = x^2 - 3x + 4$, $x_0 = 1$;　　б) $y = 4 - x^2$, $x_0 = -1$;
в) $y = x^3 + 2x - 1$, $x_0 = 0$;　　г) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$, $x_0 = 3$.

55. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y = x^2 - 3x + 5$, проведенная в точке $M(2;\ 3)$? Составьте уравнение этой касательной.

56. Найдите угол, образованный с осью Ox и касательной к графику функции $y(x) = x^2 - 2x + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

57. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:
а) $y = \operatorname{ctg} x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$;　　б) $y = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

58 Найдите промежутки возрастания и убывания функции:
а) $y = 2x - x^2$;　　б) $y = x^2 + 7$;
в) $y = x^3 - 3x + 10$;　　г) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 9x - 11$;
д) $y = \dfrac{x}{x+1}$;　　е) $y = \dfrac{x+1}{x}$;
ж) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 1$;　　з) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{7}{2}x^2 - 6x + 2$.

59. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на экстремум:
а) $y = 8 - x^2$;　　б) $y = x^3 + 6x$;
в) $y = x^4 - 2x^2 + 1$;　　г) $y = 4x - x^4$;
д) $y = x^3 + x^2 - 8x + 1$;　　е) $y = \dfrac{4}{3}x^3 + 24x - 3$;
ж) $y = \dfrac{3x}{x^2+1}$;　　з) $y = 3x - \dfrac{27}{2-x^2}$.

60. Исследуйте функцию и постройте ее график:
а) $y = x^2 - 10x + 9$;　　б) $y = x^3 + 9x$;
в) $y = -x^2 + 4x$;　　г) $y = 6x^2 - x^3$;
д) $y = \dfrac{x}{x+1}$;　　е) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Задания на математическую грамотность

61. Пусть x и y различные числа и делятся на z. Укажите верное утверждение:

A) $\frac{x-y}{5x}$ делится на z; B) $\frac{6y}{x+y}$ делится на z;

C) $-4x + 3$ делится на z; D) $-4x + 3y$ делится на z;

E) $\frac{x^3}{y^3}$ делится на z.

62. Используя диаграмму, найдите среднее арифметическое и размах товаров, изготовленных предприятием за пять дней (рис. 65):

Рис. 65

A) среднее арифметическое — 1208, размах — 64;
B) среднее арифметическое — 1206, размах — 66;
C) среднее арифметическое — 1206, размах — 64;
D) среднее арифметическое — 1208, размах — 70;
E) среднее арифметическое — 1208, размах — 66.

63. Количество шаров в ящике указаны в диаграмме (рис. 66).

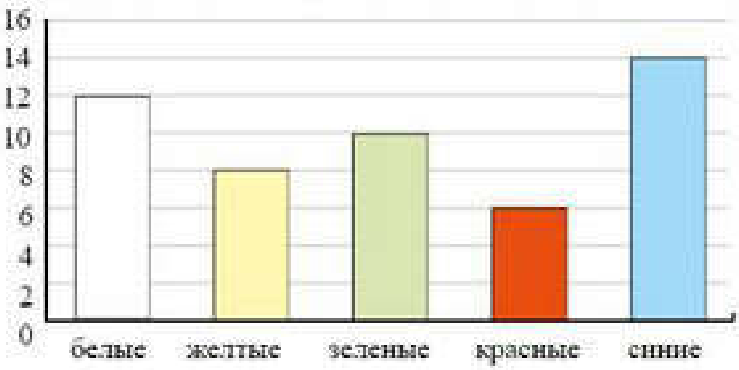


Рис. 66

Какова вероятность того, что наугад взятый шар будет не зеленым:

A) $\frac{6}{25}$; B) $\frac{7}{25}$; C) 0,8; D) $\frac{3}{25}$; E) 0,5?

64. Для праздника закупили 300 штук цветов из четырех видов. В диаграмме указаны их названия и количество некоторых цветов в процентах. Найдите количество роз (рис. 67):

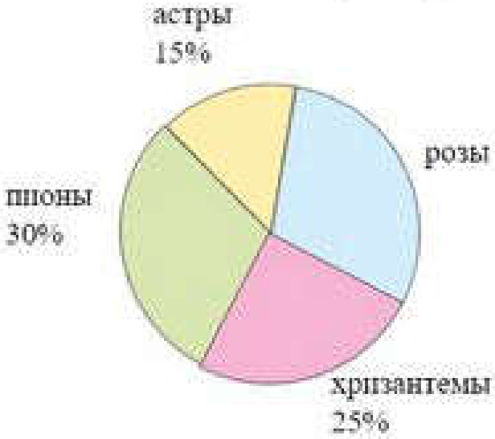


Рис. 67

A) 100; B) 120; C) 90; D) 75; E) 80.

65. В диаграмме дана информация об изготовлении деталей за шесть месяцев (рис. 68).

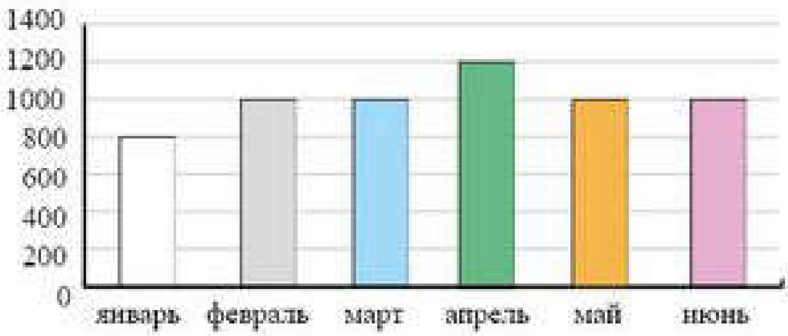


Рис. 68

A — количество деталей, изготовленных за I квартал;
B — количество деталей, изготовленных за II квартал.
Выберите верное утверждение:

A) $A > B$; B) $A < B$; C) $A - B > 200$;
D) $A + B < -200$; E) $A - B = 0$.

ГЛОССАРИЙ

Арккосинус числа a	*Арккосинусом числа* a, где $\|a\| \le 1$, называется такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.
Арккотангенс числа a	*Арккотангенсом числа* a называется такое число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.
Арксинус числа a	*Арксинусом числа* a, где $\|a\| \le 1$, называется такое число из числового отрезка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен a.
Арктангенс числа a	*Арктангенсом числа* a называется такое число из числового интервала $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен a.
Приращение аргумента	Разность значений аргумента $x_2 - x_1$ называют *приращением аргумента в точке* x.
Арккосинус	Функцию, обратную функции $y = \cos x$, обозначают $y = \arccos x$ и читают "арккосинус икс".
Арксинус	Функцию, обратную функции $y = \sin x$, обозначают $y = \arcsin x$ и читают "арксинус икс".
Арккотангенс	Функцию, обратную функции $y = \mathrm{ctg}\, x$, обозначают $y = \mathrm{arcctg}\, x$ и читают "арккотангенс икс".
Арктангенс	Функцию, обратную функции $y = \mathrm{tg}\, x$, обозначают $y = \mathrm{arctg}\, x$ и читают "арктангенс икс".
Однородное тригонометрическое уравнение	*Однородным тригонометрическим уравнением* называется тригонометрическое уравнение, в котором показатели степени каждого слагаемого равны.
Дискретная случайная величина	Случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями, называется *дискретной случайной величиной*.
Дисперсия	*Дисперсией случайной величины* X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = ((X - M(X))^2)$.
Дифференцирование	Процесс вычисления производной называется *дифференцированием*.
Дифференцируемая функция	Если в точке x функция имеет производную, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в этой точке*. Если функция дифференцируема во всех точках промежутка, то функция называется *дифференцируемой на промежутке*.
Простейшие тригонометрические уравнения	Уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\, x = a$, $\mathrm{ctg}\, x = a$ (1) (где a — действительное число) называются *простейшими тригонометрическими уравнениями*.
Случайная величина	*Случайной величиной* называют величину, которая в результате испытания принимает наперед неизвестное значение, зависящее от многих причин, которые нельзя учесть.
Отклонение случайной величины	Разность между случайной величиной X и ее математическим ожиданием $X - M(X)$ называется *отклонением случайной величины*.

Продолжение

Распределение случайной величины	Перечисление возможных значений случайной величины и их вероятностей называется *распределением случайной величины.*
Обратная функция	Если функция $y = f(x)$ определена и монотонно возрастает (убывает) на множестве $x \in X$, областью значений является множество $y \in Y$, тогда существует обратная функция, причем эта функция определена и возрастает (убывает) на Y.
Сложная функция	Пусть дана функция $y = f(u)$ с областью определения $u \in U$, с множеством значений Y и пусть переменная u, в свою очередь, зависит от переменной x, т. е. $u = g(x)$, $x \in X$. Тогда функция $y = f[g(x)]$ от аргумента x, определенная на множестве X, называется *сложной функцией* .
Точка максимума	Точка a называется *точкой максимума функции* $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки $x = a$, что для всех x, $x \neq a$ из этой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) < f(a)$.
Математическое ожидание	Сумму произведений значений случайной величины X на соответствующие значения вероятностей называют *математическим ожиданием* . $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$.
Точка минимума	Точка a называется *точкой минимума функции* $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки $x = a$, что для всех x, $x \neq a$ из этой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) > f(a)$.
Произведение вероятностей	Вероятность совместного появления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.
Сумма вероятностей	Вероятность появления одного из двух несовместимых событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
Среднее квадратичное отклонение	*Средним квадратичным отклонением случайной величины* называется величина квадратного корня из ее дисперсии.
Непрерывная функция в точке	Если функция $f(x)$ определена в точке x_0 и предельное значение функции при $x \to x_0$ равно ее значению в этой точке, то $f(x)$ называется *непрерывной функцией в точке* x_0.
Синусоида	Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ называются *синусоидой.*
Критическая точка	Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* .
Тангенсоида	График функции $y = \operatorname{tg} x$ называется *тангенсоидой.*
Тригонометрическое уравнение	Уравнение с неизвестной переменной, заданной в виде аргумента тригонометрической функции, называется *тригонометрическим уравнением* .
Решение тригонометрического уравнения	*Решить тригонометрическое уравнение* — значит найти значения аргумента, приводящие данное уравнение в верное тождество.

Продолжение

Тригонометрическое неравенство	*Тригонометрическим неравенством* называется неравенство, содержащее неизвестное (переменную) только под знаком тригонометрической функции.
Геометрический смысл производной	Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$, т. е. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = k$. Это геометрический смысл производной.
Физический смысл производной	В общем случае производная функции $y = f(x)$ в точке x определяет скорость изменения функции в этой точке. Это физический смысл производной.
Точка разрыва	Если хотя бы одно из условий не выполнено, то функция в точке x_0 не является непрерывной. В этом случае точка x_0 является точкой разрыва, а функция называется *разрывной*.
Непрерывная случайная величина	*Непрерывными случайными величинами* называются случайные величины, значения которых расположены на непрерывном отрезке $[a; b]$ (где $a<b$, a и b — изолированные действительные числа).
Непрерывная функция	Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке множества (отрезка), то она называется *непрерывной функцией на данном множестве (отрезке)*.
Условная вероятность	*Условной вероятностью* $P_A(B)$ называется вероятность появления события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.
Максимум функции	Значение функции в точке максимума называется *максимумом функции.*
Минимум функции	Значение функции в точке минимума называется *минимумом функции.*
Приращение функции	Если аргумент x принимает приращение, то непрерывная функция $y = f(x)$ принимает соответствующее приращение. Это приращение функции обозначается символом Δy и определяется равенством $\Delta y = (y + \Delta y) - y$, или $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
Производная функции	Если разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ имеет предел при Δx, стремящемся к нулю, то этот предел называют *производной функции $y = f(x)$ в точке x*.
Предел функции	Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого наперед заданного положительного числа ε можно найти положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $\lvert x - a\rvert < \delta$, выполняется неравенство $\lvert f(x) - b\rvert < \varepsilon$. $(f(x) \to b$ при $x \to a)$.
Точки экстремума функции	Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума функции.*
Экстремум	Значения функции в точках максимума и минимума функции называются ее *экстремумами.*

ОТВЕТЫ

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ 7—9 КЛАССОВ

1. а) –3; б) 9; в) $\frac{2b}{3b+9}$; г) $\frac{a}{2-a}$; д) 2; е) 9. **2.** а) 0,5; б) 8,25; в) ± 1; г) $\pm\sqrt{5}$; д) 7; –2; е) –1; 6; ж) 2; $\frac{2}{3}$; з) 1; $-\frac{3}{8}$. **3.** а) 2,6; б) 0; –8; в) –2,5; г) –4; д) 1; –6; е) 0,5; ж) 0. **4.** а) (5; 2), (–14; 21); б) (–0,75; –0,5), (1; 3); в) (4; 3), (–9; $-\frac{4}{3}$); г) (5; 0,5), (–7,5; $-\frac{2}{3}$). **6.** а) $(-\infty; 3]\cup[4; +\infty)$; б) (–8; 2); в) [2; 5]; г) $(-\infty; -\frac{5}{7})\cup(1; \infty)$. **7.** а) $(-9; 0]\cup[4; +\infty)$; б) $[0; 2]\cup(6; +\infty)$; в) $(-\infty; -7)\cup(0; 3)$; г) $(-4; 0)\cup(5; +\infty)$. **8.** а) 0; б) –3; в) –6; г) 2. **9.** а) 5; б) –3; в) 3; г) –2. **10.** а) [5; 8); б) $(-\infty; -6]$; в) $[1; 2]\cup[3; 4]$; г) [–3; 3]. **14.** а) $d = 0,8$; $a_9 = 9,6$; $S_{10} = 68$; б) $a_7 = 37,6$; $S_{20} = 724$; в) $a_1 = 10$; $d = 5$; г) $a_1 = -60$. **15.** а) $q = 2$; $b_7 = 96$; $S_8 = 382,5$; б) $b_5 = 54$; $S_6 = -121\frac{1}{3}$; в) $b_1 = 64$; $q = 0,5$; г) $b_1 = 27$. **18.** а) 2sin4 α; д) –2cos α.

Глава 1. ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

1.1. а) 5; 15,5; 21; б) $2\frac{5}{6}$; 0; $\frac{1}{3}$; в) 7; 4,5; 0; г) 2; 1; $\frac{10}{9}$. **1.2.** б) –2; –2; 1; г) $\frac{1}{4}$; 4; 1. **1.3.** а) $D(g) = R$; б) $D(g) = R$; в) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$. **1.8.** б) 3; $\sqrt{3}$; 3; г) $g(x_1) = \frac{2}{t^2} + 3t$; $g(x_2) = \frac{t^3+12}{2t}$. **1.9.** а) $[3; +\infty)$; б) $(-\infty; 1]\cup[2,5; +\infty)$; г) $(-\infty; -1,5)\cup(-1,5; 0)\cup(0; 1,5)\cup(1,5; +\infty)$. **1.10.** а) $D(f) = R$; $E(f) = [0; +\infty)$; б) $D(f) = (-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; -5)\cup$ $\cup(-5; +\infty)$; в) $D(f) = R$; $E(f) = \left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$; г) $D(f) = R$; $E(f) = [-5; 5]$. **1.11**. а) –18; б) –12,5; в) $\frac{10}{17}$; г) $\frac{25+8a-6a^3}{a}$. **2.3.** а) Парабола; б) гипербола; в) кубическая парабола; г) прямая. **2.9.** а) Один; б) один. **3.6.** а) Четная; б) четная; в) нечетная; г) ни четная, ни нечетная. **3.7.** а) $\frac{4\pi}{5}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{5}$; г) 2π. **3.9.** а) $(-\infty; 1]$ — возрастает; $[1; +\infty)$ —убывает, $x = 1$ — точка максимума, (0; 2) — $f(x) > 0$, $(-\infty; 0)\cup$ $\cup(2; +\infty)$ — $f(x) < 0$; б) $(-\infty; -2)\cup(-2; +\infty)$ — убывает, точек экстремума нет $(-\infty; -2)\cup$ $\cup\left(-\frac{5}{3}; +\infty\right)$ — $f(x) < 0$, $\left(-2; -\frac{5}{3}\right)$ — $f(x) > 0$. **4.1.** а) $y = \frac{x-2}{7}$; б) $y = \frac{3x}{2}$; в) $y = 5 - x$.

Глава 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

5.1. а) Нечетная; б) нечетная; в) четная; г) четная. **5.6.** а) $\frac{2\pi}{7}$; б) 1,5 π; в) 12 π; г) 0,125 π. **6.2.** а) $-\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$; в) $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{5\pi}{6}$. **6.4.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.6.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 0,5; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.7.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 0; г) 1. **6.10.** а) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{2-\sqrt{2}}{10}$; г) $-\frac{6+\sqrt{3}}{4}$.

Глава 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

7.3. а) 3π*k*, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **7.4.** в) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; г) $\pm\frac{2\pi}{3} +$ $+4k\pi$, $k \in Z$. **7.5.** а) $\frac{3\pi}{2}$. **7.7.** а) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$; в) $(-1)^k\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$;

7.8. б) $-\frac{3\pi}{4}+6\pi k$, $k\in Z$; г) $\frac{\pi}{24}-\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$. **7.9.** а) $-3-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\frac{3\pi k}{2}$, $k\in Z$; б) $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$. **7.11.** а) πn, $n\in Z$; $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$, $n\in Z$. **7.12.** б) $\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; $\frac{\pi}{22}+\frac{\pi n}{11}$, $n\in Z$. **8.2.** а) $\pm(\pi-\arccos\frac{1}{3})+2\pi k$, $k\in Z$; б) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi$, $n\in Z$; в) $\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $n\in Z$; г) $2\pi n$, $n\in Z$; $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k, n\in Z$. **8.3.** а) $\frac{\pi}{4}+n\pi$, $\operatorname{arctg}3+k\pi$, $k, n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $\operatorname{arctg}4+k\pi$; $k, n\in Z$; в) $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $k, n\in Z$; г) $\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$; $\frac{5\pi}{6}+n\pi$; $n\in Z$. **8.4.** а) $\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$, $k, n\in Z$; б) $\frac{k\pi}{3}$; $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $k, n\in Z$; в) $\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in Z$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi$, $k, n\in Z$; г) $k\pi$, $k\in Z$; $-\operatorname{arctg}2+n\pi$, $n\in Z$. **8.5.** а) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+n\pi$, $-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k, n\in Z$. **8.7.** а) $2n\pi$, $\pm(\pi-\arccos\frac{1}{5})+2k\pi$, $k, n\in Z$; б) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$; $(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+k\pi$, $k, n\in Z$; **8.8.** а) $\operatorname{arctg}3+n\pi$, $-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k, n\in Z$. **8.9.** а) $n\pi$; $-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $k, n\in Z$; б) $\frac{\pi}{2}+n\pi$, $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k, n\in Z$. **8.10.** а) $\frac{\pi}{3}+n\pi$, $n\in Z$; $k\pi$, $k\in Z$; г) $\operatorname{arctg}(3\pm2\sqrt{2})+n\pi$, $n\in Z$. **8.11.** а) $-\frac{\pi}{4}+n\pi$, $\operatorname{arctg}2+k\pi$, $k, n\in Z$; б) $\frac{\pi}{4}+n\pi$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+k\pi$, $k, n\in Z$. **8.13.** а) $\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\frac{k\pi}{2}$; $k, n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\frac{k\pi}{2}$; $k, n\in Z$. **8.14.** а) $3\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+3k\pi$, $3\operatorname{arctg}2+3k\pi$, $k, n\in Z$; б) $\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}$, $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}2+\frac{k\pi}{3}$, $k, n\in Z$. **9.2.** г) $\left[-\frac{\pi}{6}+n\pi;\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$, $n\in Z$.

Глава 4. ВЕРОЯТНОСТЬ

11.1. 0,9. **11.2**. 0,25. **11.3.** 0,3. **11.4.** ≈0,72. **11.5.** 1) 0,72; 2) 0,98. **11.6.** ≈0,0278. **11.7.** ≈0,6. **11.9.** 0,2545.

Глава 5. ПРОИЗВОДНАЯ

12.1. в) -6; г) $\frac{1}{4}$. **12.3.** а) Функция не является непрерывной; б) функция не является непрерывной. **12.6.** а) -2; б) -4; в) 27; г) $\frac{1}{8}$; д) $-\frac{4}{3}$; е) $\frac{8}{11}$; ж) $\frac{1}{4}$; з) $\frac{8}{5}$. **13.2.** б) 1,14. **13.6.** б) $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}-1$. **13.7.** а) 0,1; б) 0,1. **13.9.** а) x^2+4x; б) $32x^7+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; в) x^2+8x^3; г) $24x^5+35x^4$; д) $-\frac{2}{3}x+3$; е) x^3+1; ж) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; з) $-10x+1$. **14.2.** а) $-\frac{1}{4}$; б) $\frac{2}{3}$. **14.3.** а) 5; б) -1; в) -1. **14.4.** а) $\left(\frac{7}{36};+\infty\right)$; б) $(5;+\infty)$. в) $\left(-\infty;+\frac{3}{2}\right)$. **14.5**. б) $\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$; в) $\frac{6-4x-x^2}{(x+2)^2}$. **14.6.** в) $\frac{3}{x^4}$; г) $\frac{2x(1-x^4)}{(x^4+1)^2}$. **14.9.** а) -1; б) 2. **14.10.** а) $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$; б) $(-1;3)$. **15.1.** б) $v=36$; $a=30$ м/см^2; в) 6 м/см. **15.2.** а) 0. **15.3.** а) $y=-8x-6$; б) $y=6x-2$; в) $y=-10x+5$. **15.6.** а) arctg 1,5; б) arctg 2. **15.7.** а) $y=-2x+4$; б) $y=17x-17$. **15.8.** а) $y=2$; б) $y=0$; г) $y=-1$. **15.9.** (0,5; -1). **16.1.** а) $f(x)=x^2$; $g(x)=2x-1$; б) $g(x)=3x+2$; $f(x)=\sqrt{x}$; в) $g(x)=x-\frac{\pi}{6}$; $f(x)=\sin x$; г) $g(x)=4x$; $f(x)=\operatorname{tg}x$. **16.2**. а) $y=f(g(x))=\cos2x$; $y=g(f(x))=2\cos x$; б) $y=f(g(x))=(3x+1)^3$; $y=g(f(x))=3x^3+1$; в) $y=f(g(x))=\sin(4x-1)$; $y=g(f(x))=4\sin x-1$; г) $y=f(g(x))=\sqrt{\frac{2}{x+1}}$; $y=g(f(x))=\frac{2}{\sqrt{x}+1}$. **16.5.** а) $y=f(g(x))=\sin\left(\frac{2}{x^3-1}\right)$; $y=f(g(x))=\frac{2}{\sin^3x-1}$; б) $y=f(g(x))=3\operatorname{tg}^3x+2\operatorname{tg}^2x$; $y=g(f(x))=\operatorname{tg}(3x^3+2x^2)$. **16.7.** а) $-\frac{6}{x^2}\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^2$; б) $\frac{8}{x^2}\left(5-\frac{4}{x}\right)$. **17.1.** а) $3\cos x-2\sin x$; б) $-\frac{1}{\sin^2x}$; в) $\frac{1}{\cos^2x}+\cos x$; г) $-2\sin x-\frac{1}{\cos^2x}$.

17.2. а) $2+\frac{1}{\cos^2 x}$; б) $4\mathrm{ctg}\,x-\frac{4x}{\sin^2 x}$. **17.3.** а) $2\sin 2x+2\cos 2x$; б) $3-4\sin 4x$; в) $3x^2-4\cos 2x$. **17.4.** а) $\frac{3}{\sin^2 x}-12x^2$; б) $2\cos 2x+\frac{1}{\cos^2 x}$; в) $-\frac{1}{4\cos^2 x}$. **17.5.** а) $\frac{1}{2}$; б) 4; в) $\frac{1}{3}$; г) 0. **17.6.** а) $\frac{\pi}{2}+n\pi, n\in Z$; б) $\frac{\pi n}{4}, n\in Z$. **17.7.** б) $y=2x+1-\frac{\pi}{2}$. **17.8.** а) $\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}, n\in Z$; б) $\frac{n\pi}{2}, n\in Z$. **17.9.** а) $-\sin 2x+\sin x$; б) $\cos x+\frac{2}{\cos^2 x}$; в) $-\sin x-\cos x$; г) $4\sin x+(4x-1)\cos x$. **17.10.** а) $-\sin 2x$; б) $6\sin 4x+2$; в) $4\cos 2x(\sin 2x+1)$; г) $6(\cos 2x+\sin 2x)^2\cdot(-\sin 2x+\cos 2x)$. **17.12.** а) $\pm\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$. **17.15.** б) $\frac{4}{3}$. **18.2.** б) $\approx 0{,}936$; ж) $\approx 2{,}002$. **18.4.** б) $\approx 1{,}33$. **18.5.** в) $\approx 4{,}04$.

Глава 6. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

19.3. а) $(-\infty;+\infty)$ — возрастает; б) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ — убывает, $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right)$ — возрастает; в) $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$ — убывает, $\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$ — возрастает; г) $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$ — промежуток убывания. **19.6.** а) $(-\infty;+\infty)$ — возрастает; б) $\left(-\infty;\frac{3}{10}\right]$ — убывает, $\left[\frac{3}{10};+\infty\right)$ — возрастает; в) $(-\infty;-2]\cup$ $\cup[1;+\infty)$ — возрастает, $[-2;1]$ — убывает; г) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$ — возрастает, $\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$ — убывает. **19.8.** а) $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ — промежуток возрастания, $[-1;1]$ — промежуток убывания; б) $\left(-\infty;-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[\frac{2\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$ — возрастает, $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ — убывает; в) $(-\infty;+\infty)$ — возрастает. **19.10**. При $a=0$. **20.2.** а) $x=0$ — точка минимума; б) $x=0$ — точка минимума; в) $x=\frac{3}{2}$ — точка максимума; г) $x=\frac{4}{5}$ — точка минимума. **20.3.** а) $x=2$ — точка минимума; **20.6.** а) $x=-\frac{1}{3}$ — точка минимума, $x=\frac{1}{3}$ — точка максимума; б) $x=1$ — точка минимума; в) $x=2$ — точка минимума; г) $x=3$ — точка максимума; д) $x=-\frac{2}{3}$ — точка максимума, $x=0$ — точка минимума; е) $x=-1$ — точка минимума. **20.10.** а) Один; б) один. **20.11.** а) -2; $-\frac{1}{2}$; 1; б) -1; $\frac{1}{2}$; 2. **21.2.** а) $(-\infty;1]$ — промежуток возрастания, $[1;+\infty]$ — промежуток убывания, $\max y=y(1)=0{,}5$; в) $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$ — промежуток убывания, $\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$ — промежуток возрастания, $\min y=y\left(\frac{1}{4}\right)=2\frac{7}{8}$; г) $\left(-\infty;\frac{5}{4}\right]$ — промежуток возрастания, $\left[\frac{5}{4};+\infty\right)$ — промежуток убывания, $\max y=y\left(\frac{5}{4}\right)=1\frac{1}{8}$. **22.1.** а) -1; -5; б) 11; 2. **22.2.** а) 24; -6; б) 3; -3. **22.3.** б) 4; 0. **22.5.** а) 8; 8, б) 1; 100. **22.6.** а) $\frac{23}{3}$; 3; б) 10; 1. **22.11.** а) 50; 25; б) 2; 16; **22.15.** а) 20 м; 20 м; б) 4 м; 8 м.

Глава 7. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Таблица 68

23.6.

X	500	100	50	0
P	0,01	0,1	0,5	0,39

Таблица 69

23.8.

X	0	1	2
P	0,02	0,26	0,72

24.1. $M(X)=7$. **24.2.** $D(X)=18{,}01$. **24.3.** $\sigma(X)=2{,}64$. **24.9.** $M(X+Y)=22{,}2$; $D(Y+X)=47{,}76$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСЫ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА 10 КЛАССА

1. а) –4,9; –3,9; –0,4; б) $\frac{1}{4}$; $-\frac{3}{4}$; –42; в) 3; 3; 11; г) 15; –35; $-\frac{1}{5}$. **2.** а) 0; $-\frac{\pi}{3}$; π; б) $-5\sqrt{3}$; 0; $-5\sqrt{3}$; в) 1; $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; 1; г) 0; $\frac{2\pi}{3}$; π. **3.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{5\pi}{3}$; в) -4π; г) 0; д) 5. **4.** а) 0; б) 1; в) 5; г) $\frac{5}{14}$. **6.** ≈ 0,1 см^2. **7.** а) $2x + 0{,}5$; б) $-9x^2 + 20x$; в) $1 + \frac{5}{\sqrt{x}}$; г) $\cos x + \sin x$; д) $\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}$; е) $\frac{8x^3}{(x^4+1)^2}$. **8.** а) –6; б) π; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{1}{4}$. **9.** а) $x^6 - \sin x$; б) $\frac{1}{2}x^2 - \cos x$; в) $10x^9 - 6x^2$; г) $18x^{17} + 22x^{10}$; д) $-\frac{16}{x^9} - 8x^7$; е) $-\frac{9}{x^4} - \frac{15}{x^6}$. **10.** 12 м/с. **11.** 40 м/с. **12.** $t = 2$. **13.** а) 21; 18; б) 4; 8. **14.** а) $330x^2(x^3-6)^{109}$; б) $\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+2}}$; в) $30\cos(6x-1)\cdot\sin^4(6x-1)$; г) $32x^3\cos^3\left(\frac{\pi}{3}-x^4\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-x^4\right)$. **15.** а) 84; б) $-48\sqrt{3}$; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) 0. **16.** а) ≈ 1,036; б) ≈ 1,05; в) ≈ 0,9; г) ≈ 83,9; **17.** а) ≈ 1,003; б) ≈ 4,984; в) ≈ 9,975; г) ≈ 1,15. **18.** а) –2; 0; б) 1; 3; в) –11; 9. **19.** 156,25 м^2. **20.** 80 м. **21.** 2,5 и 2,5. **22.** 6 см. **23.** а) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$; πk, $k, n \in Z$; б) $\frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; πk, $n \in Z$; в) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; г) $-\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **24.** а) $\frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; б) πn; $k \in Z$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $k \in Z$; в) $\frac{\pi k}{4}$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $k \in Z$; $n \in Z$. **25.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k, n \in Z$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in Z$; в) $2\pi n$; $\pm\arccos\frac{2}{3} + 2\pi k$, $k, n \in Z$; г) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $k \in Z$; $\operatorname{arcctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **26.** а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; в) πn, $n \in Z$; $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k, n \in Z$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **27.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, $k, n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{3} + \pi n$, $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k, n \in Z$; в) $\operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi n$; $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k, n \in Z$; г) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{7}{4} + \pi k$, $k, n \in Z$. **28.** а) –1; б) $\frac{1}{2}$; в) 2; 3; г) $\frac{5}{3}$. **29.** а) ±2; $\pm\sqrt{5}$; б) ±1; $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$; в) ±1; г) –1. **30.** а) $(1+2n)\pi$, $n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **31.** а) $2\pi n$, $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **32.** а) $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n\right]$, $n \in Z$; б) $\left[\frac{7\pi}{12} + 2\pi n; \frac{25\pi}{12} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; в) $\left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$; г) $\left(\pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$. **33.** а) $\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}\right)$, $n \in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{42} + \frac{2\pi n}{7}; \frac{\pi}{42} + \frac{2\pi n}{7}\right)$, $n \in Z$. **34.** а) $\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}\right)$, $n \in Z$. **35.** а) $\left(-\frac{\pi}{3} + n\pi; \frac{\pi}{3} + n\pi\right)$, $n \in Z$; б) $\left[-\frac{5\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}\right]$, $n \in Z$. **39.** а) $(0; +\infty)$; б) $(-1; 1)$; в) $(-1; 0)\cup(0; 1)$; г) $(-\infty; 0)\cup(0; 3)$. **40.** а) $[0; +\infty)$; б) $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$. **41.** а) $[-3; 2]$; б) $\left[-\frac{4}{3}; 5\right]$; в) $[-2; 0]$; г) $(-\infty; -2]\cup[0; 2]$. **42.** а) $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$. **43.** а) $(-\infty; 4]$; б) $[0; +\infty)$; в) $(-\infty; -2)\cup(-2; 2)\cup(2; +\infty)$; г) $(-\infty; 2)\cup(2; 3)\cup(3; +\infty)$. **44.** а) $[-11; +\infty)$; б) $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; в) $[-8; 8]$; г) $[1; 5]$. **46.** а) Нечетная; б) нечетная; в) четная; г) ни четная, ни нечетная; д) нечетная; е) четная. **48.** а) $\frac{2\pi}{3}$; б) 10 π; в) π; г) $\frac{\pi}{2}$. **51.** а) $y = 0{,}5x - 1{,}5$, $x \in R$; б) $y = 1 + \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$; в) $y = \sqrt{x+1}$, $x \in [-1; +\infty)$. **52.** а) $x = -1$; б) $x = \pm 2$; в) $x = \pm 3$; г) $x = 0$; –1; ±5. **54.** а) $y = 3 - x$; б) $y = 2x + 5$; в) $y = 2x - 1$; г) $y = 1$. **55.** 45°; $y = x + 1$. **56.** arctg 2. **57.** а) $y = -4x + \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}$; б) $y = 4x + \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$. **58.** а) $(-\infty; 1]$ — возрастает, $[1; +\infty)$ — убывает; б) $(-\infty; 0]$ — убывает, $[0; +\infty)$ — возрастает; в) $(-\infty; -1]\cup[1; +\infty)$ — возрастает, $[-1; 1]$ — убывает; г) $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$ — возрастает, $[-3; 3]$ — убывает; д) $(-\infty; -1)\cup(-1; +\infty)$ — возрастает; е) $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$ — убывает. ж) $(-\infty; -3]\cup[2; +\infty)$ — возрастает, $[-3; 2]$ — убывает; з) $(-\infty; 1]\cup[6; +\infty)$ — убывает, $[1; 6]$ — возрастает. **59.** а) $x = 0$ — точка максимума; б) точек экстремума нет.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 7. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Учебное издание

Абылкасымова Алма Есимбековна
Жумагулова Зауре Абдыкеновна

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Учебник для 10 класса
общественно-гуманитарного направления
общеобразовательных школ

Редактор *С. Родионова*
Худож. редактор *А. Сланова*
Техн. редактор *И. Тарапунец*
Компьютерная верстка *Г. Алимшеевой*

Государственная лицензия № 0000001 выдана издательству Министерством образования и науки Республики Казахстан 7 июля 2003 года

ИБ № 5870

Подписано в печать 30.05.19. Формат 70x100 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура "SchoolBook Kza". Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,9 + 0,32 форзац. Усл. кр.-отт. 59,24. Уч.-изд. л. 6,72 + 0,54 форзац. Тираж 35 000 экз. Заказ №

Издательство "Мектеп", 050009, г. Алматы, пр. Абая, 143
Факс: 8(727) 394-42-30, 394-37-58.
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz