В. А. Смирнов, Е. А. Туяков

ГЕОМЕТРИ

10

Учебник для 10 классов
общественно-гуманитарного направления
общеобразовательных школ

*Утверждено Министерством образования и
науки Республики Казахстан*

Алматы "Мектеп" 2019

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72
С50

Условные обозначения:

— проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями

— задания для самостоятельного изучения теоретического материала

— конец доказательства теоремы или свойства

А — обязательные упражнения для всех учащихся

В — упражнения средней сложности

Смирнов В. А., Туяков Е. А.
С50 **Геометрия.** Учебник для 10 кл. обществ.-гуманит. направления общеобразоват. шк. — Алматы: Мектеп, 2019. — 136 с., илл.

ISBN 978—601—07—1147—1

С $\frac{4306020502—014}{404(05)—19}$ 49(1)—19

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72

ISBN 978—601—07—1147—1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вы начинаете изучать один из самых увлекательных и важных разделов геометрии — стереометрию. Зачем же она нужна? Во-первых, именно она знакомит с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения пространственных фигур, формирует необходимые пространственные представления. Во-вторых, стереометрия дает метод научного познания, способствует развитию логического мышления.

Кроме этого, изучение стереометрии помогает приобретению необходимых практических навыков в изображении, моделировании и конструировании пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Появление информационных технологий не только не снижает, но и усиливает роль геометрии, поскольку при этом существенно расширяются возможности графического представления материала, компьютерного моделирования.

Весь материал учебника разбит на главы и пункты, которые содержат теоретический материал, задания для самостоятельной работы, вопросы для повторения, задачи различного уровня трудности.

Конец доказательства теоремы помечен знаком (□).

Задачи разделены по уровням **A** и **B**. Задачи уровня **A** имеют начальный уровень трудности и отвечают за понимание основного материала. Выполнение задач уровня **B** свидетельствует об освоении учебного материала данного пункта.

Пункты, отмеченные звездочкой (*), содержат дополнительный материал, не входящий в учебную программу. Он может быть использован как на основных уроках, так и на дополнительных занятиях по математике. В конце учебника приведены ответы к задачам.

Желаем успехов в изучении геометрии!

Авторы

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 7—9 КЛАССОВ

Основные понятия планиметрии

Основными понятиями планиметрии (геометрии на плоскости) являются *точка*, *прямая* и *плоскость*, а основными свойствами (аксиомами) их взаимного расположения являются следующие свойства:

1. *Через любые две точки проходит единственная прямая.*

2. *Существуют, по крайней мере, три точки, не принадлежащие одной прямой.*

Лучом, или *полупрямой*, называется часть прямой, состоящая из данной точки и всех точек, лежащих от нее по одну сторону. При этом сама данная точка называется *вершиной луча*, или *началом луча*.

Отрезком называется часть прямой, состоящая из двух данных точек и всех точек, лежащих между ними. При этом сами данные точки называются *концами отрезка*.

Длина отрезка — это положительное число, показывающее, сколько раз единичный отрезок и его части укладываются в данном отрезке.

Длину отрезка AB называют также *расстоянием* между точками A и B.

Фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости, ограниченной этими лучами, называется *углом*. Общая вершина лучей называется *вершиной угла*, а сами лучи — *сторонами угла*.

Градусная величина угла показывает, сколько раз угол в один градус и его части укладываются в этом углу.

Угол называется *развернутым*, если его стороны вместе составляют прямую, в противном случае угол называется *неразвернутым*.

Два угла называются *смежными*, если одна сторона у них общая, а две другие составляют вместе прямую.

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла дополняют до прямых стороны другого угла.

Угол, равный своему смежному углу, называется *прямым углом*.

Угол, меньший прямого угла, называется *острым углом*.

Угол, больший прямого угла, но меньший развернутого угла, называется *тупым углом*.

Биссектрисой угла называется внутренний луч, делящий этот угол на два равных угла.

Углом между пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных лучами, на которые делятся данные прямые точкой их пересечения.

Две прямые называются *перпендикулярными*, если они образуют прямой угол.

Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются, т. е. не имеют общих точек.

В качестве аксиомы принимается следующее свойство.

Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит не более одной прямой, параллельной данной.

Пусть прямая проходит через точку A и перпендикулярна прямой b, B — точка пересечения этих прямых. Отрезок AB называется *перпендикуляром*, опущенным из точки A на прямую b. Точка B называется *основанием перпендикуляра*. Длина перпендикуляра называется *расстоянием* от точки A до прямой b.

Для произвольной точки C на прямой b, отличной от точки B, отрезок AC называется *наклонной*, проведенной из точки A к прямой b. Точка C называется *основанием наклонной*. Отрезок BC называется *проекцией наклонной* на прямую b.

Расстоянием между двумя параллельными прямыми называется длина перпендикуляра, опущенного из точки, принадлежащей одной прямой, на другую прямую.

Теорема о пропорциональных отрезках. ***Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.***

Задачи

1. Изобразите пять прямых так, чтобы у них было десять точек попарных пересечений.
2. На прямой отмечены: а) 3 точки; б) 4 точки; в) 5 точек; г)* n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?
3. На прямой последовательно отложены три отрезка: AB, BC и CD так, что $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD.
4. На сколько частей разбивают плоскость n прямых, пересекающихся в одной точке?
5. Сумма трех углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 306°. Найдите больший из них.
6. Луч OC лежит внутри угла AOB, равного 120°. Найдите угол AOC, если он на 30° меньше угла BOC.
7. Найдите градусные величины двух смежных углов, если один из них в два раза больше другого.
8. Общей частью двух углов AOB и COD, величиной 60° и 90° соответственно, является угол BOC, величиной 30°. Найдите угол AOD.
9. Колесо имеет: а) 10 спиц; б) 12 спиц. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.
10. На сколько градусов повернется минутная стрелка за: а) 20 мин; б) 10 мин; в) 50 мин?

11. Сумма двух внутренних накрест лежащих угл ов, образованных параллельными прямыми и секущей, равна 150°. Найдите эти углы.

12. Докажите, что если некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.

Треугольники

Треугольником называется фигура, образованная тремя точками, не принадлежащими одной прямой, и тремя отрезками, попарно соединяющими эти точки. Точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки — *сторонами* треугольника.

Треугольник называется *остроугольным* , если у него все углы острые.

Треугольник называется *прямоугольным* , если у него есть прямой угол.

Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой* , две другие стороны называются *катетами.*

Треугольник называется *тупоугольным* , если у него есть тупой угол.

Среди основных элементов треугольника, кроме вершин, сторон и углов, выделяют следующие:

медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны;

биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой противолежащей стороны;

высота треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны или ее продолжения и перпендикулярный этой стороне.

Периметром треугольника называется сумма длин его сторон.

В зависимости от соотношений между сторонами, треугольники подразделяются на: а) разносторонние; б) равнобедренные; в) равносторонние.

Треугольник называется *разносторонним* , если у него стороны попарно не равны.

Треугольник называется *равнобедренным* , если у него две стороны равны.

Эти равные стороны называются *боковыми сторонами* , а третья сторона — *основанием* треугольника.

Треугольник называется *равносторонним* , если у него все стороны равны.

Первый признак равенства треугольников. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны* .

Второй признак равенства треугольников. *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны* .

Третий признак равенства треугольников. *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны* .

Признак равнобедренного треугольника. *Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный* .

Одной из основных теорем планиметрии является следующая теорема об углах треугольника.

Теорема. ***Сумма углов треугольника равна 180°*** .

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется *средней линией* треугольника.

Теорема. ***Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна ее половине*** .

К числу замечательных точек треугольника относятся:

а) точка пересечения биссектрис (*центр вписанной окружности*);

б) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (*центр описанной окружности*);

в) точка пересечения медиан (*центроид*);

г) точка пересечения высот или их продолжений (*ортоцентр*).

Теорема (Пифагора). ***В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов*** .

Таким образом, если катеты прямоугольного треугольника равны a, b, а гипотенуза равна c, то имеет место формула

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Первый признак подобия треугольников. *Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны* .

Второй признак подобия треугольников. *Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны* .

Третий признак подобия треугольников. *Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны* .

Задачи

13. Нарисуйте: а) остроугольный треугольник ABC; б) прямоугольный треугольник ABC; в) тупоугольный треугольник ABC. Проведите медианы, биссектрисы и высоты этих треугольников.

14. Периметр треугольника равен 54 см. Найдите его стороны, если они относятся как 2 : 3 : 4.

15. Докажите, что в равных треугольниках равны соответствующие: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты.

16. Периметр равнобедренного треугольника равен 15,6 м. Найдите его стороны, если: а) основание меньше боковой стороны на 3 м; б) основание больше боковой стороны на 3 м.

17. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

18. В треугольнике ABC угол A равен 40°, $AC = BC$. Найдите угол C.

19. Углы треугольника относятся как 1 : 2 : 3. Найдите меньший из них.

20. В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен 138°. Найдите угол C.

21. Периметр треугольника равен 15 см. Найдите периметр треугольника, отсекаемого от данного какой-нибудь его средней линией.

22. Найдите высоту равностороннего треугольника со стороной 1.

23. Стороны одного треугольника равны 16 см, 8 см и 10 см. Меньшая сторона второго треугольника, подобного первому, равна 6 см. Найдите другие стороны второго треугольника.

24. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, разбивает его на два треугольника, подобных исходному.

Ломаные и многоугольники

Ломаной называется фигура, образованная конечным набором отрезков, расположенных так, что конец первого является началом второго, конец второго — началом третьего и т. д. Отрезки называются *сторонами ломаной*, а их концы — *вершинами ломаной*.

Сумма длин сторон ломаной называется *длиной ломаной*.

Ломаная обозначается последовательным указанием ее вершин. Например, ломаная $ABCDE$, ломаная $A_1A_2...A_n$.

Простой ломаной называется ломаная, не имеющая точек самопересечения.

Замкнутой ломаной называется ломаная, у которой начало первого отрезка совпадает с концом последнего.

Замкнутую ломаную, у которой точками самопересечения являются только начальная и конечная точки, также называют *простой*.

Фигура, образованная простой замкнутой ломаной и ограниченной ею внутренней областью, называется *многоугольником*. Вершины ломаной называются *вершинами многоугольника*, стороны ломаной — *сторонами многоугольника*, а углы, образованные соседними сторонами, —

углами многоугольника. Точки многоугольника, не принадлежащие его сторонам, называются *внутренними*.

Периметром многоугольника называется сумма длин всех его сторон.

Многоугольники делятся на *треугольники* — многоугольники с тремя углами, *четырехугольники* — многоугольники с четырьмя углами и т. д. Многоугольник, у которого n углов, называется *n-угольником*.

Правильным многоугольником называется многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.

Выпуклым многоугольником называется многоугольник, который вместе с любыми двумя своими точками содержит и соединяющий их отрезок.

Теорема. ***Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна 180°(n – 2).***

Задачи

25. Простая замкнутая ломаная имеет 20 сторон. Сколько у нее вершин?

26. Изобразите замкнутую пятистороннюю ломаную, которая имеет: а) две точки самопересечения; б) три точки самопересечения; в) пять точек самопересечения.

27. Нарисуйте правильный: а) треугольник; б) четырехугольник; в) пятиугольник; г) шестиугольник. Проверьте правильность нарисованных многоугольников с помощью линейки и транспортира.

28. На сколько треугольников делится выпуклый: а) четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник; г) n-угольник своими диагоналями, проведенными из одной вершины?

29. Сколько всего диагоналей имеет: а) четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник?

30. Чему равны углы правильного: а) треугольника; б) четырехугольника; в) пятиугольника; г) шестиугольника?

31. Сумма углов выпуклого многоугольника равна 900°. Сколько у него сторон?

32. Найдите внешние углы правильного: а) четырехугольника; б) пятиугольника; в) шестиугольника; г) восьмиугольника.

Четырехугольники

Четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны, называется *параллелограммом*.

Первый признак параллелограмма. *Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник является параллелограммом*.

Второй признак параллелограмма. *Если в четырехугольнике противолежащие стороны попарно равны, то этот четырехугольник является параллелограммом.*

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Признак прямоугольника. *Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.*

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Признак ромба. *Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом.*

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Признак квадрата. *Если в прямоугольнике диагонали перпендикулярны, то этот прямоугольник является квадратом.*

Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется *трапецией*.

Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а непараллельные стороны — *боковыми сторонами*.

Высотой трапеции называется перпендикуляр, опущенный из ее вершины на противолежащее ей основание или его продолжение.

Трапеция называется *равнобедренной*, если ее боковые стороны равны.

Трапеция называется *прямоугольной*, если один из ее углов прямой.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией* трапеции.

Теорема. ***Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.***

Задачи

33. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 25° и 35°. Найдите углы параллелограмма.

34. Найдите углы параллелограмма, если сумма двух из них равна: а) 80°; б) 100°; в) 160°.

35. Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если: а) одна сторона на 2 см больше другой; б) разность двух сторон равна 6 см; в) одна из сторон в два раза больше другой.

36. Две стороны параллелограмма относятся как 3 : 4, а периметр его равен 2,8 м. Найдите стороны параллелограмма.

37. В прямоугольнике острый угол между его диагоналями равен 50°. Найдите углы, которые образуют диагонали со сторонами прямоугольника.

38. Меньшая сторона прямоугольника равна 5 см, диагонали пересекаются под углом 60°. Найдите диагонали прямоугольника.

39. Найдите диагонали прямоугольника, если его периметр равен 34 см, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 30 см.

40. Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма с неравными соседними сторонами при пересечении образуют прямоугольник.

41. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

42. Чему равны углы равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 40°?

43. Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 3 см, отсекает треугольник, периметр которого равен 15 см. Найдите периметр трапеции.

44. Основания трапеции равны 4 см и 10 см. Найдите отрезки, на которые делит среднюю линию трапеции одна из ее диагоналей.

Тригонометрические функции

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$).

Отношение противолежащего углу A катета к гипотенузе называется *синусом* острого угла A прямоугольного треугольника и обозначается $\sin A$. По определению

$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$

Отношение прилежащего к углу A катета к гипотенузе называется *косинусом* острого угла A прямоугольного треугольника и обозначается $\cos A$. По определению

$$\cos A = \frac{AC}{AB}.$$

Отношение противолежащего углу A катета к прилежащему катету называется *тангенсом* острого угла A прямоугольного треугольника и обозначается $\operatorname{tg} A$. По определению

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}.$$

Отношение прилежащего к углу A катета к противолежащему катету называется *котангенсом* острого угла A прямоугольного треугольника и обозначается $\operatorname{ctg} A$. По определению

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

Непосредственно из этих определений следуют равенства:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс называются *тригонометрическими функциями острого угла*.

$$\sin 30° = \frac{1}{2},\ \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{tg}\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \text{ctg}\ 30° = \sqrt{3};$$
$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60° = \frac{1}{2},\ \text{tg}\ 60° = \sqrt{3},\ \text{ctg}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{3};$$
$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{tg}\ 45° = \text{ctg}\ 45° = 1.$$

Основное тригонометрическое тождество. *Синус и косинус острого угла A связаны между собой основным тригонометрическим тождеством*

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Тангенс и косинус острого угла A связаны между собой тождеством

$$\text{tg}^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}.$$

Котангенс и синус острого угла A связаны между собой тождеством

$$\text{ctg}^2 A + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}.$$

Теорема (теорема синусов). ***Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Причем отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной около треугольника окружности.***

Таким образом, если для треугольника ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, R — радиус описанной окружности, то имеют место равенства

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора.

Теорема (теорема косинусов). ***Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.***

Таким образом, если для треугольника ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, то имеет место равенство

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Задачи

45. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) основание равно 6, боковые стороны равны 5. Найдите значения тригонометрических функций угла A.

46. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AC = 2$. Найдите высоту CH.

47. В треугольнике ABC $AC = BC = 2$, угол C равен 120°. Найдите высоту AH.

48. Найдите $\cos A$, если: а) $\sin A = \frac{1}{3}$; б) $\sin A = \frac{3}{5}$.

49. Найдите $\text{tg}\ A$, если: а) $\cos A = \frac{2}{3}$; б) $\cos A = \frac{5}{13}$.

50. Найдите $\operatorname{ctg} A$, если: а) $\operatorname{tg} A = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg} A = 2$.

51. Чему равен синус: а) 120°; б) 135°; в) 150°?

52. Чему равен косинус: а) 120°; б) 135°; в) 150°?

53. При каких значениях угла треугольника квадрат стороны, лежащей против этого угла: а) меньше суммы квадратов двух других сторон; б) равен сумме квадратов двух других сторон; в) больше суммы квадратов двух других сторон?

54. В треугольнике ABC $AB = 12$, $AC = 8$, $\angle A = 60°$. Найдите третью сторону.

55. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен 150°. Найдите AB.

56. Даны три стороны треугольника $BC = 2$, $AC = 3$, $AB = 4$. Найдите косинусы его углов A, B, C.

Площадь

Площадь фигуры характеризует величину части плоскости, которую занимает эта фигура.

Измерение площади фигуры, как и измерение длины отрезка, основано на сравнении этой фигуры с фигурой, площадь которой принимается за единицу.

За единицу измерения площади принимается квадрат, сторона которого равна единице измерения длины. Он называется *единичным квадратом*.

Площадь фигуры — это число, получающееся в результате измерения и показывающее, сколько раз единичный квадрат и его части укладываются в данной фигуре.

Две фигуры называются *равновеликими*, если они имеют одинаковую площадь.

Площадь S прямоугольника, смежные стороны которого равны a, b, вычисляется по формуле

$$S = a \cdot b.$$

Теорема. *Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.*

Таким образом, площадь S параллелограмма со стороной a и высотой h, проведенной к этой стороне, вычисляется по формуле

$$S = a \cdot h.$$

Теорема. *Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.*

Таким образом, площадь S параллелограмма со смежными сторонами a, b и углом C между ними вычисляется по формуле

$$S = ab \cdot \sin C.$$

Теорема. ***Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.***

Таким образом, площадь S треугольника со стороной c и высотой h, проведенной к этой стороне, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}c \cdot h.$$

Теорема. ***Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.***

Таким образом, площадь S треугольника со сторонами a, b и углом C между ними вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C.$$

Теорема. ***Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.***

Таким образом, площадь S трапеции с основаниями a, b и высотой h вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h.$$

Теорема. ***Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.***

Таким образом, площадь S выпуклого четырехугольника с диагоналями d_1, d_2 и углом C между ними вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \cdot \sin C.$$

Площадь многоугольника находится разбиением его на треугольники. При этом площадь многоугольника будет равна сумме площадей этих треугольников.

Задачи

57. Найдите площадь прямоугольника, сторона которого равна 6, а диагональ равна 10.

58. Найдите площадь квадрата по его диагонали a.

59. Площадь квадрата равна 1. Найдите площадь квадрата, вершинами которого являются середины сторон данного квадрата.

60. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны равны 8 см и 10 см, а угол между ними равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

61. Площадь параллелограмма равна 40 см^2, стороны — 5 см и 10 см. Найдите высоты этого параллелограмма.

62. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите площадь треугольника.

63. Площадь треугольника равна 30. Одна его сторона равна 10. Найдите высоту, опущенную на эту сторону.

64. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 3 см и 8 см, а угол между ними равен 30°.

65. Средняя линия трапеции равна 3, высота равна 2. Найдите площадь трапеции.

66. Основания трапеции равны 10 см и 35 см, площадь равна 225 см^2. Найдите ее высоту.

67. Высота трапеции равна 20 см, площадь — 400 см^2. Найдите среднюю линию трапеции.

68. Площадь трапеции равна 200 см^2. Одно основание равно 26 см, высота равна 10 см. Найдите второе основание трапеции.

69. Найдите площадь правильного шестиугольника, стороны которого равны 1.

70. Диагонали выпуклого четырехугольника равны 6 и 8, угол между ними равен 30°. Найдите площадь этого четырехугольника.

Векторы

Вектором называется направленный отрезок, т. е. отрезок, в котором указаны его начало и конец.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащих на одной прямой, называются *одинаково направленными*, если один из лучей AB или CD содержится в другом, в противном случае они называются *противоположно направленными*.

Два вектора, не лежащих на одной прямой, называются *одинаково* (*противоположно*) *направленными*, если они лежат на параллельных прямых по одну сторону (по разные стороны) от прямой, соединяющей их начала.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они одинаково направлены или противоположно направлены.

Длиной, или *модулем*, вектора называется длина соответствующего отрезка. Длина векторов $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ обозначается соответственно $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Два вектора называются *равными*, если они имеют одинаковое направление и равные длины.

Рассматривают также *нулевые векторы*, у которых начало совпадает с концом. Такие векторы обозначаются $\vec{0}$.

Длина нулевого вектора считается равной нулю.

Все нулевые векторы считаются равными между собой.

Для векторов, так же как и для отрезков, определена операция сложения. Для того чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$.

Вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число t называется вектор, длина которого равна $|t| \cdot |\vec{a}|$, а направление остается прежним, если $t > 0$, и меняется на противоположное, если $t < 0$. Произведением вектора на нуль считается нулевой вектор.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается $t\vec{a}$. По определению $|t\vec{a}| = |t| \cdot |\vec{a}|$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число -1 обозначается $-\vec{a}$ и называется вектором, *противоположным* вектору $\vec{a}$.

По определению вектор $-\vec{a}$ имеет направление, противоположное вектору $\vec{a}$, и $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$.

Теорема. ***Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два ненулевых неколлинеарных вектора, то для любого вектора $\vec{c}$ существуют единственные числа t и s, для которых выполняется равенство $\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$.***

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два ненулевых вектора. Отложим их от точки O так, что $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если эти векторы не являются одинаково направленными, то угол, образованный лучами OA и OB, называется *углом между векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Угол между двумя одинаково направленными векторами считается равным $0°$.

Два вектора называются *перпендикулярными*, если угол между ними прямой.

Вектор, перпендикулярный данной прямой, называется *вектором нормали* этой прямой.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$. По определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos j,$$

где j — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется *скалярным квадратом* и обозначается $\vec{a}^2$. Из определения скалярного произведения следует равенство $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Задачи

71. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$, стороны которого равны 1, и точки O пересечения его диагоналей найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{DE}$; б) $\overrightarrow{OF}$; в) $\overrightarrow{BE}$; г) $\overrightarrow{FC}$.

72. В параллелограмме $ABCD$ укажите векторы: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$.

73. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 4$, $BC = 3$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O и равны 5. Найдите модуль суммы векторов: а) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$; б) $|\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}|$; в) $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|$; г) $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$.

74. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ равны соответственно 14 и 10 и пересекаются в точке O. Найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$; в) $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OC}$.

75. Диагонали правильного шестиугольника $ABCDEF$, стороны которого равны 1, пересекаются в точке O. Найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{OE}$; в) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{FE}$.

76. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 4$, $AD = 3$, диагонали AC и BD равны 5. Найдите длину вектора: а) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; б) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

77. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$ найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$; г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; д) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BE}$; е) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DE}$.

78. Для прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 8$, $AD = 6$ найдите скалярное произведение: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Координаты

Прямая, на которой выбраны точка O и единичный отрезок OE, указывающий положительное направление, называется *координатной прямой*, или *координатной осью*. Точка O называется *началом координат*.

Расстояние x от точки A координатной прямой до начала координат O, взятое со знаком “+”, если A принадлежит положительной полуоси, и со знаком “–”, если A принадлежит отрицательной полуоси, называется *координатой точки* A.

Теорема. ***Расстояние между точками A_1, A_2 на координатной прямой с координатами соответственно x_1, x_2 выражается формулой***

$$A_1A_2 = |x_2 - x_1|.$$

Пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат называется *прямоугольной системой координат* на плоскости. Начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy и называются соответственно *осью абсцисс* и *осью ординат*.

Плоскость с заданной прямоугольной системой координат называется *координатной плоскостью.*

Рассмотрим точку A на координатной плоскости. Проведем через нее прямую, перпендикулярную оси Ox. Точку пересечения этой прямой с осью Ox обозначим A_x. Координата этой точки на оси Ox обозначается x и называется *абсциссой* точки A. Аналогично через точку A проведем прямую, перпендикулярную оси Oy. Точку ее пересечения с осью Oy обозначим A_y. Координата этой точки на оси Oy обозначается y и называется *ординатой* точки A.

Таким образом, каждой точке A на координатной плоскости соответствует пара $(x; y)$, называемая *координатами точки* на плоскости относительно данной системы координат. Точка A с координатами $(x; y)$ обозначается $A(x; y)$.

Расстояние между точками $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ на координатной плоскости выражается формулой

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Окружность с центром в точке с координатами $(x_0; y_0)$ и радиусом R задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Прямая задается уравнением $ax + by + c = 0$, где a и b — числа, одновременно не равные нулю.

Отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются *координатами вектора*.

Векторы с координатами (1; 0), (0; 1) обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$ соответственно. Будем называть эти векторы *координатными векторами* и изображать отложенными от начала координат.

Теорема. ***Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(x; y)$ тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.***

Длина вектора $\overline{A_1A_2}$, для которого $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, выражается формулой

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(x_1; y_1)$ и $\vec{a}_2(x_2; y_2)$ выражается формулой

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Косинус угла j между прямыми с векторами нормали $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ вычисляется по формуле скалярного произведения векторов

$$\cos j = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

В частности, прямые будут перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ равно нулю, т. е. выполняются равенства

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Задачи

79. Найдите координаты середины отрезка AB, если: а) $A(-2;\ 1)$, $B(6;\ 5)$; б) $A(4;\ -3)$, $B(2;\ 1)$; в) $A(7;\ 5)$, $B(-5;\ -3)$.

80. Точки $O(0;\ 0)$, $A(6;\ 2)$, $C(0;\ 6)$ и B являются вершинами параллелограмма $OABC$. Найдите координаты точки B.

81. Точки $O(0;\ 0)$, $A(8;\ 2)$, $B(10;\ 8)$, $C(2;\ 6)$ являются вершинами параллелограмма. Найдите координаты точки P пересечения его диагоналей.

82. Найдите расстояние между точками: а) $A_1(2;\ 1)$ и $A_2(1;\ -1)$; б) $B_1(4;\ 3)$ и $B_2(-1;\ 3)$.

83. Найдите расстояние от точки $A(3;\ 2)$ до оси: а) Ox; б) Oy.

84. Какая из точек A $(1;\ 2)$ или B $(1;\ -2)$ лежит ближе к началу координат?

85. Найдите координаты центра C и радиус R окружности, заданной уравнением: а) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 16$; б) $x^2 + (y - 3)^2 = 9$.

86. Напишите уравнение окружности: а) с центром в точке $O(0;\ 0)$ и радиусом 1; б) с центром в точке $C(-2;\ 1)$ и радиусом 3.

87. Напишите уравнение окружности с центром в начале координат, проходящей через точку $A(3;\ 3)$.

88. Докажите, что уравнение: а) $x^2 - 8x + y^2 = 0$; б) $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 4 = 0$ задает окружность. Найдите ее радиус и координаты центра.

89. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(2;\ -1)$ и $\vec{a}_2(-1;\ 2)$.

90. Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями: а) $2x + y - 1 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$; б) $x + y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

91. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(2;\ 1)$ с вектором нормали $\vec{n}(1;\ -1)$.

92. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M(-1;\ 3)$, N $(1;\ 4)$. Найдите координаты вектора нормали этой прямой.

93. Определите, какие из перечисленных ниже пар прямых: а) параллельны; б) перпендикулярны:

1) $x + y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$;
2) $x + y - 2 = 0$, $x - y - 3 = 0$;
3) $-7x + y = 0$, $7x - y + 4 = 0$;
4) $4x - 2y - 8 = 0$, $-x - 2y + 4 = 0$.

94. Найдите координаты точки пересечения прямых:

а) $x - y - 1 = 0$, $x + y + 3 = 0$;
б) $x - 3y + 2 = 0$, $2x - 5y + 1 = 0$.

95. Даны векторы $\vec{a}(-1;\ 2)$ и $\vec{b}(2;\ -4)$. Найдите координаты вектора $3\vec{a} - 2\vec{b}$.

96. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(1;\ 3)$ и $\vec{a}_2(3;\ -1)$.

97. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}_1(3;\ 4)$ и $\vec{a}_2(4;\ 3)$.

Глава I. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Основные понятия стереометрии

Стереометрия, или *геометрия в пространстве* — это раздел геометрии, изучающий положение, форму, размеры и свойства различных пространственных фигур.

Стереометрия — греческое слово. Оно произошло от слов "стереос" — *твердый* (тело) и "метрео" — *измерять*, т. е. слово "стереометрия" означает измерение тел.

Основными понятиями стереометрии являются *точка*, *прямая* и *плоскость*, которые являются идеализациями объектов реального пространства.

Точка — идеализация очень маленьких объектов, т. е. таких, размерами которых можно пренебречь. Евклид в своей знаменитой книге "Начала" определял точку как то, что не имеет частей.

Прямая — идеализация тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяются лучи света.

Плоскость — идеализация ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т. п.

Точки, прямые и плоскости будем изображать, как показано на рисунке 1.1.

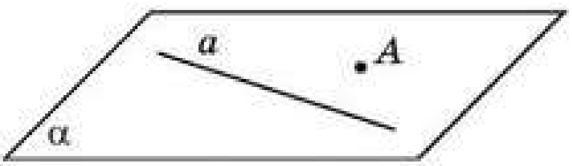
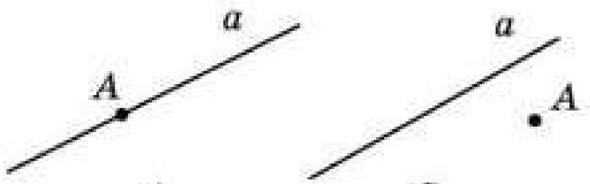


Рис. 1.1



а) б)

Рис. 1.2

Точки обозначают прописными латинскими буквами A, B, C, ...

Точка может принадлежать данной прямой (рис. 1.2, а) или не принадлежать ей (рис. 1.2, б).

Если точка принадлежит прямой, то говорят также, что прямая проходит через точку.

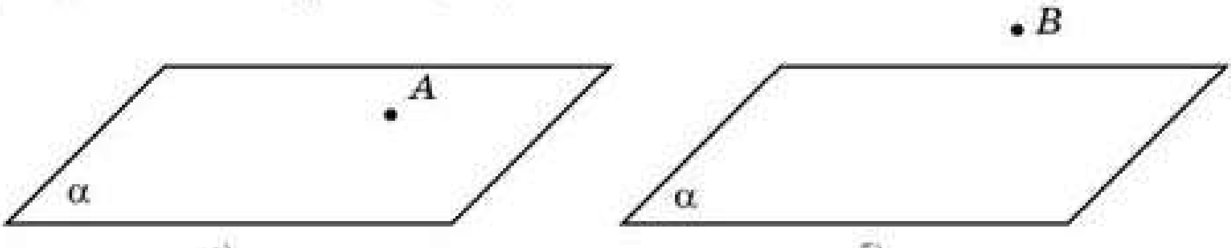
Прямые обозначают строчными латинскими буквами a, b, c, ... , а также двумя латинскими буквами, указывающими точки, принадлежащие этой прямой, например, прямая AB, прямая C_1D_1 и т. д.

Для отношения принадлежности в математике используется обозначение $\in$. Например, то, что точка A принадлежит прямой a, обозначается $A \in a$, то, что точка B не принадлежит прямой a, обозначается $B \notin a$.

Две прямые в пространстве называются *пересекающимися*, если они имеют только одну общую точку.

То, что точка C является пересечением прямых a и b, обозначается $C = a \cap b$.

Точка может принадлежать данной плоскости (рис. 1.3, а) или не принадлежать ей (рис. 1.3, б).



а) б)

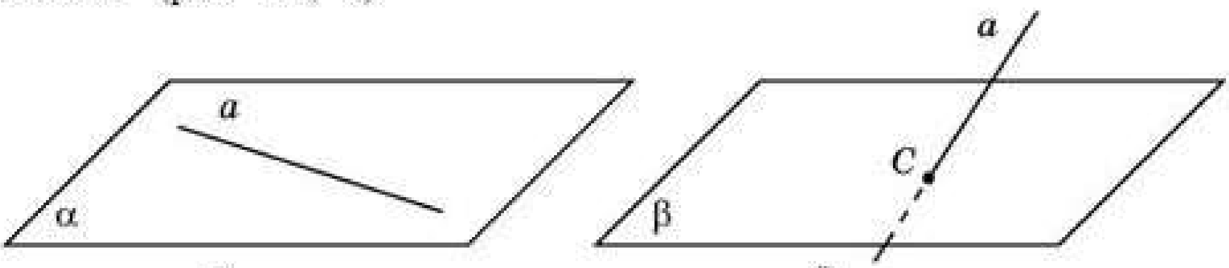
Рис. 1.3

Если точка принадлежит плоскости, то говорят также, что плоскость проходит через эту точку.

Плоскости обозначают греческими буквами a, b, g ... , а также тремя латинскими буквами, указывающими какие-нибудь три точки, принадлежащие этой плоскости и не принадлежащие одной прямой, например, плоскость ABC, плоскость $D_1E_1F_1$ и т. д.

То, что точка A принадлежит плоскости a, обозначается $A \in$a, то, что точка B не принадлежит плоскости a, обозначается $B \notin$a.

Говорят, что прямая *лежит в плоскости*, или что плоскость проходит через прямую, если каждая точка этой прямой принадлежит плоскости (рис. 1.4, а).



а) б)

Рис. 1.4

То, что прямая a лежит в плоскости a, обозначается $a \in$a.

Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что прямая *пересекает плоскость* (рис. 1.4, б).

То, что точка C является пересечением прямой a и плоскости b, обозначается $C = a \cap$b (рис. 1.4, б).

Попробуйте изобразить прямую, не пересекающую плоскость.

Будем говорить, что две плоскости пересекаются по прямой, если их общими точками являются точки этой прямой и только они (рис. 1.5).

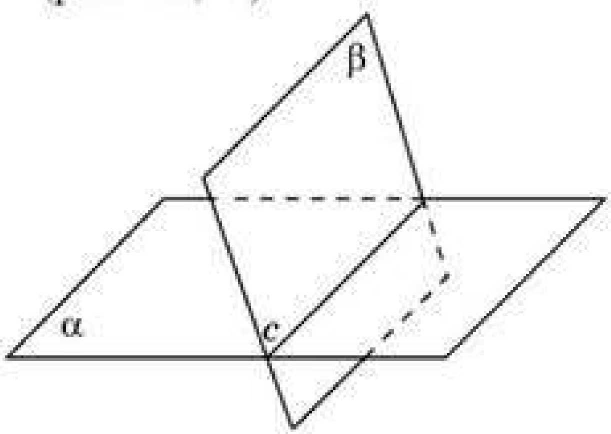


Рис. 1.5

То, что прямая c является пересечением плоскостей a и b, обозначается $c = a \cap b$.

Попробуйте изобразить две непересекающиеся плоскости.

Исторические сведения

Стереометрия, как и планиметрия, возникла и развивалась в связи с потребностями практической деятельности человека. О зарождении геометрии в Древнем Египте около 2000 лет до н. э. древнегреческий ученый Геродот (V в. до н. э.) писал следующее: "Сеозострис, египетский фараон, разделил землю, дав каждому египтянину участок по жребию, и взимал соответствующим образом налог с каждого участка. Случалось, что Нил заливал тот или иной участок, тогда пострадавший обращался к царю, а царь посылал землемеров, чтобы установить, на сколько уменьшился участок, и соответствующим образом уменьшить налог. Так возникла геометрия в Египте, а оттуда перешла в Грецию".

При строительстве даже самых примитивных сооружений необходимо было рассчитывать, сколько материала пойдет на постройку, вычислять расстояния между точками в пространстве и углы между прямыми и плоскостями, применять свойства простейших геометрических фигур. Египетские пирамиды, сооруженные за 2, 3 и 4 тыс. лет до н. э., поражают точностью своих метрических соотношений, свидетельствующих, что их строители хорошо знали стереометрию.

Развитие торговли и мореплавания требовало умений ориентироваться во времени и пространстве: знать сроки смены времен года, уметь определять свое местонахождение по карте, измерять расстояния и находить направление движения. Наблюдения за Солнцем, Луной, звездами и изучение законов взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве позволяло решать эти задачи и дало начало новой науке — астрономии.

Начиная с VII в. до н. э., в Древней Греции создаются философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической геометрии к теоретической. Все большее значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удавалось получать новые геометрические факты.

Одной из первых и самых известных школ была пифагорейская школа (VI—V вв. до н. э.), названная так в честь своего основателя Пифагора.

Для своих философских теорий пифагорейцы использовали правильные многогранники, формы которых они сопоставляли с элементами первооснов бытия, а именно: огонь — правильный тетраэдр (рис. 1.6, а); земля — гексаэдр (рис. 1.6, б); воздух — октаэдр (рис. 1.6, в); вода — икосаэдр (рис. 1.6, г); Вселенная — додекаэдр (рис. 1.6, д).

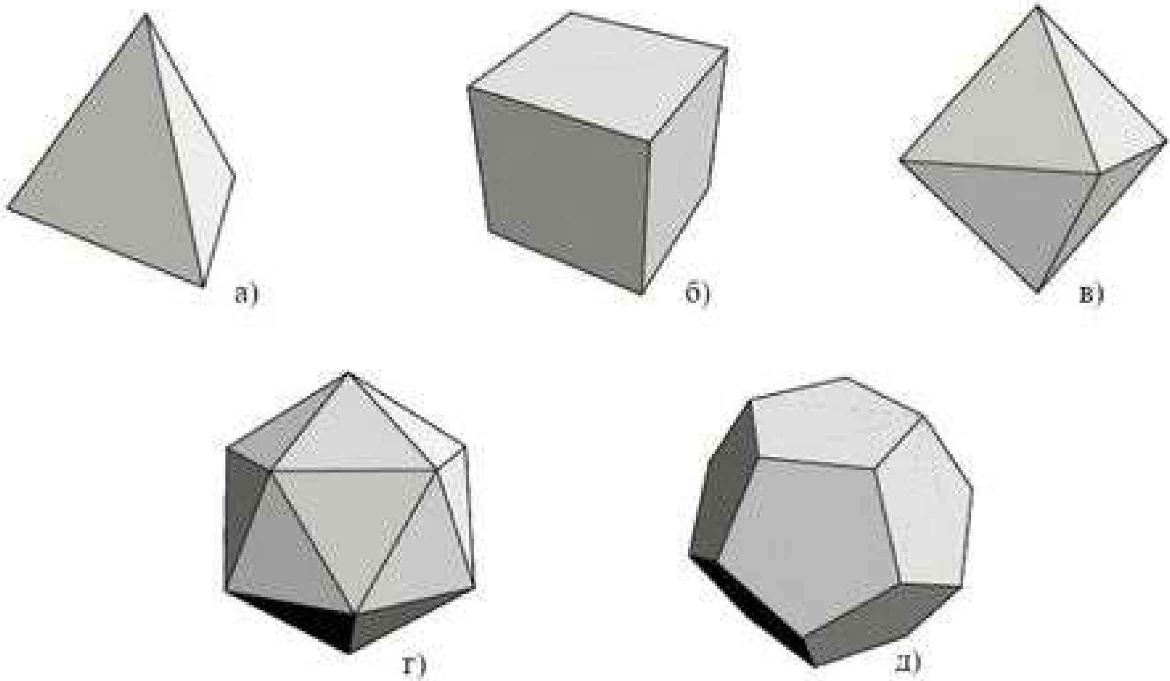


Рис. 1.6

Названия многогранников тоже имеют древнегреческое происхождение. В переводе с греческого языка: "тетра" — четыре, грани тетраэдра — четыре правильных треугольника; "текса" — шесть, у гексаэдра (куба) шесть квадратных граней; "окто" — восемь, грани октаэдра — восемь правильных треугольников; "икоси" — двадцать, грани икосаэдра — двадцать правильных треугольников, "додека" — двенадцать, грани додекаэдра — двенадцать правильных пятиугольников. "Эдра" в переводе с греческого языка означает "грань".

Более поздняя философская школа — александрийская — интересна тем, что дала миру знаменитого ученого Евклида, который жил около 300 лет до н. э. К сожалению, о жизни его мало известно. В одном из своих сочинений математик Папп (III в. н. э.), изображает Евклида как человека исключительно честного, тихого и скромного, которому были чужды гордость и эгоизм.

Евклид создал знаменитую книгу "Начала", в которой впервые было дано научное изложение геометрии и представлено ее стройное аксиоматическое построение. На протяжении более двух тысячелетий эта книга оставалась основой изучения систематического курса геометрии.

В одном из рассказов об Евклиде говорится: "Царь Птолемей спросил у Евклида, нельзя ли найти более короткий и менее утомительный путь к изучению геометрии, чем его "Начала". Евклид на это ответил: "В геометрии нет царского пути".

В последние столетия в геометрии появились новые методы, в том числе координатный и векторный, позволившие переводить геометрические задачи на язык алгебры, и наоборот. Возникли и развиваются новые направления геометрических исследований: геометрия Лобачевского, проективная геометрия, топология, компьютерная геометрия и др. Геометрические методы широко используются в других науках, например, теории относительности, квантовой механике, кристаллографии и многих др.

Вопросы

1. Что изучает стереометрия?
2. Как переводится с греческого языка слово "стереометрия"?
3. Идеализацией каких объектов является: а) точка; б) прямая; в) плоскость?
4. Как обозначают: а) точки; б) прямые; в) плоскости?
5. Как обозначается то, что точка A принадлежит прямой a?
6. Как обозначается то, что точка B не принадлежит прямой a?
7. Какие две прямые в пространстве называются *пересекающимися*?
8. Как обозначается то, что точка C является пересечением прямых a и b?
9. Как обозначается то, что точка A принадлежит плоскости α?
10. Как обозначается то, что точка B не принадлежит плоскости α?
11. В каком случае говорят, что прямая: а) лежит в плоскости; б) пересекает плоскость?
12. Как обозначается то, что прямая a лежит в плоскости α?
13. Как обозначается то, что точка C является пересечением прямой a и плоскости β?
14. В каком случае говорят, что две плоскости пересекаются по прямой?
15. Как обозначается то, что прямая c является пересечением плоскостей α и β?
16. Когда и где зародилась геометрия?
17. Как называются *многогранники*, изображенные на рисунке 1.6? Сколько у них граней?

Задачи

А

1.1. Представьте, что стены класса — это части плоскостей. Укажите:
а) две пересекающиеся плоскости;
б) две непересекающиеся плоскости;
в) плоскость и непересекающую ее прямую;
г) две пересекающиеся прямые;
д) две непересекающиеся прямые.

1.2. Изобразите:
а) две пересекающиеся прямые;
б) плоскость и непересекающую ее прямую;
в) две пересекающиеся плоскости.

1.3. Точки A, B, C не принадлежат одной прямой. Запишите прямые, проходящие через различные пары этих точек.

1.4. Точки A, B, C, D не принадлежат одной плоскости. Запишите плоскости, проходящие через различные тройки этих точек.

B

1.5. Точки A, B, C, D не принадлежат одной плоскости. Укажите точку пересечения прямой AD и плоскости: а) ABC; б) BCD.

1.6. Точки A, B, C, D не принадлежат одной плоскости. Укажите прямую пересечения плоскости ABC и плоскости: а) ABD; б) BCD; в) ACD.

1.7. Сколько прямых проходит через различные пары из: а) трех точек; б) четырех точек; в) пяти точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

1.8. Сколько плоскостей проходит через различные тройки из четырех точек, не принадлежащих одной плоскости?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1.9. Повторите аксиомы геометрии на плоскости.

§ 2. Аксиомы стереометрии

Так же как в планиметрии, некоторые свойства точек, прямых и плоскостей в пространстве принимаются без доказательства, их называют **аксиомами**. В переводе с греческого "аксиома" означает утверждение, "достойное признания", т. е. бесспорное, не требующее доказательства, безусловное.

Сформулируем следующие ***аксиомы стереометрии***.

1. *Через любые две точки пространства проходит единственная прямая.*

Используя обозначения, эту аксиому можно переформулировать следующим образом.

Для любых двух точек A_1, A_2 пространства найдется единственная прямая a, для которой $A_1 \in a$ и $A_2 \in a$.

2. *Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.*

Используя обозначения, эту аксиому можно переформулировать следующим образом.

Для любых трех точек A_1, A_2, A_3 пространства, не принадлежащих одной прямой, найдется единственная плоскость α, для которой $A_1 \in \alpha$ и $A_2 \in \alpha$, $A_3 \in \alpha$.

3. *Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.*

Используя обозначения, попробуйте переформулировать эту аксиому самостоятельно.

4. *Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.*

Используя обозначения, попробуйте переформулировать эту аксиому самостоятельно.

5. *Для прямых и плоскостей в пространстве выполняются все аксиомы планиметрии.*

Используя аксиомы стереометрии, с помощью логических рассуждений устанавливают справедливость других свойств. Рассмотрим некоторые из них.

Свойство 1. *Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она лежит в этой плоскости* .

Доказательство. Пусть прямая a имеет с плоскостью α две общие точки A_1 и A_2 (рис. 2.1).

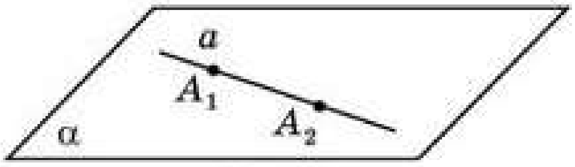


Рис. 2.1

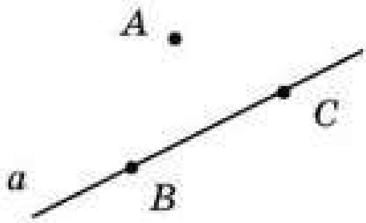


Рис. 2.2

Так как в плоскости α выполняются аксиомы планиметрии, то в этой плоскости через точки A_1, A_2 проходит единственная прямая. Если бы она не совпадала с прямой a, то мы получили бы две прямые, проходящие через две данные точки, а это противоречит аксиоме 1. Следовательно, эти прямые совпадают. Значит, прямая a лежит в плоскости α.

Свойство 2. *Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость* .

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой a. Так как на прямой a выполняются аксиомы планиметрии, то на ней найдутся точки B, C (рис. 2.2).

В силу аксиомы 2 через точки A, B, C, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость α. По свойству 1 прямая a лежит в плоскости α. Значит, плоскость α проходит через прямую a и точку A.

Докажем, что эта плоскость единственная. Действительно, всякая плоскость, проходящая через прямую a и точку A, будет проходить также через точки A, B, C. По аксиоме 2 она должна совпадать с плоскостью α.

Как вы думаете, сколько плоскостей проходит через две точки пространства?

Свойство 3. *Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость* .

Доказательство. Пусть прямые a и b пересекаются в точке C. Так как на прямых a и b выполняются аксиомы планиметрии, то на них найдутся соответственно точки A и B, отличные от точки C (рис. 2.3).

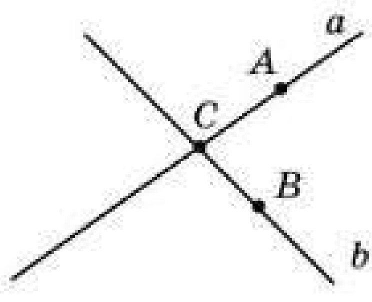


Рис. 2.3

Точки A, B, C не принадлежат одной прямой, следовательно, в силу аксиомы 2 через них проходит единственная плоскость. Так как точки A и C принадлежат этой плоскости, то по свойству 1 прямая a лежит в этой плоскости. Аналогично, так как точки B и C принадлежат этой плоскости, то по свойству 1 прямая b лежит в этой плоскости. Таким образом, данная плоскость проходит через две данные прямые.

Докажем, что эта плоскость единственная. Действительно, плоскость, проходящая через прямые a и b, будет проходить также через точки A, B, C, не принадлежащие одной прямой. По аксиоме 2 такая плоскость единственная. ◻

Докажите самостоятельно, что для любой плоскости найдутся точки, ей не принадлежащие.

Вопросы

1. Что означает слово "аксиома"?
2. Сформулируйте аксиомы стереометрии.
3. Как расположены прямая и плоскость, если прямая имеет с плоскостью две общие точки?
4. Сколько плоскостей проходит через прямую и не принадлежащую ей точку?
5. Сколько плоскостей проходит через две пересекающиеся прямые?

Задачи

A

2.1. Сколько прямых можно провести через одну точку?

2.2. Сколько плоскостей можно провести через одну прямую?

2.3. Сколько плоскостей может проходить через три данные точки? При каком расположении трех точек через них можно провести бесконечно много плоскостей?

2.4. Даны четыре точки, не принадлежащие одной плоскости. Могут ли три из них принадлежать одной прямой?

2.5. Могут ли две плоскости иметь только: а) одну общую точку; б) две общие точки?

2.6. Могут ли две плоскости иметь только две общие прямые?

B

2.7. Точка M принадлежит плоскости α. Определите по рисунку 2.4, каким еще плоскостям принадлежит точка M.

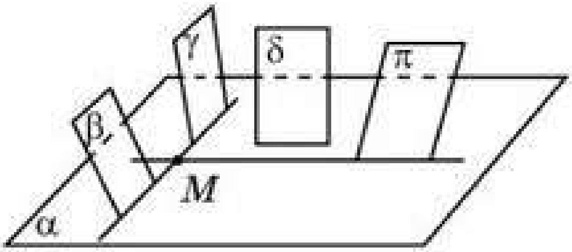


Рис. 2.4

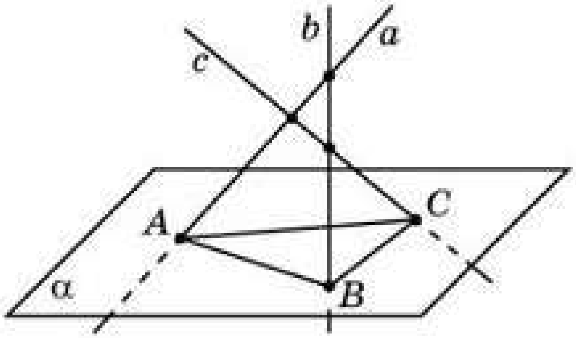


Рис. 2.5

2.8. На рисунке 2.5 попарно пересекающиеся прямые a, b, c пересекают плоскость соответственно в точках A, B, C. Правильно ли выполнен рисунок?

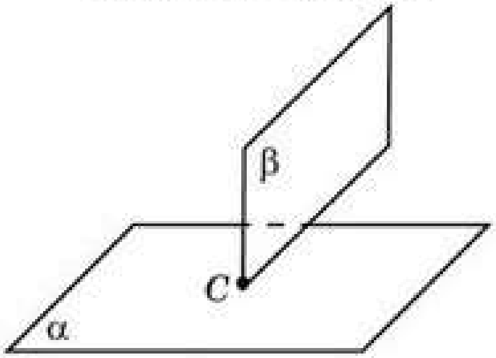


Рис. 2.6

2.9. Две вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма принадлежат одной плоскости. Верно ли, что и две другие вершины параллелограмма принадлежат этой плоскости?

2.10. Что является пересечением двух плоскостей, изображенных на рисунке 2.6?

2.11. На сколько частей разбивают пространство: а) две; б) три пересекающиеся плоскости?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

2.12. Повторите определение многоугольника.

§ 3*. Фигуры в пространстве. Тетраэдр, куб, параллелепипед

Среди пространственных фигур выделяют *многогранники* — тела, поверхности которых состоят из конечного числа многоугольников, называемых *гранями* многогранника. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно *ребрами* и *вершинами* многогранника.

Отрезки, соединяющие вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются *диагоналями* многогранника.

Одним из простейших многогранников является *тетраэдр*, поверхность которого состоит из четырех равносторонних треугольников (рис. 3.1). Обычно тетраэдр обозначают указанием его вершин, например, $ABCD$.

Кубом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов (рис 3.2). Обычно куб обозначают указанием его вершин, например, $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Куб, ребра которого равны 1, называют *единичным кубом*.

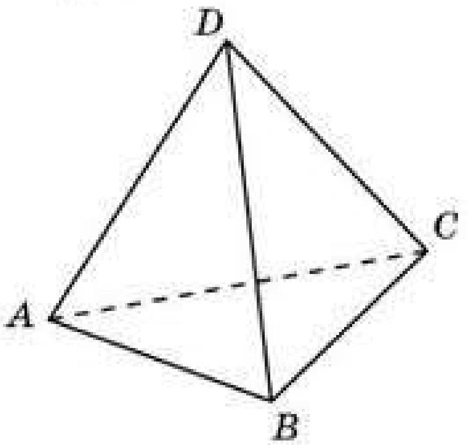


Рис. 3.1

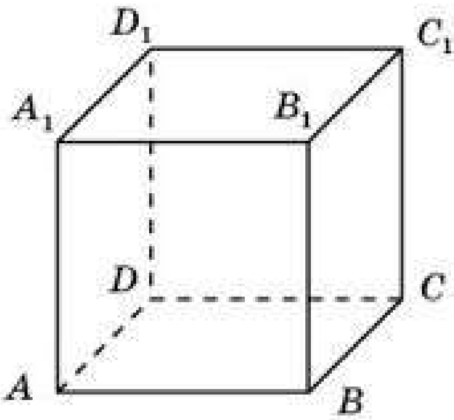


Рис. 3.2

Параллелепипедом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов (рис. 3.3). Параллелепипед обозначают указанием его вершин, например, $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

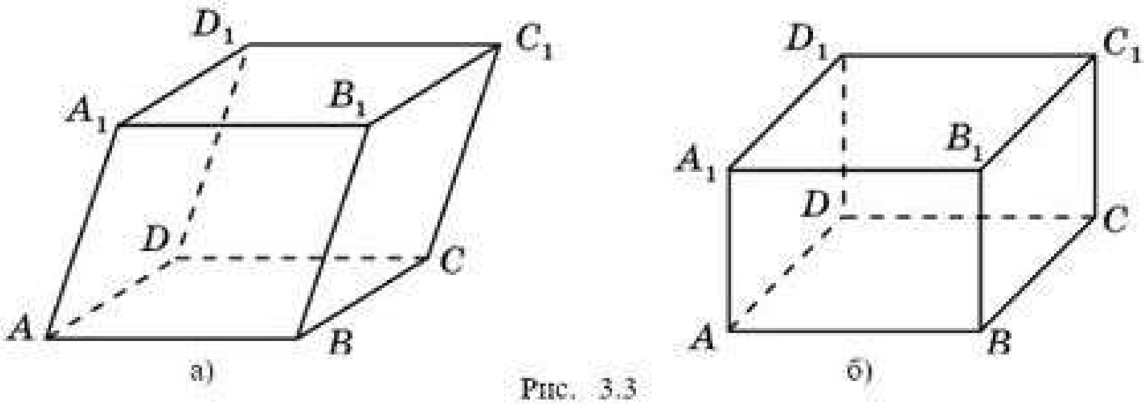


Рис. 3.3

Параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники, называется *прямоугольным параллелепипедом* (рис. 3.3, б). В противном случае параллелепипед называется *наклонным* (рис. 3.3, а).

Как вы думаете, является ли куб параллелепипедом?

Если поверхность многогранника разрезать по некоторым ребрам и развернуть ее на плоскости так, чтобы все многоугольники, составляющие эту поверхность, лежали в данной плоскости, то получится фигура, называемая *разверткой многогранника*. Например, на рисунке 3.4 изображена развертка куба.

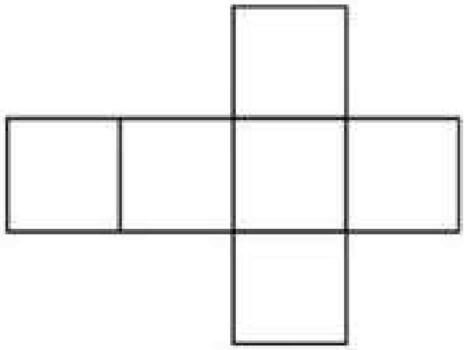


Рис. 3.4

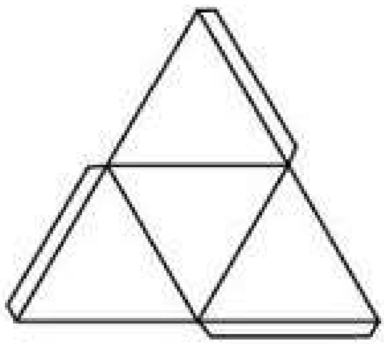


Рис. 3.5

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно сделать его развертку и затем склеить соответствующие ребра. Для удобства развертку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склеивание. На рисунке 3.5 изображена развертка тетраэдра с клапанами.

Так же, как и для плоскости, для пространства определяются понятия движения, равенства и подобия.

Движением называется преобразование пространства, сохраняющее расстояния между точками, т. е. переводящее любые две точки A, B в точки A', B' так, что $A'B' = AB$.

Две фигуры в пространстве называются *равными*, если существует движение, переводящее одну из них в другую.

Подобием называется преобразование пространства, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, т. е. переводящее любые две точки A, B в точки A', B' так, что $A'B' = kAB$, где k — положительное число, называемое *коэффициентом подобия*.

Две фигуры в пространстве называются *подобными*, если существует подобие, переводящее одну из них в другую.

? Как вы думаете, подобны ли любые два: а) куба; б) параллелепипеда?

Вопросы

1. Какая фигура в пространстве называется *многогранником*?
2. Что называется *диагональю* многогранника?
3. Какой многогранник называется: а) *кубом*; б) *параллелепипедом*; в) *тетраэдром*?
4. Какой параллелепипед называется *прямоугольным*?
5. Как обозначают: а) куб; б) параллелепипед; в) тетраэдр?

6. Приведите примеры предметов из окружающего нас мира, имеющих форму: а) куба; б) параллелепипеда; в) тетраэдра.
7. Что называется *разверткой* многогранника?
8. Какое преобразование пространства называется *движением* ?
9. Какие фигуры в пространстве называются *равными* ?
10. Какое преобразование пространства называется *подобием* ?
11. Какие фигуры в пространстве называются *подобными* ?

Задачи

A

3.1. Сколько вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) имеет: а) тетраэдр; б) куб; в) параллелепипед?

3.2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите прямые, содержащие его ребра и пересекающие плоскость ABC.

3.3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите плоскости, содержащие его грани и пересекающие плоскость BCC_1.

3.4. На клетчатой бумаге изобразите тетраэдр аналогично данному на рисунке 3.6.

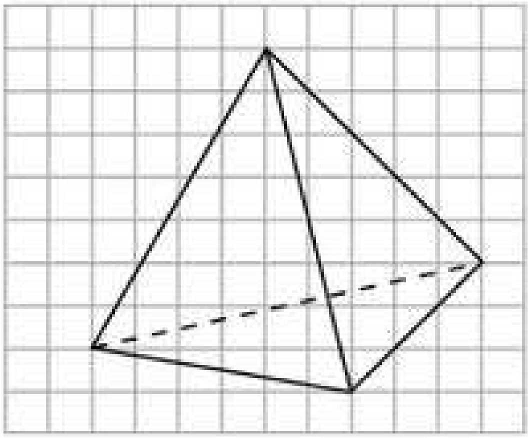


Рис. 3.6

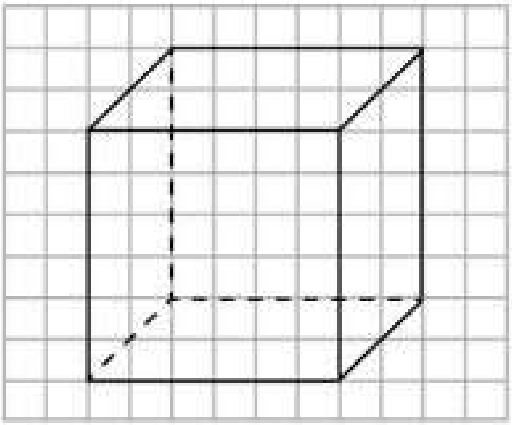


Рис. 3.7

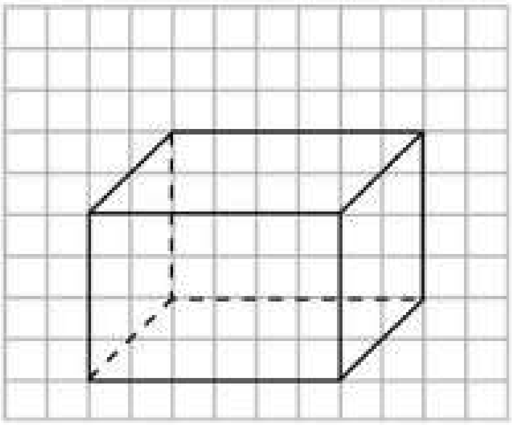


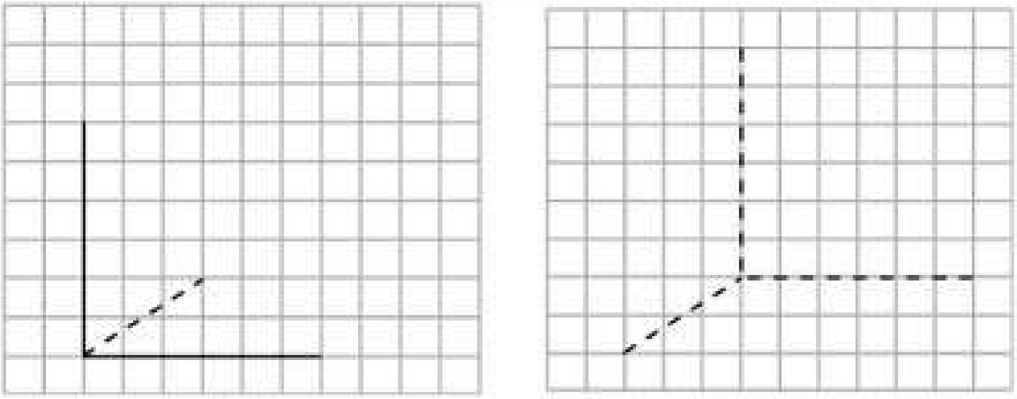
Рис. 3.8

3.5. На клетчато й бумаге изобразите куб аналогично данному на рисунке 3.7.

3.6. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный параллелепипед аналогично данному на рисунке 3.8.

B

3.7. На клетчатой бумаге изображены три ребра куба (рис. 3.9). Изобразите весь куб.

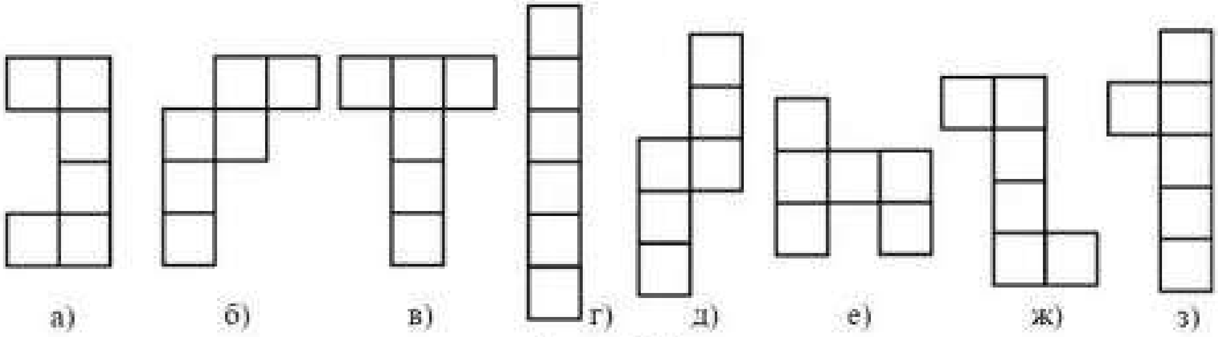


а) б)

Рис. 3.9

3.8. Сколько диагоналей имеет: а) тетраэдр; б) куб; в) параллелепипед?

3.9. Какие из изображенных на рисунке 3.10 фигур являются развертками куба?



а) б) в) г) д) е) ж) з)

Рис. 3.10

3.10. Нарисуйте развертки тетраэдра и прямоугольного параллелепипеда.

3.11. Изготовьте развертки и склейте из них модели тетраэдра, куба и прямоугольного параллелепипеда.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

3.12. Приведите примеры реальных объектов в форме: а) тетраэдра; б) куба; в) параллелепипеда.

§ 4*. Фигуры в пространстве. Призма, пирамида

Призмой называется многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых *основаниями* призмы, и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований, называемых *боковыми гранями* призмы. Ребра, не лежащие в основаниях призмы, называют *боковыми ребрами*.

Призмы бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях — соответственно треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.

Призма называется *n-угольной* , если ее основаниями являются n-угольники.

Призма обозначается указанием ее вершин, например, треугольная призма обозначается $ABCA_1B_1C_1$, шестиугольная призма обозначается $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

На рисунке 4.1 изображены треугольная и шестиугольная призмы.

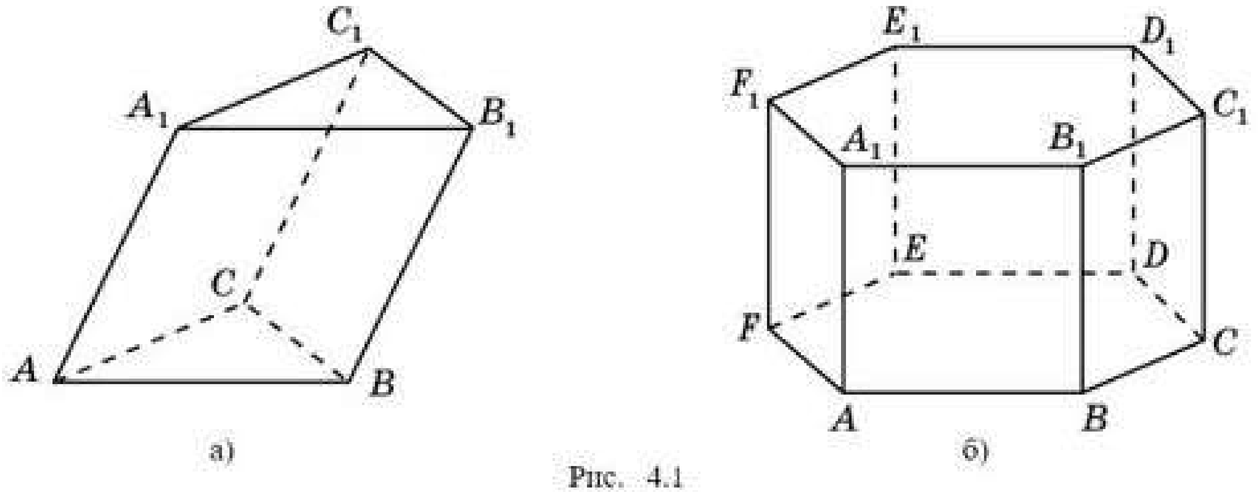


Рис. 4.1

Призма, боковыми гранями которой являются прямоугольники, называется *прямой* , в противном случае призма называется *наклонной* . На рисунке 4.1, а изображена наклонная треугольная призма, на рисунке 4.1, б — прямая шестиугольная призма.

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется *правильной* . На рисунке 4.1, б изображена правильная шестиугольная призма.

Как вы думаете, является ли параллелепипед четырехугольной призмой?

Пирамидой называется многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого *основанием* пирамиды, и треугольников, имеющих общую вершину, называемых *боковыми гранями* пирамиды. Общая вершина боковых граней называется *вершиной* пирамиды. Ребра, сходящиеся в вершине пирамиды, называют *боковыми ребрами* .

Пирамиды бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях — соответственно треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.

Пирамида называется *n-угольной* , если ее основанием является n-угольник.

На рисунке 4.2 изображены треугольная, четырехугольная и шестиугольная пирамиды.

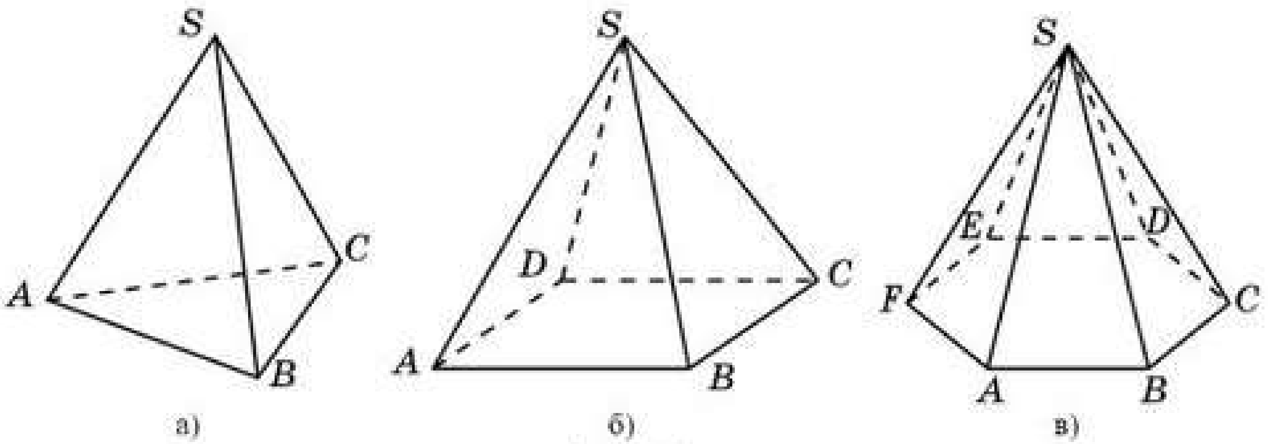


Рис. 4.2

Пирамиду обозначают указанием ее вершин, например, треугольная пирамида обозначается $SABC$ (рис. 4.2, а), четырехугольная пирамида — $SABCD$ (рис. 4.2, б), шестиугольная пирамида — $SABCDEF$ (рис. 4.2, в). Причем, на первом месте указывается ее вершина.

Пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник, все боковые ребра которой равны, называется *правильной*.

Как вы думаете, является ли тетраэдр треугольной пирамидой?

Вопросы

1. Какой многогранник называется *призмой*?
2. Какая призма называется *прямой*?
3. Какая призма называется *правильной*?
4. Как обозначают призму?
5. Какой многогранник называется *пирамидой*?
6. Какая пирамида называется *правильной*?
7. Как обозначают пирамиду?

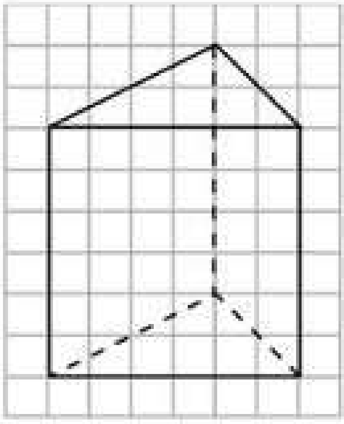
Задачи

A

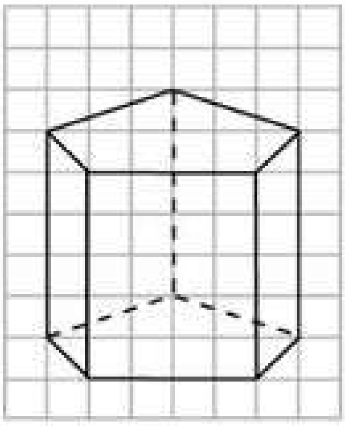
4.1. Сколько вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) имеет: а) n-угольная призма; б) n-угольная пирамида?

4.2. На клетчатой бумаге изобразите призмы, аналогичные данным на рисунке 4.3.

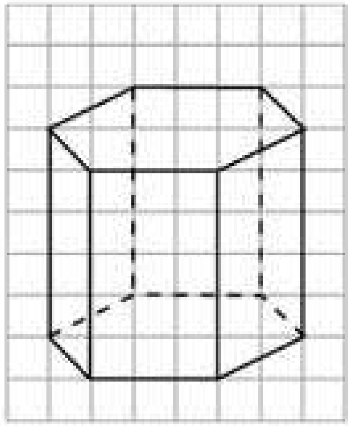
4.3. На клетчатой бумаге изобразите пирамиды, аналогичные данным на рисунке 4.4.



а)

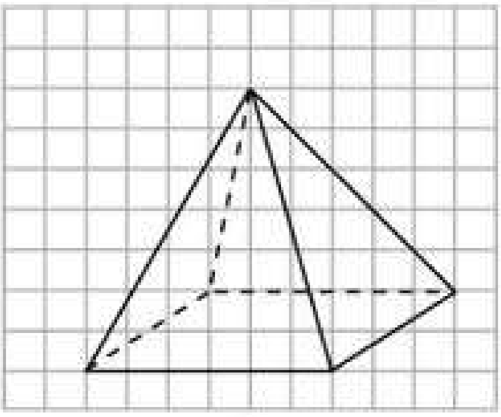


б)

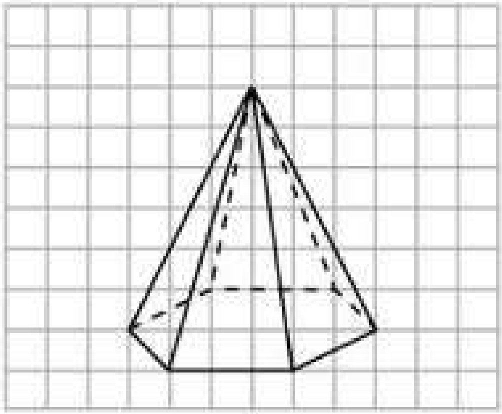


в)

Рис. 4.3



а)



б)

Рис. 4.4

В

4.4. Может ли призма иметь: а) 9 вершин; б) 16 вершин?

4.5. Какой многоугольник лежит в основании призмы, которая имеет: а) 20 вершин; б) 15 ребер?

4.6. Определите вид призмы, которая имеет: а) 10 вершин; б) 18 ребер; в) 8 граней.

4.7. Может ли пирамида иметь: а) 9 ребер; б) 16 ребер?

4.8. Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, которая имеет: а) 32 ребра; б) 15 граней?

4.9. Определите вид пирамиды, которая имеет: а) 10 вершин; б) 18 ребер; в) 8 граней.

4.10. В четырехугольной пирамиде *SABCD* укажите пары пересекающихся плоскостей, которые содержат грани этой пирамиды (рис. 4.2, б).

4.11. На рисунке 4.5 найдите фигуры, которые являются развертками призм. Определите вид этих призм.

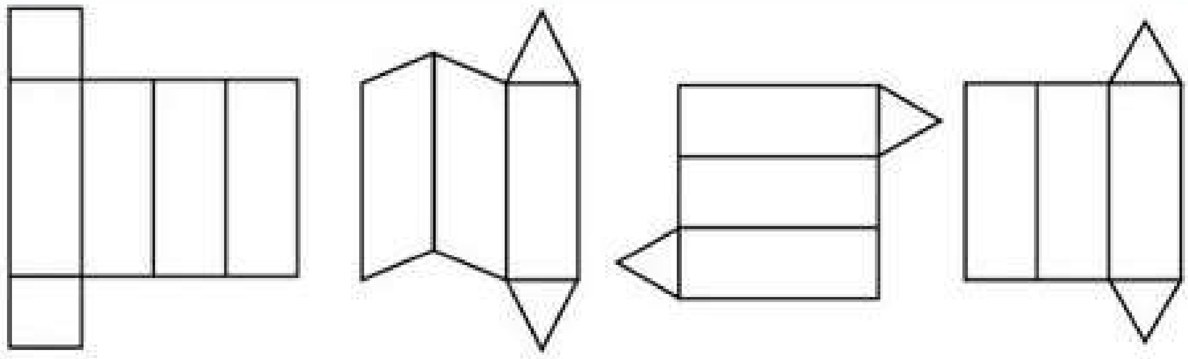


Рис. 4.5

4.12. На рисунке 4.6 найдите фигуры, которые являются развертками пирамид. Выясните их вид.

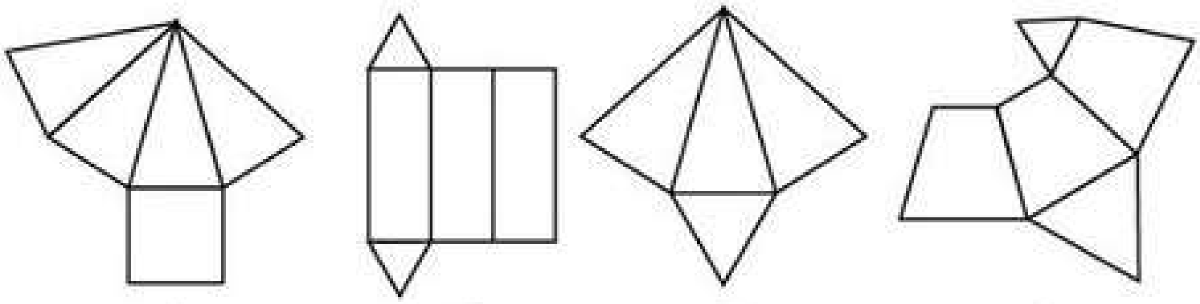


Рис. 4.6

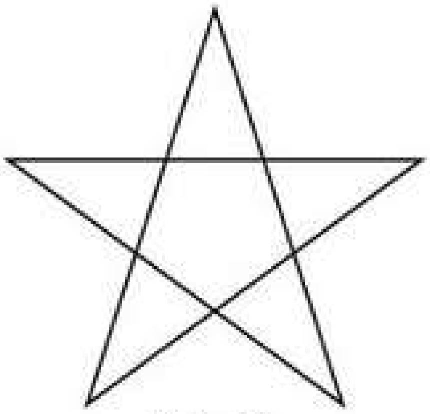


Рис. 4.7

4.13. Разверткой какого многогранника может служить фигура, изображенная на рисунке 4.7?

4.14. Нарисуйте развертку правильной шестиугольной: а) призмы; б) пирамиды. Изготовьте развертки и склейте из них модели правильной шестиугольной: а) призмы; б) пирамиды.

4.15. На клетчатой бумаге изображены ребра: а) треугольной; б) шестиугольной призмы (рис. 4.8). Изобразите всю призму.

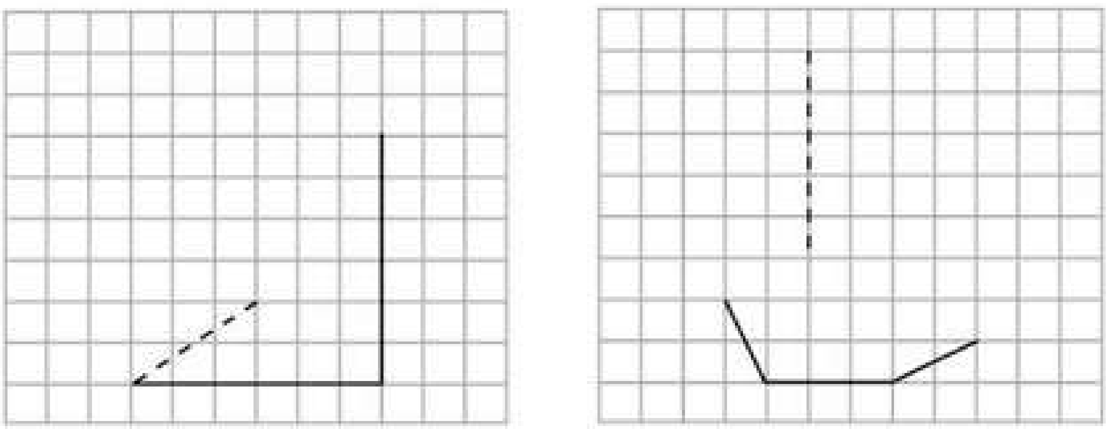
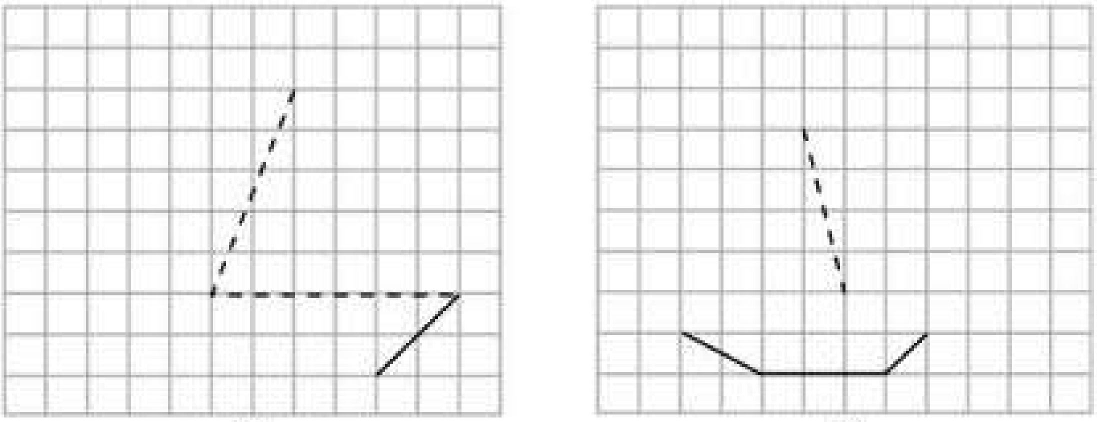


Рис. 4.8

4.16. На клетчатой бумаге изображены ребра: а) четырехугольной; б) шестиугольной пирамиды (рис. 4.9). Изобразите всю пирамиду.



а) б)

Рис. 4.9

4.17. Сколько диагоналей имеет: а) n-угольная пирамида; б) n-угольная призма?

4.18. Приведите примеры реальных объектов в форме: а) призмы; б) пирамиды.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

4.19. Повторите определение параллельности двух прямых на плоскости.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Сколько прямых можно провести через одну точку пространства:

A. Ни одной. B. Одну.
C. Две. D. Бесконечно много?

2. Сколько плоскостей можно провести через одну точку пространства:

A. Ни одной. B. Одну.
C. Две. D. Бесконечно много?

3. Сколько прямых можно провести через две точки пространства:

A. Ни одной. B. Одну.
C. Две. D. Бесконечно много?

4. Сколько прямых можно провести через различные пары из трех точек пространства, не принадлежащих одной прямой:

A. Ни одной. B. Три.
C. Шесть. D. Бесконечно много?

5. Какое наибольшее число прямых можно провести через различные пары из четырех точек пространства:

A. Четыре. B. Пять.
C. Шесть. D. Восемь?

6. Сколько общих точек имеют две пересекающиеся плоскости:

A. Ни одной. B. Одну.
C. Две. D. Бесконечно много?

7. Сколько плоскостей можно провести через две точки пространства:

A. Ни одной. B. Одну.
C. Две. D. Бесконечно много?

8. Сколько плоскостей можно провести через три точки пространства, не принадлежащие одной прямой:

A. Ни одной. B. Одну.
C. Три. D. Бесконечно много?

9*. Сколько плоскостей можно провести через три вершины куба:

A. Одну. B. Четыре.
C. Шесть. D. Бесконечно много?

10*. Найдите число диагоналей прямоугольного параллелепипеда:

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

11*. Найдите число диагоналей 6-угольной призмы:

A. 6. B. 12. C. 9. D. 18.

12*. Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, имеющей 12 ребер:

A. Треугольник. B. Четырехугольник.
C. Шестиугольник. D. Двенадцатиугольник?

13*. Какой многоугольник лежит в основании призмы, имеющей 36 ребер:

A. Шестиугольник. B. Девятиугольник.
C. Двенадцатиугольник. D. Тридцатишестиугольник?

14*. Призма имеет 18 вершин. Какой многоугольник лежит в ее основании:

A. Треугольник. B. Шестиугольник.
C. Девятиугольник. D. Восемнадцатиугольник?

15*. Пирамида имеет 10 вершин. Какой многоугольник лежит в ее основании:

A. Пятиугольник. B. Шестиугольник.
C. Восьмиугольник. D. Девятиугольник?

§ 5. Параллельность прямых в пространстве

Напомним, что две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки. Аналогичным образом, две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 5.1).

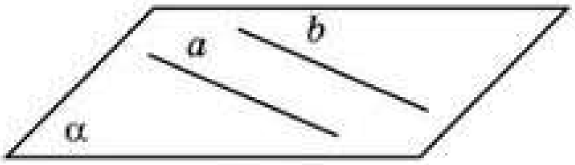


Рис. 5.1

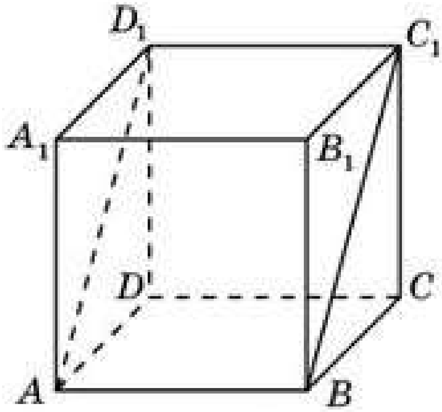


Рис. 5.2

Параллельность прямых a и b обозначается $a \parallel b$.

Отметим, что для параллельности прямых в пространстве кроме требования, чтобы прямые не пересекались, нужно, чтобы эти прямые лежали в одной плоскости.

Будем также говорить, что два отрезка параллельны, если они лежат на параллельных прямых.

Для прямых в пространстве справедлив следующий признак параллельности, аналогичный соответствующему свойству параллельных прямых на плоскости.

Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямые AB и C_1D_1 параллельны прямой A_1B_1. Следовательно, прямые AB и C_1D_1 параллельны (рис. 5.2).

Докажем, что в этом кубе прямые AD_1 и BC_1 параллельны. Действительно, как было доказано выше, отрезки AB и C_1D_1 параллельны. Кроме того, они равны. Следовательно, четырехугольник ABC_1D_1 — параллелограмм. Значит, прямые AD_1 и BC_1 параллельны.

Попробуйте доказать самостоятельно, что через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную этой прямой.

Исторические сведения

Вопрос о количестве прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой, имеет давнюю и интересную историю. Среди аксиом в "Началах" Евклида пятый по счету постулат по своему содержанию совпадает с аксиомой параллельности, с которой вы познакомились в 7-м классе: "Через точку, взятую вне данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой".

На протяжении двух тысячелетий после Евклида математики пытались доказать этот постулат, однако все их попытки заканчивались неудачей, рано или поздно в их рассуждениях обнаруживались ошибки. Лишь в 1826 г. великий математик Н. И. Лобачевский (1792—1856), профессор Казанского университета, предположил, что этот постулат нельзя логически вывести из других постулатов (аксиом) Евклида, т. е. нельзя доказать. Поэтому или его можно взять в качестве аксиомы, или в качестве аксиомы может быть взято утверждение о существовании нескольких прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой. Положив в основу геометрии эту новую аксиому параллельности, Лобачевский создал совершенно новую, неевклидову геометрию, которая была названа *геометрией Лобачевского* .

Идеи Лобачевского были настолько оригинальны и противоречили так называемому здравому смыслу, что их не поняли даже известные математики того времени. Несмотря на это, Лобачевский не отказался от своих идей. Он не только был убежден в логической непротиворечивости новой геометрии, но и твердо верил в ее применимость к исследованию реального физического пространства. С этой целью Лобачевский проводил сложнейшие астрономические наблюдения и измерения, однако недостаточная точность измерительных приборов не позволила ему подтвердить свою гипотезу.

Признание геометрии Лобачевского пришло только после его смерти. Работы Лобачевского были переведены на многие языки и изучались математиками всего мира. В настоящее время геометрия Лобачевского является неотъемлемой частью современной математики и находит применение во многих областях человеческого знания, способствует более глубокому пониманию окружающего нас мира.

Вопросы

1. Какие две прямые в пространстве называют *параллельными* ?
2. Какие два отрезка в пространстве называют *параллельными* ?
3. Сформулируйте свойство параллельных прямых в пространстве.

Задачи

А

5.1. Известно, что на плоскости прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, пересекает и вторую прямую. Будет ли это утверждение верно для пространства?

5.2. Известно, что на плоскости через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, не пересекающая данную. Будет ли это утверждение верно для пространства?

5.3. Запишите ребра параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, параллельные ребру: а) AB; б) AA_1 (рис. 5.3).

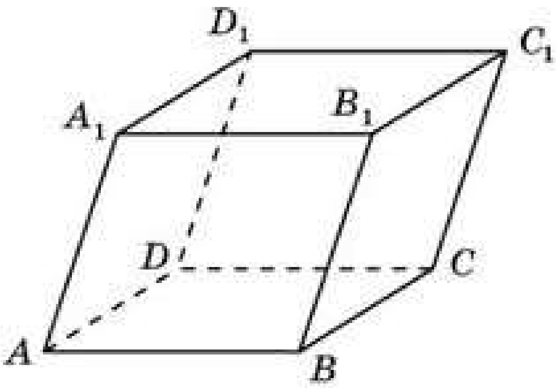


Рис. 5.3

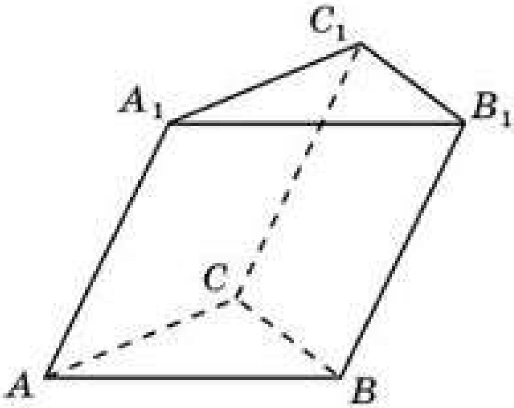


Рис. 5.4

5.4. Будут ли параллельны ребра AB и B_1C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.3)?

5.5. Запишите пары параллельных ребер у призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 5.4).

5.6. Будут ли параллельны ребра AB и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 5.4)?

5.7. Будут ли противолежащие ребра AB и CD тетраэдра $ABCD$ параллельны (рис. 5.5)?

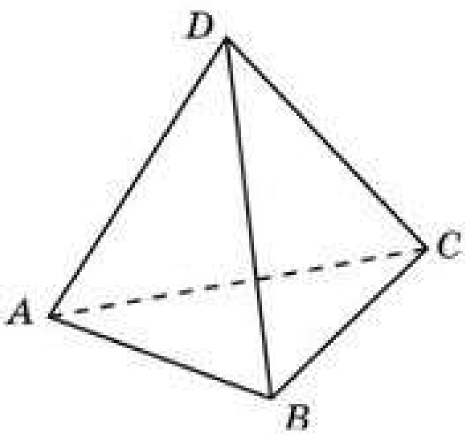
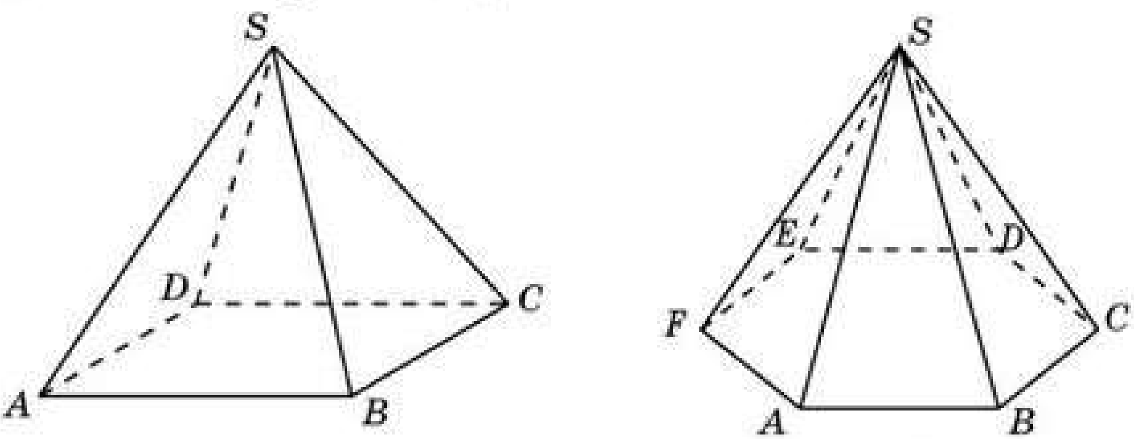


Рис. 5.5

B

5.8. Запишите пары параллельных ребер у правильной: а) четырехугольной пирамиды $SABCD$ (рис. 5.6, а); б) шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ (рис. 5.6, б).



а) б)

Рис. 5.6

5.9. Будут ли параллельны ребра AB и SC пирамиды: а) $SABCD$ (рис. 5.6, а); б) $SABCDEF$ (рис. 5.6, б)?

5.10. Имеются ли параллельные ребра у правильной: а) треугольной пирамиды (рис. 5.7, а); б) пятиугольной пирамиды (рис. 5.7, б)?

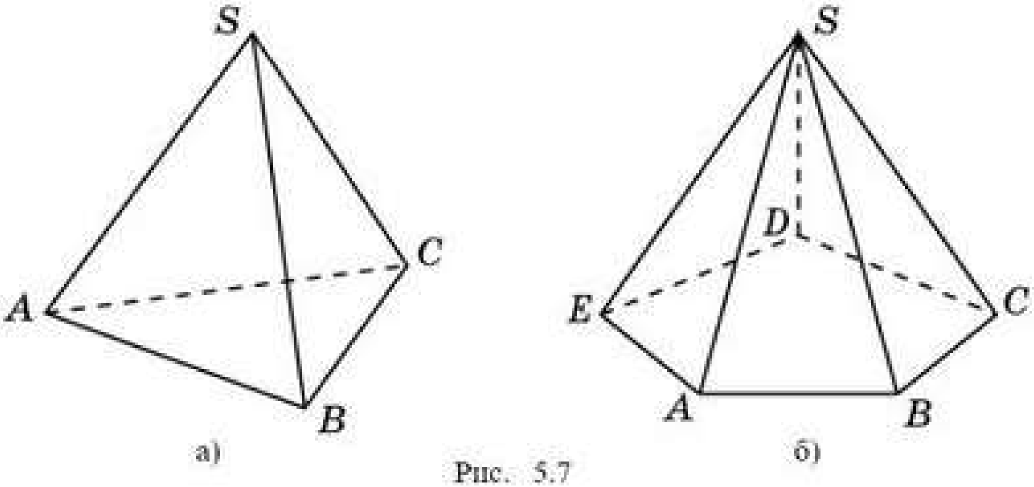


Рис. 5.7

5.11. Докажите, что для шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ параллельны прямые: а) AA_1 и CC_1; б) AA_1 и DD_1 (рис. 5.8).

5.12. Запишите ребра правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, параллельные ребру: а) AA_1; б) AB (рис. 5.8).

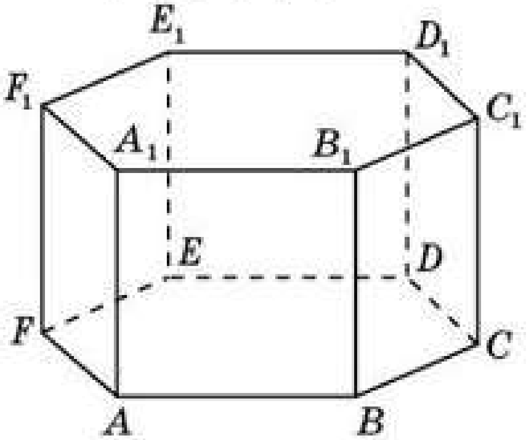


Рис. 5.8

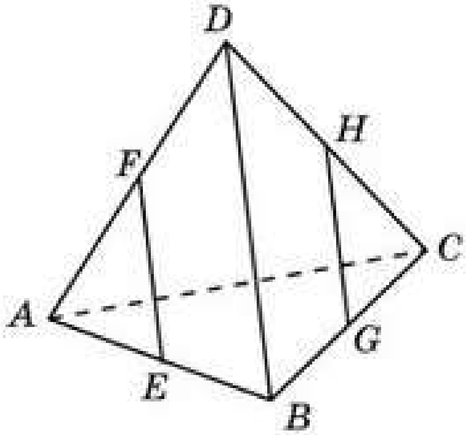


Рис. 5.9

5.13. В тетраэдре $ABCD$ точки E, F, G, H — середины ребер соответственно AB, AD, BC, CD (рис. 5.9). Докажите, что прямые EF и GH параллельны.

5.14. Приведите примеры реальных объектов, идеализацией которых являются параллельные прямые.

§ 6. Взаимное расположение прямых в пространстве

Мы уже знаем, что две прямые в пространстве могут пересекаться, а также быть параллельными. Однако, в отличие от плоскости, в пространстве существует еще один случай взаимного расположения двух прямых, когда они не пересекаются и не параллельны.

Две прямые в пространстве называют *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.

Будем также говорить, что два отрезка скрещиваются, если они лежат на скрещивающихся прямых.

Например, в тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD скрещиваются (рис. 6.1).

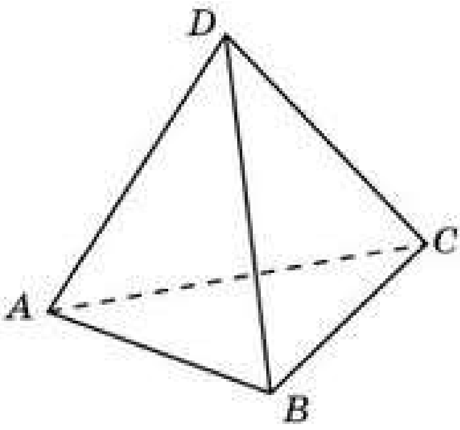
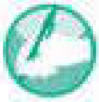


Рис. 6.1



Попробуйте доказать это самостоятельно.

Наглядное представление о скрещивающихся прямых дают дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая — под эстакадой (рис. 6.2, а); детская горка, где одна из скрещивающихся прямых — самая нижняя ступенька лесенки, а вторая — бортик самой горки (рис. 6.2, б).

а)

б)

Рис. 6.2

Также примеры скрещивающихся прямых можно видеть на линиях пересечения стен, пола и потолка.

Теорема (признак скрещивающихся прямых). ***Если одна прямая лежит в плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти две прямые скрещиваются.***

Доказательство. Пусть прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает плоскость α в точке B, не принадлежащей прямой a (рис. 6.3). Если бы прямые a и b лежали в одной плоскости, то в этой плоскости лежали бы прямая a и точка B. Поскольку через прямую и точку вне этой прямой проходит единственная плоскость, то этой плоскостью будет плоскость α. Но тогда прямая b лежала бы в плоскости

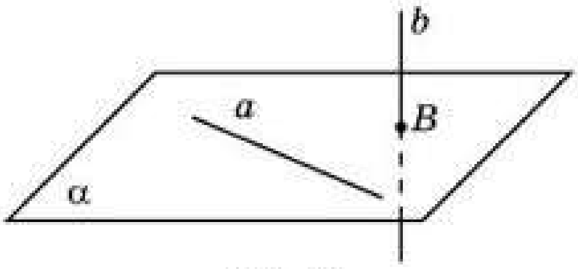
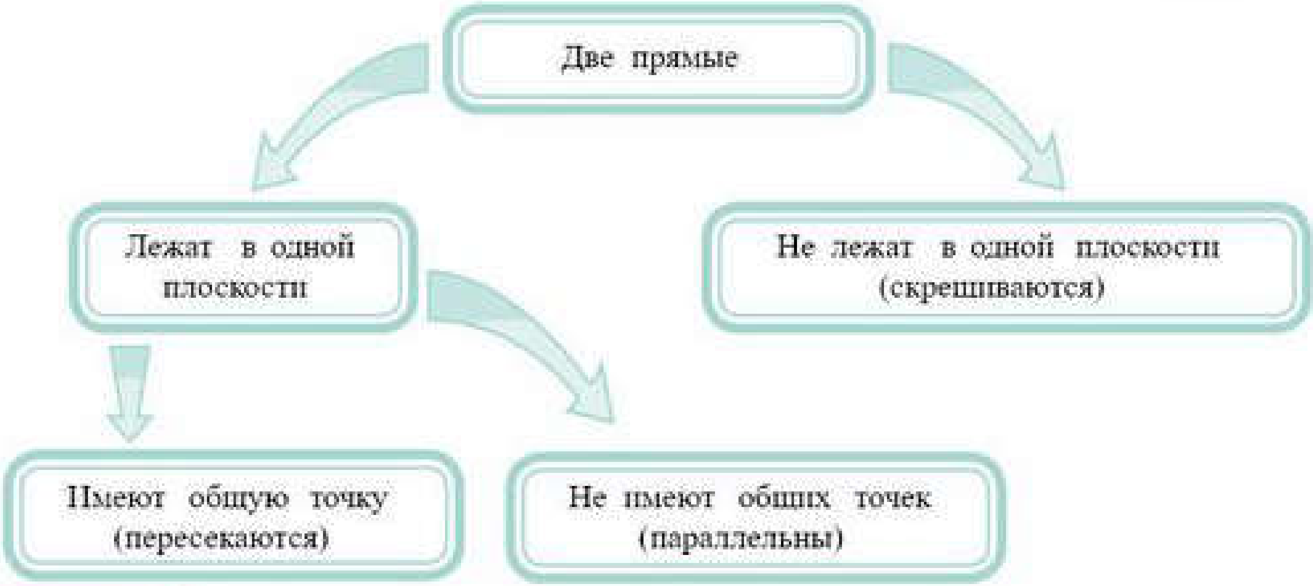


Рис. 6.3

a, что противоречит условию. Следовательно, прямые a и b не лежат в одной плоскости, т. е. они скрещиваются. □

Представим случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве в виде схемы.

Схема 6.1



Вопросы

1. Какие две прямые в пространстве называют *скрещивающимися*?
2. Какие два отрезка в пространстве называют *скрещивающимися*?
3. Сформулируйте признак скрещивающихся прямых.

Задачи

А

6.1. Верно ли, что если две прямые лежат в разных плоскостях, то они скрещиваются?

6.2. Сколько прямых, скрещивающихся с данной прямой, проходит через точку, взятую вне этой прямой?

6.3. Запишите ребра, скрещивающиеся с ребром AB для: а) параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.4, а); б) призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 6.4, б).

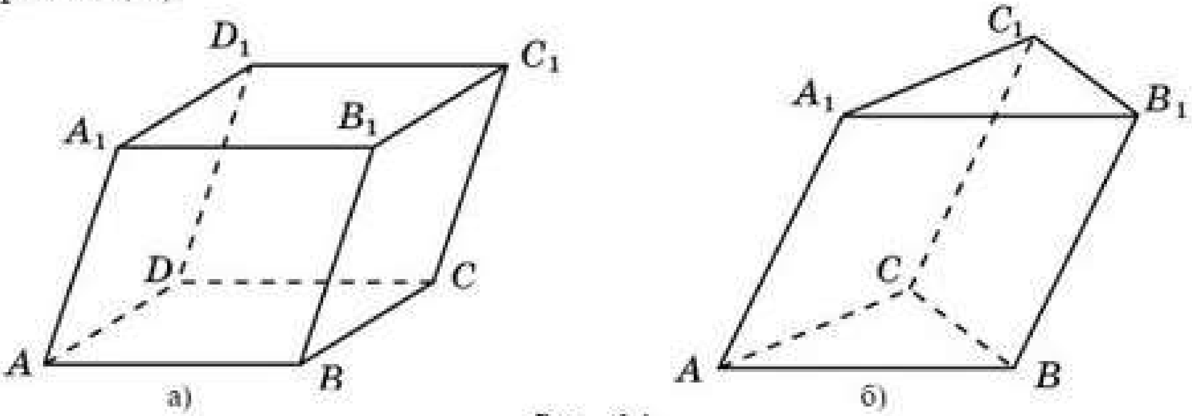


Рис. 6.4

6.4. Запишите ребра, скрещивающиеся с ребром SA, для: а) четырехугольной пирамиды $SABCD$ (рис. 6.5, а); б) шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ (рис. 6.5, б).

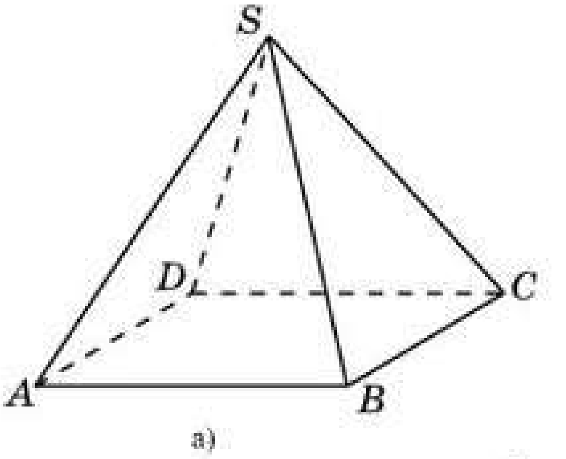


Рис. 6.5

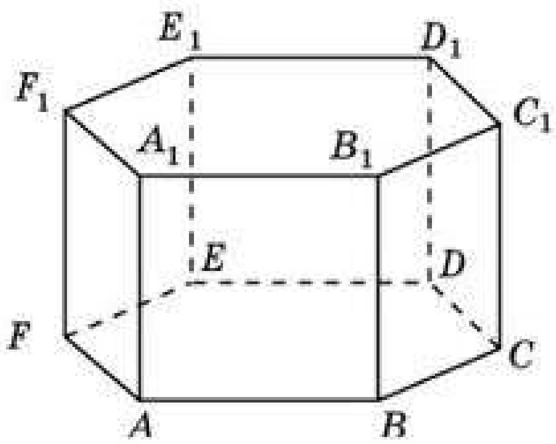


Рис. 6.6

6.5. Запишите ребра шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, скрещивающиеся с ребром: а) AA_1; б) AB (рис. 6.6).

6.6. Сколько пар скрещивающихся ребер имеется у тетраэдра?

B

6.7. Прямая a скрещивается с прямой b, а прямая b скрещивается с прямой c. Следует ли отсюда, что прямые a и c скрещиваются?

6.8. Как расположены в пространстве прямые a и b, проведенные в плоскостях α и β (рис. 6.7)? Ответ объясните.

6.9. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 6.8). Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекают прямые a и b. Могут ли прямые A_1B_1 и A_2B_2 быть пересекающимися или параллельными?

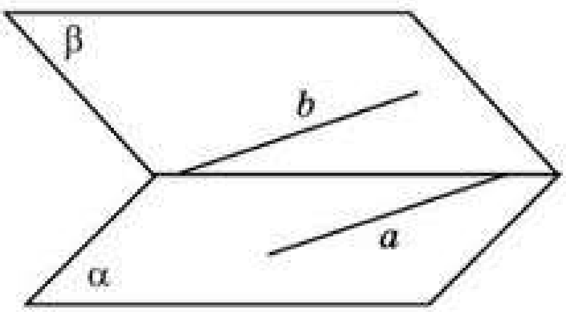


Рис. 6.7

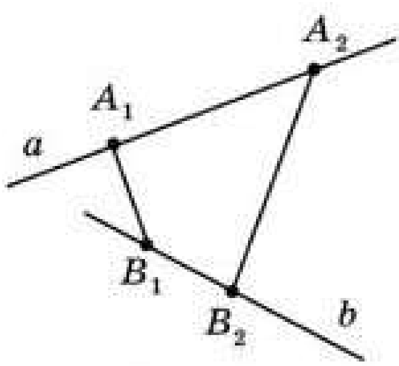


Рис. 6.8

6.10. Сколько пар скрещивающихся ребер имеется у четырехугольной пирамиды?

6.11. Каково взаимное расположение прямых EE_1 и FF_1 (рис. 6.9)? Ответ объясните.

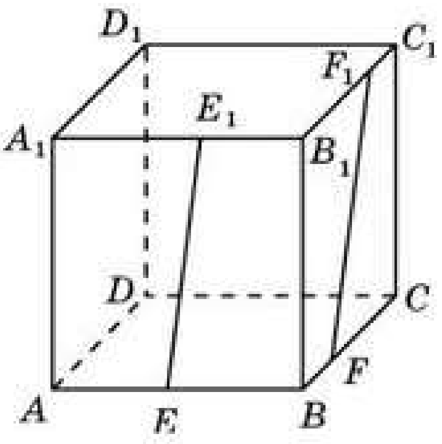


Рис. 6.9

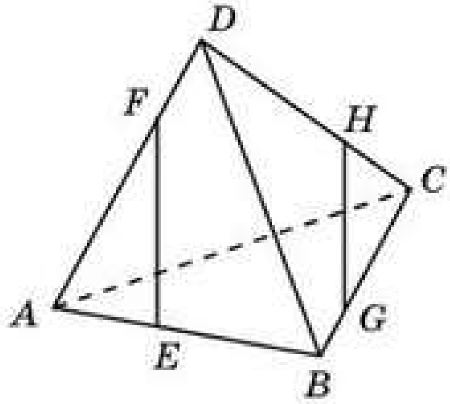


Рис. 6.10

6.12. Каково взаимное расположение прямых EF и GH (рис. 6.10)? Ответ объясните.

6.13. Пересекаются ли отрезки EH и FG (рис. 6.11)? Ответ объясните.

6.14. Возможно ли такое расположение карандашей (рис. 6.12)? Ответ объясните.

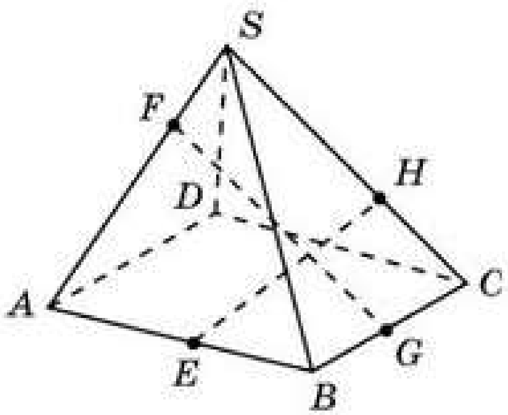


Рис. 6.11

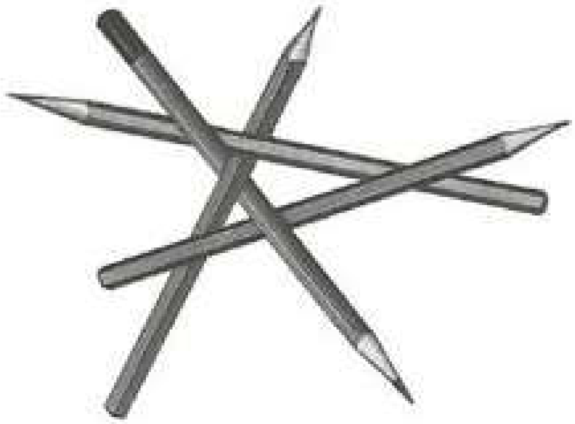


Рис. 6.12

6.15. Приведите примеры реальных объектов, идеализацией которых являются скрещивающиеся прямые.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

6.16. Попробуйте определить понятие параллельности прямой и плоскости.

§ 7. Взаимное расположение прямой и плоскости

Рассмотрим вопрос о том, как могут располагаться прямая и плоскость относительно друг друга.

Прямая может лежать в плоскости, т. е. все точки прямой принадлежат плоскости. Прямая может пересекать плоскость, т. е. иметь с плоскостью только одну общую точку. Наконец, прямая может не иметь с плоскостью ни одной общей точки.

Прямая называется *параллельной* плоскости, если она не имеет с этой плоскостью ни одной общей точки (рис. 7.1).

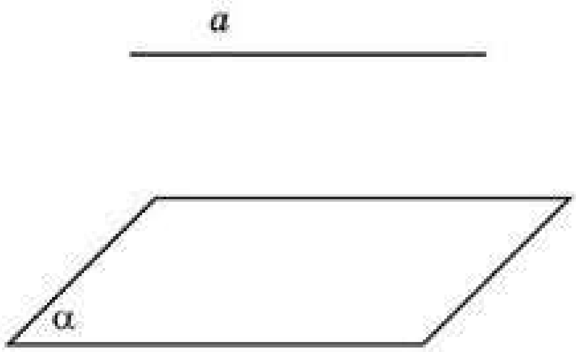


Рис. 7.1

Параллельность прямой a и плоскости α обозначается $a \parallel \alpha$.

Наглядное представление о прямой, параллельной плоскости, дают натянутые троллейбусные или трамвайные провода — они параллельны плоскости земли (рис.7.2).

а) б)

Рис. 7.2

Другой пример дает линия пересечения стены и потолка — эта линия параллельна плоскости пола (рис. 7.3). Заметим, что в плоскости пола имеется прямая, параллельная этой линии. Такой прямой является, например, линия пересечения пола с той же самой стеной.

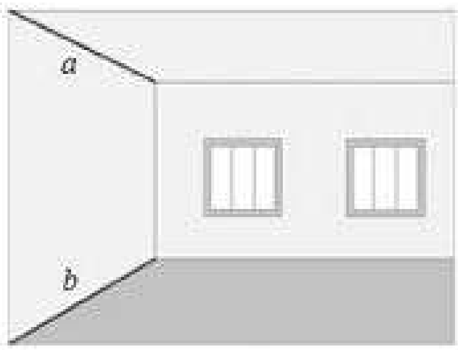


Рис. 7.3

Зафиксируем случаи взаимного расположения прямой и плоскости с помощью схемы.

Схема 7.1

Будем говорить, что ребро многогранника параллельно его грани, если оно лежит на прямой, параллельной плоскости этой грани.

Следующая теорема дает достаточное условие параллельности прямой и плоскости.

Теорема (признак параллельности прямой и плоскости). ***Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то данная прямая параллельна самой плоскости.***

Доказательство. Пусть прямая a не лежит в плоскости b и параллельна прямой b, лежащей в этой плоскости (рис. 7.4).

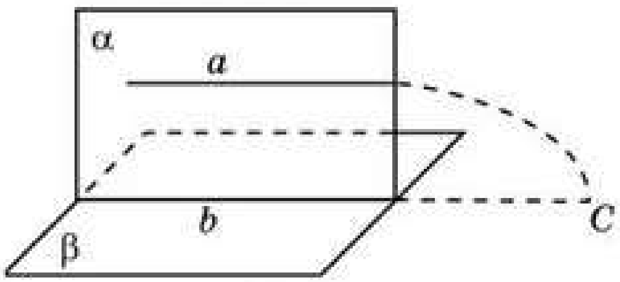


Рис. 7.4

Докажем, что прямая a параллельна плоскости b. Предположим противное, т. е., что прямая a пересекает плоскость b в некоторой точке C. Рассмотрим плоскость a, проходящую через прямые a и b ($a \parallel b$ по условию). Точка C принадлежит как плоскости b, так и плоскости a, т. е. принадлежит линии их пересечения — прямой b. Следовательно, прямые a и b пересекаются, что противоречит условию. Таким образом, $a \parallel$ b. ◻

Сколько прямых, параллельных данной плоскости, можно провести через точку, не принадлежащую этой плоскости?

Теорема. ***Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая их пересечения параллельна первой прямой.***

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и пересекает эту плоскость по прямой b (рис. 7.5). Так как прямая a и плоскость β не имеют общих точек, то и прямые a и b не имеют общих точек. Так как эти прямые лежат в одной плоскости, то они параллельны. ☐

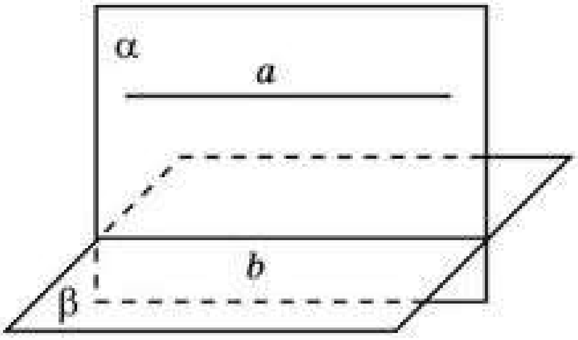


Рис. 7.5

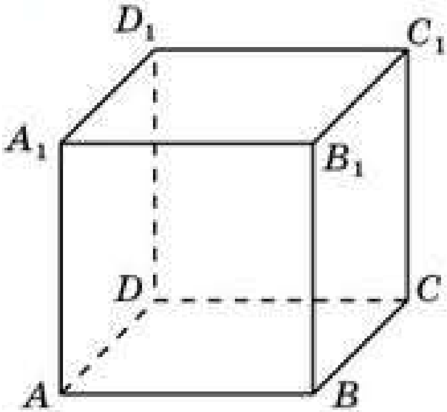


Рис. 7.6

Пример. Докажите, что для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.6) прямая AA_1 паралл ельна плоскости BCC_1.

Решение. Пря мая AA_1 параллельна прямой BB_1 плоскости BCC_1 и не лежит в этой плоскости. Следовательно, прямая AA_1 параллельна плоскости BCC_1. ☐

Вопросы

1. Как может располагаться прямая относительно плоскости?
2. Какая прямая называется *параллельной плоскости* ?
3. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.

Задачи

A

7.1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите ребра, параллельные грани $ABCD$ (рис. 7.6).

7.2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите грани, параллельные ребру: а) AB; б) AA_1 (рис. 7.7).

7.3. Верно ли, что две прямые, параллельные одной и той же плоскости, параллельны между собой?

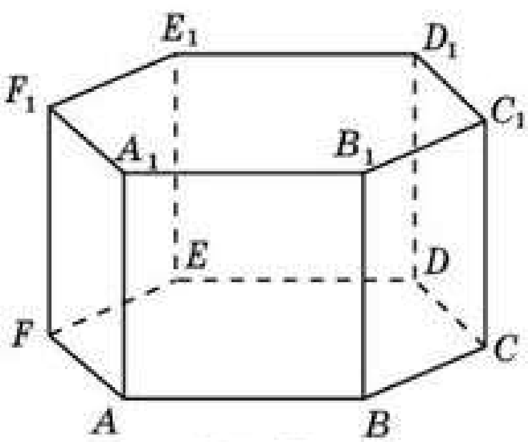


Рис. 7.7

7.4. Верно ли, что если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то данная прямая параллельна самой плоскости?

7.5. Одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости. Верно ли, что и вторая прямая параллельна этой плоскости?

B

7.6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ укажите параллельные ребра и грани (рис. 7.8).

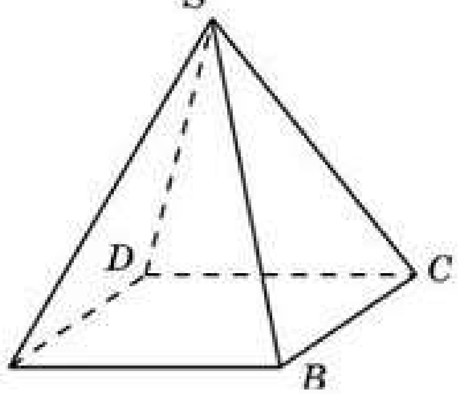


Рис. 7.8

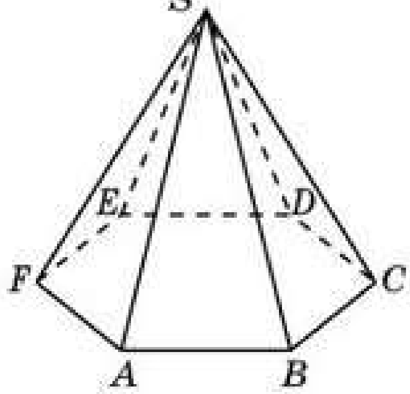


Рис. 7.9

7.7. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ укажите параллельные ребра и грани (рис. 7.9).

7.8. Дан параллелограмм $ABCD$. Через сторону AB проведена плоскость α, не совпадающая с плоскостью параллелограмма. Докажите, что $CD \parallel \alpha$.

7.9. Сторона AF правильного шестиугольника $ABCDEF$ лежит в плоскости α, не совпадающей с плоскостью шестиугольника. Как расположены остальные стороны $ABCDEF$ относительно плоскости α?

7.10. Плоскость проходит через середины двух сторон треугольника и не совпадает с плоскостью этого треугольника. Докажите, что данная плоскость параллельна третьей стороне треугольника.

7.11. Приведите примеры реальных объектов, идеализацией которых являются параллельные прямая и плоскость.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

7.12. Попробуйте определить понятие параллельности двух плоскостей.

§ 8. Параллельность плоскостей

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки (рис. 8.1).

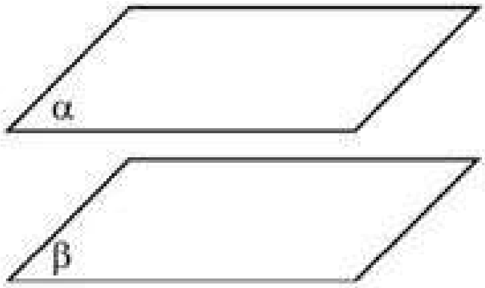


Рис. 8.1

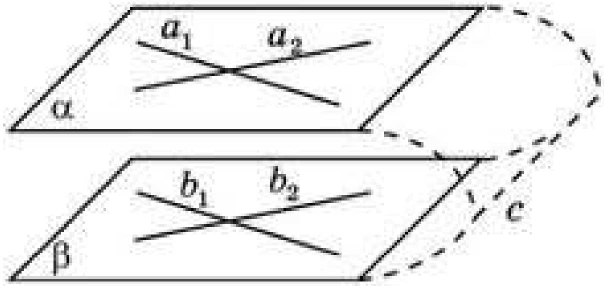


Рис. 8.2

Представим различные случаи взаимного расположения двух плоскостей в виде схемы.

Схема 8.1

Две плоскости

Имеют общие точки (пересекаются по прямой)

Не имеют общих точек (параллельны)

Следующая теорема дает достаточное условие параллельности двух плоскостей.

Теорема. (**Признак параллельности двух плоскостей.**) ***Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.***

Доказательство. Пусть пересекающиеся прямые a_1, a_2 плоскости a соответственно параллельны прямым b_1, b_2 плоскости b (рис. 8.2). Докажем, что плоскости a и b параллельны. Предположим противное, т. е. что плоскости a и b пересекаются, и пусть c — линия их пересечения.

По признаку параллельности прямой и плоскости прямая a_1 параллельна плоскости b. Следовательно, она параллельна прямой c (прямые a_1 и c лежат в одной плоскости и не пересекаются). Аналогично, прямая a_2 также параллельна прямой c. Таким образом, в плоскости a мы имеем две пересекающиеся прямые, параллельные одной прямой, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что неверным было наше предположение о том, что плоскости a и b пересекаются, следовательно, они параллельны.

? Сколько плоскостей, параллельных данной плоскости, можно провести через точку, не принадлежащую этой плоскости?

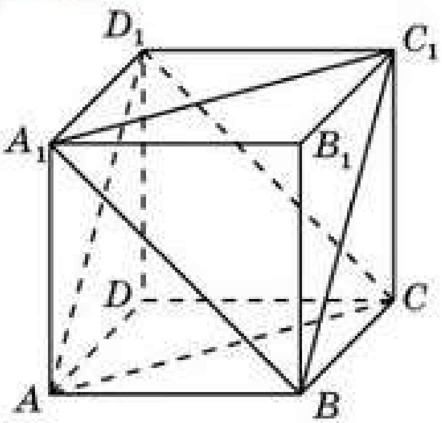


Рис. 8.3

Будем говорить, что две грани многогранника параллельны, если они лежат в параллельных плоскостях.

Пример. Докажите, что у куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.3) параллельны плоскости ACD_1 и BA_1C_1.

Решение. Прямая AC параллельна прямой A_1C_1. Прямая CD_1 параллельна прямой BA_1. Таким образом, две пересекающиеся прямые плоскости ACD_1 соответственно параллельны двум прямым плоскости BA_1C_1. Следовательно, плоскости ACD_1 и BA_1C_1 параллельны.

Вопросы

1. Какие две плоскости называются *параллельными*?
2. Перечислите случаи взаимного расположения двух плоскостей.
3. Сформулируйте признак параллельности двух плоскостей.

Задачи

А

8.1. Укажите параллельные плоскости, содержащие грани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.4).

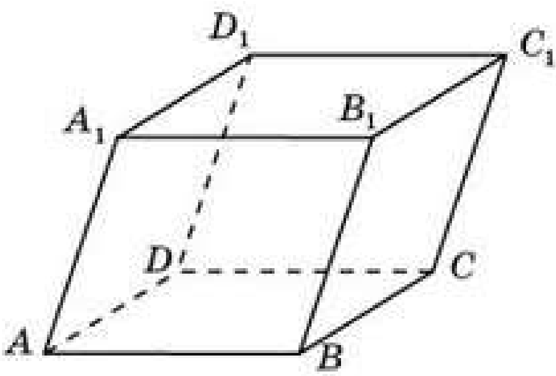


Рис. 8.4

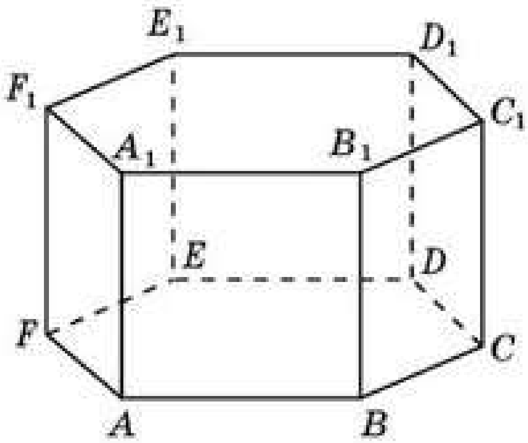


Рис. 8.5

8.2. Укажите параллельные плоскости, содержащие грани правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 8.5).

8.3. Имеются ли параллельные грани у правильной четырехугольной пирамиды (рис. 8.6)?

8.4. Имеются ли параллельные грани у правильной шестиугольной пирамиды (рис. 8.7)?

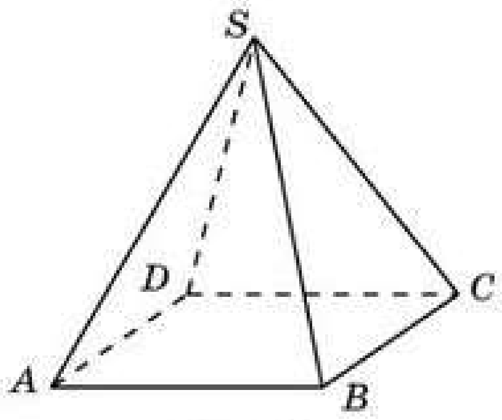


Рис. 8.6

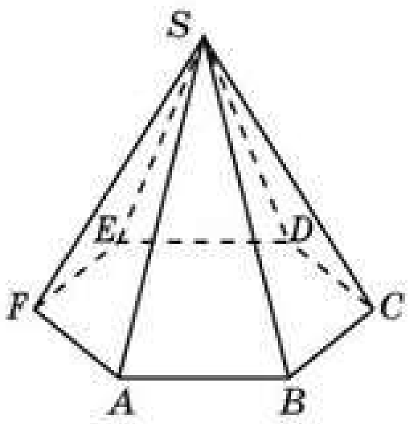


Рис. 8.7

B

8.5. Докажите, что у параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельны плоскости: а) ABB_1 и CDD_1; б) AB_1D_1 и BDC_1.

8.6. Докажите, что у правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ параллельны плоскости: а) ABC и $A_1B_1C_1$; б) ABB_1 и DEE_1; в) ABB_1 и CFF_1; г) ACC_1 и DFF_1.

8.7. Верно ли утверждение: "Если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то эти плоскости параллельны"?

8.8. Верно ли утверждение: "Если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны"?

8.9. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите линию пересечения двух плоскостей ABC_1 и BCD_1.

8.10. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите линию пересечения двух плоскостей ABC_1 и BCD_1.

8.11. Докажите, что у правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ параллельны плоскости ABC_1 и CD_1E_1.

8.12. Докажите, что если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью (рис. 8.8), то их линии пересечения параллельны.

8.13. Приведите примеры реальных объектов, идеализацией которых являются параллельные плоскости.

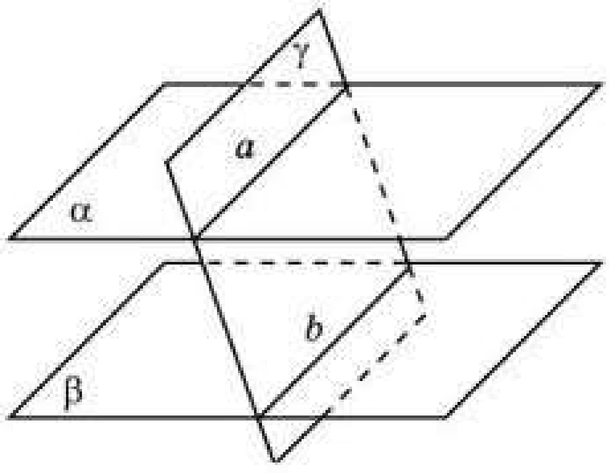


Рис. 8.8

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

8.14. Повторите определение угла на плоскости.

8.15. Попробуйте определить понятие угла в пространстве.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Даны две параллельные прямые a и b. Через прямую a проходит плоскость a, не совпадающая с плоскостью данных прямых. Определите взаимное расположение прямой b и плоскости a:

A. b лежит в плоскости a.
B. b пересекает плоскость a.
C. b параллельна плоскости a.
D. Нельзя определить.

2. Сколько плоскостей можно провести через различные пары из трех параллельных прямых, не лежащих в одной плоскости:

A. Одну. B. Две.
C. Три. D. Шесть?

3. Через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость. Эти две плоскости пересекаются. Как расположена их линия пересечения относительно данных прямых:

A. Параллельна им.
B. Пересекает их.
C. Совпадает с одной из них.
D. Скрещивается с одной из них?

4. Даны две скрещивающиеся прямые a и b и точка A, принадлежащая прямой a. Как расположена прямая a по отношению к проходящей через точку A и прямую b плоскости:

A. Прямая a пересекает плоскость.
B. Прямая a параллельна плоскости.
C. Прямая a лежит в плоскости.
D. Нельзя определить?

5. Плоскость a пересекается с прямой a, которая параллельна плоскости b. Как расположены относительно друг друга плоскости a и b:

A. Параллельны. B. Совпадают.
C. Пересекаются. D. Нельзя определить?

6. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите ребро, параллельное ребру AB:

A. CC_1. B. DD_1.
C. B_1C_1. D. C_1D_1.

7. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите ребро, параллельное ребру B_1C_1:

A. AA_1.
B. EF.
C. C_1D_1.
D. DE.

8. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите ребро, скрещивающееся с ребром AA_1:

A. BC.
B. BB_1.
C. AB.
D. A_1D_1.

9. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите ребро, скрещивающееся с ребром AB:

A. CD.
B. EF.
C. DD_1.
D. D_1E_1.

10. Для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ укажите ребро, скрещивающееся с ребром SA:

A. AB.
B. SC.
C. SD.
D. BC.

11. Для правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ укажите ребро, скрещивающееся с ребром BC:

A. DE.
B. SB.
C. SA.
D. AF.

12. Укажите плоскость, параллельную ребру CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$:

A. ABC.
B. ABC_1.
C. BDA_1.
D. BDD_1.

13. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите плоскость, параллельную прямой BC_1:

A. ACD_1.
B. ACB_1.
C. ADB_1.
D. CDA_1.

14. Укажите плоскость, параллельную ребру AF правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$:

A. BEE_1.
B. BDD_1.
C. BCC_1.
D. CEE_1.

15. Укажите плоскость, параллельную ребру CD правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$:

A. SAB.
B. SAF.
C. SBC.
D. SEF.

Глава I
УГОЛ И РАССТОЯНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 9. Угол между прямыми в пространстве

Определение угла в пространстве аналогично определению угла на плоскости.

Углом в пространстве называется фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости (в которой лежат лучи), ограниченной этими лучами.

Углом между двумя пересекающимися прямыми в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в точке их пересечения.

Две пересекающиеся прямые в пространстве называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.

Будем также говорить, что два пересекающихся отрезка перпендикулярны, если они лежат на перпендикулярных прямых. *Углом между двумя пересекающимися отрезками* будем называть угол между соответствующими прямыми.

Например, в кубе пересекающиеся ребра перпендикулярны, диагональ грани куба образует с ребрами этой грани углы 45° (рис. 9.1).

Так же, как и для плоскости, два луча в пространстве называют *сонаправленными*, если один из них содержится в другом, или они лежат на параллельных прямых по одну сторону от прямой, соединяющей их вершины.

Для углов в пространстве справедливы следующие свойства, аналогичные соответствующим свойствам углов на плоскости.

Свойство 1. *Углы с сонаправленными сторонами равны*.

Свойство 2. *Углы, образованные соответственно параллельными прямыми, равны*.

Определим теперь понятие угла между скрещивающимися прямыми.

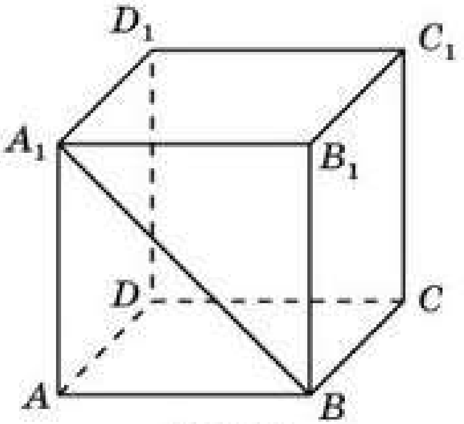


Рис. 9.1

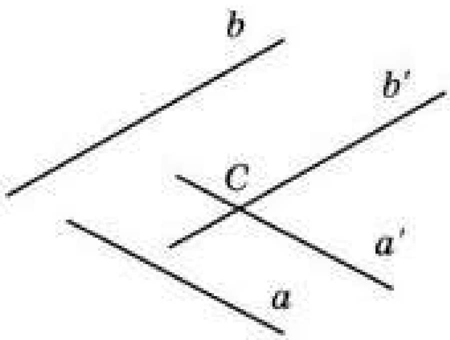


Рис. 9.2

Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 9.2). Рассмотрим какую-нибудь точку C в пространстве и проведем через нее прямые a', b', параллельные прямым a и b соответственно.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным прямым.

Поскольку углы с параллельными сторонами равны, то это определение не зависит от выбора точки C. В частности, точка C может принадлежать прямой a или b. В этом случае в качестве прямой a' или b' следует взять саму прямую a или b соответственно.

Две скрещивающиеся прямые называются *перпендикулярными*, если угол между ними прямой.

Сколько прямых, перпендикулярных данной прямой, можно провести через точку: а) принадлежащую данной прямой; б) не принадлежащую данной прямой?

Два отрезка будем называть *перпендикулярными*, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Углом между двумя отрезками будем называть угол между прямыми, на которых лежат эти отрезки.

Напомним, что для нахождения углов треугольника можно использовать тригонометрические функции.

Например, если известны стороны прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C (рис. 9.3), то его острый угол A можно найти, используя одну из тригонометрических функций:

$$\sin A = \frac{BC}{AB},\ \cos A = \frac{AC}{AB},\ \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC},\ \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

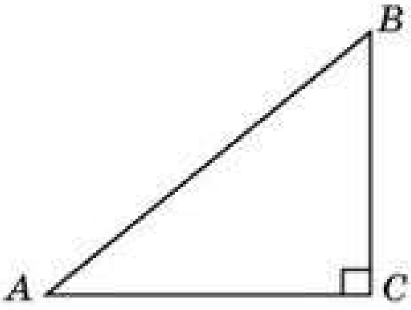


Рис. 9.3

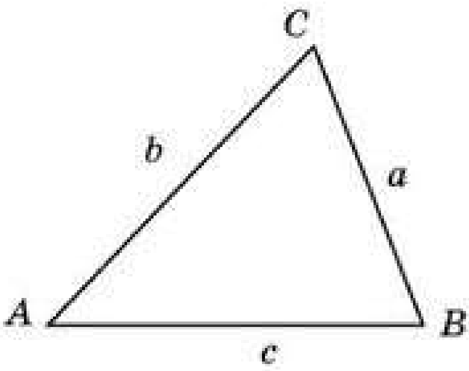


Рис. 9.4

В случае произвольного треугольника ABC с известными сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (рис. 9.4) для нахождения угла C можно использовать теорему косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

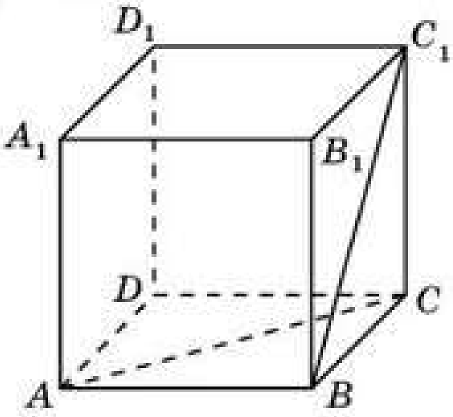


Рис. 9.5

Тогда

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Пример. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AC и BC_1 (рис. 9.5).

Решение. Проведем прямую AD_1, параллельную прямой BC_1. Угол между прямыми AC и BC_1 будет равен углу между прямыми AC и AD_1. Для нахождения этого угла рассмотрим треугольник ACD_1 (рис. 9.6). Он является равносторонним. Следовательно, искомый угол CAD_1 равен $60°$.

Пример. Для правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 (рис. 9.7), найдите косинус угла между прямыми AC_1 и A_1B_1.

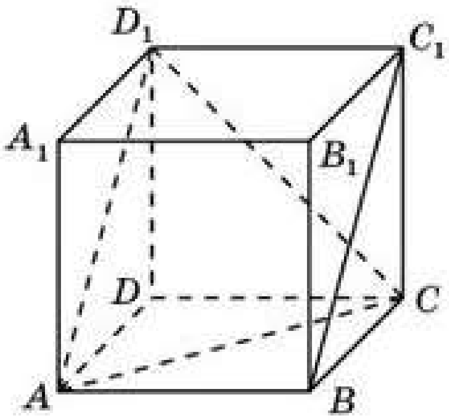


Рис. 9.6

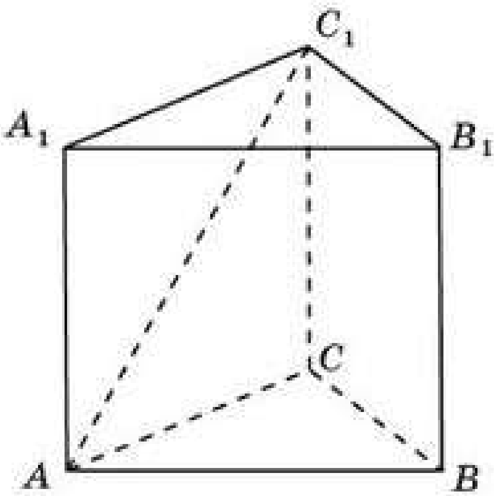


Рис. 9.7

Решение. Так как прямая A_1B_1 параллельна прямой AB, то искомый угол равен углу BAC_1. В треугольнике ABC_1 $AB = 1$, $AC_1 = BC_1 = \sqrt{2}$. По теореме косинусов имеем

$$BC_1^2 = AB^2 + AC_1^2 - 2AB \cdot AC_1 \cdot \cos\angle BAC_1.$$

Подставляя найденные значения длин AB, AC_1, BC_1, находим $\cos\angle BAC_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Вопросы

1. Что называется *углом в пространстве* ?
2. Что называется *углом между двумя пересекающимися прямыми в пространстве* ?
3. Что называется *углом между двумя скрещивающимися прямыми* ?
4. Какие две прямые в пространстве называются *перпендикулярными* ?
5. Какие свойства справедливы для углов в пространстве?

6. Как можно найти углы прямоугольного треугольника с известными сторонами?
7. Как можно найти углы произвольного треугольника с известными сторонами?

Задачи

А

9.1. Дана прямая в пространстве, на ней взята точка. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

9.2. Даны прямая и точка вне ее. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

9.3. На плоскости две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны. Верно ли это утверждение для пространства?

9.4. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите ребра, перпендикулярные ребру AB (рис. 9.8).

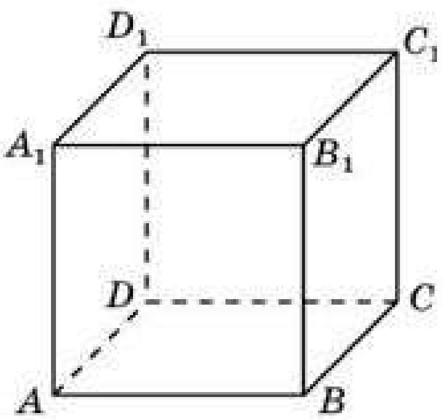


Рис. 9.8

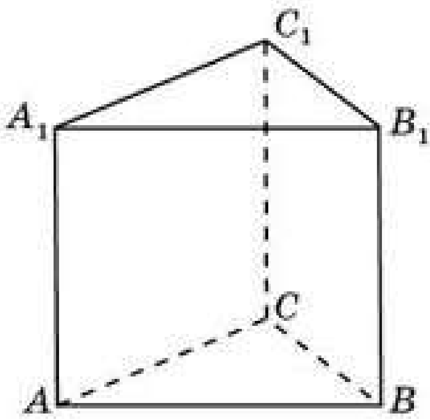


Рис. 9.9

9.5. Для правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ укажите ребра, перпендикулярные ребру BB_1 (рис. 9.9).

В

9.6. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми: а) AC и B_1D_1; б) AB и B_1C_1; в) AB_1 и BC_1.

9.7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ найдите угол между прямыми: а) AB и CC_1; б) AB и B_1C_1.

9.8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1 (рис. 9.10). Найдите угол

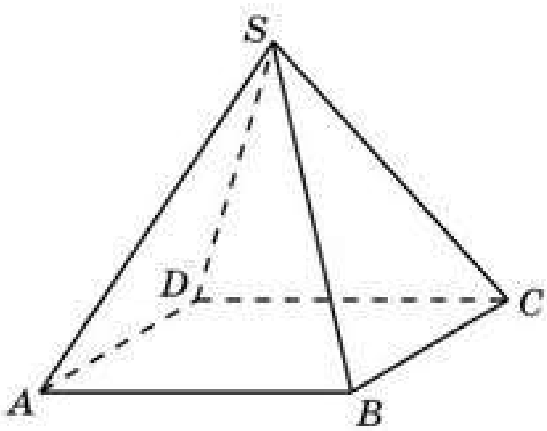


Рис. 9.10

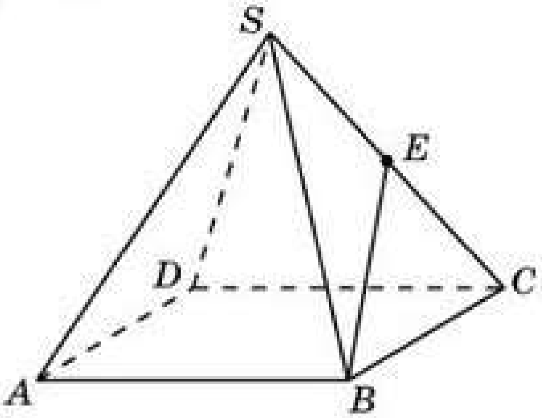


Рис. 9.11

между прямыми: а) AB и SC; б) SB и SD.

9.9. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1, точка E — середина ребра SC (рис. 9.11). Найдите угол между прямыми AD и BE.

9.10. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2 (рис. 9.12). Найдите угол между прямыми SA и BC.

9.11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1 (рис. 9.13). Найдите угол между прямыми: а) AA_1 и BC_1; б) AA_1 и DE_1; в) AB и B_1C_1; г) AB и C_1D_1; д) AC и B_1C_1; е) AC и B_1D_1; ж) AC и B_1E_1.

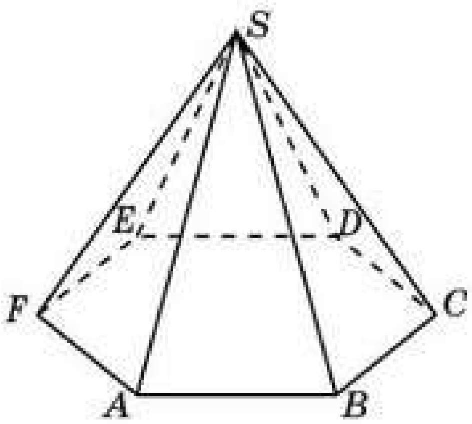


Рис. 9.12

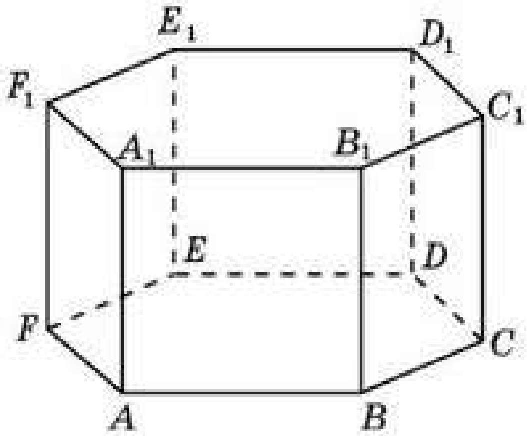


Рис. 9.13

9.12. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2 (рис. 9.12). Найдите косинус угла между прямыми: а) SA и CD; б) SA и BD.

9.13. Приведите примеры реальных объектов, идеализацией которых являются перпендикулярные прямые.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

9.14. Повторите определение расстояния от точки до прямой на плоскости.

9.15. Попробуйте определить понятие расстояния от точки до прямой в пространстве.

§ 10. Расстояние от точки до прямой

Напомним, что *расстоянием от точки до прямой на плоскости* называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

Поскольку точка и прямая в пространстве лежат в одной плоскости, то это определение расстояния от точки до прямой справедливо и для пространства.

Расстоянием от точки до прямой в пространстве называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую (рис. 10.1).

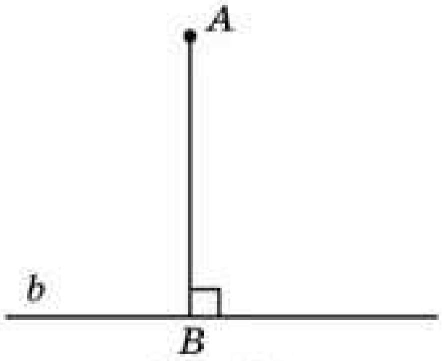


Рис. 10.1

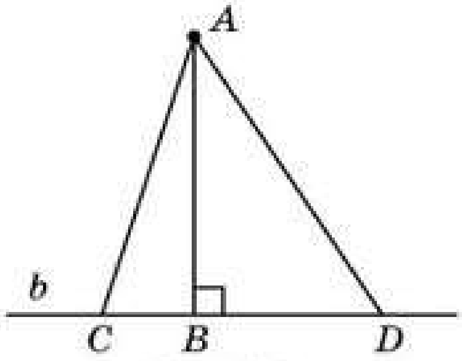


Рис. 10.2

Докажите, что расстояние от данной точки до данной прямой меньше расстояния от этой точки до любой другой точки этой прямой.

Для нахождения расстояния от точки A до прямой b сначала находят основание B перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую B. Если нахождение длины перпендикуляра AB не вытекает непосредственно из условия задачи, то на прямой b выбирают какие-нибудь точки C, D и рассматривают треугольник ACD, в котором AB является высотой (рис. 10.2). Для нахождения высоты AB используют теорему Пифагора или другие известные теоремы и формулы.

Если основание перпендикуляра B находится вне участка прямой b, изображенного на рисунке, то через точку A проводят прямую a, параллельную прямой b, и выбирают на ней более удобную точку A', для которой основание перпендикуляра B' принадлежит данному участку прямой b (рис. 10.3). Длина отрезка $A'B'$ будет равна искомому расстоянию от точки A до прямой b.

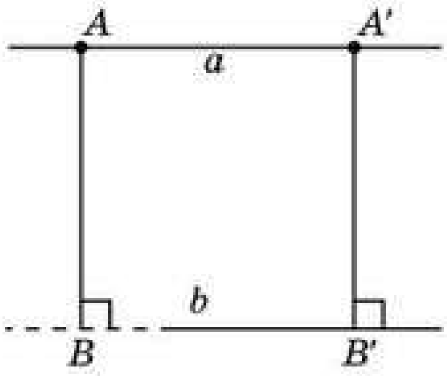


Рис. 10.3

Пример. Найдите расстояние от вершины A единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до прямой B_1D_1 (рис. 10.4).

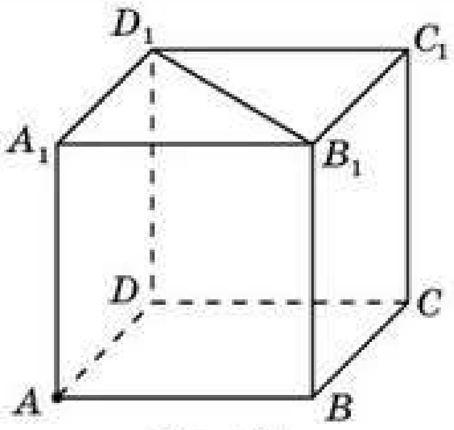


Рис. 10.4

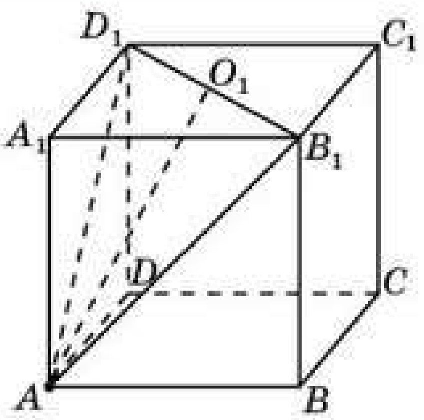


Рис. 10.5

Решение. Рассмотрим треугольник AB_1D_1. Это равносторонний треугольник, его стороны равны $\sqrt{2}$. Основанием перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую B_1D_1, является середина O_1 отрезка B_1D_1 (рис. 10.5). Перпендикуляр AO_1 равен $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Таким образом, расстояние от вершины A единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до прямой B_1D_1 равно $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Вопросы

1. Что называется *расстоянием от точки до прямой в пространстве*?
2. Какие геометрические факты используют для нахождения расстояния от точки до прямой?

Задачи

A

10.1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой: а) BC; б) BD; в) C_1D_1.

10.2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1 (рис. 10.6). Найдите расстояние от вершины S до прямой: а) AB; б) AC.

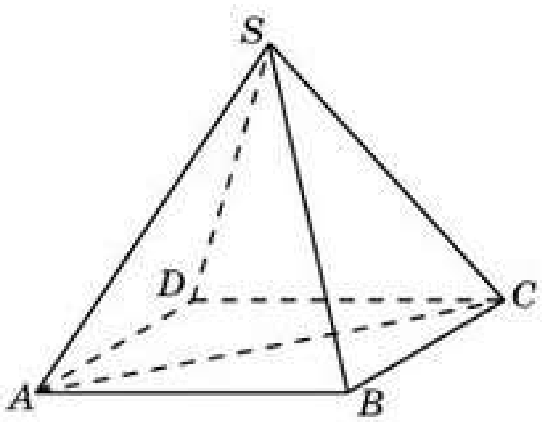


Рис. 10.6

10.3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1 (рис. 10.7). Найдите расстояние от точки A до прямой: а) BB_1; б) BC; в) BA_1.

10.4. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2 (рис. 10.8). Найдите расстояние от вершины S до прямой AD.

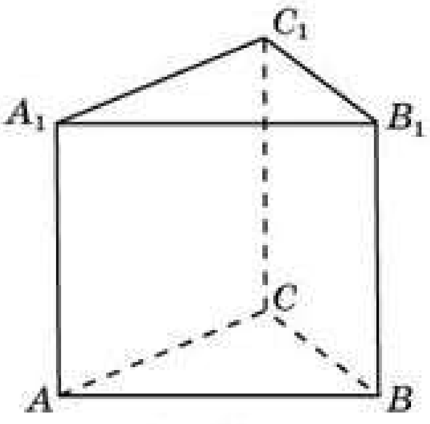


Рис. 10.7

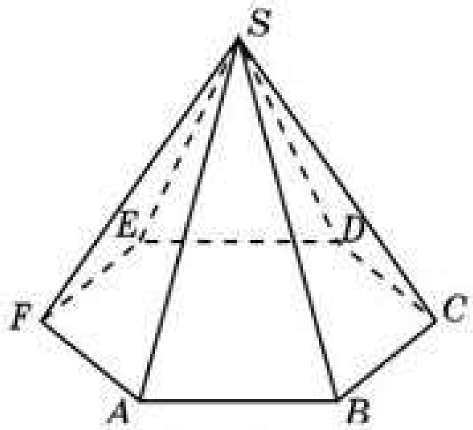


Рис. 10.8

10.5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1 (рис. 10.9). Найдите расстояние от точки A до прямой: а) BB_1; б) BA_1; в) BC; г) CD; д) DE; е) BD; ж) BE; з) BF; и) CE; к) CF; л) A_1B_1.

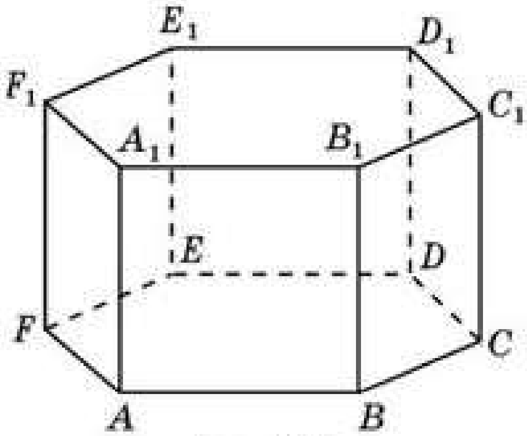


Рис. 10.9

B

10.6. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой CB_1.

10.7. В тетраэдре $ABCD$ все ребра равны 1 (рис. 10.10). Найдите расстояние от середины E ребра AD до прямой BC.

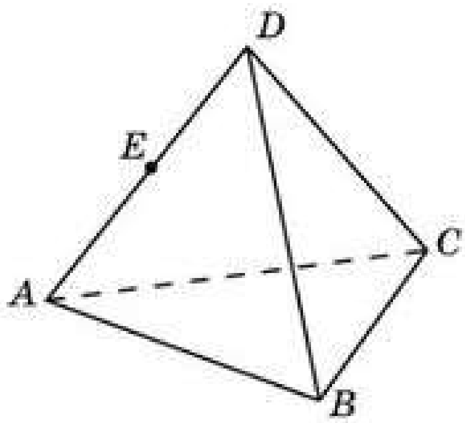


Рис. 10.10

10.8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1 (рис. 10.7). Найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1.

10.9. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2 (рис. 10.8). Найдите расстояние от вершины S до прямой AC.

10.10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1 (рис. 10.9). Найдите расстояние от точки A до прямой B_1F_1.

10.11. Попробуйте определить понятие перпендикулярности прямой и плоскости.

§ 11. Перпендикулярность прямой и плоскости

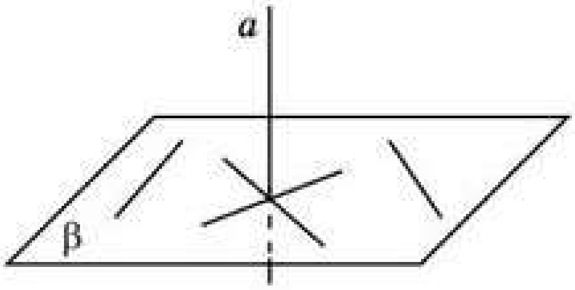


Рис. 11.1

Определим понятие перпендикулярности прямой и плоскости.

Прямая называется *перпендикулярной плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 11.1).

Перпендикулярность прямой a и плоскости b обозначается $a \perp b$.

Представление о прямых или, вернее, отрезках, перпендикулярных плоскости, дают вертикально стоящие телеграфные столбы, монумент "Қазақ елі" (рис. 11.2, а), монумент Независимости Казахстана (рис. 11.2, б), телевизионная башня (рис. 11.2, в), — они перпендикулярны плоскости земли; ребро угла комнаты перпендикулярно полу. Любая прямая, проведенная на полу из угла, перпендикулярна его ребру.


а) б) в)

Рис. 11.2

Отрезок будем называть *перпендикулярным плоскости*, если он лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости.

Заметим, что прямая, перпендикулярная плоскости, пересекает эту плоскость. Действительно, если бы прямая лежала в плоскости или была ей параллельна, то в этой плоскости нашлась бы прямая, ей параллельная. Значит, исходная прямая не была бы перпендикулярна данной плоскости.

Сколько прямых, перпендикулярных данной плоскости, можно провести через точку: а) принадлежащую этой плоскости; б) не принадлежащую этой плоскости?

Следующая теорема дает достаточное условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости). ***Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.***

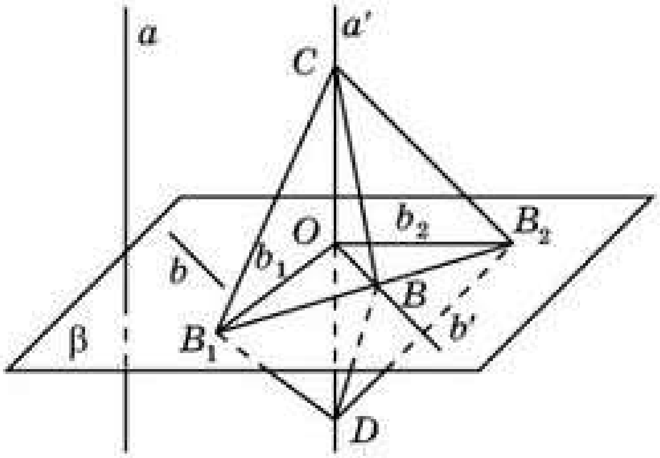


Рис. 11.3

Доказательство. Пусть прямая a перпендикулярна прямым b_1, b_2 плоскости β, пересекающимся в точке O (рис. 11.3).

Рассмотрим произвольную прямую b плоскости β. Проведем через точку O прямые a', b', соответственно параллельные прямым a, b. Для доказательства перпендикулярности прямых a, b достаточно доказать перпендикулярность прямых a', b'.

Для этого в плоскости β проведем прямую, пересекающую прямые b_1, b_2, b' в точках B_1, B_2, B соответственно. Отложим на прямой a' от точки O равные отрезки OC, OD и соединим точки C, D с точками B_1, B_2, B. Прямоугольные треугольники OB_1C и OB_1D равны (по катетам). Следовательно, $B_1C = B_1D$.

Аналогично, из равенства прямоугольных треугольников OB_2C и OB_2D следует, что $B_2C = B_2D$. Треугольники B_1B_2C и B_1B_2D равны (по трем сторонам). Следовательно, $\angle CB_1B = \angle DB_1B$.

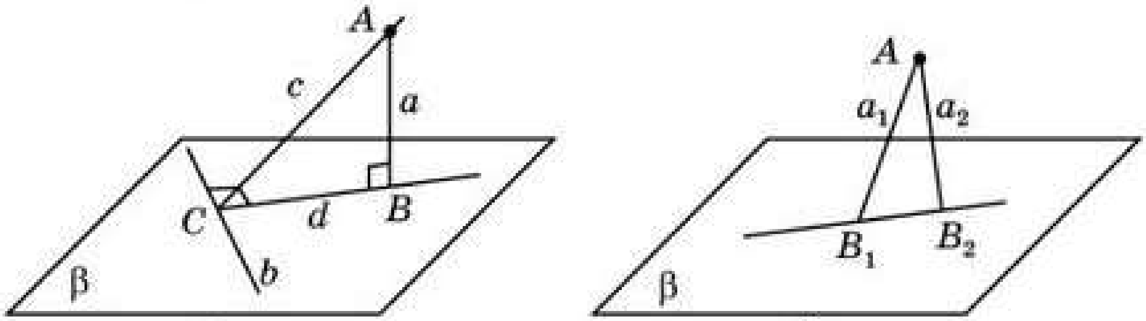
Треугольники B_1BC и B_1BD равны (по двум сторонам и углу между ними). Таким образом, $BC = BD$. Треугольники OBC и OBD равны (по трем сторонам), следовательно, $\angle BOC = \angle BOD = 90°$, т. е. прямые a' и b' перпендикулярны.

Значит, прямая a перпендикулярна плоскости β. ◻

Рассмотрим некоторые свойства перпендикулярности прямой и плоскости.

Свойство 1. *Через точку, не принадлежащую данной плоскости, можно провести единственную прямую, перпендикулярную этой плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим точку A и плоскость b (рис. 11.4, а). В плоскости b проведем какую-нибудь прямую b. В плоскости, определяемой точкой A и прямой b, проведем прямую c, перпендикулярную прямой b. Обозначим C точку пересечения прямых b и c. В плоскости b через точку C проведем прямую d, перпендикулярную прямой b. Заметим, что прямая b будет перпендикулярна плоскости a, определяемой прямыми c и d. В плоскости, определяемой точкой A и прямой d, проведем пряму ю a, перпендикулярную прямой d. Эта прямая и будет искомой прямой, перпендикулярной плоскости b. Действительно, прямая a перпендикулярна прямой d. Кроме того, она лежит в плоскости a, следовательно, перпендикулярна прямой b. Таким образом, прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым b и d плоскости b, значит, она перпендикулярна этой плоскости.



а) б)

Рис. 11.4

Докажем единственность. Предположим, что через точку A проходят две прямые a_1 и a_2, перпендикулярные плоскости b (рис. 11.4, б). Обозначим B_1, B_2 соответственно их точки пересечения с плоскостью b. Тогда в плоскости AB_1B_2 имеются две прямые, проходящие через точку A и перпендикулярные прямой B_1B_2, что противоречит соответствующему свойству перпендикулярных прямых на плоскости. Следовательно, через точку A не может проходить более одной прямой, перпендикулярной плоскости b. Значит, такая прямая единственна.

Свойство 2. *Если прямая перпендикулярна плоскости, то любая прямая, параллельная данной прямой, также будет перпендикулярна этой плоскости* .

Доказательство. Пусть прямая a_1 перпендикулярна плоскости b и прямая a_2 параллельна прямой a_1 (рис. 11.5). Так как прямая a_1 перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости b, то прямая a_2, параллельная прямой a_1, также будет перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Значит, она будет перпендикулярна плоскости b.

Свойство 3. *Две прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны между собой* .

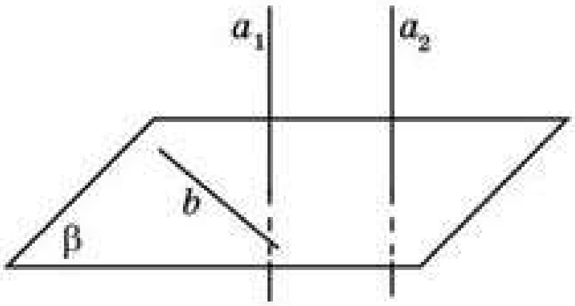


Рис. 11.5

Доказательство. Пусть прямые a_1 и a_2 перпендикулярны плоскости b. Через какую нибудь точку A_2 прямой a_2 проведем прямую, параллельную прямой a_1. По свойству 2 она будет перпендикулярна плоскости b. В силу свойства 1 она должна совпадать с прямой a_2. Значит, прямая a_2 параллельна прямой a_1.

Пример 1. Докажите, что боковые ребра прямой призмы (рис. 11.6) перпендикулярны ее основаниям.

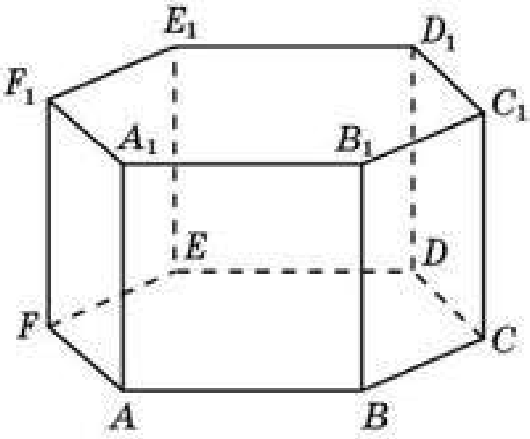


Рис. 11.6

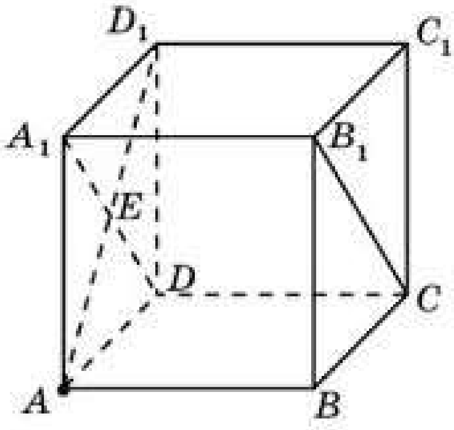


Рис. 11.7

Решение . Боковыми гранями прямой призмы являются прямоугольники. Поэтому каждое боковое ребро перпендикулярно двум прилежащим сторонам основания призмы и, следовательно, перпендикулярно основанию.

Пример 2. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямая AD_1 перпендикулярна плоскости CDA_1.

Решение. Прямая AD_1 перпендикулярна прямой DA_1 (рис. 11.7). Кроме того, она лежит в плоскости ADD_1, которая перпендикулярна прямой CD. Следовательно, прямая AD_1 перпендикулярна плоскости CDA_1.

Вопросы

1. Какая прямая называется *перпендикулярной плоскости* ?
2. Какой отрезок называется *перпендикулярным плоскости* ?
3. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Задачи

А

11.1. Прямая параллельна плоскости. Может ли она быть перпендикулярной какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости?

11.2. Как расположена относительно плоскости треугольника прямая, перпендикулярная двум его сторонам?

11.3. Верно ли, что прямая, пересекающая круг в центре, перпендикулярна плоскости круга в случае, если прямая перпендикулярна: а) диаметру круга; б) двум его диаметрам?

11.4. Прямая a пересекает плоскость а и не перпендикулярна этой плоскости. Существуют ли в плоскости а прямые, перпендикулярные a?

11.5. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.8) данные прямая и плоскость перпендикулярны: а) AA_1 и ABC; б) AB и BCC_1; в) AB_1 и BCD_1.

B

11.6 . Верно ли, что если прямая перпендикулярна каким-нибудь двум прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости?

11.7. При каком взаимном расположении двух прямых через одну из них можно провести плоскость, перпендикулярную другой прямой?

11.8. Определите вид треугольника, если через одну из его сторон можно провести плоскость, перпендикулярную другой стороне.

11.9. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.8) докажите перпендикулярность прямых: а) AA_1 и AC; б) AA_1 и BD; в) AB и BC_1.

11.10. Докажите, что в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 11.9) данные прямая и плоскость перпендикулярны: а) AA_1 и ABC; б) AB и BDD_1; в) AC и CDD_1; г) AC и BEE_1; д) AD и CEE_1; е) AB_1 и BDE_1.

11.11. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 11.9) докажите перпендикулярность прямых: а) AA_1 и AC; б) AA_1 и AD; в) AA_1 и AE; г) AA_1 и BF; д) AB и BD_1; е) AB и EA_1; ж) AC и DC_1.

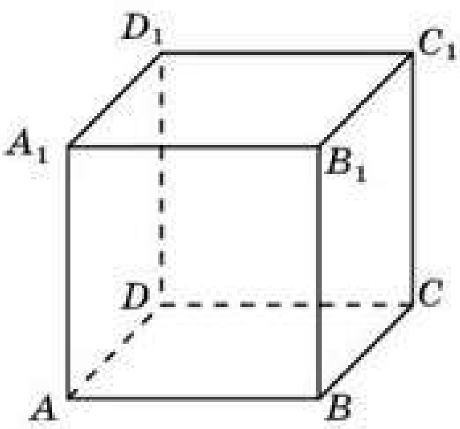


Рис. 11.8

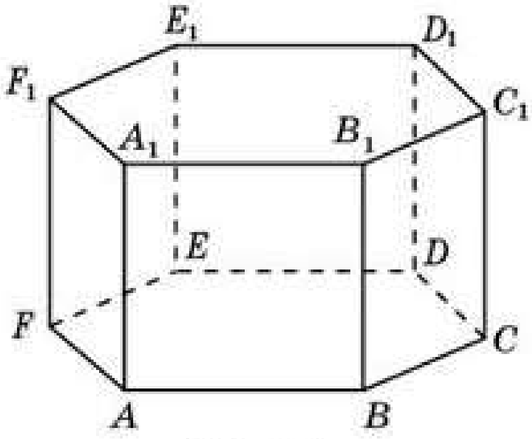


Рис. 11.9

11.12. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямая BD_1 перпендикулярна прямым AC и AB_1.

11.13. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1.

11.14. Приведите примеры реальных объектов, идеализацией которых являются перпендикулярные прямая и плоскость.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

11.15. Попробуйте определить понятие расстояния от точки до плоскости.

§ 12. Расстояние от точки до плоскости

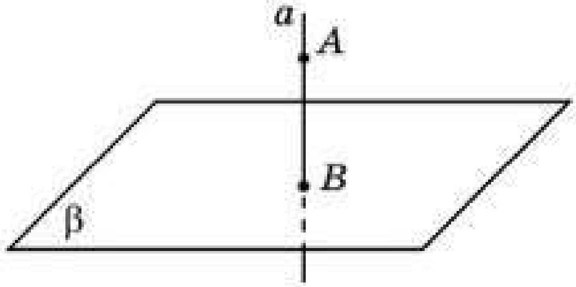


Рис. 12.1

Для точки A, не принадлежащей плоскости b, проведем прямую, перпендикулярную этой плоскости, и обозначим B точку пересечения этих прямой и плоскости (рис. 12.1). Отрезок AB называется *перпендикуляром*, опущенным из точки A на плоскость b. Длина этого отрезка называется *расстоянием* от точки A до плоскости b.

Например, если лампочка уличного фонаря находится на такой-то высоте, скажем, 6 м от земли, то имеем в виду, что расстояние от лампочки до поверхности земли измеряется по перпендикуляру, проведенному от лампочки к плоскости земли (рис.12.2).

Рис. 12.2

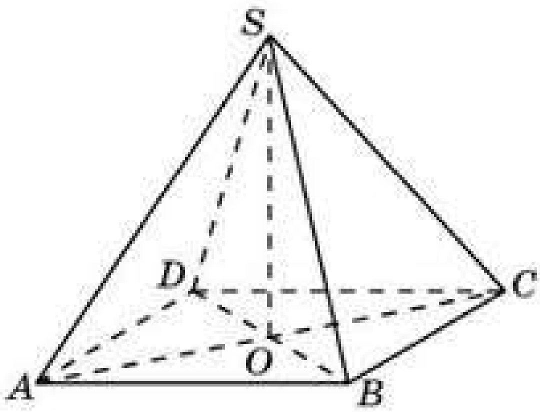


Рис. 12.3

Докажите, что расстояние от данной точки до данной плоскости меньше расстояния от этой точки до любой другой точки этой плоскости.

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, называется *высотой пирамиды*.

На рисунке 12.3 показана высота SO правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$.

Рассмотрим примеры нахождения расстояний.

Пример 1. Найдите расстояние между вершинами B и D_1 (диагональ) прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.4), для которого $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$.

Решение. Прямая DD_1 перпендикулярна прямым DA и DC. Следовательно, она перпендикулярна плоскости ABC. Значит, она перпендикулярна прямой DB. В прямоугольном треугольнике BDD_1 $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$, $DD_1 = c$. По теореме Пифагора находим гипотенузу $BD_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

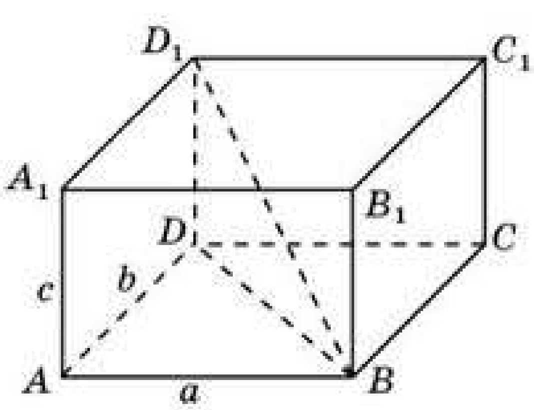


Рис. 12.4

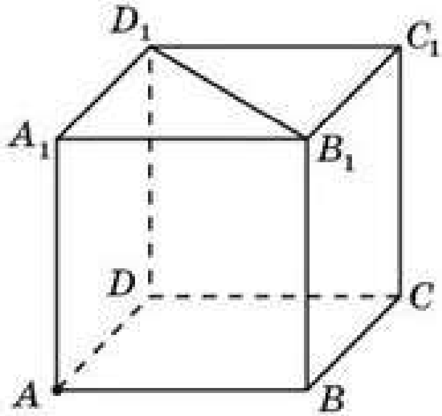


Рис. 12.5

Пример 2. Найдите расстояние от вершины A единичного куба до плоскости CDA_1 (рис. 12.5).

Решение. Проведем отрезок AD_1. Обозначим E его точку пересечения с отрезком DA_1. Прямая AE перпендикулярна прямым DA_1 и DC. Следовательно, она перпендикулярна плоскости CDA_1. Значит, отрезок AE является искомым перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость CDA_1. Его длина равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, расстояние от вершины A единичного куба до плоскости CDA_1 равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Вопросы

1. Что называется *перпендикуляром, опущенным из точки на плоскость*?
2. Что называется *расстоянием от точки до плоскости*?

Задачи

А

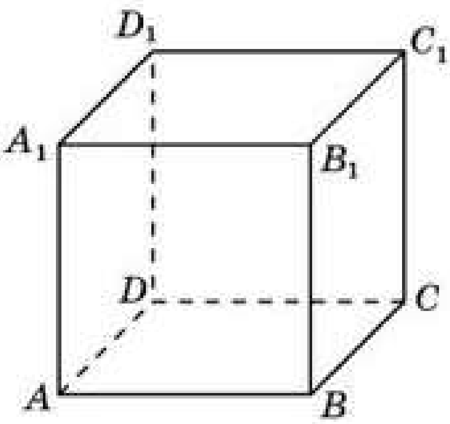


Рис. 12.6

12.1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. Найдите диагональ AC_1.

12.2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.6) найдите расстояние от вершины A до плоскости: а) BCC_1; б) BCD_1.

12.3. Найдите высоту правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (рис. 12.3), все ребра которой равны 1.

B

12.4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1 (рис. 12.7). Найдите расстояние от вершины A до плоскости: а) BDD_1; б) BEE_1; в) BFF_1; г) BCC_1; д) CDD_1; е) CEE_1; ж) CFF_1.

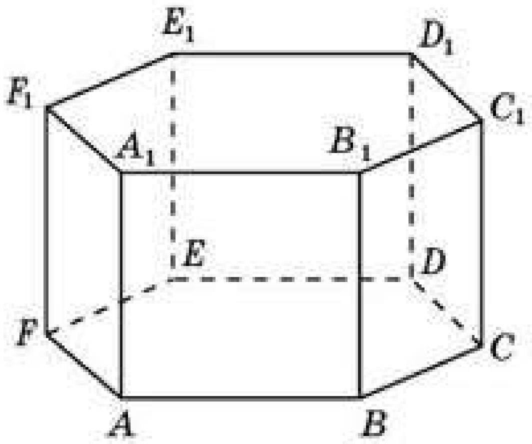


Рис. 12.7

12.5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1 (рис. 12.7). Найдите расстояние между вершинами: а) A и C_1; б) A и D_1.

12.6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1 (рис. 12.7). Найдите расстояние от вершины A до прямой: а) BD_1; б) CD_1.

12.7. Стороны основания правильной треугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1$ равны 1 (рис. 12.8). Найдите расстояние от вершины A этой призмы до плоскости BCC_1.

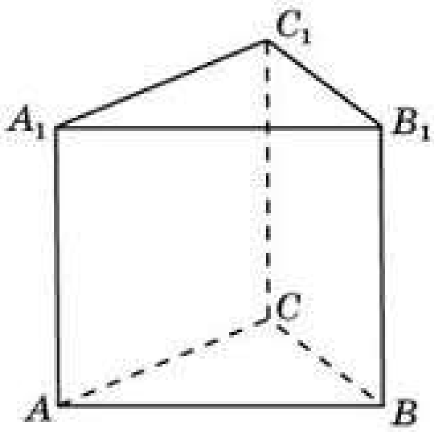


Рис. 12.8

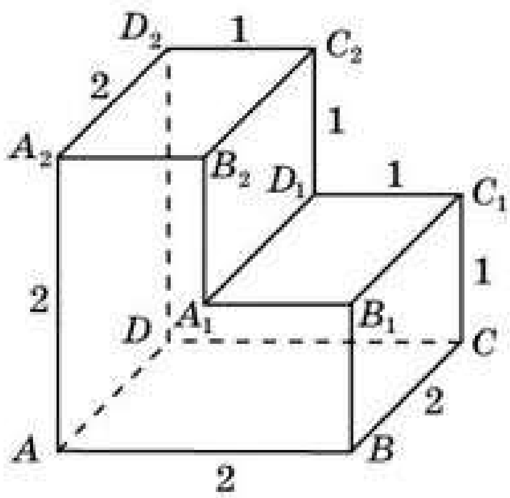


Рис. 12.9

12.8. Гранями многогранника являются многоугольники с прямыми углами (рис. 12.9). Найдите расстояние между вершинами: а) A и C_1; б) A и D_1; в) A и C_2; г) B и D_1; д) B и D_2.

12.9. Гранями многогранника являются многоугольники с прямыми углами (рис. 12.9). Найдите расстояние от вершины A до прямой: а) B_1C_1; б) A_1D_1; в) B_2C_2.

12.10. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб со стороной 3 и острым углом 60°. Боковое ребро призмы равно 4. Найдите меньшую диагональ призмы (рис. 12.10).

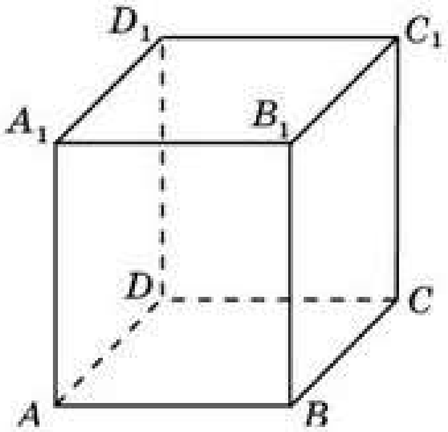


Рис. 12.10

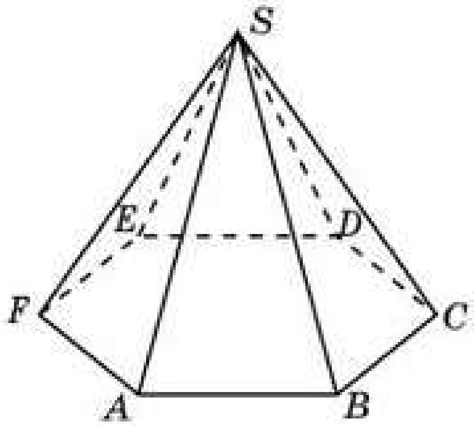


Рис. 12.11

Рис. 12.12

12.11. Постройте высоту правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ (рис. 12.11).

12.12. Найдите высоту правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2 (рис. 12.11).

12.13. Дворец мира и согласия в г. Нур-Султане имеет форму правильной четырехугольной пирамиды (рис. 12.12), в которой высота равна стороне основания и составляет 62 м. Найдите длину бокового ребра этой пирамиды.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

12.14. Попробуйте определить понятие расстояния между параллельными прямой и плоскостью.

§ 13. Расстояния между параллельными прямой и плоскостью и между двумя параллельными плоскостями

Пусть дана прямая и параллельная ей плоскость. *Расстоянием между параллельными прямой и плоскостью* называется расстояние от какой-нибудь точки данной прямой до данной плоскости (рис. 13.1).

Теорема. ***Расстояние между параллельными прямой и плоскостью не зависит от выбора точки на данной прямой.***

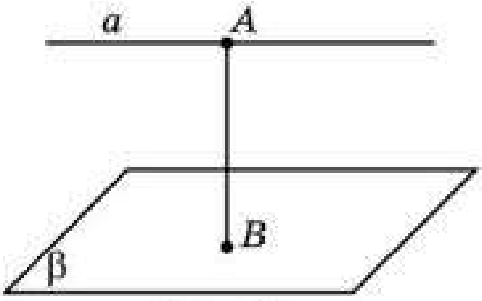


Рис. 13.1

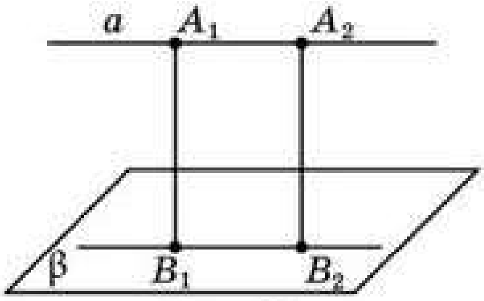


Рис. 13.2

Доказательство. Пусть A_1, A_2 — две точки прямой a, параллельной плоскости b (рис. 13.2), B_1, B_2 — основания перпендикуляров, опущенных из этих точек на данную плоскость. В силу свойства 3 пункта 11 перпендикуляры A_1B_1 и A_2B_2 параллельны. Прямая B_1B_2 является линией пересечения плоскости b с плоскостью, определяемой этими перпендикулярами. Следовательно, прямая B_1B_2 параллельна прямой a. Таким образом, четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ — параллелограмм (прямоугольник). Значит, $A_1B_1 = A_2B_2$. ☐

Пример 1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 13.3, а) найдите расстояние между прямой AA_1 и плоскостью BDD_1.

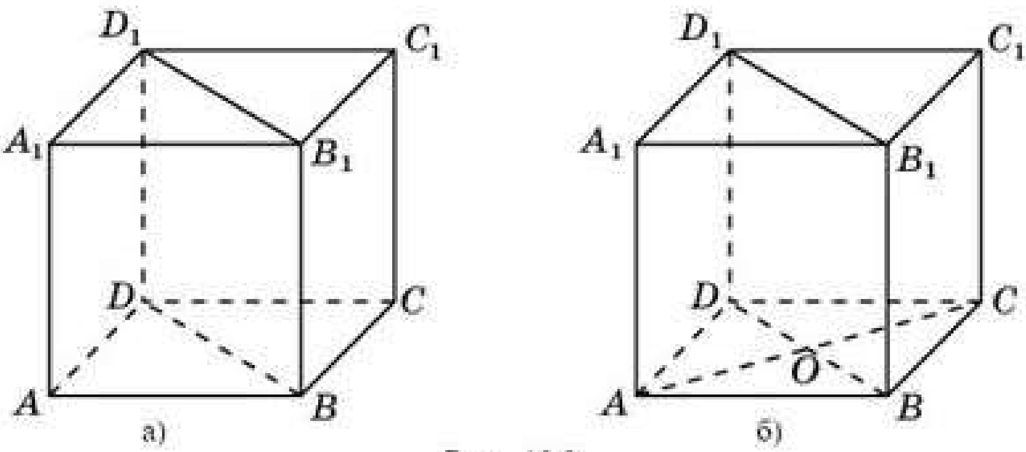


Рис. 13.3

Решение. Диагональ AC грани $ABCD$ куба перпендикулярна плоскости BDD_1. Обозначим O точку пересечения этой диагонали с плоскостью BDD_1 (рис. 13.3, б). Расстояние между прямой AA_1 и плоскостью BDD_1 равно длине отрезка AO и равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Расстоянием между двумя параллельными плоскостями называется расстояние от какой-нибудь точки одной плоскости до другой плоскости (рис. 13.4).

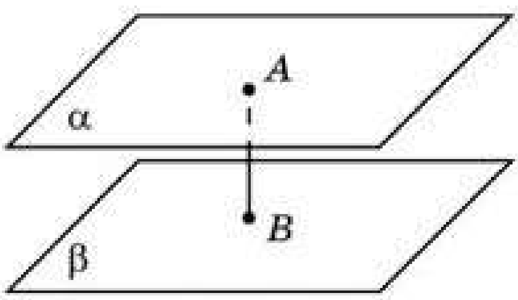


Рис. 13.4

Теорема. ***Расстояние между параллельными плоскостями не зависит от выбора точки на данной плоскости.***

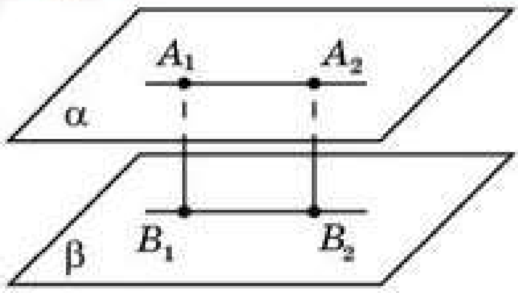


Рис. 13.5

Доказательство. Пусть A_1, A_2 — две точки плоскости a, параллельной плоскости b (рис. 13.5), B_1, B_2 — соответственно основания перпендикуляров, опущенных из этих точек на данную плоскость. В силу свойства 3 пункта 11 перпендикуляры A_1B_1 и A_2B_2 параллельны. Прямая B_1B_2 является линией пересечения плоскости b с плоскостью, определяемой этими перпендикулярами. Следовательно, прямая B_1B_2 параллельна прямой A_1A_2. Таким образом, четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ — параллелограмм (прямоугольник). Значит, $A_1B_1 = A_2B_2$. ◻

Пример 2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между плоскостями AFF_1 и BEE_1 (рис. 13.6, а).

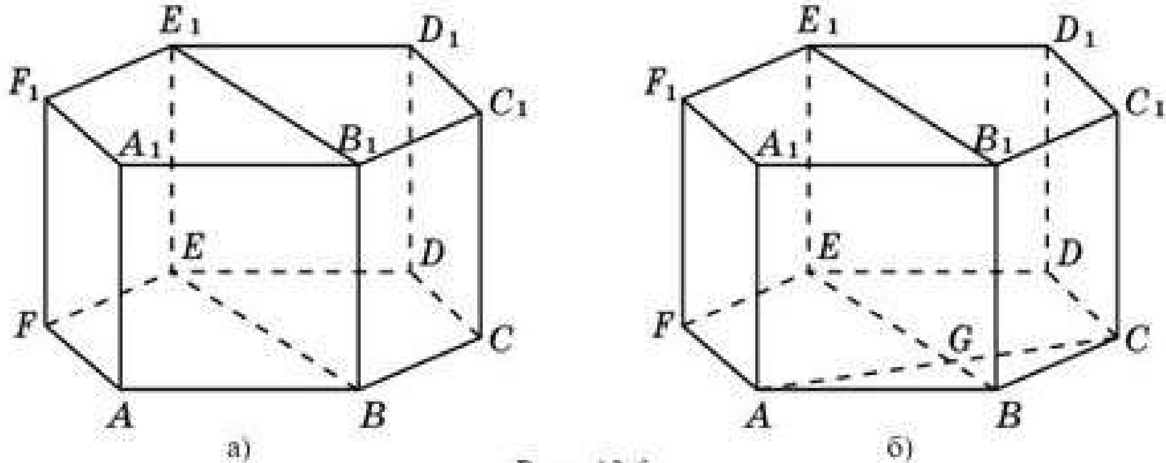


Рис. 13.6

Решение. Диагональ AC грани $ABCDEF$ призмы перпендикулярна плоскости BEE_1. Обозначим G точку пересечения этой диагонали с плоскостью BEE_1 (рис. 13.6, б). Расстояние между плоскостями AFF_1 и BEE_1 равно длине отрезка AG и равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вопросы

1. Что называется *расстоянием между параллельными прямой и плоскостью* ?
2. Как найти расстояние между параллельными прямой и плоскостью?
3. Что называется *расстоянием между параллельными плоскостями* ?

Задачи

А

13.1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 13.7) найдите расстояние между: а) прямой AA_1 и плоскостью BCC_1; б) прямой AB_1 и плоскостью CDD_1.

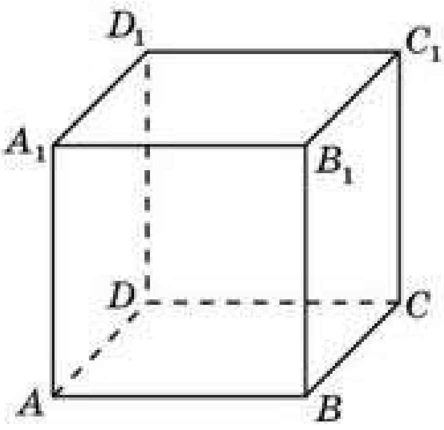


Рис. 13.7

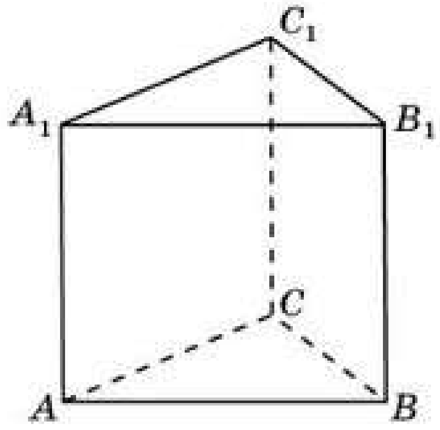


Рис. 13.8

13.2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1 (рис. 13.8). Найдите расстояние между прямой AA_1 и плоскостью BCC_1.

13.3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1 (рис. 13.9). Найдите расстояние между прямой AA_1 и плоскостью: а) BCC_1; б) CDD_1; в) DEE_1; г) BDD_1; д) BEE_1; е) BFF_1; ж) CEE_1; з) CFF_1.

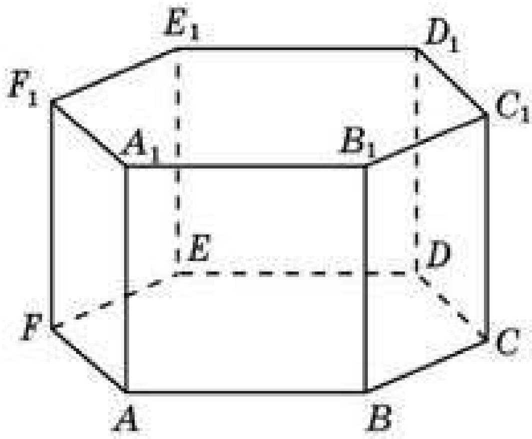


Рис. 13.9

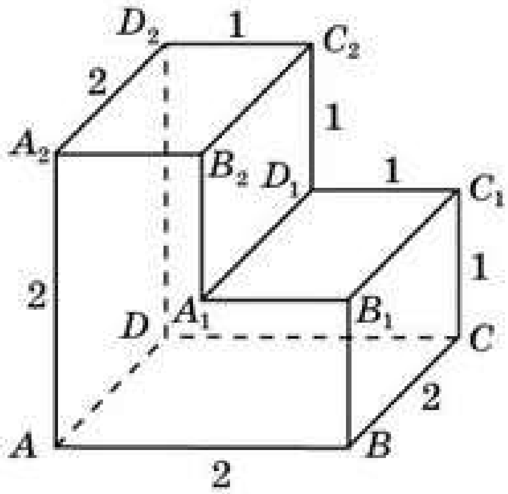


Рис. 13.10

13.4. Гранями многогранника являются многоугольники с прямыми углами (рис. 13.10). Найдите расстояние между плоскостями: а) ABB_1 и CDD_2; б) ADD_2 и BCC_1; в) ADD_2 и $A_1D_1C_2$; г) ABC и $A_1B_1C_1$.

B

13.5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между: а) прямой BB_1 и плоскостью ACC_1; б) прямой AB и плоскостью CDA_1.

13.6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между плоскостями: а) ABB_1 и DEE_1 б) ABB_1 и CFF_1; в) ACC_1 и FDD_1.

§ 14. Расстояние между двумя прямыми

Напомним, что в планиметрии *расстоянием между двумя параллельными прямыми* называлось расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой прямой.

Поскольку две параллельные прямые в пространстве лежат в одной плоскости, то это определение подходит и для пространства.

Расстоянием между двумя параллельными прямыми в пространстве называется расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой прямой (рис. 14.1).

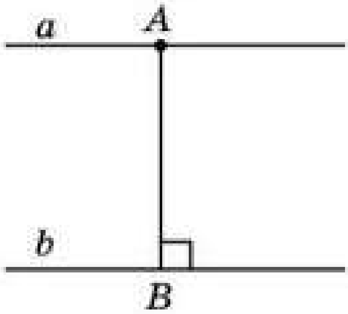


Рис. 14.1

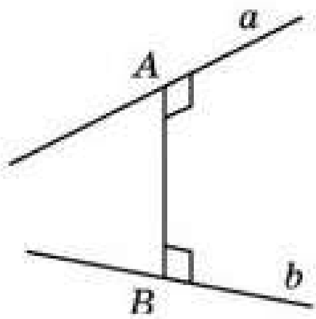


Рис. 14.2

Определим теперь понятие расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в пространстве.

Отрезок, соединяющий точки на скрещивающихся прямых и перпендикулярный этим прямым, называется их *общим перпендикуляром*. Длина общего перпендикуляра называется *расстоянием между скрещивающимися прямыми* (рис. 14.2).

Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 14.3) укажите общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AA_1 и BC.

Пример 1. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 14.3) найдите расстояние между скрещивающимися прямыми AA_1 и BD_1.

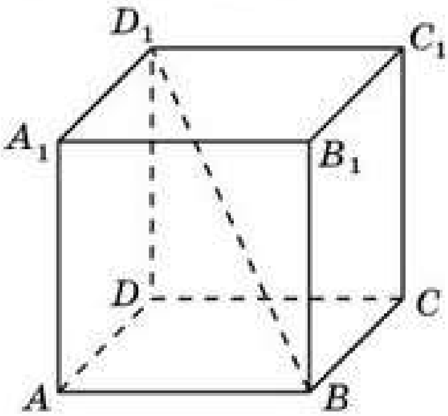


Рис. 14.3

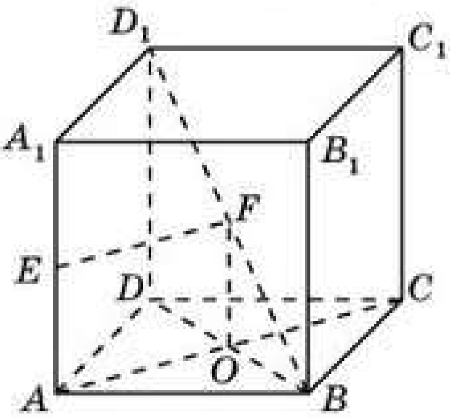


Рис. 14.4

Решение. Общим перпендикуляром для данных прямых является отрезок EF, соединяющий середины отрезков AA_1 и BD_1 (рис. 14.4).

Действительно, отрезок EF параллелен прямой AC, которая перпендикулярна прямой AA_1 и плоскости BDD_1. Следовательно, она перпендикулярна и прямой BD_1, лежащей в этой плоскости. Общий перпендикуляр EF равен отрезку AO, следовательно, равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Понятие расстояния между параллельными прямой и плоскостью можно использовать для нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми.

Пусть a и b — две скрещивающиеся прямые. Через какую-нибудь точку прямой b проведем прямую a', параллельную прямой a. Эта прямая и прямая b определяют плоскость b, которая будет параллельна прямой a (рис. 14.5). Общий перпендикуляр AB к данным скрещивающимся прямым будет перпендикулярен плоскости b. Следовательно, его длина будет равна расстоянию между прямой a и плоскостью b.

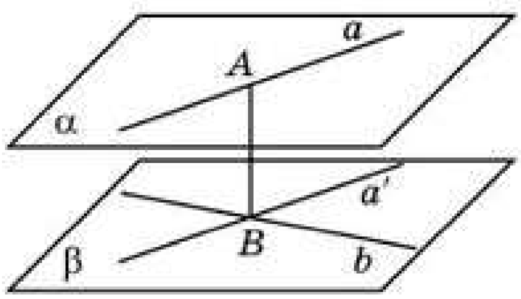


Рис. 14.5

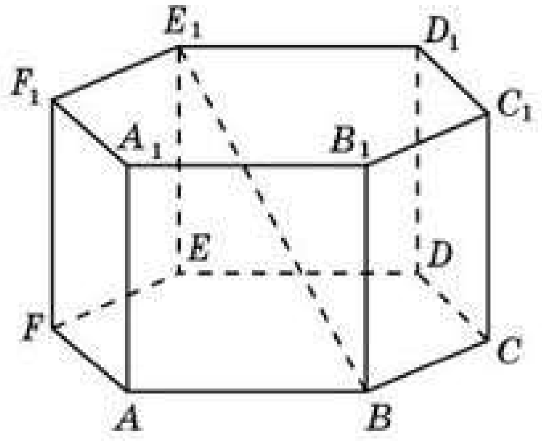


Рис. 14.6

Пример 2. У правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 14.6) все ребра равны 1. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BE_1.

Решение. Прямая AA_1 параллельна плоскости BEE_1. Следовательно, расстояние между прямыми AA_1 и BE_1 равно расстоянию между прямой AA_1 и плоскостью BEE_1. Как было показано в предыдущем пункте, это расстояние равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вопросы

1. Что называется *расстоянием между двумя параллельными прямыми*?
2. Что называется *общим перпендикуляром для двух скрещивающихся прямых*?
3. Что называется *расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми*?

Задачи

A

14.1. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 14.7) найдите расстояние между прямыми: а) AA_1 и BB_1; б) AA_1 и CC_1; в) AA_1 и BC; г) AA_1 и CD; д) AA_1 и BC_1; е) AA_1 и CD_1; ж) AA_1 и BD; з) AB_1 и CD_1.

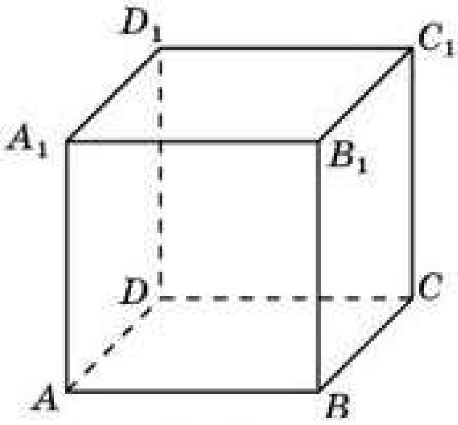


Рис. 14.7

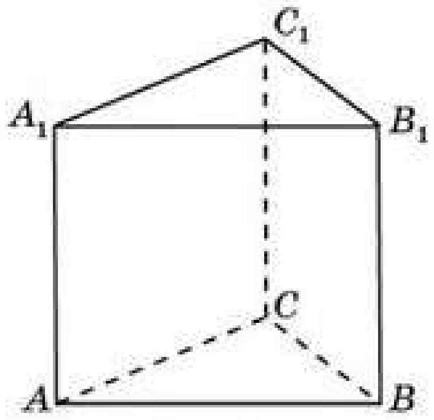


Рис. 14.8

14.2. У правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 14.8) все ребра равны 1. Найдите расстояние между прямыми: а) AA_1 и BC; б) AB и A_1C_1.

14.3. У правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 14.9) все ребра равны 1. Найдите расстояние между прямыми: а) AB и A_1B_1; б) AB и B_1C_1; в) AA_1 и CC_1; г) AA_1 и DD_1.

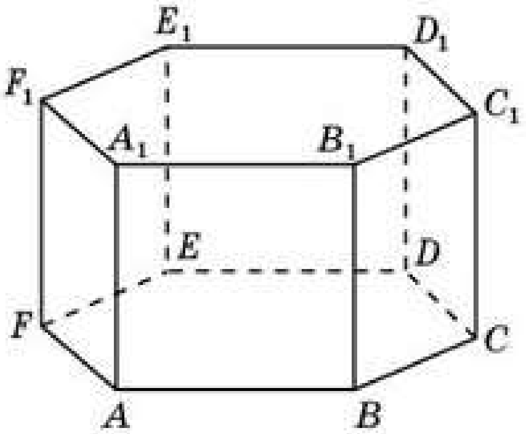


Рис. 14.9

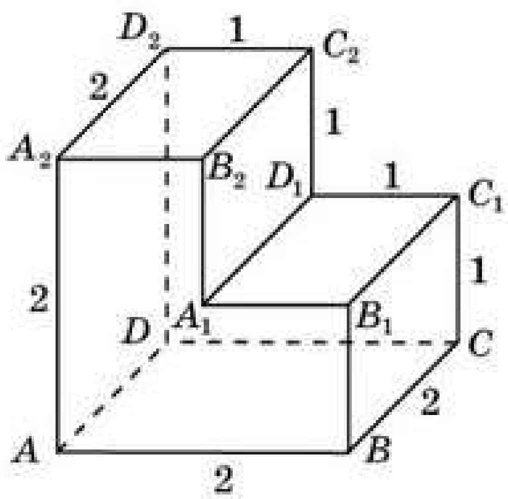


Рис. 14.10

14.4. Гранями многогранника являются многоугольники с прямыми углами (рис. 14.10). Найдите расстояние между прямыми: а) AB и C_1D_1; б) AB и C_2D_2; в) AA_2 и CC_1; г) AA_2 и D_1C_2.

B

14.5. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 14.7) найдите расстояние между прямыми AC_1 и BC.

14.6. У правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 14.8) все ребра равны 1. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

14.7. У правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 14.9) все ребра равны 1. Найдите расстояние между прямыми: а) AA_1 и B_1C_1; б) AA_1 и C_1D_1; в) AA_1 и CD_1; г) AA_1 и DE_1; д) AA_1 и BD_1.

14.8. Гранями многогранника являются многоугольники с прямыми углами (рис. 14.10). Найдите расстояние между прямыми: а) AA_2 и B_1C_1; б) AA_2 и A_1D_1; в) AB_1 и CC_1; г) AB и D_1C_2; д) A_2B_2 и CC_1.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

14.9. По аналогии с понятием наклонной к прямой на плоскости попробуйте определить понятие наклонной к плоскости в пространстве.

§ 15. Теорема о трех перпендикулярах

Зафиксируем некоторую плоскость ρ. Для произвольной точки A пространства проведем прямую a, перпендикулярную данной плоскости. Точка A' пересечения этой прямой с данной плоскостью называется *ортогональной проекцией* точки A на плоскость (рис. 15.1).

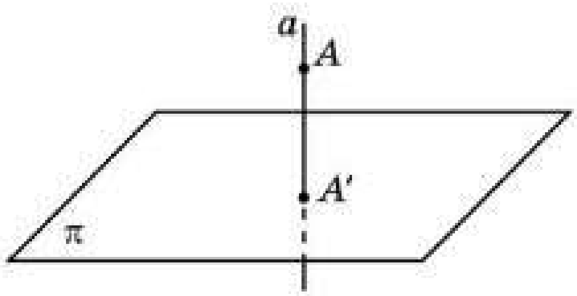


Рис. 15.1

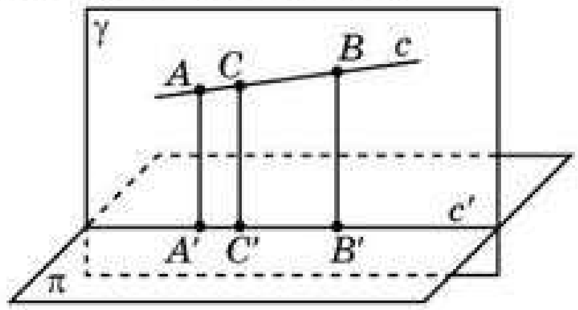


Рис. 15.2

Соответствие, при котором точкам пространства сопоставляются их ортогональные проекции на данную плоскость, называется *ортогональным проектированием* на эту плоскость. Сама плоскость называется *плоскостью проектирования* .

Рассмотрим некоторые свойства ортогонального проектирования.

Свойство 1. *Ортогональное проектирование переводит прямые, не перпендикулярные плоскости проектирования, в прямые, а прямые, перпендикулярные плоскости проектирования, — в точки* .

Доказательство. Пусть прямая c не перпендикулярна плоскости проектирования ρ (рис. 15.2). Рассмотрим какие-нибудь точки A, B, принадлежащие прямой c. Проведем через них прямые, перпендикулярные плоскости π. Обозначим A', B' их точки пересечения с плоскостью π соответственно. Так как проведенные прямые параллельны, то они лежат в одной плоскости. Обозначим ее σ. Пусть c' — линия пересечения этой плоскости с плоскостью π. Докажем, что прямая c' является ортогональной проекцией прямой c. Действительно, для любой точки C, принадлежащей прямой c, прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная плоскости π, будет лежать в плоскости σ. Следовательно, ее точка пересечения с плоскостью π будет принадлежать прямой c'. Значит, ортогональная проекция точки C принадлежит прямой c'. Обратно, если точка C' принадлежит прямой c', то прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная плоскости π, будет лежать в плоскости σ. Следовательно, она будет пересекать прямую c в некоторой точке C. Ее ортогональной проекцией будет точка C'.

Ясно, что если прямая перпендикулярна плоскости π (рис. 15.1), то ее ортогональной проекцией является точка. ◻

Свойство 2. *Ортогональное проектирование сохраняет отношение отрезков, лежащих на прямой, не перпендикулярной плоскости проектирования. В частности, середина отрезка проектируется в середину проекции этого отрезка .*

Доказательство. Пусть точки A, B, C принадлежат прямой c, не перпендикулярной плоскости π. A', B', C' — соответственно их ортогональные проекции, принадлежащие ортогональной проекции c' прямой c на плоскость π (рис. 15.3). Так как прямые AA', BB', CC' параллельны, то по теореме о пропорциональных отрезках имеет место равенство отношений

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}. \quad ◻$$

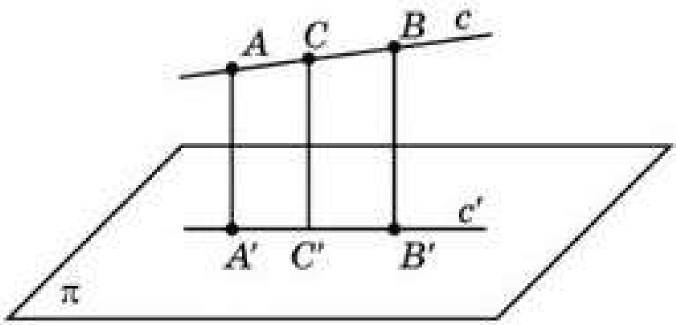


Рис. 15.3

Прямую, не перпендикулярную плоскости, будем называть *наклонной* .

Наклонной называется также отрезок, соединяющий точку, не принадлежащую плоскости, с точкой этой плоскости, не являющийся перпендикуляром.

Теорема (**о трех перпендикулярах**). ***Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной.***

Доказательство. Пусть AA' — перпендикуляр к плоскости π, AB — наклонная, $A'B$ — ортогональная проекция наклонной (рис. 15.4).

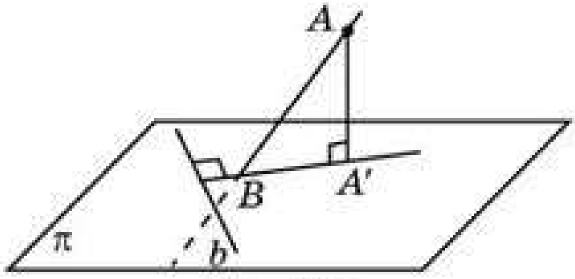


Рис. 15.4

Так как прямая AA' перпендикулярна плоскости π, то любая прямая b, лежащая в плоскости π, будет перпендикулярна прямой AA'.

Если, кроме этого, прямая b перпендикулярна прямой $A'B$, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости она будет перпендикулярна плоскости $AA'B$. Следовательно, она будет перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости, в частности и наклонной AB. □

Верно и обратное. А именно, если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и ортогональной проекции этой наклонной. Попробуйте доказать это самостоятельно.

Пример. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямые AC и BD_1 перпендикулярны (рис. 15.5).

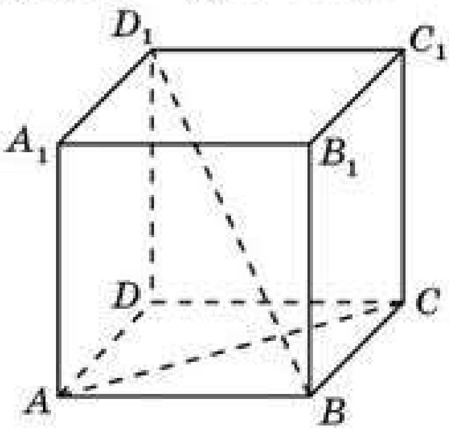


Рис. 15.5

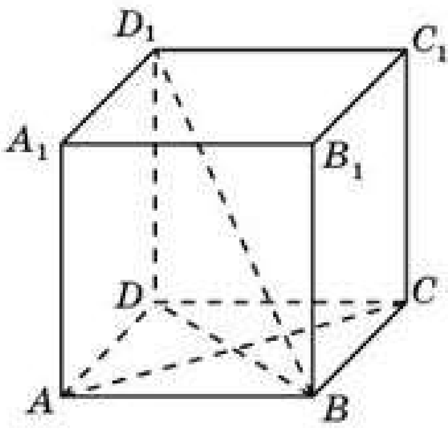


Рис. 15.6

Решение. Ортогональной проекцией прямой BD_1 на плоскость ABC является прямая BD (рис. 15.6). Прямая AC перпендикулярна BD, следовательно, она перпендикулярна BD_1.

Вопросы

1. Что называется *ортогональной проекцией точки на плоскость*?
2. Что называется *ортогональным проектированием на плоскость*?
3. Сформулируйте свойства ортогонального проектирования.
4. Что называется *наклонной*?
5. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.

Задачи

A

15.1. Из точки A к данной плоскос ти проведены перпендикуляр AA' и наклонная AB. Найдите ортогональную проекцию отрезка AB, если $AB = 37$ см, $AA' = 35$ см.

15.2. Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр AA' и наклонная AB. Найдите отрезок AB, если $AA' = 6$ см, $\angle A'AB = 60°$.

15.3. Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр AA' и наклонная AB. Найдите отрезок AA', если $AB = 2\sqrt{10}$ см, $A'B = 3AA'$.

15.4. На какое расстояние следует отодвинуть от стены дома нижний конец лестницы, длина которой равна 13 м, чтобы верхний ее коне ц оказался на высоте 12 м?

15.5. Какой длины должна быть лестница, чтобы она достала до окна дома на высоте 8 м, если ее нижний конец отстоит от дома на 6 м?

B

15.6. Отрезки двух наклонных, проведенных из одной точки к плоскости, равны 15 см и 20 см. Ортогональная проекция одного из этих отрезков равна 16 см. Найдите ортогональную проекцию другого отрезка.

15.7. Точки A, B, C расположены на одной прямой, A', B', C' — их соответствующие ортогональные проекции, $AB = 5$, $BC = 10$, $A'C' = 12$. Найдите $A'B'$ и $B'C'$.

15.8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15.7) изобразите ортогональную проекцию на плоскость ACC_1 отрезка: а) BB_1; б) BC_1; в) BD_1.

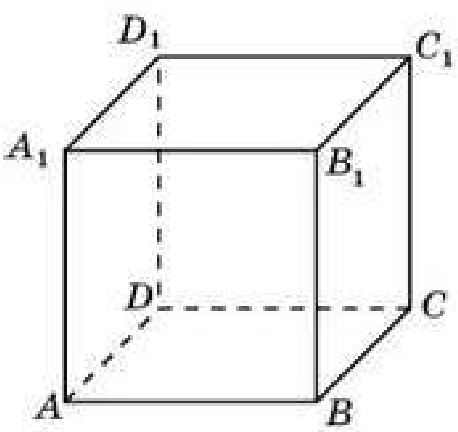


Рис. 15.7

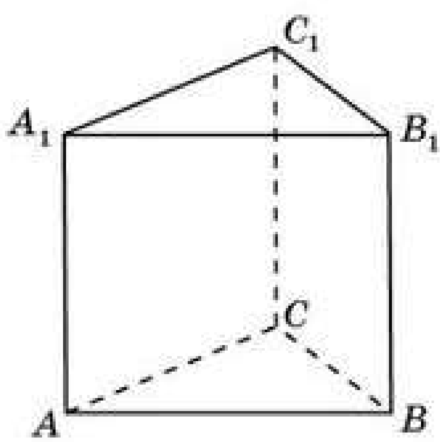


Рис. 15.8

15.9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 15.8) изобразите ортогональную проекцию на плоскость ACC_1 отрезка: а) BB_1; б) BC; в) BC_1.

15.10. Докажите, что в правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (рис. 15.9) диагональ AC основания перпендикулярна скрещивающемуся с ней боковому ребру SB.

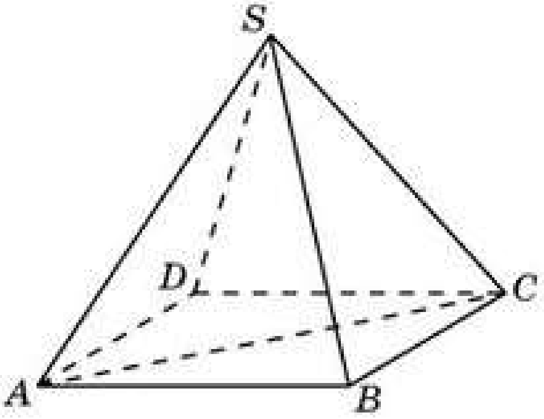


Рис. 15.9

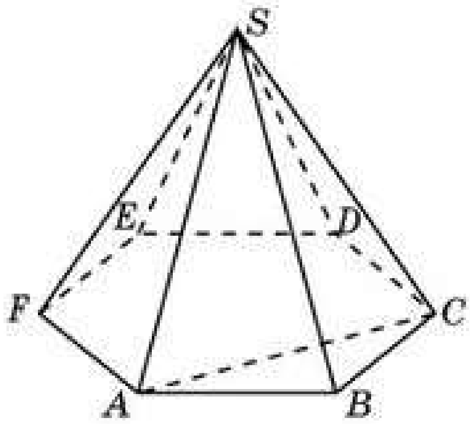


Рис. 15.10

15.11. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15.7) перпендикулярны прямые: а) AB_1 и BD_1; б) AC_1 и BD; в) AD_1 и CA_1.

15.12. Докажите, что в правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (рис. 15.10) диагональ AC основания перпендикулярна скрещивающемуся с ней боковому ребру SB.

15.13. Докажите, что в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 15.11) перпендикулярны прямые: а) AC_1 и BE; б) AD_1 и CE; в) AB_1 и BE_1.

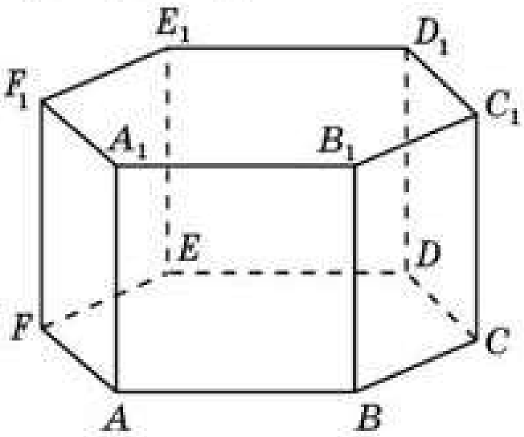


Рис. 15.11

15.14. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

15.15. Попробуйте определить понятие угла между наклонной и плоскостью.

§ 16. Угол между прямой и плоскостью

Напомним, что ортогональное проектирование переводит прямые, не перпендикулярные плоскости проектирования (наклонные), в прямые, а прямые, перпендикулярные плоскости — в точки (рис. 16.1).

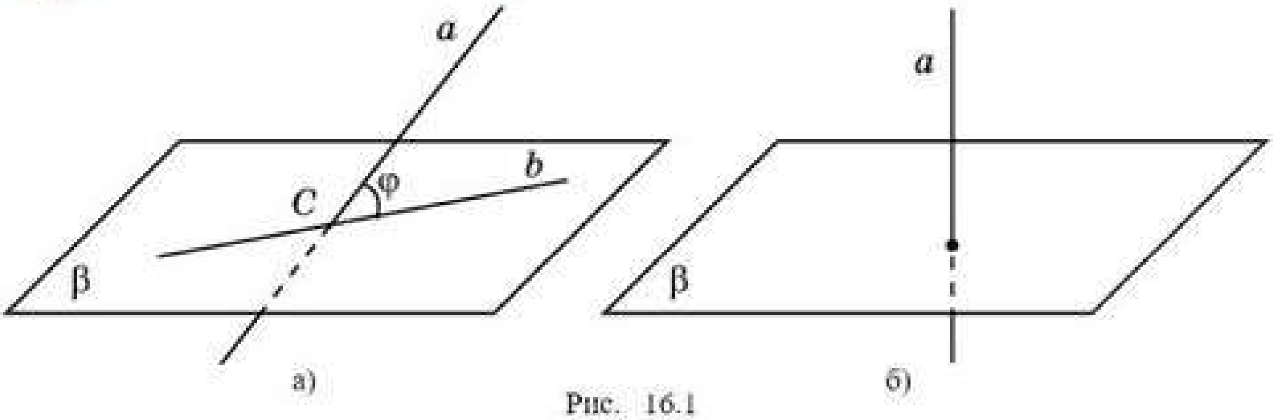


Рис. 16.1

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на эту плоскость (рис. 16.1, а).

Считают, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол (рис. 16.1, б).

Углом между отрезком и плоскостью называется угол между прямой, содержащей отрезок, и этой плоскостью.

Пример. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.2) прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1.

Решение. Ортогональной проекцией прямой BD_1 на плоскость ABC является прямая BD, которая перпендикулярна прямой AC (рис. 16.3).

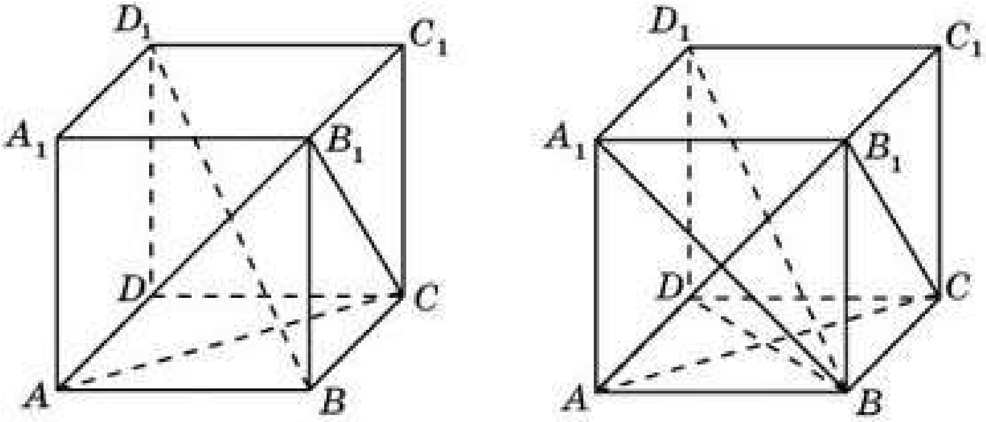


Рис. 16.2 Рис. 16.3

Ортогональной проекцией прямой BD_1 на плоскость ABB_1 является прямая BA_1, которая перпендикулярна прямой AB_1. Таким образом, прямая BD_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и AB_1 плоскости ACB_1. Следовательно, прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1.

Вопросы

1. Что называется *углом между наклонной и плоскостью*?
2. Какой угол считается углом между прямой, перпендикулярной плоскости, и этой плоскостью?
3. Что называется *углом между отрезком и плоскостью*?

Задачи

А

16.1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.4) найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью: а) ABC; б) BCC_1; в) BCD_1.

16.2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой BD_1 и плоскостью ABC (рис. 16.4).

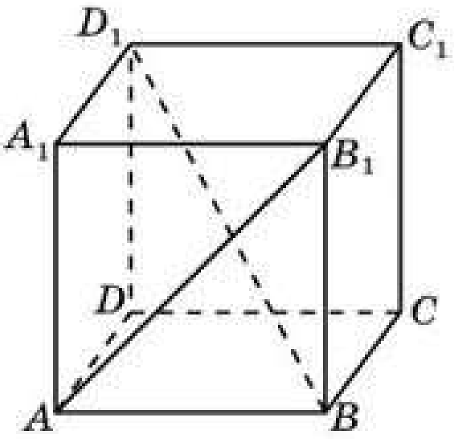


Рис. 16.4

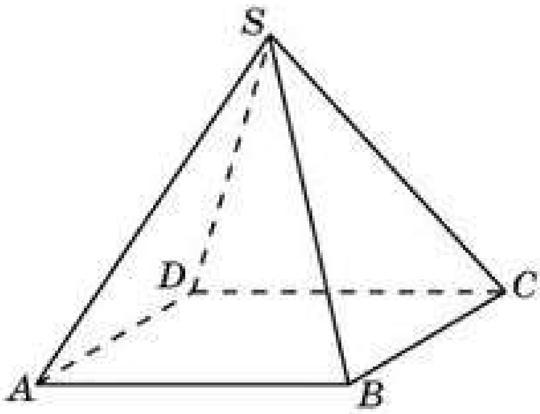


Рис. 16.5

16.3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1 (рис. 16.5). Найдите угол между прямой SA и плоскостью ABC.

16.4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1 (рис. 16.6). Найдите угол между: а) прямой AB_1 и плоскостью ABC; б) прямой AB и плоскостью BCC_1.

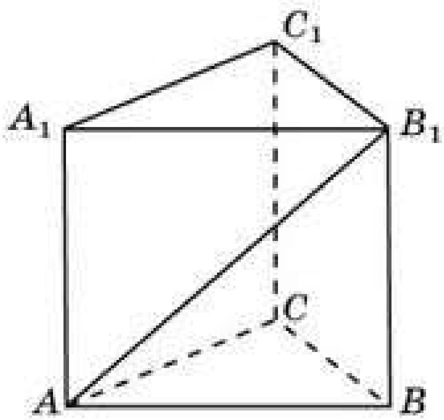


Рис. 16.6

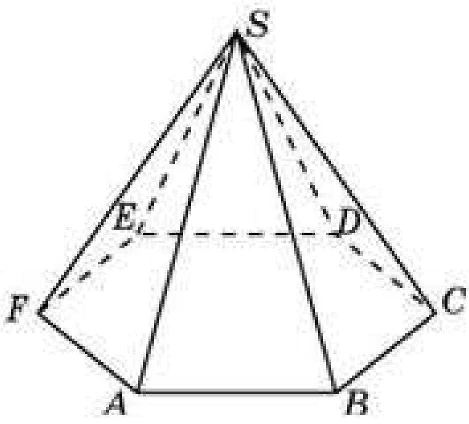


Рис. 16.7

16.5. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2 (рис. 16.7). Найдите угол между прямой SA и плоскостью ABC.

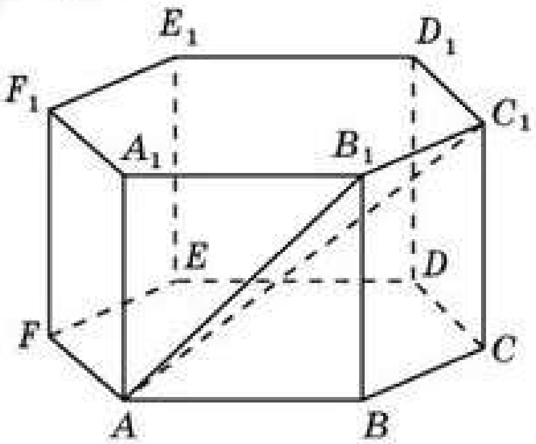


Рис. 16.8

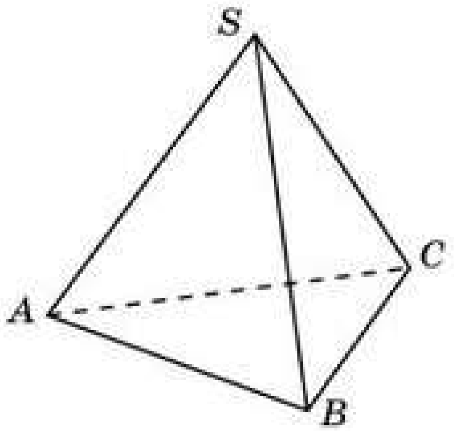


Рис. 16.9

16.6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1 (рис. 16.8). Найдите угол между: а) прямой AB_1 и плоскостью ABC; б) прямой AC_1 и плоскостью ABC; в) прямой AA_1 и плоскостью ACD_1.

B

16.7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1 (рис. 16.5). Найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SBC.

16.8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой CC_1 и плоскостью AB_1D_1.

16.9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1. Найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью BCC_1.

16.10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью: а) BCC_1; б) CDD_1.

16.11. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ все ребра равны 1 (рис. 16.9). Найдите косинус угла между прямой SA и плоскостью ABC.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

16.12. Попробуйте определить понятие угла между двумя пересекающимися плоскостями.

§ 17. Двугранный угол. Угол между плоскостями

Определим понятие двугранного угла, являющегося пространственным аналогом угла на плоскости.

Двугранным углом называется фигура в пространстве, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой и одной из частей пространства, ограниченной этими полуплоскостями (рис. 17.1).

Полуплоскости называются *гранями* двугранного угла, а их общая граничная прямая — *ребром* двугранного угла.

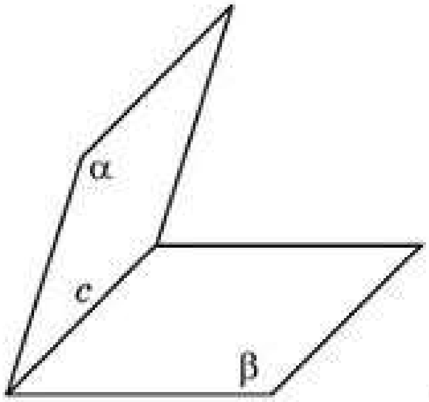


Рис. 17.1

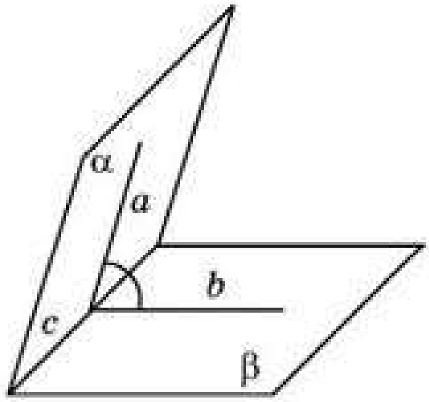


Рис. 17.2

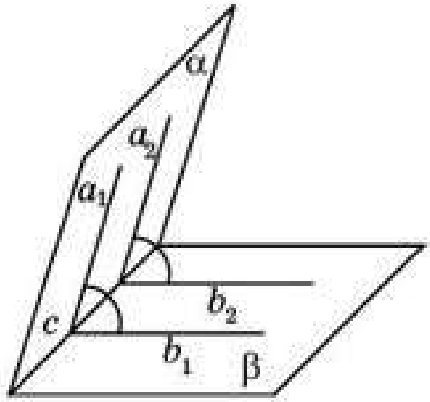


Рис. 17.3

Пусть a и b — полуплоскости с общей граничной прямой c (рис. 17.2). Рассмотрим плоскость g перпендикулярную прямой c, и обозначим линии ее пересечения с полуплоскостями a и b через a и b соответственно. Угол между этими лучами называется *линейным углом* данного двугранного угла.

Докажем, что величина линейного угла не зависит от выбора плоскости g

Действительно, пусть g_1, g_2 — плоскости, перпендикулярные прямой c и пересекающие полуплоскости a и b по лучам a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно (рис. 17.3). Лучи a_1 и a_2 сонаправлены, так как они лежат в одной полуплоскости и перпендикулярны одной и той же прямой c. Аналогично, лучи b_1 и b_2 тоже сонаправлены. Следовательно, углы, образованные этими лучами, равны.

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла (рис. 17.2).

Величина двугранного угла принадлежит промежутку (0°; 180°].

Двугранный угол называют *прямым*, *острым* или *тупым* в зависимости от того, будет ли линейный угол этого двугранного угла прямым, острым или тупым.

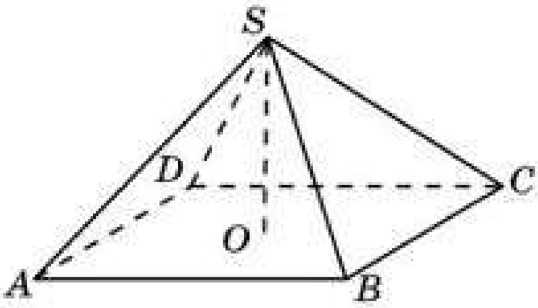


Рис. 17.4

Пример 1. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равны 2, высота SO равна 1 (рис. 17.4). Найдите двугранный угол, образованный боковой гранью и основанием этой пирамиды.

Решение. Проведем высоту SE треугольника SBC (рис. 17.5). Угол SEO будет линейным углом искомого двугранного угла. В прямоугольном треугольнике SEO катеты SO и EO равны 1. Следовательно, угол SEO равен 45°. Значит, искомый двугранный угол равен 45°.

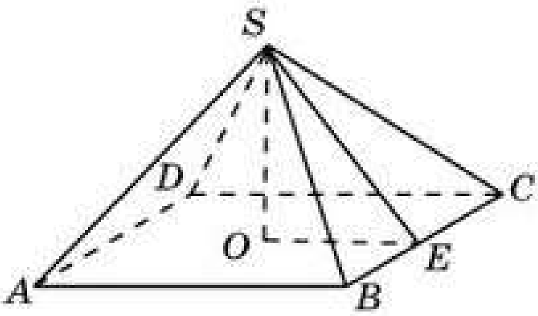


Рис. 17.5

Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных соответствующими полуплоскостями этих плоскостей (рис. 17.6).

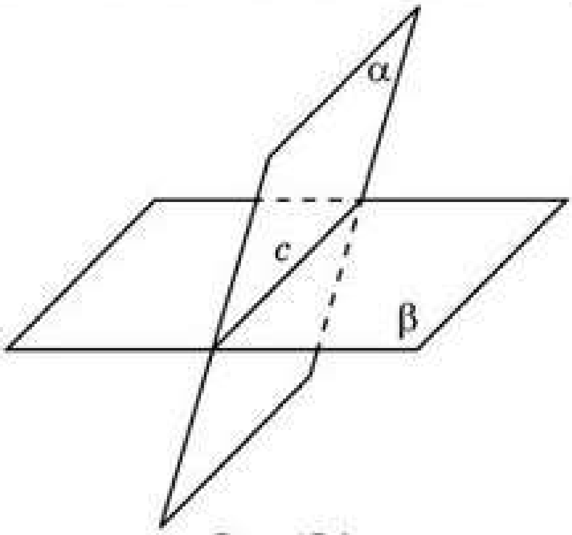


Рис. 17.6

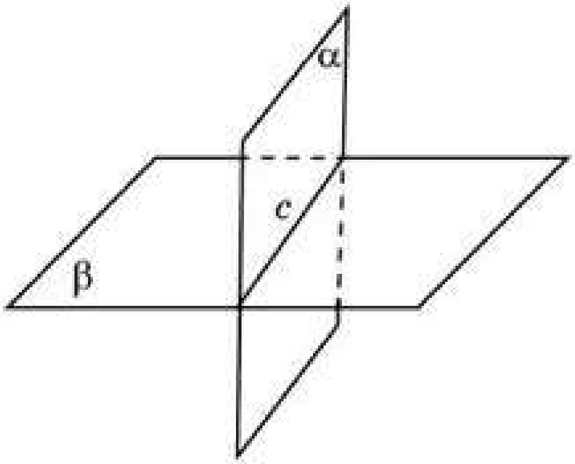


Рис. 17.7

Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными* , если они образуют прямой угол (рис. 17.7).

Следующая теорема дает достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей.

Теорема (признак перпендикулярности двух плоскостей). ***Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.***

Доказательство. Пусть плоскость a проходит через прямую a, перпендикулярную плоскости b, c — линия пересечения плоскостей a и b (рис. 17.8).

Докажем, что плоскости a и b перпендикулярны. В плоскости b через точку пересечения прямой a с плоскостью b проведем прямую b, перпендикулярную прямой c. Поскольку прямая a перпендикулярна плоскости b, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости, значит, угол, образованный a и b, — прямой. Он является линейным углом соответствующего двугранного угла. Следовательно, плоскости a и b перпендикулярны.

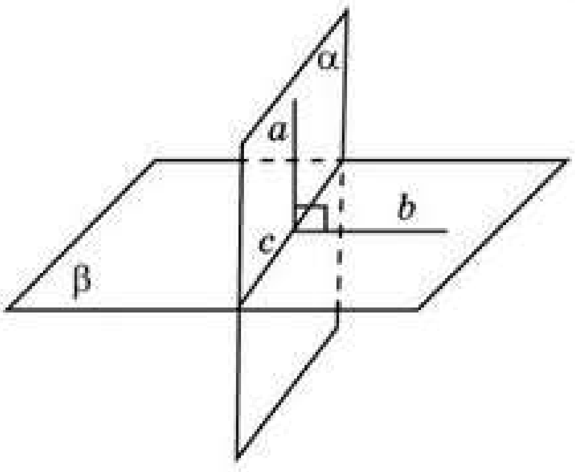


Рис. 17.8

Пример 2. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.9) перпендикулярны плоскости ABC_1 и ACB_1.

Решение. Плоскость ACB_1 содержит прямую CB_1, перпендикулярную прямым BC_1 и AB плоскости ABC_1. Следовательно, плоскости ABC_1 и ACB_1 перпендикулярны.

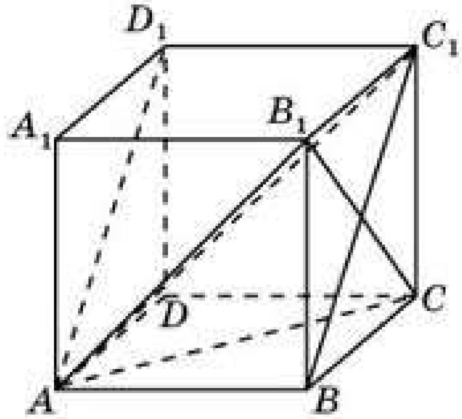


Рис. 17.9

Рис. 17.10

Признак перпендикулярности плоскостей имеет простой практический смысл. Например, плоскость двери, навешенной на перпендикулярный полу косяк, перпендикулярна плоскости пола при всех положениях двери (рис. 17.10). Рабочий, поднимающий ломом или другим рычагом какую-нибудь плиту и ставящий ее вертикально, поднимает рычаг до тех пор, пока он не встанет перпендикулярно полу или земле, где лежала плита. Щит, установленный перпендикулярно горизонтальной прямой, стоит перпендикулярно горизонтальной поверхности.

Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, можно провести через точку: а) принадлежащую этой плоскости; б) не принадлежащую этой плоскости?

Вопросы

1. Что называется *двугранным углом* ?
2. Что называется: а) *гранями двугранного угла* ; б) *ребром двугранного угла* ?
3. Что называется *линейным углом двугранного угла* ?
4. Что называется *величиной двугранного угла* ?
5. Какой двугранный угол называется *прямым* ?
6. Что называется *углом между двумя пересекающимися плоскостями* ?
7. Какие две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными* ?
8. Сформулируйте признак перпендикулярности двух плоскостей.

Задачи

A

17.1. Найдите двугранные углы, образованные соседними гранями куба (рис. 17.11).

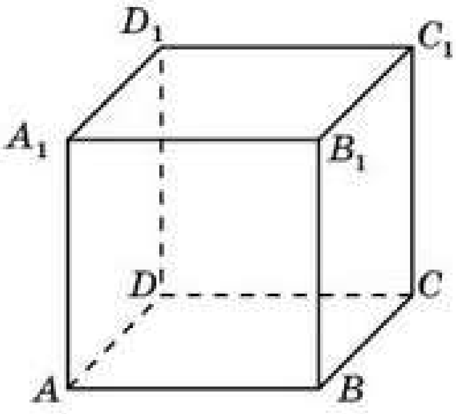


Рис. 17.11

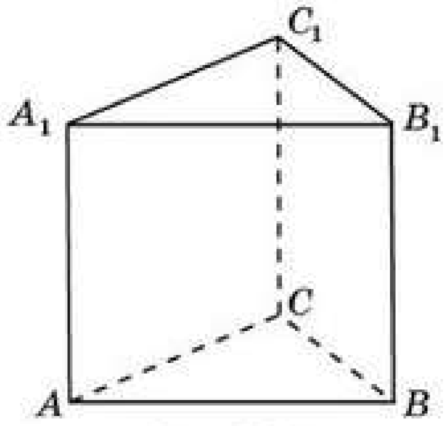


Рис. 17.12

17.2. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярны плоскости: а) ABC и BDD_1; б) ACC_1 и BDD_1.

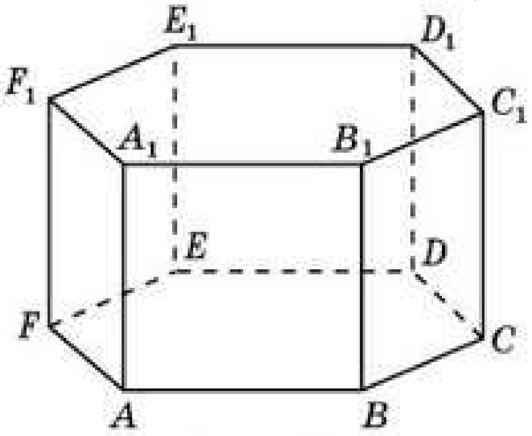


Рис. 17.13

17.3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и CDA_1.

17.4. Найдите двугранные углы, образованные соседними боковыми гранями правильной треугольной призмы (рис. 17.12).

17.5. Найдите двугранные углы, образованные соседними боковыми гранями правильной шестиугольной призмы (рис. 17.13).

B

17.6. Верно ли, что две плоск ости, перпендикулярные третьей, параллельны?

17.7. Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, можно провести через данную точку?

17.8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями: а) ABC и AB_1D_1; б) ABC и ACB_1.

17.9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями ACB_1 и ACD_1.

17.10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол между плоскостями: а) ABB_1 и CDD_1; б) ACC_1 и CDD_1; в) ACC_1 и DEE_1; г) ACC_1 и CEE_1; д) ABC и BDE_1; е) CDF_1 и AFD_1.

17.11. Докажите, что в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ перпендикулярны плоскости: а) ABC и ABB_1; б) ABC и ACC_1; в) ABC и ADD_1; г) ACC_1 и BEE_1; д) ADD_1 и BFF_1.

17.12. У правильной четырехугольной пирамиды все ребра равны (рис. 17.14). Найдите тангенс двугранного угла, образованного боковой гранью и основанием пирамиды.

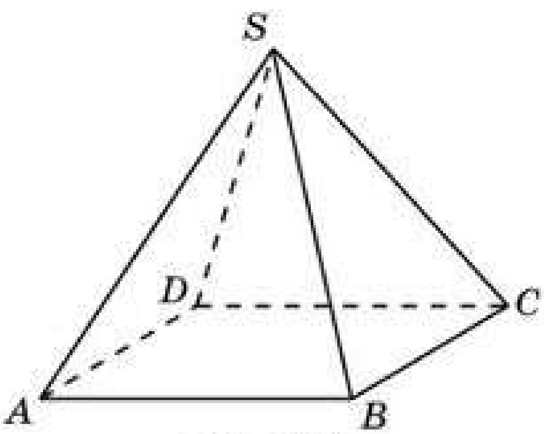


Рис. 17.14

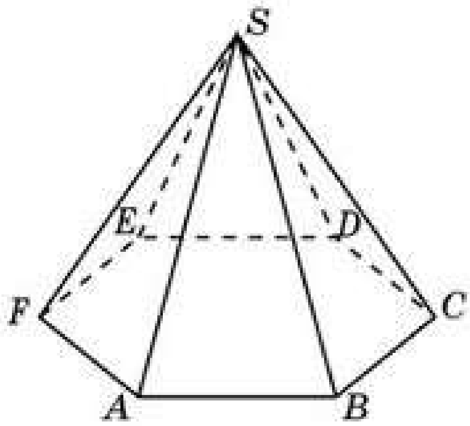


Рис. 17.15

17.13. У правильной шестиугольной пирамиды стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2 (рис. 17.15). Найдите тангенс двугранного угла, образованного боковой гранью и основанием пирамиды.

17.14. Пирамида Хеопса имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 230 м, а высота около 138 м (рис. 17.16). Найдите тангенс двугранного угла, образованного боковой гранью и основанием этой пирамиды. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите приближенное значение этого угла.

Рис. 17.16

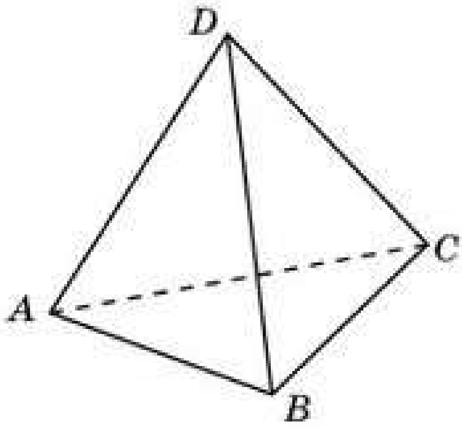


Рис. 17.17

17.15. Найдите косинус двугранного угла, образованного соседними гранями правильного тетраэдра (рис. 17.17).

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и CB_1:

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

2. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между прямыми AA_1 и DB_1:

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Найдите угол между скрещивающимися ребрами правильной треугольной пирамиды:

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

4. Найдите угол между скрещивающимися ребрами правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1:

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

5. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ найдите угол между прямыми BC и C_1D_1:

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 120°.

6. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между прямой BD_1 и плоскостью BCC_1:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

7. Найдите угол наклона отрезка к плоскости, если его ортогональная проекция на эту плоскость в два раза меньше самого отрезка:

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

8. Для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями SAD и SBC:

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

9. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между вершинами A и D_1:

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{5}$.

10. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от вершины B_1 до прямой AC:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

11. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины B до прямой E_1F_1:

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

12. Из точки, не принадлежащей плоскости, опущен на нее перпендикуляр и проведена наклонная. Найдите проекцию наклонной, если перпендикуляр равен 12 см, а наклонная 15 см:

A. 3 см. B. 9 см. C. 27 см. D. 81 см.

13. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми CC_1 и DB_1:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

14. Для единичного тетраэдра $ABCD$ найдите расстояние между прямыми AD и BC:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от вершины B до плоскости ACB_1:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Глава II ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 18. Векторы в пространстве

Определение вектора в пространстве аналогично определению вектора на плоскости.

Вектором в пространстве называется направленный отрезок, т. е. такой отрезок, в котором указаны начало и конец.

Рассматривается также *нулевой вектор*, у которого начало совпадает с концом.

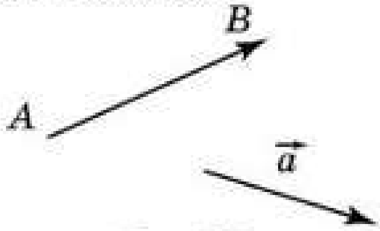


Рис. 18.1

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overline{AB}$ и изображается стрелкой (рис. 18.1). Будем также обозначать векторы строчными латинскими буквами со стрелками над ними. Например, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и т. д. Нулевой вектор обозначается $\vec{0}$.

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Два вектора в пространстве называются *одинаково* (*противоположно*) *направленными*, если они лежат в одной плоскости и в этой плоскости одинаково (противоположно) направлены.

Докажите, что два ненулевых вектора в пространстве коллинеарны, если при откладывании их от одной точки они располагаются на одной прямой.

Коллинеарные векторы могут быть одинаково или противоположно направленными.

Длиной, или *модулем*, вектора называется длина соответствующего отрезка. Она обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

Длина нулевого вектора считается равной нулю.

Два вектора называются *равными*, если они имеют одинаковое направление и равные длины.

Все нулевые векторы считаются равными между собой.

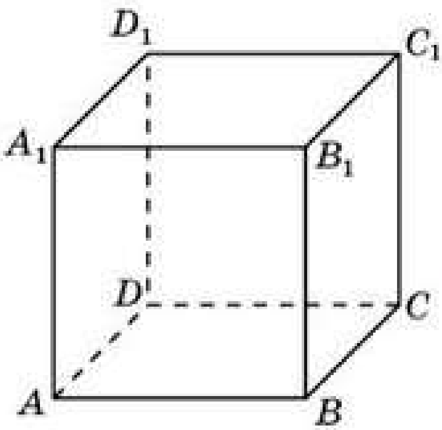


Рис. 18.2

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 18.2) укажите векторы с началом и концом в вершинах куба, равные вектору $\overline{AA_1}$.

Так же, как и на плоскости, для векторов в пространстве определяются операции сложения векторов и умножения вектора на число.

Для того чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$ (рис. 18.3).

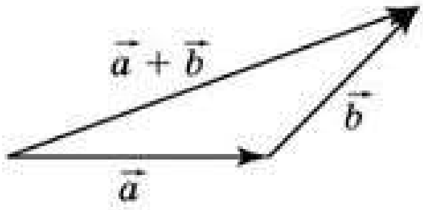


Рис. 18.3

Вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, называется *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначается $\vec{a}+\vec{b}$.

Для операции сложения векторов справедливы следующие свойства, аналогичные свойствам сложения чисел.

Свойство 1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*переместительный закон*).

Свойство 2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (*сочетательный закон*).

Доказательство этих свойств аналогично тому, как это делалось для плоскости.

Пример. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 18.4) найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}$.

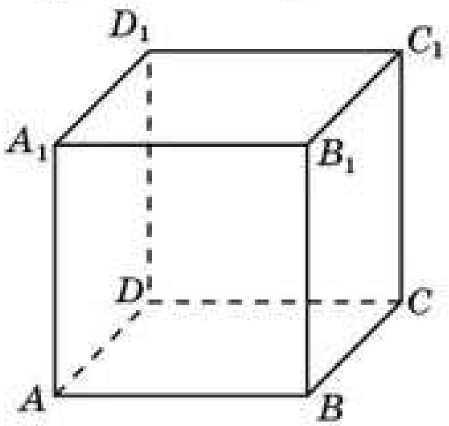


Рис. 18.4

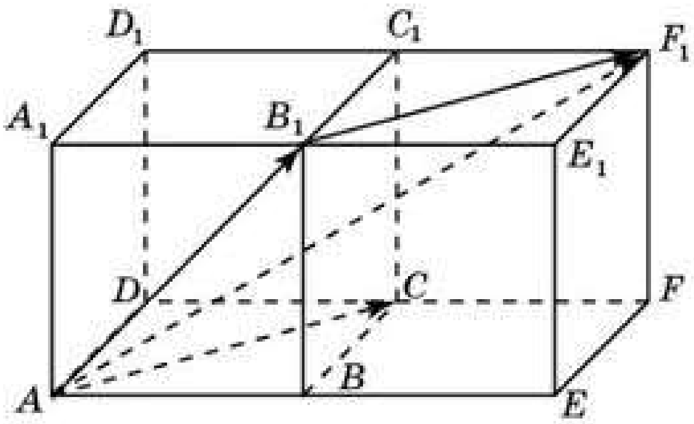


Рис. 18.5

Решение. Достроим куб до прямоугольного параллелепипеда $AEFDA_1E_1F_1D_1$, добавив к нему единичный куб $BEFCB_1E_1F_1C_1$ (рис. 18.5). Сумма $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}$ равна вектору $\overrightarrow{AF_1}$. Его длина равна $\sqrt{6}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число t называется вектор, длина которого равна $|t|\cdot|\vec{a}|$, а направление остается прежним, если $t>0$, и меняется на противоположное, если $t<0$. Произведением вектора на нуль считается нулевой вектор.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается $t\vec{a}$. По определению $|t\vec{a}|=|t|\cdot|\vec{a}|$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число -1 называется *вектором, противоположным* вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$.

По определению вектор $-\vec{a}$ имеет направление, противоположное вектору $\vec{a}$ и $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$.

Ясно, что два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны в том и только том случае, если $\vec{b}=t\vec{a}$ для некоторого отличного от нуля числа t.

Для умножения вектора на число справедливы свойства, аналогичные свойствам умножения чисел.

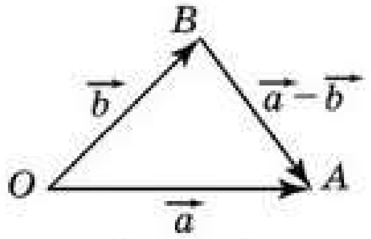


Рис. 18.6

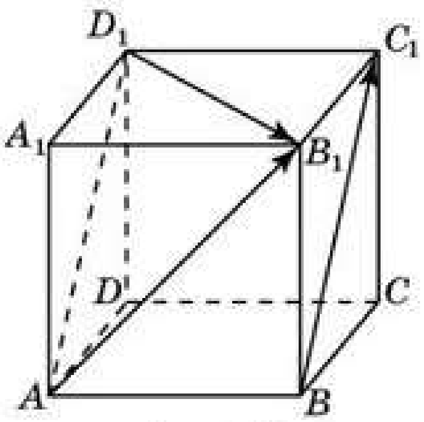


Рис. 18.7

Свойство 1. $(ts)\vec{a} = t(s\vec{a})$ (*сочетательный закон*).

Свойство 2. $(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$ (*первый распределительный закон*).

Свойство 3. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$ (*второй распределительный закон*).

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + (-\vec{b})$. Обозначается $\vec{a} - \vec{b}$.

Для того чтобы найти разность $\vec{a} - \vec{b}$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ откладывают так, чтобы их начала совпадали (рис. 18.6).

Вектор, у которого начало совпадает с концом вектора $\vec{b}$, а конец — с концом вектора $\vec{a}$, будет искомой разностью векторов.

Пример 3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 18.7) найдите длину вектора $\overline{AB_1} - \overline{BC_1}$.

Решение. $\overline{AB_1} - \overline{BC_1} = \overline{AB_1} - \overline{AD_1} = \overline{D_1B_1}$. Длина $\overline{D_1B_1}$ равна $\sqrt{2}$.

Вопросы

1. Что называется *вектором*?
2. Какой вектор называется *нулевым*?
3. Какие два вектора называются *коллинеарными*?
4. Что называется *длиной* (*модулем*) *вектора*?
5. Какие два вектора называются *равными*?
6. Как определяется операция сложения векторов?
7. Сформулируйте переместительный закон сложения векторов.
8. Сформулируйте сочетательный закон сложения векторов.
9. Как определяется произведение вектора на число?
10. Как обозначается произведение вектора на число?
11. Какой вектор называется *противоположным* данному вектору? Как он обозначается?
12. Что называется *разностью двух векторов*? Как она обозначается?
13. Сформулируйте сочетательный закон умножения вектора на число.
14. Сформулируйте первый распределительный закон умножения вектора на число.
15. Сформулируйте второй распределительный закон умножения вектора на число.

Задачи

А

18.1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 18.4) укажите векторы с началом и концом в вершинах куба, равные вектору $\overline{AB}$.

18.2. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 18.8) укажите векторы с началом и концом в вершинах призмы, равные вектору $\overline{AA_1}$.

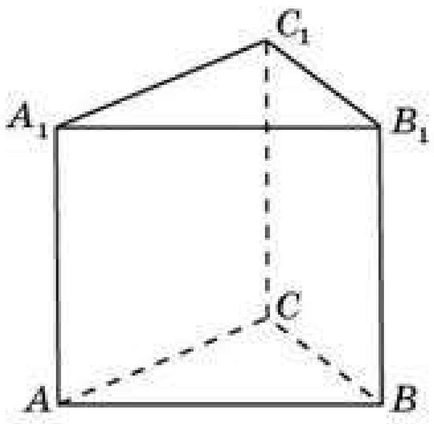


Рис. 18.8

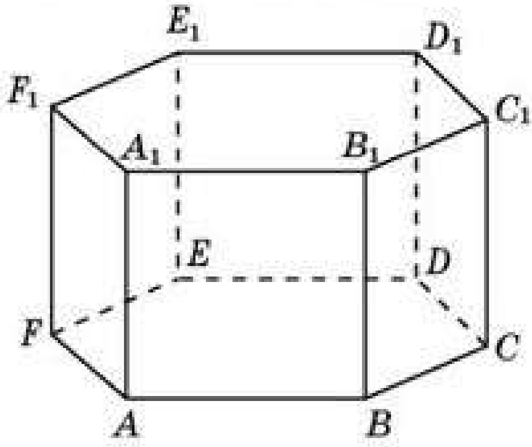


Рис. 18.9

18.3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 18.9) укажите векторы с началом и концом в вершинах призмы, равные вектору: а) $\overline{AB}$; б) $\overline{AC}$; в) $\overline{AD}$; г) $\overline{AB_1}$; д) $\overline{AC_1}$.

18.4. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите длину вектора: а) $\overline{AB}$; б) $\overline{AB_1}$; в) $\overline{AC_1}$.

18.5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1 (рис. 18.9). Найдите длину вектора: а) $\overline{AB}$; б) $\overline{AC}$; в) $\overline{AD}$; г) $\overline{AB_1}$; д) $\overline{AC_1}$; е) $\overline{AD_1}$.

18.6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите векторы с началом и концом в вершинах куба, равные вектору: а) $\overline{AB} + \overline{CC_1}$; б) $\overline{AB} + \overline{AD}$; в) $\overline{AB} + \overline{AD_1}$; г) $\overline{AB} + \overline{CD_1}$; д) $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$.

B

18.7. Сколько различных векторов задают ребра: а) куба; б) треугольной призмы; в) правильной четырехугольной пирамиды (рис. 18.10)?

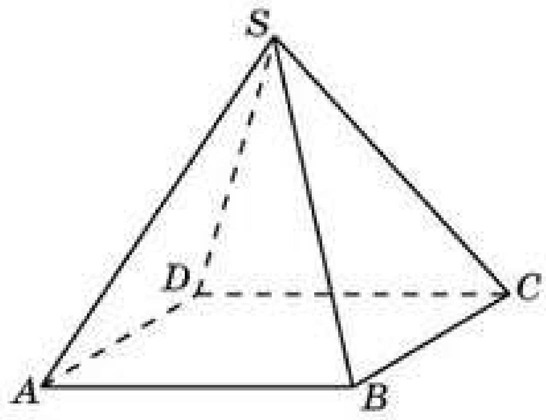


Рис. 18.10

18.8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите векторы с началом и концом в вершинах призмы, равные вектору: а) $\overline{AB} + \overline{FE}$; б) $\overline{AB} + \overline{DC}$; в) $\overline{AC} + \overline{DD_1}$; г) $\overline{AB} + \overline{CE_1}$.

18.9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1 (рис. 18.8). Найдите длину вектора $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AA_1}$.

18.10. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите длину вектора: а) $\overline{AB} + \overline{AD}$; б) $\overline{AB} + \overline{AD_1}$; в) $\overline{AB} + \overline{CC_1}$; г) $\overline{AB} + \overline{CD_1}$; д) $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$.

18.11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите длину вектора: а) $\overline{AB} + \overline{FE}$; б) $\overline{AB} + \overline{DC}$; в) $\overline{AC} + \overline{DD_1}$; г) $\overline{AB} + \overline{CE_1}$.

18.12. В каком случае длина суммы векторов равна сумме длин слагаемых?

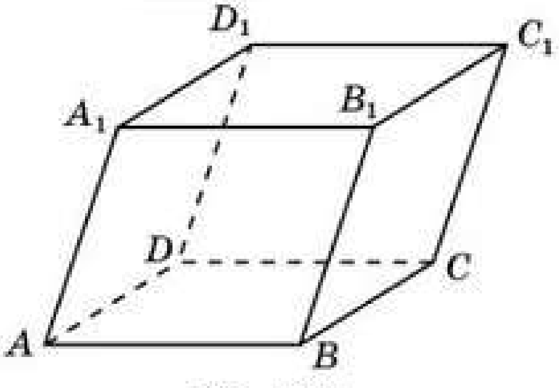


Рис. 18.11

18.13. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 18.11) укажите вектор: а) $\overline{AB} - \overline{AA_1}$; б) $\overline{AC} - \overline{DD_1}$; в) $\overline{AB_1} - \overline{BC_1}$; г) $2\overline{AB} + \overline{BD_1}$.

18.14. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите длину вектора: а) $\overline{AB} - \overline{AA_1}$; б) $\overline{AC} - \overline{DD_1}$; в) $\overline{AB_1} - \overline{BC_1}$; г) $2\overline{AB} + \overline{BD_1}$.

§ 19. Компланарные векторы

Три вектора в пространстве называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Например, для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{B_1C_1}$ компланарны.

Докажите, что три ненулевых вектора в пространстве компланарны, если при откладывании их от одной точки они располагаются в одной плоскости.

В курсе планиметрии доказывалось, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости не коллинеарны, то любой вектор $\vec{c}$ этой плоскости можно представить единственным образом в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y — некоторые действительные числа.

В пространстве имеет место аналогичная теорема о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

Теорема. *Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны, то любой вектор $\vec{d}$ можно представить единственным образом в виде $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, где x, y, z — некоторые действительные числа.*

Доказательство. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ от точки O и обозначим их концы соответственно A, B, C и D. Через точку D проведем прямую, параллельную прямой OC, и обозначим через E ее точку пересечения с плоскостью AOB (рис. 19.1).

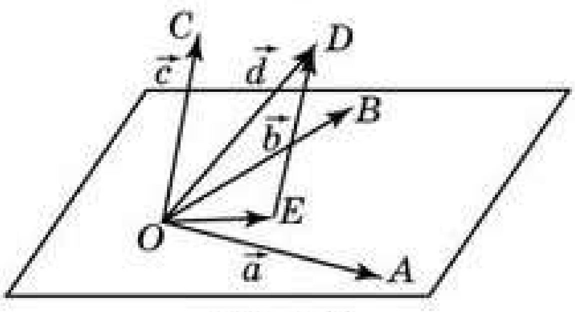


Рис. 19.1

Если точка D принадлежит прямой OC, то в качестве точки E возьмем точку O. Векторы $\overline{OE}$, $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ компланарны. Следовательно, существуют числа x и y, для которых выполняется равенство $\overrightarrow{OE} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$. Векторы $\overrightarrow{ED}$ и $\overrightarrow{OC}$ коллинеарны. Следовательно, существует число z, для которого выполняется равенство $\overrightarrow{ED} = z\overrightarrow{OC}$. Так как $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED}$, то выполняется равенство $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, т. е. $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Докажем, что такое представление единственно. Если бы, помимо полученного равенства, выполнялось равенство $\vec{d} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}$, в котором x' отлично от x, или y' отлично от y, то выполнялось бы равенство $\vec{0} = (x'-x)\vec{a} + (y'-y)\vec{b} + (z'-z)\vec{c}$, в котором одно из чисел $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ отлично от нуля. Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ были бы компланарны, что противоречит условию. ☐

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выразите вектор $\overrightarrow{BD_1}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ (рис. 19.2).

Вопросы

1. Какие два вектора в пространстве называются *коллинеарными* ?
2. Какие три вектора в пространстве называются *компланарными* ?
3. Сформулируйте теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

Задачи

А

19.1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 19.2) укажите векторы с началом и концом в вершинах куба, коллинеарные вектору $\overrightarrow{AB}$.

19.2. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 19.3) укажите векторы с началом и концом в вершинах призмы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{AA_1}$.

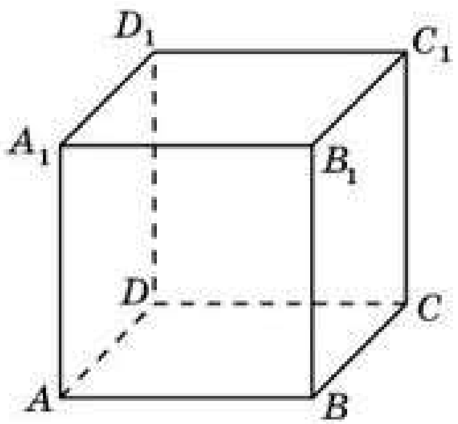


Рис. 19.2

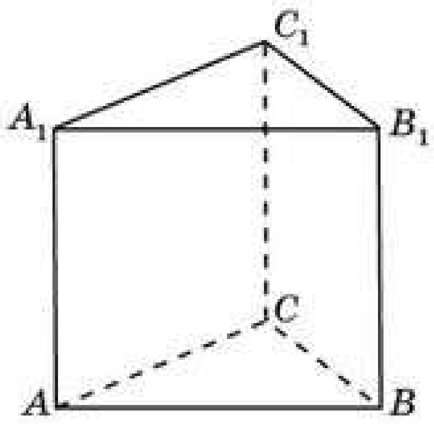


Рис. 19.3

19.3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 19.4) укажите векторы с началом и концом в вершинах призмы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{AB_1}$.

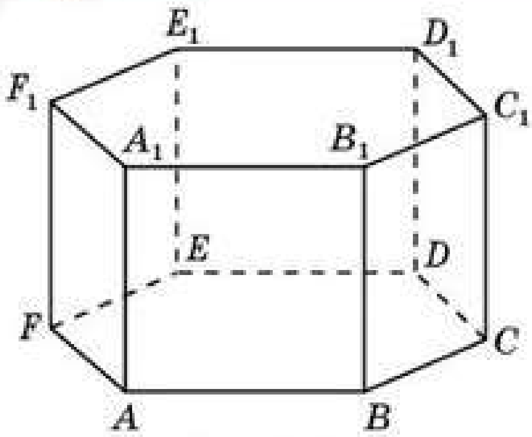


Рис. 19.4

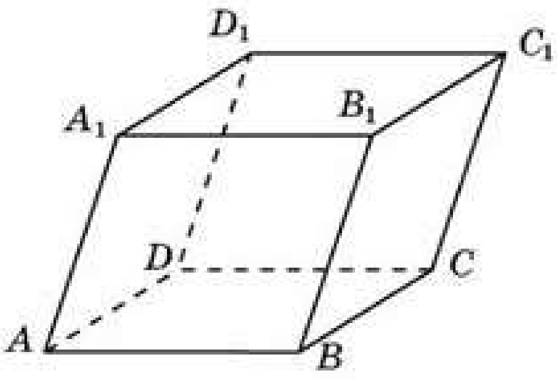


Рис. 19.5

19.4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$?

19.5. Коллинеарны ли векторы $\overline{AD_1}$ и $\overline{BC_1}$ в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 19.4)?

B

19.6. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 19.5) укажите какие-нибудь тройки: а) компланарных векторов; б) некомпланарных векторов.

19.7. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 19.3) укажите какие-нибудь тройки: а) компланарных векторов; б) некомпланарных векторов.

19.8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 19.2) выразите через векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AA_1}$ вектор: а) $\overline{AC_1}$; б) $\overline{BD_1}$.

19.9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 19.4) выразите через векторы $\overline{AB}$, $\overline{AF}$ и $\overline{AA_1}$ вектор: а) $\overline{AD_1}$; б) $\overline{AC_1}$.

19.10. Векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

19.11. Повторите определение угла между векторами на плоскости.

19.12. По аналогии с определением угла между векторами на плоскости определите понятие угла между векторами в пространстве.

§ 20. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

Угол между векторами в пространстве определяется аналогично тому, как это делалось для векторов на плоскости.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два ненулевых вектора. Отложим их от точки O так, что $\overline{OA}=\vec{a}$, $\overline{OB}=\vec{b}$ (рис. 20.1). Угол, образованный лучами OA и OB, называется *углом между векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Угол между двумя одинаково направленными векторами считается равным $0°$.

Два вектора называются *перпендикулярными*, если угол между ними прямой.

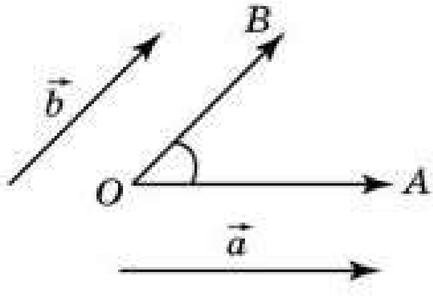


Рис. 20.1

Пример 1. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 20.2) найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$.

Решение. Угол между векторами $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$ равен углу между векторами $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BA_1}$, значит, равен 90°.

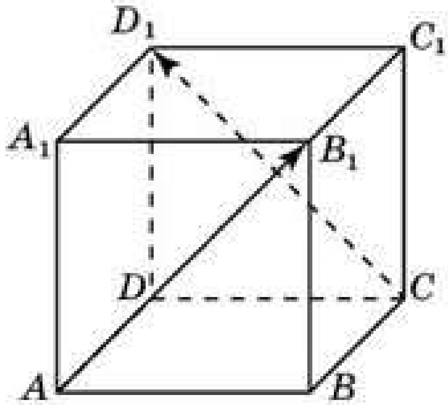


Рис. 20.2

Скалярное произведение векторов в пространстве определяется аналогично тому, как это делалось для плоскости.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$. По определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos j,$$

где j — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется *скалярным квадратом* и обозначается $\vec{a}^2$. Из формулы скалярного произведения следует равенство $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Ясно, что скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда угол между ними равен 90°, поскольку именно в этом случае косинус угла между этими векторами равен нулю.

Выразите скалярное произведение двух противоположно направленных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через их длины.

Скалярное произведение векторов имеет простой физический смысл и связывает работу A, производимую постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении тела на вектор $\vec{a}$, составляющий с направлением силы $\vec{F}$ угол j, а именно, имеет место следующая формула

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos j,$$

означающая, что работа является скалярным произведением силы на перемещение.

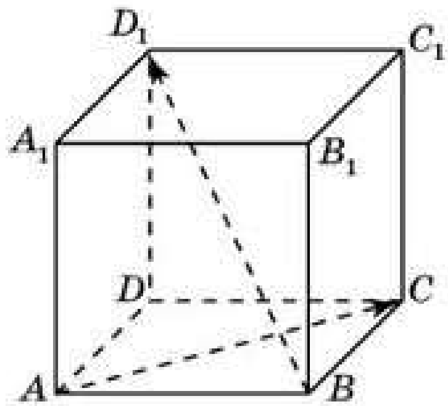


Рис. 20.3

Пример 2. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 20.3) найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD_1}$.

Решение. Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD_1}$ перпендикулярны. Следовательно, их скалярное произведение равно нулю.

Вопросы

1. Что называется *углом между векторами* ?
2. Какие два вектора называются *перпендикулярными* ?
3. Что называется *скалярным произведением двух векторов* ?
4. Как обозначается *скалярное произведение* ?
5. Что называется *скалярным квадратом* ?
6. В каком случае скалярное произведение двух векторов равно нулю?
7. Какой физический смысл имеет скалярное произведение?

Задачи

А

20.1. Какой знак имеет скалярное произведение векторов, если угол между ними: а) острый; б) тупой?

20.2. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 20.4) найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$.

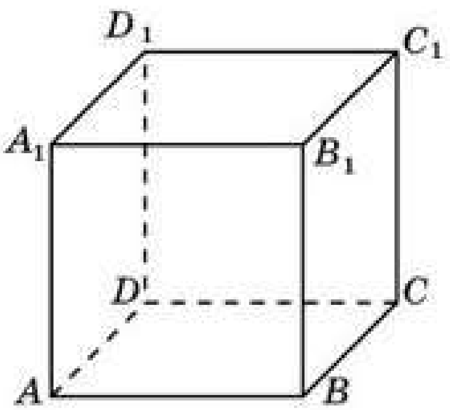


Рис. 20.4

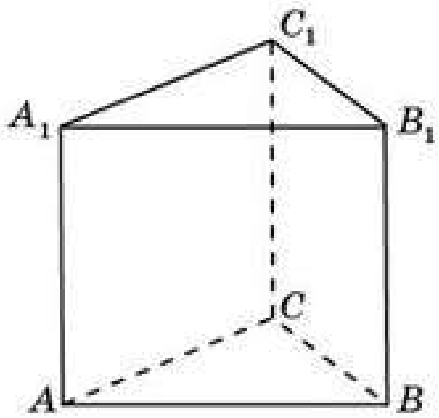


Рис. 20.5

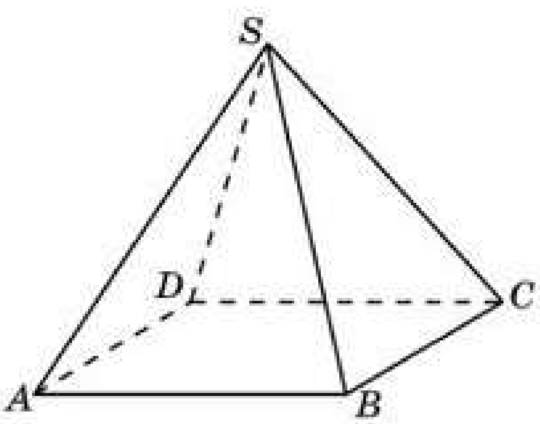


Рис. 20.6

20.3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 20.5) найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$.

20.4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1 (рис. 20.6). Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{SC}$; б) $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SD}$.

20.5. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2 (рис. 20.7). Найдите угол между векторами: а) $\overline{SA}$ и $\overline{SD}$; б) $\overline{SA}$ и $\overline{BC}$.

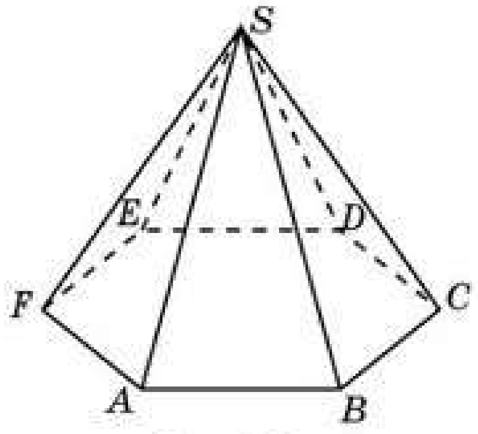


Рис. 20.7

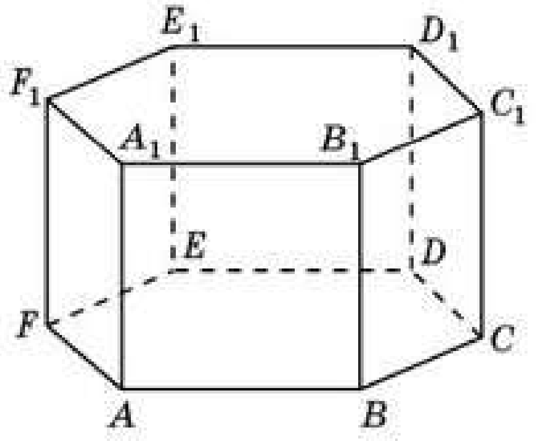


Рис. 20.8

20.6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1 (рис. 20.8). Найдите угол между векторами: а) $\overline{AA_1}$ и $\overline{BC_1}$; б) $\overline{AA_1}$ и $\overline{DE_1}$; в) $\overline{AB}$ и $\overline{B_1C_1}$; г) $\overline{AB}$ и $\overline{C_1D_1}$; д) $\overline{AC}$ и $\overline{B_1C_1}$; е) $\overline{AC}$ и $\overline{B_1D_1}$; ж) $\overline{AC}$ и $\overline{B_1E_1}$.

B

20.7. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 20.4) найдите скалярное произведение векторов: а) $\overline{AC}$ и $\overline{B_1D_1}$; б) $\overline{AB}$ и $\overline{B_1C_1}$; в) $\overline{AB_1}$ и $\overline{BC_1}$.

20.8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1 (рис. 20.5). Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overline{AB}$ и $\overline{CC_1}$; б) $\overline{AB}$ и $\overline{B_1C_1}$.

20.9. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1 (рис. 20.6). Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overline{AB}$ и $\overline{SC}$; б) $\overline{SB}$ и $\overline{SD}$.

20.10. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2 (рис. 20.7). Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overline{SA}$ и $\overline{SD}$; б) $\overline{SA}$ и $\overline{BC}$.

20.11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1 (рис. 20.8). Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overline{AA_1}$ и $\overline{BC_1}$; б) $\overline{AA_1}$ и $\overline{DE_1}$; в) $\overline{AB}$ и $\overline{B_1C_1}$; г) $\overline{AB}$ и $\overline{C_1D_1}$; д) $\overline{AC}$ и $\overline{B_1C_1}$; е) $\overline{AC}$ и $\overline{B_1D_1}$; ж) $\overline{AC}$ и $\overline{B_1E_1}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

20.12. Повторите понятие прямоугольной системы координат на плоскости.

§ 21. Прямоугольная система координат в пространстве

В курсе планиметрии мы познакомились с прямоугольной системой координат на плоскости. Напомним, что *координатной прямой* называется такая прямая, на которой выбраны точка O, называемая *началом координат*, и единичный вектор $\overline{OE}$, указывающий положительное направление координатной прямой.

Прямоугольной системой координат на плоскости называется пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy и называются соответственно *осью абсцисс* и *осью ординат* (рис. 21.1).

Каждой точке на координатной прямой соответствует число, называемое *координатой* этой точки, а каждой точке на плоскости с заданной системой координат соответствует пара чисел $(x; y)$, называемых *координатами точки на плоскости* относительно данной системы координат.

Впервые прямоугольные координаты были введены Р. Декартом. Поэтому прямоугольную систему координат называют также *декартовой системой координат*, а сами координаты — *декартовыми координатами*. Введение прямоугольных координат на плоскости и в пространстве позволило свести многие геометрические задачи к чисто алгебраическим и, наоборот, алгебраические задачи к геометрическим. Метод, основанный на этом сведении, называется *методом координат*.

Прямоугольной системой координат в пространстве называется тройка взаимно перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Общее начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy, Oz и называются соответственно *осью абсцисс*, *осью ординат* и *осью аппликат* (рис. 21.2). Плоскости, проходящие через пары координатных прямых, называются *координатными плоскостями* и обозначаются Oxy, Oxz и Oyz.

Пусть A — произвольная точка пространства, в котором выбрана прямоугольная система координат. Через точку A проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox, и точку ее пересечения с осью Ox обозначим A_x

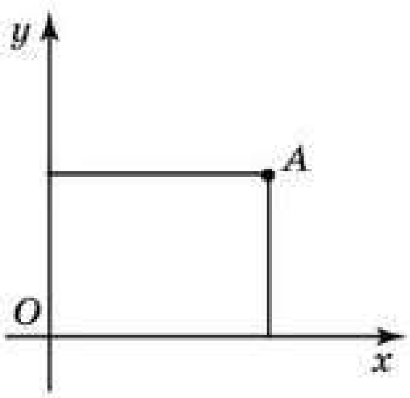


Рис. 21.1

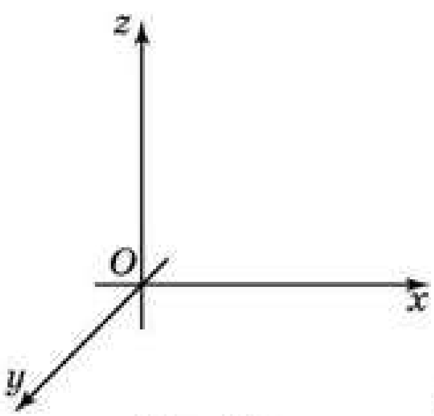


Рис. 21.2

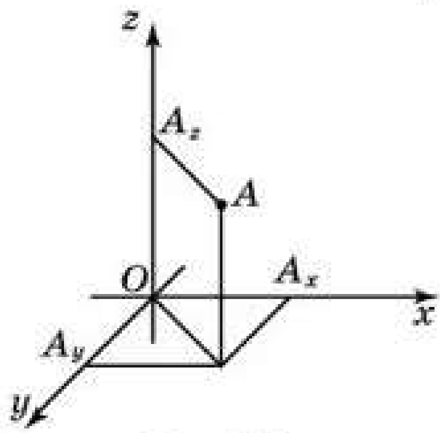


Рис. 21.3

(рис. 21.3). Координата этой точки на оси Ox называется *абсциссой* точки A и обозначается x. Аналогично на осях Oy и Oz определяются точки A_y и A_z, координаты которых называются соответственно *ординатой* и *аппликатой* точки A и обозначаются y и z соответственно. Тройка чисел $(x; y; z)$ называется *координатами точки* A в *пространстве*.

Заметим, что ортогональные проекции точки $A(x; y; z)$ на координатные плоскости Oxy, Oxz, Oyz имеют координаты соответственно $(x; y; 0)$, $(x; 0; z)$, $(0; y; z)$.

В планиметрии доказывалось, что на плоскости середина отрезка с концами $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ имеет координаты $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. В пространстве имеет место аналогичная теорема.

Теорема. ***Середина отрезка с концами*** $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ ***имеет координаты*** $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

Доказательство. Пусть $C(x; y; z)$ середина отрезка A_1A_2. Спроектируем этот отрезок на плоскость Oxy (т. е. проведем из точек A_1, A_2 прямые, перпендикулярные плоскости Oxy) (рис. 21.4). В плоскости Oxy получим соответственно точки $A'_1(x_1; y_1; 0)$, $C'(x; y; 0)$, $A'_2(x_2; y_2; 0)$. Так как ортогональное проектирование сохраняет отношение отрезков, лежащих на одной прямой, то C' — середина отрезка $A'_1A'_2$. Следовательно, она имеет координаты $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; 0\right)$. Аналогичным образом, рассматривая ортогональную проекцию отрезка A_1A_2 на плоскость Oxz (или Oyz), получим $z = \frac{z_1+z_2}{2}$. Таким образом, середина C отрезка A_1A_2 имеет координаты $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$. ☐

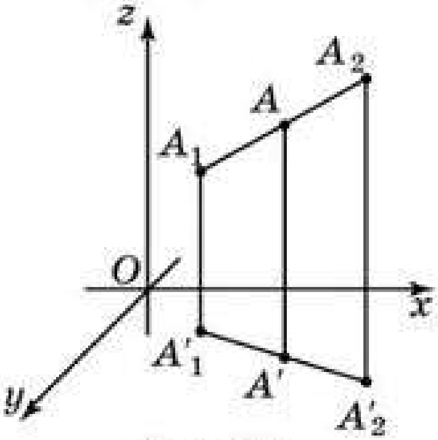


Рис. 21.4

Самостоятельно сделайте рисунок к этой теореме.

Исторические сведения

Рене Декарт (1596—1650) — один из выдающихся ученых XVII в. Поражает широта его интересов. Им получены глубокие результаты в области философии, математики, физики, биологии, медицины и др. Философию Декарт рассматривал как универсальную науку, способную найти объяснение многим явлениям реального мира, вскрыть законы, которые управляют природой и человеческим сознанием. Декарт является основоположником известного философского учения — картезианства (Картезий — латинизированное имя Декарта), в котором он изложил свои взгляды на развитие естественных научных теорий. В частности, он исследовал вопрос о научном объяснении происхождения Солнечной системы и выдвинул свою гипотезу. Биология обязана Декарту учением о живом организме как о сложной машине, действующей по определенным естественным законам. Ему принадлежит первоначальное понятие об условном рефлексе. Наибольшую известность и славу принесла Декарту книга, вышедшая в 1637 г. (когда Декарту был уже 41 год). По обычаям того времени она имела довольно длинное название: "Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложениями этого метода". В этом сочинении Декарт сформулировал "главные правила метода", а именно:

Первое : не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем не признал это несомненно истинным, т. е. старательно избегать поспешности и предубеждения и включать в свои рассуждения только то, что представляется моему уму так ясно и отчетливо, что никоим образом не может дать повод к сомнению.

Второе : делить каждую из рассматриваемых мною трудностей на столько частей, насколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

Третье : руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу.

И последнее : делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.

Декарт подчеркивал, что в основе научной теории должны лежать ясные и простые принципы. Необходимо изучать, описывать, классифицировать явления природы, проводить эксперименты и математические расчеты. Изучая природу, нужно полагаться лишь на свои силы, а не ждать помощи свыше.

"Геометрия" Декарта, являющаяся приложением к "Рассуждению о методе ...", произвела переворот в геометрии того времени. За короткое время "Геометрия" выдержала четыре издания и была настольной книгой каждого математика XVII в. В XVIII — XIX вв. на основе метода координат Декарта возникли многомерная, а затем и бесконечномерная геометрии. Сегодня без метода координат невозможно представить себе ни математику, ни физику.

Вопросы

1. Какая прямая называется *координатной прямой* ?
2. Что называется *прямоугольной системой координат* : а) *на плоскости* ; б) *в пространстве* ?
3. Что называется *осью*: а) *абсцисс* ; б) *ординат* ; в) *аппликат* ?
4. Какие плоскости называются *координатными плоскостями* ?
5. Что называется: а) *абсциссой* ; б) *ординатой* ; в) *аппликатой точки* ?

Задачи

A

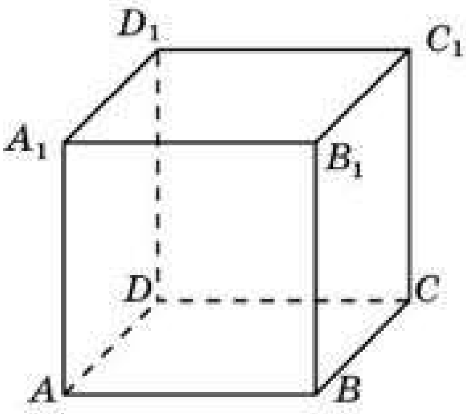


Рис. 21.5

21.1. В прямоугольной системе координат в пространстве изобразите точки с координатами: (1; 2; 3), (2; –1; 1), (–1; 3; 2).

21.2. Найдите координаты ортогональных проекций точек $A(1;\ 3;\ 4)$ и $B(5;\ -6;\ 2)$ на плоскость: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

21.3. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 21.5). Начало координат находится в точке D. Положительные лучи осей координат соответственно DC, DA и DD_1. Найдите координаты всех вершин куба.

21.4. Найдите координаты середины отрезка: а) AB, если $A(1;\ 2;\ 3)$ и $B(-1;\ 0;\ 1)$; б) CD, если $C(3;\ 3;\ 0)$ и $D(3;\ -1;\ 2)$.

B

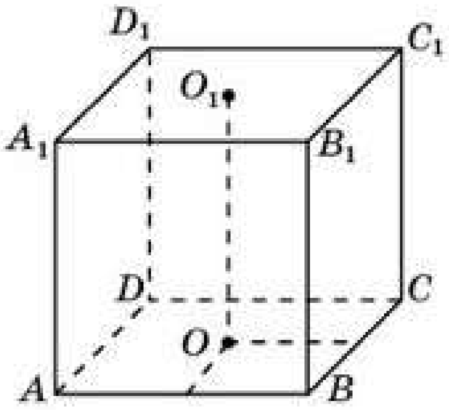


Рис. 21.6

21.5. Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещен в прямоугольную систему координат так, что началом координат является центр грани $ABCD$ (рис. 21.6), ребра куба параллельны соответствующим осям координат, вершина A имеет координаты (–1; 1; 0). Найдите координаты всех остальных вершин куба.

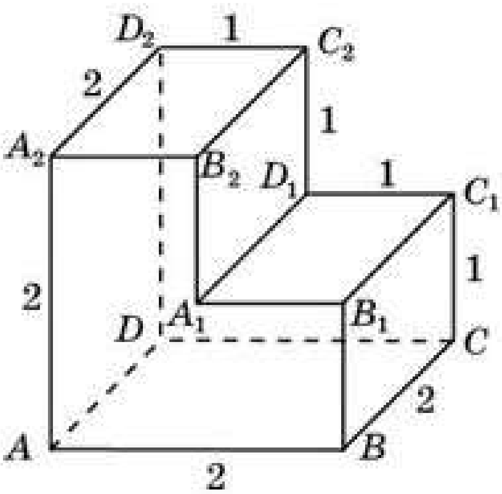


Рис. 21.7

21.6. Гранями многогранника являются многоугольники с прямыми углами (рис. 21.7). Вершина D — начало координат, отрезки DC, DA, DD_2 лежат на осях координат Ox, Oy и Oz соответственно. Найдите координаты вершин этого многогранника.

21.7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точки D и D_1 — середины ребер соответственно AC и A_1C_1

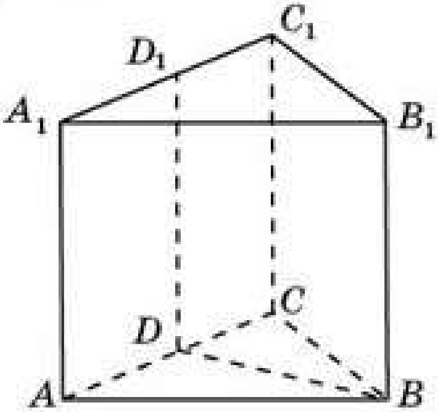


Рис. 21.8

(рис. 21.8). Точка D — начало координат, отрезки DB, DA, DD_1 лежат на осях координат Ox, Oy и Oz соответственно. Найдите координаты вершин этой призмы.

21.8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, вершина E — начало координат, отрезки ED, EA, EE_1 лежат на осях координат Ox, Oy и Oz соответственно (рис. 21.9). Найдите координаты вершин этой призмы.

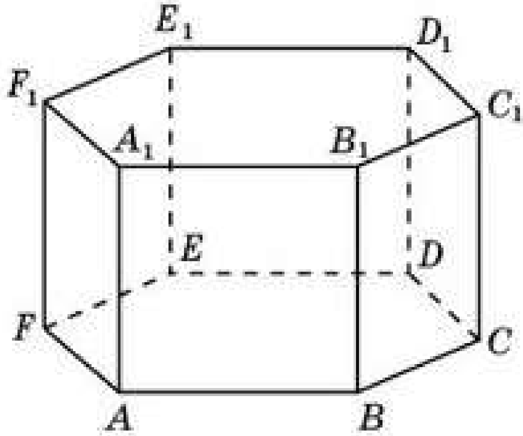


Рис. 21.9

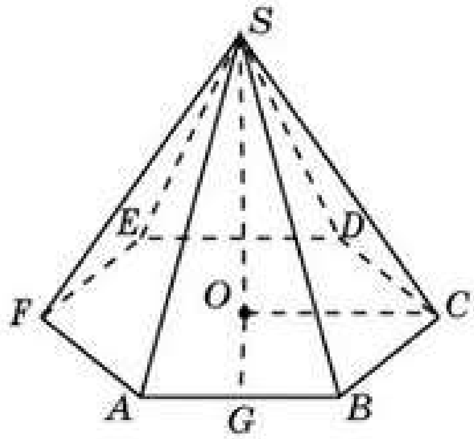


Рис. 21.10

21.9. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, точка O — центр основания, точка G — середина ребра AB, отрезки OC, OG, OS лежат на осях координат Ox, Oy и Oz соответственно (рис. 21.10). Найдите координаты вершины этой пирамиды.

21.10. Что представляет собой геометрическое место точек пространства, для которых: а) первая координата равна нулю; б) вторая координата равна нулю; в) третья координата равна нулю; г) первая и вторая координаты равны нулю; д) первая и третья координаты равны нулю; е) вторая и третья координаты равны нулю; ж) все координаты равны нулю?

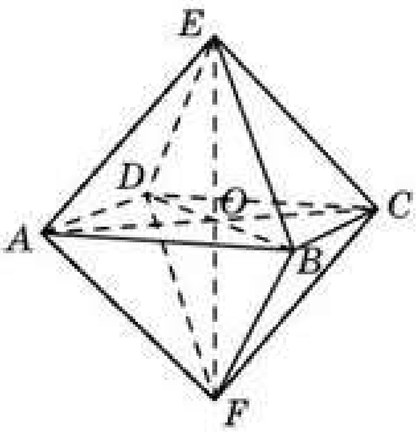


Рис. 21.11

21.11. Найдите расстояние от точки $A(-1;\ 2;\ 3)$ до координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

21.12. Центром O октаэдра является начало координат. Две его вершины имеют координаты $A(0;\ 1;\ 0)$ и $B(1;\ 0;\ 0)$ (рис. 21.11). Найдите координаты остальных вершин октаэдра.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

21.13. Повторите формулу расстояния между точками на координатной плоскости.

21.14. По аналогии с формулой расстояния между точками на координатной плоскости попробуйте написать формулу расстояния между точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ в координатном пространстве.

§ 22. Расстояние между точками. Уравнение сферы

В планиметрии доказывалось, что расстояние между точками $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ на плоскости выражается формулой

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

В пространстве имеет место аналогичная формула.

Теорема. ***Расстояние между точками** $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ **в пространстве выражается формулой***

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Доказательство. Для точек $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ пространства рассмотрим прямую A_1A_2. Она не может быть параллельна одновременно всем осям координат. Предположим, например, что она не параллельна оси Oz, и пусть A_1', A_2' — ортогональные проекции соответственно точек A_1, A_2 на плоскость Oxy (рис. 22.1).

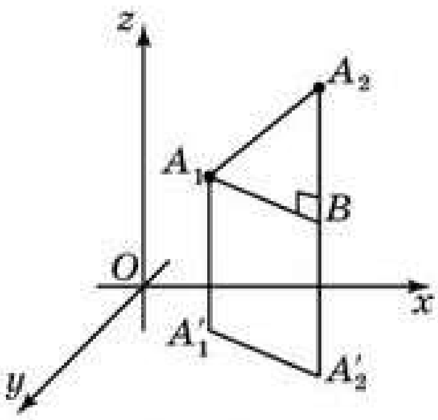


Рис. 22.1

Эти проекции имеют координаты $(x_1; y_1; 0)$, $(x_2; y_2; 0)$ соответственно. Расстояние между точками A_1', A_2' выражается формулой

$$A_1'A_2' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Через точку A_1 проведем прямую, параллельную $A_1'A_2'$, и точку ее пересечения с прямой $A_2'A_2$ обозначим B. Тогда треугольник A_1A_2B — прямоугольный, $A_1B = A_1'A_2'$, $A_2B = |z_2 - z_1|$. Следовательно, по теореме Пифагора, имеем

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \square$$

Непосредственно из определения сферы следует, что координаты точек сферы с центром в точке $A_0(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом R удовлетворяют равенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

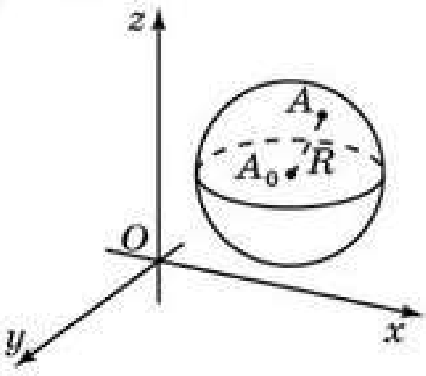


Рис. 22.2

Это равенство называется *уравнением сферы* с центром в точке $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и радиусом R (рис. 22.2).

Координаты точек соответствующего шара удовлетворяют неравенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \le R^2.$$

Напишите неравенство, которому удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих шару с центром в точке $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и радиусом R.

Вопросы

1. Какой формулой выражается расстояние между двумя точками в пространстве?
2. Какому равенству удовлетворяют координаты точек сферы?
3. Какое равенство называется *уравнением сферы*?
4. Какому неравенству удовлетворяют координаты точек шара?

Задачи

A

22.1. Найдите расстояние от точки: а) $A(3;\ 4;\ 0)$; б) $B(1;\ -2;\ 2)$ до начала координат.

22.2. Какая из точек $A\ (3;\ 1;\ 5)$ или $B\ (1;\ -1;\ 6)$ расположена ближе к началу координат?

22.3. Найдите расстояние между точками: а) $A_1(1;\ 2;\ 3)$ и $A_2(-1;\ 1;\ 1)$; б) $B_1(3;\ 4;\ 0)$ и $B_2(3;\ 1;\ -4)$.

22.4. Найдите координаты центра C и радиус R сферы, заданной уравнением: а) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 9$; б) $x^2 + (y - 6)^2 + (z + 1)^2 = 4$.

22.5. Напишите уравнение сферы: а) с центром в точке $O(0;\ 0;\ 0)$ и радиусом 1; б) с центром в точке $O(1;\ -2;\ 3)$ и радиусом 4.

B

22.6. Определите вид треугольника, если его вершины имеют координаты: $A(0;\ 0;\ 2)$, $B(0;\ 2;\ 0)$, $C(2;\ 0;\ 0)$.

22.7. На каком расстоянии находится точка $A(1;\ -2;\ 3)$ от координатной прямой: а) Ox; б) Oy; в) Oz?

22.8. Напишите уравнение сферы с центром в точке $O(1;\ 2;\ -1)$, касающейся координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

22.9. Повторите определение координат вектора на координатной плоскости.

22.10. По аналогии с определением понятия координат вектора на координатной плоскости попробуйте определить понятие координат вектора в координатном пространстве.

§ 23. Координаты вектора

Определим понятие координат вектора в пространстве с заданной прямоугольной системой координат. Для этого отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются *координатами вектора*.

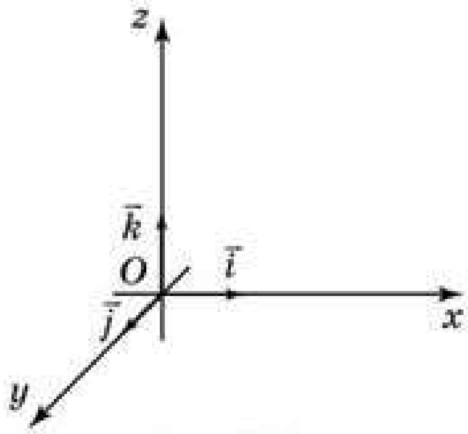


Рис. 23.1

Обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторы с координатами (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы отложенными от начала координат и называть их *координатными векторами* (рис. 23.1).

Теорема. ***Вектор*** $\vec{a}$ ***имеет координаты*** $(x; y; z)$ ***тогда и только тогда, когда он представлен в виде*** $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат и его конец обозначим через A. Имеет место равенство $\overline{OA} = \overline{OA_x} + \overline{OA_y} + \overline{OA_z}$ (рис. 23.2). Точка A имеет координаты $(x; y; z)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\overline{OA_x} = x\vec{i}$, $\overline{OA_y} = y\vec{j}$, $\overline{OA_z} = z\vec{k}$, значит, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. ☐

Теорема. ***Сумма*** $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ ***векторов*** $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ ***и*** $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ ***имеет координаты*** $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

Доказательство. Разложим векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ по координатным векторам:

$$\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Тогда для суммы $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ имеет место равенство:

$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$, следовательно, тройка чисел $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ является координатами вектора $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$. ☐

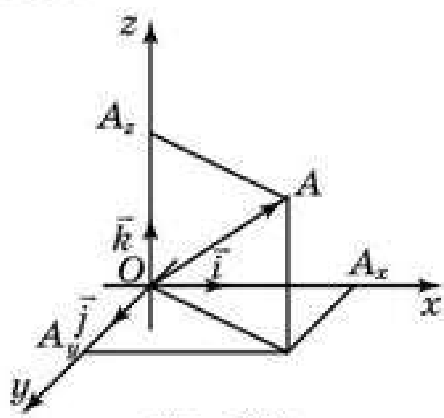


Рис. 23.2

Таким образом, при сложении векторов их координаты складываются.

Докажите самостоятельно, что при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

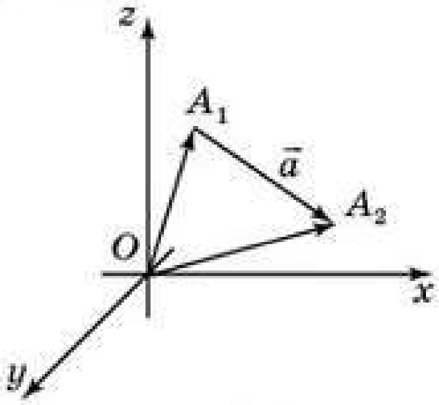


Рис. 23.3

Из этих свойств следует, что разность $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$ векторов $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ имеет координаты $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как найти координаты вектора с с заданными координатами его начала и конца.

Пусть вектор $\vec{a}$ имеет своим началом точку $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и концом — точку $A_2(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 23.3).

Тогда его можно представить как разность векторов $\vec{a} = \overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1}$, значит, он имеет координаты $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Длина вектора $\vec{a}(x; y; z)$ выражается через координаты по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если вектор $\overline{A_1A_2}$ задан координатами начальной и конечной точек $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, то его длина выражается формулой

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Напомним, что *скалярным произведением двух ненулевых векторов* называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_1$ обозначается $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$. По определению,

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot \cos j,$$

где j — угол между векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется *скалярным квадратом* и обозначается $\vec{a}^2$. Из формулы скалярного произведения следует равенство $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты. Пусть даны векторы $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$. Отложим их от начала координат, а их концы обозначим A_1, A_2 соответственно (рис. 23.4).

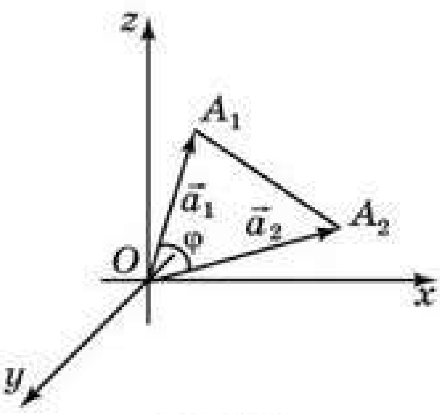


Рис. 23.4

По теореме косинусов имеем равенство

$$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2OA_1 \cdot OA_2 \cdot \cos j,$$

следовательно, равенство $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1^2 + \vec{a}_2^2 - 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$.

Выразим из последнего равенства скалярное произведение и воспользуемся равенствами

$$\vec{a}_1^2 = |\vec{a}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; \quad \vec{a}_2^2 = |\vec{a}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Получим

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Таким образом, имеет место формула

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Полученная формула скалярного произведения позволяет находить угол между векторами $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ с заданными координатами. А именно, имеет место следующая формула

$$\cos j = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Вопросы

1. Что называется *координатами вектора* ?
2. Какие векторы называются *координатными векторами* ?
3. Как выражается длина вектора через его координаты?
4. Как выражается длина вектора через координаты его начала и конца?
5. Как обозначается скалярное произведение векторов?
6. Как определяется скалярное произведение векторов?
7. Что называется *скалярным квадратом вектора* ?
8. Как выражается скалярное произведение векторов через их координаты?
9. Как выражается угол между векторами через их координаты?

Задачи

А

23.1. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$; б) $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$; в) $\vec{c} = -3\vec{j} + \vec{k}$; г) $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{k}$.

23.2. Найдите координаты вектора $\overline{AB}$, если: а) $A(2; -3; 4)$, $B(-5; 2; -6)$; б) $A(1; 3; -4)$, $B(6; -5; -8)$; в) $A(-3; 1; -10)$, $B(5; 2; -1)$.

23.3. Вектор $\overline{AB}$ имеет координаты $(a; b; c)$. Найдите координаты вектора $\overline{BA}$.

23.4. Векторы $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ коллинеарны. Как связаны между собой их координаты?

23.5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вершина D — начало координат, ребра DC, DA, DD_1 лежат на осях координат Ox, Oy, Oz соответственно и $DC = 4$, $DA = 3$, $DD_1 = 2$ (рис. 23.5). Найдите координаты век-

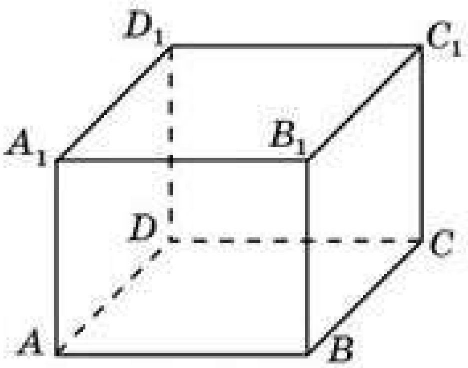


Рис. 23.5

тора: а) $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{DA_1}$; в) $\overrightarrow{DC_1}$; г) $\overrightarrow{DB_1}$; д) $\overrightarrow{AB}$; е) $\overrightarrow{AC}$; ж) $\overrightarrow{AB_1}$; з) $\overrightarrow{AD_1}$; и) $\overrightarrow{AC_1}$.

23.6. Найдите координаты вектора: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}(1;\ 0;\ 3)$, $\vec{b}(0;\ -2;\ 4)$.

23.7. Найдите координаты точки N, если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты $(2;\ -1;\ 0)$ и $M(1;\ -3;\ -5)$.

23.8. Найдите длину вектора: а) $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; б) $3\vec{j} + \vec{k}$; в) $-\vec{i} + 2\vec{k}$.

23.9. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(-1;\ 2;\ 3)$ и $\vec{a}_2(2;\ -1;\ 4)$.

B

23.10. Даны векторы $\vec{a}(-1;\ 2;\ 5)$, $\vec{b}(2;\ -3;\ 4)$. Найдите координаты векторов: а) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $-\vec{a} + 3\vec{b}$.

23.11. Какому условию должны удовлетворять координаты вектора, чтобы он был: а) перпендикулярен координатной плоскости Oxy; б) параллелен координатной прямой Ox?

23.12. Длина вектора равна трем. Найдите координаты вектора, если известно, что все они равны.

23.13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вершина D — начало координат, ребра DC, DA, DD_1 лежат на осях координат Ox, Oy, Oz соответственно и $DC = 4$, $DA = 3$, $DD_1 = 2$ (рис. 23.5). Найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{DA_1}$; в) $\overrightarrow{DC_1}$; г) $\overrightarrow{DB_1}$; д) $\overrightarrow{AB}$; е) $\overrightarrow{AC}$; ж) $\overrightarrow{AB_1}$; з) $\overrightarrow{AD_1}$; и) $\overrightarrow{AC_1}$.

23.14. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}_1(-1;\ 2;\ 2)$ и $\vec{a}_2(3;\ 0;\ 4)$.

23.15. Найдите косинусы углов, которые образует вектор $\vec{e}(1;\ 1;\ 1)$ с координатными векторами.

23.16. Вычислите, какую работу A производит сила $\vec{F}(-3;\ 4;\ 7)$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M(5;\ -1;\ 2)$ в положение $N(2;\ 1;\ 3)$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

23.17. Повторите уравнение прямой на координатной плоскости.

23.18. По аналогии с уравнением прямой на координатной плоскости попробуйте написать уравнение плоскости в координатном пространстве.

§ 24*. Уравнение плоскости в пространстве

В курсе планиметрии доказывалось, что прямая на плоскости задается уравнением $ax + by + c = 0$, в котором a, b, c — действительные числа, причем a, b одновременно не равны нулю. В пространстве имеет место аналогичная теорема.

Теорема. ***Плоскость в пространстве задается уравнением***

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где a, b, c, d — действительные числа, причем, a, b, c одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой плоскости и называемого вектором нормали.

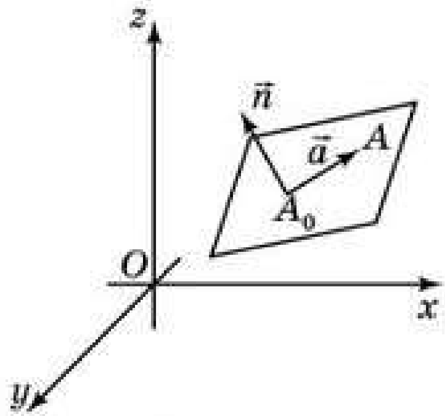


Рис. 24.1

Доказательство. Рассмотрим плоскость, проходящую через точку $A_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярную вектору $\vec{n}(a; b; c)$ (рис. 24.1). Произвольная точка $A(x; y; z)$ будет принадлежать этой плоскости в том и только том случае, когда вектор $\overline{A_0A}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ будет перпендикулярен вектору $\vec{n}$, т. е. скалярное произведение $\vec{n} \cdot \overline{A_0A}$ равно нулю. Расписывая скалярное произведение через координаты данных векторов, получим уравнение

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

которое задает данную плоскость. Обозначая $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$ и преобразовав это уравнение, получим требуемое уравнение плоскости, а именно:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении плоскостей в пространстве с точки зрения их уравнений.

Заметим, что две плоскости в пространстве параллельны или совпадают, если их векторы нормали $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ коллинеарны, следовательно, для некоторого числа t выполняется равенство

$$\vec{n}_2 = t \cdot \vec{n}_1.$$

Для плоскостей, заданных уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \ (*),$$

векторы нормалей имеют координаты $(a_1; b_1; c_1)$, $(a_2; b_2; c_2)$. Значит, такие плоскости параллельны или совпадают, если для некоторого числа t выполняются равенства $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$, $c_2 = tc_1$.

При этом, если $d_2 = td_1$, то уравнения (*) определяют одну и ту же плоскость.

Если же $d_2 \neq td_1$, то эти уравнения определяют параллельные плоскости.

Если плоскости не параллельны, то они пересекаются по прямой и угол j между ними равен углу между их нормалями. Его можно вычислить через формулу скалярного произведения.

Проверьте самостоятельно, что если угол между векторами нормалей острый или прямой, то он равен углу между плоскостями, а если угол между векторами нормалей тупой, то он равен 180° минус угол между плоскостями.

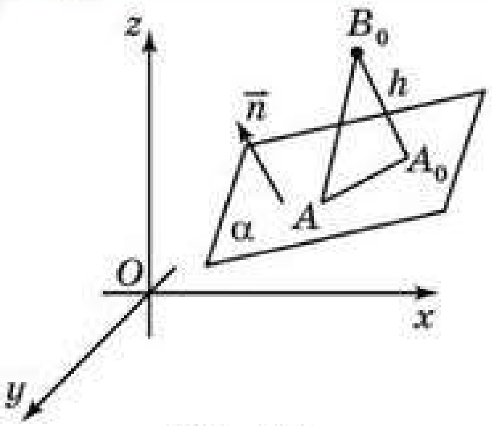


Рис. 24.2

Таким образом, косинус угла j между плоскостями можно вычислить через формулу скалярного произведения векторов нормалей

$$\cos j = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

В частности, плоскости перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ равно нулю, т. е. выполняются равенства

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$$

Выведем формулу для нахождения расстояния h от точки $B_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости а, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$.

Напомним, что *расстоянием от точки B_0 до плоскости* называется длина перпендикуляра B_0A_0, опущенного из данной точки на данную плоскость. Заметим, что век тор $\overline{A_0B_0}$ коллинеарен вектору нормали $\vec{n}(a; b; c)$ данной плоскости (рис. 24.2).

Пусть $A(x; y; z)$ — какая-нибудь точка плоскости а. Тогда

$$\cos\angle AB_0A_0 = \frac{\vec{n} \cdot \overline{B_0A}}{|\vec{n}| \cdot |\overline{B_0A}|} = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot |\overline{B_0A}|}.$$

Учитывая, что $-ax - by - cz = d$, и что искомое расстояние h равно $|\overline{B_0A}| \cdot \cos\angle AB_0A_0$, получаем

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Вопросы

1. Каким уравнением задается плоскость в пространстве?
2. Какой вектор называется *вектором нормали плоскости* ?
3. В каком случае два уравнения определяют параллельные плоскости в пространстве?
4. В каком случае два уравнения определяют одну и ту же плоскость в пространстве?
5. В каком случае два уравнения определяют перпендикулярные плоскости в пространстве?
6. Как можно вычислить угол между двумя плоскостями с заданными уравнениями?

Задачи

А

24.1. Найдите координаты вектора нормали для плоскости:

а) $5x - y - 1 = 0$; б) $3x + 18z - 6 = 0$;

в) $15x + y - 8z + 14 = 0$; г) $x - 3y + 15z = 0$.

24.2. Напишите уравнение координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

24.3. Даны точки $A(3;\ 2;\ 5)$, $B(-1;\ -2;\ 2)$, $C(7;\ 0;\ -9)$. Укажите, какие из них принадлежат плоскости $2x - 3y + z - 5 = 0$.

24.4. Дана плоскость $x + 2y - 3z - 1 = 0$. Найдите ее точки пересечения с осями координат.

24.5. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;\ 2;\ 1)$, с вектором нормали $\vec{n}$, имеющим координаты:
а) $(0;\ -5;\ 2)$; б) $(6;\ -1;\ 3)$; в) $(-4;\ -2;\ -1)$; г) $(-3;\ -8;\ 0)$.

24.6. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вершина D — начало координат, ребра DC, DA, DD_1 лежат на осях координат Ox, Oy, Oz соответственно (рис. 24.3). Напишите уравнения плоскостей, содержащих грани этого куба.

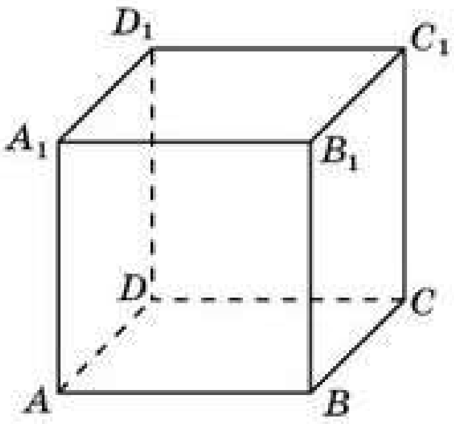


Рис. 24.3

B

24.7. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1;\ -2;\ 4)$ и параллельна координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

24.8. Определите, какие из перечисленных ниже пар плоскостей параллельны между собой:
а) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$;
б) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;
в) $-7x + y + 2z = 0$, $7x - y - 2z - 5 = 0$;
г) $2x + 4y + 6z - 8 = 0$, $-x - 2y - 3z + 4 = 0$.

24.9. Перпендикулярны ли плоскости:
а) $y + z + 1 = 0$ и $y - z + 1 = 0$;
б) $2x - 5y + z + 4 = 0$ и $3x + 2y + 4z - 1 = 0$;
в) $7x - y + 9 = 0$ и $y + 2z - 3 = 0$?

24.10. Найдите косинус угла между плоскостями, заданными уравнениями:
а) $x + y + z + 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;
б) $2x + 3y + 6z - 5 = 0$, $4x + 4y + 2z - 7 = 0$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите длину вектора $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$:

A. 1. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

2. Найдите координаты ортогональной проекции точки $A(-5;\ 6;\ -7)$ на плоскость Oyz:

A. $(0;\ 6;\ -7)$. B. $(-5;\ 0;\ -7)$. C. $(-5;\ 6;\ 0)$. D. $(-5;\ 0;\ 0)$.

3. Найдите расстояние от точки $B(3;\ -8;\ -11)$ до плоскости Oxy:

A. -11. B. 11. C. 3. D. 8.

4. На каком расстоянии от оси Oz находится точка $C(1;\ -5;\ 6)$:

A. 5. B. $2\sqrt{13}$. C. 6. D. $\sqrt{26}$?

5. Найдите расстояние между точками $E(-1;\ 0;\ 4)$ и $F(2;\ -5;\ 1)$:

A. $5\sqrt{18}$. B. $\sqrt{51}$. C. $\sqrt{43}$. D. $\sqrt{59}$.

6. Найдите координаты середины отрезка GH, если $G(3;\ -2;\ 0)$, $H(0;\ -12;\ 5)$:

A. $(\frac{3}{2};\ -5;\ 5)$. B. $(3;\ -7;\ -\frac{5}{2})$. C. $(\frac{3}{2};\ -7;\ \frac{5}{2})$. D. $(-3;\ 7;\ -\frac{5}{2})$.

7. Найдите координаты центра сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z + 1 = 0$:

A. $(1;\ -1;\ 2)$. B. $(1;\ 2;\ -1)$. C. $(0;\ -1;\ 2)$. D. $(0;\ 1;\ -2)$.

8. Найдите координаты вектора $\overline{IJ}$, если $I(5;\ -1;\ 2)$, $J((3;\ -2;\ 0)$:

A. $(2;\ -1;\ 2)$. B. $(-2;\ -1;\ 2)$. C. $(2;\ -3;\ 2)$. D. $(-2;\ -1;\ -2)$.

9. Найдите длину вектора $\overline{KL}$, если $K(0;\ -1;\ 2)$, $L(-3;\ 5;\ 0)$:

A. $\sqrt{29}$. B. 7. C. 5. D. $2\sqrt{7}$.

10. Найдите длину вектора $5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$:

A. 36. B. 6. C. $\sqrt{30}$. D. $2\sqrt{7}$.

11. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}(-5;\ 6;\ 1)$ и $\vec{b}(0;\ -9;\ 7)$:

A. -52. B. 47. C. -47. D. -56.

12. При каком значении k векторы $2\vec{a} - k\vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ перпендикулярны, если $\vec{a}(0;\ 1;\ -2)$ и $\vec{b}(2;\ 0;\ 1)$:

A. 2. B. $3\frac{1}{2}$. C. $-3\frac{1}{2}$. D. Нет решения?

13*. Точка $M(2;\ 1;\ m)$ принадлежит плоскости $3x - y + 2z - 1 = 0$. Найдите m:

A. 3. B. -3. C. 2. D. -2.

14*. Найдите уравнение плоскости, параллельной плоскости $4x - 5y + 2z + 11 = 0$ и проходящей через точку $P(3;\ -2;\ -4)$:

A. $4x - 5y + 2z - 10 = 0$. B. $8x - 10y + 4z + 22 = 0$.
C. $4x - 5y + 2z + 14 = 0$. D. $4x - 5y + 2z - 14 = 0$.

15*. Определите, какая фигура в пространстве задается уравнением $y^2 + z^2 = 0$:

A. Плоскость Oyz. B. Ось Ox.
C. Оси Oy и Oz. D. Плоскости Oxy и Oxz.

ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ

Угол между прямыми

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AB и CB_1.
2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AB и DA_1.
3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и CB_1.
4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и B_1D_1.
5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и AC.
6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и AD_1.
7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AC и BD_1.
8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AC и DB_1.
9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BC_1 и CA_1.
10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BC_1 и DB_1.
11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми CA_1 и DC_1.
12. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BD_1 и DC_1.
13. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и AC_1.
14. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и DB_1.
15. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и CA_1.
16. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и DB_1.
17. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми A_1C_1 и DB_1.
18. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми A_1C_1 и BD_1.
19. В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите угол между прямыми AB и CD.
20. В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите угол между прямыми AC и BD.
21. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E и F — середины ребер соответственно BC и BD. Найдите угол между прямыми AB и EF.
22. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E и F — середины ребер соответственно BD и CD. Найдите угол между прямыми AD и EF.
23. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E, F, G — середины ребер соответственно BC, BD, AD. Найдите угол EFG.
24. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E, F, G — середины ребер соответственно AB, AD, CD. Найдите угол EFG.
25. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра BC. Найдите угол между прямыми BB_1 и AD.
26. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра BC. Найдите угол между прямыми A_1C_1 и AD.
27. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра BC. Найдите угол между прямыми B_1C_1 и AD.

28. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра BC. Найдите угол между прямыми CB_1 и AD.

29. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла AC_1B.

30. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми SB и AC.

31. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E, F — середины ребер соответственно AB, BC. Найдите угол между прямыми SA и EF.

32. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра SC. Найдите угол между прямыми AD и BE.

33. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол ABD_1.

34. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла ABE_1.

35. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и B_1F_1.

36. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и B_1D_1.

37. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямыми AB и CF_1.

38. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол ACD_1.

39. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол AC_1D_1.

40. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямыми CC_1 и BE_1.

41. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BF_1 и CC_1.

42. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BA_1 и B_1E.

43. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и DF_1.

44. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SA и BC.

45. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, точка G — середина ребра SD. Найдите угол между прямыми AG и BC.

46. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми SA и BF.

47. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми SA и CE.

48. Найдите угол между скрещивающимися ребрами октаэдра.

Угол между прямой и плоскостью

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AC и плоскостью BCD_1.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой BD и плоскостью BCD_1.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой DA_1 и плоскостью BCD_1.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AD_1 и плоскостью BCD_1.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой A_1C_1 и плоскостью BCD_1.

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью BCD_1.

7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AC и плоскостью ABC_1.

9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью BDD_1.

11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой CA_1 и плоскостью AB_1D_1.

12. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой BD_1 и плоскостью ACB_1.

13. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны 1, точка E — середина ребра AD. Найдите угол между прямой AD и плоскостью BCE.

14. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны 1, точка E — середина ребра AD. Найдите угол между прямой AB и плоскостью BCE.

15. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой SA и плоскостью SBD.

16. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью SBD.

17. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, боковые ребра равны 2, SH — высота, найдите тангенс угла между прямой SH и плоскостью SBC.

18. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой BE_1 и плоскостью ABC.

19. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BD_1 и плоскостью ABC.

20. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью BCC_1.

21. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AF и плоскостью BCC_1.

22. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BF и плоскостью BCC_1.

23. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BE и плоскостью BCC_1.

24. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BD и плоскостью BCC_1.

25. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой FB_1 и плоскостью BCC_1.

26. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью BDD_1.

27. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью BDD_1.

28. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой FB и плоскостью BDD_1.

29. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AF и плоскостью BDD_1.

30. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью BEE_1.

31. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AD и плоскостью BEE_1.

32. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью BCE_1.

33. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BF и плоскостью BCE_1.

34. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью BDE_1.

35. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью BDE_1.

Угол между двумя плоскостями

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ABC_1 и BCC_1.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями CDD_1 и BCD_1.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и BCD_1.

4. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра AD. Найдите угол между плоскостями ACD и BCE.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра SC, найдите угол между плоскостями ABC и BDE.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ найдите угол между плоскостями SAD и SBE.

7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и ACC_1.

8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ найдите угол между плоскостями ABB_1 и AEE_1.

9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и AEE_1.

10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и BCC_1.

11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и DEE_1.

12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и BDD_1.

13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BDE_1.
14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и BFF_1.
15. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ найдите угол между плоскостями ADD_1 и BFF_1.
16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BCE_1.
17. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями BCE_1 и BCC_1.

Расстояние от точки до прямой

1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой AC.
2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой AB_1.
3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой CB_1.
4. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой A_1D_1.
5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой C_1D_1.
6. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой DD_1.
7. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой A_1C_1.
8. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой DA_1.
9. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой DC_1.
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AB_1.
11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CB_1.
12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1C_1.
13. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CD.
14. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки S до прямой BC.

15. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой SA.
16. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой SC.
17. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AC.
18. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой SD.
19. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки S до прямой AC.
20. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки S до прямой AB.
21. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до прямой AF.
22. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до прямой EF.
23. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AB_1.
24. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CB_1.
25. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AF.
26. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой FE.
27. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой DE.
28. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой EE_1.
29. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой E_1F_1.
30. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой D_1E_1.

31. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AE.
32. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CE.
33. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AC.
34. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой DF.
35. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны, найдите расстояние от точки B до прямой AD.
36. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CF.
37. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AE_1.
38. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CE_1.

Расстояние от точки до плоскости

1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости ACC_1.
2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1C_1.
3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости CDA_1.
4. В единичном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра CD. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABE.
5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ACC_1.
6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки S до плоскости ABC.
7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости SAC.
8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра SB. Найдите расстояние от точки B до плоскости ACE.

9. В правильной шестиугольной призме $ABCD\,EFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости DEE_1.
10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости EFF_1.
11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости CDD_1.
12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AFF_1.
13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости CFF_1.
14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ADD_1.
15. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ACC_1.
16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости DFF_1.
17. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AED_1.
18. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости CEF_1.

Расстояние между прямыми

1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и CD_1.
2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и DC_1.
3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и A_1C_1.
4. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и B_1D_1.
5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и C_1D_1.
6. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и CB_1.

7. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и DA_1.
8. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и DC_1.
9. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми BC и EF.
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и B_1C_1.
11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и A_1C_1.
12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и C_1D_1.
13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и D_1E_1.
14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и E_1F_1.
15. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и A_1F_1.
16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и A_1B_1.
17. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и EF.
18. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и DD_1.
19. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и EE_1.
20. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BA_1 и DE_1.
21. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC_1 и FE_1.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 7—9 КЛАССОВ

2. а) 3; б) 6; в) 10; г)* $\frac{n(n-1)}{2}$. **3**. 8,5 см. **4**. $2n$. **5**. 126°. **6**. 45°. **7**. 120° и 60°. **8**. 120°. **9**. а) 36°; б) 30°. **10**. а) 120°; б) 60°; в) 300°. **11**. 75°. **14**. 12 см, 18 см и 24 см. **16**. а) 3,2 м, 6,2 м, 6,2 м; б) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **18**. 100°. **19**. 30°. **20**. 69°. **21**. 7,5 см. **22**. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **23**. 7,5 см и 12 см. **25**. 20. **28**. а) 2; б) 3; в) 4; г) $n-2$. **29**. а) 2; б) 5; в) 9. **30**. а) 60°; б) 90°; в) 108°; г) 120°. **31**. 7. **32**. а) 90°; б) 72°; в) 60 г) 45°. **33**. 60°, 60°, 120°, 120°. **34**. а) 40°, 40°, 140°, 140°; б) 50°, 50°, 130°, 130°; в) 80°, 80°, 100°, 100°. **35**. а) 11 см и 13 см; б) 9 см и 15 см; в) 8 см и 16 см. **36**. 60 см и 80 см. **37**. 25° и 65°. **38**. 10 см. **39**. 13 см. **42**. 70° и 110°. **43**. 21 см. **44**. 2 см и 5 см. **45**. $\sin A = 0{,}8$, $\cos A = 0{,}6$; $\operatorname{tg} A = 1\frac{1}{3}$; $\operatorname{ctg} A = 0{,}75$. **46**. 1. **47**. $\sqrt{3}$. **48**. а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) 0,8. **49**. а) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; б) 2,4. **50**. а) 2; б) 0,5. **51**. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$. **52**. а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **53**. а) Меньше 90°; б) равен 90°; в) больше 90°. **54**. $4\sqrt{7}$. **55**. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **56**. $\cos A = \frac{7}{8}$, $\cos B = \frac{11}{16}$, $\cos C = -\frac{1}{4}$. **57**. 48. **58**. $\frac{a^2}{2}$. **59**. 0,5. **60**. а) 40 см²; б) $40\sqrt{2}$ см²; в) $40\sqrt{3}$ см². **61**. 8 см и 4 см. **62**. 12. **63**. 6. **64**. 6 см². **65**. 6. **66**. 10 см. **67**. 20 см. **68**. 14 см. **69**. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. **70**. 12. **71**. а) 1; б) 1; в) 2; г) 2. **72**. а) $\overline{AC}$; б) $\overline{AD}$; в) $\overline{AB}$. **73**. а) 5; б) 3; в) 4; г) 6. **74**. а) 10; б) 10; в) 10; г) 5. **75**. а) 1; б) 1; в) 0. **76**. а) 2,5; б) 1,5. **77**. а) 120°; б) 120°; в) 120°; г) 60°; д) 90°; е) 150°. **78**. а) 0; б) 64; в) 0; г) 36. **79**. а) (2; 3); б) (3; –1); в) (1; 1). **80**. $B(6;\ 8)$. **81**. (5; 4). **82**. а) $\sqrt{5}$; б) 5. **83**. а) 2; б) 3. **84**. Точки одинаково удалены от начала координат. **85**. а) (–5; 2), 4; б) (0; 3), 3. **86**. а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $(x+2)^2 + (x-1)^2 = 9$. **87.** $x^2 + y^2 = 18$. **88**. а) 4, (4; 0); б) $\sqrt{6}$, (–1; 3). **89**. –4. **90**. а), б) 90°. **91**. $x - y - 1 = 0$. **92**. $x - 2y + 7 = 0$, $\vec{n}(1,\ -2)$. **93**. а) 1, 3; б) 2, 4. **94**. а) (–1; –2); б) (7; 3). **95**. (–7; 14). **96**. 0. **97**. 0,96.

Глава I. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1

3. AB, AC, BC. **4.** ABC, ABD, ACD, BCD. **5.** а) A; б) D. **6.** а) AB; б) BC; в) AC. **7.** а) 3; б) 6; в) 10. **8.** 4.

§ 2

1. Бесконечно много. **2.** Бесконечно много. **3.** Если три точки принадлежат одной прямой, то через них можно провести бесконечно много плоскостей; если они не принадлежат одной прямой, то через них можно провести только одну плоскость. **4.** Нет, так как в этом случае точки принадлежали бы одной плоскости. **5.** а), б) Нет. **6.** Нет. **7.** b, g, p. **8.** Нет. **9.** Нет. **10.** Прямая. **11.** а) 4; б) 8.

§ 3

1. а) В = 4, Р = 6, Г = 4; б) В = 8, Р = 12, Г = 6; в) В = 8, Р = 12, Г = 6. **2.** AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. **3.** ABC, ABB_1, CDD_1, $A_1B_1C_1$. **8.** а) 0; б) 4; в) 4. **9.** в), д), ж). **12.** ABC, BCD_1, ABB_1, BDD_1, CDD_1, ACC_1, $A_1B_1C_1$, AB_1C_1, ABC_1, CDA_1.

§ 4

1. а) В = $2n$, Р = $3n$, Г = $n + 2$; б) В = $n + 1$, Р = $2n$, Г = $n + 1$. **4.** а) Нет; б) да. **5.** а) Десятиугольник; б) пятиугольник. **6.** а) Пятиугольная; б), в) шестиугольная. **7.** а) Нет; б) да. **8.** а) 16-угольник; б) 14-угольник. **9.** а), б) 9-угольная; в) 7-угольная. **10.** ABC и SAB, ABC и SBC, ABC и SCD, ABC и SAD, SAB и SBC, SAB и SAD, SAB и

SCD, SBC и SCD, SBC и SAD, SAD и SCD. **11.** а) Четырехугольная; б), в), г) треугольная. **12.** а) Четырехугольная; в) треугольная пирамида. **13.** Пятиугольная пирамида. **17.** а) 0; б) $n(n-3)$.

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	D	B	B	C	D	D	B	A	B	D	C	C	C	D

§ 5

1. Нет. **2.** Нет. **3.** а) CD, A_1B_1, C_1D_1; б) BB_1, CC_1, DD_1. **4.** Нет. **5.** AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1, AA_1 и BB_1, AA_1 и CC_1, BB_1 и CC_1. **6.** Нет. **7.** Нет. **8.** а) AB и CD, AD и BC; б) AB и DE, BC и EF, AF и CD. **9.** а), б) Нет. **10.** а), б) Нет. **12.** а) BB_1, CC_1, DD_1, EE_1, FF_1; б) DE, D_1E_1, A_1B_1.

§ 6

1. Нет. **2.** Бесконечно много. **3.** а) CC_1, DD_1, A_1D_1, B_1C_1; б) CC_1, A_1C_1, B_1C_1. **4.** а) BC, CD; б) BC, CD, DE, EF. **5.** а) BC, CD, DE, EF, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1; б) CC_1, DD_1, EE_1, FF_1, B_1C_1, C_1D_1, E_1F_1, F_1A_1. **6.** 3. **7.** Нет. **8.** Скрещиваются. **9.** Нет. **10.** 8. **11.** Скрещиваются. **12.** Скрещиваются. **14.** Нет.

§ 7

1. A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1. **2.** а) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, EDD_1E_1; б) BCC_1B_1; CDD_1C_1, DEE_1D_1, EFF_1E_1. **3.** Нет. **4.** Да. **5.** Нет. **6.** AB и SCD, BC и SAD, CD и SAB, AD и SBC. **7.** AB и SDE, BC и SEF, CD и SAF, DE и SAB, EF и SBC, AF и SCD. **9.** Прямые AB, BC, DE и EF пересекают плоскость; прямая CD параллельна плоскости.

§ 8

1. ABC и $A_1B_1C_1$, BCC_1 и ADD_1, CDD_1 и ABB_1. **2.** ABC и $A_1B_1C_1$, ABB_1 и DEE_1, BCC_1 и EFF_1, CDD_1 и AFF_1. **3.** Нет. **4.** Нет. **7.** Нет. **8.** Нет. **9.** BD_1. **10.** BO_1.

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	C	A	A	C	D	B	A	C	D	C	D	A	A	B

Глава II. УГОЛ В ПРОСТРАНСТВЕ. РАССТОЯНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 9

1. Бесконечно много. **2.** Бесконечно много. **3.** Нет. **4.** AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, AD, BC, A_1D_1, B_1C_1. **5.** AB, BC, AC, A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1. **6.** а), б) 90°; в) 60°. **7.** а) 90°; б) 60°. **8.** а) 60°; б) 90°. **9.** 30°. **10.** 60°. **11.** а) 45°; б) 45°; в) 60°; г) 60°; д) 30°; е) 60°; ж) 90°. **12.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

§ 10

1. а) 1; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sqrt{2}$. **2.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sqrt{3}$; д) $\sqrt{3}$; е) 1; ж) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\frac{1}{2}$; и) 1,5; к) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; л) 1. **6.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

§ 11

1. Да. **2.** Перпендикулярна. **3.** а) Нет; б) да. **4.** Да. **6.** Нет. **7.** Прямые перпендикулярны. **8.** Прямоугольный.

§ 12

1. $5\sqrt{2}$. **2.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\sqrt{3}$; е) $\frac{3}{2}$; ж) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** а) 2; б) $\sqrt{5}$. **6.** а) 1; б) $\sqrt{3}$. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** а) 3; б) $\sqrt{6}$; в) 3; г) $\sqrt{6}$; д) $2\sqrt{3}$. **9.** а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{5}$. **10.** 5. **12.** $\sqrt{3}$.

§ 13

1. а), б) 1. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{3}$; г) 1; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\frac{1}{2}$; ж) $\frac{3}{2}$; з) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.** а) 2; б) 2; в) 1; г) 1. **5.** а), б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1. **7.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **8.** $\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

§ 14

1. а) 1; б) $\sqrt{2}$; в), г), д), е) 1; ж) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) 1. **2.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 1. **3.** а), б) 1; в) $\sqrt{3}$; г) 2. **4.** а) $\sqrt{5}$; б), в) $2\sqrt{2}$; г) $\sqrt{5}$. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **7.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б), в), г) $\sqrt{3}$; д) 1. **8.** а) 2; б) 1; в), г), д) 2.

§ 15

1. 12 см. **2.** 12 см. **3.** 2 см. **4.** 5 м. **5.** 10 м. **6.** 9 см. **7.** $A'B' = 4$, $B'C' = 8$. **14.** Плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего данные точки, и перпендикулярная этому отрезку.

§ 16

1. а), б) 45°; в) 90°. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** 45°. **4.** а) 45°; б) 60°. **5.** 60°. **6.** а) 45°; б) 30°; в) 45°. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **8.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **10.** а) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

§ 17

1. 90°. **3.** 45°. **4.** 60°. **5.** 120°. **6.** Нет. **7.** Бесконечно много. **8.** а), б) $\sqrt{2}$. **9.** $\frac{1}{3}$. **10.** а) 60°; б) 90°; в) 30°; г) 60°; д) 45°; е) 60°. **12.** $\sqrt{2}$. **13.** 2. **14.** 1,2; ≈ 50°. **15.** $\frac{1}{3}$.

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	B	D	C	C	B	C	A	D	C	A	B	A	A	A

Глава III. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 18

1. $\overline{DC}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{D_1C_1}$. **2.** $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$. **3.** а) $\overline{A_1B_1}$, $\overline{ED}$, $\overline{E_1D_1}$; б) $\overline{A_1C_1}$, $\overline{FD}$, $\overline{F_1D_1}$; в) $\overline{A_1D_1}$; г) $\overline{ED_1}$; д) $\overline{FD_1}$. **4.** а) 1; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}$. **5.** а) 1; б) $\sqrt{3}$; в) 2; г) $\sqrt{2}$; д) 2; е) $\sqrt{5}$. **6.** а) $\overline{AB_1}$; б) $\overline{AC}$; в) $\overline{AC_1}$; г) $\overline{AA_1}$; д) $\overline{AC_1}$. **7.** а) 6; б) 8; в) 12. **8.** а) $\overline{AC}$; б) $\overline{FB}$; в) $\overline{AC_1}$; г) $\overline{AF_1}$. **9.** 2. **10.** а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}$; г) 1; д) $\sqrt{3}$. **11.** а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) 2; г) $\sqrt{2}$. **12.** Если векторы одинаково направлены. **13.** а) $\overline{A_1B}$; б) $\overline{A_1C}$; в) $\overline{DB}$; г) $\overline{AC_1}$. **14.** а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}$; г) $\sqrt{3}$.

§ 19

1. $\overline{BA}$, $\overline{DC}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{D_1C_1}$, $\overline{CD}$, $\overline{B_1A_1}$, $\overline{C_1D_1}$. **2.** $\overline{A_1A}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{B_1B}$, $\overline{C_1C}$. **3.** $\overline{B_1A}$, $\overline{ED_1}$, $\overline{D_1E}$. **4.** Да. **5.** Нет. **6.** а) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{A_1C_1}$; б) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AA_1}$. **7.** а) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{B_1C_1}$;

б) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AA_1}$. **8.** а) $\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} - \overline{AA_1}$; б) $\overline{BD_1} = -\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$. **9.** а) $\overline{AD_1} = 2\overline{AB} + 2\overline{AF} + \overline{AA_1}$; б) $\overline{AC_1} = 2\overline{AB} + \overline{AF} + \overline{AA_1}$.

§ 20

1. а) Плюс; б) минус. **2.** а), б) 90°; в) 60°. **3.** а) 90°; б) 120°. **4.** а) 60°; б) 90°. **5.** а) 60°; б) 120°. **6.** а), б) 45°; в) 60°; г) 120°; д) 30°; е) 60°; ж) 90°. **7.** а), б) 0; в) 1. **8.** а) 0; б) $\frac{1}{2}$. **9.** а) $-\frac{1}{2}$; б) 0. **10.** а) 2; б) –1. **11.** а), б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; е) $1\frac{1}{2}$; ж) 0. **12.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{4}$; д) $-\frac{1}{4}$; е) 0. **14.** 1.

§ 21

2. а) (1; 3; 0) и (5; –6; 0); б) (1; 0; 4) и (5; 0; 2); в) (0; 3; 4) и (0; –6; 2). **3.** $A(0;\ 1;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 0)$, $C(1;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ 0)$, $A_1(0;\ 1;\ 1)$, $B_1(1;\ 1;\ 1)$, $C_1(1;\ 0;\ 1)$, $D_1(0;\ 0;\ 1)$. **4.** а) (0; 1; 2), б) (3; 1; 1). **5.** $A(-1;\ 1;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 0)$, $C(1;\ -1;\ 0)$, $D(-1;\ -1;\ 0)$, $A_1(-1;\ 1;\ 2)$, $B_1(1;\ 1;\ 2)$, $C_1(1;\ -1;\ 2)$, $D_1(-1;\ -1;\ 2)$. **6.** $A(0;\ 2;\ 0)$, $B(2;\ 2;\ 0)$, $C(2;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ 0)$, $A_1(1;\ 2;\ 1)$, $B_1(2;\ 2;\ 1)$, $C_1(2;\ 0;\ 1)$, $D_1(1;\ 0;\ 1)$, $A_2(0;\ 2;\ 2)$, $B_2(1;\ 2;\ 2)$, $C_2(1;\ 0;\ 2)$, $D_2(0;\ 0;\ 2)$. **7.** $A(0;\ \frac{1}{2};\ 0)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0;\ 0)$, $C(0;\ -\frac{1}{2};\ 0)$, $A_1(0;\ \frac{1}{2};\ 1)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0;\ 1)$, $C_1(0;\ -\frac{1}{2};\ 1)$. **8.** $A(0;\ \sqrt{3};\ 0)$, $B(1;\ \sqrt{3};\ 0)$, $C(1{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0)$, $D(1;\ 0;\ 0)$, $E(0;\ 0;\ 0)$, $F(-0{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0)$, $A_1(0;\ \sqrt{3};\ 1)$, $B_1(1;\ \sqrt{3};\ 1)$, $C_1(1{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 1)$, $D_1(1;\ 0;\ 1)$, $E_1(0;\ 0;\ 1)$, $F_1(-0{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 1)$. **9.** $A(-0{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0)$, $B(0{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0)$, $C(1;\ 0;\ 0)$, $D(0{,}5;\ -\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0)$, $E(-0{,}5;\ -\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0)$, $F(-1;\ 0;\ 0)$, $S(0;\ 0;\ \sqrt{3})$. **10.** а) Плоскость Oyz; б) плоскость Oxz; в) плоскость Oxy; г) ось Oz; д) ось Oy; е) ось Ox; ж) начало координат . **11.** а) 3; б) 2; в) 1. **12.** $C(0;\ -1;\ 0)$, $D(-1;\ 0;\ 0)$, $E(0;\ 0;\ 1)$, $F(0;\ 0;\ -1)$.

§ 22

1. а) 5; б) 3. **2.** A. **3.** а) 3; б) 5. **4.** а) $C(2;\ -5;\ 0)$, $R = 3$; б) $C(0;\ 6;\ -1)$, $R = 2$. **5.** а) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; б) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. **6.** Равносторонний. **7.** а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{5}$. **8.** а) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$; б) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$; в) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$.

§ 23

1. а)(–2; 6; 1); б) (1; 0; 2); в) (0; –3; 1); г) (5; 0; –4). **2.** а) (–7; 5; –10); б) (5; –8; –4); в) (8; 1; 9). **3.** $(-a;\ -b;\ -c)$. **4.** $x_2 = tx_1$, $y_2 = ty_1$, $z_2 = tz_1$. **5.** а) (4; 3; 0); б) (0; 3; 2); в) (4; 0; 2); г) (4; 3; 2); д) (4; 0; 0); е) (4; –3; 0); ж) (4; 0; 2); з) (0; –3; 2); и) (4; –3; 2). **6.** а) (1; –2; 7); б) (1; 2; –1). **7.** (3; –4; –5). **8.** а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{5}$. **9.** 8. **10.** а) (1; 0; 23); б) (7; –11; 7). **11.** а) Координаты вектора имеют вид $(0;\ 0;\ z)$; б) координаты вектора имеют вид $(x;\ 0;\ 0)$. **12.** $(\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\ -\sqrt{3};\ -\sqrt{3})$. **13.** а) 5; б) $\sqrt{13}$; в) $2\sqrt{5}$; г) $\sqrt{29}$; д) 4; е) 5; ж) $2\sqrt{5}$; з) $\sqrt{13}$; и) $\sqrt{29}$. **14.** $\frac{1}{3}$. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **16.** 24.

§ 24

1. а) (5; –1; 0); б) (3; 0; 18); в) (15; 1; –8), г) (1; –3; 15). **2.** а) $z = 0$; б) $y = 0$; в) $x = 0$. **3.** A и C. **4.** (1; 0; 0), $(0;\ \frac{1}{2};\ 0)$, $(0;\ 0;\ -\frac{1}{3})$. **5.** а) $-5y + 2z + 8 = 0$; б) $6x - y + 3z + 5 = 0$; в) $-4x - 2y - z + 1 = 0$; г) $-3x - 8y + 13 = 0$. **6.** $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$. **7.** а) $z = 4$; б) $y = -2$; в) $x = 1$. **8.** а), в), г). **9.** а), б) Да; в) нет. **10.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{16}{21}$.

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	C	B	D	C	C	C	D	B	C	C	A	D	D	B

ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ

Угол между прямыми

1. 90°. **2.** 90°. **3.** 60°. **4.** 60°. **5.** 60°. **6.** 60°. **7.** 90°. **8.** 90°. **9.** 90°. **10.** 90°. **11.** 90°. **12.** 90°. **13.** 90°. **14.** 90°. **15.** 90°. **16.** 90°. **17.** 90°. **18.** 90°. **19.** 90°. **20.** 90°. **21.** 90°. **22.** 90°. **23.** 90°. **24.** 90°. **25.** 90°. **26.** 30°. **27.** 90°. **28.** 90°. **29.** 0,75. **30.** 90°. **31.** 45°. **32.** 30°. **33.** 90°. **34.** 2. **35.** 60°. **36.** 60°. **37.** 0,5. **38.** 90°. **39.** 90°. **40.** 2. **41.** 60°. **42.** 90°. **43.** 30°. **44.** 60°. **45.** 30°. **46.** 90°. **47.** 90°. **48.** 60°.

Угол между прямой и плоскостью

1. 30°. **2.** 30°. **3.** 30°. **4.** 30°. **5.** 30°. **6.** 30°. **7.** 30°. **8.** 30°. **9.** 30°. **10.** 30°. **11.** 90°. **12.** 90°. **13.** 90°. **14.** 30°. **15.** 45°. **16.** 45°. **17.** 0,5. **18.** 0,5. **19.** 30°. **20.** 60°. **21.** 60°. **22.** 90°. **23.** 60°. **24.** 30°. **25.** 60°. **26.** 90°. **27.** 45°. **28.** 60°. **29.** 30°. **30.** 60°. **31.** 60°. **32.** 60°. **33.** 30°. **34.** 45°. **35.** 45°.

Угол между двумя плоскостями

1. 90°. **2.** 90°. **3.** 90°. **4.** 90°. **5.** 45°. **6.** 60°. **7.** 90°. **8.** 90°. **9.** 60°. **10.** 60°. **11.** 60°. **12.** 30°. **13.** 45°. **14.** 60°. **15.** 90°. **16.** 30°. **17.** 60°.

Расстояние от точки до прямой

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** $\sqrt{2}$. **5.** $\sqrt{2}$. **6.** $\sqrt{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **8.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **11.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **16.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **17.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **18.** 1. **19.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **20.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$. **21.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **22.** $\sqrt{3}$. **23.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **24.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **25.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **26.** $\sqrt{3}$. **27.** $\sqrt{3}$. **28.** 2. **29.** 2. **30.** 2. **31.** 1. **32.** 1. **33.** 0,5. **34.** 1,5. **35.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **36.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **37.** 1. **38.** 1.

Расстояние от точки до плоскости

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** 0,5. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** 0,5. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** $\sqrt{3}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **15.** 0,5. **16.** 1,5. **17.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **18.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Расстояние между двумя прямыми

1. 1. **2.** 1. **3.** 1. **4.** 1. **5.** $\sqrt{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** 1. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** 1. **11.** 1. **12.** 1. **13.** 1. **14.** 2. **15.** 1. **16.** 1. **17.** $\sqrt{3}$. **18.** $\sqrt{3}$. **19.** 2. **20.** $\sqrt{3}$. **21.** $\sqrt{3}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Смирнов Владимир Алексеевич
Туяков Есенкельды Алыбаевич

ÀÂÏÀÒÐÈß

Учебник для 10 классов общественно-гуманитарного направления общеобразовательных школ

Редактор *К. Амирова*
Худож. редактор *А. Сланова*
Техн. редактор *Л. Садыкова*
Корректор *Е. Шумских*
Компьютерная верстка *Б. Нөкер*

Государственная лицензия № 0000001 выдана издательству Министерством образования и науки Республики Казахстан 7 июля 2003 года

ИБ № 5863

Подписано в печать 22.05.19. Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура "SchoolBook Kza". Печать офсетная. Усл.-печ. л. 10,97 + 0,32 форзац. Усл. кр.-отт. 23,28. Уч.-изд. л. 6,86 + 0,54 форзац. Тираж 35 000 экз. Заказ №

Издательство "Мектеп", 050009, г. Алматы, пр. Абая, 143
Факс.: 8(727) 394-37-58, 394-42-30.
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz