ГЕОМЕТРИЯ

Учебник

11

Общественно-гуманитарное
направление

Условные обозначения:

— проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями

— задания для самостоятельного изучения теоретического материала

□ — конец доказательства теоремы или свойства

A — обязательные упражнения для всех учащихся

B — упражнения средней сложности

C — упражнения повышенной сложности

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник геометрии является продолжением учебника геометрии 10-го класса и предназначен для учащихся 11-х классов общеобразовательных школ.

В нем вы более подробно изучите основные многогранники и их свойства; познакомитесь с телами вращения – цилиндром, конусом, шаром, и их свойствами; научитесь находить объемы и площади поверхностей пространственных фигур.

Весь материал учебника разбит на главы и параграфы, которые содержат теоретический материал, задания для самостоятельной работы, вопросы для повторения, задачи различного уровня трудности.

Конец доказательства теоремы помечен знаком (◻).

Задачи разделены по уровням А, В и С. Задачи уровня А имеют начальный уровень трудности и отвечают за понимание основного материала. Задачи уровня В являются базовыми. Их выполнение свидетельствует об освоении учебного материала данного параграфа. Задачи уровня С имеют повышенный уровень трудности.

Дополнительный материал учебника помечен звездочкой (*).

В конце учебника приведены ответы к задачам.

Желаем успехов в изучении геометрии!

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 10 КЛАССА

Задачи

Начала стереометрии

1. Сколько прямых проходит через различные пары из: а) трех; б) четырех; в) пяти; г)* n точек в пространстве, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?
2. Сколько плоскостей может проходить через три точки пространства?
3. Сколько плоскостей проходит через различные тройки из: а) четырех; б) пяти; в)* n точек, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости?
4. На какое наибольшее число частей могут разбивать пространство: а) две плоскости; б) три плоскости; в)* четыре плоскости.
5. Докажите, что если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она лежит в этой плоскости.
6. Докажите, что через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость.
7. Докажите, что через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.
8. Сколько: а) вершин; б) ребер; в) граней имеет куб?
9. Сколько: а) вершин; б) ребер; в) граней имеет параллелепипед?
10. Сколько вершин имеет: а) треугольная; б) четырехугольная; в) пятиугольная; г) шестиугольная; д) n-угольная призма?
11. Может ли призма иметь: а) 9; б) 10; в) 12; г) 15 вершин?
12. Сколько ребер имеет: а) треугольная; б) четырехугольная; в) пятиугольная; г) шестиугольная; д) n-угольная призма?
13. Может ли призма иметь: а) 9; б) 10; в) 12; г) 15 ребер?
14. Сколько граней имеет: а) треугольная; б) четырехугольная; в) пятиугольная; г) шестиугольная; д) n-угольная призма?
15. Может ли призма иметь: а) 9; б) 10; в) 12; г) 15 граней?
16. Какой многоугольник лежит в основании призмы, имеющей: а) 12; б) 15; в) 18 ребер?
17. Сколько вершин имеет: а) треугольная; б) четырехугольная; в) пятиугольная; г) шестиугольная; д) n-угольная пирамида?
18. Может ли пирамида иметь: а) 9; б) 10; в) 12; г) 15 вершин?
19. Сколько ребер имеет: а) треугольная; б) четырехугольная; в) пятиугольная; г) шестиугольная; д) n-угольная пирамида?
20. Может ли пирамида иметь: а) 9; б) 10; в) 12; г) 15 ребер?
21. Сколько граней имеет: а) треугольная; б) четырехугольная; в) пятиугольная; г) шестиугольная; д) n-угольная пирамида?
22. Может ли пирамида иметь: а) 9; б) 10; в) 12; г) 15 граней?

23. Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, имеющей: а) 8; б) 10; в) 12 ребер?

Параллельность в пространстве

24. Сколько пар параллельных ребер имеет: а) куб; б) параллелепипед; в) треугольная призма; г) шестиугольная призма?
25. Докажите, что для параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельны прямые: а) AB и D_1C_1; б) AD_1 и BC_1.
26. Докажите, что для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ параллельны прямые: а) AB и E_1D_1; б) AA_1 и DD_1; в) AC_1 и FD_1.
27. Сколько пар скрещивающихся ребер имеет: а) куб; б) параллелепипед; в) треугольная пирамида; г) шестиугольная пирамида?
28. Как расположены прямые: а) AB_1 и BC_1; б) AA_1 и BD_1; в) AC_1 и BD_1, проходящие через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$?
29. Как расположены прямые: а) AB_1 и CD_1; б) AA_1 и BD_1; в) AC_1 и BF_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$?
30. Докажите, что для параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямые: а) AA_1 и BD; б) AC_1 и BB_1 скрещиваются.
31. Докажите, что для пирамиды $SABCDEF$ прямые SA и: а) BC; б) CD скрещиваются.
32. Докажите, что для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ прямые: а) AA_1 и BC; б) AC_1 и BD; в) AB и B_1C_1 скрещиваются.
33. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите грани, параллельные прямой: а) AD; б) AB_1.
34. Докажите, что для правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ ребро AB параллельно грани SDE.
35. Сколько пар параллельных граней имеет: а) куб; б) параллелепипед; в) треугольная призма; г) шестиугольная призма?
36. Докажите, что у правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ параллельны плоскости: а) ABB_1 и EDD_1; б) ACC_1 и FDD_1.

Перпендикулярность в пространстве

37. Сколько пар перпендикулярных ребер имеет: а) правильный тетраэдр; б) куб?
38. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми: а) AB_1 и BC_1; б) AC и BD_1; в) AB_1 и CD_1.
39. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол между прямыми: а) AA_1 и CD_1; б) AA_1 и BD_1; в) AC и BE_1.

40. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой: а) A_1D_1; б) A_1C_1.
41. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки B до прямой: а) AC_1; б) A_1C_1.
42. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости: а) ACC_1; б) ACB_1.
43. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости: а) ACC_1; б) CDD_1; в) DEE_1; г) DFF_1.
44. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между плоскостями: а) ABB_1 и DEE_1; б) ACC_1 и FDD_1.
45. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1. Найдите угол между прямой SB и плоскостью ABC.
46. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2. Найдите угол между прямой SB и плоскостью ABC.
47. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол между плоскостями: а) ABB_1 и BCC_1; б) ABB_1 и ACC_1; в) ACC_1 и CDD_1; г) ACC_1 и BEE_1.
48. Найдите косинус двугранного угла, образованного гранями правильного тетраэдра.
49. Найдите косинус двугранного угла, образованного соседними боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1.

Векторы и их свойства

50. Сколько различных векторов задают ребра параллелепипеда?
51. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите длину вектора: а) $\overline{AC_1}$; б) $\overline{AD_1}$.
52. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите длину вектора: а) $\overline{AB} + \overline{AD_1}$; б) $\overline{AB_1} + \overline{AD_1}$.
53. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выразите вектор $\overline{AC_1}$ через векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AA_1}$.
54. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Выразите вектор $\overline{AD_1}$ через векторы $\overline{AB}$, $\overline{AF}$ и $\overline{AA_1}$.
55. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1. Найдите угол между векторами $\overline{SA}$ и: а) $\overline{BC}$; б) $\overline{EF}$.
56. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите скалярное произведение векторов $\overline{AB_1}$ и: а) $\overline{CC_1}$; б) $\overline{CD_1}$; в) $\overline{BC_1}$; г) $\overline{BD_1}$.
57. Вычислите работу, которую производит сила $\overline{F} = \overline{BD_1}$, перемещая объект из вершины C в вершину C_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Координаты

58. Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещен в прямоугольную систему координат так, что началом координат является вершина D, ребра DC, DA, DD_1 лежат соответственно на осях абсцисс, ординат, аппликат. Найдите координаты всех вершин куба.

59. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, вершина A — начало координат, отрезки AB, AE, AA_1 лежат соответственно на осях абсцисс, ординат, аппликат. Найдите координаты вершин этой призмы.

60. Найдите расстояние от точки $A(1; 2; 3)$ до координатной прямой: а) Ox; б) Oy; в) Oz.

61. Напишите уравнение сферы с центром в точке $A(1; 2; 2)$, проходящей через начало координат.

62. Докажите, что уравнение $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 4 = 0$ задает сферу в пространстве. Найдите ее радиус и координаты центра.

63. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(1; 2; 3)$ и $\vec{a}_2(3; -1; 2)$.

64. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки с координатами $(1; 0; 0)$, $(0; 2; 0)$, $(0; 0; 3)$.

Глава I МНОГОГРАННИКИ

§ 1. Понятие многогранника. Призма и ее элементы, виды призм. Развертка, площадь боковой и полной поверхностей призмы

Напомним, что *многогранником* называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, называемых *гранями* многогранника. При этом требуется, чтобы никакие две соседние грани не лежали в одной плоскости. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно *ребрами* и *вершинами* многогранника.

Многогранники, которые мы до сих пор изучали (куб, параллелепипед, призма, пирамида и др.), были выпуклыми многогранниками.

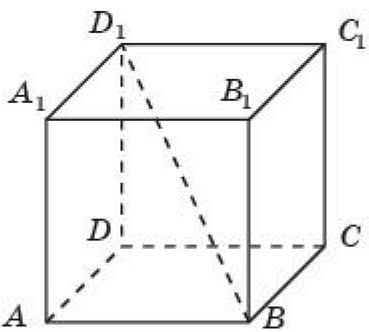


Рис. 1.1

Кубом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов (рис 1.1). Обычно куб обозначают указанием его вершин, например, $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Куб, ребра которого равны 1, называют *единичным кубом.*

Отрезок, соединяющий вершины куба, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* этого куба. На рисунке 1.1 изображена диагональ BD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Параллелепипедом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов (рис. 1.2, а). Параллелепипед обозначают указанием его вершин, например, $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

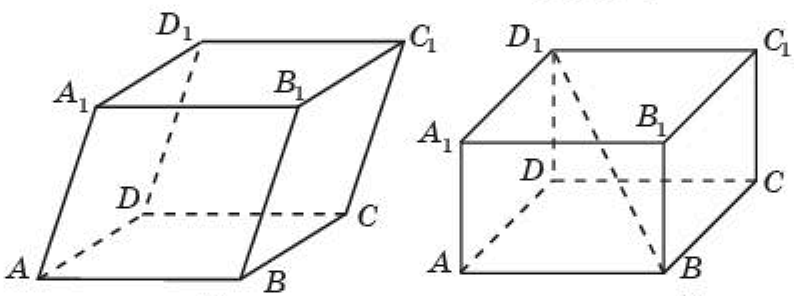


Рис. 1.2

Параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники, называется *прямоугольным параллелепипедом* (рис. 1.2, б). В противном случае параллелепипед называется наклонным (рис. 1.2, а).

Отрезок, соединяющий вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* этого параллелепипеда. На рисунке 1.2, б изображена диагональ BD_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Докажите, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам

Призмой называется многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых *основаниями* призмы, и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований, называемых *боковыми гранями* призмы. Поверхность, составленная из боковых граней, называется *боковой поверхностью* призмы. Ребра, не лежащие в основаниях призмы, называют *боковыми ребрами*.

Призмы бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях — соответственно треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.

Призма называется n-угольной, если ее основаниями являются n-угольники.

Призма обозначается указанием ее вершин, например, треугольная призма обозначается $ABCA_1B_1C_1$, шестиугольная призма обозначается $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

На рисунке 1.3 изображены треугольная и шестиугольная призмы.

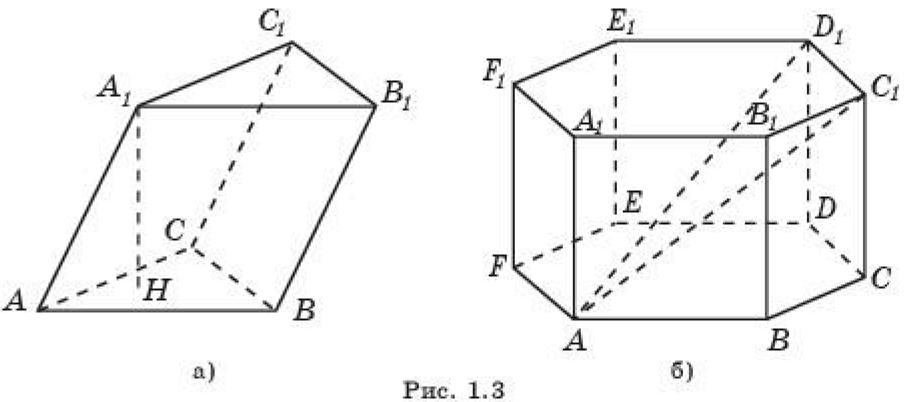


Рис. 1.3

Из определения призмы можно получить следующие ее свойства:

1) боковые ребра равны;

2) основания равны и параллельны.

Докажите эти свойства самостоятельно

Призма, боковыми гранями которой являются прямоугольники, называется *прямой*. В противном случае призма называется *наклонной*. На рисунке 1.3, а изображена наклонная треугольная призма. На рисунке 1.3, б изображена прямая шестиугольная призма.

Как вы думаете, является ли параллелепипед четырехугольной призмой?

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется *правильной*. На рисунке 1.3, б изображена правильная шестиугольная призма.

Перпендикуляр, опущенный из точки одного основания призмы на плоскость другого основания, называется *высотой* этой призмы. На рисунке 1.3, а изображена высота A_1H призмы $ABCA_1B_1C_1$.

Докажите, что высота прямой призмы и длина бокового ребра одинаковы.

Отрезок, соединяющий вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* этой призмы. На рисунке 1.3, б изображены диагонали AC_1 и AD_1 призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

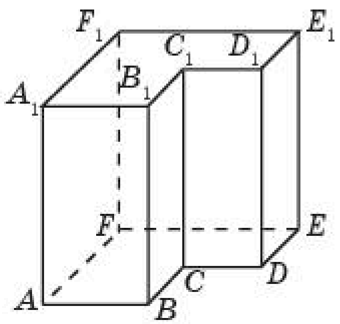


Рис. 1.4

Многогранник называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок.

На рисунке 1.3 изображены выпуклые призмы. На рисунке 1.4 показаны невыпуклая шестиугольная призма.

Заметим, что понятие выпуклости может быть определено для произвольных фигур. Фигура называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками она содержит и соединяющий их отрезок.

На рисунке 1.5 показаны выпуклые (б, в) и невыпуклые (а, г) плоские фигуры.

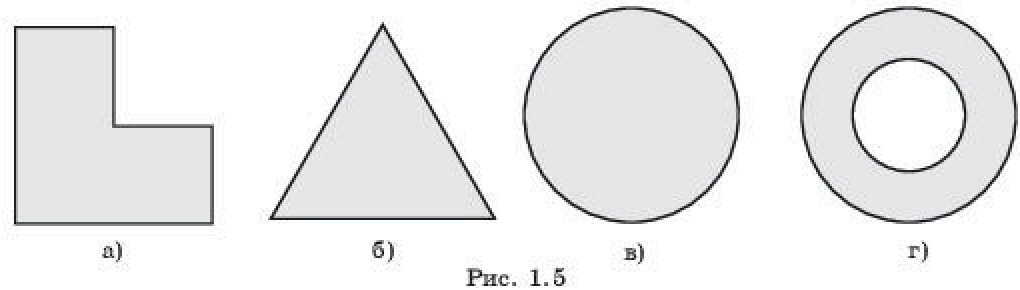


Рис. 1.5

Докажите самостоятельно, что пересечение (общая часть) двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой.

Если поверхность многогранника разрезать по некоторым ребрам и развернуть ее на плоскости так, чтобы все многоугольники, составляющие эту поверхность, лежали в данной плоскости, то получится фигура, называемая *разверткой* многогранника. Например, на рисунке 1.6 изображена развертка куба.

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развертку и затем склеить соответствующие ребра.

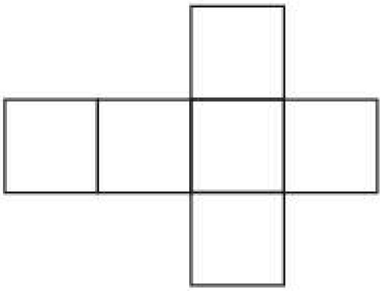


Рис. 1.6

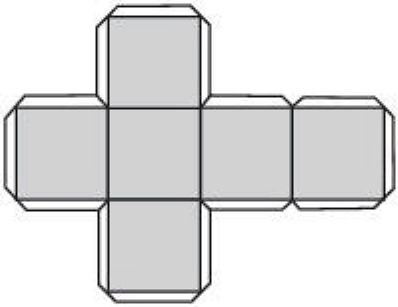


Рис. 1.7

Для удобства развертку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склеивание. На рисунке 1.7 изображена развертка куба с клапанами.

Для более подробного знакомства и изготовлением многогранников из их разверток рекомендуем книгу: Веннинджер М. Модели многогранников. — М.: Мир, 2004.

Площадью поверхности многогранника, по определению, считается сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

Ясно, что площадь поверхности многогранника равна площади его развертки.

Боковой поверхностью призмы называется поверхность, образованная боковыми гранями этой призмы.

Площадь поверхности призмы равна сумме площадей боковой поверхности и оснований, т.е. имеет место формула:

$$S_{\text{призмы}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

Теорема. ***Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.***

Доказательство. По определению $S_{\text{бок}} = S_1 + S_2 + ... + S_n$, где S_1, S_2, ..., S_n — площади боковых граней. Боковые грани прямой призмы — прямоугольники, основания которых — стороны основания призмы, а высоты равны высоте h призмы и $S_1 = a_1h$, $S_2 = a_2h$, ... , $S_n = a_nh$, где a_1, a_2, ..., a_n — длины сторон основания. Отсюда следует, что боковая поверхность призмы выражается формулой:

$$S_{\text{бок}} = a_1h + a_2h + ... + a_nh = (a_1 + a_2 + ... + a_n)h = ph,$$

где p — периметр основания призмы. ◻

Напишите формулу площади поверхности куба, ребра которого равны a.

Напишите формулу площади поверхности прямоугольного параллелепипеда, ребра которого, выходящие из одной вершины, равны a, b.

Для моделирования многогранников можно также использовать свободно распространяемую компьютерную программу GeoGebra, которую можно скачать с официального сайта http://geogebra.org.

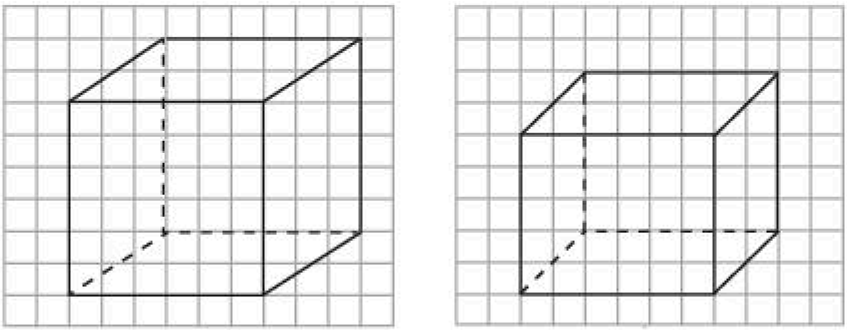
Вопросы

1. Что называется *многогранником*?
2. Какой многогранник называется *кубом*?
3. Что называется диагональю куба?
4. Какой многогранник называется *параллелепипедом*?
5. Что называется *диагональю параллелепипеда*?
6. Какой многогранник называется *призмой*?
7. Какая призма называется *правильной*?
8. Что называется *высотой призмы*?
9. Что называется *диагональю призмы*?
10. Какой многогранник называется *выпуклым*?
11. Что называется *разверткой многогранника*?
12. Что называется *площадью поверхности многогранника*?
13. Как находится площадь поверхности призмы?

Задачи

А

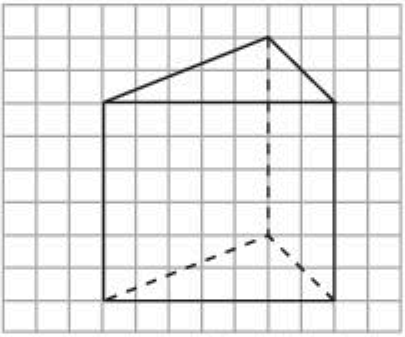
1.1. На листе бумаги в клетку изобразите куб и параллелепипед, аналогичные данным на рисунке 1.8.



а) б)

Рис. 1.8

1.2. На листе бумаги в клетку изобразите призмы, аналогичные данным на рисунке 1.9.


а)

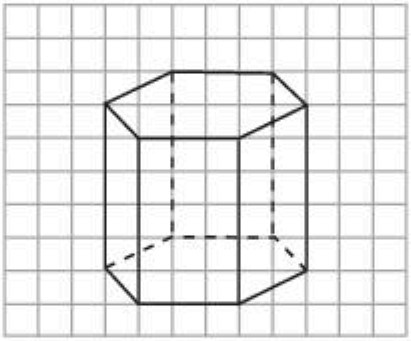

б)

Рис. 1.9

1.3. На рисунке 1.10 укажите параллелепипеды.

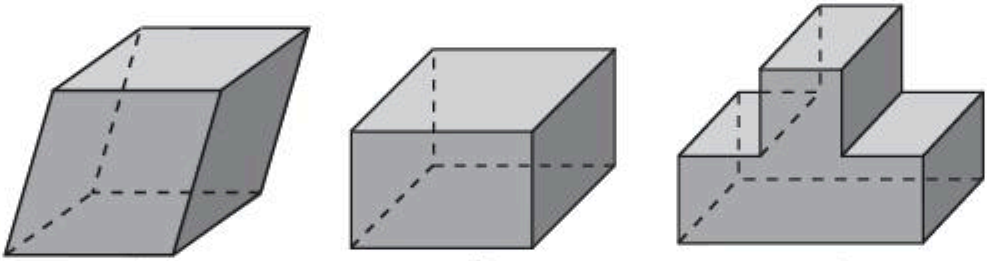

а) б) в)

Рис. 1.10

1.4. На рисунке 1.11 укажите призмы.

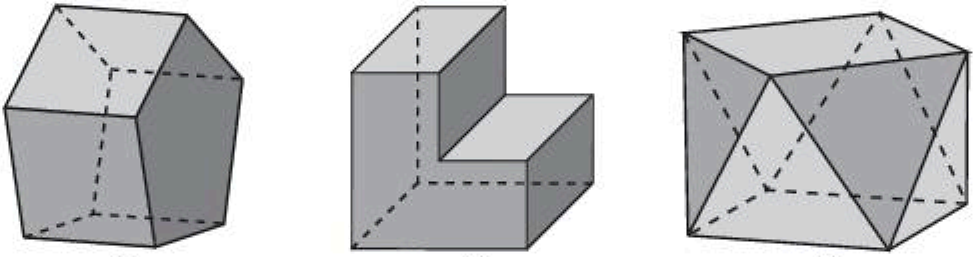

а) б) в)

Рис. 1.11

1.5. На рисунке 1.12 найдите фигуры, которые являются развертками призм. Определите вид этих призм.

1.6. Найдите диагональ куба, ребра которого равны 1.

1.7. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 2, 3, 4.

1.8. Боковое ребро призмы равно 2 и составляет с плоскостью основания угол 30°.Найдите высоту этой призмы.

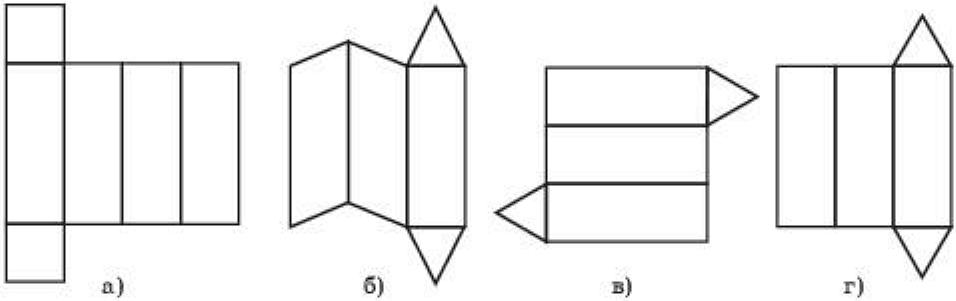


Рис. 1.12

1.9. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его ребра увеличить в 3 раза?

1.10. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если все его ребра уменьшить в 2 раза?

1.11. Во сколько раз увеличится площадь поверхности призмы, если все ее ребра увеличить в два раза?

1.12. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, ребра которого, выходящие из одной вершины, равны 5, 4, 3.

1.13. Найдите площадь поверхности правильной треугольной призмы, ребра которой равны 1 (рис. 1.13).

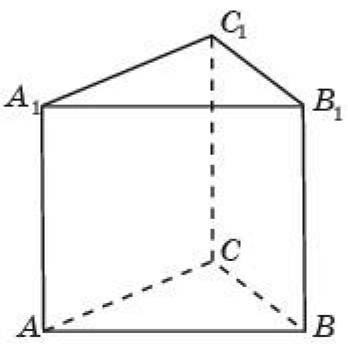


Рис. 1.13

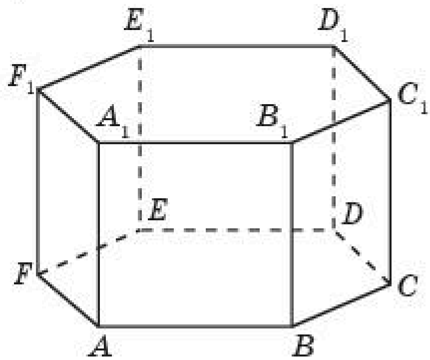


Рис. 1.14

1.14. Найдите площадь поверхности правильной шестиугольной призмы, ребра которой равны 1 (рис. 1.14).

B

1.15. Какие из изображенных на рисунке 1.15 фигур являются развертками куба?

1.16. Диагональ куба равна 1. Найдите ребра этого куба.

1.17. Нарисуйте развертку правильной шестиугольной призмы.

1.18. Найдите диагонали правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1.

1.19. Стороны основания правильной шестиугольной призмы равны 1. Ее большая диагональ равна 3. Найдите высоту этой призмы.

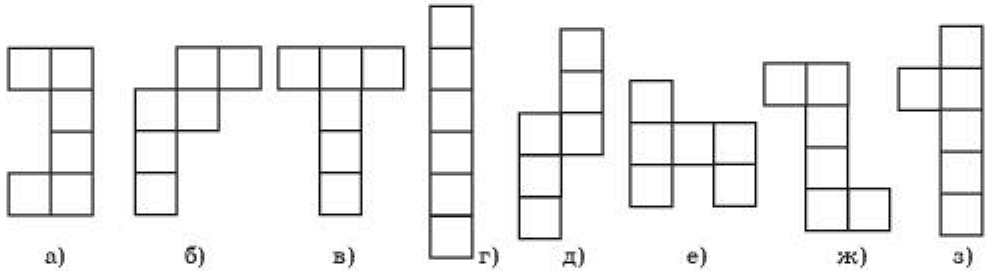


Рис. 1.15

1.20. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2. Каким должно быть третье ребро, выходящее из той же вершины, чтобы площадь поверхности этого параллелепипеда равнялась 40?

1.21. Найдите площади поверхностей деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 1.16.

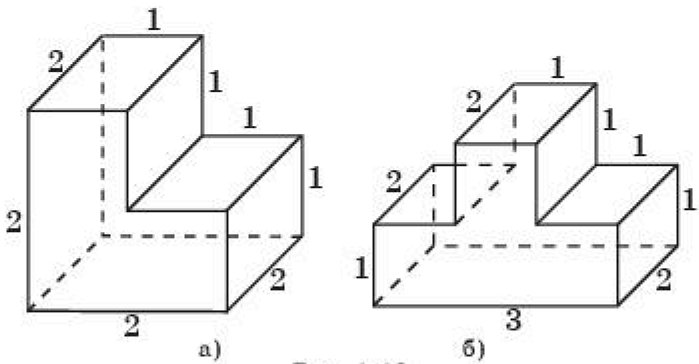


Рис. 1.16

1.22. Найдите площади поверхностей деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 1.17.

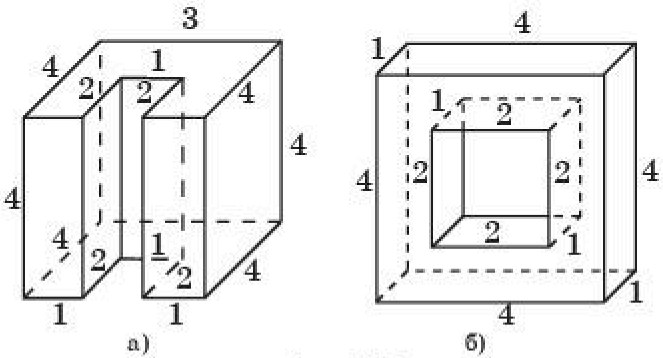
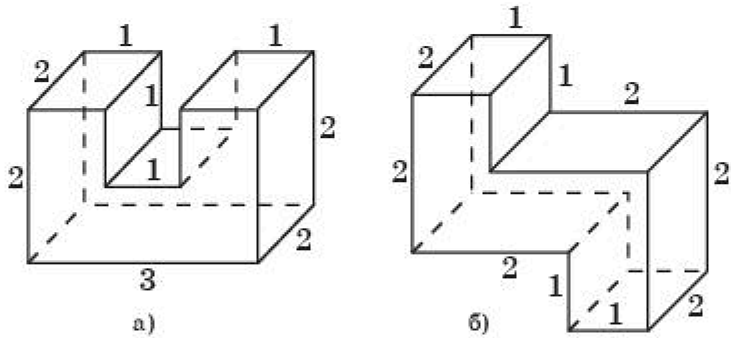


Рис. 1.17

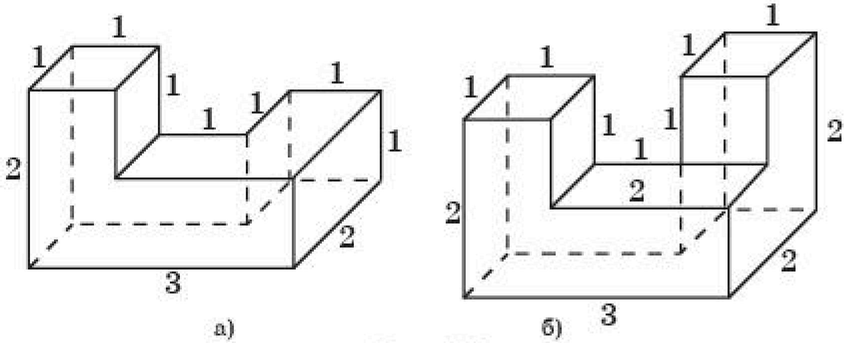
1.23. Найдите площади поверхностей деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 1.18.



а) б)

Рис. 1.18

1.24. Найдите площади поверхностей деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 1.19.



а) б)

Рис. 1.19

1.25. Чему равна площадь поверхности детали в форме пространственного креста (рис. 1.20), если ребра образующих его кубов равны единице?

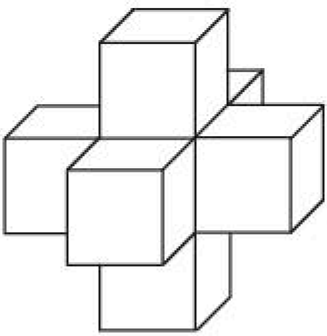


Рис. 1.20

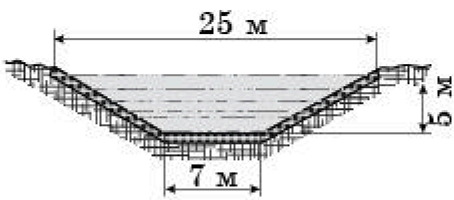


Рис. 1.21

1.26. На рисунке 1.21 изображено поперечное сечение канала. Дно и стенки канала забетонированы. Какую площадь нужно покрыть бетоном на каждый километр канала?

C

1.27. На рисунке 1.22 укажите выпуклые и невыпуклые многогранники.

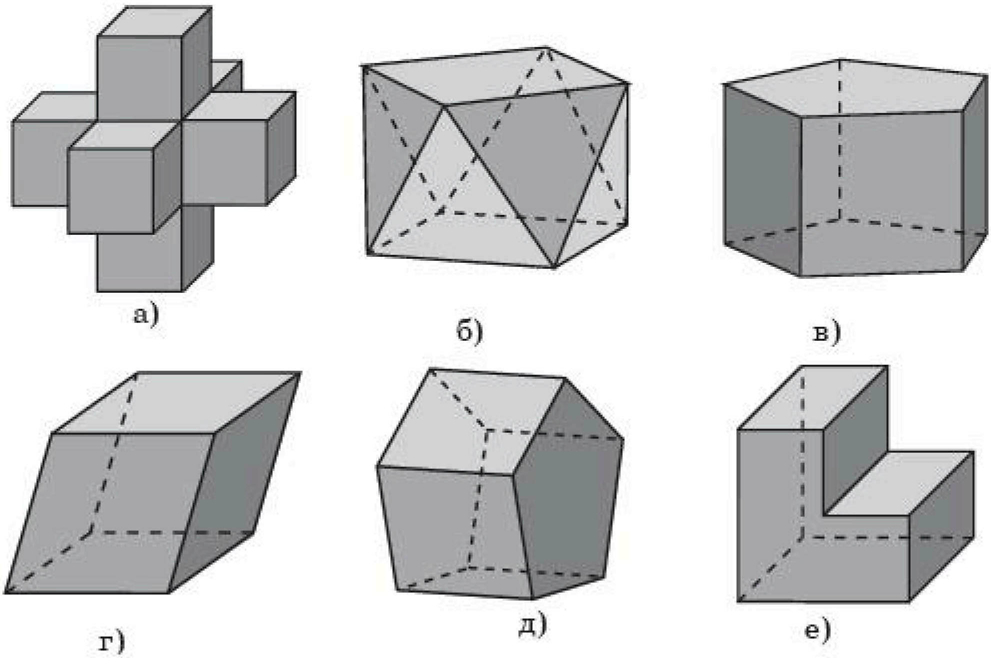


Рис. 1.22

1.28. В каждой грани куба с ребром 6 см проделали сквозное квадратное отверстие со стороной квадрата 2 см (рис. 1.23). Найдите площадь поверхности оставшейся части.

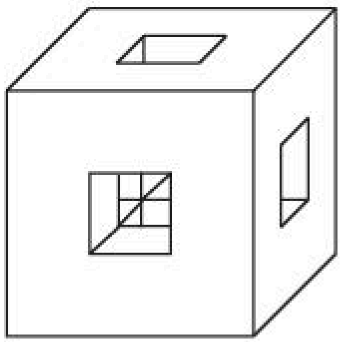


Рис. 1.23

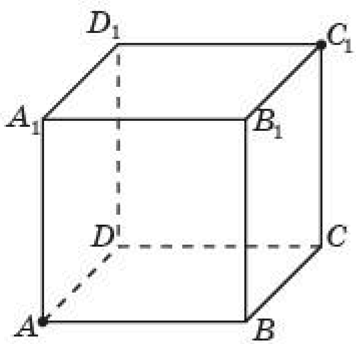


Рис. 1.24

1.29. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба (рис. 1.24) из одной его вершины в противолежащую вершину.

1.30. Может ли невыпуклый многоугольник быть гранью выпуклого многогранника?

1.31. Всегда ли объединение выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

1.32. Приведите пример невыпуклого многогранника, у которого все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1.33. Попробуйте определить понятие пирамиды. Из каких многоугольников состоит ее поверхность?

§ 2. Пирамида и усеченная пирамида. Развертка, площадь боковой и полной поверхности пирамиды и усеченной пирамиды

Пирамидой называется многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого *основанием* пирамиды, и треугольников, имеющих общую вершину, называемых *боковыми гранями* пирамиды. Общая вершина боковых граней называется *вершиной* пирамиды. Ребра, сходящиеся в вершине пирамиды, называют *боковыми ребрами*. Высота боковой грани, проведенная из вершины пирамиды, называется *апофемой*.

Пирамиды бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях — соответственно треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.

Пирамида называется n-угольной, если ее основанием является n-угольник.

На рисунке 2.1 изображены треугольная, четырехугольная и шестиугольная пирамиды.

Пирамиду обозначают указанием ее вершин, например, треугольная пирамида обозначается $SABC$, четырехугольная пирамида обозначается $SABCD$, шестиугольная пирамида обозначается $SABCDEF$. Причем, на первом месте указывается ее вершина.

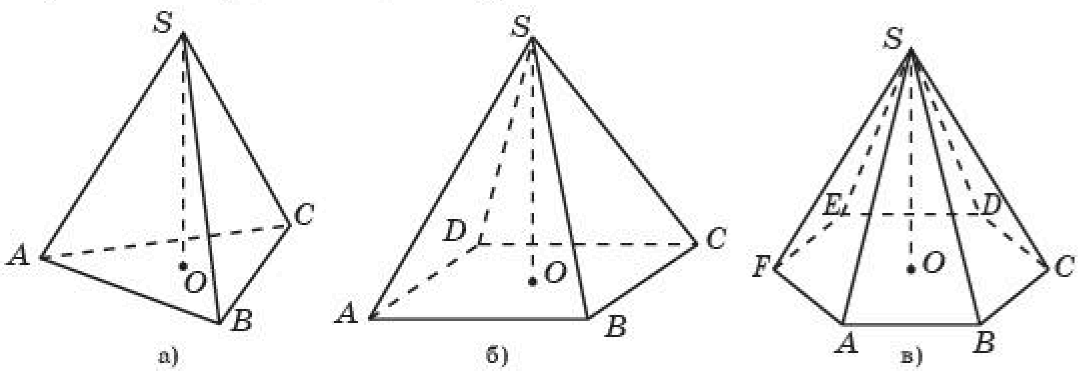


Рис. 2.1

Пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник и все боковые ребра которой равны, называется *правильной*.

Как вы думаете, является ли тетраэдр треугольной пирамидой?

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания, называется *высотой* этой пирамиды. На рисунке 2.1 изображена высота SO пирамиды.

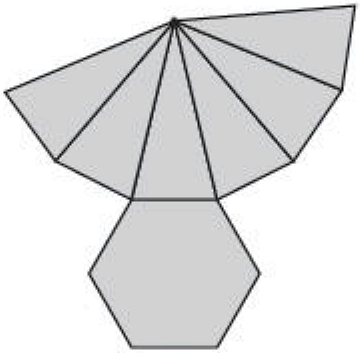


Рис. 2.2

На рисунке 2.2 изображена развертка правильной шестиугольной пирамиды.

Боковой поверхностью пирамиды называется поверхность, образованная боковыми гранями этой пирамиды.

Теорема. ***Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на длину апофемы пирамиды, т.е. имеет место формула***:

$$S_{бок} = \frac{1}{2}pl,$$

где l — апофема (высота боковой грани, опущенной из вершины пирамиды), а p — периметр основания пирамиды.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Площадь поверхности пирамиды равна сумме площадей боковой поверхности и основания, т.е. имеет место формула:

$$S_{пирамиды} = S_{бок} + S_{осн}.$$

Для данной пирамиды рассмотрим плоскость, параллельную плоскости основания этой пирамиды и пересекающей ее боковые ребра. Часть пирамиды, заключенная между этой плоскостью и плоскостью основания, называется *усеченной пирамидой* (рис. 2.3).

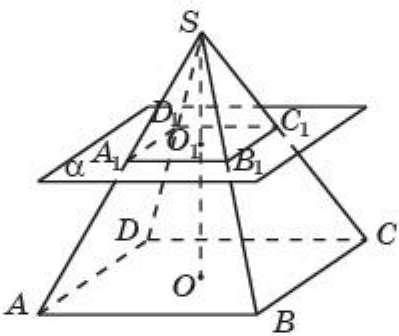


Рис. 2.3

Основание исходной пирамиды и многоугольник, получающийся в сечении данной пирамиды плоскостью, называются *основаниями* усеченной пирамиды.

Усеченная пирамида обозначается указанием вершин ее оснований, например, четырехугольная усеченная пирамида, изображенная на рисунке 2.3, обозначается $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Часть боковых граней пирамиды, содержащихся в усеченной пирамиде, называются *боковыми гранями* усеченной пирамиды.

Часть боковых ребер пирамиды, содержащихся в усеченной пирамиде, называются *боковыми ребрами* усеченной пирамиды.

Усеченные пирамиды бывают треугольные (рис. 2.4, а), четырехугольные, (рис. 2.4, б), шестиугольные, (рис. 2.4, в) и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях.

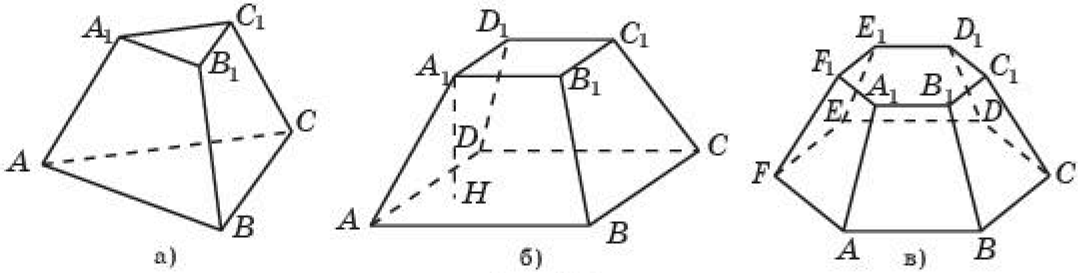


Рис. 2.4

Усеченная пирамида, полученная из правильной пирамиды, называется *правильной*.

Перпендикуляр, опущенный из вершины одного основания усеченной пирамиды на плоскость другого основания, называется *высотой* этой усеченной пирамиды. На рисунке 2.4, б изображена высота A_1H усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Развертка усеченной пирамиды состоит из двух подобных многоугольников — оснований усеченной пирамиды, и трапеций — боковых граней усеченной пирамиды.

Боковой поверхностью усеченной пирамиды называется поверхность, образованная боковыми гранями этой усеченной пирамиды.

Теорема. ***Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на длину апофемы, т.е. имеет место формула*:**

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(p + p_1)l,$$

где p и p_1 — периметры оснований усеченной пирамиды, а l — ее апофема.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Площадь поверхности усеченной пирамиды равна сумме площадей боковой поверхности и оснований, т.е. имеет место формула

$$S_{\text{усеченной пирамиды}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2}.$$

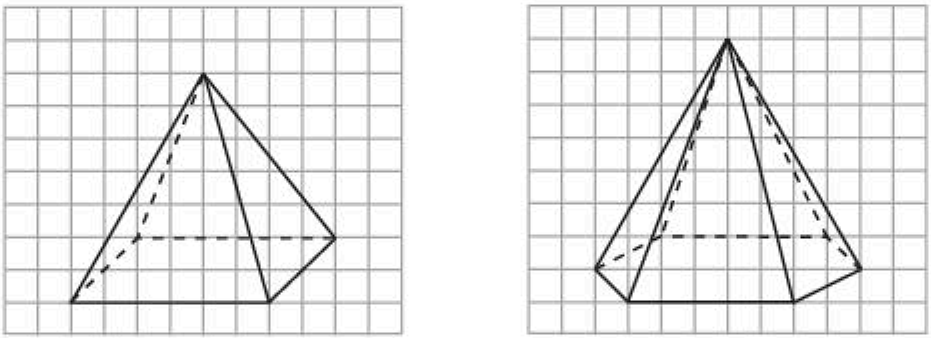
Вопросы

1. Какой многогранник называется *пирамидой*?
2. Какая пирамида называется *правильной*?
3. Что называется *высотой пирамиды*?
4. Какой многогранник называется *усеченной пирамидой*?
5. Какая усеченная пирамида называется *правильной*?
6. Что называется *высотой усеченной пирамиды*?
7. Как находится площадь поверхности пирамиды?
8. Как находится площадь поверхности усеченной пирамиды?

Задачи

А

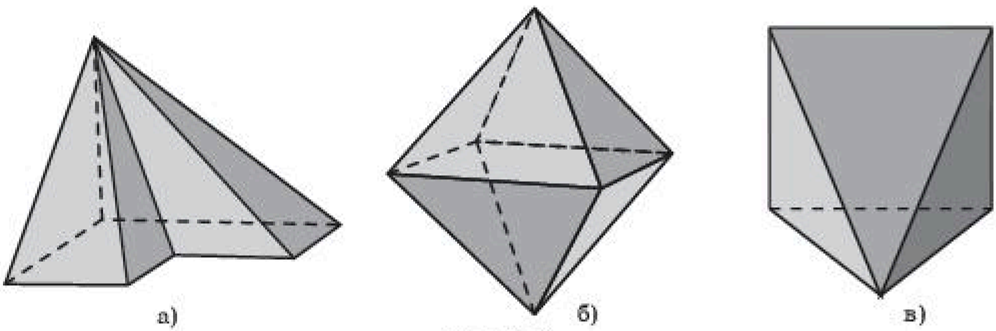
2.1. На листе бумаги в клетку изобразите пирамиды, аналогичные данным на рисунке 2.5.



а) б)

Рис. 2.5

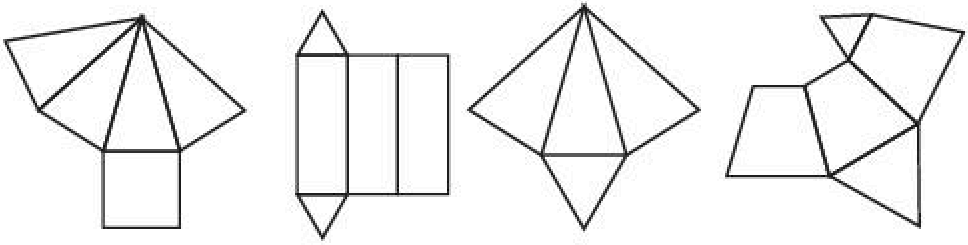
2.2. На рисунке 2.6 укажите пирамиды.



а) б) в)

Рис. 2.6

2.3. Среди данных на рисунке 2.7 разверток найдите развертки пирамид. Выясните их вид.



а) б) в) г)

Рис. 2.7

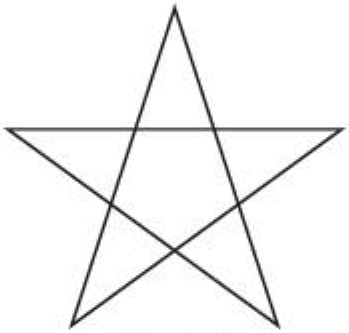


Рис. 2.8

2.4. Разверткой какого многогранника может служить фигура, изображенная на рисунке 2.8?

2.5. Нарисуйте развертку правильной четырехугольной пирамиды.

2.6. Найдите высоту правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1.

2.7. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1 (рис. 2.9).

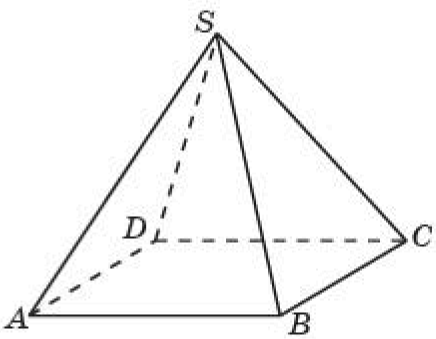


Рис. 2.9

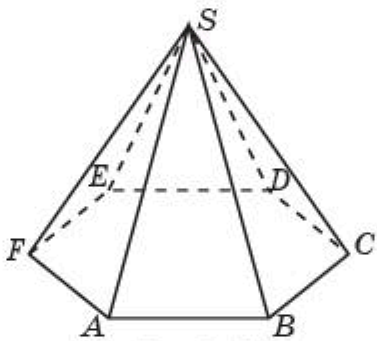


Рис. 2.10

2.8. Найдите площадь поверхности правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2 (рис. рис. 2.10).

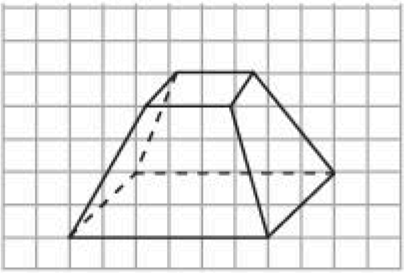
B

2.9. Найдите высоту правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2.

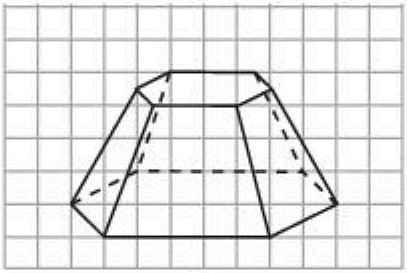
2.10. Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра увеличить в два раза?

2.11. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра уменьшить в три раза?

2.12. На листе бумаги в клетку изобразите усеченные пирамиды, аналогичные данным на рисунке 2.11.



а)



б)

Рис. 2.11

2.13. Нарисуйте развертку правильной четырехугольной усеченной пирамиды.

C

2.14. Нарисуйте развертку правильной шестиугольной усеченной пирамиды.

2.15. Найдите высоту правильной четырехугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 4 и 2, а боковые ребра равны 3.

2.16. Найдите боковые ребра правильной шестиугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 2 и 1, а высота равна 3.

2.17. Дворец мира и согласия в Нур-Султане (рис. 2.12) имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания и высота которой равны 62 м. Найдите площадь боковой поверхности Дворца.

Рис. 2.12

Рис. 2.13

2.18. Пирамида Хеопса в Египте — правильная четырехугольная пирамида, высота которой около 140 м, а площадь основания 5,3 га (рис. 2.13). Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

2.19. Найдите площадь поверхности детали в форме правильной четырехугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 1 и 2, а боковые ребра равны 1 (рис. 2.14).

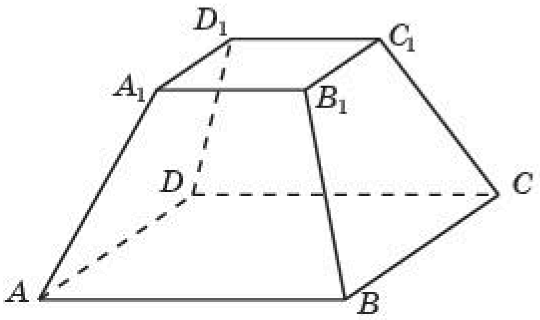


Рис. 2.14

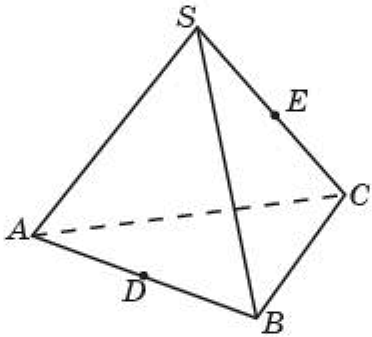


Рис. 2.15

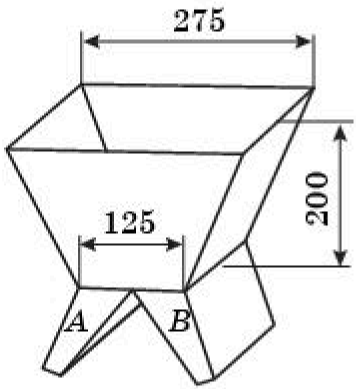


Рис. 2.16

2.20. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной пирамиды $SABC$ (рис. 2.15), соединяющего середины ребер AB и SC.

2.21. На рисунке 2.16 изображен бункер, поверхность основной части которого представляет боковую поверхность правильной четырехугольной усеченной пирамиды. По размерам, указанным на рисунке (в см), вычислите, сколько квадратных дециметров листового железа нужно для изготовления бункера (не считая рукавов A и B).

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

2.22. Проверьте, что для числа вершин (В), ребер (Р) и граней (Г): а) параллелепипеда; б) призмы; в) пирамиды выполняется равенство В – Р + Г = 27

§ 3*. Теорема Эйлера

Рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой В — число вершин, Р — число ребер, Г — число граней многогранника.

Таблица 1

Название многогранника	В	Р	Г
Параллелепипед	8	12	6
Треугольная пирамида	4	6	4

Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
n–угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$
n–угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство В – Р + Г = 2. Оказывается, что это равенство справедливо не только для рассмотренных многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника. Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 году и получило название теоремы Эйлера.

Теорема Эйлера. ***Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство***

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2,$$

где В – число вершин, Р – число ребер, Г – число граней данного многогранника.

Доказательство. Представим поверхность данного многогранника, сделанной из эластичного материала. Удалим (вырежем) одну из его граней и оставшуюся поверхность растянем на плоскости. Получим сетку, содержащую В вершин, Р ребер и Г областей, на которые эта сетка разбивает плоскость.

Докажем, что В – Р + Г этой сетки не изменится, если какое-нибудь ее ребро, имеющее две вершины, стянуть по этому ребру в одну из его вершин.

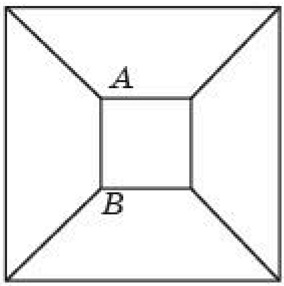


Рис. 3.1

В качестве примера рассмотрим сетку, изображенную на рисунке 3.1, получающуюся, если указанную операцию проделать с кубом. Для нее В = 8, Р = 12, Г = 6.

Стягиванием ребра AB в точку получается сетка, изображенная на рисунке 3.2. В результате число вершин В уменьшится на единицу, число ребер Р уменьшится на единицу, а число областей не изменится. Следовательно, не изменится и В – Р + Г.

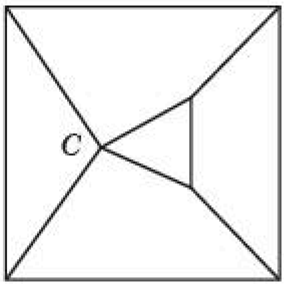
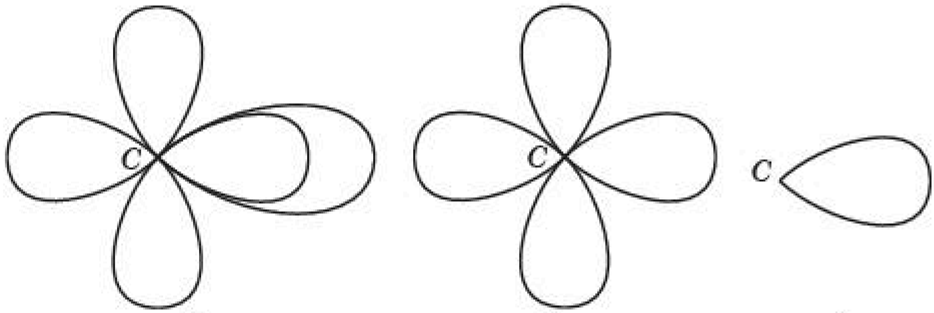


Рис. 3.2

Пользуясь этим свойством, стянем все ребра, имеющие две вершины. Получим сетку, у которой одна вершина, а ребрами являются петли с этой вершиной (рис. 3.3, а). Причем, для этой сетки В – Р + Г останется таким же, как и для исходной.

Докажем, что В – Р + Г не изменится, если убрать какую-нибудь петлю полученной сетки.

Действительно, в этом случае число вершин В не изменится (оно равно 1), число ребер Р уменьшится на единицу, число областей уменьшится на единицу (рис. 3.3, б). Следовательно, не изменится и В − Р + Г.



а) б) в)

Рис. 2.3

Пользуясь этим свойством, уберем все петли, кроме одной. Получим сетку, у которой одна вершина и одно ребро – петля с этой вершиной (рис. 3.3, в).

Для этой сетки В = 1, Р = 1, Г = 2, т. е. В − Р + Г = 2. Значит, это равенство имеет место и для исходного многогранника.

Пример. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится пять треугольников. Сколько у него вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)?

Решение. Так как в каждой вершине данного многогранника сходится пять ребер, а каждое ребро имеет две вершины, то выполняется равенство 5В = 2Р. Следовательно, $В = \frac{2Р}{5}$. Так как гранями этого многогранника являются только треугольники, а в каждом треугольнике имеется три ребра, то выполняется равенство 3Г = 2Р. Следовательно, $Г = \frac{2Р}{3}$. Подставим найденные выражения для В и Г в равенство Эйлера В − Р + Г = 2, получим уравнение

$$\frac{2Р}{5} - Р + \frac{2Р}{3} = 2,$$

решая которое, получаем Р = 30. Подставляя это значение в выражения для В и Г, находим В = 12, Г = 20.

Исторические сведения

Леонард Эйлер (1707—1783) — один из величайших математиков мира, работы которого оказали решающее влияние на развитие многих современных разделов математики.

Научное наследие ученого огромно. При жизни им опубликовано 530 книг и статей, а сейчас их известно уже более 800. Причем последние 12 лет своей жизни Эйлер тяжело болел, ослеп и, несмотря на тяжелый недуг, продолжал работать и творить. Статистические подсчеты показывают, что Эйлер в среднем делал одно открытие в неделю.

Трудно найти математическую проблему, которая не была бы затронута в произведениях Эйлера. Все математики последующих поколений так или иначе учились у Эйлера, и недаром известный французский ученый П.С. Лаплас сказал: “Читайте Эйлера, он — учитель всех нас”.

Теорему Эйлера историки математики называют первой теоремой *топологии* — раздела геометрии, который изучает свойства фигур, не меняющихся при непрерывных деформациях, допускающих любые растяжения и сжатия, но без разрывов или дополнительных склеек. Такие свойства называются топологическими.

Соотношение Эйлера В − Р + Г = 2 для выпуклых многогранников описывает как раз такое топологическое свойство. Многогранник можно как угодно деформировать, при этом ребра и грани могут искривляться, однако их число, следовательно, и соотношение Эйлера не меняются.

Заметим, что при доказательстве соотношения Эйлера мы уже использовали подобные деформации, когда поверхность многогранника с вырезанной одной гранью растягивали на плоскости. Ребра и сами многоугольники могут быть искривлены, но это не влияет на соотношение Эйлера.

Для знакомства с жизнью и творчеством Леонардо Эйлера рекомендуем книгу: Тиле Р. Леонард Эйлер. — Киев: Вища школа, 1982.

Вопросы

1. Чему равно число вершин, ребер и граней: а) n-угольной призмы; б) n-угольной пирамиды?
2. Сформулируйте теорему Эйлера.
3. Когда она была доказана?
4. Что изучает *топология*?

Задачи

А

3.1. У выпуклого многогранника 6 вершин и 12 ребер. Сколько у него граней?

3.2. У выпуклого многогранника 8 вершин и 6 граней. Сколько у него ребер?

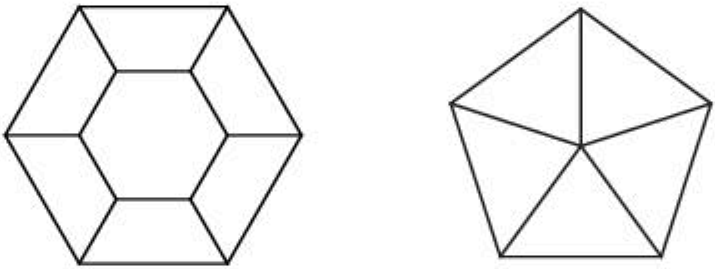
3.3. У выпуклого многогранника 9 ребер и 5 граней. Сколько у него вершин?

B

3.4. В модели треугольной призмы, сделанной из эластичного материала, вырезали одно основание, и оставшиеся грани растянули на плоскости. Сделайте рисунок получившейся сетки.

3.5. В модели четырехугольной пирамиды, сделанной из эластичного материала, вырезали основание, и оставшиеся грани растянули на плоскости. Сделайте рисунок получившейся сетки.

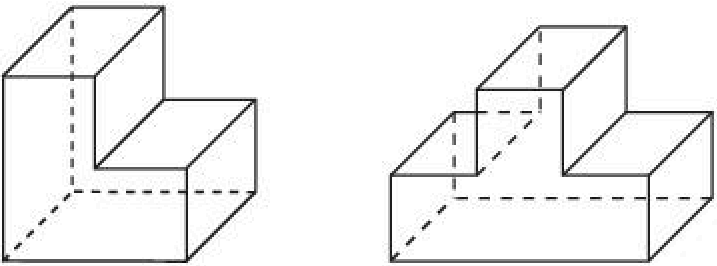
3.6. Для сеток, изображенных на рисунке 3.4, укажите соответствующий многогранник.



а) б)

Рис. 3.4

3.7. Проверьте, выполняется ли равенство Эйлера для многогранников, изображенных на рисунке 3.5.



а) б)

Рис. 3.5

C

3.8. Выполняется ли соотношение Эйлера для невыпуклой призмы?

3.9. Выполняется ли соотношение Эйлера для невыпуклой пирамиды?

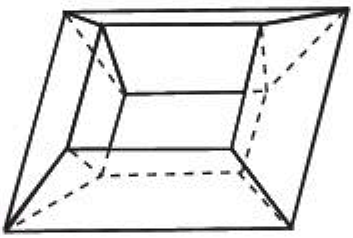


Рис. 3.6

3.10. Найдите число вершин, ребер и граней для многогранника, изображенного на рисунке 3.6. Выполняется ли для него соотношение Эйлера?

3.11. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится четыре треугольника. Сколько у него вершин (В), ребер (Р), граней (Г)?

3.12. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится три пятиугольника. Сколько у него вершин (В), ребер (Р), граней (Г)?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

3.13. Повторите определение правильного многоугольника. Попробуйте дать определение правильного многогранника.

§ 4. Правильные многогранники

Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его гранями являются равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Выясним, сколько и каких правильных многоугольников может сходиться в вершинах правильного многогранника.

Наиболее простым правильным многогранником является многогранник, гранями которого являются четыре правильных треугольника (рис. 4.1, а), и в каждой его вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется *правильным тетраэдром*. Тетраэдр в переводе с греческого языка означает четырехгранник ("тетра" — четыре, "эдра" — грань).

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке 4.1, б. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется *октаэдром* ("окта" — восемь).

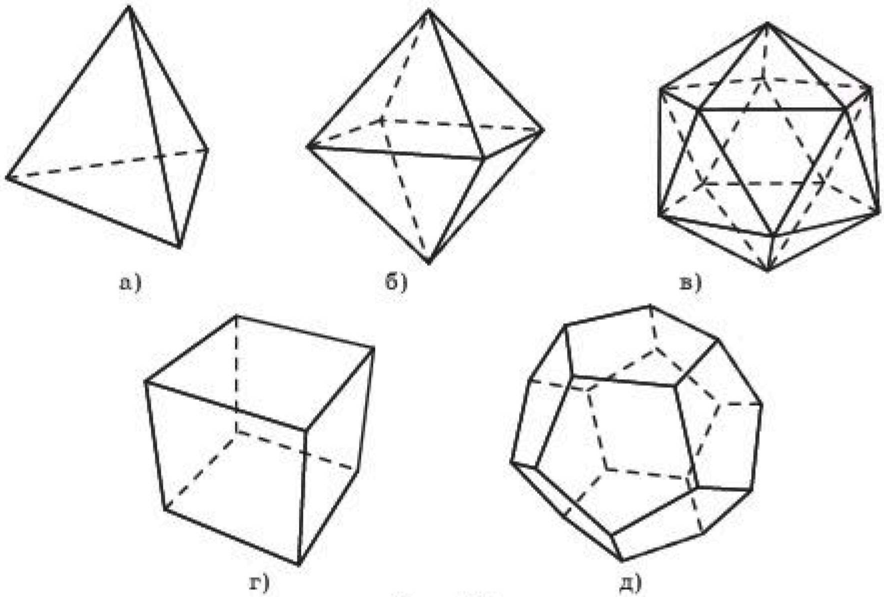


Рис. 4.1

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке 4.1, в. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется *икосаэдром* ("икоси" — двадцать).

Заметим, что в вершине выпуклого многогранника может сходиться не более пяти правильных треугольников, так как в противном случае сумма плоских углов при этой вершине будет больше или равна 360°. Поэтому других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. 4.1, г), других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты, не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также *гексаэдром* ("гекса" — шесть).

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники, и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке 4.1, д. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется *додекаэдром* ("додека" — двенадцать).

Поскольку в вершинах выпуклого многогранника не могут сходиться правильные многоугольники с числом сторон больше пяти, то других правильных многогранников не существует. Таким образом, имеется только пять правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

?

Как вы думаете, почему правильная треугольная призма, боковыми гранями которой являются квадраты, не является правильным многогранником?

Исторические сведения

Правильные многогранники с древних времен привлекали к себе внимание ученых, строителей, архитекторов и многих других. Их поражала красота, совершенство, гармония этих многогранников. Пифагорейцы считали эти многогранники божественными и использовали их в своих философских сочинениях о существе мира. Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий ученый Платон (429—348 до н. э). Именно поэтому правильные многогранники называются также *телами Платона*. Правильным многогранникам посвящена последняя XIII книга знаменитых "Начал" Евклида.

В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многогранников проявили скульпторы, архитекторы, художники. Леонардо да Винчи (1452—1519), например, увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Он проиллюстрировал изображениями правильных и полуправильных многогранников книгу своего друга монаха Луки Пачоли (1445—1514) "О божественной пропорции".

Другим знаменитым художником эпохи Возрождения, также увлекавшимся геометрией, был Альбрехт Дюрер. В его известной гравюре "Меланхолия" на переднем плане изображен додекаэдр. В 1525 году Дюрер написал трактат, в котором представил пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы.

Иоганн Кеплер (1571—1630) в своей работе "Тайна мироздания", изданной в 1596 году, построил модель Солнечной системы, используя правильные многогранники, описанные вокруг сфер — орбит известных в то время планет.

В центре Кеплер поместил орбиту Земли. Геометрия Солнечной системы, по Кеплеру, заключалась в следующем: "Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг нее опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия". Другие планеты в то время еще не были открыты.

Такая модель Солнечной системы получила название "Космического кубка" Кеплера.

Вопросы

1. Какой выпуклый многогранник называется *правильным*?
2. Какой многогранник называется: а) *правильным тетраэдром*; б) *октаэдром*; в) *икосаэдром*; г) *гексаэдром*; д) *додекаэдром*?
3. Кто занимался изучением правильных многогранников?

Задачи

А

4.1. Сколько вершин, ребер и граней имеет: а) правильный тетраэдр; б) куб; в) октаэдр; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

4.2. Треугольную бипирамиду сложили из двух правильных тетраэдров, совместив их грани (частица "би" означает удвоение). Будет ли получившийся многогранник правильным? Почему?

4.3. Четырехугольную бипирамиду сложили, совместив основания двух четырехугольных пирамид, боковыми гранями которых являются правильные треугольники. Будет ли получившийся многогранник правильным?

4.4. На листе бумаги в клетку изобразите октаэдр аналогично данному на рисунке 4.2.

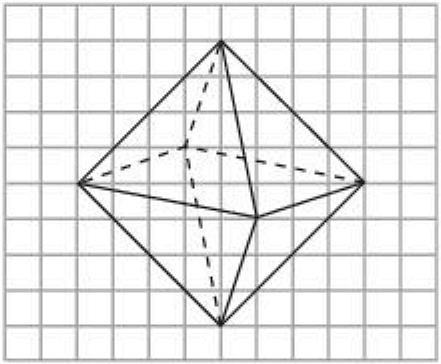


Рис. 4.2

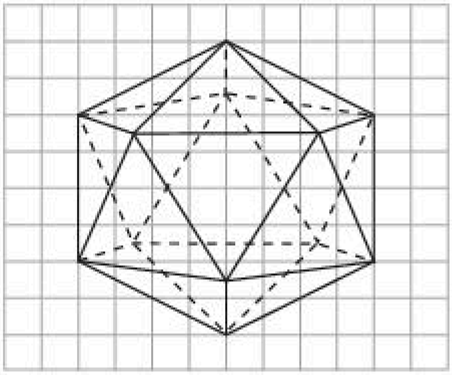


Рис. 4.3

4.5. На листе бумаги в клетку изобразите икосаэдр аналогично данному на рисунке 4.3.

4.6. На листе бумаги в клетку изобразите додекаэдр аналогично данному на рисунке 4.4.

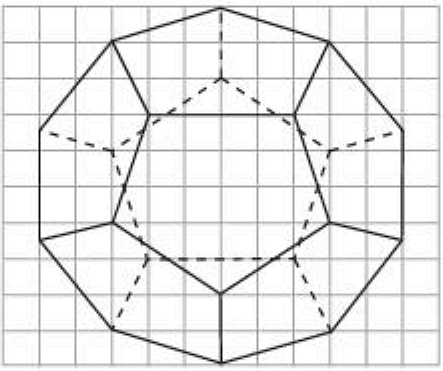


Рис. 4.4

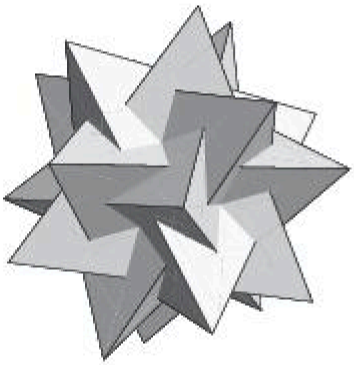


Рис. 4.5

4.7. Сколько тетраэдров изображено на рисунке 4.5?

4.8. Сколько октаэдров изображено на рисунке 4.6?

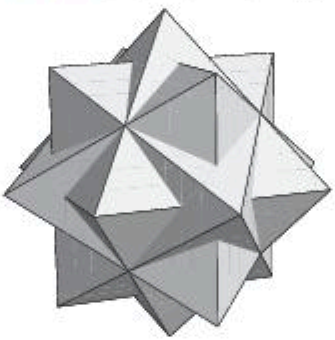


Рис. 4.6

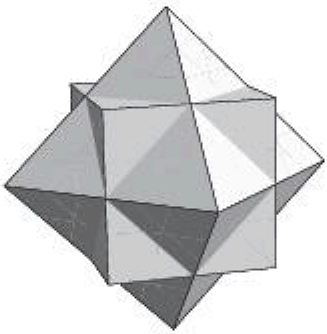


Рис. 4.7

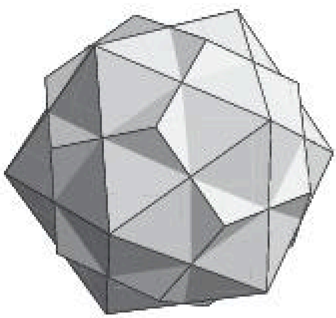


Рис. 4.8

4.9. Соединение каких двух многогранников изображено на рисунке 4.7?

4.10. Соединение каких двух многогранников изображено на рисунке 4.8?

B

4.11. Изобразите куб аналогично данному на рисунке 4.9. Вершинами какого многогранника являются вершины A, C, B_1, D_1 этого куба? Изобразите этот многогранник. Найдите его ребро, если ребра исходного куба равны 1.

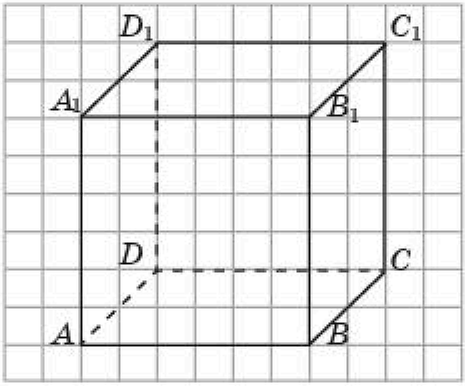


Рис. 4.9

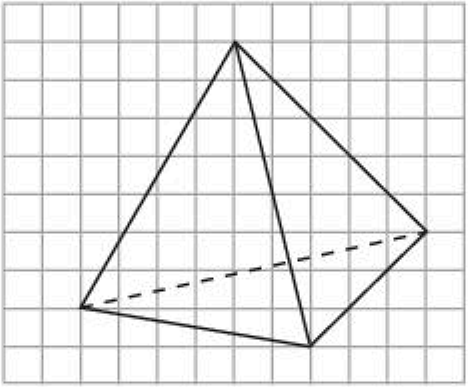


Рис. 4.10

4.12. Изобразите куб аналогично данному на рисунке 4.9. Отметьте центры граней куба. Вершинами какого многогранника они являются? Изобразите этот многогранник. Найдите его ребро, если ребра исходного куба равны 1.

4.13. На листе бумаги в клетку изобразите тетраэдр аналогично данному на рисунке 4.10. Отметьте середины ребер тетраэдра. Вершинами какого многогранника они являются? Найдите его ребро, если ребра исходного тетраэдра равны 1.

4.14. От каждой вершины тетраэдра с ребром 2 см отсекается тетраэдр с ребром 1 см. Какой многогранник останется? Найдите его ребро.

4.15. Ребро октаэдра равно 1 см. Определите расстояние между его противолежащими вершинами.

4.16. Сколько имеется путей длиной 2 см по ребрам единичного октаэдра из одной его вершины в противоположную вершину?

4.17. Сколько имеется путей длиной 3 см по ребрам единичного октаэдра из одной его вершины в противолежащую вершину?

C

4.18. На листе бумаги в клетку изобразите тетраэдр аналогично данному на рисунке 4.10. Отметьте центры граней тетраэдра. Вершинами какого многогранника они являются? Найдите его ребро, если ребра исходного тетраэдра равны 1 см.

4.19. На листе бумаги в клетку изобразите октаэдр аналогично данному на рисунке 4.2. Отметьте центры граней октаэдра. Вершинами какого многогранника они являются? Найдите его ребро, если ребра исходного октаэдра равны 1 см.

4.20. На листе бумаги в клетку изобразите икосаэдр аналогично данному на рисунке 4.3. Отметьте центры граней икосаэдра. Вершинами какого многогранника они являются?

4.21. На листе бумаги в клетку изобразите додекаэдр аналогично данному на рисунке 4.5. Отметьте центры граней додекаэдра. Вершинами какого многогранника они являются?

4.22. Сколько имеется путей длиной 3 см по ребрам единичного икосаэдра из одной его вершины в противолежащую вершину?

4.23. Сколько имеется путей длиной 5 см по ребрам единичного додекаэдра из одной его вершины в противоположную вершину?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

4.24. Повторите определения центральной симметрии и осевой симметрии на плоскости

§ 5*. Симметрия многогранников

Понятие симметрии фигур на плоскости рассматривалось в курсе планиметрии. В частности, определялись понятия центральной и осевой симметрий. Для пространственных фигур понятие симметрии определяется аналогичным образом.

По словам выдающегося немецкого математика Г. Вейля (1885—1955), “симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство”.

Прекрасные образы симметрии демонстрируют произведения искусства: архитектуры, живописи, скульптуры и т. д. Для знакомства с ними рекомендуем книгу: Шубников А.В., Копцик В.А. Симметрия в науке и искусстве. — М.: Наука, 1972.

Две точки A и A' пространства называются *симметричными относительно точки* O, называемой *центром симметрии*, если O является серединой отрезка AA' (рис. 5.1). Точка O считается симметричной сама себе.

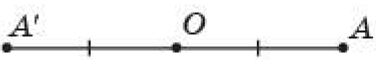


Рис. 5.1

Преобразование пространства, при котором точки A переходят в точки A', симметричные относительно заданной точки O, называется *центральной симметрией*. Точка O называется *центром симметрии*.

Две фигуры $Ф$ и $Ф'$ в пространстве называются *центрально-симметричными* с центром O, если каждая точка A одной фигуры симметрична относительно точки O некоторой точке A' другой фигуры (рис. 5.2).

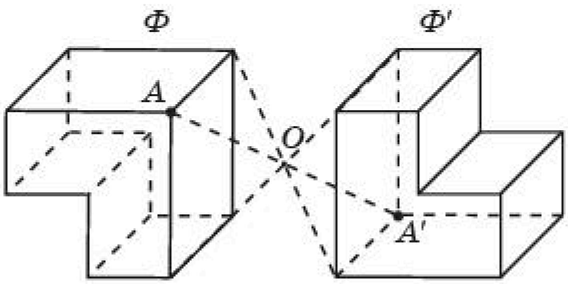


Рис. 5.2

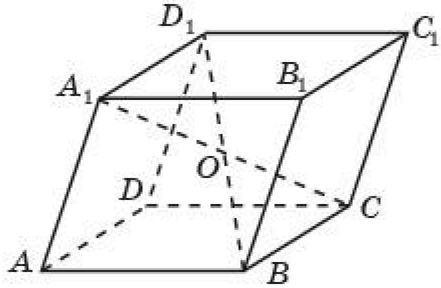


Рис. 5.3

Фигура $Ф$ в пространстве называется *центрально-симметричной* с центром O, если она центрально-симметрична сама себе относительно точки O.

Например, параллелепипед центрально-симметричен относительно точки O пересечения его диагоналей (рис. 5.3).

Как Вы думаете, может ли у фигуры быть несколько центров симметрии?

Две точки A и A' пространства называются *симметричными относительно прямой* a, называемой *осью симметрии*, если прямая a проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна этому отрезку (рис. 5.4). Точки прямой a считаются симметричными сами себе.

Преобразование пространства, при котором точки A переходят в точки A', симметричные относительно заданной прямой a, называется *осевой симметрией*. Прямая a называется *осью симметрии*.

Две фигуры $Ф$ и $Ф'$ в пространстве называются *симметричными* относительно оси a, если каждая точка A одной фигуры симметрична относительно оси a некоторой точке A' другой фигуры (рис. 5.5).

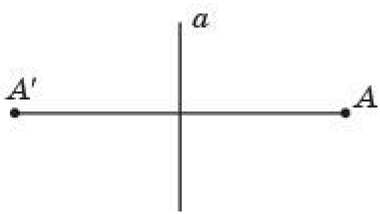


Рис. 5.4

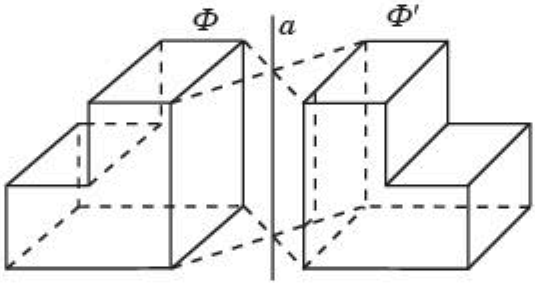


Рис. 5.5

Фигура $Ф$ в пространстве называется *симметричной относительно оси* a, если она симметрична сама себе относительно оси a.

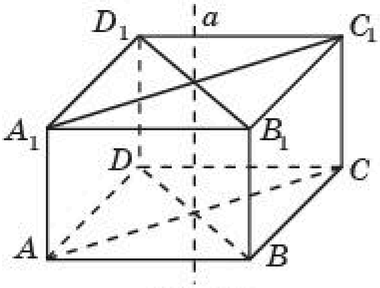


Рис. 5.6

Например, прямоугольный параллелепипед симметричен относительно оси, проходящей через точки пересечения диагоналей противолежащих граней (рис. 5.6).

Как Вы думаете, может ли у фигуры быть несколько осей симметрии?

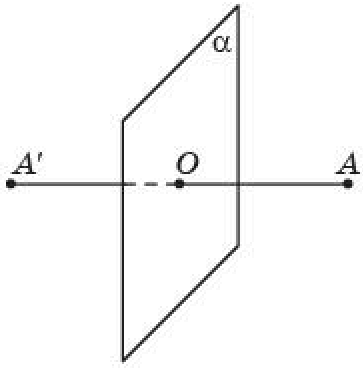


Рис. 5.7

Две точки A и A' пространства называются *симметричными относительно плоскости* α, называемой *плоскостью симметрии*, если эта плоскость проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к нему. Точки плоскости α считаются симметричными сами себе (рис. 5.7).

Преобразование пространства, при котором точки A переходят в точки A', симметричные относительно заданной плоскости α, называется *симметрией относительно плоскости* α. Плоскость α, называется *плоскостью симметрии*.

Симметрия относительно плоскости называется также *зеркальной симметрией*.

Две фигуры Φ и Φ' в пространстве называются *зеркально-симметричными* относительно плоскости α, если каждая точка A одной фигуры зеркально-симметрична относительно плоскости α некоторой точке A' другой фигуры (рис. 5.8).

Фигура Φ в пространстве называется *зеркально-симметричной* относительно плоскости α, если она зеркально-симметрична сама себе относительно плоскости α.

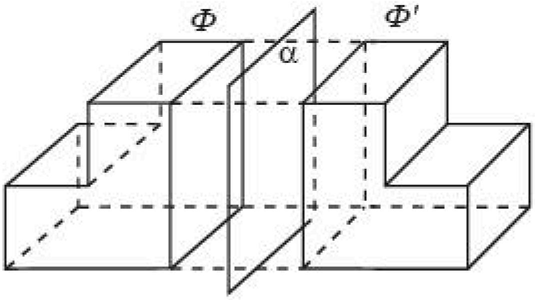


Рис. 5.8

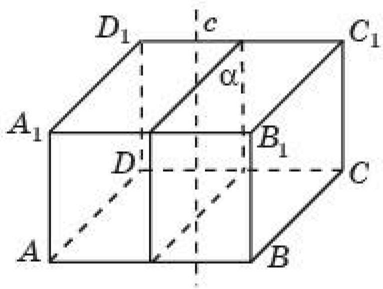


Рис. 5.9

Например, прямоугольный параллелепипед зеркально-симметричен относительно плоскости, проходящей через ось симметрии и параллельной одной из пар противолежащих граней (рис. 5.9).

Как Вы думаете, может ли у фигуры быть несколько плоскостей симметрии?

Кристаллы — природные многогранники

Многие формы многогранников придумал не сам человек, а их создала природа в виде кристаллов. Кристаллы поваренной соли имеют форму куба (рис. 5.10), кристаллы льда и горного хрусталя (кварца) напоминают отточенный с двух сторон карандаш, т. е. имеют форму шестиугольной призмы, на основания которой поставлены шестиугольные пирамиды (рис. 5.11).

Рис. 5.10

Рис. 5.11

Алмаз чаще всего встречается в виде октаэдра (рис. 5.12). Исландский шпат, который раздваивает изображение, имеет форму косого параллелепипеда (рис. 5.13).

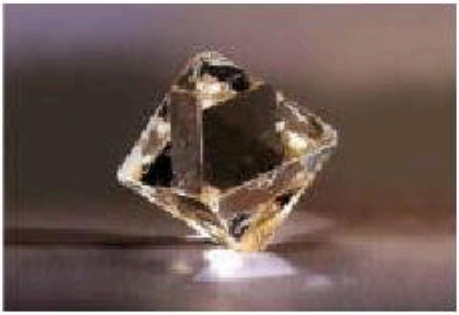


Рис. 5.12

Рис. 5.13

Внешняя форма кристаллов — это лишь проявление их физических и химических свойств. Все они объясняются особенностями геометрического строения кристаллов, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решетке.

Приведите примеры других кристаллов и укажите их форму.

Для более подробного знакомства с кристаллами рекомендуем посетить сайты Геологического музея Республики Казахстан и Минералогического музея им. А.Е. Ферсмана.

Вопросы

1. Какие точки пространства называются *центрально-симметричными*?
2. Какое преобразование пространства называется *центральной симметрией*?
3. Какие две фигуры в пространстве называются *центрально-симметричными*?
4. Какая фигура в пространстве называется *центрально-симметричной*?
5. Какие точки называются *симметричными относительно оси*?
6. Какое преобразование пространства называется *осевой симметрией*?
7. Какие две фигуры в пространстве называются *симметричными относительно оси*?
8. Какая фигура в пространстве называется *симметричной относительно оси*?
9. Какие точки пространства называются *симметричными относительно плоскости*?
10. Какое преобразование пространства называется *зеркальной симметрией*?
11. Какие две фигуры в пространстве называются *зеркально-симметричными*?
12. Какая фигура в пространстве называется *зеркально-симметричной*?

Задачи

А

5.1. Приведите примеры центрально-симметричных и не центрально-симметричных фигур в пространстве.

5.2. Имеет ли куб (рис. 5.14): а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

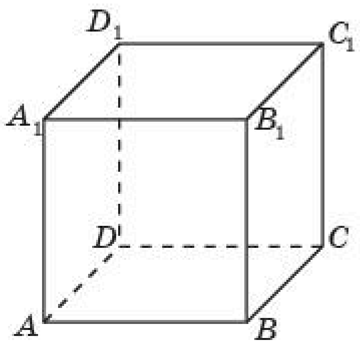


Рис. 5.14

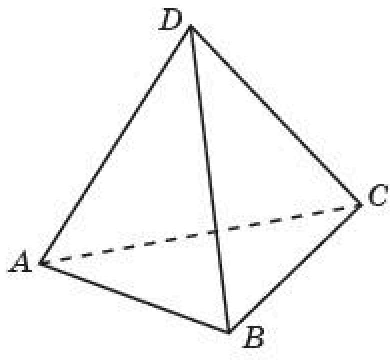


Рис. 5.15

5.3. Имеет ли правильный тетраэдр (рис. 5.15): а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

5.4. Имеет ли правильная треугольная призма (рис. 5.16): а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

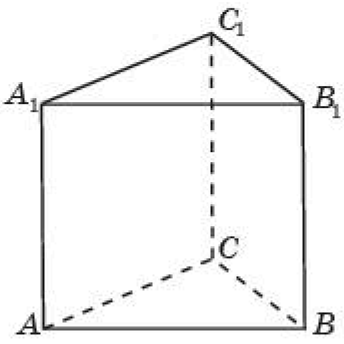


Рис. 5.16

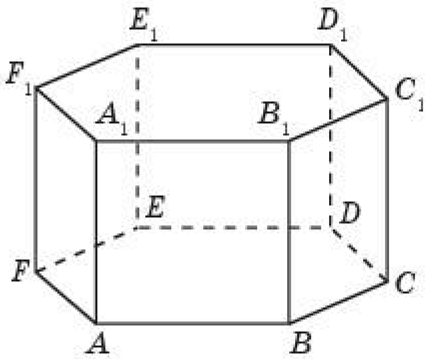


Рис. 5.17

5.5. Имеет ли правильная шестиугольная призма (рис. 5.17): а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

5.6. Имеет ли правильная четырехугольная пирамида (рис. 5.18): а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

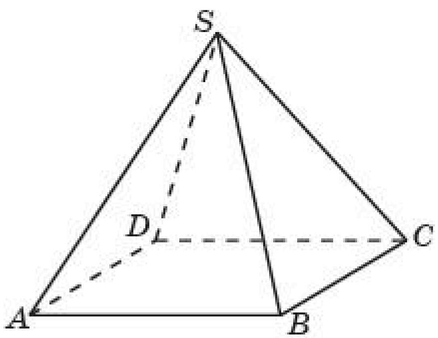


Рис. 5.18

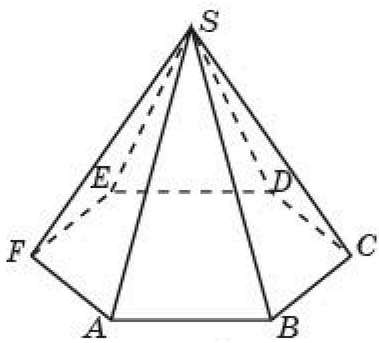


Рис. 5.19

5.7. Имеет ли правильная шестиугольная пирамида (рис. 5.19): а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

5.8. На листе бумаги в клетку изобразите пирамиду, центрально-симметричную пирамиде $SABCD$ относительно точки O, изображенной на рисунке 5.20.

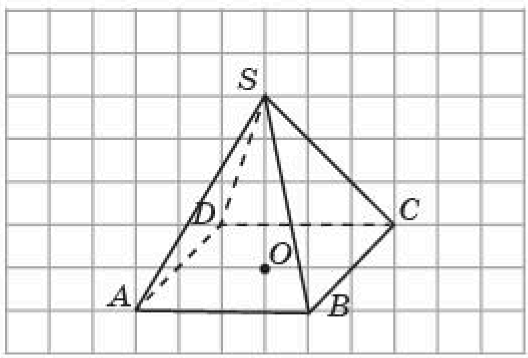


Рис. 5.20

B

5.9. Укажите центры симметрии фигуры, состоящей из двух параллельных прямых.

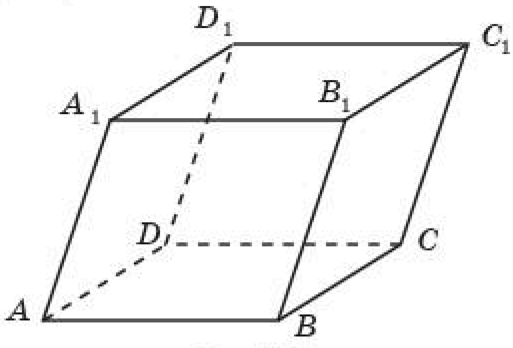
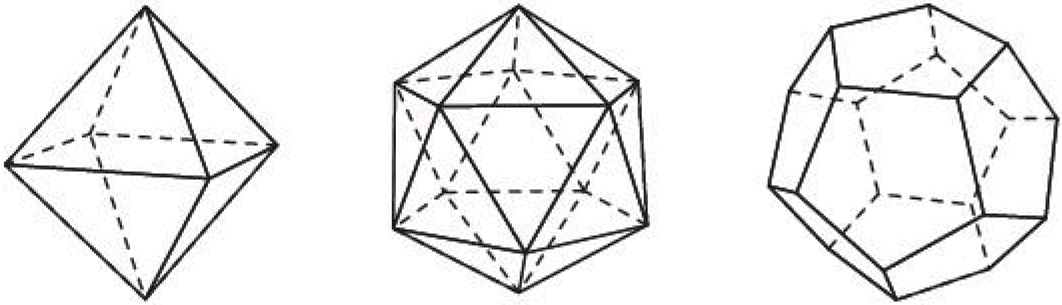


Рис. 5.21

5.10. Укажите центры симметрии фигуры, состоящей из: а) двух пересекающихся плоскостей; б) двух параллельных плоскостей.

5.11. Имеет ли центр симметрии наклонный параллелепипед (рис. 5.21)?

5.12. Имеет ли центр симметрии: а) октаэдр; б) икосаэдр; в) додекаэдр (рис. 5.22)?



а) б) в)

Рис. 5.22

5.13. Сколько осей симметрии имеет правильная: а) треугольная призма (рис. 5.16); б) шестиугольная призма (рис. 5.17)?

5.14. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная: а) треугольная призма (рис. 5.16); б) шестиугольная призма (рис. 5.17)?

5.15. Сколько осей симметрии у правильной: а) четырехугольной пирамиды (рис. 5.18); б) шестиугольной пирамиды (рис. 5.19)?

5.16. Сколько плоскостей симметрии у правильной: а) четырехугольной пирамиды (рис. 5.18); б) шестиугольной пирамиды (рис. 5.19)?

C

5.17. Сколько осей симметрии у правильной: а) n-угольной призмы; б) n-угольной пирамиды?

5.18. Сколько плоскостей симметрии у правильной: а) n-угольной призмы; б) n-угольной пирамиды?

5.19. Сколько осей симметрии имеет: а) октаэдр; б) икосаэдр; в) додекаэдр (рис. 5.22)?

5.20. Сколько плоскостей симметрии имеет: а) октаэдр; б) икосаэдр; в) додекаэдр (рис. 5.22)?

5.21. Может ли центр симметрии пространственной фигуры не принадлежать ей? Приведите примеры.

5.22. Приведите примеры пространственных фигур, у которых: а) есть центр симметрии, но нет оси симметрии; б) есть ось симметрии, но нет центра симметрии.

5.23. Приведите примеры пространственных фигур, у которых: а) есть центр симметрии, но нет плоскости симметрии; б) есть ось симметрии, но нет плоскости симметрии.

5.24. Приведите примеры пространственных фигур, у которых: а) есть плоскость симметрии, но нет центра симметрии; б) есть плоскость симметрии, но нет оси симметрии.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

5.25. Повторите определение поворота на плоскости.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет ребер, если у него 12 вершин:

A) 12; B) 16; C) 18; D) 24?

2. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится три треугольных грани. Сколько он имеет вершин, если у него 4 грани:

A) 4; B) 6; C) 9; D) 12?

3. Гранями выпуклого многогранника являются треугольники. Сколько он имеет граней, если у него 12 ребер:

A) 6; B) 8; C) 9; D) 12?

4. У выпуклого многогранника 10 вершин и 15 ребер. Сколько у него граней:

A) 5; B) 7; C) 9; D) 12?

5. У выпуклого многогранника 6 вершин и 5 граней. Сколько у него ребер:

A) 5; B) 7; C) 9; D) 12?

6. У выпуклого многогранника 12 ребер и 8 граней. Сколько у него вершин:

A) 6; B) 7; C) 8; D) 9:

7. Сколько граней имеет икосаэдр:

A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

8. Сколько вершин имеет додекаэдр:

A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

9. Вершинами какого многогранника являются центры граней правильного тетраэдра:

A) тетраэдра; B) куба; C) октаэдра; D) икосаэдра?

10. Вершинами какого многогранника являются центры граней куба:

A) тетраэдра; B) куба; C) октаэдра; D) икосаэдра?

11. Сколько пятиугольников входит в развертку додекаэдра:

A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

12. Чему равна площадь поверхности правильного тетраэдра, ребра которого равны 2 см:

A) $\sqrt{3}$ см^2; B) $2\sqrt{3}$ см^2; C) $3\sqrt{3}$ см^2; D) $4\sqrt{3}$ см^2?

13. Чему равна площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, ребра которого, выходящие из одной вершины, равны 1 см, 2 см, 3 см:

A) 11 см^2; B) 18 см^2; C) 22 см^2; D) 28 см^2.

14. Чему равна площадь поверхности правильной треугольной призмы, стороны основания которой равны 2 см, а боковые ребра равны 1 см:

A) $3 + \sqrt{3}$ см^2; B) $3 + 2\sqrt{3}$ см^2;
C) $6 + \sqrt{3}$ см^2; D) $6 + 2\sqrt{3}$ см^2.

15. Сколько осей симметрии имеет куб:

A) 3; B) 6; C) 8; D) 9?

16. Сколько осей симметрии имеет правильная пятиугольная призма:

A) 5; B) 6; C) 8; D) 9?

17. Сколько плоскостей симметрии имеет правильный тетраэдр:

A) 3; B) 6; C) 8; D) 9?

18. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная шестиугольная призма:

A) 3; B) 5; C) 7; D) 9?

19. Какую форму имеет кристалл поваренной соли:

A) куб; B) тетраэдр; C) призма; D) октаэдр.

20. Какую форму имеет кристалл алмаза:

A) куб; B) тетраэдр; C) призма; D) октаэдр.

Глава II ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ И ИХ ЭЛЕМЕНТЫ

§ 6. Цилиндр и его элементы. Развертка, площади боковой и полной поверхности цилиндра

Важным классом фигур в пространстве, помимо многогранников, является класс фигур, называемых фигурами вращения.

Напомним, что точка A' на плоскости получается из точки A этой плоскости поворотом вокруг центра O на угол φ, если $OA' = OA$ и угол $A'OA$ равен φ (рис. 6.1).

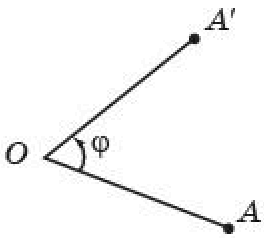


Рис. 6.1

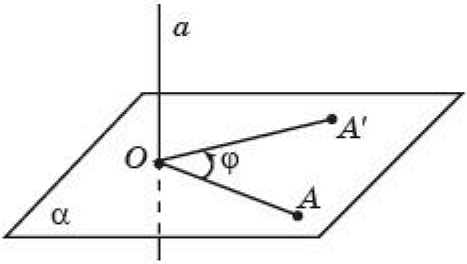


Рис. 6.2

Пусть теперь в пространстве задана прямая a и точка A, не принадлежащая этой прямой (рис. 6.2). Через точку A проведем плоскость α, перпендикулярную прямой a, и точку пересечения a и α обозначим O. Говорят, что точка A' пространства получается из точки A поворотом вокруг прямой a на угол φ, если в плоскости α точка A' получается из точки A поворотом вокруг центра O на угол φ.

Преобразование пространства, при котором точки прямой a остаются на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг этой прямой (в одном и том же направлении) на угол φ называется *поворотом*, или *вращением* вокруг прямой a. Прямая a называется *осью поворота*, или *осью вращения*.

Говорят, что фигура Φ в пространстве получена вращением фигуры F вокруг оси a, если все точки фигуры Φ получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг оси a (в одном и том же направлении). Фигура Φ при этом называется *фигурой вращения*.

Например, при вращении точки A, не принадлежащей прямой a, вокруг этой прямой (рис. 6.3) получается окружность с центром в точке O, являющейся пересечением прямой a с плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой a.

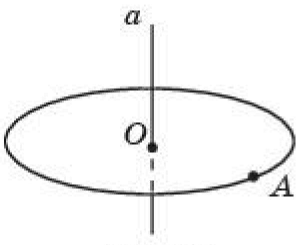


Рис. 6.3

При вращении отрезка вокруг прямой, проходящей через один из концов этого отрезка и перпендикулярной этому отрезку, получается круг, для которого данный отрезок является радиусом (рис. 6.4).

Цилиндром называется фигура, которая получается вращением прямоугольника вокруг прямой, содержащей одну из его сторон (рис. 6.5).

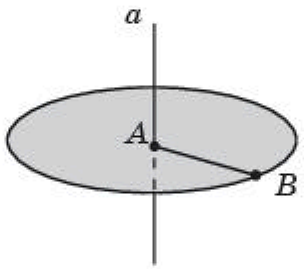


Рис. 6.4

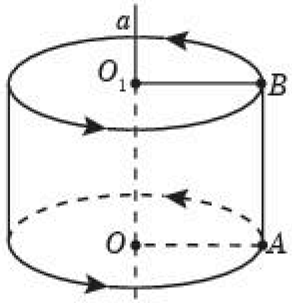


Рис. 6.5

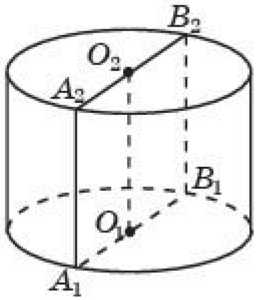


Рис. 6.6

Ось вращения прямоугольника называется также *осью цилиндра*.

Круги, которые получаются вращением сторон прямоугольника, перпендикулярных оси вращения, называются *основаниями цилиндра*.

Поверхность, которая получается вращением стороны прямоугольника, параллельной оси вращения, называется *боковой поверхностью цилиндра*.

Вся поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности.

Отрезки, которые получаются всевозможными поворотами стороны прямоугольника, параллельной оси вращения, вокруг этой оси, называются *образующими* цилиндра.

Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований цилиндра.

Докажите, что высота цилиндра равна длинам образующих боковой поверхности цилиндра.

Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется *осевым сечением* цилиндра (рис. 6.6).

Докажите, что осевым сечением цилиндра является прямоугольник.

Цилиндр может быть получен вращением этого прямоугольника вокруг прямой, проходящей через середины двух его противоположных сторон.

Можно ли получить цилиндр вращением плоских фигур, отличных от прямоугольника?

Если боковую поверхность цилиндра разрезать по образующей, развернуть ее на плоскость и добавить к ней основания, то получится фигура, называемая *разверткой цилиндра* (рис. 6.7).

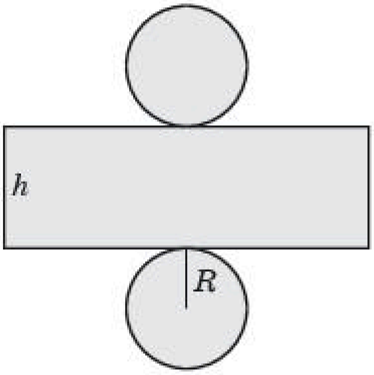


Рис. 6.7

Площадью полной поверхности, или просто поверхностью цилиндра называется площадь его развертки. *Площадью боковой поверхности* цилиндра называется площадь развертки его боковой поверхности.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра, т.е. имеет место формула:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh,$$

где R — радиус основания, h — высота цилиндра.

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований, т.е. имеет место формула:

$$S_{\text{полн}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R),$$

где R — радиус основания, h — высота цилиндра.

Вопросы

1. Какое преобразование пространства называется *поворотом вокруг прямой*?
2. Какая фигура называется *фигурой вращения*?
3. Какая фигура называется *цилиндром*?
4. Что называется *осью цилиндра*?
5. Что называется *основаниями цилиндра*?
6. Какая фигура называется *боковой поверхностью цилиндра*?
7. Какие отрезки называются *образующими цилиндра*?
8. Что называется *высотой цилиндра*?
9. Что называется *осевым сечением цилиндра*?
10. Что называется *разверткой цилиндра*?
11. Что называется *площадью поверхности цилиндра*?
12. Что называется *площадью боковой поверхности цилиндра*?
13. Выведите формулу площади боковой поверхности цилиндра.
14. Выведите формулу площади полной поверхности цилиндра.

Задачи

A

6.1. На листе бумаги в клетку изобразите цилиндр, аналогичный данному на рисунке 6.8. Изобразите его осевое сечение.

6.2. Сколько образующих имеет цилиндр?

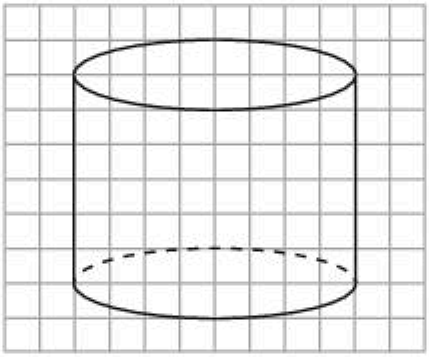


Рис. 6.8

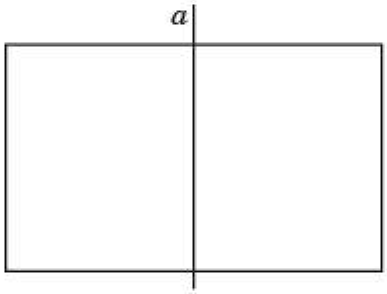


Рис. 6.9

6.3. Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью, параллельной основаниям?

6.4. Какая фигура получается вращением прямоугольника вокруг прямой, проходящей через середины двух противолежащих сторон этого прямоугольника (рис. 6.9)?

6.5. Какая фигура получается при вращении отрезка AB вокруг прямой, лежащей в одной плоскости с этим отрезком, перпендикулярной ему и не имеющей с отрезком общих точек (рис. 6.10)?

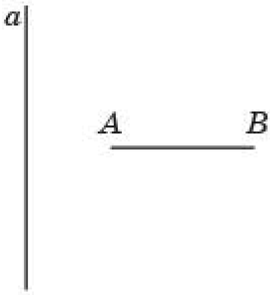


Рис. 6.10

6.6. Радиус основания цилиндра равен 2 см, высота — 3 см. Найдите диагональ осевого сечения.

6.7. Найдите радиус основания цилиндра, развертской боковой поверхности которого является квадрат со стороной 1 см.

6.8. Найдите площадь: а) боковой; б) полной поверхности цилиндра, радиус основания которого равен 1 см, а образующая равна 2 см.

В

6.9. На листе бумаги в клетку изобразите цилиндр, аналогичный данному на рисунке 6.8. Изобразите его сечение плоскостью, параллельной плоскости основания этого цилиндра.

6.10. На листе бумаги в клетку изобразите цилиндр, аналогичный данному на рисунке 6.8. Изобразите его сечение плоскостью, параллельной оси этого цилиндра. Какой фигурой оно является?

6.11. Имеет ли цилиндр: а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

6.12. Какая фигура получится при вращении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вокруг прямой: а) AA_1; б) соединяющей центры его противолежащих граней (рис. 6.11)?

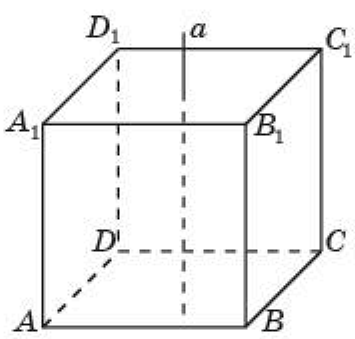


Рис. 6.11

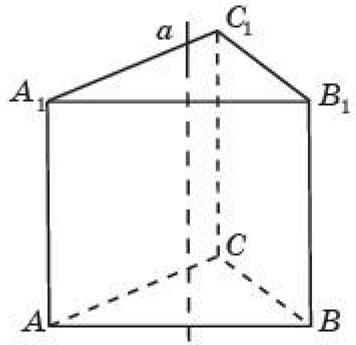


Рис. 6.12

6.13. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, получающегося вращением единичного куба вокруг прямой: а) AA_1; б) соединяющей центры его противолежащих граней (рис. 6.11).

6.14. Какая фигура получится при вращении правильной треугольной призмы вокруг прямой: а) содержащей боковое ребро; б) проходящей через центры ее оснований (рис. 6.12)?

6.15. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, получающегося вращением правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой: а) содержащей боковое ребро; б) проходящей через центры ее оснований (рис. 6.12).

6.16. Какая фигура получится при вращении правильной шестиугольной призмы вокруг прямой: а) содержащей боковое ребро; б) проходящей через центры ее оснований (рис. 6.13)?

6.17. Найдите площадь поверхности цилиндра, получающегося вращением правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой: а) содержащей боковое ребро; б) проходящей через центры ее оснований (рис. 6.13).

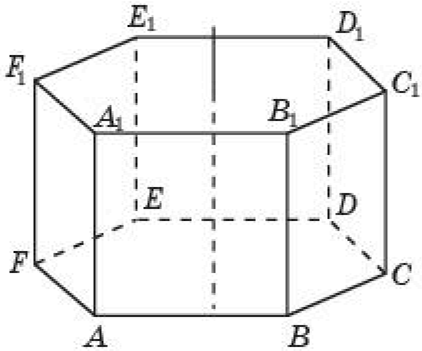


Рис. 6.13

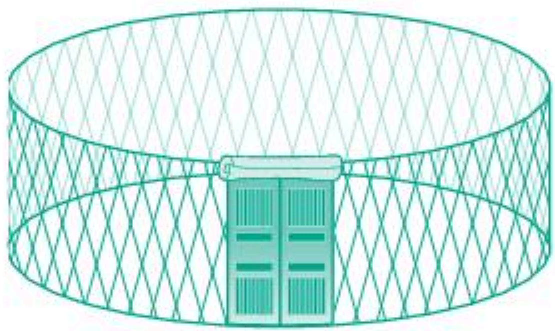


Рис. 6.14

6.18. Юрта — древнейшее и в то же время современное жилище кочевников (рис. 6.14). Найдите площадь поверхности кереге (круглая вертикальная стена в форме боковой поверхности цилиндра), если ее диаметр 5 м, а высота равна 2 м.

C

6.19. Какая фигура получается вращением многоугольника $ABCDEF$, изображенного на рисунке 6.15, соседние стороны которого образуют прямые углы, вокруг прямой AF? Найдите площадь поверхности этой фигуры.

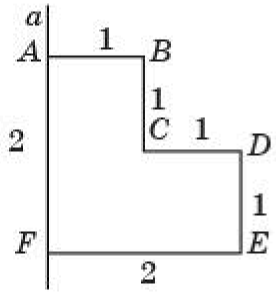


Рис. 6.15

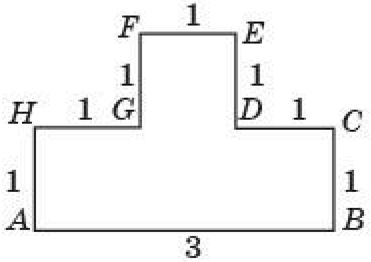


Рис. 6.16

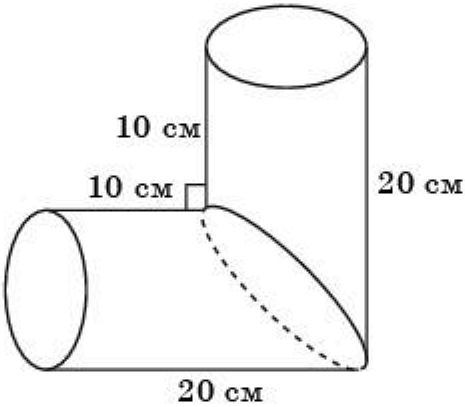


Рис. 6.17

6.20. Какая фигура получается вращением многоугольника $ABCDEFGH$, изображенного на рисунке 6.16, соседние стороны которого образуют прямые углы, вокруг прямой AB? Найдите площадь поверхности этой фигуры.

6.21. Найдите площадь поверхности детали, изображенной на рисунке 6.17, составленной из двух равных частей цилиндров, составленных под углом 90°.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

6.22. Повторите определения равнобедренного треугольника и кругового сектора.

§ 7. Конус и его элементы. Развертка, площади боковой и полной поверхности конуса

Конусом называется фигура, которая получается вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей один из его катетов (рис. 7.1).

Ось вращения называется также *осью конуса*.

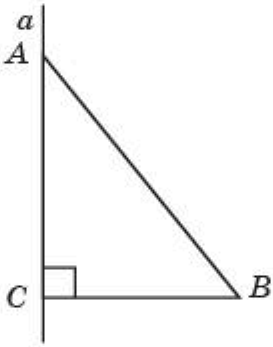


Рис. 7.1

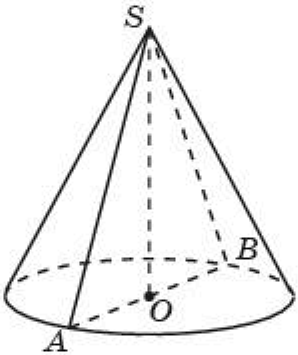


Рис. 7.2

Круг, который получаются вращением стороны прямоугольного треугольника, перпендикулярной оси вращения, называется *основанием конуса*.

Поверхность, которая получается вращением гипотенузы прямоугольного треугольника, называется *боковой поверхностью конуса*.

Вся поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

Отрезки, которые получаются всевозможными поворотами гипотенузы прямоугольного треугольника, называются *образующими* конуса.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется *осевым сечением* конуса (рис. 7.2).

Докажите, что осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, основанием которого служит диаметр основания конуса.

Конус может быть получен вращением равнобедренного треугольника вокруг прямой, содержащей высоту, опущенную на основание этого треугольника.

Вершина этого равнобедренного треугольника, противолежащая основанию, называется *вершиной конуса*.

Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость его основания, а также его длина, называется *высотой конуса*.

Как Вы думаете, можно ли получить конус вращением не прямоугольного и не равнобедренного треугольника?

Если боковую поверхность конуса разрезать по образующей, развернуть ее на плоскость и добавить к ней основание, то получится фигура, называемая *разверткой конуса* (рис. 7.3).

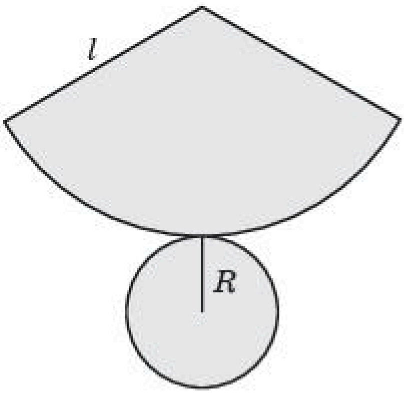


Рис. 7.3

Площадью поверхности конуса называется площадь его развертки. *Площадью боковой поверхности* конуса называется площадь развертки его боковой поверхности.

Если радиус основания конуса равен R, а образующая равна l, то для площади $S_{бок}$ его боковой поверхности имеет место формула

$$S_{бок} = \pi Rl.$$

Площадь полной поверхности конуса равна сумме площадей его боковой поверхности и основания.

Для площади $S_{полн}$ его полной поверхности имеет место формула:

$$S_{полн} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R).$$

Вопросы

1. Какая фигура называется *конусом*?
2. Что называется *осью конуса*?
3. Что называется *основанием конуса*?
4. Какая фигура называется *боковой поверхностью конуса*?
5. Какие отрезки называются *образующими конуса*?
6. Что называется *осевым сечением конуса*?
7. Что называется *вершиной конуса*?
8. Что называется *высотой конуса*?
9. Какая фигура называется *разверткой конуса*?
10. Что называется *площадью поверхности конуса*?
11. Что называется *площадью боковой поверхности конуса*?
12. Выведите формулу площади боковой поверхности конуса.
13. Выведите формулу площади полной поверхности конуса.

Задачи

A

7.1. На листе бумаги в клетку изобразите конус, аналогичный данному на рисунке 7.4. Изобразите его осевое сечение.

7.2. Сколько образующих имеет конус?

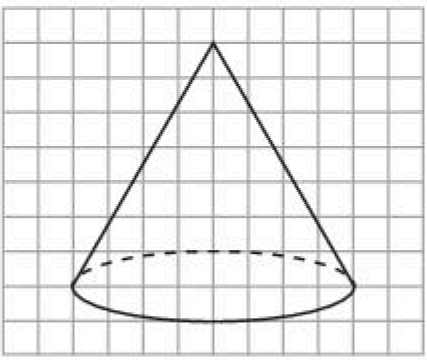


Рис. 7.4

7.3. Какой фигурой является сечение конуса плоскостью, параллельной основанию?

7.4. Какая фигура получается вращением равнобедренного треугольника вокруг прямой, содержащей высоту, опущенную на основание этого треугольника (рис. 7.5)?

7.5. Какая фигура получается при вращении отрезка AC вокруг прямой, лежащей в одной плоскости с этим отрезком, проходящей через его конец C и не перпендикулярной этому отрезку (рис. 7.6)?

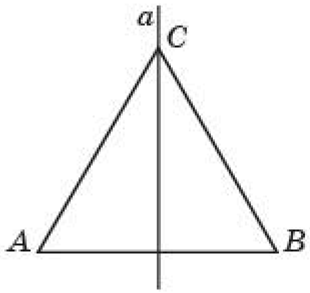


Рис. 7.5

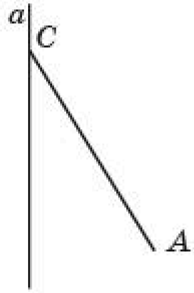


Рис. 7.6

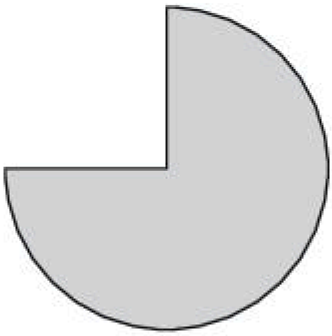


Рис. 7.7

7.6. Радиус основания конуса равен 3 см, высота равна 4 см. Найдите образующую конуса.

7.7. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник со стороной 10 см. Найдите: а) радиус основания; б) высоту конуса.

7.8. Образующая конуса равна 2 см и наклонена к плоскости основания под углом 30°.Найдите высоту этого конуса.

7.9. Образующая конуса равна 2 см и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите радиус основания этого конуса.

7.10. Найдите площадь поверхности конуса, радиус основания которого равен 1 см, а образующая равна 2 см.

7.11. Является ли разверткой боковой поверхности конуса часть круга, изображенная на рисунке 7.7?

B

7.12. На листе бумаги в клетку изобразите конус, аналогичный данному на рисунке 7.4. Изобразите его сечение плоскостью, параллельной оси этого конуса.

7.13. Радиус основания конуса равен 1 см. Через середину высоты этого цилиндра проведена плоскость, параллельная плоскости основания. Найдите площадь получившегося сечения.

7.14. Радиус основания цилиндра равен 1 см, образующая равна 2 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса, основанием которого является одно основание цилиндра, а вершиной — центр другого основания этого цилиндра (рис. 7.8).

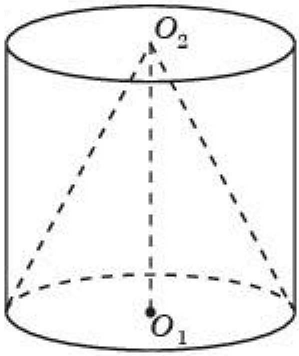


Рис. 7.8

7.15. Имеет ли конус: а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

7.16. Какая фигура получается при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его гипотенузу (рис. 7.9)?

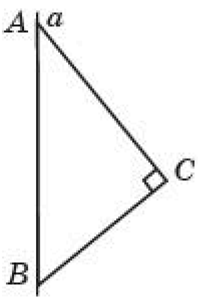


Рис. 7.9

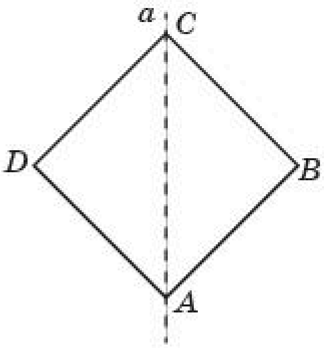


Рис. 7.10

7.17. Какая фигура получается при вращении единичного квадрата вокруг прямой, содержащей его диагональ (рис. 7.10)? Найдите площадь ее поверхности.

7.18. Какая фигура получится при вращении правильной четырехугольной пирамиды вокруг прямой, содержащей ее высоту (рис. 7.11)?

7.19. Найдите площадь поверхности конуса, получающегося вращением правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1, вокруг прямой, содержащей ее высоту (рис. 7.11).

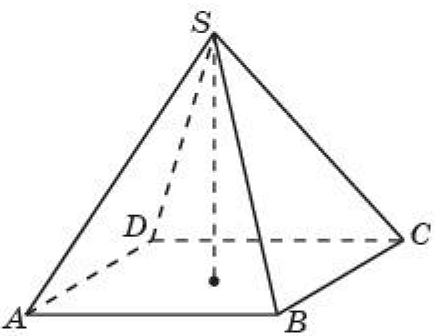


Рис. 7.11

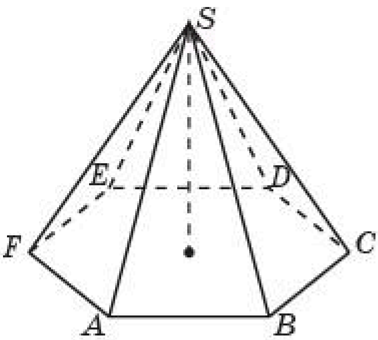


Рис. 7.12

7.20. Какая фигура получится при вращении правильной шестиугольной пирамиды вокруг прямой, содержащей ее высоту (рис. 7.12)?

7.21. Найдите площадь поверхности конуса, получающегося вращением правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, вокруг прямой, содержащей ее высоту (рис. 7.12).

C

7.22. Какая фигура получится при вращении октаэдра вокруг прямой, соединяющей его противолежащие вершины (рис. 7.13). Найдите площадь ее поверхности, считая ребро октаэдра равным 1 см.

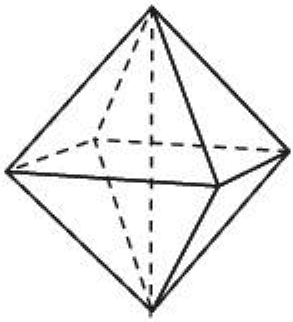


Рис. 7.13

7.23. Найдите радиус основания конуса, разверткой боковой поверхности которого является полукруг радиусом 1 см.

7.24. Радиус основания конуса равен 1 см, образующая равна 3 см. Найдите центральный угол развертки боковой поверхности этого конуса.

7.25. Крыша силосной башни имеет форму конуса. Высота крыши — 2 м. Диаметр основания башни — 6 м. Сколько листов кровельного железа потребовалось для покрытия крыши, если лист имеет размеры $0,7 \times 1,4$, а на швы идет 10% требующегося железа? (Примите $\pi \approx 3$).

7.26. Найдите площадь поверхности кучи песка на строительной площадке, имеющей форму конуса (рис.7.14). Измерив мягкой метровой лентой длину окружности основания кучи песка, получили 21,6 м. Перекинув метровую ленту через вершину кучи, определили длину двух образующих — 7,8 м. (Примите $\pi \approx 3$).

Рис. 13.17

7.27. Меруерт хотела на день рождения изготовить из бумаги 8 головных уборов, имеющих форму конуса, высота которого 8 см, а радиус основания — 6 см. Сколько бумаги (в $см^2$) ей потребуется для изготовления этих головных уборов? (Примите $\pi \approx 3$).

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

7.28. Повторите определение кругового кольца и формулу его площади.

§ 8. Усеченный конус и его элементы. Площадь поверхности усеченного конуса

Если конус пересечен плоскостью, параллельной плоскости основания, то его часть, заключенная между этой плоскостью и плоскостью основания, называется *усеченным конусом* (рис. 8.1).

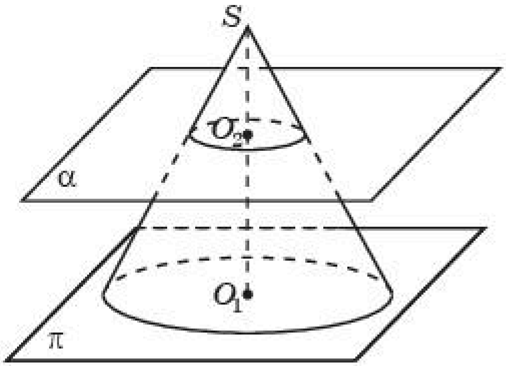


Рис. 8.1

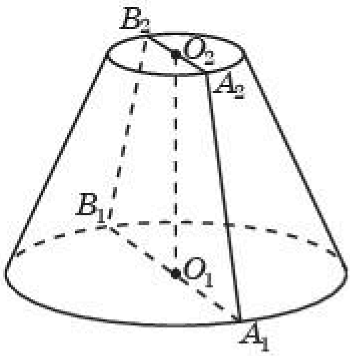


Рис. 8.2

Само сечение конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, называется также *основанием усеченного конуса*.

Ось конуса, называется *осью усеченного конуса*.

Часть боковой поверхности конуса, заключенная между основаниями усеченного конуса, называется *боковой поверхностью усеченного конуса*.

Отрезки образующих конуса, заключенные между основаниями усеченного конуса, называются *образующими усеченного конуса*.

Высотой усеченного конуса называется расстояние между плоскостями его оснований.

Сечение усеченного конуса плоскостью, проходящей через ось усеченного конуса, называется *осевым сечением* (рис. 8.2).

Докажите, что осевым сечением усеченного конуса является равнобедренная трапеция.

Усеченный конус может быть получен вращением этой трапеции вокруг прямой, проходящей через середины ее оснований.

Можно ли получить усеченный конус вращением неравнобедренной трапеции?

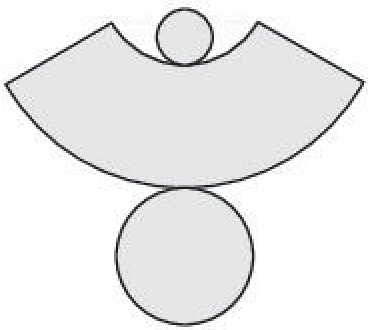


Рис. 8.3

Если боковую поверхность усеченного конуса разрезать по образующей, развернуть ее на плоскость и добавить к ней основания, то получится фигура, называемая *разверткой усеченного конуса* (рис. 8.3).

Площадью поверхности усеченного конуса называется площадь его развертки.

Площадью боковой поверхности усеченного конуса называется площадь развертки его боковой поверхности.

Если радиусы оснований усеченного конуса равны R и r, а образующая равна l, то для площади $S_{бок}$ его боковой поверхности имеет место формула

$$S_{бок} = \pi(R + r)l.$$

Для площади $S_{полн}$ его полной поверхности имеет место формула

$$S_{полн} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2.$$

Вопросы

1. Какая фигура называется усеченным конусом?
2. Что называется основаниями усеченного конуса?
3. Что называется высотой усеченного конуса?
4. Что называется осью усеченного конуса?
5. Что называется осевым сечением усеченного конуса?
6. Какая фигура называется разверткой усеченного конуса?
7. Что называется площадью поверхности усеченного конуса?
8. Что называется площадью боковой поверхности усеченного конуса?
9. Выведите формулу площади боковой поверхности усеченного конуса.
10. Выведите формулу площади полной поверхности усеченного конуса.

Задачи

А

8.1. На листе бумаги в клетку изобразите усеченный конус, аналогичный данному на рисунке 8.4. Изобразите его осевое сечение.

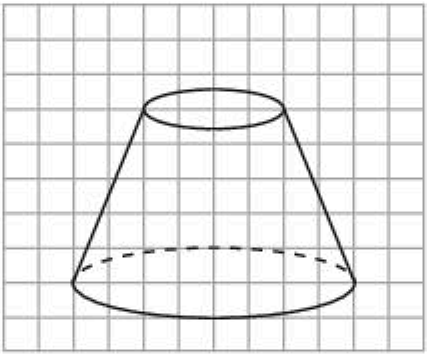


Рис. 8.4

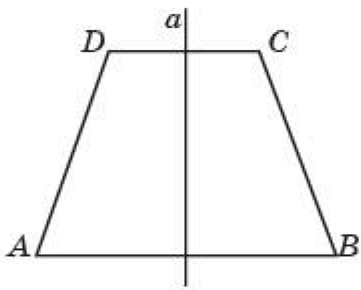


Рис. 8.5

8.2. Сколько образующих имеет усеченный конус?

8.3. Какой фигурой является сечение конуса плоскостью, параллельной основанию?

8.4. Какая фигура получается вращением равнобедренной трапеции вокруг прямой, проходящей через середины ее оснований (рис. 8.5)?

8.5. Какая фигура получается при вращении отрезка BC вокруг прямой, лежащей в одной плоскости с этим отрезком, не имеющей общих точек, не параллельной и не перпендикулярной этому отрезку (рис. 8.6)?

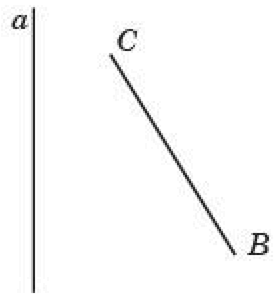


Рис. 8.6

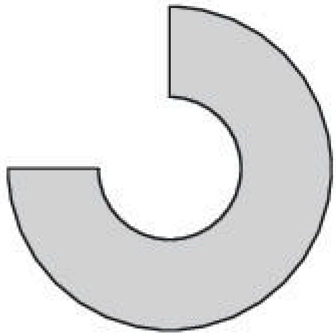


Рис. 8.7

8.6. Радиусы оснований усеченного конуса равны 6 см и 2 см, высота равна 3 см. Найдите образующую усеченного конуса.

8.7. Радиусы оснований усеченного конуса равны 6 см и 2 см, образующая равна 5 см. Найдите площадь поверхности этого усеченного конуса.

8.8. Является ли разверткой боковой поверхности усеченного конуса часть круга, изображенная на рисунке 8.7?

B

8.9. На листе бумаги в клетку изобразите конус, аналогичный данному на рисунке 8.4. Изобразите его сечение плоскостью, параллельной оси и пересекающей основания этого усеченного конуса.

8.10. Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 см и 4 см. Через середину высоты этого усеченного конуса проведена плоскость, параллельная плоскости основания. Найдите площадь получившегося сечения.

8.11. Имеет ли усеченный конус: а) центр симметрии; б) оси симметрии; б) плоскости симметрии?

8.12. Образующая усеченного конуса равна 2 см и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту этого усеченного конуса.

8.13. Образующая усеченного конуса равна 2 см и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Радиус меньшего основания усеченного конуса равен 1 см. Найдите радиус большего основания этого усеченного конуса.

8.14. Основания равнобедренной трапеции равны 1 см и 2 см, боковые стороны равны 2 см. Найдите площадь поверхности вращения этой трапеции, вокруг прямой, проходящей через середины оснований.

8.15. Какая фигура получится при вращении правильной четырехугольной усеченной пирамиды вокруг прямой, проходящей через центры ее оснований (рис. 8.8)?

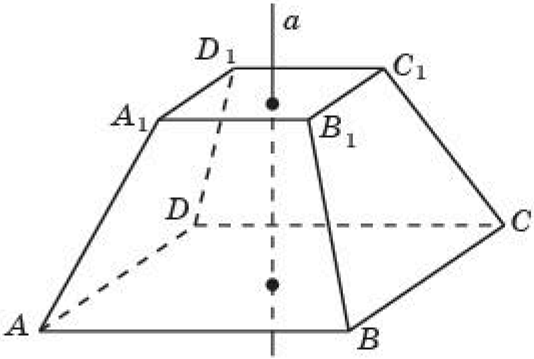


Рис. 8.8

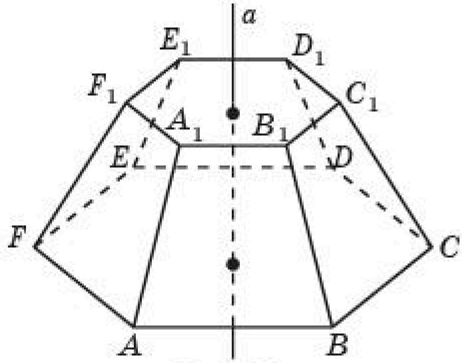


Рис. 8.9

8.16. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 4 см и 2 см, а боковые ребра равны 3 см. Найдите площадь поверхности вращения этой пирамиды вокруг прямой, проходящей через центры оснований (рис. 8.8).

8.17. Какая фигура получится при вращении правильной шестиугольной усеченной пирамиды вокруг прямой, проходящей через центры ее оснований (рис. 8.9)?

Рис. 8.10

8.18. В правильной шестиугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 2 см и 1 см, боковые ребра равны 3 см. Найдите площадь поверхности вращения этой пирамиды вокруг прямой, проходящей через центры оснований (рис. 8.9).

8.19. Найдите площадь боковой поверхности купола юрты (рис. 8.10) в форме усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 5 м и 1 м, а высота равна 2 м.

C

8.20. Какая фигура получится при вращении правильного шестиугольника вокруг прямой, проходящей через середины его противолежащих сторон (рис. 8.11)? Найдите площадь поверхности этой фигуры, если стороны шестиугольника равны 1 см.

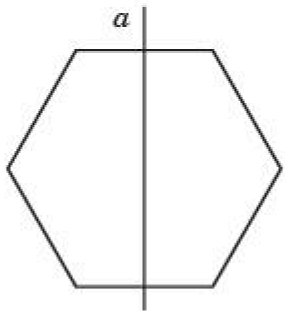


Рис. 8.11

8.21. Найдите радиусы оснований усеченного конуса, разверткой боковой поверхности

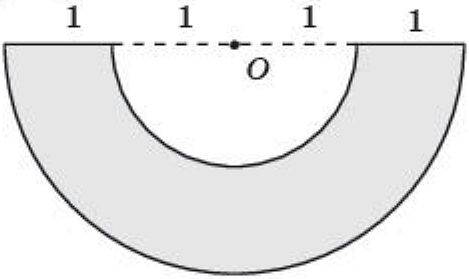


Рис. 8.12

которого является половина кругового кольца, изображенного на рисунке 8.12, радиусы окружностей которого равны 1 см и 2 см.

8.22. Ведро имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого 30 см и 20 см, а образующая 30 см. Сколько краски нужно для покраски с обеих сторонон такого ведра, если на 1 м^2 поверхности требуется 300 г краски?

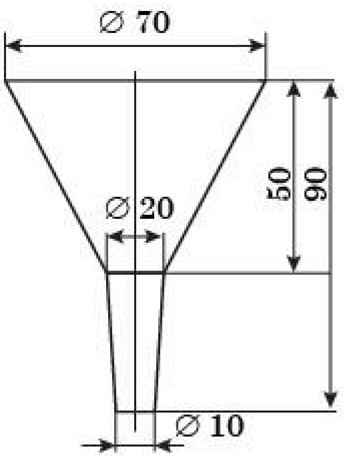


Рис. 8.13

8.23. Жестяная воронка имеет размеры (в миллиметрах), указанные на рисунке 8.13. Сколько квадратных дециметров жести затрачено на изготовление воронки (на швы уходит 10% площади поверхности воронки)?

8.24. Какие размеры имеет развертка боковой поверхности ведра, если диаметры его оснований 28 см и 20 см, а высота 24 см? Сколько квадратных дециметров материала нужно затратить на изготовление этого ведра (без учета расхода на швы)?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

8.25. Повторите определения окружности, круга и их элементов, определение касательной прямой к окружности и случаи взаимного расположения окружности и прямой.

§ 9. Сфера и шар

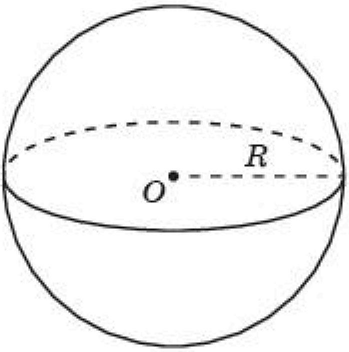


Рис. 9.1

Сфера и шар являются пространственными аналогами соответственно окружности и круга на плоскости.

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки на данное расстояние (рис. 9.1).

Данная точка называется *центром* сферы. Данное расстояние называется *радиусом* сферы.

Радиусом сферы называется также отрезок, соединяющий центр сферы и какую-нибудь ее точку.

Отрезок, соединяющий произвольные две точки сферы, называется *хордой* этой сферы. Хорда, проходящая через центр сферы, называется *диаметром* этой сферы. Окружность, являющаяся сечением сферы плоскостью, проходящей через ее центр, называется *большой окружностью*.

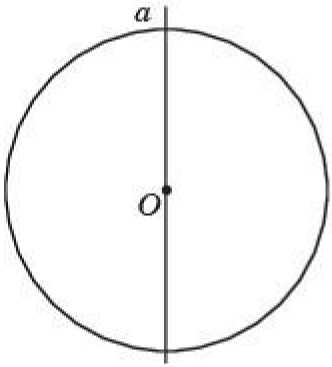


Рис. 9.2

Сферу можно получить вращением окружности вокруг прямой, содержащей ее диаметр (рис. 9.2).

Шаром называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки на расстояние, не превосходящее данное расстояние.

Данная точка называется *центром шара*. Данное расстояние называется *радиусом шара*.

Радиусом шара называется также отрезок, соединяющий центр шара и какую-нибудь точку его поверхности.

Отрезок, соединяющий произвольные две точки на *поверхности шара*, называется *хордой* этого шара. Хорда, проходящая через центр шара, называется *диаметром* этого шара.

Шар можно получить вращением круга вокруг прямой, содержащей его диаметр.

Сфера с тем же центром и того же радиуса, что и данный шар, называется *поверхностью шара*.

Рассмотрим случаи взаимного расположения сферы и плоскости.

Если плоскость α проходит через центр сферы, то в сечении сферы этой плоскостью получается окружность (рис. 9.3).

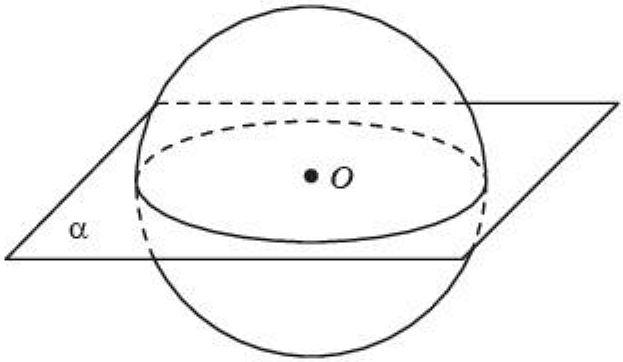


Рис. 9.3

Если плоскость α не проходит через центр O сферы, то опустим из него на плоскость α перпендикуляр OO_1. При этом возможны следующие случаи.

Случай 1. Длина этого перпендикуляра больше радиуса R сферы. В этом случае расстояние от точки O до любой другой точки плоскости α тем более больше R. Следовательно, в этом случае сфера и плоскость не имеют общих точек (рис. 9.4, а).

Случай 2. Расстояние от точки O до плоскости α равно R. В этом случае сфера и плоскость имеют единственную общую точку — O_1 (рис. 9.4, б).

Плоскость, имеющая со сферой одну общую точку, называется *касательной плоскостью*.

Докажите, что касательная плоскость перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

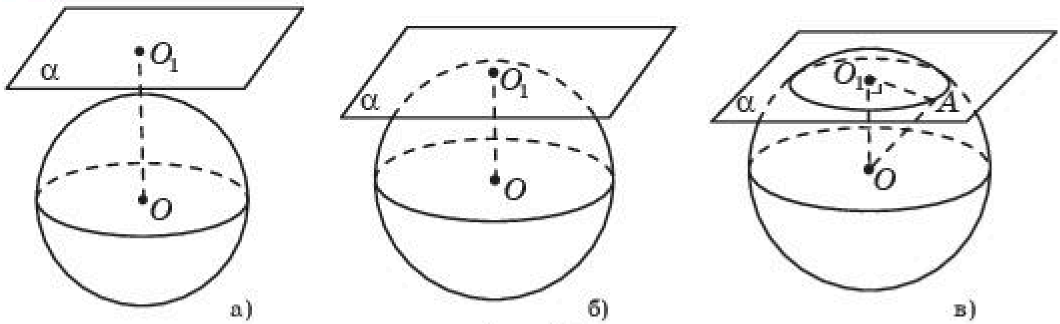


Рис. 9.4

Случай 3. Расстояние d от точки O до плоскости α меньше R. Докажем, что в этом случае сфера и плоскость пересекаются и их пересечением является окружность с центром в точке O_1 и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (рис. 9.4, в).

Действительно, для произвольной точки A, принадлежащей пересечению сферы и плоскости α, из прямоугольного треугольника OO_1A, в котором $OO_1 = d$, $OA = R$, следует равенство $O_1A = \sqrt{R^2 - d^2}$. Обратно, если для точки A плоскости α выполняется это равенство, то расстояние от точки O до точки A равно R, т. е. точка A принадлежит сфере.

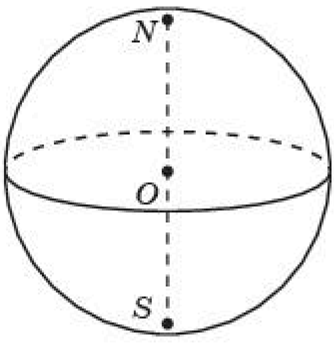


Рис. 9.5

Обычно сфера изображается так, как показано на рисунке 9.5. На нем, помимо окружности, изображены:

а) сечение сферы плоскостью, проходящей через центр сферы, которое называется большой окружностью или *экватором*;

б) прямая, проходящая через центр сферы и перпендикулярная плоскости экватора, которая называется *осью сферы*;

в) точки пересечения оси со сферой, которые называются *полюсами* сферы.

Иногда, кроме экватора, на изображении сферы рисуют *параллели* — сечения сферы плоскостями, параллельными плоскости экватора, и *меридианы* — сечения сферы плоскостями, проходящими через ось сферы (рис. 9.6). Именно так обычно изображается глобус земного шара.

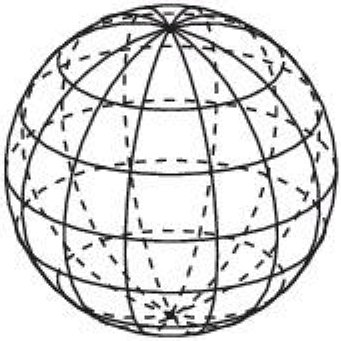


Рис. 9.6

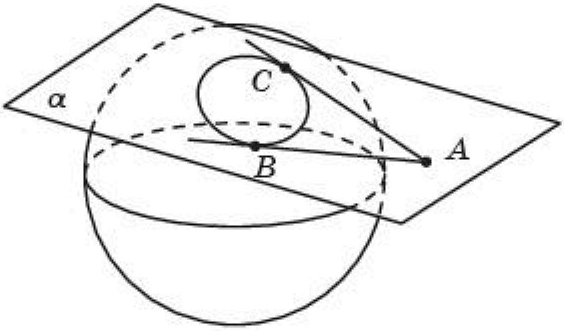


Рис. 9.7

Какая фигура получается в сечении шара плоскостью?

По аналогии с рассмотреными случаями расположения сферы и плоскости самостоятельно рассмотрите случаи взаимного расположения сферы и прямой.

Прямая, имеющая со сферой одну общую точку, называется касательной прямой.

Теорема. ***Отрезки касательных прямых к сфере, проведенных из одной точки, расположенной вне этой сферы, равны между собой.***

Доказательство. Пусть AB и AC — отрезки касательных к сфере, проведенных из точки A (рис. 9.7), где B и C — точки касания.

Рассмотрим плоскость α, проходящую через точки A, B и C. Она пересекает сферу по окружности, касающейся прямых AB и AC в точках B и C соответственно. По свойству отрезков касательных, проведенных к окружности, имеем $AB = AC$. ◻

Вопросы

1. Какая фигура называется *сферой*?
2. Что называется *радиусом сферы*?
3. Что называется *хордой сферы*?
4. Что называется *диаметром сферы*?
5. Вращением какой фигуры можно получить сферу?
6. Какая фигура называется *шаром*?
7. Что называется *радиусом шара*?
8. Что называется *хордой шара*?
9. Что называется *диаметром шара*?
10. Вращением какой фигуры можно получить шар?
11. Что называется *поверхностью шара*?

12. В каком случае сфера и плоскость не имеют общих точек?
13. В каком случае сфера и плоскость имеют одну общую точку?
14. В каком случае сфера и плоскость пересекаются по окружности?
15. Какая плоскость называется касательной плоскостью к сфере?
16. Какая прямая называется касательной прямой к сфере?

Задачи

A

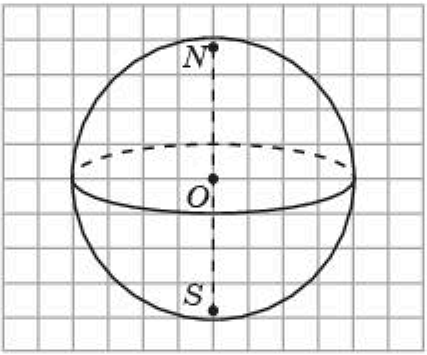


Рис. 9.8

9.1. На листе бумаги в клетку изобразите сферу, аналогичную данной на рисунке 9.8. Нарисуйте какие-нибудь параллели и меридианы.

9.2. Какому неравенству удовлетворяют точки A, лежащие: а) внутри шара с центром в точке O и радиусом R; б) вне этого шара?

9.3. Радиус сферы равен 4 см. Как расположена данная точка относительно сферы, если расстояние от нее до центра сферы равно: а) 3 см; б) 4 см; в) 5 см?

9.4. Сколько диаметров можно провести через центр сферы?

9.5. Найдите диаметр сферы, если известно, что он на 55 мм больше радиуса.

9.6. Расстояние между точками A и B равно 2 см. Найдите наименьший возможный радиус сферы, проходящей через эти точки.

9.7. Как расположены относительно друг друга сфера и плоскость, если радиус сферы равен 7 см, а плоскость удалена от ее центра на: а) 6 см; б) 7 см; в) 8 см?

B

9.8. Сколько касательных плоскостей можно провести к данной сфере: а) через точку, принадлежащую сфере; б) через точку, расположенную внутри сферы; б) через точку, расположенную вне сферы?

9.9. Шар радиусом 5 см пересечен плоскостью, отстоящей от его центра на 3 см. Найдите радиус круга, получившегося в сечении.

9.10. Радиус сферы равен 3 см. Расстояние от точки до центра сферы равно 5 см. Найдите длину отрезка касательной, проведенной через данную точку к данной сфере.

9.11. Как расположены относительно друг друга сфера и прямая, если радиус сферы равен 6 см, а прямая удалена от ее центра на: а) 5 см; б) 6 см; в) 7 см?

9.12. Радиус сферы равен 3 см. Длина отрезка касательной, проведенной через данную точку к данной сфере, равна 4 см. Найдите расстояние от данной точки до центра сферы.

9.13. Радиус сферы равен 6 см. Расстояние от точки до центра сферы равно 10 см. Найдите длину отрезка касательной.

9.14. Расстояние от точки до центра сферы равно 13 см. Длина отрезка касательной, проведенной через данную точку к данной сфере, равна 12 см. Найдите радиус сферы.

9.15. Как расположены между собой сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, и плоскость, заданная уравнением: а) $z = 1$; б) $z = 2$; в) $z = 3$?

9.16. Найдите радиус Земли (рис. 9.9), зная, что длина Парижского меридиана равна 40 000 км.

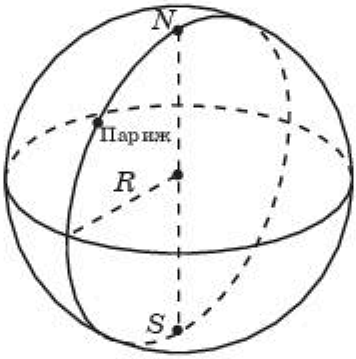


Рис. 9.9

C

9.17. Радиус сферы равен 4 см. Расстояние от данной точки до центра этой сферы равно 6 см. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния от данной точки до точек сферы.

9.18. Наименьшее и наибольшее расстояния от данной точки, расположенной вне сферы, до точек сферы равны 4 см и 6 см. Найдите радиус сферы.

9.19. Как расположены между собой сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, и плоскость, заданная уравнением: а) $x + y + z = \sqrt{2}$; б) $x + y + z = \sqrt{3}$; в) $x + y + z = 2$?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

9.20. Повторите определения окружностей, вписанных и описанных около прямоугольника, треугольника, трапеции; формулы для нахождения их радиусов.

§ 10*. Комбинации фигур вращения

По аналогии с понятием окружности, описанной около прямоугольника, и окружности, вписанной в квадрат, определим понятие сферы, описанной около цилиндра, и сферы, вписанной в цилиндр.

Сфера называется *описанной около цилиндра*, если окружности оснований цилиндра лежат на сфере. При этом цилиндр называется *вписанным в сферу* (рис. 10.1).

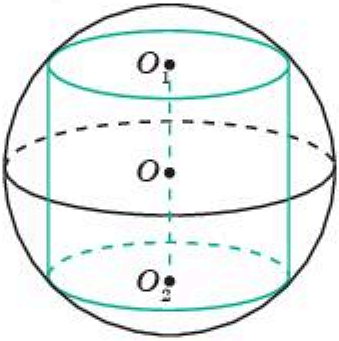


Рис. 10.1

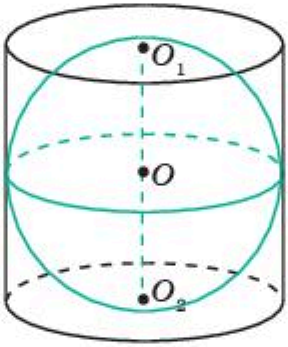


Рис. 10.2

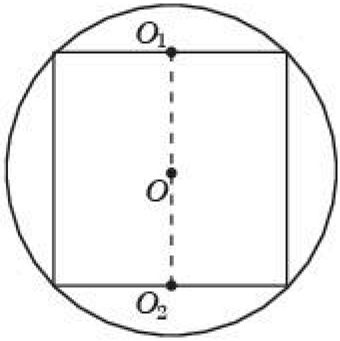


Рис. 10.3

Сфера называется *вписанной в цилиндр*, если она касается его оснований и боковой поверхности (касается каждой образующей) (рис. 10.2). При этом цилиндр называется *описанным около сферы*.

Теорема. ***Около цилиндра можно описать сферу. Ее радиус равен радиусу окружности, описанной около прямоугольника, являющегося осевым сечением этого цилиндра.***

Доказательство. Рассмотрим осевое сечение цилиндра, являющееся прямоугольником, и описанную около него окружность (рис. 10.3). Цилиндр получается вращением этого прямоугольника вокруг прямой, проходящей через середины O_1, O_2 двух его противолежащих сторон. Вращение окружности вокруг этой прямой дает сферу, описанную около данного цилиндра. Радиус этой сферы равен радиусу окружности, описанной около прямоугольника. ◻

Если радиус основания цилиндра равен r, а его высота равна h, то радиус R сферы, описанной около этого цилиндра, выражается формулой

$$R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Теорема. ***В цилиндр можно вписать сферу тогда и только тогда, когда его осевым сечением является квадрат. Радиус вписанной сферы равен радиусу окружности, вписанной в осевое сечение цилиндра.***

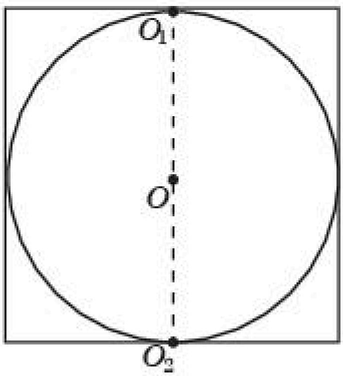


Рис. 10.4

Доказательство. Рассмотрим осевое сечение цилиндра (рис. 10.4).

Сфера вписана в этот цилиндр, если в прямоугольник, являющийся осевым сечением этого цилиндра, вписана окружность. Это может быть только в случае, если этот прямоугольник является квадратом. Радиус вписанной сферы равен радиусу окружности, вписанной в осевое сечение цилиндра. ◻

Если радиус основания цилиндра равен R, то и радиус сферы равен R.

По аналогии с понятием окружности, описанной около треугольника, и окружности, вписанной в треугольник, определим понятие сферы, описанной около конуса, и сферы, вписанной в конус.

Сфера называется *описанной около конуса*, если вершина и окружность основания конуса лежат на сфере (рис. 10.5). При этом конус называется *вписанным в сферу*.

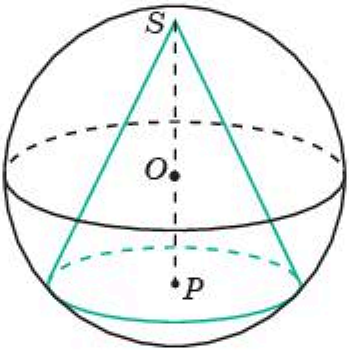


Рис. 10.5

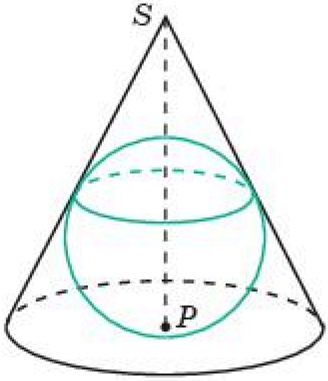


Рис. 10.6

Сфера называется *вписанной в конус*, если она касается его основания и боковой поверхности (касается каждой образующей) (рис. 10.6). При этом конус называется *описанным около сферы*.

Теорема. ***Около конуса можно описать сферу. Ее радиус равен радиусу окружности, описанной около треугольника, являющегося осевым сечением этого конуса.***

Доказательство. Рассмотрим осевое сечение конуса, являющееся равнобедренным треугольником, и описанную около него окружность (рис. 10.7). Конус получается вращением этого треугольника вокруг прямой, содержащей его высоту, опущенную на основание. Вращение окружности вокруг этой прямой дает сферу, описанную около данного конуса. Радиус этой сферы равен радиусу окружности, описанной около равнобедренного треугольника. ◻

Напомним, что радиус окружности, описанной около треугольника, стороны которого равны a, b, c, а площадь равна S, выражается формулой:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Этой же формулой выражается радиус R сферы, описанной около конуса, осевым сечением которого является треугольник, стороны которого равны a, b, c, а площадь равна S.

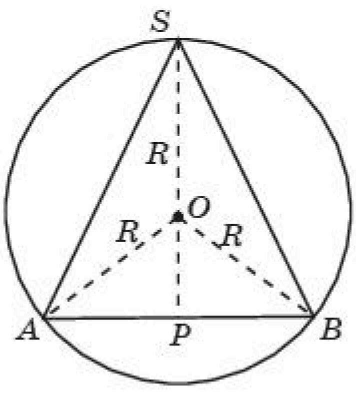


Рис. 10.7

Пример 1. Радиус основания конуса равен 6 см, образующая равна 10 см. Найдите радиус описанной сферы.

Решение. Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, стороны которого равны 12 см, 10 см, 10 см. Высота этого треугольника, опущенная на его основание, равна 8 см, площадь равна 48 см^2. Следовательно, радиус сферы, описанной около этого конуса, равен $6\frac{1}{4}$ см.

Теорема. ***В конус можно вписать сферу. Ее радиус равен радиусу окружности, вписанной в треугольник, являющегося осевым сечением этого конуса.***

Доказательство. Рассмотрим осевое сечение конуса, являющееся равнобедренным треугольником, и вписанную в него окружность (рис. 10.8). Конус получается вращением этого треугольника вокруг прямой, содержащей его высоту, опущенную на основание. Вращение окружности вокруг этой прямой дает сферу, вписанную в данный конус. Радиус этой сферы равен радиусу окружности, вписанной в равнобедренный треугольник.

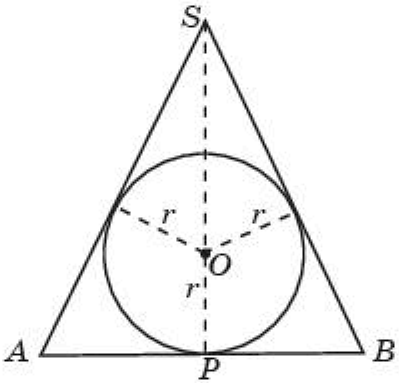


Рис. 10.8

Напомним, что радиус r окружности, вписанной в треугольник, стороны которого равны a, b, c, а площадь равна S, выражается формулой:

$$r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

Этой же формулой выражается радиус r сферы, вписанной в конус, осевым сечением которого является треугольник, стороны которого равны a, b, c, а площадь равна S.

Пример 2. Радиус основания конуса равен 6 см, образующая равна 10 см. Найдите радиус вписанной сферы.

Решение. Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, стороны которого равны 12 см, 10 см, 10 см. Высота этого треугольника, опущенная на его основание, равна 8 см, площадь равна 48 см^2. Следовательно, радиус сферы, вписанной в этот конус, равен 3 см.

Вопросы

1. Какая сфера называется *описанной около цилиндра*?
2. Какой цилиндр называется *вписанным в сферу*?
3. Всегда ли около цилиндра можно описать сферу?
4. Какая сфера называется *вписанной в цилиндр*?

5. Какой цилиндр называется *вписанным в сферу*?
6. В какой цилиндр можно вписать сферу?
7. Какая сфера называется *описанной около конуса*?
8. Какой конус называется *вписанным в сферу*?
9. Всегда ли около конуса можно описать сферу?
10. Какая сфера называется *вписанной в конус*?
11. Какой конус называется *описанным около сферы*?
12. Всегда ли конус можно вписать в сферу?

Задачи

A

10.1. В цилиндр вписана сфера радиусом R. Найдите радиус основания и высоту цилиндра?

10.2. В цилиндр, высота которого равна h, вписана сфера. Найдите ее радиус.

10.3. Около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1 см, описана сфера. Найдите ее радиус.

10.4. Около цилиндра, радиус основания которого равен 1 см, описана сфера радиусом 2 см. Найдите высоту цилиндра.

10.5. Около цилиндра, высота которого равна 2 см, описана сфера радиусом 2 см. Найдите радиус основания цилиндра.

10.6. Осевым сечением цилиндра является прямоугольник, стороны которого равны 3 см и 4 см. Найдите радиус описанной сферы.

10.7. Найдите площадь поверхности цилиндра, описанного около сферы радиусом 1 см.

B

10.8. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник со стороной равной 1 см. Найдите радиус: а) описанной; б) вписанной сферы.

10.9. Выразите радиус R сферы, описанной около конуса, через его высоту h и радиус r окружности основания.

10.10. Радиус основания конуса равен 3 см, высота равна 4 см. Найдите радиус описанной сферы.

10.11. Выразите радиус r сферы, вписанной в конус, через его высоту h и радиус r_0 окружности основания.

10.12. Радиус основания конуса равен 3 см, высота равна 4 см. Найдите радиус вписанной сферы.

10.13. Образующая конуса и радиус описанной сферы равны 2 см. Найдите радиус основания конуса.

10.14. Радиус основания конуса равен 1 см. Образующая составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите радиус: а) описанной; б) вписанной сферы.

10.15. Образующая конуса равна 1 см и составляет с плоскостью основания угол 30°. Найдите радиус: а) описанной; б) вписанной сферы.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

10.16. Повторите определение длины окружности и формулу для вычисления длины окружности.

§ 11. Площадь поверхности сферы

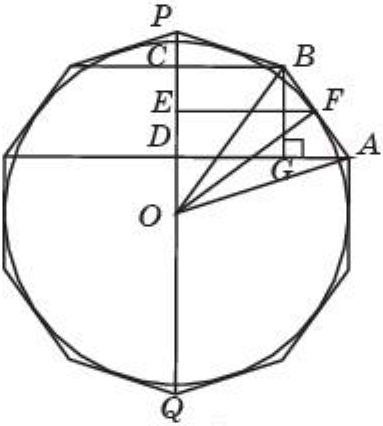


Рис. 11.1

Определение площади сферы аналогично определению длины окружности.

Напомним, что длиной окружности считают число, к которому стремятся периметры правильных многоугольников, описанных около этой окружности, при увеличении числа их сторон.

Рассмотрим правильный многоугольник, описанный около окружности, и фигуру, образованную вращением этого многоугольника вокруг прямой, содержащей диаметр PQ окружности (рис. 11.1). В поверхность этой фигуры могут входить боковые поверхности конусов, усеченных конусов и цилиндров, а сама она будет описана около сферы, полученной вращением окружности. Площадь этой поверхности равна сумме площадей входящих в нее боковых поверхностей конусов, усеченных конусов и цилиндров.

Площадью сферы, полученной вращением окружности, считается число, к которому стремятся площади поверхностей фигур, образованных вращением правильных многоугольников, описанных около этой окружности, при увеличении числа их сторон.

Нашей задачей является нахождение формулы площади сферы радиусом R. Площадь сферы называется также *площадью поверхности шара*, ограниченного этой сферой.

Рассмотрим поверхность, полученную вращением стороны AB правильного многоугольника M, описанного около окружности. Она представляет собой боковую поверхность усеченного конуса, полученного вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ вокруг прямой CD (рис. 11.1). Площадь $S(AB)$ этой поверхности равна произведению длины окружности, радиусом которой является средняя линия EF, и боковой стороны AB трапеции, т. е. $S(AB) = 2\pi \cdot EF \cdot AB$. Имеем $CD = BG = AB \cdot \sin\angle BAD$. Следовательно,

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle BAD}.$$

Учитывая, что угол BAD равен углу EOF (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами), получаем:

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin \angle BAD} = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin \angle EOF} = 2\pi \cdot OF \cdot CD = 2\pi R \cdot CD.$$

Аналогичные формулы имеют место для площадей поверхностей, полученных вращением других сторон многоугольника M. Складывая эти площади, получим формулу площади $S(M)$ поверхности вращения многоугольника M:

$$S(M) = 2\pi \cdot OF \cdot PQ = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

Площадью сферы считается число, к которому стремятся площади поверхностей вращения правильных многоугольников, описанных около окружности, при увеличении числа их сторон. Таким образом, для площади S сферы имеет место формула:

$$S = 4\pi R^2.$$

Докажите, что площадь сферы равна площади боковой поверхности цилиндра, описанного около этой сферы.

Вопросы

1. Какое число считается *площадью сферы*?
2. Что называется *площадью поверхности шара*?
3. Как вычисляется площадь сферы радиусом R?

Задачи

A

11.1. Найдите площадь сферы радиусом 1 см.

11.2. Найдите радиус сферы, площадь которой равна 1 см^2.

11.3. Площадь большого круга шара равна 3 см^2. Найдите площадь поверхности шара.

11.4. Как изменится площадь поверхности шара, если увеличить радиус шара в: а) 2 раза; б) 3 раза; в) n раз?

11.5. Площади поверхностей двух шаров относятся как 4 : 9. Найдите отношение их радиусов.

11.6. Радиусы двух шаров равны 6 см и 8 см. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.

11.7. Около шара описан цилиндр. Найдите отношение площади поверхности шара к площади боковой поверхности цилиндра.

B

11.8. Найдите площадь поверхности сферы, вписанной в цилиндр, осевым сечением которого является единичный квадрат.

11.9. Найдите площадь поверхности сферы, описанной около цилиндра, осевым сечением которого является единичный квадрат.

11.10. Диаметр Солнца в 400 раз больше диаметра Луны. Во сколько раз площадь поверхности Солнца больше площади поверхности Луны?

11.11. Во сколько раз площадь сферы, вписанной в куб, меньше площади сферы, описанной около этого куба.

11.12. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. Во сколько раз площадь описанной сферы больше площади сферы, вписанной в этот конус?

11.13. Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите площадь поверхности шара.

11.14. Найдите площадь поверхности Земли, считая длину Парижского меридиана равной 40 000 км.

11.15. Диаметр шара монумента Байтерек в Нур-Султане (рис. 11.2) равен 22 м. Найдите площадь поверхности этого шара.

17.16. ЭКСПО-2017 — Международная специализированная выставка под эгидой Международного бюро выставок, прошедшая в столице Казахстана городе Нур-Султан в 2017 году. Главным объектом выставки стало здание “Нұр Әлем” (каз. “Сияющий мир”), которое является самым большим сферическим зданием в мире. Его высота — 100 метров, а диаметр — 80 метров (рис. 11.3). Найдите площадь поверхности этой сферы. (Примите $\pi \approx 3$)

Рис. 11.2

Рис. 11.3

C

11.17. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник (рис. 11.4). Докажите, что площадь поверхности конуса равна площади поверхности шара, диаметр которого равен высоте конуса.

11.18. Дан единичный куб. Шар, радиус которого равен 1 см, имеет своим центром вершину этого куба (рис. 11.5). Найдите площадь части поверхности шара, содержащейся в кубе.

11.19. Дана правильная четырехугольная пирамида, стороны основания которой равны 2 см, а высота равна 1 см. Шар, радиус которого равен 1 см, имеет своим центром вершину этой пирамиды (рис. 11.6). Найдите площадь части поверхности шара, содержащейся в пирамиде.

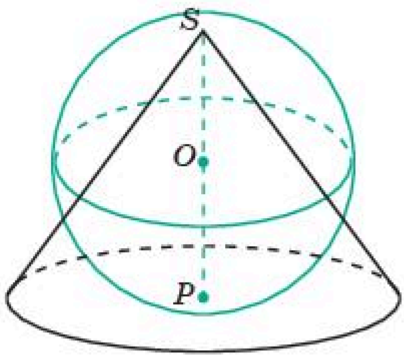


Рис. 11.4

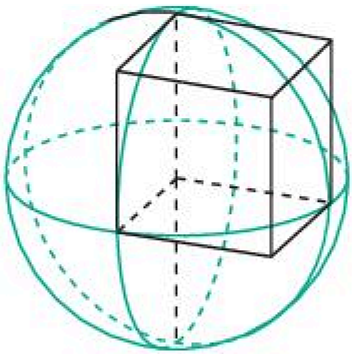


Рис. 11.5

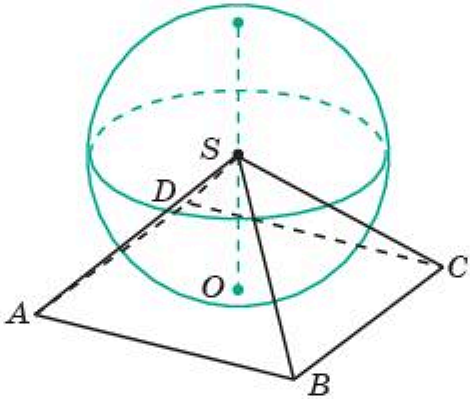


Рис. 11.6

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

11.20. Повторите определения вписанных и описанных многоугольников.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Радиус основания цилиндра равен 3 см, образующая 8 см. Найдите диагональ осевого сечения:

A) 6 см; B) 10 см; C) 12 см; D) 16 см.

2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, получающегося вращением прямоугольника, стороны которого равны 1 см и 2 см, вокруг прямой содержащей его большую сторону:

A) 2π см^2; B) 3π см^2; C) 4π см^2; D) 6π см^2.

3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, получающегося вращением правильной треугольной призмы, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, вокруг прямой содержащей боковое ребро:

A) 2π см^2; B) 3π см^2; C) 4π см^2; D) 6π см^2.

4. Радиус основания конуса равен 6 см, образующая равна 10 см. Найдите высоту конуса:

A) 6 см; B) $3\sqrt{2}$ см; C) $6\sqrt{2}$ см; D) 8 см.

5. Образующая конуса равна 6 см и наклонена к плоскости основания под углом 45°.Найдите радиус основания этого конуса:

A) 3 см; B) $3\sqrt{2}$ см; C) $3\sqrt{3}$ см; D) 6 см.

6. Найдите площадь поверхности конуса, радиус основания которого равен 2 см, а образующая равна 3 см:

A) 6π см^2; B) 8π см^2; C) 10π см^2; D) 12π см^2.

7. Радиус основания конуса равен 2 см. Через середину высоты этого конуса проведена плоскость, параллельная плоскости основания. Найдите площадь получившегося сечения:

A) π см^2; B) 2π см^2; C) 3π см^2; D) 4π см^2.

8. Найдите площадь поверхности конуса, получающегося вращением равнобедренного треугольника, основание которого равно 2 см, а боковая сторона равна 4 см, вокруг прямой, содержащей его высоту, опущенную на основание:

A) 2π см^2; B) 3π см^2; C) 5π см^2; D) 6π см^2.

9. Найдите площадь боковой поверхности конуса, получающегося вращением правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2 см, а боковые ребра равны 3 см, вокруг прямой, содержащей ее высоту:

A) 2π см^2; B) 3π см^2; C) 4π см^2; D) 6π см^2.

10. Радиусы оснований усеченного конуса равны 4 см и 1 см, высота равна 4 см. Найдите образующую усеченного конуса:

A) 3 см; B) 4 см; C) 5 см; D) 6 см.

11. Образующая усеченного конуса равна 2 см и наклонена к плоскости основания под углом 45°.Радиус большего основания усеченного конуса равен 2 см. Найдите радиус меньшего основания этого усеченного конуса:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $(2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ см; D) $(2 - \sqrt{2})$ см.

12. Основания равнобедренной трапеции равны 2 см и 4 см, а боковые стороны равны 3 см. Найдите площадь поверхности вращения этой трапеции, вокруг прямой, проходящей через середины оснований:

A) 8π см^2; B) 10π см^2; C) 12π см^2; D) 14π см^2.

13. Шар радиусом 2 см пересечен плоскостью, отстоящей от центра шара на 1 см. Найдите площадь круга, получившегося в сечении:

A) π см^2; B) 2π см^2; C) 3π см^2; D) 4π см^2.

14. Наименьшее и наибольшее расстояния от данной точки, расположенной внутри сферы, до точек сферы равны соответственно 4 см и 6 см. Найдите радиус сферы:

A) 2 см; B) 4 см; C) 5 см; D) 10 см.

15. Осевым сечением цилиндра является прямоугольник, стороны которого равны 6 см и 8 см. Найдите радиус описанной сферы:

A) 5 см; B) 6 см; C) 8 см; D) 10 см.

16. Найдите радиус сферы, вписанной в конус, осевым сечением которого является правильный треугольник со стороной равной 2 см:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см.

17. Найдите площадь сферы радиусом 2 см:

A) 12π см^2; B) 14π см^2; C) 16π см^2; D) 18π см^2.

18. Найдите площадь сферы, вписанной в единичный куб:

A) $\frac{\pi}{2}$ см^2; B) π см^2; C) 2π см^2; D) 3π см^2.

19. Найдите площадь сферы, описанной около единичного куба.

A) π см^2; B) 2π см^2; C) 3π см^2; D) 4π см^2.

20. Радиусы двух шаров относятся как 2 : 3. Найдите отношение их площадей поверхностей.

A) 2 : 3; B) 4 : 6; C) 6 : 9; D) 4 : 9.

Глава III ОБЪЕМЫ ТЕЛ

§ 12. Общие свойства объемов тел

Объем — величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа, характеризующие величину части пространства, которую занимают эти фигуры.

За *единицу измерения объема* принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения объема принимается куб, ребро которого равно соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой куб называется кубическим миллиметром, кубическим сантиметром или кубическим метром соответственно.

Можно сказать, что объем фигуры это число, полученное в результате измерения и показывающее, сколько раз единичный куб и его части целиком укладываются в данной фигуре. Это число может быть натуральным, рациональным или даже иррациональным.

Ясно, что объем фигуры зависит от единицы измерения. Поэтому, на практике, после этого числа указывают единицу измерения объема. Например, V мм^3, V см^3, V м^3.

Для объемов пространственных фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам площадей плоских фигур.

1. Объем фигуры в пространстве является неотрицательным числом.
2. Равные фигуры имеют равные объемы.
3. Если фигура Φ составлена из двух неперекрывающихся фигур Φ_1 и Φ_2, то объем фигуры Φ равен сумме объемов фигур Φ_1 и Φ_2, т. е.
$$V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2).$$
4. Объем V прямоугольного параллелепипеда, ребра которого, выходящие из одной вершины, равны a, b, c, вычисляется по формуле
$$V(\Phi) = a \cdot b \cdot c.$$

В частности, объем V куба с ребром a вычисляется по формуле
$$V = a^3.$$

? Как вы думаете, может ли объем фигуры равняться нулю?

Две фигуры, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*.

Напомним, что *подобием* называется преобразование пространства, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, т. е. переводящее любые две точки A, B в точки A', B' так, что $A'B' = kAB$, где k — положительное число, называемое *коэффициентом подобия*.

Две фигуры в пространстве называются *подобными*, если существует подобие, переводящее одну из них в другую.

Примерами подобных фигур являются:

1) два куба, коэффициент подобия равен отношению длин ребер этих кубов;

2) два прямоугольных параллелепипеда, для ребер a', b', c' и a, b, c которых выполняются равенства

$$a' = ka,\ b' = kb,\ c' = kc,$$

где k — некоторое фиксированное число;

3) два шара, коэффициент подобия равен отношению их радиусов.

Докажите, что площади поверхностей двух подобных многогранников относятся как квадрат коэффициента подобия.

Проверьте, что площади поверхностей двух подобных шаров относятся как квадрат коэффициента подобия.

Проверьте, что объемы двух подобных прямоугольных параллелепипедов относятся как куб коэффициента подобия.

Примем без доказательства, что объемы двух подобных фигур относятся как куб коэффициента подобия, т. е. если фигура Φ_2 подобна фигуре Φ_1 с коэффициентом подобия k, то для объемов этих фигур имеет место формула:

$$V(\Phi_2) = k^3V(\Phi_1).$$

Вопросы

1. Какой величине аналогичен объем?
2. Что принимается за *единицу измерения объема*?
3. Перечислите свойства объема.
4. Какие фигуры в пространстве называются *равновеликими*?
5. Какое преобразование пространства называется *подобием*?
6. Какие фигуры в пространстве называются *подобными*?
7. Как связаны между собой объемы подобных фигур?
8. Приведите примеры подобных пространственных фигур.

Задачи

А

12.1. Объем куба равен 27 см^3. Найдите площадь его поверхности.

12.2. Площадь поверхности куба равна 24 см^2. Найдите его объем.

12.3. Диагональ куба равна $\sqrt{12}$ см. Найдите его объем.

12.4. Чему равен объем детали в форме пространственного креста (рис. 12.1), если ребра образующих его кубов равны 1 см?

12.5. Во сколько раз увеличится объем куба, если все его ребра увеличить в три раза?

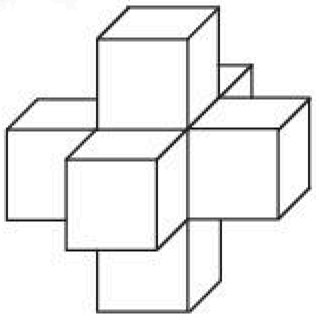


Рис. 12.1

12.6. Во сколько раз уменьшится объем прямоугольного параллелепипеда, если все его ребра уменьшить в два раза?

12.7. Как изменится объем прямоугольного параллелепипеда, если: а) одно из его измерений увеличить в два раза; б) если два его измерения уменьшить в три раза?

12.8. Строительный кирпич весит 4 кг. Сколько граммов весит игрушечный кирпич из того же материала, все размеры которого в четыре раза меньше?

B

12.9. Какова должна быть площадь кабинета высотой 3,5 м для класса в 28 человек, если на каждого ученика нужно 7,5 м^3 воздуха?

12.10. Найдите объемы деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 12.2.

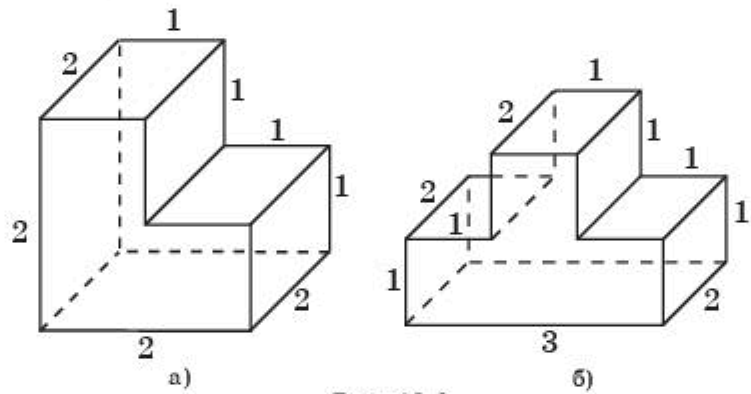


Рис. 12.2

12.11. Найдите объемы деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 12.3.

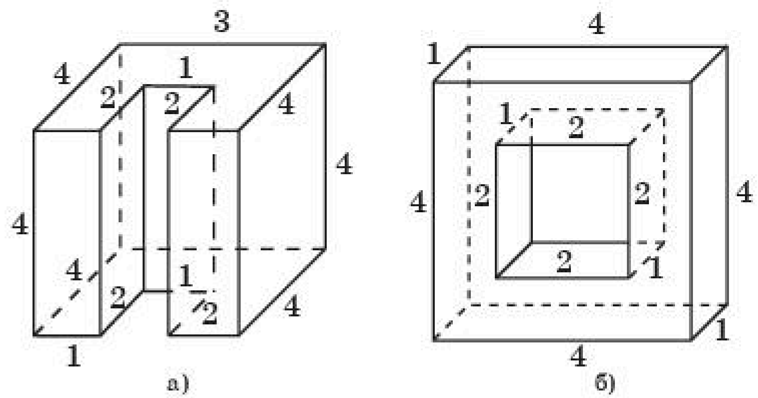


Рис. 12.3

12.12. Найдите объемы деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 12.4.

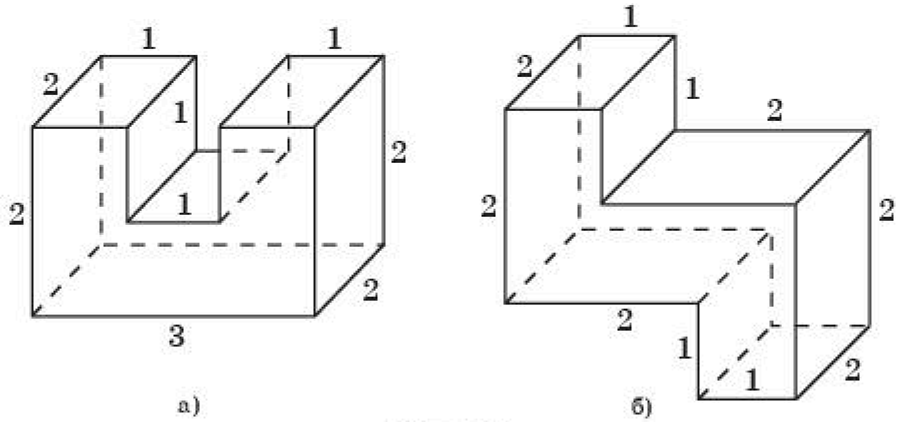


Рис. 12.4

12.13. Найдите объемы деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 12.5.

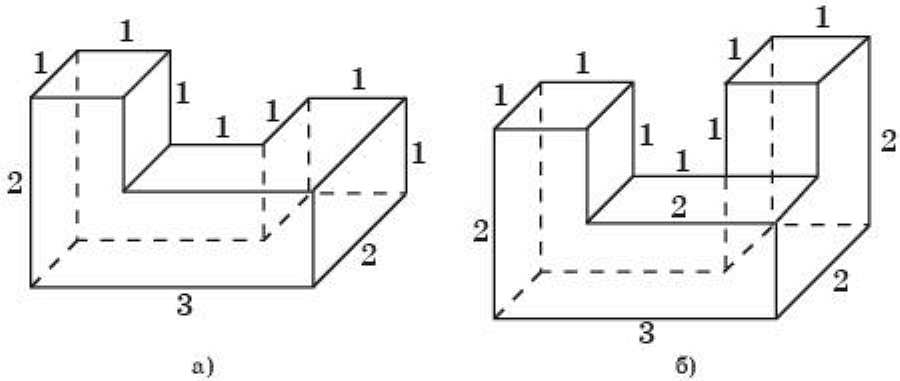


Рис. 12.5

12.14. Ребра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выходящие из одной вершины, равны 5 см, 4 см, 3 см. Найдите объем треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 12.6).

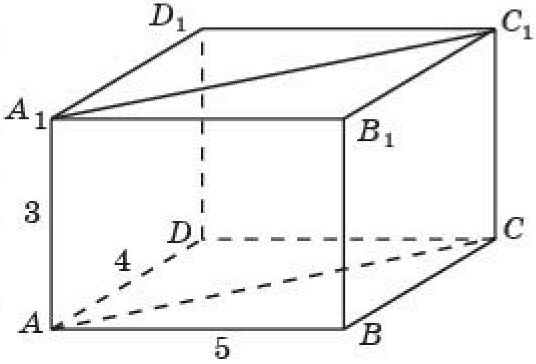


Рис. 12.6

12.15. Ребра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, выходящие из одной вершины, равны 5 см, 4 см, 3 см. Найдите объем тре-

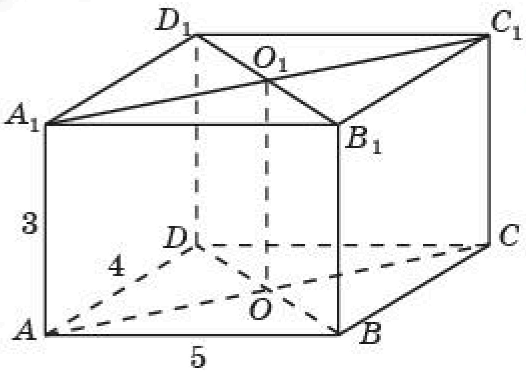


Рис. 12.7

угольной призмы $ABOA_1B_1O_1$ (рис. 12.7).

12.16. Основанием аквариума является прямоугольник со сторонами 40 см и 50 см. Уровень воды в нем находится на высоте 80 см. Эту воду перелили в другой аквариум, основанием которого является прямоугольник со сторонами 80 см и 100 см. На какой высоте будет находиться уровень воды?

12.17. Найдите объем общей части (пересечения) двух единичных кубов, вершина одного из которых расположена в центре другого (рис. 12.8).

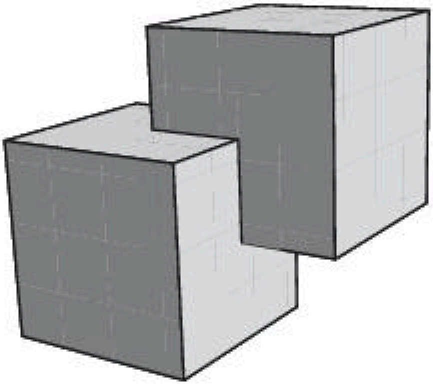


Рис. 12.8

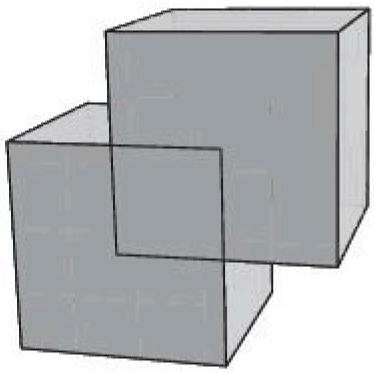


Рис. 12.9

12.18. Найдите объем фигуры, составленной из двух единичных кубов, две вершины одного из которых расположены в центрах граней другого (рис. 12.9).

12.19. Строительный кирпич имеет размер 25 см × 12 см × 6 см. Найдите объем стены, выложенной из 10000 кирпичей. Учтите, что раствор увеличивает объем на 15%.

12.20. Три свинцовых куба с ребрами 1 см, 6 см и 8 см переплавили в один куб. Найдите длину ребра полученного куба.

C

12.21. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.

12.22. В каждой грани куба с ребром 6 см проделали сквозное квадратное отверстие со стороной квадрата 2 см (рис. 12.10). Найдите объем оставшейся части.

12.23. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань единичного куба, а вершиной — центр этого куба (рис. 12.11).

12.24. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань единичного куба, а вершиной — вершина куба, не принадлежащая этой грани (рис. 12.12).

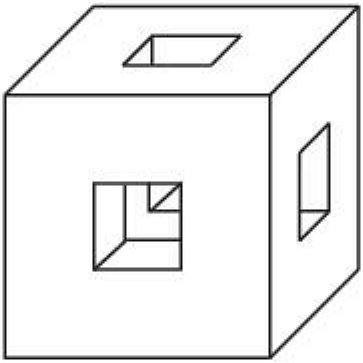


Рис. 12.10

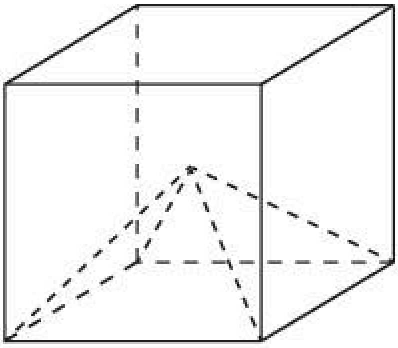


Рис. 12.11

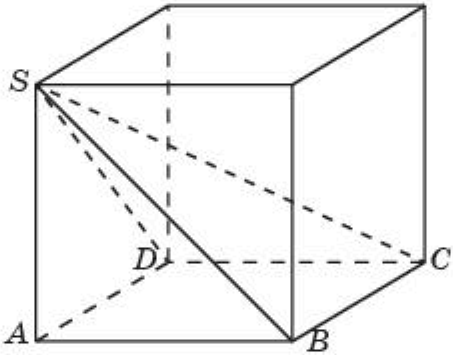


Рис. 12.12

12.25. Емкость имеет форму параллелепипеда (рис. 12.13). Необходимо наполнить водой ровно половину объема данной емкости, не имея никаких других емкостей и не делая измерений. Покажите на рисунке и объясните. Найдите объем этой воды, если длина емкости 4 м, ширина на 0,5 м больше высоты, а высота составляет 37,5% длины.

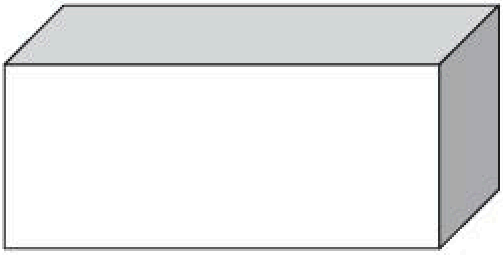


Рис. 12.13

12.26. Длина аквариума 80 см, ширина 45 см, а высота 55 см. Сколько литров воды надо влить в этот аквариум, чтобы уровень воды был ниже верхнего края аквариума на 10 см.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

12.27. Повторите определение призмы, вписанных и описанных призм.

§ 13. Объем призмы

Рассмотрим метод вычисления объемов пространственных фигур, предложенный итальянским математиком Бонавентурой Кавальери (1598—1647) и названный впоследствии принципом Кавальери. Он заключается в следующем.

Принцип Кавальери. Если при пересечении двух фигур Φ_1 и Φ_2 в пространстве плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях получаются фигуры F_1 и F_2 одинаковой площади (рис. 13.1), то объемы исходных пространственных фигур равны.

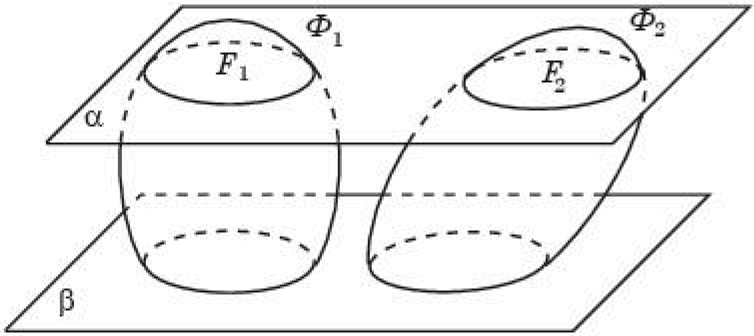


Рис. 13.1

Для обоснования этого принципа представим фигуры Φ_1 и Φ_2, составленными из тонких слоев одинаковой толщины, которые получаются при пересечении фигур Φ_1 и Φ_2 плоскостями, параллельными некоторой заданной плоскости (рис. 13.1). Из равенства площадей и толщины этих слоев следует равенство их объемов. Значит, равны и объемы фигур Φ_1 и Φ_2, составленных из этих слоев.

Применим принцип Кавальери для нахождения объема призмы.

Теорема. ***Объем V призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т. е. имеет место формула***

$$V = S \cdot h,$$

где S — площадь основания, h — высота призмы.

Доказательство. Для призмы с площадью основания S и высотой h рассмотрим прямоугольный параллелепипед, у которого ребра, выходящие из одной вершины, равны a, b, h, причем, $a \cdot b = S$. Расположим призму и параллелепипед так, чтобы грань со сторонами a, b лежала в плоскости β основания призмы, а сами параллелепипед и призма располагались по одну сторону от этой плоскости (рис. 13.2).

В сечении параллелепипеда плоскостью α, параллельной плоскости β, получается прямоугольник, равный прямоугольнику, лежащему в плоскости β со сторонами a, b. В сечении призмы этой плоскостью получается многоугольник, равный основанию призмы. Площади этих сечений равны, следовательно, по принципу Кавальери равны объемы параллелепипеда и призмы. Значит, объем призмы равен $S \cdot h$. ◻

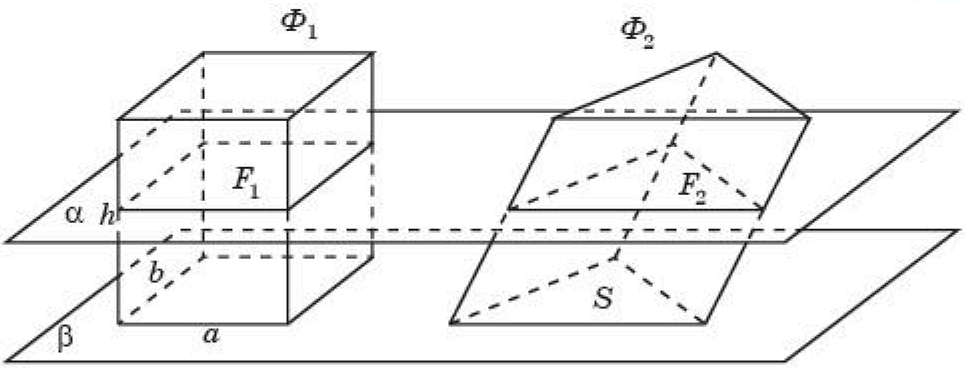


Рис. 13.2

Выведите формулу объема правильной: а) треугольной; б) шестиугольной призмы, стороны основания которой равны a, а высота равна h.

Вопросы

1. Как формулируется принцип Кавальери?
2. Как вычисляется объем призмы?

Задачи

A

13.1. Основанием треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите объем данной призмы.

13.2. Найдите объем правильной треугольной призмы, сторона основания которой 4 см и высота 5 см.

13.3. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 2 см, а боковые ребра равны 3 см.

13.4. Основанием четырехугольной призмы является квадрат со стороной 1 см. Боковое ребро равно 2 см и наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем призмы.

13.5. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 см и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол 60° и равно 1 см. Найдите объем параллелепипеда.

B

13.6. Найдите высоту правильной треугольной призмы, если сторона ее основания 20 см и объем 4800 см³.

13.7. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру (рис. 13.3). В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

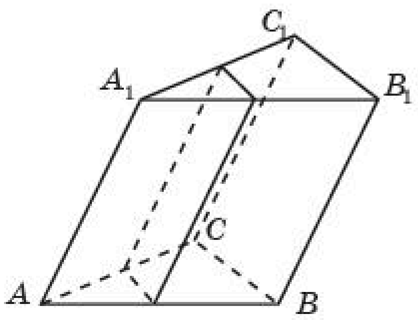


Рис. 13.3

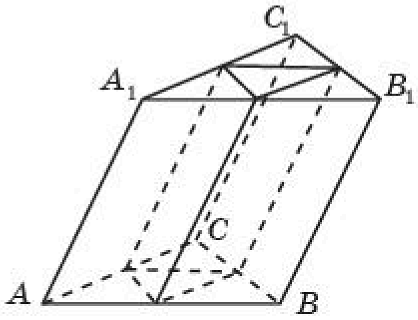


Рис. 13.4

13.8. Объем треугольной призмы равен 12 см^3. Найдите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы (рис. 13.4).

13.9. Объем четырехугольной призмы равен 10 см^3. Найдите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы (рис. 13.5).

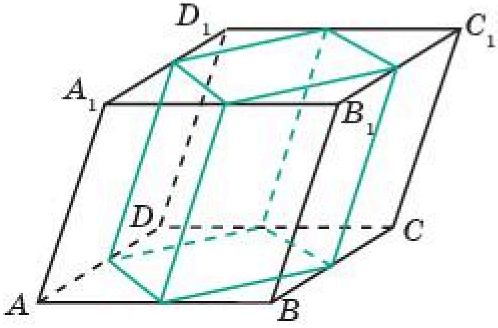


Рис. 13.5

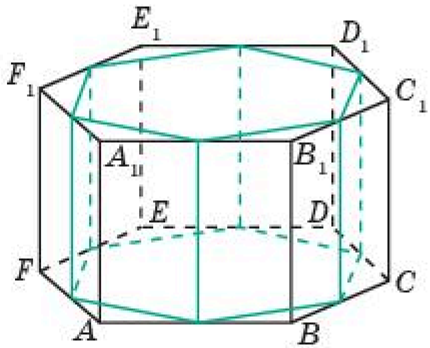


Рис. 13.6

13.10. Объем правильной шестиугольной призмы равен 12 см^3. Найдите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы (рис. 13.6).

13.11. Сформулируйте условия на стороны оснований и боковые ребра двух правильных n-угольных призм, при которых эти призмы подобны. Как относятся объемы этих призм?

C

13.12. Основание прямой призмы — ромб, площадь которого равна 1 м^2. Площади диагональных сечений равны 3 м^2 и 6 м^2 (рис. 13.7). Найдите объем призмы.

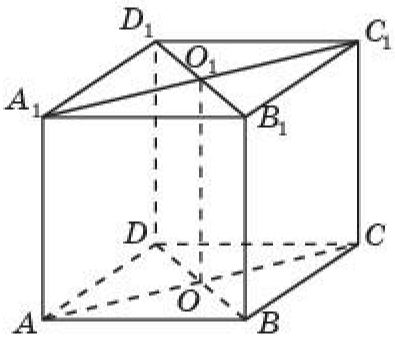


Рис. 13.7

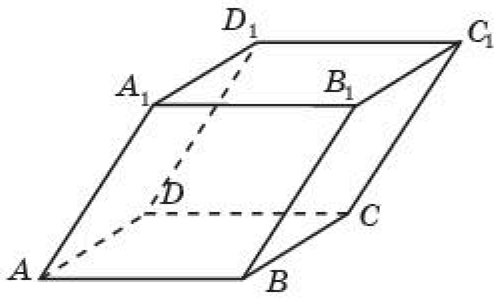


Рис. 13.8

13.13. Три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, являются ромбами со сторонами 1 см и острыми углами при этой вершине 60° (рис. 13.8). Найдите объем параллелепипеда.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

13.14. Повторите определения тела вращения и цилиндра.

§ 14. Объем цилиндра

Применим принцип Кавальери для нахождения объема цилиндра.

Теорема. ***Объем V цилиндра, радиус основания которого равен R, а высота равна h, выражается формулой:***

$$V = \pi R^2 \cdot h.$$

Доказательство. Аналогично доказательству формулы объема призмы. А именно, для цилиндра с радиусом основания R и высотой h рассмотрим прямоугольный параллелепипед, у которого ребра, выходящие из одной вершины, равны a, b, h. Причем, $a \cdot b = \pi R^2$. Расположим цилиндр и параллелепипед так, чтобы грань со сторонами a, b лежала в плоскости β основания цилиндра, а сами параллелепипед и цилиндр располагались по одну сторону от этой плоскости (рис. 14.1).

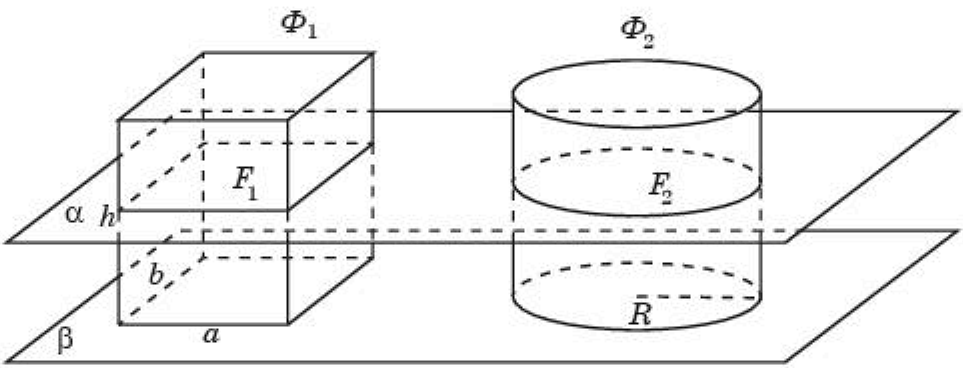


Рис. 14.1

В сечении параллелепипеда плоскостью α, параллельной плоскости β, получается прямоугольник, равный прямоугольнику, лежащему в плоскости β со сторонами a, b. В сечении цилиндра этой плоскостью получается круг, равный основанию цилиндра.

Площади этих сечений равны, следовательно, по принципу Кавальери равны объемы параллелепипеда и цилиндра. Значит, объем цилиндра равен $\pi R^2 \cdot h$. □

Вопросы

Как вычисляется объем цилиндра?

Задачи

A

14.1. Радиус основания цилиндра равен 2 см, образующая равна 3 см. Найдите объем этого цилиндра.

14.2. Осевое сечение цилиндра — квадрат со стороной a см. Найдите объем цилиндра.

14.3. Одна кружка вдвое выше другой, зато вторая в полтора раза шире. Какая кружка вместительнее?

14.4. Найдите объем фигуры, которая получается при вращении квадрата вокруг его стороны, равной a.

14.5. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 1 см и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем цилиндра.

14.6. Найдите объем цилиндра, вписанного в единичный куб.

14.7. В основании прямой призмы квадрат со стороной 1 см. Боковые ребра равны 2 см. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

B

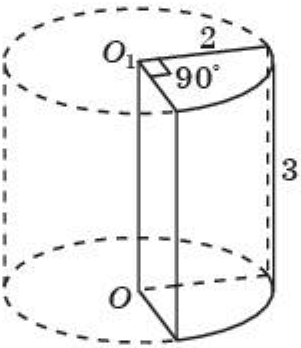


Рис. 14.2

14.8. Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника около каждой из неравных его сторон a и b. Как относятся объемы цилиндров?

14.9. Во сколько раз объем цилиндра, описанного около правильной четырехугольной призмы, больше объема цилиндра, вписанного в эту же призму?

14.10. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке, высекаемой из цилиндра прямым двугранным углом (рис. 14.2). Радиус основания цилиндра равен 2 см, а образующая равна 3 см.

14.11. В цилиндрический сосуд, диаметр которого равен 9 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объем детали?

14.12. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в два раза больше первого?

14.13. Развертка боковой поверхности цилиндра — прямоугольник со сторонами 1 см и 2 см. Найдите объем цилиндра.

14.14. Найдите объем цилиндра, описанного около единичной сферы.

14.15. Сформулируйте условия на радиусы оснований и образующие двух цилиндров, при которых эти цилиндры подобны. Как относятся объемы этих цилиндров?

C

14.16. Многоугольник, изображенный на рисунке 14.3, все углы которого прямые, вращается вокруг прямой a, содержащей сторону, равную 2 см. Найдите объем тела вращения.

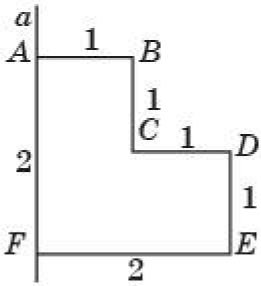


Рис. 14.3

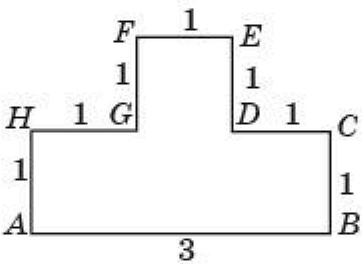


Рис. 14.4

14.17. Многоугольник, изображенный на рисунке 14.4, все углы которого прямые, вращается вокруг прямой AB, содержащей сторону, равную 3 см. Найдите объем тела вращения.

14.18. Профиль русла реки имеет форму равнобедренной трапеции, основания которой равны 10 м и 6 м, а высота — 2 м (рис. 14.5). Скорость течения равна 1 м/сек. Какой объем воды проходит через этот профиль за 1 мин? Ответ дайте в кубических метрах.

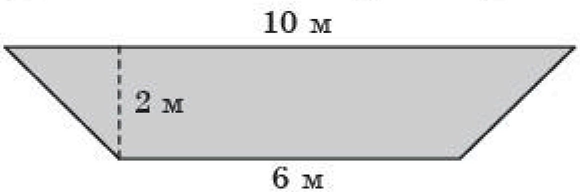


Рис. 14.5

14.19. Чугунная труба имеет длину 2 м и внешний диаметр 20 см. Толщина стенок трубы равна 2 см (рис. 14.6). Найдите вес трубы, если удельный вес чугуна примерно равен 7,5 г/см^3. Ответ дайте в килограммах (Примите $\pi \approx 3$).

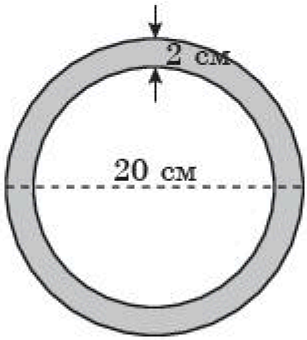


Рис. 14.6

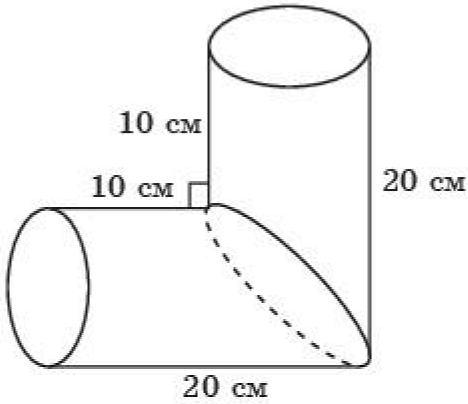


Рис. 14.7

14.20. Найдите объем детали, изображенной на рисунке 14.7, составленной из двух равных частей цилиндров. (Примите $\pi \approx 3$).

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

14.21. Повторите определения пирамиды и усеченной пирамиды.

§ 15. Объемы пирамиды и усеченной пирамиды

Первые упоминания о вычислении объема пирамиды найдены в папирусах древних вавилонян и египтян (свыше 3000 лет до н. э.). Интересно, что они не вывели общей формулы для нахождения объема пирамиды, а вычисляли объемы конкретных пирамид. Так им удалось найти объем правильной четырехугольной пирамиды с основанием, равным единице измерения, и высотой, равной $\frac{1}{2}$. Для этого они брали куб с ребром, равным единице измерения, и разбивали его на шесть равных правильных четырехугольных пирамид. Основаниями этих пирамид будут грани куба, а вершина каждой из них будет находиться в центре куба (рис. 15.1). Все шесть полученных пирамид равны, отсюда получаем, что объем каждой из них равен $\frac{1}{6}$ объема куба.

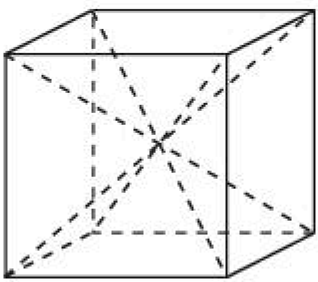


Рис. 15.1

Используя принцип Кавальери, докажем следующую вспомогательную теорему.

Теорема. ***Если две пирамиды имеют равные высоты и основания равной площади, то их объемы равны.***

Доказательство. Пусть пирамиды Φ_1 и Φ_2 имеют высоты, равные h, а основания площадью S расположены в одной плоскости β (рис. 15.2).

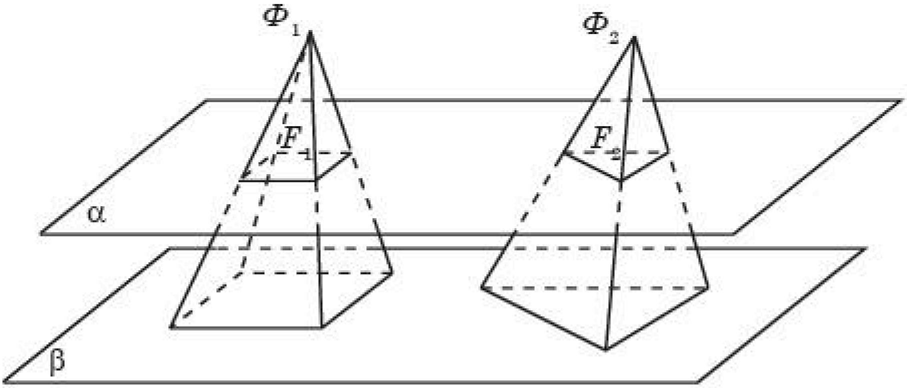


Рис. 15.2

Проведем плоскость α, параллельную плоскости β, на расстоянии x от нее, $0 \leqslant x \leqslant h$. Тогда фигуры F_1 и F_2, получающиеся в сечениях пирамид этой плоскостью, подобны соответствующим основаниям, и коэффициент подобия k в обоих случаях равен $(h - x) : h$. Следовательно, площади S_1 и S_2 фигур F_1 и F_2 соответственно выражаются формулами $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$, значит, равны. Из принципа Кавальери получаем, что объемы пирамид равны. ◻

Докажем теперь основную теорему об объеме треугольной пирамиды.

Теорема. ***Объем треугольной пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту.***

Доказательство. Пусть A_1ABC — треугольная пирамида. Достроим ее до треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 15.3).

Плоскости, проходящие через точки B, C, A_1 и C, B_1, A_1 разбивают эту призму на три пирамиды A_1ABC, A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ с вершинами в точке A_1. Пирамиды A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ имеют равные основания CBB_1 и CB_1C_1, так как диагональ CB_1 разбивает параллелограмм CBB_1C_1 на два равных треугольника. Кроме этого, данные пирамиды имеют общую вершину, а их основания лежат в одной плоскости. Значит, эти пирамиды имеют общую высоту. Следовательно, эти пирамиды имеют равные объемы. Рассмотрим теперь пирамиды A_1ABC и $CA_1B_1C_1$. Они имеют равные основания ABC и $A_1B_1C_1$ и равные высоты. Следовательно, они имеют равные объемы. Таким образом,

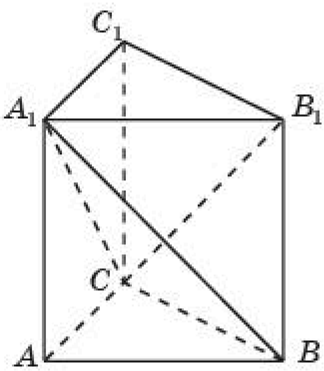


Рис. 15.3

объемы всех трех пирамид равны. Учитывая, что объем призмы равен произведению площади основания на высоту, получим формулу объема V треугольной пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

где S — площадь основания пирамиды, h — ее высота.

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении объема произвольной пирамиды.

Теорема. ***Объем произвольной пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту.***

Доказательство. Для данной пирамиды рассмотрим треугольную пирамиду с такой же площадью основания и такой же высотой. По принципу Кавальери объемы этих пирамид равны и, следовательно, имеет место формула:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

где S — площадь основания пирамиды, h — ее высота.

Выведите формулу объема правильной: а) треугольной; б) шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны a, а высота равна h.

Выведем формулу для объема усеченной пирамиды.

Теорема. ***Объем V усеченной пирамиды выражается формулой:***

$$V = \frac{1}{3}h_y(S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

где S, s — площади оснований, h_y — высота усеченной пирамиды.

Доказательство. Рассмотрим усеченную пирамиду, площади оснований которой равны S и s, а высота h_y равна разности $(H - h)$ высот исходной и отсеченной пирамид.

На рисунке 15.4 изображена пятиугольная усеченная пирамида $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

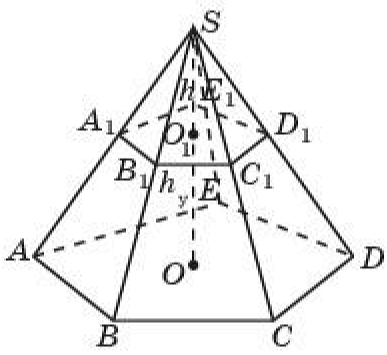


Рис. 15.4

Для объема V усеченной пирамиды имеет место формула:

$$V = \frac{1}{3}SH - \frac{1}{3}sh.$$

Выразим высоту h_y усеченной пирамиды через высоты пирамид H, h и их площади сечений S, s.

Заметим, что в сечении пирамиды плоскостью, параллельной основанию, получается фигура, подобная основанию, и коэффициент подобия равен отношению расстояний от вершины пирамиды до плоскости сечения и плоскости основания, т. е. равен $\frac{h}{H}$. Кроме того, отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Следовательно, имеем равенство

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \left(\frac{H - h_y}{H}\right)^2.$$

Из этого равенства найдем высоты H и h.

$$H = \frac{h_y\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}, \quad h = \frac{h_y\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}.$$

Подставляя теперь H и h в выражение для объема усеченной пирамиды, получим:

$$V = \frac{1}{3}\left(S\frac{h_y\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} - s\frac{h_y\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}\right) = \frac{1}{3}h_y \cdot \frac{S\sqrt{S} - s\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} = \frac{1}{3}h_y(S + \sqrt{S \cdot s} + s).$$

Выведите формулу объема усеченной правильной четырехугольной пирамиды, стороны оснований которой равны a и b, а высота равна h_y.

Вопросы

1. Как вычисляется объем треугольной пирамиды?
2. Как вычисляется объем произвольной пирамиды?
3. Как вычисляется объем усеченной пирамиды?

Задачи

A

15.1. Выведите формулу объема правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

15.2. В правильной четырехугольной пирамиде высота 3 м, боковое ребро 5 м. Найдите ее объем.

15.3. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания и высота которой равны 1 см.

15.4. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания и высота которой равны 1 см.

15.5. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см.

15.6. Найдите объем тетраэдра с ребром, равным 1 см.

15.7. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?

15.8. Как изменится объем правильной пирамиды, если ее высота будет увеличена в три раза, а сторона основания уменьшена в три раза?

15.9. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 1 см³. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки: а) A, B, C, D, B_1; б) A, B, D, C_1 (рис. 15.5).

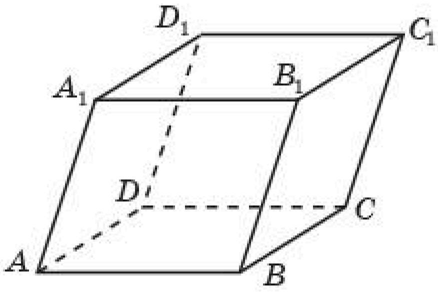


Рис. 15.5

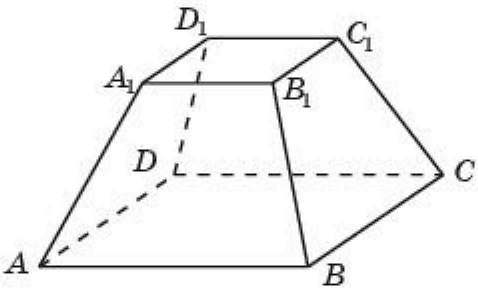


Рис. 15.6

15.10. Параллельно основанию пирамиды проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объемы полученных частей пирамиды?

15.11. Найдите объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 2 см и 1 см, а высота равна 3 см (рис. 15.6).

B

15.12. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее диагональным сечением является правильный треугольник со стороной, равной 1 см.

15.13. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 1 см. Найдите объем пирамиды.

15.14. Найдите объем треугольной пирамиды, если ее боковые ребра равны 1 см, а плоские углы при вершине равны 60°, 90° и 90°.

15.15. Объем правильной шестиугольной пирамиды 6 см³. Сторона основания 1 см. Найдите высоту этой пирамиды.

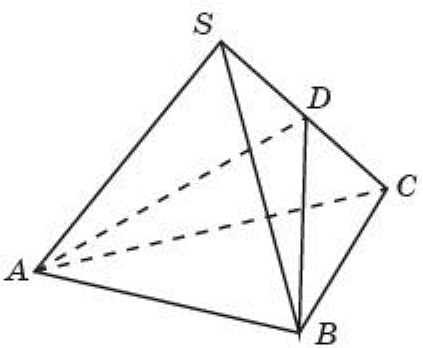


Рис. 15.7

15.16. Объем параллелепипеда равен 1 см³ (рис. 15.5). Найдите объем тетраэдра BDA_1C_1.

15.17. Плоскость проходит через сторону основания треугольной пирамиды и середину противолежащего бокового ребра (рис. 15.7). В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

15.18. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен 12 см³. Найдите объем пирамиды, отсекаемой от нее плоскостью, проходящей через диагональ AC основания и середину E противолежащего бокового ребра (рис. 15.8).

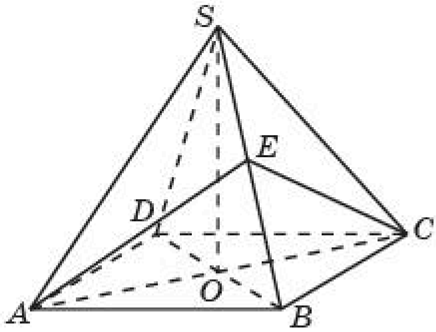


Рис. 15.8

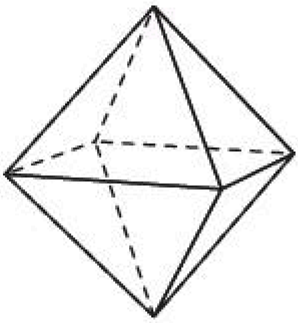


Рис. 15.9

15.19. Найдите объем октаэдра с ребром, равным 1 см (рис. 15.9).

15.20. Найдите объем правильной шестиугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 2 см и 1 см, а высота равна 3 см (рис. 15.10).

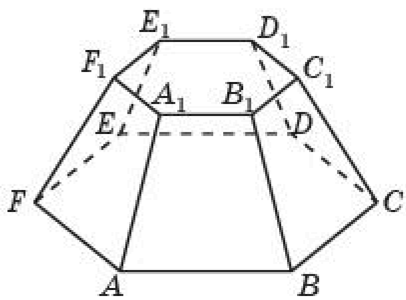


Рис. 15.10

Рис. 15.11

15.21. Дворец мира и согласия в Нур-Султане (рис. 15.11) имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания и высота которой равны 62 м. Найдите его объем.

15.22. Сформулируйте условия на стороны оснований и боковые ребра двух правильных n-угольных пирамид, при которых эти пирамиды подобны. Как относятся объемы этих пирамид?

C

15.23. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 1, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объем пирамиды.

15.24. Объем четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 1 см^3. Найдите объем пирамиды, вершинами основания которой являются середины сторон основания $ABCD$, а вершина совпадает с вершиной S данной пирамиды (рис. 15.12).

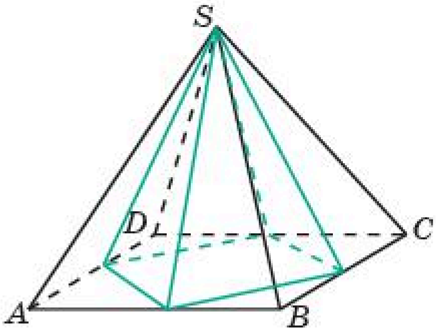


Рис. 15.12

Рис. 15.13

15.25. Объем тетраэдра равен 1 см^3. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер этого тетраэдра.

15.26. Одно из самых грандиозных сооружений древности – пирамида Хеопса (рис. 15.13) — имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с высотой 146 м и боковым ребром 230 м. Найдите объем этой пирамиды.

15.27. На фотографии виден жилой дом, у которого крыша имеет форму пирамиды с квадратным основанием (рис. 15.14). Все ребра пирамиды равны 12 м. Найдите объем крыши этого дома.

Рис. 15.14

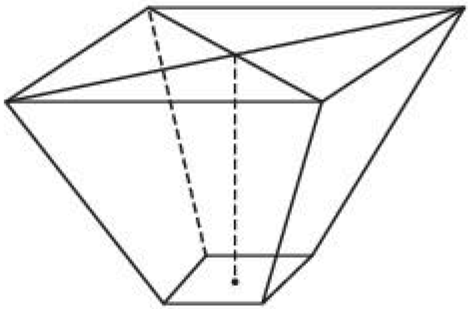


Рис. 15.15

15.28. Ящик для засыпки картофеля имеет форму правильной четырехугольной усеченной пирамиды (рис. 15.15). Стороны оснований равны соответственно 6 дм и 14,4 дм. Высота пирамиды — 4,3 дм. Найти объем и массу картофеля, который может храниться в ящике, если 1 дм^3 массы клубней весит 0,675кг.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

15.29. Повторите определения конуса и усеченного конуса.

§ 16. Объемы конуса и усеченного конуса

Применим принцип Кавальери для нахождения объема конуса.

Теорема. ***Объем конуса равен одной третьей произведения площади его основания на высоту.***

Доказательство. Для данного конуса с основанием площадью S и высотой h рассмотрим какую-нибудь пирамиду с теми же площадью основания и высотой. Расположим их так, чтобы основания лежали в одной плоскости β, а сами они лежали по одну сторону от этой плоскости (рис. 16.1).

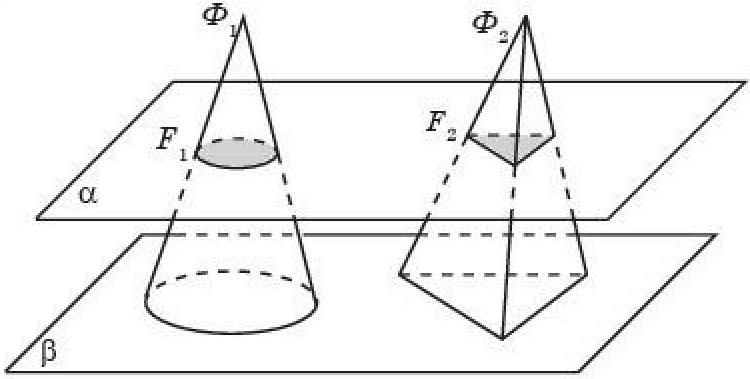


Рис. 16.1

Проведем плоскость α, параллельную плоскости β, на расстоянии x от нее, $0 \leqslant x \leqslant h$. Тогда фигуры F_1 и F_2, получающиеся в сечениях конуса и пирамиды этой плоскостью, подобны соответствующим основаниям, и коэффициент подобия k в обоих случаях равен $(h - x) : h$. Следовательно, площади S_1 и S_2 фигур F_1 и F_2 соответственно выражаются формулами $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$, значит, равны. Из принципа Кавальери получаем, что объемы конуса и пирамиды равны. Следовательно, для объема V конуса имеет место формула:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

где R — радиус основания, h — высота конуса.

Для усеченного конуса имеет место формула объема, аналогичная формуле объема усеченной пирамиды, а именно:

$$V = \frac{1}{3}h_y(S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

где S, s — площади оснований, h_y — высота усеченного конуса (рис. 16.2).

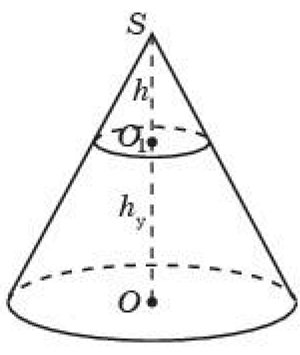


Рис. 16.2

Доказательство аналогично доказательству формулы объема усеченной пирамиды. Проведите его самостоятельно.

Учитывая, что S и s равны соответственно πR^2 и πr^2, где R и r — радиусы оснований усеченного конуса, формула его объема будет иметь следующий вид:

$$V = \frac{1}{3}\pi h_y(R^2 + \sqrt{R \cdot r} + r^2).$$

Вопросы

1. Как вычисляется объем конуса?
2. Как вычисляется объем усеченного конуса?

Задачи

A

16.1. Во сколько раз увеличится объем конуса, если: а) высоту увеличить в три раза; б) радиус основания увеличить в два раза?

16.2. Изменится ли объем конуса, если радиус основания увеличить в два раза, а высоту уменьшить в два раза?

16.3. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Вычислите объем конуса, если объем цилиндра равен 15 см^3.

16.4. Объем конуса равен V. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объемы полученных частей конуса?

16.5. Высота конуса 3 см, образующая 5 см. Найдите его объем.

16.6. Найдите объем части конуса, изображенной на рисунке 16.3, если радиус основания конуса равен 3 см, высота равна 6 см, $\angle AOB = 60^\circ$.

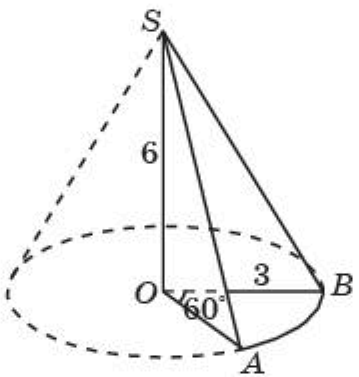


Рис. 16.3

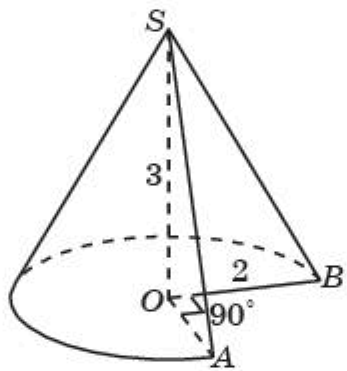


Рис. 16.4

16.7. Найдите объем части конуса, изображенной на рисунке 16.4, если радиус основания конуса равен 2 см, высота равна 3 см, $\angle AOB = 90^\circ$.

16.8. Найдите объем усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 1 см и 2 см, а высота равна 3 см.

В

16.9. Диаметр основания конуса равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения — 90°. Найдите объем конуса.

16.10. Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник площадью 9 см^2. Найдите объем конуса.

16.11. Равносторонний треугольник со стороной 1 см вращается вокруг прямой, содержащей его высоту. Найдите объем тела вращения.

16.12. Два конуса получены от вращения неравнобедренного прямоугольного треугольника вокруг каждого из катетов. Равны ли объемы этих конусов?

16.13. Объем конуса равен 1 см^3. Его высота разделена на три равные части, и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости. Найдите объем средней части конуса.

16.14. Воду, заполняющую всю коническую колбу высотой 12 см, перелили в цилиндрический сосуд, радиус основания которого равен радиусу окружности конической колбы (рис. 16.5). На какой высоте от основания цилиндрического сосуда будет находиться поверхность воды?

16.15. Радиусы оснований усеченного конуса равны 6 см и 2 см, образующая равна 5 см. Найдите объем этого усеченного конуса.

16.16. Равнобедренная трапеция, основания которой равны 4 см и 6 см, а высота — 3 см, вращается относительно оси, проходящей через середины оснований. Найдите объем тела вращения.

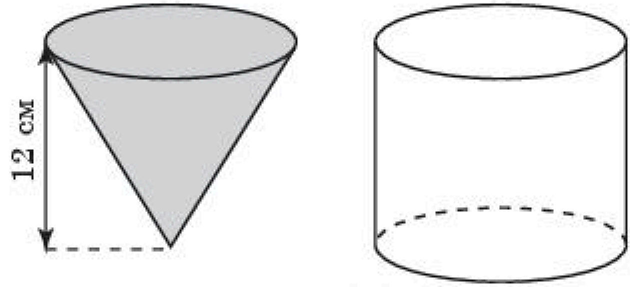


Рис. 16.5

16.17. Сформулируйте условия на радиусы оснований и образующие двух конусов, при которых эти конусы подобны. Как относятся объемы этих конусов?

16.18. Найдите объем юрты (рис. 16.6) в форме цилиндра с поставленным на него усеченным конусом, диаметр основания цилиндра равен 5 м,

Рис. 16.6

диаметры оснований усеченного конуса равны 5 м и 1 м, а высоты цилиндра и усеченного конуса равны 2 м.

C

16.19. Найдите объем тела, получающегося при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей катет, равный 3 см.

16.20. Единичный квадрат вращается вокруг прямой, содержащей его диагональ. Найдите объем тела вращения.

16.21. Разверткой боковой поверхности конуса служит полукруг радиусом 2 см. Найдите объем конуса.

16.22. Найдите объем кучи песка на строительной площадке, имеющей форму конуса (рис. 16.7). Измерив мягкой метровой лентой длину окружности основания кучи песка, получили 21,6 м. Перекинув метровую ленту через вершину кучи, определили длину двух образующих — 7,8 м. (Примите $\pi \approx 3$).

Рис. 16.7

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

16.23. Повторите определение шара и принцип Кавальери.

§ 17. Объем шара

Воспользуемся принципом Кавальери для нахождения формулы объема шара.

Теорема. Объем V шара радиусом R выражается формулой:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Доказательство. Рассмотрим полушар радиусом R, основание которого расположено в плоскости β. Возьмем цилиндр, основание которого — круг радиуса R, расположенный в той же плоскости π, и высота которого равна R (рис. 17.1).

В цилиндр впишем конус, основанием которого будет верхнее основание цилиндра, а вершиной — центр нижнего основания цилиндра.

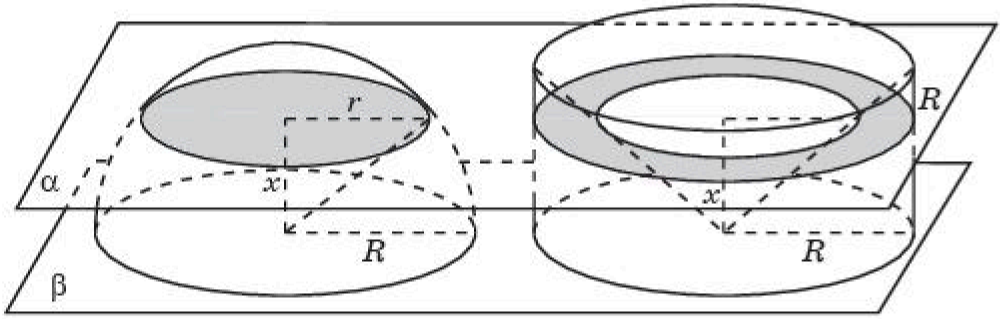


Рис. 17.1

Докажем, что фигура Φ, состоящая из точек цилиндра, не попавших внутрь конуса, и данный полушар имеют равные объемы.

Проведем плоскость α, параллельную плоскости β, на расстоянии x от нее, $0 \leq x \leq R$. В сечении полушара этой плоскостью получим круг радиусом $\sqrt{R^2 - x^2}$ и площадью $\pi(R^2 - x^2)$. В сечении фигуры Φ получается кольцо, радиус внутреннего круга в котором равен x, а внешнего — R. Площадь этого кольца равна $\pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$ и, следовательно, равна площади сечения полушара. Из принципа Кавальери следует, что полушар и фигура Φ имеют равные объемы. Вычислим этот объем. Он равен разности объемов цилиндра и конуса, т. е.

$$V = V_{ц} - V_{к} = \pi R^2 R - \frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Объем шара вдвое больше объема полушара и, следовательно, выражается формулой:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Вопросы

Как вычисляется объем шара?

Задачи

A

17.1. Найдите объем шара, диаметр которого равен 6 см.

17.2. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в: а) три раза; б) четыре раза?

17.3. Радиусы трех шаров 3 см, 4 см и 5 см. Определите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

17.4. Сколько нужно взять шаров радиусом 2 см, чтобы сумма их объемов равнялась объему шара радиусом 6 см?

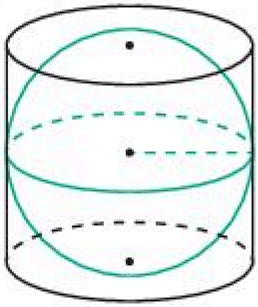


Рис. 17.2

17.5. Найдите объем шара, вписанного в цилиндр (рис. 17.2), высота которого равна 2 см.

B

17.6. Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите объем шара.

17.7. Найдите объем шара, описанного около цилиндра (рис. 17.3), радиус основания и высота которого равны 1 см.

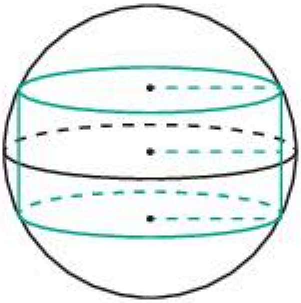


Рис. 17.3

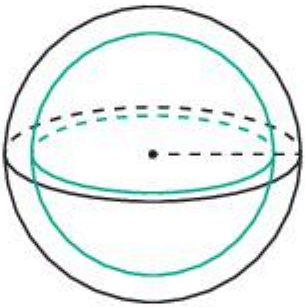


Рис. 17.4

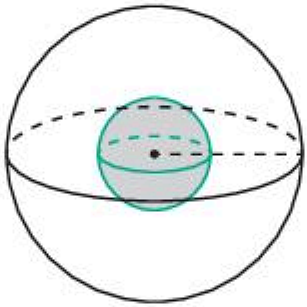


Рис. 17.5

17.8. Площади поверхностей двух шаров относятся как $m : n$. Как относятся их объемы?

17.9. Найдите формулу объема шарового кольца — фигуры, заключенной между поверхностями двух шаров (рис. 17.4) радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$), имеющих общий центр.

Рис. 17.6

17.10. Мякоть вишни окружает косточку толщиной, равной диаметру косточки (рис. 17.5). Считая шарообразной форму вишни и косточки, найдите отношение объема мякоти к объему косточки.

17.11. Апельсин имеет форму шара. Толщина его кожуры составляет одну пятую часть радиуса (рис. 17.4). Какую часть объема апельсина составляет его кожура?

17.12. Диаметр шара монумента Байтерек в Нур-Султане (рис. 17.6) равен 22 м. Найдите объем этого шара.

C

17.13. В конус, радиус основания которого равен 1 см, а образующая равна 2 см, вписан шар. Найдите его объем (рис. 17.7).

17.14. Около конуса, радиус основания которого равен 1 см, а образующая равна 2 см, описан шар. Найдите его объем (рис. 17.8).

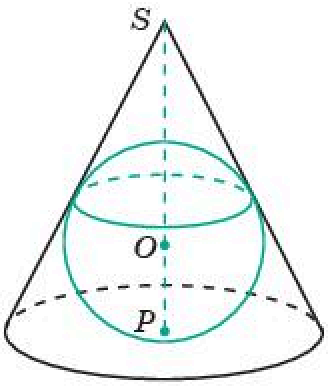


Рис. 17.7

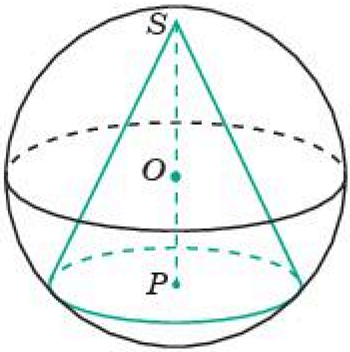


Рис. 17.8

17.15. Дан единичный куб. Шар, радиус которого равен 1 см, имеет своим центром вершину этого куба (рис. 17.9). Найдите объем общей части куба и шара.

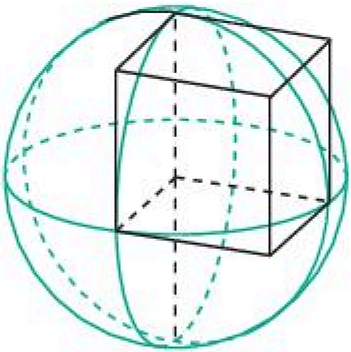


Рис. 17.9

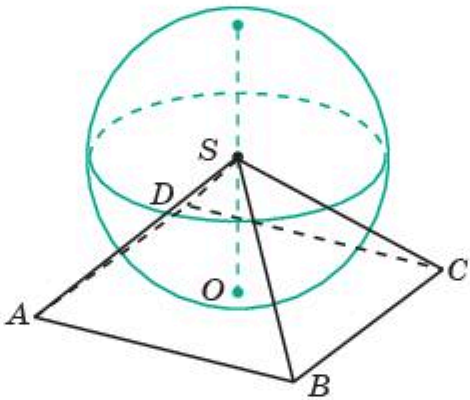


Рис. 17.10

17.16. Дана правильная четырехугольная пирамида, стороны основания которой равны 2 см, а высота равна 1 см. Шар, радиус которого равен 1 см, имеет своим центром вершину этой пирамиды (рис. 17.10). Найдите объем общей части пирамиды и шара.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Во сколько раз увеличится объем куба, если все его ребра увеличить в два раза:

A) 2; B) 4; C) 6; D) 8?

2. Площадь поверхности куба равна 12 см^2. Найдите его объем:

A) $2\sqrt{2}$ см^3; B) 4 см^3; C) $4\sqrt{2}$ см^3; D) 8 см^3.

3. Объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 6 см³. Найдите объем тетраэдра ACB_1D_1:

A) 1 см³; B) 2 см³; C) 3 см³; D) 4 см³.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 2$ см, $AD = 3$ см, $AA_1 = 4$ см. Найдите объем многогранника с вершинами A, B, C, D, C_1:

A) 2 см³; B) 4 см³; C) 6 см³; D) 8 см³.

5. Найдите объем правильной треугольной призмы, стороны основания которой равны 2 см, а боковые ребра равны 3 см:

A) $\sqrt{3}$ см³; B) $2\sqrt{3}$ см³; C) $3\sqrt{3}$ см³; D) $4\sqrt{3}$ см³.

6. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем треугольной призмы, отсеченной этой плоскостью, если объем исходной призмы равен 8 см³:

A) 1 см³; B) 2 см³; C) 3 см³; D) 4 см³.

7. Объем правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равен 12 см³. Найдите объем параллелепипеда $ABDEA_1B_1D_1E_1$:

A) 2 см³; B) 4 см³; C) 6 см³; D) 8 см³.

8. Объем треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 6 см³. Найдите объем четырехугольной пирамиды $A_1BCC_1B_1$:

A) 1 см³; B) 2 см³; C) 3 см³; D) 4 см³.

9. Объем правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равен 12 см³. Найдите объем пирамиды A_1ABCD:

A) 1 см³; B) 2 см³; C) 3 см³; D) 4 см³.

10. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, ребра которой равны 2 см:

A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ см³; B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ см³; C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см³; D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см³.

11. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды, боковые ребра которой равны 2 см и образуют угол 30° с плоскостью основания этой пирамиды:

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см³; B) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ см³; C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см³; D) $\sqrt{3}$ см³.

12. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 8 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в два раза меньше первого:

A) 16 см; B) 32 см; C) 48 см; D) 64 см?

13. Единичный квадрат вращается вокруг прямой, содержащей его сторону. Найдите объем тела вращения:

A) π см^3; B) 2π см^3; C) 3π см^3; D) 4π см^3.

14. Развертка боковой поверхности цилиндра — квадрат со стороной равной 2 см. Найдите объем цилиндра:

A) $\frac{2}{\pi}$ см^3; B) $\frac{4}{\pi}$ см^3; C) 2π см^3; D) 4π см^3.

15. Равносторонний треугольник со стороной 2 см вращается вокруг прямой, содержащей его высоту. Найдите объем тела вращения:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{\pi}{3}$ см^3; D) $\pi\sqrt{3}$ см^3.

16. Найдите объем конуса, образующая которого равна 2 см и составляет угол 30° с плоскостью основания этого конуса:

A) π см^3; B) 2π см^3; C) 3π см^3; D) 4π см^3.

17. Разверткой боковой поверхности конуса служит круговой сектор радиусом 3 см и центральным углом 120°. Найдите объем конуса:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{2\pi}{3}$ см^3; D) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3.

18. Найдите объем усеченного конуса, осевым сечением которого является равнобедренная трапеция, основания которой равны 4 см, 2 см, а боковые стороны равны 2 см:

A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3; B) $\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3; C) $\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3; D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3.

19. Площадь поверхности шара равна 36 см^2. Найдите объем этого шара:

A) $24\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; B) $36\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; C) $48\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; D) $60\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3.

20. Найдите объем шара, описанного около цилиндра, осевым сечением которого является единичный квадрат:

A) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$; B) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; C) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ

ОБЪЕМ

А

1. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12 см^2. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4 см. Найдите объем параллелепипеда.
2. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24 см^3. Одно из его ребер равно 3 см. Найдите площадь грани параллелепипеда, перпендикулярной этому ребру.
3. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 60 см^3. Площадь одной его грани равна 12 см^2. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное этой грани.
4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 см и 6 см. Объем параллелепипеда равен 48 см^3. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.
5. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4 см, 6 см, 9 см. Найдите ребро равновеликого ему куба.
6. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в три раза?
7. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см, боковое ребро равно 5 см. Найдите объем призмы.
8. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 5 см. Объем призмы равен 30 см^3. Найдите ее боковое ребро.
9. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$ см.
10. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?
11. Найдите объем пирамиды, высота которой равна 6 см, а основание — прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см.
12. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см. Ее объем равен 16 см^3. Найдите высоту этой пирамиды.
13. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1 см, а высота равна $\sqrt{3}$ см.
14. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2 см, а объем равен $\sqrt{3}$ см^3.
15. Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в четыре раза?

16. В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 литров воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объем детали?
17. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 18 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в три раза больше первого?
18. Найдите объем конуса, площадь основания которого равна 2 см^2, а образующая равна 6 см и наклонена к плоскости основания под углом 30°.
19. Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высоту уменьшить в три раза?
20. Во сколько раз увеличится объем конуса, если его радиус основания увеличить в 1,5 раза?
21. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем цилиндра, если объем конуса равен 10 см^3.
22. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен 150 см^3.
23. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?

B

24. Диагональ куба равна $\sqrt{12}$ см. Найдите его объем.
25. Объем куба равен $24\sqrt{3}$ см^3. Найдите его диагональ.
26. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 см, 4 см. Диагональ параллелепипеда равна 6 см. Найдите объем параллелепипеда.
27. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 см, 3 см. Объем параллелепипеда равен 36 см^3. Найдите его диагональ.
28. Если каждое ребро куба увеличить на 1 см, то его объем увеличится на 19 см^3. Найдите ребро куба.
29. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 см и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол 60° и равно 2 см. Найдите объем параллелепипеда.
30. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2 см. Найдите объем параллелепипеда.
31. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 1 см. Объем параллелепипеда равен 8 см^3. Найдите высоту цилиндра.
32. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиусом 2 см. Найдите его объем.

33. Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216 см^3. Найдите радиус сферы.

34. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32 см^3, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.

35. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсеченной треугольной призмы равен 5 см^3. Найдите объем исходной призмы.

36. Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2 см, а боковые ребра равны $2\sqrt{3}$ см и наклонены к плоскости основания под углом 30°.

37. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6 см, боковое ребро равно 10 см. Найдите ее объем.

38. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12 см, объем равен 200 см^3. Найдите боковое ребро этой пирамиды.

39. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Высота пирамиды равна 6 см. Найдите объем пирамиды.

40. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3 см. Найдите объем пирамиды.

41. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2 см, боковое ребро равно 4 см. Найдите объем пирамиды.

42. Объем правильной шестиугольной пирамиды равны 6 см^3. Сторона основания равна 1 см. Найдите боковое ребро.

43. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4 см, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объем пирамиды.

44. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12 см^3. Найдите объем треугольной пирамиды B_1ABC.

45. Объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12 см^3. Точки E, F, E_1, F_1 — середины ребер соответственно BC, CD, B_1C_1, C_1D_1. Найдите объем треугольной призмы $CEFC_1E_1F_1$.

46. Объем куба равен 12 см^3. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.

47. От призмы $ABCA_1B_1C_1$, объем которой равен 6 см^3, отсечена треугольная пирамида C_1ABC. Найдите объем оставшейся части.

48. Объем треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 1 см^3. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

49. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 12 см^3.

Точка E — середина ребра SB. Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.

50. От треугольной пирамиды, объем которой равен 12 см^3, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.

51. Объем треугольной пирамиды $SABC$ равен 15 см^3. Плоскость проходит через сторону AB основания этой пирамиды и пересекает противолежащее боковое ребро в точке D, делящей ребро SC в отношении 1 : 2, считая от вершины S. Найдите объем пирамиды $DABC$.

52. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.

53. Объем конуса равен 12 см^3. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. Найдите объем отсеченного конуса.

54. Высота конуса равна 6 см, образующая равна 10 см. Найдите его объем, деленный на π.

55. Диаметр основания конуса равен 6 см, а угол при вершине осевого сечения равен 90°. Вычислите объем конуса, деленный на π.

56. Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг катета, равного 6. Найдите его объем, деленный на π.

57. Радиусы трех шаров равны 6 см, 8 см и 10 см. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

C

58. Основание прямой призмы — ромб, площадь которого равна 3 см^2. Площади диагональных сечений равны 8 см^2 и 12 см^2. Найдите объем призмы.

59. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда равны 2 см^2, 3 см^2, 6 см^2. Найдите объем параллелепипеда.

60. От куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребра которого равны 3 см, отсечены четыре треугольные призмы плоскостями, которые проходят через середины смежных сторон грани $ABCD$ параллельно ребру AA_1. Найдите объем оставшейся части.

61. Объем правильной шестиугольной призмы равен 12 см^3. Найдите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы.

62. В куб с ребром 6 см вписан правильный тетраэдр таким образом, что его вершины совпадают с четырьмя вершинами куба. Найдите объем тетраэдра.

63. От четырехугольной пирамиды, объем которой равен 12 см^3, отсечены четыре треугольные пирамиды плоскостями, проходящими через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания. Найдите объем оставшейся части пирамиды.
64. Центры граней куба, ребро которого равно 6 см, служат вершинами октаэдра. Найдите его объем.
65. Найдите объем цилиндра, описанного около шара, объем которого равен 1 см^3.
66. Объем шара равен 12 см^3. Найдите объем конуса, основанием которого является большой круг данного шара, а высотой — радиус, перпендикулярный плоскости этого круга.

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

А

1. Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 см, 2 см, 3 см. Найдите его площадь поверхности.
2. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 см и 4 см. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 52 см^2. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.
3. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если его ребро увеличить в три раза?
4. Во сколько раз увеличится площадь поверхности тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?
5. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 3 см, а высота — 6 см.
6. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь ее поверхности.
7. Длина окружности основания цилиндра равна 3 см, высота равна 2 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
8. Длина окружности основания конуса равна 3 см, образующая равна 2 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
9. Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующую увеличить в три раза?
10. Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшить в 1,5 раза?
11. Площадь большого круга шара равна 1 см^2. Найдите площадь поверхности шара.
12. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если его радиус увеличить в два раза?

B

13. Диагональ куба равна 1 см. Найдите площадь его поверхности.
14. Площадь поверхности куба равна 8 см^2. Найдите его диагональ.
15. Площадь поверхности куба равна 24 см^2. Найдите его объем.
16. Объем куба равен 27 см^3. Найдите площадь его поверхности.
17. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 см, 4 см. Диагональ параллелепипеда равна 6 см. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.
18. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 см, 2 см. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16 см^2. Найдите его диагональ.
19. Если каждое ребро куба увеличить на 1 см, то его площадь поверхности увеличится на 30 см^2. Найдите ребро куба.
20. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 см, 2 см. Объем параллелепипеда равен 6 см^3. Найдите площадь его поверхности.
21. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 3 см и 4 см, и боковым ребром, равным 5 см.
22. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 6 см и 8 см. Площадь ее поверхности равна 248 см^2. Найдите боковое ребро этой призмы.
23. Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если стороны ее основания равны 3 см, а площадь поверхности равна 66 см^2.
24. В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 10 см и отстоит от других боковых ребер на 6 см и 8 см. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.
25. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Площадь ее поверхности равна 288 см^2. Найдите высоту призмы.
26. Через среднюю линию основания треугольной призмы, площадь боковой поверхности которой равна 12 см^2, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.
27. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 8 см^2. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.
28. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 6 см, боковые ребра равны 5 см. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

29. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6 см и высота равна 4 см.
30. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 6 см, боковые ребра равны 5 см. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.
31. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его ребра увеличить в три раза?
32. Высота конуса равна 6 см, образующая равна 10 см. Найдите площадь его поверхности, деленную на π.
33. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания.
34. Площадь поверхности конуса равна 12 см^2. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. Найдите площадь поверхности отсеченного конуса.
35. Объем шара равен 36π. Найдите площадь его поверхности, деленную на π.
36. Объем одного шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?
37. Радиусы двух шаров равны 6 см, 8 см. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.

C

38. Площадь осевого сечения цилиндра равна 1 см^2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
39. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 9 см^2. Найдите площадь поверхности шара.

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Вращение многоугольников

A

1. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ см вокруг прямой AC.
2. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ см вокруг прямой, содержащей высоту CH этого треугольника.
3. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения равностороннего треугольника ABC со сторонами, равными 1 см, вокруг прямой CH, содержащей высоту этого треугольника.

4. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$, CH — высота. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения этого треугольника вокруг прямой CH.
5. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AD и BC, равными 1 см, и основаниями AB и CD, равными соответственно 2 см и 1 см, вокруг прямой c, проходящей через середины оснований AB и CD.
6. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, равными соответственно 2 см и 1 см, меньшей боковой стороной, равной 1 см, вокруг прямой AD.

B

7. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ см вокруг прямой AB.
8. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения равностороннего треугольника ABC со сторонами, равными 1 см, вокруг прямой AB.
9. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения этого треугольника вокруг прямой AB.
10. В прямоугольном треугольнике ABC $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения этого треугольника вокруг прямой AB.
11. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1 см, и острым углом 60°, вокруг прямой AC.
12. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1 см, и острым углом 60°, вокруг прямой BD.
13. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AD и BC, равными 1 см, и основаниями AB и CD, равными соответственно 2 см и 1 см, вокруг прямой AB.
14. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, равными соответственно 2 см и 1 см, меньшей боковой стороной, равной 1 см, вокруг прямой AB.

C

15. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения этого треугольника вокруг прямой AC.

16. В прямоугольном треугольнике ABC $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$, CH — высота. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения этого треугольника вокруг прямой CH.

17. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1 см, и острым углом 60°, вокруг прямой AB.

18. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AD и BC, равными 1 см, и основаниями AB и CD, равными соответственно 2 см и 1 см, вокруг прямой CD.

19. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AD и BC, равными 1 см, и основаниями AB и CD, равными соответственно 2 см и 1 см, вокруг прямой c, содержащей среднюю линию этой трапеции.

20. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, равными соответственно 2 см и 1 см, меньшей боковой стороной, равной 1 см, вокруг прямой CD.

21. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 1 см вокруг прямой AB.

22. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 1 см вокруг прямой AC.

23. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 1 см вокруг прямой AD.

24. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 1 см вокруг прямой c, проходящей через середины сторон AB и DE.

Вращение многогранников

A

1. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вокруг прямой AA_1.

2. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вокруг прямой c, проходящей через центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

3. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой AA_1.

4. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой c, проходящей через центры граней ABC и $A_1B_1C_1$.

5. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой c, проходящей через центры ее оснований.

B

6. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вокруг прямой c, проходящей через середины ребер BC и B_1C_1.
7. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения единичного тетраэдра $ABCD$ вокруг прямой, содержащей высоту DH этого тетраэдра.
8. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой, содержащей высоту SH этой пирамиды.
9. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, вокруг прямой, содержащей высоту SH этой пирамиды.
10. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой AA_1.

C

11. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения единичного тетраэдра $ABCD$ вокруг прямой AB.
12. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения единичного октаэдра $S'ABCDS''$ вокруг прямой $S'S''$.
13. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой c, проходящей через середины ребер BC и B_1C_1.
14. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой c, проходящей через середины ребер BC и B_1C_1.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 10 КЛАССА

1. а) 3; б) 6; в) 10; г)* $\frac{n(n-1)}{2}$. **2.** Одна или бесконечно много. **3.** а) 4; б) 10; в)* $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. **4.** а) 4; б) 8; в)* 15. **8.** а) 8; б) 12; в) 6. **9.** а) 8; б) 12; в) 6. **10.** а) 6; б) 8; в) 10; г) 12; д) $2n$. **11.** а), г) Нет; б), в) да. **12.** а) 9; б) 12; в) 15; г) 18; д) $3n$. **13.** а), в), г) Да; б) нет. **14.** а) 5; б) 6; в) 7; г) 8; д) $n+2$. **15.** а), б), в), г) Да. **16.** а) Четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник. **17.** а) 4; б) 5; в) 6; г) 7; д) $n+1$. **18.** а), б), в), г) Да. **19.** а) 6; б) 8; в) 10; г) 12; д) $2n$. **20.** а), г) Нет; б), в) да. **21.** а) 4; б) 5; в) 6; г) 7; д) $n+1$. **22.** а), б), в), г) Да. **23.** а) Четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник. **24.** а) 18; б) 18; в) 6; г) 27. **27.** а) 24; б) 24; в) 3; г) 24. **28.** а), б) Скрещиваются; в) пересекаются. **29.** а), б) Скрещиваются, в) пересекаются. **33.** а) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, BCC_1B_1, EFF_1E_1; б) DEE_1D_1. **35.** а) 3; б) 3; в) 1; г) 4. **37.** а) 3; б) 48. **38.** а) 60°; б) 90°; в) 90°. **39.** а) 45°; б) 60°; в) 90°. **40.** а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **41.** а) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **42.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **43.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sqrt{3}$; г) $1\frac{1}{2}$. **44.** а) $\sqrt{3}$; б) 1. **45.** 45°. **46.** 60°. **47.** а) 60°; б) 30°; в) 90°; г) 90°. **48.** $\frac{1}{3}$. **49.** $-\frac{1}{3}$. **50.** 6. **51.** а) 2; б) $\sqrt{5}$; **52.** а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{6}$. **53.** $\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$. **54.** $\overline{AD_1} = 2\overline{AB} + 2\overline{AF} + \overline{AA_1}$. **55.** а) 120°; б) 60°. **56.** а) 1; б) 0; в) 1; г) 0. **57.** 1. **58.** $A(0;\ 1;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 0)$, $C(1;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ 0)$, $A_1(0;\ 1;\ 1)$, $B_1(1;\ 1;\ 1)$, $C_1(1;\ 0;\ 1)$, $D_1(0;\ 0;\ 1)$. **59.** $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 0;\ 0)$, $C(1{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0)$, $D(1;\ \sqrt{3};\ 0)$, $E(0;\ \sqrt{3};\ 0)$, $F(-0{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0)$, $A_1(0;\ 0;\ 1)$, $B_1(1;\ 0;\ 1)$, $C_1(1{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 1)$, $D_1(1;\ \sqrt{3};\ 1)$, $E_1(0;\ \sqrt{3};\ 1)$, $F_1(-0{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 1)$. **60.** а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{5}$. **61.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$. **62.** $R = 3$, $O(2;\ -1;\ 0)$. **63.** 7. **64.** $6x + 3y + 2z = 6$.

ГЛАВА I. МНОГОГРАННИКИ

§ 1

3. а), б). **4.** а), б). **5.** а), б), в), г). **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $\sqrt{29}$. **8.** 1. **9.** В 9 раз. **10.** В 4 раза. **11.** В 4 раза. **12.** 94. **13.** $\frac{6+\sqrt{3}}{2}$. **14.** $6 + 3\sqrt{3}$. **15.** в), д), ж). **16.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **18.** 2 и $\sqrt{5}$. **19.** $\sqrt{5}$. **20.** 4. **21.** а) 22; б) 28. **22.** а) 92; б) 48. **23.** а), б) 34. **24.** а) 22; б) 26. **25.** 30. **26.** ≈ 27600 м². **27.** б), в), г), д) — выпуклые; а), е) — невыпуклые. **28.** 288 см². **29.** $\sqrt{5}$. **30.** Нет. **31.** Нет. **32.** Пространственный крест.

§ 2

2. а), в). **3.** а), в). **4.** Пятиугольной пирамиды. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** $1+\sqrt{3}$. **8.** $\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{2}$. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** В 4 раза. **11.** В 9 раз. **15.** $\sqrt{7}$. **16.** $\sqrt{10}$. **17.** ≈ 8595 м². **18.** ≈ 8,3 га. **19.** $5 + 3\sqrt{3}$. **20.** 1. **21.** ≈ 1710 дм².

§ 3

1. 8. **2.** 12. **3.** 6. **6.** а) Шестиугольная призма; б) пятиугольная пирамида. **7.** Выполняется. **8.** Да. **9.** Да. **10.** В = 12, Р = 24, Г = 12; В − Р + Г = 0. **11.** В = 6, Р = 12, Г = 8. **12.** В = 20, Р = 30, Г = 12.

§ 4

1. а) В = 4, Р = 6, Г = 4; б) В = 8, Р = 12, Г = 6; в) В = 6, Р = 12, Г = 8; г) В = 12, Р = 30, Г = 20; д) В = 20, Р = 30, Г = 12. **2.** Нет. У него есть вершины, в которых сходится разное число граней. **3.** Да, это октаэдр. **7.** 5. **8.** 3. **9.** Куба и октаэдра. **10.** Икосаэдра и додекаэдра. **11.** Тетраэдр, $\sqrt{2}$. **12.** Октаэдр, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **13.** Октаэдр, $\frac{1}{2}$. **14.** Октаэдр, 1. **15.** $\sqrt{2}$. **16.** 4. **17.** 8. **18.** Тетраэдр, $\frac{1}{3}$. **19.** Куб, $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **20.** Додекаэдра. **21.** Икосаэдра. **22.** 10. **23.** 6.

§ 5

2. а), б), в) Да. **3.** а) Нет; б), в) да. **4.** а) Нет; б), в) да. **5.** а), б), в) Да. **6.** а) Нет; б), в) да. **7.** а) Нет; б), в) да. **9.** Точки прямой, лежащей в плоскости данных прямых, параллельной им и одинаково удаленной от них. **10.** а) Точки прямой пересечения данных плоскостей; б) точки плоскости, параллельной данным плоскостям, одинаково удаленной от этих плоскостей. **11.** Да. **12.** а), б), в) Да. **13.** а) 3; б) 7. **14.** а) 4; б) 7. **15.** а), б) 1. **16.** а) 4; б) 6. **17.** а) n, если n нечетно, $n + 1$, если n четно; б) 0, если n нечетно, 1, если n четно. **18.** а) $n + 1$; б) n. **19.** а) 9; б), в) 15. **20.** а) 9; б), в) 15. **21.** Да, например, центр симметрии сферы ей не принадлежит. **22.** а) У параллелепипеда, гранями которого являются параллелограммы, отличные от прямоугольников, есть центр симметрии, но нет осей симметрии; б) у правильной четырехугольной пирамиды есть ось симметрии, но нет центра симметрии. **23.** а) У параллелепипеда, гранями которого являются параллелограммы, отличные от прямоугольников, есть центр симметрии, но нет плоскостей симметрии; б) у четырехугольной пирамиды, в основании которой параллелограмм, отличный от ромба и прямоугольника, есть ось симметрии, но нет плоскости симметрии. **24.** а) У правильной четырехугольной пирамиды есть плоскость симметрии, но нет центра симметрии; б) у правильной треугольной пирамиды есть плоскости симметрии, но нет оси симметрии.

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C)	A)	B)	B)	C)	A)	D)	D)	A)	C)	B)	D)	C)	D)	D)	A)	B)	C)	A)	D)

§ 6

2. Бесконечно много. **3.** Кругом. **4.** Цилиндр. **5.** Кольцо. **6.** 5 см. **7.** $\frac{1}{2\pi}$ см. **8.** а) 4π см^2; б) 6π см^2. **10.** Прямоугольником. **11.** а), б), в) Да. **12.** а), б) Цилиндр. **13.** а) $2\sqrt{2}\pi$; б) $\sqrt{2}\pi$. **14.** а), б) Цилиндр. **15.** а) 2π; б) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$. **16.** а), б) Цилиндр. **17.** а) 12π; б) 4π. **18.** $10\pi \approx 31{,}4$ (м^2). **19.** Фигура состоит из двух цилиндров, радиусы оснований которых равны 2 и 1, а высоты равны 1. Площадь поверхности этой фигуры равна 14π. **20.** Фигура состоит из трех цилиндров, радиусы оснований которых равны 2, 1, 1, а высоты равны 1. Площадь поверхности этой фигуры равна 16π. **21.** 350π см^2.

§ 7

2. Бесконечно много. **3.** Кругом. **4.** Конус. **5.** Боковая поверхность конуса. **6.** 5. **7.** а) 5 см; б) $5\sqrt{3}$ см. **8.** 1 см. **9.** 1 см. **10.** 3π см^2. **11.** Да. **13.** $\frac{\pi}{4}$. см^2 **14.** $\sqrt{5}\pi$ см^2. **15.** а) Нет; б), в) да. **16.** Фигура, составленная из двух конусов с общим основанием. **17.** Фигура, составленная из двух равных конусов с общим основанием; площадь ее поверхности равна $\sqrt{2}\pi$. **18.** Конус. **19.** $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$. **20.** Конус. **21.** 3π см^2. **22.** Фигура состоит из двух равных конусов с общим основанием. Ее площадь поверхности равна $\sqrt{2}\pi$ см^2. **23.** 0,5 см. **24.** 120°. **25.** 37. **26.** 42,12 м^2. **27.** 1440 см^2.

§ 8

2. Бесконечно много. **3.** Кругом. **4.** Усеченный конус. **5.** Боковая поверхность усеченного конуса. **6.** 5 см. **7.** 80π см^2. **8.** Да. **10.** 9π см^2. **11.** а) Нет; б), в) да. **12.** 1 см. **13.** 2 см. **14.** $\frac{17\pi}{4}$ см^2. **15.** Усеченный конус. **16.** $(10 + 9\sqrt{2})\pi$ см^2. **17.** Усеченный конус. **18.** 14π см^2. **19.** $6\sqrt{2}\pi \approx 26,6$ (м^2). **20.** Фигура, составленная из двух равных усеченных конусов с общим основанием. Площадь ее поверхности равна $3,5\pi$ см^2. **21.** 1 см и 0,5 см. **22.** ≈ 161 г. **23.** ≈ 1,1 дм^2. **24.** ≈ 88 см, ≈ 63 см, ≈ 24,3 см, ≈ 21 дм^2.

§ 9

2. а) $OA < R$; б) $OA > R$. **3.** а) Расположена внутри сферы; б) принадлежит сфере; в) расположена вне сферы. **4.** Бесконечно много. **5.** 110 мм. **6.** 1 см. **7.** а) Пересекаются; б) касаются; в) не имеют общих точек. **8.** а) Одну; б) ни одной; в) бесконечно много. **9.** 4 см. **10.** 4 см. **11.** а) Пересекаются; б) касаются; в) не имеют общих точек. **12.** 5 см. **13.** 8 см. **14.** 5 см. **15.** а) Пересекаются; б) касаются; в) не имеют общих точек. **16.** ≈ 6369 км. **17.** 2 см и 10 см. **18.** 1 см. **19.** а) Пересекаются; б) касаются; в) не имеют общих точек.

§ 10

1. R и $2R$. **2.** $\frac{h}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. **4.** $2\sqrt{3}$ см. **5.** $\sqrt{3}$ см. **6.** 2,5 см. **7.** 6π см^2. **8.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см; б) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см. **9.** $R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$. **10.** $3\frac{1}{8}$ см. **11.** $R = \frac{r(\sqrt{r^2 + h^2} - r)}{h}$. **12.** $1\frac{1}{2}$ см. **13.** $\sqrt{3}$ см. **14.** а) 1 см; б) $\sqrt{2} - 1$ см. **15.** а) 1 см; б) $\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$ см.

§ 11

1. 4π см^2. **2.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$ см. **3.** 12 см^2. **4.** Увеличится в: а) 4; б) 9; в) n^2 раз. **5.** 2 : 3. **6.** 10 см. **7.** 1. **8.** π. **9.** 2π. **10.** В 160 000 раз. **11.** В 3 раза. **12.** В 4 раза. **13.** 400π см^2. **14.** ≈ 509 554 140 км^2. **15.** ≈ 1520 м^2. **16.** 19200 м^2. **18.** $\frac{\pi}{2}$ см^2. **19.** $\frac{2\pi}{3}$ см^2.

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B)	C)	C)	D)	B)	C)	A)	C)	D)	C)	D)	D)	C)	D)	A)	D)	C)	B)	C)	D)

§ 12

1. 54 см^2. **2.** 8 см^3. **3.** 8 см^3. **4.** 7 см^3. **5.** В 27 раз. **6.** В 8 раз. **7.** а) Увеличится в 2 раза; б) уменьшится в 9 раз. **8.** 62,5 г. **9.** 60 м^2. **10.** а) 6; б) 8. **11.** а) 40; б) 12. **12.** а), б) 10. **13.** а) 5;) 6. **14.** 30 см^3. **15.** 15 см^3. **16.** 20 см. **17.** $\frac{1}{8}$. **18.** $1\frac{3}{4}$. **19.** ≈ 21 м^3. **20.** 9 см. **21.** 3 см. **22.** 160 см^3. **23.** $\frac{1}{6}$. **24.** $\frac{1}{3}$. **25.** 6 м^2. **26.** 162 л.

§ 13

1. 60 см^3. **2.** $20\sqrt{3}$ см^2. **3.** $18\sqrt{3}$ см^3. **4.** $\sqrt{3}$ см^3. **5.** 0,75 см^3. **6.** $16\sqrt{3}$ см. **7.** 1 : 3. **8.** 3 см^3. **9.** 5 см^3. **10.** 9 см^3. **12.** 3 м^3. **13.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см^3.

§ 14

1. 12π см³. **2.** $\frac{\pi a^3}{4}$ см³. **3.** Вторая. **4.** πa^3. **5.** $\frac{3\pi}{32}$ см³. **6.** $\frac{\pi}{4}$. **7.** π см³. **8.** $\frac{a}{b}$ или $\frac{b}{a}$. **9.** В два раза. **10.** 3π см³. **11.** 243π см³. **12.** 4 см. **13.** $\frac{1}{\pi}$ см³ или $\frac{1}{2\pi}$ см³ в зависимости от выбора основания цилиндра. **14.** 2π. **16.** 5π см³. **17.** 6π см³. **18.** 960 м³. **19.** 162 кг. **20.** 2250 см³.

§ 15

1. $\frac{1}{3}a^2h$. **2.** 32 м³. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см³. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** $1\frac{1}{2}$ см³. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$ см³. **7.** В 8 раз. **8.** Уменьшится в 3 раза. **9.** а) $\frac{1}{3}$ см³; б) $\frac{1}{6}$ см³. **10.** 1 : 7. **11.** 7 см³. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см³. **13.** $\frac{1}{6}$ см³. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см³. **15.** $4\sqrt{3}$ см. **16.** $\frac{1}{3}$ см³. **17.** 1 : 1. **18.** 3 см³. **19.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ см³. **20.** $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ см³. **21.** $\approx$ 79443 м³. **23.** $\frac{3}{4}$ см³. **24.** $\frac{1}{2}$ см³. **25.** $\frac{1}{2}$ см³. **26.** 3074176. м³. **27.** $\approx$ 407 м³. **28.** 473 дм³, 319 кг.

§ 16

1. Увеличится в: а) три; б) четыре раза. **2.** Увеличится в 2 раза. **3.** 5 см³. **4.** 1 : 7. **5.** 16π см³. **6.** 3π. **7.** 3π см³. **8.** 7π см³. **9.** 72π см³. **10.** 9π см³. **11.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$ см³. **12.** Нет. **13.** $\frac{7}{27}$ см³. **14.** 4 см. **15.** 52π см³. **16.** 19π см³. **18.** $\approx$ 55,5 м³. **19.** 9π см³. **20.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$. **21.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ см³. **22.** $V = 19{,}44$ м³.

§ 17

1. 36π см³. **2.** Увеличится в: а) 27; б) 64 раз. **3.** 6 см. **4.** 27. **5.** $\frac{4\pi}{3}$ см³. **6.** $\frac{4000\pi}{3}$ см³. **7.** $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$ см³. **8.** $m^{\frac{3}{2}} : n^{\frac{3}{2}}$. **9.** $\frac{4\pi}{3}(R_1^3 - R_2^3)$. **10.** 26 : 1. **11.** $\approx$ 0,5. **12.** $\frac{5324\pi}{3} \approx 5572$ (м³). **13.** $\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ см³. **14.** $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$ см³. **15.** $\frac{\pi}{6}$ см³. **16.** $\frac{2\pi}{9}$ см³.

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D)	A)	B)	D)	C)	B)	D)	D)	B)	B)	C)	B)	A)	A)	A)	A)	D)	C)	B)	A)

ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ

ОБЪЕМ

1. 48 см³. **2.** 8 см². **3.** 5 см. **4.** 4 см. **5.** 6 см. **6.** 27. **7.** 120 см³. **8.** 4 см. **9.** 4,5 см³. **10.** 8. **11.** 24 см³. **12.** 4 см. **13.** 0,25 см³. **14.** 3 см. **15.** 4. **16.** 3. **17.** 2 см. **18.** 2 см³. **19.** 3. **20.** 2,25. **21.** 30 см³. **22.** 50 см³. **23.** 27. **24.** 8 см³. **25.** 6 см. **26.** 32 см³. **27.** 7 см. **28.** 2 см. **29.** 1,5 см³. **30.** 32 см³. **31.** 2 см. **32.** 64 см³. **33.** 3 см. **34.** 8 см³. **35.** 20 см³. **36.** 18 см³. **37.** 256 см³. **38.** 13 см. **39.** 48 см³. **40.** 4,5 см³. **41.** 12 см³. **42.** 7 см. **43.** 48 см³. **44.** 2 см³. **45.** 1,5 см³. **46.** 2 см³. **47.** 4 см³. **48.** 6 см³. **49.** 3 см³. **50.** 3 см³. **51.** 10 см³. **52.** 1,125. **53.** 1,5 см³. **54.** 128 см³. **55.** 9 см³. **56.** 72 см³. **57.** 12 см³. **58.** 12 см³. **59.** 6 см³. **60.** 13,5 см³. **61.** 9 см³. **62.** 72 см³. **63.** 6 см³. **64.** 36 см³. **65.** 1,5 см³. **66.** 3 см³.

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

1. 22 см^2. **2.** 2 см. **3.** 9. **4.** 4. **5.** 108 см^2. **6.** 288 см^2. **7.** 6 см^2. **8.** 3 см^2. **9.** 3. **10.** 1,5. **11.** 4 см^2. **12.** 4. **13.** 2 см^2. **14.** 2 см. **15.** 8 см^3. **16.** 54 см^2. **17.** 64 см^2. **18.** 3 см. **19.** 2 см. **20.** 22 см^2. **21.** 62 см^2. **22.** 10 см. **23.** 4 см. **24.** 240 см^2. **25.** 10 см. **26.** 6 см^2. **27.** 16 см^2. **28.** 84 см^2. **29.** 96 см^2. **30.** 72 см^2. **31.** 9. **32.** 144. **33.** 60. **34.** 3 см^2. **35.** 36. **36.** 9. **37.** 10 см. **38.** π см^2. **39.** 6 см^2.

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Вращение многоугольников

1. $\frac{\pi}{3}$ см^3 и $(\sqrt{2}+1)\pi$ см^2. **2.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ см^3 и $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$ см^2. **3.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$ см^3 и $0,75\pi$ см^2. **4.** $\frac{\pi}{8}$ и $\frac{(2\sqrt{3}+3)\pi}{4}$. **5.** $\frac{7\sqrt{3}\pi}{48}$ см^3 и $2,75\pi$ см^2. **6.** $\frac{7\pi}{3}$ см^3 и $(3\sqrt{2}+5)\pi$ см^2. **7.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ см^3 и $\sqrt{2}\pi$ см^2. **8.** $\frac{\pi}{4}$ см^3 и $\sqrt{3}\pi$ см^2. **9.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ и π. **10.** $9,6\pi$ и $16,8\pi$. **11.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ см^3 и π см^2. **12.** $0,25\pi$ см^3 и $\sqrt{3}\pi$ см^2. **13.** π см^3 и $2\sqrt{3}\pi$ см^2. **14.** $\frac{4\pi}{3}$ см^3 и $(\sqrt{2}+3)\pi$ см^2. **15.** $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{(\sqrt{3}+3)\pi}{2}$. **16.** $8,192\pi$ и $23,04\pi$. **17.** $0,75\pi$ см^3 и $2\sqrt{3}\pi$ см^2. **18.** $1,25\pi$ см^3 и $3\sqrt{3}\pi$ см^2. **19.** $\frac{11\pi}{32}$ см^3 и $\frac{5\sqrt{3}\pi}{14}$ см^2. **20.** $\frac{5\pi}{3}$ см^3 и $(\sqrt{2}+5)\pi$ см^2. **21.** $4,5\pi$ см^3 и $6\sqrt{3}\pi$ см^2. **22.** $\frac{19\sqrt{3}\pi}{12}$ см^3 и 7π см^2. **23.** π см^3 и $2\sqrt{3}\pi$ см^2. **24.** $\frac{7\sqrt{3}\pi}{12}$ см^3 и $3,5\pi$ см^2.

Вращение многогранников

1. 2π и $(2\sqrt{2}+4)\pi$. **2.** $0,5\pi$ и $(\sqrt{2}+1)\pi$. **3.** π см^3 и 4π см^2. **4.** $\frac{\pi}{3}$ см^3 и $\frac{(2\sqrt{3}+2)\pi}{2}$ см^2. **5.** π см^3 и 4π см^2. **6.** $1,25\pi$ и $(\sqrt{5}+2,5)\pi$. **7.** $\frac{\sqrt{6}\pi}{27}$ и $\frac{(\sqrt{3}+1)\pi}{3}$. **8.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ см^3 и $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$ см^2. **9.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ см^3 и 3π см^2. **10.** 4π см^3 и 12π см^2. **11.** $0,25\pi$ и $\sqrt{3}\pi$. **12.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ и $\sqrt{2}\pi$. **13.** $0,75\pi$ см^3 и $\frac{(2\sqrt{3}+3)\pi}{2}$ см^2. **14.** $3,25\pi$ см^3 и $\frac{(2\sqrt{13}+13)\pi}{2}$ см^2.

СОДЕРЖАНИЕ