Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК

для учащихся 10 (ч. 1), 11 (ч. 2) классов естественно-математического направления общеобразовательной школы

В двух частях

11 класс (ч. 2)

+CD 3D

Рекомендовано Министерством образования и науки Республики Казахстан

KELESHEK 2030
КОКШЕТАУ

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72
С60

Солтан Г. Н.
С60 **Геометрия.** Учебник для учащихся 10 (ч. 1), 11 (ч. 2) классов естественно-математического направления общеобразовательной школы. В двух частях. 11 класс (ч. 2) +CD / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Кокшетау: Келешек-2030 баспасы, 2020. – 192 с.

ISBN 978-601-317-526-3
ISBN 978-601-317-528-7

Электронный вариант учебника: http://keleshek-2030.kz/books/geom_emn_11ru.php

Предлагаемый учебник продолжает линию учебников по предмету «Геометрия» авторов Г. Н. Солтана, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадиловой издательства «Келешек-2030» по программе обновленного содержания образования. Учебник адресован учащимся классов естественно-математического направления общеобразовательной школы и состоит из двух частей: 10 класс – часть 1, 11 класс – часть 2.

Учебник содержит модели чертежей в 3D. Условный знак обозначает, что с помощью мобильного приложения Simple Study можно получить трехмерное изображение объекта.

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72

ISBN 978-601-317-528-7
ISBN 978-601-317-526-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие выпускники! В этом учебном году вы завершите изучение предмета «Геометрия». В данном учебнике изложено основное содержание курса геометрии 11 класса естественно-математического направления. Теоретический материал изложен подробно и последовательно. Определения понятий, аксиомы, формулировки теорем, следствия из них выделены специальными шрифтами. Для активизации вашей познавательной деятельности некоторые несложные теоретические вопросы предлагаются для самостоятельной работы. После объяснительного текста даны контрольные вопросы, предназначенные для проверки усвоения теории.

В каждом пункте содержатся упражнения трех уровней сложности (A, B и C) для закрепления теоретических знаний и формирования практических умений и навыков. Упражнения уровня A в основном тренировочные. Упражнения уровней B и C более сложные, при выполнении многих из них вам потребуется комплексное применение ранее приобретенных знаний и умений не только по геометрии, но и по алгебре и началам анализа, предметам естественно-математического цикла. В учебник включены задачи межпредметного характера, в том числе связанные с достопримечательностями Казахстана, интернет-задания. Он снабжен также электронным приложением, в котором имеется разнообразный дополнительный материал.

Решение задач является основным средством закрепления теоретических знаний и формирования прочных практических умений и навыков. С учетом этого в пункты учебника включены типовые задачи с решениями, анализ которых поможет вам при выполнении упражнений. Определенную помощь в решении задач окажут чертежи, в том числе в формате 3D, указания к поиску решения и ответы. В конце каждого раздела предлагаются упражнения для его повторения и подготовки к суммативному оцениванию, включающие задания под рубрикой «Проверь себя!».

Надеемся, что этот учебник будет для вас надежным помощником в изучении геометрии.

Желаем успехов!

Авторы

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ИЗ КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ

Основные формулы и теоремы

Произвольный треугольник

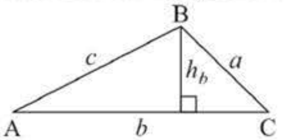


Рисунок 1

a, b, c – стороны;

$\angle A, \angle B, \angle C$ – противолежащие им углы;

h_b – высота, проведенная к стороне b;

S – площадь; p – полупериметр;

R – радиус описанной окружности;

r – радиус вписанной окружности.

Средняя линия треугольника MN (рисунок 2):

$$MN \parallel AC,\ MN = \frac{1}{2}AC;$$

$$S = \frac{1}{2}b \cdot h_b;\ S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\angle A;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$S = p \cdot r;\quad S = \frac{abc}{4R}.$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\angle A.$$

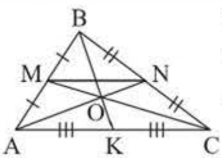


Рисунок 2

Медианы треугольника:

$$\frac{AO}{ON} = \frac{BO}{OK} = \frac{CO}{OM} = \frac{2}{1}.$$

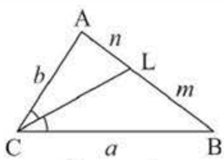


Рисунок 3

Биссектриса треугольника:

$$\frac{n}{m} = \frac{b}{a}.\quad CL = \sqrt{ab - mn}.$$

Прямоугольный треугольник

Рисунок 4

a, b – катеты; c – гипотенуза;

a_c, b_c – проекции катетов на гипотенузу;

m_c – медиана, проведенная к гипотенузе;

h_c – высота, проведенная к гипотенузе.

$$S = \frac{1}{2}ab;\qquad S = \frac{1}{2}c \cdot h_c;$$

$$m_c = \frac{1}{2}c = R;\qquad r = \frac{1}{2}(a + b - c);$$

$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c};\qquad a = \sqrt{c \cdot a_c};\qquad b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$.

Решение прямоугольного треугольника:

$a = c \cdot \sin\angle A;\qquad b = c \cdot \cos\angle A;$

$a = b \cdot \operatorname{tg}\angle A;\qquad b = a \cdot \operatorname{ctg}\angle A.$

Тригонометрические формулы:

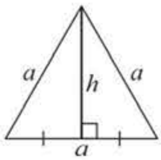
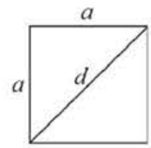
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha;\ \ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;\ \ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta;$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta.$

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Правильный треугольник	***Квадрат***
*Рисунок 5* $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $r = \frac{1}{3}h$; $R = 2r$.	*Рисунок 6* $d = a\sqrt{2}$; $S = a^2$; $S = \frac{1}{2}d^2$; $r = \frac{1}{2}a$; $R = \frac{1}{2}d$.

Параллелограмм

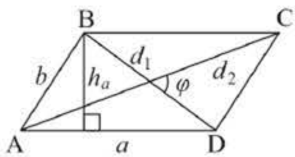


Рисунок 7

a, b – смежные стороны;

d_1, d_2 – диагонали;

φ – угол между диагоналями;

h_a – высота, проведенная к стороне a;

S – площадь.

$S = a \cdot h_a$; $S = ab \cdot \sin\angle A$;

$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$;

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Если $d_1 = d_2$, то $ABCD$ – прямоугольник (рисунок 8, *а*).

Рисунок 8

Если $d_1 \perp d_2$, то $ABCD$ – ромб (рисунок 8, *б*).

Трапеция

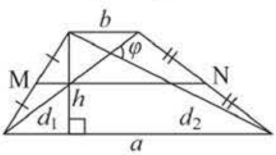


Рисунок 9

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$;

MN – средняя линия (рисунок 9);

MN параллельна основаниям

и $MN = \frac{a+b}{2}$.

Окружность

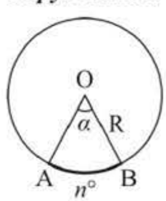


Рисунок 10

C – длина окружности; S – площадь круга;

l – длина дуги AB; $S_{\text{сект.}}$ – площадь сектора;

n° – градусная мера дуги AB (центрального угла AOB);

α – радианная мера центрального угла.

$C = 2\pi R$; $S = \pi R^2$; $l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$; $l = R\alpha$;

$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}$; $S_{\text{сект.}} = \frac{1}{2}R^2\alpha$;

Свойства: а) касательных к окружности;
б) касательной и секущей.

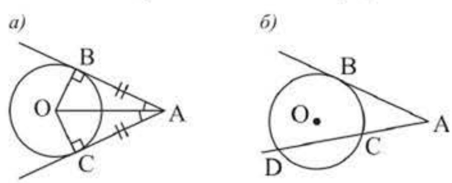


Рисунок 11

$AB^2 = AD \cdot AC$ (рисунок 11, *б*).

Свойство хорд

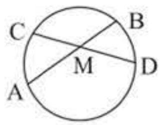


Рисунок 12

$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$

Угол между: а) касательной и хордой; б) хордами; в) секущими.

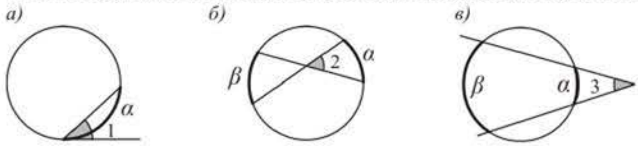


Рисунок 13

а) $\angle 1 = \frac{1}{2}\alpha$; б) $\angle 2 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; в) $\angle 3 = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

Вписанный четырехугольник

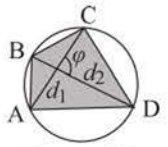


Рисунок 14

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$,

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$,

где d_1, d_2 – диагонали;

φ – угол между ними.

Описанный четырехугольник

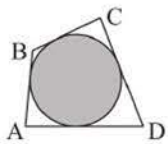


Рисунок 15

$AB + CD = AD + BC$,

$S = rp$,

где r – радиус вписанной окружности;

p – полупериметр четырехугольника.

Подобные треугольники

1) углы равны;

2) стороны пропорциональны.

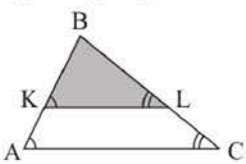


Рисунок 16

Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает треугольник, подобный данному (рисунок 16).

$$\Delta ABC \sim \Delta KBL \Rightarrow \frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KL} = \frac{BC}{BL} = k;$$

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta KBL}} = k; \ \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KBL}} = k^2.$$

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА СТЕРЕОМЕТРИИ 10 КЛАССА

Аксиомы стереометрии

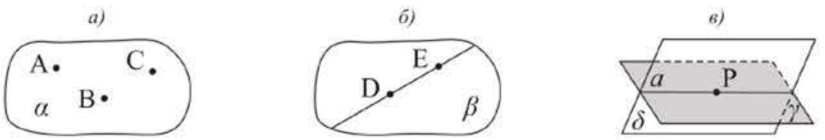


Рисунок 17

а) Через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.
б) Прямая, проходящая через две различные точки плоскости, лежит в этой плоскости.
в) Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, которая проходит через эту точку.

Следствия из аксиом

1) Через прямую и не принадлежащую ей точку можно провести единственную плоскость.
2) Через две пересекающиеся прямые можно провести единственную плоскость.
3) Через две различные точки пространства можно провести единственную прямую.
Теорема. Через две параллельные прямые можно провести единственную плоскость.

Параллельные и скрещивающиеся прямые

Признак параллельности прямых: если каждая из двух прямых параллельна третьей, то эти две прямые параллельны.
Признак скрещивающихся прямых: если одна прямая лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся. На рисунке 18 прямые c и a, c и b, c и d – скрещивающиеся.

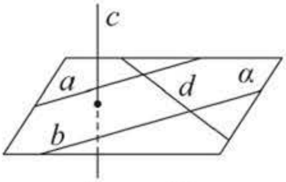


Рисунок 18

Взаимное расположение прямой и плоскости, двух плоскостей

Признак параллельности прямой и плоскости: если прямая параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости, но не содержится в ней, то она параллельна этой плоскости.
Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости. Например, на рисунке 18, если $c \perp b$ и $c \perp d$, то $c \perp \alpha$.

Признак параллельности двух плоскостей: если две пересекающиеся прямые одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны (рисунок 19).
Признак перпендикулярности плоскостей: если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

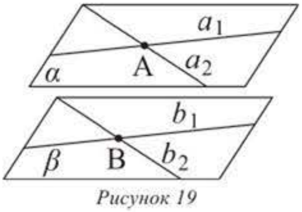


Рисунок 19

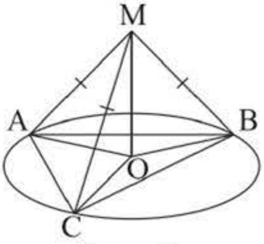


Рисунок 20

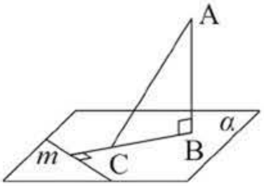


Рисунок 21

Перпендикуляр и наклонная

Если из одной точки, не лежащей на плоскости, проведены две наклонные, то:

1) наклонные, имеющие равные проекции, равны и обратно, равные наклонные имеют равные проекции (рисунок 20);

2) из двух наклонных, имеющих неравные проекции, больше та, проекция которой больше и обратно, большая наклонная имеет большую проекцию.

Теорема (*о трех перпендикулярах*). Если прямая плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной.

Например, на рисунке 21, если $m \perp CB$, то $m \perp AC$.

Теорема (*обратная теореме о трех перпендикулярах*). Если прямая плоскости перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной на данную плоскость.

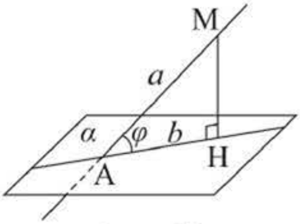


Рисунок 22

Угол между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями

Углом между прямой и не перпендикулярной ей плоскостью называется угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на данную плоскость. Например, на рисунке 22 $\angle MAH = \varphi$ – угол между прямой a и плоскостью α, $0° \le \varphi < 90°$.

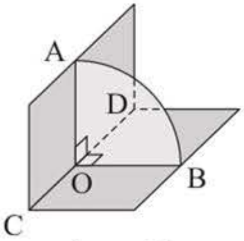


Рисунок 23

Линейным углом двугранного угла называется угол, вершина которого принадлежит его ребру, а стороны лежат в его гранях и перпендикулярны этому ребру. Например, на рисунке 23 угол AOB – линейный угол двугранного угла с ребром CD.

Двугранный угол может быть: *прямым*, если он равен 90°; *острым*, если он меньше 90°; *тупым*, если он больше 90°, но меньше 180°.

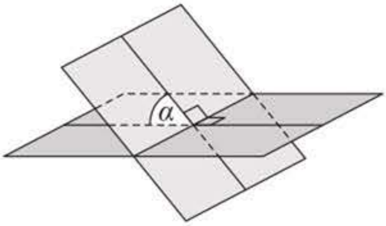
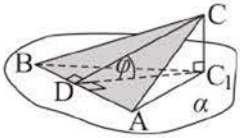


Рисунок 24

Градусной мерой угла между двумя пересекающимися плоскостями называется градусная мера одного из образованных ими двугранных углов, который не больше каждого из остальных.

Величина угла между пересекающимися плоскостями не больше 90°.

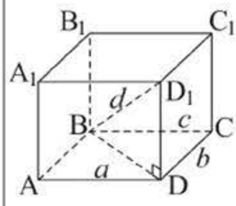
Площадь ортогональной проекции треугольника



$S_{\Delta ABC_1} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos \varphi$.

Рисунок 25

Прямоугольный параллелепипед, куб



$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Если $a = b = c$, то

$d = a\sqrt{3}$.

Рисунок 26

Прямоугольная система координат в пространстве

Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат.

Если в пространстве даны точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то расстояние между ними равно:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

координаты точки $C(x, y, z)$, делящей отрезок AB в отношении $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$, задаются формулами:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n},\ y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n},\ z = \frac{nz_1 + mz_2}{m + n};$$

координаты вектора $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

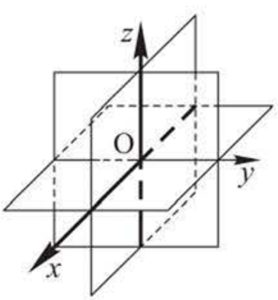


Рисунок 27

Сумма двух векторов

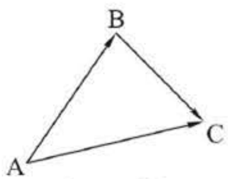


Рисунок 28

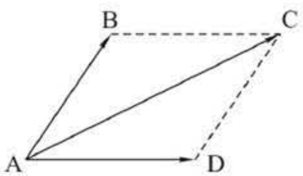


Рисунок 29

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ по правилу треугольника;

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ по правилу параллелограмма.

Разность двух векторов

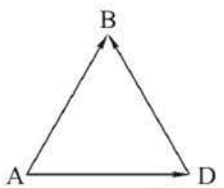


Рисунок 30

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

Сумма трех некомпланарных векторов

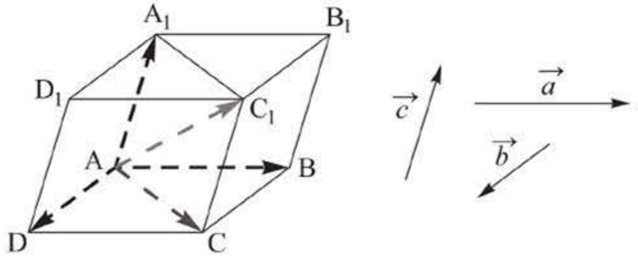


Рисунок 31

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AC_1}$ по правилу параллелепипеда.

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. *Условие коллинеарности векторов*: $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$, где k – некоторое число.

Три ненулевых вектора в пространстве называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. *Условие компланарности трех векторов:* $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – некоторые числа, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы.

Векторы называются **некомпланарными**, если при откладывании их от одной точки они не лежат в одной плоскости.

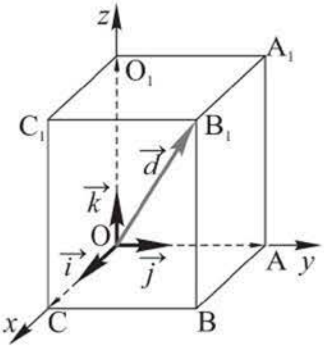


Рисунок 32

Формула разложения вектора по трем некомпланарным векторам

$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – данные некомпланарные векторы, x, y, z – некоторые числа.

Формула разложения вектора по координатным векторам

$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – координатные векторы, а числа x, y, z – координаты вектора $\vec{d}$.

Скалярное произведение векторов

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Если $\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}\,(x_2; y_2; z_2)$, то

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Угол между векторами

Если $\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}\,(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

1. Три точки A, B и C лежат в одной плоскости, а точка D не принадлежит этой плоскости. Может ли четырехугольник $ABCD$ быть трапецией?

2. Даны параллельные прямые a, b и точка M, не принадлежащая ни одной из них. Расположена ли точка M в одной плоскости с прямыми a и b, если известно, что через точку M можно провести прямую, пересекающую: а) обе прямые a и b; б) только одну из этих прямых?

3. Каково взаимное расположение плоскостей α и β, если прямая a: а) пересекает обе эти плоскости; б) пересекает одну плоскость и параллельна другой плоскости; в) пересекает одну плоскость и принадлежит другой плоскости?

4. а) Может ли плоскость, проходящая через середины двух сторон треугольника, пересечь третью его сторону?
б) Имеются две плоскости, каждая из которых параллельна одной и той же прямой. Каково может быть взаимное расположение этих плоскостей?

5. Верно ли, что если линии пересечения двух плоскостей α и β плоскостью γ параллельны, то плоскости α и β параллельны?

6. Дан правильный шестиугольник $ABCDEK$ и проведен перпендикуляр AH к его плоскости. Объясните, почему отрезки HE и DE взаимно перпендикулярны.

7. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно 2 м, пересечены прямой, образующей с каждой из этих плоскостей угол 45°. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между плоскостями.

8. Расстояния от точек A и B до плоскости α соответственно равны 12,5 см и 3,5 см. Длина проекции отрезка AB на эту плоскость равна 12 см. Найдите расстояние между точками A и B. Рассмотрите случаи, когда отрезок AB не пересекает или пересекает α.

9. Дан треугольник с координатами вершин $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$. Вершина C треугольника лежит на положительной полуоси Oz. Найдите длину медианы CM, если $\frac{AB^2}{CB^2} = \frac{2}{5}$.

10. Через сторону AD прямоугольника $ABCD$ со сторонами 2 дм и 4 дм проведена плоскость α. Ортогональная проекция прямоугольника на плоскость α – квадрат. Найдите угол наклона прямой CD к плоскости α.

11. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M и N – середины его ребер CB и A_1B_1 соответственно, $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DD_1} = \vec{c}$. Выразите через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор: а) $\overrightarrow{DN}$; б) $\overrightarrow{A_1M}$; в) $\overrightarrow{MN}$; г) $\overrightarrow{D_1B}$; д) $\overrightarrow{CA_1}$.

Уровень В

12. На одной из трибун спорткомплекса «Барыс Арена» лестница состоит из n ступенек, высота каждой из которых равна h. Составьте формулу для нахождения длины l перил вдоль этой лестницы, если угол наклона их к основанию равен α.

Спорткомплекс «Барыс Арена», г. Нур-Султан

13. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 6 см и 8 см, а боковое ребро – 10 см. Найдите сумму углов, образованных его диагональю с плоскостью основания и любой из боковых граней.

14. Плоскости правильного треугольника ABC и квадрата $ACDE$ перпендикулярны. Найдите расстояние между точками B и D, если $AC = 8$ см.

15. Даны точки $A(8; 0; 0)$, $B(0; 0; 5)$, $C(0; 7; 0)$, $D(8; 7; 5)$. Найдите расстояние между прямыми: а) AB и DC; б) AC и BD.

16. Дан тетраэдр $DABC$. На медиане DD_1 его грани ADB отмечена точка F так, что $DF : FD_1 = 2 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{CF}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Уровень C

17. Основанием пирамиды является правильный треугольник. Одна боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом α. Найдите углы наклона боковых ребер пирамиды к плоскости ее основания.

18. Основание пирамиды $SABCD$ – ромб $ABCD$ со стороной b и углом A, равным $60°$. Грани SAB и SAD перпендикулярны к плоскости основания, а высота пирамиды равна b. Найдите: а) двугранный угол, образованный плоскостями SBD и ABD; б) расстояние от точки A до плоскости SBD.

19. Дан треугольник с вершинами в точках $A(0; 0; 8)$, $B(8; 0; 0)$, $C(0; 8; 0)$, точка O – начало системы координат. Найдите сумму площадей ортогональных проекций треугольников AOB, BOC, AOC на плоскость треугольника ABC.

20. Треугольная пирамида задана координатами своих вершин $A(-6; 0; 2)$, $B(2; 8; 2)$, $C(-10; 4; 6)$, $D(2; 0; 4)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO}$, если O – точка пересечения медиан грани BCD.

I. МНОГОГРАННИКИ

В результате изучения раздела надо

знать

- определения многогранника и его элементов;
- понятие развертки многогранника;
- определение и свойства: призмы, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, усеченной пирамиды;
- формулы площадей боковой и полной поверхностей: призмы, пирамиды, усеченной пирамиды;
- понятие многогранника угла и его свойства;
- определение правильного многогранника и его виды.

уметь

- изображать на плоскости: призму, пирамиду, усеченную пирамиду, многогранный угол;
- строить развертки многогранников;
- строить сечения многогранника плоскостью;
- решать задачи на нахождение элементов многогранников;
- выводить формулы площадей боковой и полной поверхностей призмы, пирамиды, усеченной пирамиды и применять их при решении задач;
- распознавать виды правильных многогранников.

1. Понятие многогранника. Призма и ее элементы

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определения многогранника, его элементов, понятие развертки многогранника;

• знать определение и свойства призмы, ее виды;

• уметь изображать на плоскости призмы различных видов, их развертки и элементы;

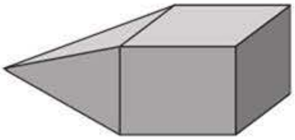
• уметь решать задачи на нахождение элементов многогранника.

Понятие многогранника рассматривалось в предыдущем классе. Изучим теперь многогранники различных видов и их свойства более подробно.

Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, любые два из которых, имеющие общую сторону, не лежат в одной плоскости. Параллелепипеды, пирамиды – примеры многогранников.

Многоугольники, из которых состоит поверхность многогранника, называются его **гранями**, стороны этих многоугольников – **ребрами**, а их вершины – **вершинами** многогранника. Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. Многогранник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от плоскости, содержащей каждую его грань (рисунок 33, *а*); **невыпуклым**, если он имеет хотя бы одну грань по одну сторону от плоскости, в которой он не расположен (рисунок 33, *б*). В школьном курсе геометрии изучаются преимущественно выпуклые многогранники, поэтому если слово «выпуклый» не используется, то предполагается, что рассматривается именно такой многогранник.

а)



б)

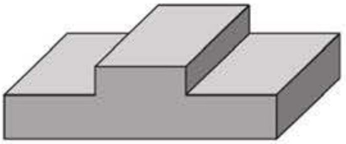


Рисунок 33

Грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками, углы этих многоугольников с указанными вершинами называются **плоскими углами** многогранника при этих вершинах. Грани выпуклого многогранника, имеющие общее ребро, называются *смежными* (или *соседними*). **Двугранным углом** многогранника называется двугранный угол между полуплоскостями, содержащими две его смежные грани.

Диагональю выпуклого многогранника называется отрезок, соединяющий две его вершины, не принадлежащие одной грани. **Сумма площадей всех граней многогранника называется площадью его полной поверхности (или кратко площадью поверхности).**

Поверхность многогранника можно разрезать по нескольким ребрам и разместить все его грани в одной плоскости так, что получится некоторый многоугольник. Этот многоугольник называется **разверткой** поверхности многогранника (или кратко **разверткой многогранника**).

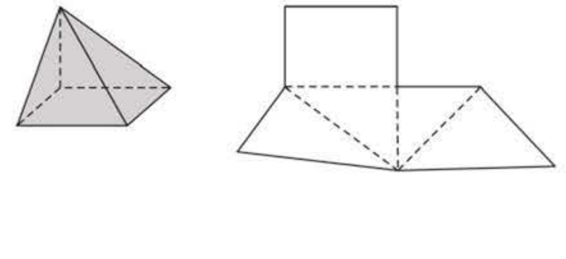


Рисунок 34

Один и тот же многогранник может иметь различные развертки. Например, на рисунках 34, *б*, *в* показаны развертки поверхности многогранника, изображенного на рисунке 34, *а*. На практике для получения модели многогранника, например, при изготовлении ее из картона, сначала надо изготовить развертку его поверхности.

Многогранник, две грани которого равные *n*-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные *n* грани – параллелограммы, называется *n*-угольной призмой (рисунок 35).

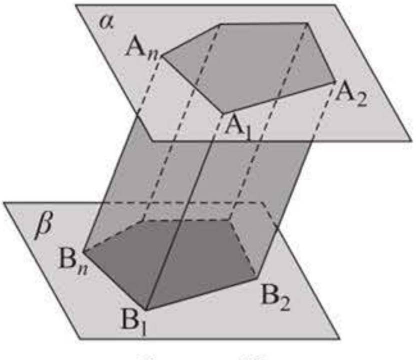
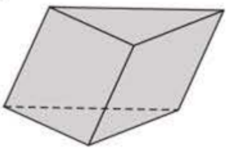


Рисунок 35

Два равных *n*-угольника, расположенных в параллельных плоскостях, называются *основаниями* призмы, параллелограммы – *боковыми гранями* призмы, а ребра призмы, не являющиеся сторонами ее оснований, – *боковыми ребрами* призмы. Из определения понятия призмы следует, что **все ее боковые ребра равны, а каждые два боковых ребра – параллельны.**

В зависимости от числа сторон основания призмы называют треугольными, четырехугольными, пятиугольными и т. д. (рисунки 36, 37). Если основание призмы – параллелограмм, то она является параллелепипедом (рисунок 36, *б*).

а)



б)

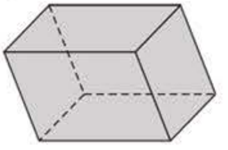
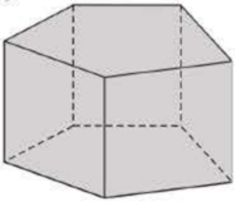


Рисунок 36

Если боковые ребра призмы перпендикулярны ее основаниям, то призма называется **прямой** (рисунки 37, *а*, *б*), а если не перпендикулярны – **наклонной** (рисунки 36, *а*, *б*).

а)



б)

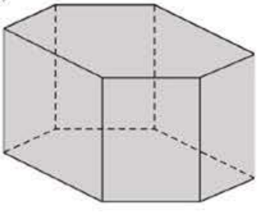


Рисунок 37

Призма называется правильной, если она прямая и ее основания – правильные *n*-угольники. На рисунке 37, *б* изображена правильная шестиугольная призма. В правильной призме все боковые грани – равные прямоугольники.

Напомним, что многоугольник, состоящий из всех общих точек многогранника и секущей плоскости, называется *сечением* многогранника этой плоскостью. *Секущая плоскость* многогранника – плоскость, разделяющая его на два многогранника.

Сечение призмы плоскостью, проходящей через ее диагональ и боковое ребро, называется *диагональным сечением* призмы. В прямой призме каждая боковая грань и каждое диагональное сечение являются прямоугольниками.

Перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания к плоскости другого основания призмы, называется ее **высотой**. Высотой призмы называют также длину этого перпендикуляра, равную расстоянию между ее основаниями. Например, на рисунке 38 A_1H – высота наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. *Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.*

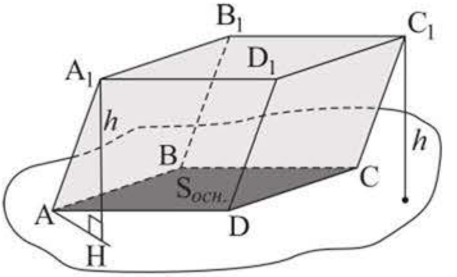


Рисунок 38

Понятие призмы может быть непосредственно связано с видом движения фигур в пространстве – параллельным переносом. Напомним, что *параллельным переносом* фигуры называется такое движение, при котором все точки фигуры перемещаются на одно и то же расстояние в одном и том же направлении. Например, нижнее основание призмы (рисунок 38) может быть получено параллельным переносом верхнего основания на отрезок A_1A в направлении, заданном вектором $\overrightarrow{A_1A}$.

Отметим, что многие здания имеют вид прямой призмы, а некоторые современные здания – наклонной призмы, например, офисное здание в порту Гамбурга (Германия).

Здание в порту Гамбурга

З а д а ч а 1. Существует ли многогранник, имеющий только 7 ребер?

Р е ш е н и е. Допустим, что такой многогранник существует. Если все его m граней – треугольники, то ребер в нем $\frac{3m}{2}$, так как каждое его ребро принадлежит двум граням. По условию $\frac{3m}{2} = 7$, откуда $m = \frac{14}{3}$, чего быть не может, так как m – натуральное число, не меньшее 4. Если хотя бы одна грань многогранника является n-угольником, где $n \geq 4$, то он имеет не менее 8 ребер. Следовательно, многогранника, имеющего только 7 ребер, не существует.

О т в е т. Не существует.

З а д а ч а 2. Найти высоту наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором основание – прямоугольник $ABCD$, $BB_1 = 7$ см, угол между основанием и гранью AA_1B_1B равен 60°, а угол между этим основанием и гранью BB_1C_1C равен 45°.

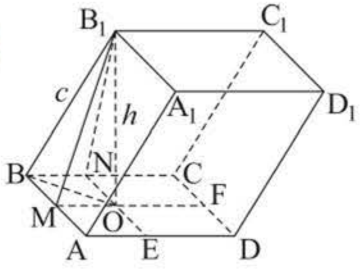


Рисунок 39

Р е ш е н и е. К сторонам BA и BC построим перпендикуляры B_1M, MF и B_1N, NE соответственно (рисунок 39). Обозначим точку O пересечения прямых MF и NE.

Тогда $AB \perp (B_1MO)$, значит, $AB \perp B_1O$ и $BC \perp (B_1NO)$, откуда $BC \perp B_1O$, следовательно, $B_1O \perp (ABC)$. То есть отрезок B_1O – высота параллелепипеда, пусть $B_1O = h$.

В ΔB_1MO $\angle B_1MO = 60°$, $MO = \frac{h}{\operatorname{tg} 60°} = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

В ΔB_1NO $\angle B_1NO = 45°$, $NO = h$. Причем $NO = BM$, так как $MONB$ – прямоугольник.

В ΔBMO имеем: $BO^2 = h^2 + \frac{h^2}{3} = \frac{4h^2}{3}$.

В ΔBB_1O имеем: $7^2 = \frac{4h^2}{3} + h^2$, откуда $49 \cdot 3 = 7h^2$, $h = \sqrt{21}$ (см).

О т в е т. $\sqrt{21}$ см.

ВОПРОСЫ

1. Что называется многогранником? Приведите примеры многогранников и назовите их элементы.
2. Какой многогранник называется выпуклым, а какой – невыпуклым?
3. Объясните, что такое развертка многогранника.
4. Что называется призмой?
5. Какая призма называется: а) прямой; б) наклонной; в) правильной?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

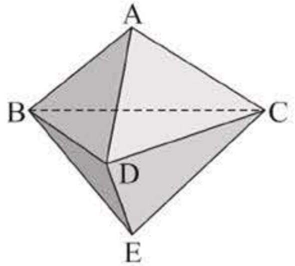


Рисунок 40

21. Какое наименьшее число: а) граней; б) ребер; в) вершин может иметь многогранник?

22. На рисунке 40 изображен многогранник $ABCDE$, все грани которого правильные треугольники. Назовите:

а) его смежные грани;

б) плоские углы при вершине D;

в) диагональ этого многогранника.

23. Изобразите многогранник, являющийся объединением двух четырехугольных пирамид $PABCD$ и $SABCD$. Сколько в нем:

а) граней; б) ребер; в) вершин; г) диагоналей?

24. Чему равна сумма плоских углов при каждой вершине:
а) прямоугольного параллелепипеда; б) правильного тетраэдра?

25. Выберите неверное утверждение: а) куб является прямоугольным параллелепипедом; б) все грани куба равны; в) диагональ куба с ребром a равна $a\sqrt{3}$; г) диагональное сечение куба является квадратом.

26. Площадь диагонального сечения куба равна $16\sqrt{2}$ см^2. Найдите: а) длину ребра куба; б) диагональ его основания; в) диагональ куба; г) площадь его поверхности.

27. Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок 41): а) $AB_1 \parallel (D_1DC)$; б) $A_1D_1 \perp C_1D$; в) AB_1C_1D – прямоугольник; г) диагональные сечения равны.

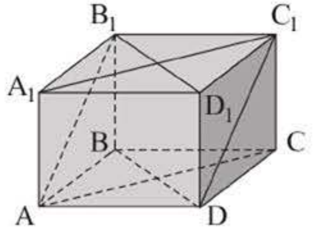


Рисунок 41

28. Может ли диагональное сечение прямоугольного параллелепипеда являться квадратом? Если может, то укажите, при каком условии.

29. Высота прямоугольного параллелепипеда равна 14 см, а его основанием является квадрат площадью 144 см^2. Найдите длину диагонали параллелепипеда.

30. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 24 см и 10 см, а его диагональ образует с плоскостью основания угол, равный 45°. Найдите боковое ребро этого параллелепипеда.

31. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 16 см и 12 см, а площадь его диагонального сечения равна 200 см^2. Найдите высоту параллелепипеда.

32. Нарисуйте развертку поверхности:
а) правильного тетраэдра, ребро которого равно 2 см;
б) прямоугольного параллелепипеда с измерениями 1 см, 2 см, 3 см.

33. а) Какое наименьшее число граней может иметь призма?
б) Какой n-угольник является основанием призмы, у которой 10 вершин?

34. Укажите верные утверждения: а) основания призмы равны; б) грани призмы равны; в) все боковые грани призмы являются параллелограммами; г) все грани призмы являются параллелограммами; д) все боковые ребра параллельны между собой.

35. а) Чем отличается четырехугольная прямая призма от прямого параллелепипеда?

б) Есть ли различия между прямым и прямоугольным параллелепипедами?

36. Докажите, что если плоскости диагональных сечений прямого параллелепипеда перпендикулярны, то его основанием является ромб.

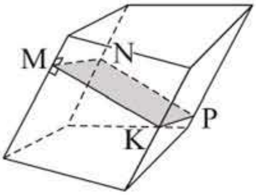


Рисунок 42

37. Верно ли, что: а) число ребер любой призмы кратно 3; б) сумма двугранных углов при всех боковых ребрах четырехугольной призмы равна 360° (рисунок 42); в) все диагональные сечения правильной призмы равновелики?

38. Изготовьте модель правильной:

а) треугольной призмы, все ребра которой равны;

б) шестиугольной призмы, сторона основания которой вдвое меньше ее высоты.

Уровень В

39. Существует ли пятигранник, каждая грань которого – треугольник?

40. Изобразите многогранник, который получится, если от куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отрезать пирамиду $A_1AB_1D_1$. Верно ли, что у этого многогранника столько вершин, сколько и граней?

41. Изготовьте модель невыпуклого многогранника, который получится, если: а) к каждой грани тетраэдра приклеить равный ему тетраэдр; б) к каждой грани куба приклеить равный ему куб; в) к каждой грани куба приклеить четырехугольную пирамиду, основание которой равно грани куба.

42. а) Диагональ прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием наклонена к нему под углом 60°. Найдите синус угла между этой диагональю и боковой гранью параллелепипеда.

б) Диагональ прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием образует с его боковой гранью угол 30°. Найдите угол между этой диагональю и плоскостью основания параллелепипеда.

43. Изготовьте модель наклонной четырехугольной призмы, четыре грани которой являются квадратами.

Уровень С

44. Докажите, что: а) квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен полусумме квадратов трех диагоналей граней, выходящих из одной вершины; б) диагональ прямоугольного параллелепипеда равна сумме ортогональных проекций трех его ребер, выходящих из одной вершины, на диагональ параллелепипеда.

45. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 37 см, 23 см и 40 см. Найдите с точностью до 0,1 см расстояние между большей по площади боковой гранью и противолежащим ей боковым ребром призмы.

46. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 2 дм, а ее высота $\sqrt{3}$ дм. Какую наименьшую площадь может иметь сечение призмы плоскостью, проходящей через сторону одного основания и имеющей хотя бы одну общую точку с другим основанием?

47. Сторона основания и высота правильной четырехугольной призмы равны a и h соответственно. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону основания и наклоненную к нему под углом α (α – переменная величина).

2. Площадь поверхности призмы

Учебные достижения по изучению темы:

• знать понятие и формулы площадей боковой и полной поверхностей призмы;

• уметь выводить их и применять при решении задач.

Фигура, образованная боковыми гранями призмы, называется ее *боковой поверхностью.* **Площадью полной поверхности призмы** называется сумма площадей всех ее граней, а площадью *боковой поверхности* призмы – сумма площадей всех ее боковых граней. Площадь $S_{\text{п.п.}}$ полной поверхности призмы выражается через площадь $S_{\text{бок.}}$ боковой поверхности и площадь $S_{\text{осн.}}$ основания призмы формулой: $\boldsymbol{S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}}$.

Теорема. **Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания на длину бокового ребра.**

Доказательство. Все боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей этих прямоугольников, то есть равна сумме произведений длин сторон основания призмы на длину ее бокового ребра. Отсюда получаем формулу $\boldsymbol{S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h}$, где $P_{\text{осн.}}$ – периметр основания призмы, h – длина бокового ребра призмы.

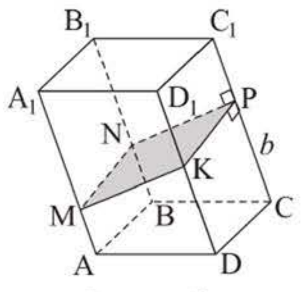


Рисунок 43

Сечение призмы плоскостью, пересекающей каждое боковое ребро и перпендикулярной им, называется **перпендикулярным сечением призмы**. Например, на рисунке 43 четырехугольник *MNPK* – перпендикулярное сечение наклонного параллелепипеда.

Теорема. **Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на длину ее бокового ребра.**

Доказательство. Все боковые грани наклонной призмы – параллелограммы, а все боковые ребра равны. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей этих параллелограммов. Перпендикулярное сечение призмы – многоугольник, каждая сторона которого является высотой параллелограмма (боковой грани призмы). Следовательно, $\boldsymbol{S_{\text{бок.}} = P_{\text{перп.сеч.}} \cdot b}$, где $P_{\text{перп.сеч.}}$ – периметр перпендикулярного сечения призмы, b – длина ее бокового ребра.

Если перпендикулярного сечения наклонной призмы не существует, то в этом случае площадь ее боковой поверхности равна: $\boldsymbol{S_{бок.} = P_{перп.мн.} \cdot b}$. В этой формуле $P_{перп.мн.}$ – периметр многоугольника, плоскость которого перпендикулярна каждой из прямых, содержащих боковые ребра призмы, а его вершинами являются точки пересечения этих прямых с указанной плоскостью, b – длина ее бокового ребра. Проиллюстрируйте это свойство на чертеже и объясните его самостоятельно.

Задача 1. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция, основания которой равны 2 см и 10 см, а ее боковая сторона равна 5 см. Известно, что диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найти площадь полной поверхности призмы.

Решение. Пусть дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в которой $AB = 5$ см, $BC = 2$ см, $AD = 10$ см, а диагональ B_1D образует с плоскостью основания угол B_1DB, равный 30° (рисунок 44). Площадь $S_{п.п.}$ полной поверхности этой призмы равна: $S_{п.п.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$.

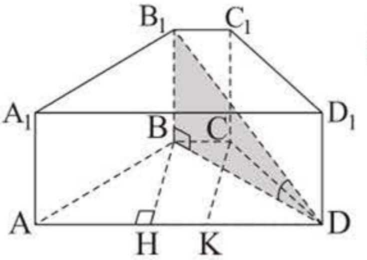


Рисунок 44

Найдем площадь основания. Для этого проведем высоты BH и CK трапеции $ABCD$. Тогда $AH = KD = \dfrac{10-2}{2} = 4$ (см), $BH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см), $S_{осн.} = \dfrac{2+10}{2} \cdot 3 = 18$ (см^2).

Найдем площадь боковой поверхности призмы по формуле $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h$. Так как призма прямая, то высота h равна ее боковому ребру BB_1. В прямоугольном ΔBB_1D сторона $B_1B = BD \cdot \operatorname{tg} 30°$. Из прямоугольного ΔBHD имеем: $BD = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ (см). Тогда $B_1B = 3\sqrt{5} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{15}$ (см), $S_{бок.} = 22 \cdot \sqrt{15}$ см^2.

Итак, $S_{п.п.} = S_{бок.} + 2S_{осн.} = (22\sqrt{15} + 36)$ см^2.

Ответ. $(22\sqrt{15} + 36)$ см^2.

Задача 2. В наклонной треугольной призме боковое ребро равно $\sqrt{3}$ дм и удалено от двух других ее боковых ребер на расстояние, равное 1 дм, а двугранный угол при этом ребре равен 120°. Найти площадь боковой поверхности призмы.

Решение. Пусть дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой $CC_1 = \sqrt{3}$ дм. Построим ее перпендикулярное сечение – треугольник KMN,

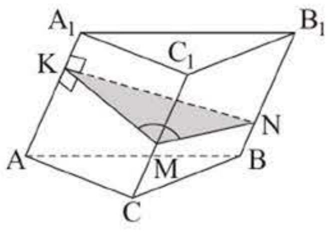


Рисунок 45

в котором $MN = MK = 1$ дм (рисунок 45). При этом $\angle KMN$ является линейным углом двугранного угла при ребре CC_1, $\angle KMN = 120°$. Тогда площадь боковой поверхности призмы равна: $S_{бок.} = (KN + KM + MN) \cdot CC_1$. Из ΔKMN по теореме косинусов найдем $KN^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3$. Тогда $S_{бок.} = (\sqrt{3} + 2) \cdot \sqrt{3} = (3 + 2\sqrt{3})$ (дм^2).

Ответ. $(3 + 2\sqrt{3})$ дм^2.

ВОПРОСЫ

1. Что называется площадью полной поверхности призмы и площадью боковой поверхности призмы?

2. Сформулируйте и докажите теорему о площади боковой поверхности: а) прямой призмы; б) наклонной призмы.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

48. Длина, ширина и высота складского помещения соответственно равны 8 м, 6 м, 3 м. Найдите площадь: а) пола; б) всех его стен.

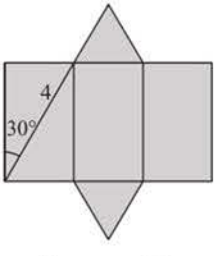


Рисунок 46

49. На рисунке 46 изображена развертка поверхности правильной треугольной призмы. Используя данные рисунка, найдите площадь полной поверхности этой призмы.

50. Найдите сторону основания и высоту правильной четырехугольной призмы, если площадь ее полной поверхности равна 40 дм^2, а площадь боковой поверхности на 8 дм^2 меньше.

51. Найдите площадь поверхности прямого параллелепипеда, если стороны его основания равны: а) 6 дм и 8 дм, а угол между ними равен 30°, а боковое ребро параллелепипеда равно 5 дм; б) 8 м и 15 м, угол между ними равен 60°, а меньшая из площадей его диагональных сечений равна 65 м^2.

52. Найдите площадь полной поверхности прямой треугольной призмы, стороны основания которой равны: а) 5 дм, 5 дм и 8 дм, а ее высота равна меньшей высоте основания; б) 21 см, 17 см, 10 см, а диагональ меньшей боковой грани равна 26 см.

53. а) Большая диагональ основания правильной шестиугольной призмы равна 8 см, а высота призмы равна $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности этой призмы.

б) Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы, если сторона ее основания равна 2 дм, а меньшая из диагоналей призмы равна 4 дм (рисунок 47).

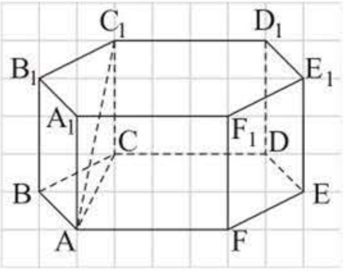


Рисунок 47

54. а) В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с углом 45°, одно основание которой на 8 см больше другого, а ее средняя линия равна 7 см. Найдите площадь полной поверхности призмы, если ее высота равна 5 см.

б) Основание прямой призмы – равнобедренная трапеция с основаниями 8 см и 2 см. Диагональ большей боковой грани составляет с ее боковым ребром угол 45°. Найдите площадь полной поверхности призмы, если известно, что в ее основание можно вписать окружность.

55. а) Расстояния между параллельными прямыми, на которых лежат боковые ребра наклонной треугольной призмы, равны 2 см, 3 см и 4 см. Боковое ребро призмы равно 5 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

б) Сечение наклонной треугольной призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, – равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 8 см^2. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее боковое ребро равно 5 см.

Уровень В

56. а) В прямом параллелепипеде стороны основания равны 5 м и 3 м, меньшая диагональ основания равна 4 м, а меньшая диагональ параллелепипеда наклонена к основанию под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности этого параллелепипеда.

б) Основанием прямого параллелепипеда является ромб. Площади диагональных сечений параллелепипеда равны 40 см^2 и 60 см^2, а его меньшая диагональ наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

57. а) В наклонной треугольной призме две боковые грани равны, угол между ними 60°. Общее ребро этих граней равно $2\sqrt{3}$ м и удалено от противоположной боковой грани на расстояние, равное 4 м. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

б) Угол между двумя боковыми гранями наклонной треугольной призмы равен 120°, а расстояния от их общего ребра, равного 12 дм, до остальных ребер равны 7 дм и 8 дм. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

58. В наклонной треугольной призме одно боковое ребро равно $\sqrt{2}$ дм и удалено от двух других ее боковых ребер на расстояние, равное 1 дм, а двугранный угол при этом ребре равен 150°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

59. Основание наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – квадрат со стороной 4 см, высота призмы равна $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности призмы, если ее высотой является отрезок:

а) D_1O, где O – точка пересечения диагоналей основания (рисунок 48, *а*);

б) D_1M, где M – середина ребра AD (рисунок 48, *б*).

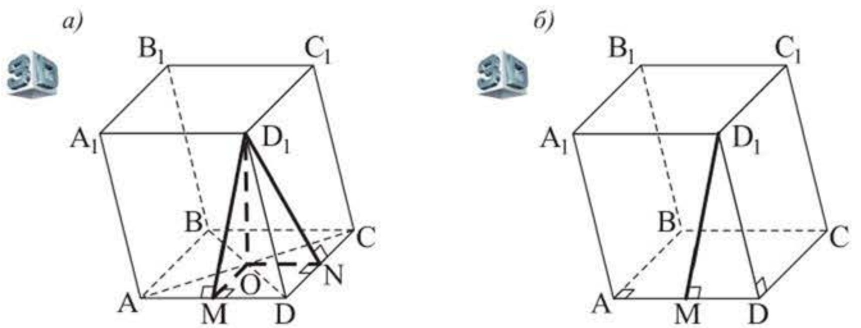


Рисунок 48

60. В наклонной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием является прямоугольник со сторонами $CD = 6$ м и $AD = 10$ м. Известно, что боковая грань ABB_1A_1 – квадрат, а двугранный угол при ребре AB равен 135°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Уровень С

61. Основание наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы наклонено к плоскости основания под углом 60°, а ортогональной проекцией вершины B_1 является точка пересечения медиан ΔABC (рисунок 49). Найдите площадь боковой поверхности призмы.

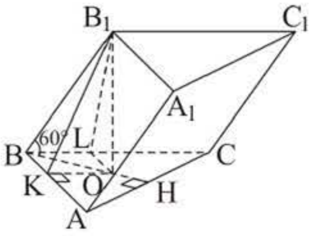


Рисунок 49

62. Гараж, сделанный из листового металла, имеет форму поверхности прямой пятиугольной призмы $ABMCDA_1B_1M_1C_1D_1$. Его основанием является боковая грань AA_1D_1D, $AB = AD = 3$ м, $DD_1 = 4$ м, $\angle MBC = \angle MCB = 15°$. Сколько листов металла размером 1×2 м израсходовано на изготовление гаража (без учета его основания), если на швы ушло 8 % от площади его поверхности?

3. Пирамида и ее элементы. Площадь поверхности пирамиды

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определения пирамиды и ее элементов, виды пирамид;

• уметь изображать пирамиды различных видов и ортогональные проекции их вершин на плоскость основания;

• строить развертки пирамид;

• уметь решать задачи на нахождение элементов пирамид;

• знать формулы площадей поверхностей пирамид различных видов;

• уметь выводить эти формулы и применять их при решении задач.

Многогранник, одна грань которого *n*-угольник, а *n* остальных граней – треугольники с общей вершиной, называется *n*-угольной пирамидой.

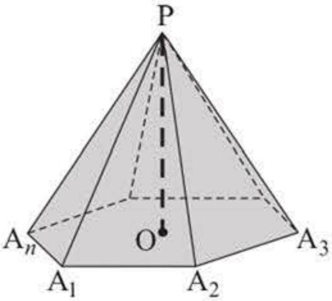


Рисунок 50

Отметим, что n-угольная пирамида имеет $n + 1$ грань. Многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ называется *основанием* пирамиды (рисунок 50). Точка P называется *вершиной* пирамиды, отрезки PA_1, PA_2, …, PA_n – *боковыми ребрами*, треугольники PA_1A_2, PA_2A_3, …, $PA_{n-1}A_n$ – *боковыми гранями* пирамиды. Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости ее основания, называется **высотой** пирамиды, например, отрезок PO на рисунке 50. Высотой пирамиды называют также длину этого перпендикуляра. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ее боковое ребро и диагональ основания, называется **диагональным сечением** пирамиды.

Пирамида называется правильной, если ее основанием является правильный многоугольник, а все боковые ребра равны. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины к стороне основания, называется **апофемой** пирамиды. Центр основания правильной пирамиды является проекцией ее вершины на плоскость этого основания.

Отметим, что если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то:

1) *сечением пирамиды является многоугольник, подобный основанию;*

2) *боковые ребра и высота пирамиды делятся этой плоскостью на пропорциональные отрезки;*

3) *площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.*

Действительно: 1) пусть в пирамиде $PA_1A_2 \dots A_n$ построено сечение, параллельное основанию, – многоугольник $B_1B_2 \dots B_n$ (рисунок 51). Тогда стороны этого многоугольника параллельны сторонам основания: $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3, \dots, A_{n-1}A_n \parallel B_{n-1}B_n$.

$\angle A_1A_2A_3 = \angle B_1B_2B_3$, $\angle A_2A_3A_4 = \angle B_2B_3B_4, \dots, \angle A_{n-1}A_nA_1 = \angle B_{n-1}B_nB_1$.

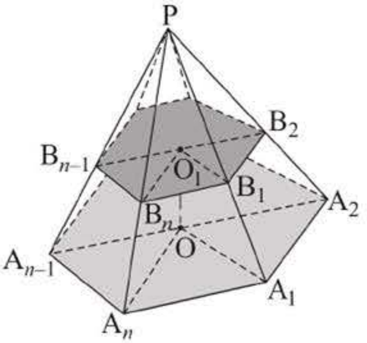


Рисунок 51

Кроме того, $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}, \dots, \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$. (Обоснуйте это самостоятельно). Тогда многоугольники $B_1B_2 \dots B_n$ и $A_1A_2 \dots A_n$ подобны.

Свойства 2) и 3) докажите самостоятельно.

Если в пирамиде все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы, то ортогональной проекцией ее вершины на плоскость основания является центр описанной около него окружности.

Действительно, пусть точка O – ортогональная проекция вершины пирамиды $PA_1A_2 \dots A_n$ (эта точка – основание высоты пирамиды). Тогда отрезки $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ – проекции ребер PA_1, $PA_2, \dots, PA_n$ соответственно на плоскость основания (рисунок 52). Углы $PA_1O, PA_2O, \dots, PA_nO$ равны по условию. Следовательно, равны и прямоугольные треугольники $POA_1, POA_2, \dots, POA_n$, имеющие общий катет PO. Тогда $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n$, т. е. точка O равноудалена от вершин $A_1, A_2, \dots, A_n$ основания и, значит, является центром описанной около него окружности.

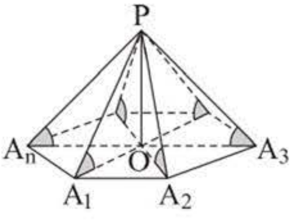


Рисунок 52

Верно также, что *если ортогональной проекцией вершины пирамиды на плоскость основания является центр описанной около него окружности, то все ее боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы.*

Если в пирамиде все боковые грани образуют с основанием равные углы, то ортогональной проекцией ее вершины на плоскость основания является центр вписанной в него окружности.

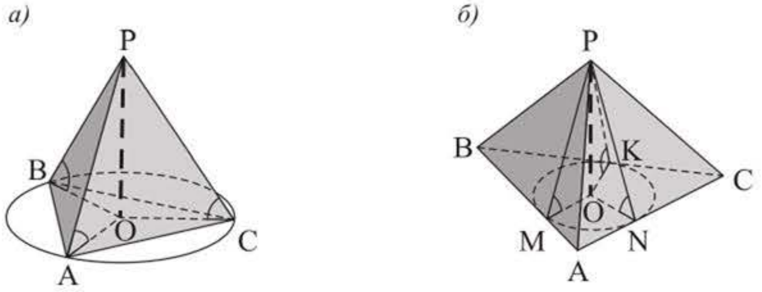


Рисунок 53

Верно также, что *если ортогональной проекцией вершины пирамиды на плоскость основания является центр вписанной в него окружности, то все ее боковые грани образуют с основанием равные углы*. (Докажите эти свойства самостоятельно, используя рисунки 53, *а*, *б*.)

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней, а площадью *боковой поверхности* пирамиды – сумма площадей всех ее боковых граней. Площадь $S_{\text{п.п.}}$ полной поверхности пирамиды выражается через площадь $S_{\text{бок.}}$ боковой поверхности и площадь $S_{\text{осн.}}$ основания пирамиды формулой: $\boldsymbol{S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}}$

Теорема. **Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра ее основания на апофему.**

Доказательство. Пусть сторона основания правильной пирамиды равна a, число сторон основания n, а ее апофема l. Тогда площадь боковой поверхности пирамиды равна $(0{,}5a \cdot l) \cdot n = p \cdot l$, где p – полупериметр основания, то есть $\boldsymbol{S_{\text{бок.}} = p \cdot l}$.

Если ортогональной проекцией вершины пирамиды на плоскость основания является центр вписанной в него окружности, то все ее боковые грани образуют с основанием равные углы. Тогда *площадь боковой поверхности такой пирамиды равна частному площади ее основания и косинуса указанного двугранного угла*. Например, на рисунке 54 $\boldsymbol{S_{\text{бок.}} = \dfrac{S_{\text{осн.}}}{\cos\angle SKO}}$.

(Докажите эту формулу самостоятельно.)

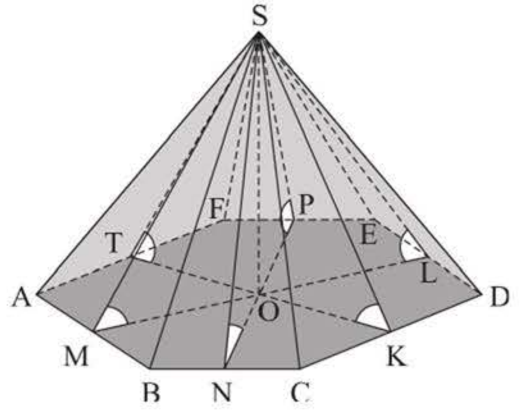


Рисунок 54

Задача 1. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ сторона основания равна 1 дм, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α, равным 60°. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону AB основания, и перпендикулярной ее боковому ребру DC.

Решение. Проведем высоту BF ΔDBC, тогда AF – высота треугольника ADC, а равнобедренный ΔABF – указанное сечение, FE – его высота (рисунок 55).

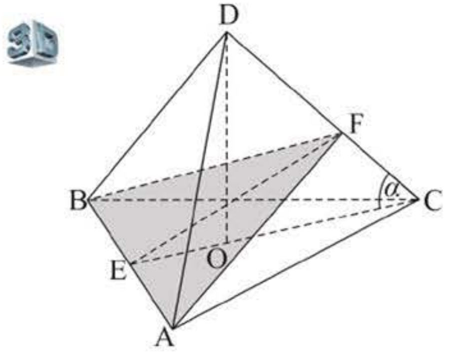


Рисунок 55

$S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2} AB \cdot EF$. В прямоугольном ΔEFC $EF = CE \cdot \sin 60° = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{3}{4}$ (дм). Тогда $S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ (дм^2).

Ответ. $\frac{3}{8}$ дм^2.

З а д а ч а 2. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом β, апофема пирамиды равна k. Найти высоту пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть $PABCD$ – данная пирамида (рисунок 56), PO – ее высота, PH – апофема пирамиды. По условию $PH = k$, $\angle PAO = \beta$. Пусть $PO = x$, тогда $AO = x \cdot \operatorname{ctg}\beta$, $OH = AO \cdot \sin 45^\circ = \dfrac{x \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \sqrt{2}}{2}$.

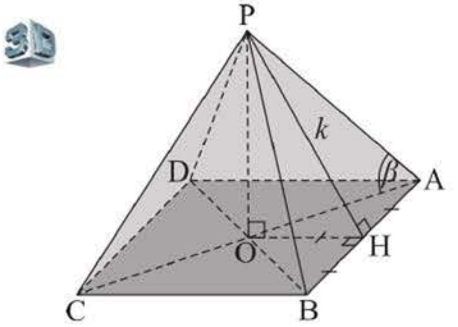


Рисунок 56

В ΔPOH по теореме Пифагора имеем: $PO^2 + OH^2 = PH^2$. Отсюда получим равенство: $x^2 + \dfrac{x^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\beta}{2} = k^2$.

Преобразуем его: $x^2(2 + \operatorname{ctg}^2\beta) = 2k^2$ и найдем $x = \dfrac{k\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2\beta}}$.

О т в е т. $\dfrac{k\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2\beta}}$.

З а д а ч а 3. В треугольной пирамиде стороны основания равны 13 м, 14 м и 15 м, все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

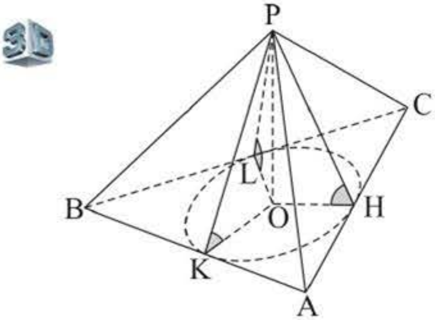


Рисунок 57

Р е ш е н и е. Пусть дана пирамида $PABC$, в которой $AB = 13$ м, $AC = 14$ м, $BC = 15$ м, PO – высота пирамиды, отрезки PH, PK, PL – высоты в ее боковых гранях (рисунок 57). Так как $\angle OHP = \angle OKP = \angle OLP = 45^\circ$, то точка O – центр окружности, вписанной в ΔABC. Поэтому площадь боковой поверхности данной пирамиды равна: $S_{\text{бок.}} = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{\cos 45^\circ}$. Используя формулу Герона $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p – полупериметр ΔABC, a, b, c – его стороны, найдем $S_{\Delta ABC} = 84$ м^2. Тогда $S_{бок.} = 84\sqrt{2}$ м^2.

Ответ. $84\sqrt{2}$ м^2.

Задача 4. Основание тетраэдра – прямоугольный равнобедренный треугольник, все его боковые грани равновелики и каждое боковое ребро равно 1 дм. Найти площадь боковой поверхности тетраэдра.

Решение. Пусть в данном тетраэдре $DABC$ треугольник ABC – основание, $AC = BC = a$ дм, $AB = a\sqrt{2}$ дм, $DA = DB = DC = 1$ дм (рисунок 58). Тогда середина O гипотенузы AB является основанием высоты DO этого тетраэдра (по свойству равных наклонных и их проекций). Учитывая, что $S_{\Delta ADB} = S_{\Delta ADC}$, то есть $\frac{1}{2}AB \cdot DO = \frac{1}{2}AC \cdot DH$, получим уравнение $a\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a \cdot \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$. Решим это уравнение, разделив его левую и правую части на a и возведя их в квадрат $\frac{2(4-2a^2)}{4} = \frac{4-a^2}{4}$,

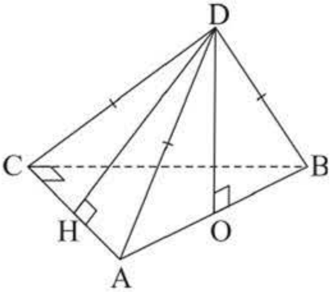


Рисунок 58

$3a^2 = 4$, $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Тогда искомая площадь равна: $3 \cdot S_{\Delta ADC} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \times$ $\times \sqrt{1-\frac{4}{12}} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2}$ (дм^2).

Ответ. $\sqrt{2}$ дм^2.

ВОПРОСЫ

1. Что называется пирамидой?
2. Какая пирамида называется правильной?
3. Что такое апофема правильной пирамиды?
4. Какие свойства пирамид вы знаете? Сформулируйте их.
5. Что называется площадью полной поверхности и площадью боковой поверхности пирамиды?
6. По каким формулам можно найти площадь боковой поверхности правильной пирамиды?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

63. а) Объясните, почему любая пирамида имеет четное число ребер.

б) Сколько граней и ребер у пирамиды, в которой 15 вершин?

в) Сколько вершин и граней у пирамиды, в которой 16 ребер?

64. а) Основанием пирамиды является параллелограмм. Две соседние ее боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а длина меньшего бокового ребра равна 17 см. Найдите высоту пирамиды.

б) Основанием пирамиды является квадрат, сторона которого равна 4 дм. Одно из ее боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, а противоположное ему ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите высоту пирамиды.

65. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, каждое ребро которой равно 9 см. Найдите:

а) плоский угол пирамиды при ее вершине S;

б) угол наклона бокового ребра к плоскости основания;

в) косинус угла наклона боковой грани к плоскости основания;

г) высоту пирамиды.

66. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ плоские углы при вершине D прямые, а сторона основания ABC равна 12 см. Найдите: а) апофему пирамиды; б) угол между ее ребром BC и медианой DM грани DAB; в) высоту пирамиды.

67. а) Найдите боковое ребро правильной треугольной пирамиды, если площадь ее боковой поверхности равна 48 см^2, а сторона основания 8 см.

б) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания равна 10 см, а плоский угол при вершине 60°.

68. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6 см. Какую длину имеет высота этой пирамиды, если площадь ее полной поверхности равна 96 см^2?

69. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 10 см, а ее апофема равна 8 см. Найдите площадь полной поверхности этой пирамиды.

70. Высота пирамиды равна 4 м и совпадает с одним из боковых ребер. Найдите площадь ее полной поверхности, если основанием пирамиды является:

а) квадрат со стороной 3 м;

б) равносторонний треугольник со стороной $2\sqrt{3}$ м.

71. а) Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 12 см и 5 см, а проекцией вершины пирамиды на плоскость основания является точка пересечения его диагоналей. Найдите площадь полной поверхности этой пирамиды, если ее высота равна 8 см.

б) Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна 10 см, а угол между боковой гранью и плоскостью основания 45°. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

72. а) Пирамида Хеопса имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 230 м, а высота приближенно равна 137 м. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды (ответ округлите до сотен м^2).

Пирамида Хеопса, Египет

Дворец Мира и Согласия, г. Нур-Султан

б) Дворец Мира и Согласия в г. Нур-Султане имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, высота и сторона основания которой равны 62 м. Найдите с точностью до 1 м^2 площадь боковой поверхности этой пирамиды.

73. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$ см. Найдите площадь ее боковой поверхности, если известен угол в 60° между плоскостью основания пирамиды и:

а) боковой гранью; б) боковым ребром.

74. Основание пирамиды – ромб с углом 45°. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если радиус вписанной в ромб окружности равен $\sqrt{2}$ дм.

75. а) Найдите двугранный угол между плоскостью основания и плоскостью боковой грани правильной пирамиды, площадь основания которой равна $25\sqrt{2}$ см^2, а площадь боковой поверхности равна 50 см^2.

б) Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если сторона ее основания равна $2\sqrt{3}$ дм, а угол между плоскостями боковой грани и основания равен 30°.

76. В правильной треугольной пирамиде высота равна 4 см, а сторона основания – $2\sqrt{3}$ см. Сравните площади боковых поверхностей этой пирамиды и пирамиды с такими же основанием и высотой, если высота совпадает с одним из ее боковых ребер.

77. Изготовьте модель правильной треугольной пирамиды и найдите площадь ее поверхности.

Уровень В

78. Изобразите высоту пирамиды и найдите ее длину, если основанием пирамиды является: а) прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 10 дм, а каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°; б) тупоугольный треугольник со сторонами 6 см, 6 см, $6\sqrt{3}$ см, а каждое боковое ребро пирамиды равно 10 см.

79. Основание пирамиды – треугольник со сторонами 10 м, 10 м, 12 м. Боковые грани пирамиды образуют с основанием равные двугранные углы по 45°. Найдите высоту этой пирамиды.

80. Изготовьте модель пирамиды, основанием которой является:

а) прямоугольный треугольник, а две боковые грани перпендикулярны основанию;

б) прямоугольник, а основанием высоты – центр окружности, описанной около него.

81. Площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды равна $112\sqrt{3}$ см^2, а площадь ее боковой поверхности равна $96\sqrt{3}$ см^2. Найдите с точностью до 0,1 см высоту этой пирамиды.

82. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 3$ м, $BC = 6$ м, $BB_1 = 12$ м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды B_1ABC.

83. Деревянный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1 дм, распилили на три пирамиды A_1ABCD, $A_1BCC_1B_1$, $A_1DCC_1D_1$ (рисунок 59). Объясните, почему эти пирамиды равны и найдите площади их полных поверхностей.

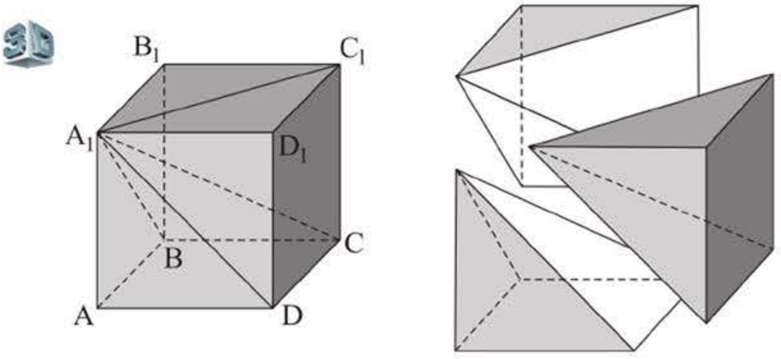


Рисунок 59

84. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если ее диагональным сечением является:

а) прямоугольный треугольник, площадь которого равна 32 см^2;

б) правильный треугольник, площадь которого равна $2\sqrt{3}$ дм^2.

85. а) Основанием пирамиды $PABC$ является ΔABC, в котором $AB = 21$ см, $BC = 8$ см, $AC = 15$ см. Известно, что $PA \perp (ABC)$, $PA = 3{,}5\sqrt{5}$ см. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

б) Высотой пирамиды $PABC$ является отрезок PA, равный 5 дм. Найдите площадь полной поверхности этой пирамиды, если $AB = 13$ дм, $BC = 14$ дм, $AC = 15$ дм.

86. Палатка имеет форму пирамиды $PABCD$ с основанием – прямоугольником $ABCD$, причем $AB = 2$ м, $BC = 2{,}5$ м. Ее ребро PB, равное 2 м, перпендикулярно основанию. Найдите с точностью до 0,1 м^2 сколько квадратных метров брезента израсходовано на изготовление этой палатки, если на швы уходит 2 % площади ее боковой поверхности.

Уровень С

87. В треугольной пирамиде $PABC$ ребро PC является ее высотой, $AC = 17$ см, $BC = m$ см, угол PBC вдвое больше угла PAC (рисунок 60). Найдите высоту пирамиды и все допустимые значения переменной m.

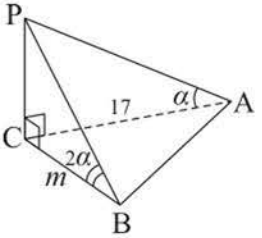


Рисунок 60

88. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна a, а острый угол β. Известно, что две боковые грани пирамиды, угол между которыми равен β, перпендикулярны ее основанию, а одна из двух других наклонена к плоскости основания под углом φ (рисунок 61). Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

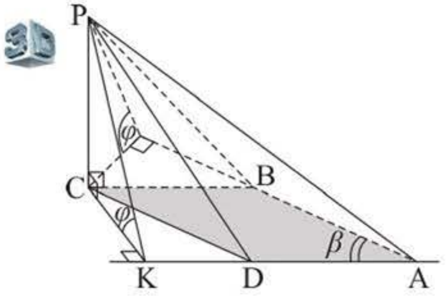


Рисунок 61

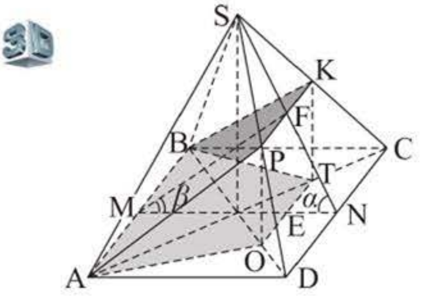


Рисунок 62

89. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна c, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α. Через сторону основания проведена плоскость, образующая с ним угол β ($\beta < \alpha$). Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью (рисунок 62).

4. Усеченная пирамида. Площадь поверхности усеченной пирамиды

Учебные достижения по изучению темы:
- знать определения усеченной пирамиды и ее элементов, виды пирамид;
- уметь строить развертки усеченных пирамид;
- уметь решать задачи на нахождение элементов усеченных пирамид;
- знать формулы площадей поверхностей усеченных пирамид различных видов;
- уметь выводить эти формулы и применять их при решении задач.

Многогранник, вершинами которого являются вершины основания *n*-угольной пирамиды и вершины многоугольника – ее сечения плоскостью, параллельной основанию, называется *n*-угольной усеченной пирамидой.

Например, на рисунке 63 многогранник $A_1A_2 \ldots A_nB_1B_2 \ldots B_n$ – усеченная пирамида. Многоугольники $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ называются **основаниями** усеченной пирамиды, трапеции $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, … , $A_nB_nB_1A_1$ – *боковыми гранями* усеченной пирамиды. Отрезок, перпендикулярный основаниям, концы которого принадлежат им, называется **высотой** усеченной пирамиды, длина этого отрезка также называется ее высотой. Сечение усеченной пирамиды, содержащее ее боковое ребро и диагональ основания, называется ее **диагональным сечением.**

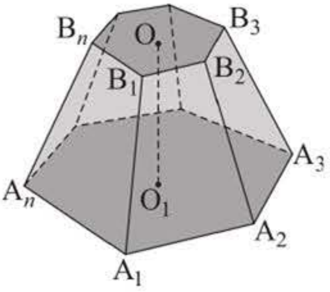


Рисунок 63

Многогранник, вершинами которого являются вершины основания правильной пирамиды и вершины ее сечения, параллельного основанию, называется **правильной усеченной пирамидой.** Все боковые грани правильной усеченной пирамиды являются равными равнобедренными трапециями, высоты этих трапеций называются **апофемами** правильной усеченной пирамиды. Например, на рисунке 64 изображена правильная треугольная усеченная пирамида, стороны оснований которой равны a и b, апофема – l.

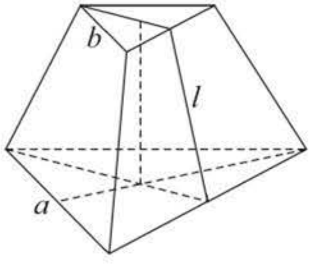


Рисунок 64

Чтобы построить усеченную пирамиду, можно разделить три боковых ребра полной пирамиды в одном и том же отношении, считая от вершины, и провести через три полученные точки деления плоскость. Эта плоскость единственная, она отсечет от полной пирамиды усеченную пирамиду, так как сечением полной пирамиды этой плоскостью является многоугольник, параллельный и подобный основанию полной пирамиды.

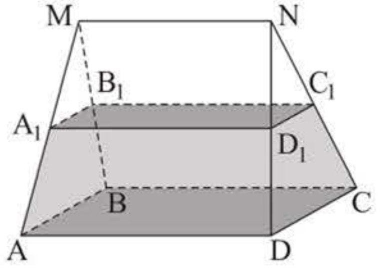


Рисунок 65

Отметим, что не всякий многогранник, две грани которого лежат в параллельных плоскостях, а остальные грани – трапеции, будет усеченной пирамидой. Например, на рисунке 65 изображен такой многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$, отсеченный от многогранника $MNABCD$.

Площадью полной поверхности усеченной пирамиды называется сумма площадей всех ее граней, а площадью *боковой поверхности* усеченной пирамиды – сумма площадей всех ее боковых граней. Площадь $S_{\text{п.п.}}$ полной поверхности пирамиды выражается через площадь $S_{\text{бок.}}$ боковой поверхности и площади S_1 и S_2 ее оснований формулой: $\boldsymbol{S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2}$.

Теорема. **Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на апофему.**

$$S_{\text{бок.}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l.$$

Доказательство проведите самостоятельно.

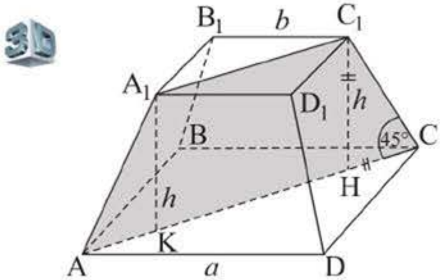


Рисунок 66

Задача 1. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде площади оснований равны S_1 и S_2 ($S_1 > S_2$), а боковое ребро наклонено к основанию под углом 45°. Найти площадь диагонального сечения этой пирамиды.

Решение. Пусть дана правильная четырехугольная усеченная пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок 66). Искомая площадь равна площади равнобедренной трапеции AA_1C_1C.

$$S_{AA_1C_1C} = \frac{AC + A_1C_1}{2} \cdot h = \frac{AC + A_1C_1}{2} \cdot \frac{AC - A_1C_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{AC^2}{2} - \frac{A_1C_1^2}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(S_1 - S_2).$$

О т в е т. $0{,}5(S_1 - S_2)$.

З а д а ч а 2. Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники. Сторона нижнего основания равна 2 м, одно из ее боковых ребер – 1,5 м, а сторона верхнего основания и каждое из остальных ее боковых ребер – 1 м. Найти двугранный угол пирамиды при стороне основания, противолежащей большему боковому ребру, и изобразить высоту пирамиды, из которой получена данная усеченная пирамида.

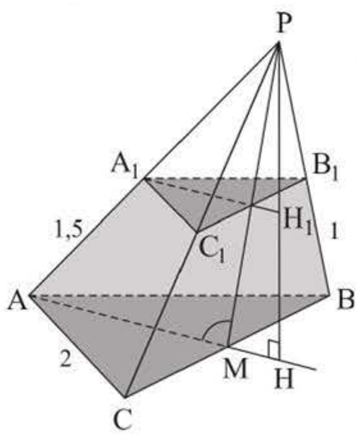


Рисунок 67

Р е ш е н и е. Пусть в усеченной пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ $AB = BC = AC = 2$ м, $AA_1 = 1{,}5$ м, $A_1B_1 = A_1C_1 = B_1C_1 = BB_1 = CC_1 = 1$ м. Достроим ее до пирамиды $PABC$ (рисунок 67).

Из условия задачи следует, что $\Delta PBC \sim \Delta PB_1C_1$ и $\Delta PAC \sim \Delta PA_1C_1$ с коэффициентом подобия, равным 2, следовательно, $PB_1 = PC_1 = 1$ м, $PA_1 = 1{,}5$ м.

Значит, $\Delta PBC = \Delta ABC$ и равны их высоты: $PM = AM = \sqrt{3}$ м.

Из ΔAPM найдем: $\cos\angle PMA = \dfrac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 3^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}$. Следовательно, $\angle PMA = 120°$, а основание высоты PH пирамиды лежит на продолжении медианы AM.

О т в е т. 120°.

З а д а ч а 3. Найти площадь боковой поверхности правильной треугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 12 м и 6 м, а ее высота 1 м.

Р е ш е н и е. Пусть дана правильная усеченная пирамида $ABCA_1B_1C_1$, в которой $AB = 12$ м, $A_1B_1 = 6$ м, высота $N_1H = 1$ м, апофема N_1N (рисунок 68). Искомую площадь найдем, используя формулу $S_{бок.} = \dfrac{3 \cdot AB + 3 \cdot A_1B_1}{2} \cdot N_1N$.

Апофему N_1N найдем из прямоугольного ΔN_1HN. В нем $HN = ON - O_1N_1 = \dfrac{12\sqrt{3}}{6} - \dfrac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$ (м), тогда $N_1N = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ (м).

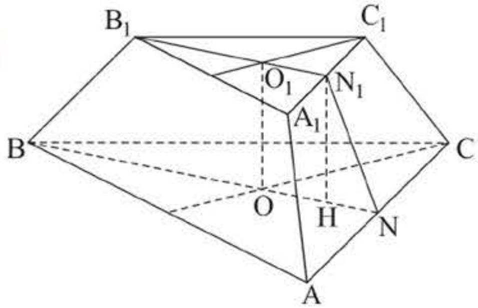


Рисунок 68

$S_{бок} = \frac{1}{2}(36 + 18) \cdot 2 = 54$ (м^2).

Ответ. 54 м^2.

ВОПРОСЫ

1. Что называется усеченной пирамидой?

2. Какая усеченная пирамида называется правильной?

3. Что такое апофема правильной усеченной пирамиды?

4. Что называется площадью полной поверхности и площадью боковой поверхности усеченной пирамиды?

5. По какой формуле можно найти площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

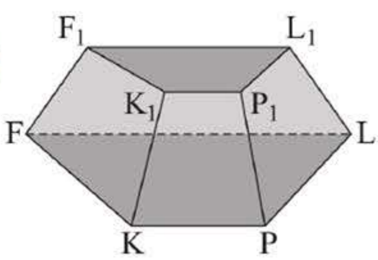


Рисунок 69

90. Объясните, почему не является усеченной пирамидой многогранник, изображенный на рисунке 69.

91. а) Верно ли, что число ребер любой n-угольной усеченной пирамиды делится на $3n$?

б) Может ли высота усеченной пирамиды быть равной одному из ее боковых ребер?

в) Могут ли боковые ребра усеченной пирамиды быть равными, если ее основаниями являются ромбы, но не квадраты?

92. а) Постройте треугольную усеченную пирамиду, площади оснований которой относятся как 1 : 4.

б) В пирамиде через точку M ее высоты PO проведено сечение, параллельное основанию, площадь которого вдвое меньше площади основания. В каком отношении точка M делит высоту PO?

93. Верно ли, что если основаниями усеченной пирамиды являются прямоугольники и одно из ее боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, то все ее боковые грани – прямоугольные трапеции? Ответ объясните.

94. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 8 см и 4 см, а угол между ее боковым ребром и плоскостью основания равен 45°. Найдите: а) высоту этой усеченной пирамиды; б) площадь ее диагонального сечения.

95. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 8 см и 16 см, а ее боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите высоту этой усеченной пирамиды.

96. Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды равны 5 см и 11 см, а ее высота – 13 см. Найдите апофему данной усеченной пирамиды.

97. В правильной усеченной пирамиде стороны оснований равны 4 см и 6 см, ее апофема равна $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности этой усеченной пирамиды, если ее основания:
а) четырехугольники; б) треугольники.

98. Найдите площадь полной поверхности правильной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 8 см и 6 см, если она:
а) четырехугольная и ее высота равна 7 см;
б) шестиугольная и ее высота равна $2\sqrt{6}$ см.

99. Найдите площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 12 см и 18 см, если она:
а) треугольная и ее высота равна $3\sqrt{21}$ см;
б) четырехугольная и угол в ее боковой грани равен 60°.

100. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны 15 дм и 5 дм, а площадь диагонального сечения – $40\sqrt{3}$ дм^2. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

101. а) В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны $4\sqrt{3}$ см и $10\sqrt{3}$ см. Найдите площадь ее боковой поверхности, если острый двугранный угол при ребре основания равен 60°.

б) Диагонали оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 12 см и 4 см, а двугранный угол при ребре нижнего основания равен 45°. Найдите площадь боковой поверхности этой усеченной пирамиды.

102. Стороны оснований и высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся как 10 : 4 : 4, а площадь ее боковой поверхности равна 280 см^2. Найдите площади оснований этой пирамиды.

103. Площадь основания правильной треугольной пирамиды – $16\sqrt{3}$ см^2, ее апофема равна 10 см. Через середину высоты пирамиды построено сечение плоскостью, параллельной основанию. Найдите площадь полной поверхности получившейся при этом усеченной пирамиды.

104. Апофема правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 5 см, а средняя линия боковой грани – 9 см. Синус двугранного угла при ребре нижнего основания равен $\frac{4}{5}$. Найдите площадь полной поверхности этой усеченной пирамиды.

105. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 4 дм, а боковое ребро – 3 дм. Установите, что многогранник $ABCMB_1N$, где точки M и N – середины отрезков A_1B_1 и B_1C_1 соответственно, является усеченной пирамидой, и найдите площадь ее боковой поверхности.

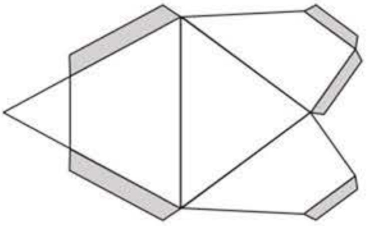


Рисунок 70

106. а) Отрезок B_1B, равный 9 см, является высотой треугольной усеченной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$. Известны стороны нижнего основания $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. Найдите площадь боковой поверхности этой усеченной пирамиды, если отношение площадей ее верхнего и нижнего оснований равно $\frac{4}{25}$.

б) Изготовьте модель усеченной пирамиды, данной в задаче а). На рисунке 70 показана уменьшенная развертка этой усеченной пирамиды с клапанами для склеивания.

Уровень В

107. Площадь основания пирамиды равна 512 см^2, а ее высота равна 16 см. На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное ему, площадь которого равна 50 см^2?

108. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды относятся как $1:2$, а ее высота равна 6 см. Найдите площади оснований этой пирамиды, если угол между ее боковой гранью и плоскостью основания равен $45°$.

109. Две боковые грани усеченной треугольной пирамиды – равные прямоугольные трапеции с острым углом $45°$ и общей меньшей боковой стороной. Двугранный угол между этими гранями равен $120°$. Найдите тангенс угла наклона третьей боковой грани этой пирамиды к ее основанию.

110. Один из барханов имеет форму правильной треугольной усеченной пирамиды, стороны основания которой равны 50 м и 2 м, а площадь боковой грани равна 988 м^2. Найдите с точностью до 1 м высоту бархана.

Поющий бархан, Национальный парк «Алтын-Эмель», Алматинская область

111. Верно ли, что если двугранные углы при боковых ребрах треугольной усеченной пирамиды равны, то площадь ее боковой поверхности равна половине произведения суммы периметров ее оснований на высоту любой боковой грани?

112. Ортогональной проекцией вершины треугольной пирамиды является центр окружности, вписанной в ее основание, стороны которого равны 20 см, 16 см и 12 см. Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, отделило от нее усеченную пирамиду, площади оснований которой относятся как $9:16$. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды, если ее высота равна $4\sqrt{3}$ см.

113. Каждое боковое ребро правильной шестиугольной усеченной пирамиды равно $\sqrt{2}$ дм и наклонено к плоскости нижнего основания под углом 45°. Какова площадь ее боковой поверхности, если отношение площадей оснований усеченной пирамиды равно 4?

114. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды относятся как $1:2$, ее высота равна $2\sqrt{3}$ см, а боковое ребро наклонено к плоскости нижнего основания под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

115. Боковые грани треугольной усеченной пирамиды – равнобедренные трапеции, сумма оснований каждой из которых равна 12 см. Высота каждой трапеции равна 4 см, а прямые, содержащие их боковые стороны, пересекаются под прямым углом. Найдите площадь боковой поверхности этой усеченной пирамиды.

Уровень C

116. Нижним основанием усеченной пирамиды является трапеция, параллельные стороны которой равны b и $2b$, а один из острых углов 60°. Высота усеченной пирамиды равна $0{,}25b$, а ее боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды, если площади ее оснований относятся как 1 : 4

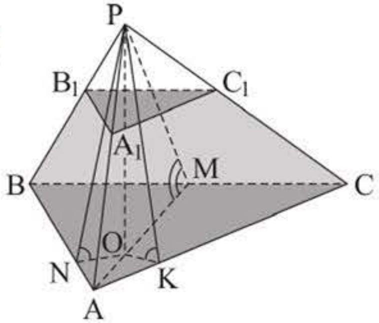


Рисунок 71

117. Каждая сторона нижнего основания усеченной треугольной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ равна 1 дм, а ее двугранные углы при этих сторонах относятся как 1 : 2 : 2. Найдите с точностью до 1° меньший из этих углов, если расстояние от основания высоты полной пирамиды $PABC$ до стороны BC равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$ дм (рисунок 71).

118. а) Известно, что в основание четырехугольной усеченной пирамиды можно вписать окружность, а каждая ее боковая грань наклонена к нему под углом 75°. Найдите площадь боковой поверхности этой усеченной пирамиды, если ее высота равна h, а суммы двух соседних сторон нижнего и верхнего оснований соответственно равны p и q.

б) Основаниями четырехугольной усеченной пирамиды являются ромбы, меньшие диагонали которых равны m и n, а острые углы – 45°. Найдите площадь ее поверхности, если каждая боковая грань наклонена к нижнему основанию под углом 60°.

5. Многогранный угол и его свойства

Учебные достижения по изучению темы:

• знать понятие многогранного угла и его свойства;

• уметь применять их при решении задач.

Трехгранным углом $PA_1A_2A_3$ называется фигура, образованная углами A_1PA_2, A_2PA_3, A_3PA_1, не лежащими в одной плоскости, и ограниченной ими части пространства (рисунок 72, *а*). Аналогично определяется понятие **многогранного угла** $PA_1A_2 \ldots A_n$ (рисунок 72, *б*). Плоские углы A_1PA_2, $A_2PA_3, \ldots, A_nPA_1$ называются *гранями* многогранного угла, их общая вершина P – *вершиной*, а лучи $PA_1, PA_2, \ldots, PA_n$ – *ребрами* многогранного угла $PA_1A_2 \ldots A_n$.

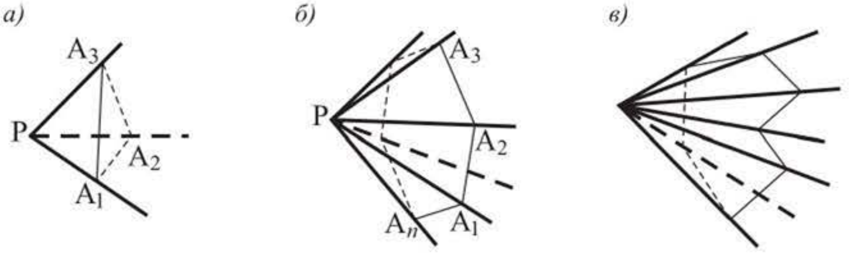


Рисунок 72

Многогранные углы, как и многогранники, могут быть выпуклыми (рисунки 72, *а*, *б*) и невыпуклыми (рисунок 72, *в*). Любой трехгранный угол – выпуклый.

Каждое множество всех плоских углов при любой вершине многогранника образует вместе с ограниченной ими частью пространства многогранный угол.

Теорема. **В трехгранном угле сумма двух плоских углов больше третьего плоского угла.**

Доказательство. Пусть дан трехгранный угол $PA_1A_2A_3$. Если все плоские углы при вершине P равны, то утверждение верно.

Пусть $\angle A_1PA_3 > \angle A_2PA_3 \geq \angle A_1PA_2$. В плоскости грани A_1PA_3 построим угол A_3PF, равный углу A_2PA_3 (рисунок 73). На лучах PA_2 и PF отложим равные отрезки PC и PF. Построим сечение данного трехгранного угла – ΔBCD, стороне BD которого принадлежит точка F.

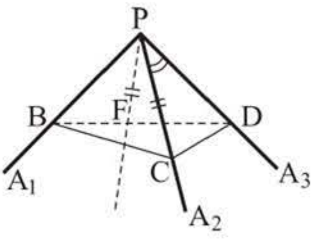


Рисунок 73

В ΔBCD имеем: $BD < BC + CD$. Поскольку $FD = CD$, то $BD - FD < BC + CD - CD$, $BF < BC$. В треугольниках BPF и BPC есть по две равные стороны, следовательно, против их большей стороны лежит и больший угол: $\angle BPC > \angle BPF$.

Поскольку $\angle CPD = \angle FPD$, то $\angle BPC + \angle CPD > \angle FPD + \angle BPF$. Следовательно, $\angle BPC + \angle CPD > \angle BPD$. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что *в треугольной пирамиде сумма двух плоских углов при любой вершине больше третьего плоского угла при этой вершине.*

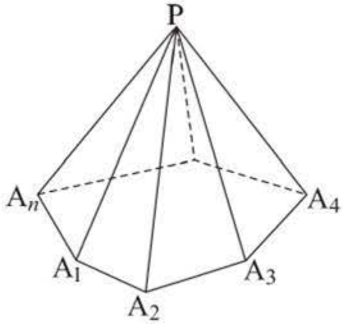


Рисунок 74

Теорема. **В выпуклом многогранном угле сумма всех плоских углов меньше 360°.**

Доказательство. Плоскость $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, пересекающая каждое ребро многогранного угла с вершиной P, отделяет от него пирамиду $PA_1A_2A_3 \ldots A_n$ (рисунок 74). Далее доказательство теоремы сводится к многократному применению предыдущей теоремы для плоских углов с вершинами $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.

$$(+)\begin{cases} \angle A_nA_1A_2 < \angle PA_1A_n + \angle PA_1A_2 \text{ (при вершине } A_1\text{);} \\ \angle A_1A_2A_3 < \angle PA_2A_1 + \angle PA_2A_3 \text{ (при вершине } A_2\text{);} \\ \angle A_2A_3A_4 < \angle PA_3A_2 + \angle PA_3A_4 \text{ (при вершине } A_3\text{);} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \angle A_{n-1}A_nA_1 < \angle PA_nA_{n-1} + \angle PA_nA_1 \text{ (при вершине } A_n\text{).} \end{cases}$$

Обозначим сумму всех плоских углов при вершине P через x, тогда $x = \angle A_nPA_1 + \angle A_1PA_2 + \angle A_2PA_3 + \ldots + \angle A_{n-1}PA_n$. Сложив левые и правые части всех этих неравенств и прибавив x к обеим частям полученного неравенства, имеем: $180° \cdot (n - 2) + x < 180° \cdot n$, откуда $x < 360°$. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что *в выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой вершине меньше 360°.*

Эта теорема имеет простое наглядное истолкование. Если мы хотим из листа картона склеить n-угольную пирамиду, то сумма плоских углов при вершине пирамиды должна быть меньше 360°. Если бы сумма плоских углов при ее вершине была равна 360°, то они образовали бы плоскость, в которой лежат смежные грани пирамиды, что невозможно.

З а д а ч а 1. В трехгранном угле $PABC$ каждый из плоских углов равен 45°. Найти двугранный угол при ребре PA.

Р е ш е н и е. Отложим от вершины P на ребрах данного трехгранного угла равные отрезки $PM = PN = PK = a$ (рисунок 75). Тогда тетраэдр $PMKN$ – правильная треугольная пирамида с основанием MKN. Двугранный угол при ребре PM этой пирамиды является двугранным углом при ребре PA трехгранного угла $PABC$. Пусть искомый $\angle NEK = x$. Из прямоугольных треугольников NEP и KEP находим: $NE = KE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

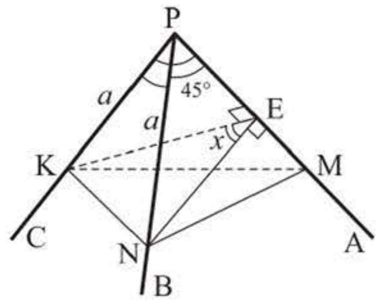


Рисунок 75

В ΔNPK $KN^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2(2 - \sqrt{2})$. Из ΔNEK находим: $\cos x =$
$$= \frac{KE^2 + NE^2 - KN^2}{2KE \cdot EN} = \frac{a^2 - a^2(2-\sqrt{2})}{a^2} = \sqrt{2} - 1.$$ Отсюда $x = \arccos(\sqrt{2} - 1)$.

О т в е т. $\arccos(\sqrt{2} - 1)$.

З а д а ч а 2. Доказать, что сумма двугранных углов трехгранного угла больше 180°.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дан трехгранный угол $OABC$. Обозначим величины двугранных углов при ребрах OA, OB, OC соответственно α, β, γ.

Докажем, что $\alpha + \beta + \gamma > 180°$. Для этого возьмем произвольную точку P, принадлежащую внутренней области данного трехгранного угла, и проведем перпендикуляры PM, PN и PK к его граням (рисунок 76). Тогда углы MPN, MPK и KPN являются плоскими углами трехгранного угла $PMNK$. Так как $\alpha = 180° - \angle MPN$, $\beta = 180° - \angle MPK$, $\gamma = 180° - \angle NPK$, то $\alpha + \beta + \gamma = 540° - (\angle MPN + \angle MPK + \angle NPK)$. Учитывая, что сумма плоских углов трехгранного угла $PMNK$ меньше 360°, получим $\alpha + \beta + \gamma > 180°$. Что и требовалось доказать.

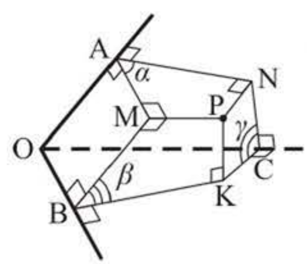


Рисунок 76

ВОПРОСЫ

1. Что называется трехгранным углом?
2. Изобразите выпуклый четырехгранный угол.

3. Сформулируйте свойство плоских углов: а) трехгранного угла; б) выпуклого многогранного угла.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

119. Дана шестиугольная пирамида.

а) Сколько многогранных углов при ее вершинах?

б) Имеются ли: 1) трехгранные; 2) четырехгранные; 3) шестигранные углы при ее вершинах, если имеются, то сколько их?

120. Существует ли трехгранный угол, имеющий следующие плоские углы: а) 130°, 85°, 36°; б) 100°, 70°, 40°; в) 160°, 130°, 80°; г) 82°, 56°, 26°; д) 150°, 120°, 90°?

121. Существует ли трехгранный угол с плоскими углами α, β, γ, где α – наибольший из них, если: а) $\alpha = \beta + \gamma$; б) $\alpha > \beta + \gamma$; в) $\alpha < \beta + \gamma$; г) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ и $\alpha < \beta + \gamma$?

122. В трехгранном угле двугранные углы при его ребрах равны φ, δ, ω. Выберите верное утверждение: а) $\varphi + \delta + \omega = 180°$; б) $\varphi + \delta + \omega > 180°$; в) $\varphi + \delta + \omega < 360°$.

123. Докажите, что в четырехгранном угле любой плоский угол меньше суммы всех остальных его плоских углов.

124. В трехгранном угле $PABC$ двугранный угол при ребре PC – прямой, двугранный угол при ребре PB равен 45°, а плоский угол APB равен 60° (рисунок 77). Найдите два других плоских угла.

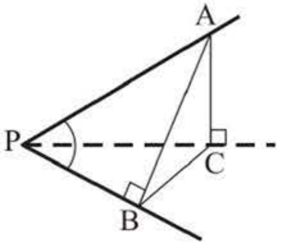


Рисунок 77

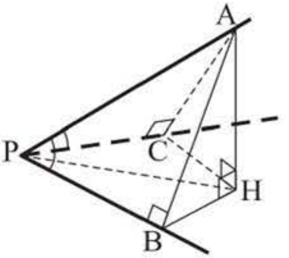


Рисунок 78

125. Дан трехгранный угол $PABC$, в котором плоские углы APB и APC равны. Используя рисунок 78, докажите, что и двугранные углы при ребрах PB и PC равны.

126. а) В трехгранном угле $PABC$ все плоские углы равны по 60°. Найдите двугранные углы при его ребрах PB и PC.

б) В трехгранном угле $PABC$ двугранные углы при его ребрах PB и PC равны по 60°, а плоский угол CPB равен 120°. Найдите два других его плоских угла.

127. Каждый плоский угол четырехгранного угла $PABCD$ равен 60°. Найдите угол APC, если углы APC и BPD равны.

128. В пирамиде $DABC$ все плоские углы при вершине A – прямые. Найдите площадь поверхности этой пирамиды, если $DA = 12$ см, $DB = 20$ см, $DC = 15$ см.

Уровень B

129. В треугольной пирамиде $SABC$ $\angle ASB = \angle CSB = 90°$, $\angle ASC = 120°$, $AS = 4$ дм, $SB = 3$ дм, $SC = 2$ дм. Найдите площадь ΔABC.

130. В трехгранном угле $OABC$ плоский угол BOC равен γ ($\gamma < 90°$), двугранный угол при ребре OC прямой, двугранный угол при ребре OB равен φ ($\varphi < 90°$). Докажите, что: а) $\operatorname{tg}\angle AOB = \dfrac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi}$; б) $\operatorname{tg}\angle AOC = \sin\gamma \cdot \operatorname{tg}\varphi$.

131. Найдите двугранный угол при боковом ребре правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания и высота пирамиды соответственно равны a и $2a$.

Уровень C

132. Докажите, что если в тетраэдре $PABC$ сумма плоских углов при каждой из вершин A, B, C равна 180°, то все его грани равны.

133. Найдите плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды, если он равен углу наклона бокового ребра к плоскости основания.

134. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Найдите угол между ее боковыми ребрами SD и SC, если:
а) $\angle ASC = 2\alpha$; б) $\angle((DSC), (BSC)) = 2\beta$.

6. Правильные многогранники

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определение правильного многогранника, виды правильных многогранников и их свойства;

• уметь распознавать правильные многогранники различных видов;

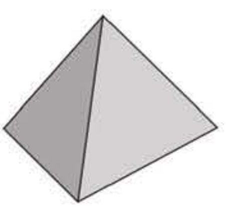
• уметь применять правильные многогранники и их свойства при решении задач.

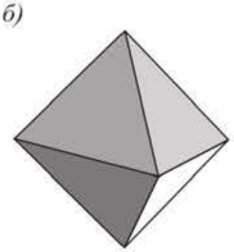
Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани – равные правильные многоугольники, и в каждой вершине сходится одинаковое число ребер.

Теорема. **Существует пять различных видов правильных многогранников.**

Доказательство. Используем свойство суммы плоских углов при вершине выпуклого многогранника. Пусть из одной вершины исходит n ребер ($n \geq 3$), тогда плоских углов при этой вершине тоже n, причем все они равны между собой. Пусть один из плоских углов равен $x°$, тогда сумма всех плоских углов при этой вершине равна $nx°$. По свойству суммы плоских углов $nx° < 360°$.

1) Пусть грани правильного многогранника – правильные треугольники. Тогда в одной вершине их может сходиться 3, 4 и 5, так как $60° \cdot 3 < 360°$, $60° \cdot 4 < 360°$, $60° \cdot 5 < 360°$, но уже $60° \cdot 6 = 360°$. Соответствующие правильные многогранники – правильный *тетраэдр* (четырехгранник), правильный *октаэдр* (восьмигранник), правильный *икосаэдр* (двадцатигранник) (рисунки 79 *а*, *б*, *в*).

а) 

б) 

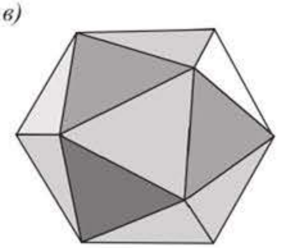
в) 

Рисунок 79

2) Пусть грани правильного многогранника – квадраты. В одной вершине их может сходиться только 3, так как $90° \cdot 3 < 360°$, но уже $90° \cdot 4 = 360°$.

Соответствующий правильный многогранник – хорошо известный всем куб, он же правильный *гексаэдр* (шестигранник) (рисунок 80, *а*).

а) *б)*

Рисунок 80

3) Пусть грани правильного многогранника – правильные пятиугольники. В одной вершине их может сходиться только 3, так как $108° \cdot 3 < 360°$, но уже $108° \cdot 4 > 360°$. Соответствующий правильный многогранник – правильный *додекаэдр* (двенадцатигранник) (рисунок 80, *б*). Шестиугольными, семиугольными и более грани правильного многогранника не могут быть, так как уже даже $120° \cdot 3 = 360°$. Теорема доказана.

В каждом из правильных многогранников имеется единственная точка, равноудаленная как от его граней, так и от вершин, которая называется **центром** правильного многогранника.

Для того чтобы установить, что перечисленные пять видов правильных многогранников действительно существуют, их надо построить. Строить куб и правильный тетраэдр вы уже умеете. Заметим, что если в кубе провести диагонали граней, как показано на рисунке 81, *а*, то получим еще один способ построения правильного тетраэдра. Если в кубе построить центры всех его граней, то шесть полученных точек будут вершинами правильного октаэдра (рисунок 81, *б*).

а) *б)*

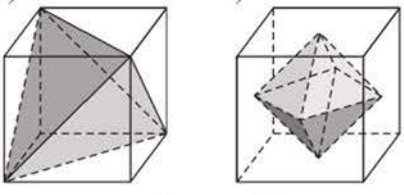


Рисунок 81

а) *б)*

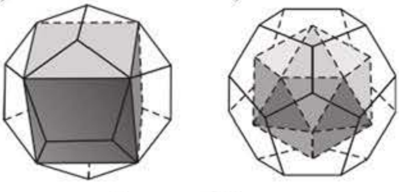


Рисунок 82

Если через каждое ребро куба провести плоскость, не имеющую с его поверхностью других общих точек, кроме точек этого ребра, то получим некоторый двенадцатигранник. При определенном наклоне этих плоскостей к граням куба, гранями этого двенадцатигранника будут равные правильные пятиугольники, то есть получим правильный додекаэдр (рисунок 82, *а*).

Центры граней правильного додекаэдра являются вершинами правильного икосаэдра (рисунок 82, *б*).

В каждом правильном многограннике равны все двугранные углы при его ребрах. (Докажите это самостоятельно.)

В следующей таблице указано число граней (Г), вершин (В) и ребер (Р) каждого правильного многогранника.

Виды правильного многогранника	**Г**	**В**	**Р**
Правильный тетраэдр	4	4	6
Правильный гексаэдр	6	8	12
Правильный октаэдр	8	6	12
Правильный додекаэдр	12	20	30
Правильный икосаэдр	20	12	30

Отметим, что для любого правильного многогранника, как и для любого выпуклого многогранника, выполняется равенство **Г + В − Р = 2**. Это замечательное свойство выпуклых многогранников называют *эйлеровой характеристикой* в честь открывшего его выдающегося швейцарского математика Леонарда Эйлера (1707–1789).

Докажем это свойство методом математической индукции.

1) Для тетраэдра формула верна (проверьте самостоятельно).

2) Допустим, что формула Г + В – Р = 2 верна для выпуклого многогранника, имеющего n граней.

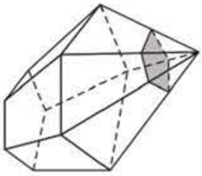


Рисунок 83

3) Докажем, что она верна и для многогранника, в котором $(n + 1)$ граней. Для этого вблизи какой-либо вершины выпуклого n-гранника построим его сечение, плоскость которого пересекает каждое ребро, выходящее из этой вершины (рисунок 83). Тогда число граней в отсеченном многограннике, не содержащем указанную вершину, станет на одну больше. Пусть в указанной вершине сходится k ребер, тогда в новом многограннике вершин станет на $(k - 1)$ больше, а число ребер увеличится на k. Тогда для нового многогран-

ника имеем: (Г + 1) + (В + k – 1) – (Р + k) = Г + В – Р = 2. Следовательно, указанная формула верна для любого выпуклого многогранника.

Модели правильных многогранников можно наблюдать в окружающей действительности, они используются в архитектуре и строительстве (рисунок 84).

Рисунок 84

Задача 1. Найти площади диагональных сечений правильного октаэдра, ребро которого равно a.

Решение. Пусть дан правильный октаэдр $EABCDF$ (рисунок 85). Докажем, что диагональные сечения $ABCD$, $AECF$, $BEDF$ октаэдра являются квадратами.

1) В равных равнобедренных треугольниках AEF, BEF, CEF, DEF медианы AO, BO, CO, DO равны и являются высотами. Следовательно, прямые AO, BO, CO, DO перпендикулярны прямой EF. Так как через точку O можно провести только одну плоскость, перпендикулярную прямой EF, то точки A, B, C, D лежат в одной плоскости и четырехугольник $ABCD$ – квадрат.

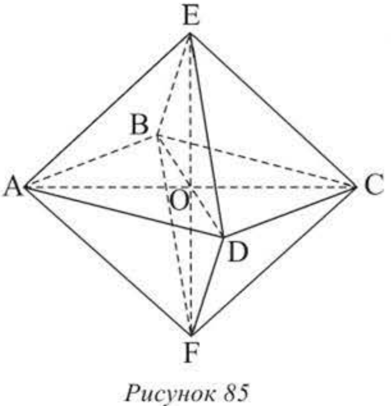


Рисунок 85

2) Аналогично, рассматривая треугольники BDA, BDE, BDC, BDF, устанавливаем, что четырехугольник $AECF$ – квадрат, а рассматривая треугольники ABC, AEC, ADC, AFC, устанавливаем, что четырехугольник $BEDF$ – квадрат.

3) Рассмотренные квадраты равны, поэтому площадь каждого диагонального сечения данного правильного октаэдра равна a^2.

Ответ. a^2.

З а д а ч а 2. Найти с точностью до 1 $см^2$ площадь полной поверхности правильного додекаэдра, ребро которого равно 3 см.

Р е ш е н и е. У правильного додекаэдра 12 граней, которые являются равными правильными пятиугольниками. Чтобы найти площадь одного такого пятиугольника, можно разбить его на пять равных треугольников, соединив его вершины с центром O пятиугольника (рисунок 86). Тогда $\angle AOB = 72°$, высота $OH = \frac{3}{2 \cdot \operatorname{tg} 36°}$, а площадь S_1 пятиугольника равна $S_1 = \frac{5 \cdot 9}{4 \cdot \operatorname{tg} 36°}$. Искомая площадь равна $S = 12 \cdot S_1 = \frac{135}{\operatorname{tg} 36°} \approx \frac{135}{0{,}727} \approx 186$ ($см^2$).

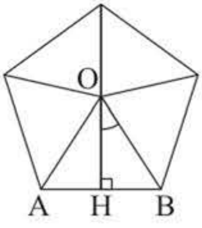


Рисунок 86

О т в е т. ≈ 186 $см^2$.

З а д а ч а 3. Дан куб с ребром, равным $\sqrt{2}$ дм. Построить сечение куба, являющееся правильным шестиугольником. Найти сторону квадрата, вершины которого лежат на сторонах этого шестиугольника, а две оси симметрии квадрата и шестиугольника совпадают.

Р е ш е н и е. Шестиугольник, вершинами которого являются, например, середины M, N, K, L, F, E соответственно ребер AB, BB_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1D, AD данного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, – правильный. Поскольку каждая его сторона равна 1 дм (по теореме Пифагора), а равенство углов шестиугольника $MNKLFE$ следует из равенства треугольников MON, NOK, KOL, LOF, FOE, EOM, где точка O – центр куба, которая равноудалена от вершин шестиугольника и принадлежит его плоскости (рисунок 87, *а*). Используя метод подобия, впишем в этот шестиугольник квадрат, как показано на рисунке 87, *б*.

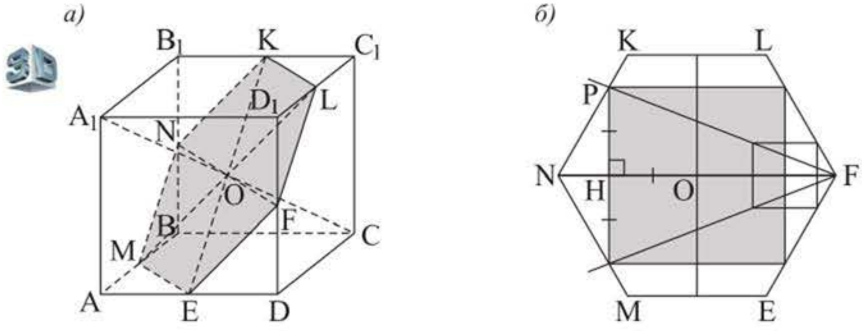


Рисунок 87

Найдем сторону этого квадрата. В ΔNPO высота PH равна отрезку HO – половине стороны квадрата. Пусть $PH = HO = x$ дм, тогда $NH = 1 - x$

и $NH = x \cdot \text{ctg}\, 60° = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $1 - x = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

Тогда искомая длина равна $(3 - \sqrt{3})$ дм.

О т в е т. $(3 - \sqrt{3})$ дм.

ВОПРОСЫ

1. Что называется правильным многогранником?

2. Сколько всего видов правильных многогранников существует? Как они называются?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

135. Верно ли, что правильным многогранником является многогранник, в котором все грани:

а) равны; б) правильные многоугольники?

136. Изобразите многогранник, составленный из двух равных правильных тетраэдров. Объясните, почему он не является правильным многогранником.

137. Является ли правильным гексаэдром прямоугольный параллелепипед, если:

а) его диагональное сечение – квадрат;

б) в нем равны диагонали трех граней, выходящие из одной вершины?

138. Чему равна сумма плоских углов при каждой вершине правильного:

а) тетраэдра; б) гексаэдра; в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра?

139. Можно ли из куска проволоки длиной 1 м изготовить каркасную модель:

а) куба с ребром 1 дм;

б) правильного тетраэдра с ребром 1,5 дм;

в) правильного октаэдра с ребром 0,5 дм?

140. Из деревянного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выпилена пирамида D_1AB_1C. Найдите отношение площадей полных поверхностей этих куба и пирамиды.

141. В правильном многограннике 8 граней. Найдите:

а) угол между двумя его ребрами, выходящими из одной вершины;

б) косинус двугранного угла при его ребре.

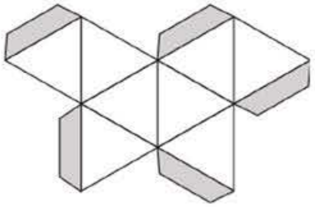


Рисунок 88

142. Изготовьте модель правильного октаэдра, ребро которого равно 8 см. На рисунке 88 показана развертка октаэдра с клапанами для склеивания.

143. Дан правильный многогранник, ребро которого равно 6 см. Найдите расстояние между центрами двух его соседних граней, если этот многогранник: а) тетраэдр; б) октаэдр.

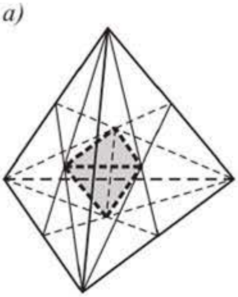
144. Найдите отношение площадей полных поверхностей правильных тетраэдра и октаэдра, ребро каждого из которых равно a.

145. а) Является ли правильным тетраэдром правильная треугольная пирамида, площадь основания которой равна $\sqrt{3}$ дм^2, а ее апофема равна $\sqrt{3}$ дм?

б) Дана правильная треугольная пирамида, сторона основания которой равна $\sqrt{1{,}5}$ дм. Какую длину должна иметь ее высота, чтобы эта пирамида была правильным тетраэдром?

146. Какова площадь полной поверхности правильного тетраэдра, высота которого равна $\sqrt{6}$ м?

а)



б)

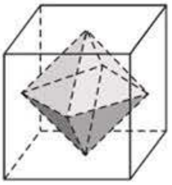


Рисунок 89

147. а) Площадь полной поверхности правильного додекаэдра равна $\frac{135}{\operatorname{tg} 36^\circ}$ см^2. Найдите длину его ребра.

б) Найдите длину ребра правильного икосаэдра, площадь полной поверхности которого равна $80\sqrt{3}$ см^2.

148. Найдите площадь полной поверхности правильного тетраэдра $PABC$, если расстояние между его ребрами AP и BC равно 1 м.

149. Центры граней правильного тетраэдра являются вершинами нового тетраэдра (рисунок 89, *а*). Найдите отношение площадей полных поверхностей этих тетраэдров.

150. Найдите площадь полной поверхности многогранника, изображенного внутри куба на рисунке 89, *б*, если его вершины являются центрами граней куба, а ребро куба равно 4 дм.

Уровень B

151. Докажите, что разверткой боковой поверхности правильного тетраэдра может быть трапеция.

152. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку пересечения его диагоналей и перпендикулярной одной из них. Найдите площадь полученного сечения, если ребро куба равно a.

153. Дан правильный тетраэдр $PABC$ с ребром, равным a. Его сечение плоскостью, параллельной двум его ребрам, лежащим на скрещивающихся прямых, является квадратом $MNKL$. Найдите площадь поверхности пирамиды $PMNKL$.

154. От правильного октаэдра $PABCDF$, ребро которого равно 8 см, отрезали две равные правильные пирамиды с вершинами P и F, боковые ребра которых равны 4 см. Найдите площадь полной поверхности получившегося многогранника.

155. Найдите в Интернете развертки правильных додекаэдра и икосаэдра и изготовьте их модели.

Уровень C

156. Существует ли невыпуклый многогранник, все грани которого – равные правильные многоугольники? Если существует, то изготовьте его модель.

157. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершину B и середины M и N ребер AD и CC_1 проведена плоскость. Найдите угол наклона этой плоскости к плоскости ABC.

158. Докажите, что центры граней правильного октаэдра являются вершинами куба (рисунок 90). Найдите площадь поверхности этого куба, если ребро правильного октаэдра равно b.

159. Для правильного октаэдра $EABCDF$ докажите, что отрезок, соединяющий центры граней BCE и ADF, перпендикулярен плоскостям этих граней и найдите расстояние между ними.

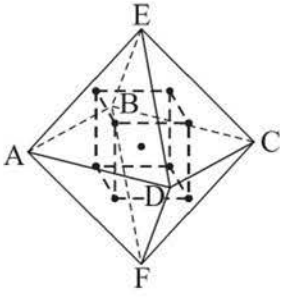


Рисунок 90

7. Упражнения на повторение раздела «Многогранники»

Уровень А

160. Найдите площадь полной поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если: а) площадь его сечения плоскостью AB_1C_1 равна $98\sqrt{2}$ см^2; б) площадь его диагонального сечения равна 1 м^2.

161. а) Угол между диагональю боковой грани правильной треугольной призмы и другой ее боковой гранью равен 30°. Найдите площадь полной поверхности этой призмы, если ее высота равна 2 дм.

б) Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 8 см и наклонена к основанию под углом 75°. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.

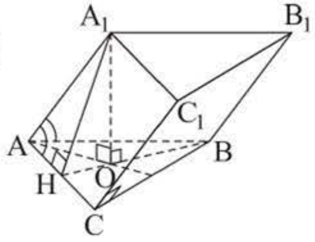


Рисунок 91

162. Расстояния между боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равны a, b, c, а боковое ребро равно n. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

163. Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно 2 дм, а одно из ее боковых ребер образует с соседними сторонами основания углы, равные по 60° (рисунок 91). Найдите площадь полной поверхности призмы.

164. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, диагональное сечение которой равновелико основанию, если сторона основания равна a.

165. а) Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, катеты которого равны 6 см и 8 см. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

б) В треугольной пирамиде стороны основания равны 13 см, 14 см и 15 см, а все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

166. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 12 см и 8 см, а двугранный угол при ребре нижнего основания – 60°. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через две ее апофемы. Рассмотрите все возможные случаи.

167. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной усеченной пирамиды, высоты оснований которой равны $18\sqrt{3}$ см и $12\sqrt{3}$ см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°.

Уровень В

168. Площадь основания правильной треугольной призмы равна $4\sqrt{6}$ дм^2. Найдите площадь сечения призмы, проведенного через сторону одного основания и параллельную ей среднюю линию другого основания, если угол между плоскостью сечения и боковой гранью, содержащей указанную сторону основания, равен 30°.

169. Основание наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб, сторона которого равна a, а острый угол – φ. Вершина A_1 удалена от каждой из точек A, B и D на расстояние, равное a. Найдите площадь четырехугольника BB_1D_1D.

170. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, высота которой равна 8 дм, основанием является равнобедренная трапеция с параллельными сторонами, равными 16 дм и 8 дм, а все ее двугранные углы при сторонах основания равны (рисунок 92).

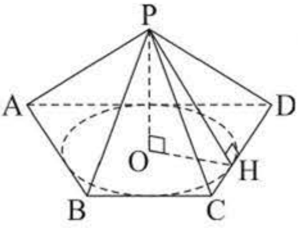


Рисунок 92

171. Ортогональной проекцией вершины треугольной пирамиды является центр окружности, вписанной в ее основание. Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, отделило от нее усеченную пирамиду, площади оснований которой относятся как 4 : 49. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды, если стороны ее нижнего основания и высота соответственно равны: 25 см, 39 см, 56 см и 12 см.

172. В треугольной пирамиде $DABC$ все плоские углы при вершине D прямые. Докажите, что ортогональной проекцией вершины D на плоскость ΔABC является точка пересечения его высот.

173. Дана правильная четырехугольная усеченная пирамида. Найдите площадь ее боковой поверхности, если: а) диагонали ее оснований равны d и l $(d > l)$, а двугранный угол при ребре основания – 60°; б) ее высота равна h, площадь диагонального сечения – Q, а острый двугранный угол при стороне основания – β.

Уровень C

174. Какую наибольшую площадь боковой поверхности может иметь прямоугольный параллелепипед с данной диагональю d и квадратным основанием?

175. Дана пирамида, основанием которой является прямоугольник. Каждое ее боковое ребро равно 9 см и составляет со смежными сторонами основания углы 60° и α. Найдите высоту этой пирамиды и множество допустимых значений α.

176. Боковое ребро правильной десятиугольной пирамиды равно 16, а угол между соседними боковыми ребрами равен φ. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды и множество допустимых значений φ.

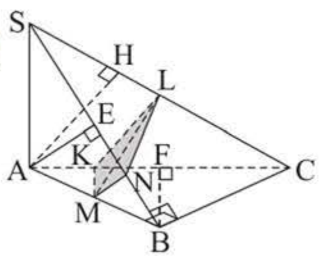


Рисунок 93

177. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является прямоугольный ΔABC с гипотенузой AC, а ее боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину M ребра AB, перпендикулярно ребру SC, $AB = BC = SA = m$ (рисунок 93). Найдите площадь этого сечения.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

Выберите верный ответ

178. Укажите верные утверждения: а) основания призмы равны; б) грани призмы равны; в) все боковые грани призмы являются параллелограммами; г) все грани призмы являются параллелограммами; д) все боковые ребра параллельны между собой.

1) а, в, д;
2) все;
3) все, кроме г;
4) а, г;
5) все, кроме б.

179. Укажите верные утверждения. Не существует пирамиды, имеющей ровно: а) пять; б) шесть; в) семь; г) девять; д) десять ребер.

1) а;
2) в;
3) а, в, г;
4) а, в;
5) все, кроме а.

180. Какое из следующих предложений может быть определением понятия поверхности многогранника? Поверхностью многогранника называется: а) его граница; б) сумма площадей всех его граней; в) множество всех точек, принадлежащих его граням; г) множество всех точек, принадлежащих его поверхности; д) множество всех точек, которые не являются его внутренними точками.

1) все, кроме д;
2) все, кроме г и д;
3) а, в;
4) б;
5) г.

181. Какие из тел являются правильными многогранниками: а) куб; б) правильная призма; в) правильная пирамида; г) тетраэдр, в котором все ребра равны; д) многогранник, в котором все грани – равные n-угольники?

1) а, б, в;
2) все;
3) все, кроме б;
4) а, г;
5) а, д.

182. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 14 см, а сторона основания равна 16 см. Тогда боковое ребро этой пирамиды равно:

1) 15 см;
2) 18 см;
3) 20 см;
4) $\sqrt{330}$ см;
5) $\sqrt{300}$ см.

183. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 5 см, а боковое ребро – 6 см. Тогда площадь полной поверхности этой призмы равна:

1) $(90 + 12{,}5\sqrt{3})$ см^2;
2) $(80 + 18\sqrt{3})$ см^2;
3) 110 см^2;
4) 105 см^2;
5) 120 см^2.

184. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды и ее высота равны a. Тогда площадь полной поверхности этой пирамиды равна:

1) $\frac{3a^2\sqrt{10}}{2}$;
2) $1{,}5a^2(\sqrt{3} + \sqrt{7})$;
3) $3a^2\left(\sqrt{7} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
4) $\frac{3a^2\sqrt{5}}{2}$;
5) $3a^2\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

185. Косинус каждого угла, образованного двумя смежными гранями правильного октаэдра, равен:

1) $\frac{1}{3}$;
2) $-0{,}5$;
3) $0{,}5$;
4) $-\frac{1}{3}$;
5) 0,(6).

186. В прямом параллелепипеде точка пересечения его диагоналей удалена от плоскости основания на 3 см, а от боковых граней на 2 см и 4 см. Периметр основания равен 30 см. Площадь полной поверхности этого параллелепипеда равна:

1) 260 см^2;
2) 240 см^2;
3) 220 см^2;
4) 208 см^2;
5) 176 см^2.

187. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC со стороной, равной $\sqrt{3}$ см. Ортогональной проекцией вершины A_1 является точка пересечения медиан основания, а ребро AA_1 наклонено к плоскости основания под углом 45°. Площадь боковой поверхности этой призмы равна:

1) $3\sqrt{3}$ см^2;
2) $(\sqrt{15}+\sqrt{3})$ см^2;
3) $\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$ см^2;
4) $(\sqrt{6}+\sqrt{15})$ см^2;
5) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ см^2.

Выполните упражнения

188. Сколько граней, ребер, вершин имеет: а) пятиугольная призма; б) шестиугольная пирамида? Изобразите такие многогранники.

189. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб, в котором $\angle BAD = 60°$. Высота призмы равна 8 см. Расстояние от вершины B_1 до прямой AC равно 10 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

190. Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды равны 10 м и 9 м, а ее высота равна 0,5 м. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

191. В наклонном параллелепипеде четыре грани являются квадратами со сторонами 8 см, а его боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

192. Каждый плоский угол при вершине P правильной пирамиды $PABCD$ равен 60°. Найдите: а) угол APC; б) апофему пирамиды, если $AB = 4$ см.

193. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит ее высоту в отношении 2 : 3 (считая от вершины). Найдите площадь сечения, если известно, что оно меньше площади основания на 84 см^2.

194. Найдите площади диагональных сечений пирамиды, основание которой – квадрат со стороной 8 см, если две соседние боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости ее основания, а каждая из остальных наклонена к нему под углом 30°.

195. Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник со сторонами $AC = 13$ м, $AB = 15$ м, $BC = 14$ м. Боковое ребро DA перпендикулярно плоскости основания и равно 9 м. Найдите площадь полной поверхности этой пирамиды.

196. Основание пирамиды – ромб, диагонали которого равны 6 м и 8 м. Основанием высоты пирамиды, равной 1 м, является точка пересечения диагоналей ромба. Найдите площадь полной поверхности этой пирамиды.

197. Сравните площади полных поверхностей куба, правильного октаэдра и правильного икосаэдра, ребро каждого из которых равно a.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Различные виды многогранников и их свойства исследовались учеными на протяжении многих столетий. Модели многогранников использовались для построения различных архитектурных сооружений, особенно в виде пирамид. Например, в Карагандинской области обнаружена пирамида, которая была построена на 1000 лет раньше известных египетских пирамид.

Теорией правильных многогранников занимались древнегреческие математики, учение о них имелось в 13-й книге «Начал» Евклида и считалось «венцом» геометрии. Правильные многогранники называли «идеальными фигурами».

Реконструкция Сарыаркинской пирамиды, Карагандинская область

Национальная библиотека Беларуси, г. Минск

В Древней Греции первоосновой бытия считались четыре стихии: земля, вода, воздух и огонь. Пифагорейцы придавали им форму правильных тетраэдра, октаэдра, гексаэдра и икосаэдра соответственно. Древнегреческий философ Платон (429–348 гг. до н. э.) всему миру в целом придавал форму правильного додекаэдра.

Платон

Л. Эйлер

Леонардом Эйлером разработано целое учение о выпуклых многогранниках и их видах, называемых полуправильными многогранниками. Вид одного из таких многогранников имеет Национальная библиотека Беларуси в Минске.

Используя интернет-ресурсы, узнайте:

а) как называли многогранник древнегреческие математики, и что в буквальном смысле означало это слово;

б) сведения о невыпуклых правильных многогранниках, изображения которых даны на рисунке 94.

в) информацию о полуправильных многогранниках Эйлера и их видах.

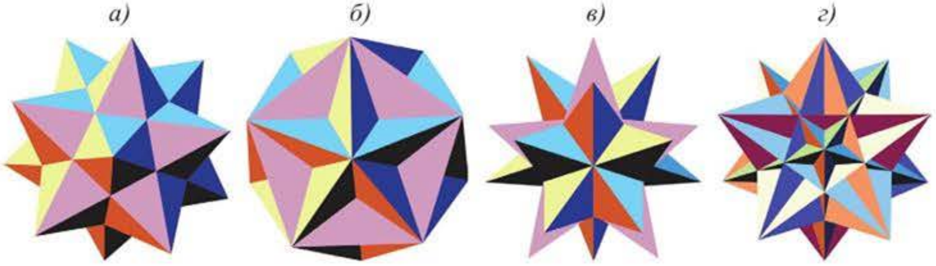


Рисунок 94

II. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

В результате изучения раздела надо

знать

- взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве;
- формулу расстояния от точки до плоскости;
- условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве;
- формулу для нахождения угла между двумя прямыми в пространстве;
- формулы для нахождения углов между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями.

уметь

- находить расстояние от точки до плоскости;
- находить угол между двумя прямыми, используя их уравнения;
- применять условия параллельности и перпендикулярности прямых пространства при решении задач;
- находить угол между прямой и плоскостью, между плоскостями;
- решать стереометрические задачи, применяя формулы расстояния от точки до плоскости и углов между прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями.

8. Расстояние от точки до плоскости

Учебные достижения по изучению темы:
• знать взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве;
• знать формулу расстояния от точки до плоскости;
• уметь выводить эту формулу и применять при решении задач.

Использование прямоугольной системы координат и векторов в пространстве позволяет применять алгебру для исследования различных пространственных фигур. Это возможно потому, что при использовании координат точек и векторов с геометрическими фигурами можно сопоставлять некоторые алгебраические модели: равенства, уравнения, неравенства и их системы. С другой стороны, уравнения с тремя (или двумя) переменными задают в системе координат некоторые геометрические фигуры.

В 10 классе рассматривались уравнения плоскости и прямой в пространстве. Напомним их. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_1; y_1; z_1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(a; b; c)$:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Общее уравнение плоскости: $ax + by + cz + d = 0$.

Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

Общее уравнение прямой: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d = 0. \end{cases}$

Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{p}(m; n; k)$: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$.

Параметрические уравнения прямой: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + kt. \end{cases}$

Используя эти уравнения, можно получить формулы для нахождения расстояний от точки до плоскости и углов между прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями.

Выведем формулу расстояния от точки до плоскости.

Теорема. **Расстояние l от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$, находится по формуле $l = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.**

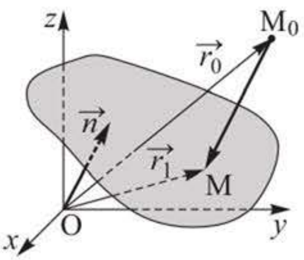


Рисунок 95

Доказательство. Проведем перпендикуляр M_0M к данной плоскости (рисунок 95) и обозначим $\vec{r_1} = \overrightarrow{OM}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0}(x_0; y_0; z_0)$. Так как точка $M(x_1; y_1; z_1)$ принадлежит данной плоскости, то верно равенство $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$. Его можно записать так: $\vec{n} \cdot \vec{r_1} + d = 0$, где $\vec{n}(a; b; c)$ – вектор, перпендикулярный данной плоскости.

Векторы $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r_1} - \vec{r_0}$ и $\vec{n}$ коллинеарные, поэтому $\vec{r_1} - \vec{r_0} = k \cdot \vec{n}$, где $k \in R$. Отсюда $\vec{r_1} = \vec{r_0} + k \cdot \vec{n}$. Тогда имеем $\vec{n} \cdot (\vec{r_0} + k \cdot \vec{n}) + d = 0$, откуда $k = \dfrac{-\vec{n} \cdot \vec{r_0} - d}{\vec{n}^2}$. Тогда $l = |\overrightarrow{M_0M}| = |k| \cdot |\vec{n}| = \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{r_0} + d}{|\vec{n}|} = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Что и требовалось доказать.

Из этой формулы следует, что *расстояние от начала координат до плоскости* равно $\dfrac{|\boldsymbol{d}|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2}}$.

Задача 1. Найти расстояние от точки $B(-12; 0; 17)$ до плоскости, которая проходит через точку $A(3; -2; -4)$ и параллельна плоскости $4x - 5y + 2z + 11 = 0$.

Решение. Плоскость, параллельная данной плоскости, задается уравнением $4x - 5y + 2z + d = 0$. Так как эта плоскость проходит через точку $A(3; -2; -4)$, то $4 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) + 2 \cdot (-4) + d = 0$, откуда $d = -14$. Тогда получим уравнение $4x - 5y + 2z - 14 = 0$. Искомое расстояние равно:

$$l = \frac{|4 \cdot (-12) - 5 \cdot 0 + 2 \cdot 17 - 14|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2 + 2^2}} = \frac{28}{\sqrt{45}} = \frac{28\sqrt{5}}{15}.$$

Ответ. $\dfrac{28\sqrt{5}}{15}$.

Задача 2. Дан тетраэдр, все плоские углы при вершине которого прямые, а боковые ребра равны 1 дм, 2 дм и 3 дм. Найти расстояние от вершины этого тетраэдра до плоскости его основания.

Решение. Пусть дан тетраэдр $OABC$. Так как все его плоские углы при вершине O прямые, то поместим его в систему координат, как показано на рисунке 96. Пусть $OA = 1$ дм, $OB = 2$ дм, $OC = 3$ дм. Тогда $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Найдем расстояние OH. Для этого в уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$ подставим координаты точек A, B, C, получим:

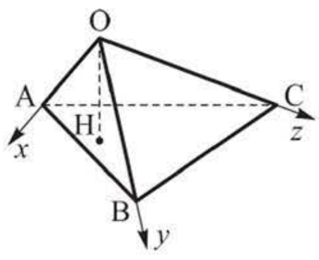


Рисунок 96

$\begin{cases} a + d = 0, \\ 2b + d = 0, \\ 3c + d = 0. \end{cases}$ Пусть, например, $d = -6$, тогда $a = 6$, $b = 3$, $c = 2$. Запишем уравнение плоскости ABC $6x + 3y + 2z - 6 = 0$. Расстояние $OH = \frac{6}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{6}{7}$ (дм).

Ответ. $\frac{6}{7}$ дм.

Задача 3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, сторона основания которой равна 4 см, а высота 3 см, построено ее сечение плоскостью BCM, где M – середина A_1C_1. Найти расстояние от вершины A_1 до плоскости сечения.

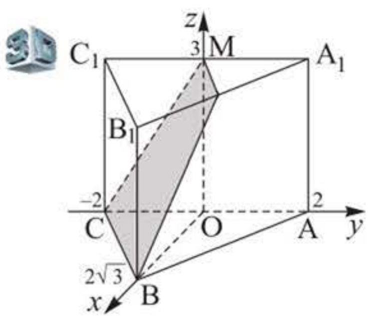


Рисунок 97

Решение. Сечением данной призмы плоскостью BCM является равнобедренная трапеция $BCMN$. Чтобы найти расстояние A_1H до плоскости сечения, разместим призму в системе координат, как показано на рисунке 97, где O – середина AC. Тогда $B(2\sqrt{3}; 0; 0)$, $C(0; -2; 0)$, $M(0; 0; 3)$ и $A_1(0; 2; 3)$.

Установим, что $\sqrt{3}x - 3y + 2z - 6 = 0$ – уравнение плоскости BCM.

Тогда искомое расстояние $A_1H = \frac{|\sqrt{3} \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{3+9+4}} = \frac{6}{4} = 1,5$ (см).

Ответ. 1,5 см.

ВОПРОСЫ

1. Запишите и выведите формулу расстояния от точки до плоскости.
2. По какой формуле можно найти расстояние от начала координат до плоскости?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

198. Найдите расстояние от начала координат до плоскости, проходящей через точку: а) $M(4; -2; -6)$ и перпендикулярной оси аппликат; б) $N(-7; 4; 5)$ и перпендикулярной оси абсцисс.

199. Найдите расстояние: а) от точки $A(-2; 3; -4)$ до плоскостей $2x + 2y - z = 0$ и $2x + 2y - z + 3 = 0$; б) от точки $B(1; -5; 0)$ до плоскостей $4x - 4y + 2z = 0$ и $4x - 4y - 4\sqrt{2} \cdot z + 16 = 0$.

200. Найдите расстояние от точки $A(2;\ 1;\ m)$, принадлежащей плоскости $3x - y + 2z - 1 = 0$, до плоскости $12x - 3y + 4z + 13 = 0$.

201. Точка $M(1;\ m;\ n)$ принадлежит прямой, заданной уравнением $\begin{cases} x + y - z - 4 = 0, \\ 2x - y + 4z - 5 = 0. \end{cases}$ Найдите расстояние от этой точки до плоскости $x + y + z + 1 = 0$.

202. а) Дан треугольник с вершинами в точках $A(2;\ 1;\ 0)$, $B(1;\ 3;\ 0)$, $C(4;\ 4;\ 0)$. Найдите расстояние от точки $M(2020;\ 2021;\ 2030)$ до плоскости ABC.
б) Известны координаты вершин тетраэдра $A(3;\ 0;\ 1)$, $B(-1;\ 4;\ 1)$, $C(5;\ 2;\ 1)$, $D(0;\ -5;\ 6)$. Найдите расстояние от вершины D до плоскости ABC.

203. Найдите расстояние от начала координат до плоскости, проходящей через точку $A(-5;\ 4;\ -3)$ и перпендикулярной вектору: а) $\vec{n} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$; б) $\vec{n} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

204. Через точку $M(2;\ -1;\ -2)$ проходит плоскость, перпендикулярная вектору $\vec{n} = -4\vec{i} + 12\vec{j} - 3\vec{k}$. Найдите расстояние от точки $B(2;\ 4;\ 5)$ до этой плоскости.

205. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 6. Точки M, N и K – середины его ребер A_1B_1, A_1D_1 и A_1A соответственно. Найдите расстояния от вершин куба до плоскости MNK.

206. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 12. На его ребрах BB_1, BC и BA отмечены точки M, N и K соответственно, которые делят эти ребра в отношении $3 : 1$, считая от вершины B. Найдите расстояние от точки D_1 до плоскости MNK.

207. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB = 3$, $BC = 4$, $BB_1 = 12$. Найдите расстояние от точки D_1 до плоскости A_1C_1D.

208. Высота правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ равна 4, а сторона основания равна $2\sqrt{2}$. Найдите расстояние от точки A до плоскости PCD.

209. Дан тетраэдр $PABC$, все плоские углы при вершине P которого прямые, $PA = 9$ см, $PB = 12$ см и $PC = 16$ см. Найдите с точностью до 0,1 см расстояние от вершины P этого тетраэдра до плоскости ABC.

Уровень B

Дворец Мира и Согласия, г. Нур-Султан

210. Дворец Мира и Согласия в Нур-Султане имеет вид правильной четырехугольной пирамиды, высота которой и сторона основания равны по 62 м. Найдите расстояние от вершины этой пирамиды до плоскости, проходящей через диагональ ее основания и середину бокового ребра.

211. Дан ΔABC с вершинами в точках $A(5;\ 0;\ 5)$, $B(5;\ 5;\ 0)$, $C(5;\ 5;\ 5)$. Найдите расстояние от начала O системы координат до плоскости ABC и сравните его с расстоянием от точки O до центра окружности, описанной около этого треугольника.

212. Напишите уравнение плоскости, расстояние от которой до параллельной ей плоскости $x + y + z - 1 = 0$ равно $\sqrt{3}$.

213. Найдите расстояние от точки $M(2\sqrt{14};\ 0;\ 2\sqrt{14})$ до плоскости, заданной уравнениями:

а) $\begin{cases} x - y = 0, \\ y + z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y + z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ -x + 2y - z = 0. \end{cases}$

214. Найдите расстояние от начала координат до плоскости, проходящей через точки: а) $B(0;\ 2;\ 3)$, $C(-1;\ 3;\ 1)$, $D(2;\ 1;\ 1)$; б) $K(1;\ 2;\ 3)$, $L(0;\ 7;\ 1)$, $P(1;\ 5;\ 0)$.

Уровень C

215. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через точки M, N и K – середины его ребер A_1D_1, C_1D_1 и DD_1 соответственно. Расстояние от точки D_1 до плоскости сечения равно 3. Найдите расстояние до плоскости MNK от остальных вершин куба.

216. Дан тетраэдр $PABC$, каждое боковое ребро которого равно 2 и все плоские углы при вершине P – прямые. Найдите расстояние от вершины P до плоскости, проходящей через середины его ребер AC, AB и CP.

217. Расстояние от начала координат до центра окружности, описанной около ΔABC с вершинами в точках $A(t;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ t)$, $C(t;\ t;\ t)$, равно $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Найдите расстояние от начала координат до плоскости ABC.

9. Угол между двумя прямыми в пространстве

Учебные достижения по изучению темы:

• знать формулы для нахождения угла между двумя прямыми в пространстве;

• знать условия параллельности и перпендикулярности прямых пространства;

• уметь находить угол между двумя прямыми, используя их уравнения;

• применять указанные формулы и условия при решении задач.

Если прямые a и b заданы уравнениями $\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{k_1}$ и $\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{k_2}$, то соответственно их направляющие векторы $\vec{p_1}(m_1;\ n_1;\ k_1)$ и $\vec{p_2}(m_2;\ n_2;\ k_2)$. Угол φ между этими прямыми равен углу β между их направляющими векторами, если угол $\beta \le 90°$ и $\varphi = 180° - \beta$, если $\beta > 90°$ (рисунок 98). В обоих случаях

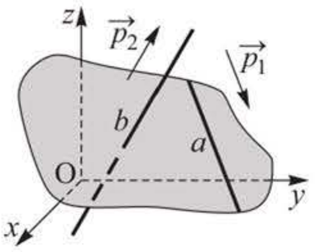


Рисунок 98

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{p_1}\cdot\vec{p_2}|}{|\vec{p_1}|\cdot|\vec{p_2}|} = \frac{|m_1\cdot m_2 + n_1\cdot n_2 + k_1\cdot k_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+k_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+k_2^2}}.$$

Прямые, заданные указанными уравнениями, *параллельны*, если $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{k_1}{k_2}$; *перпендикулярны*, если $m_1\cdot m_2 + n_1\cdot n_2 + k_1\cdot k_2 = 0$.

З а д а ч а 1. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{3}$ и $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=1-z$.

Р е ш е н и е. Направляющие векторы этих прямых соответственно $\vec{p_1}(5;\ 4;\ 3)$ и $\vec{p_2}(3;\ 2;\ -1)$. Находим косинус искомого угла:

$$\cos\varphi = \frac{15+8-3}{\sqrt{25+16+9}\cdot\sqrt{9+4+1}} = \frac{20}{5\sqrt{28}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

О т в е т. $\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

З а д а ч а 2. Дан треугольник, вершинами которого являются точки $A(2;\ 4;\ 0)$, $B(-4;\ 0;\ 0)$ и $C(0;\ 2;\ 4)$. Найти с точностью до 1° угол между прямыми, на которых лежат медианы CM и BN этого треугольника.

Р е ш е н и е. Координаты точек $M(-1;\ 2;\ 0)$ и $N(1;\ 3;\ 2)$. Пусть искомый угол φ, тогда $\cos\varphi = \left|\cos\angle(\overrightarrow{CM};\ \overrightarrow{BN})\right|$. Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{CM}(-1;\ 0;\ -4)$, $\overrightarrow{BN}(5;\ 3;\ 2)$. Тогда $\cos\varphi = \left|\dfrac{-5+0-8}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{38}}\right| = \dfrac{13}{\sqrt{646}} = \dfrac{13\sqrt{646}}{646} \approx$ $\approx 0{,}511$, $\varphi \approx 59°$.

О т в е т. $\approx 59°$.

З а д а ч а 3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 12, точки M и N – середины ребер AD и CC_1 соответственно. Точка K делит ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 2$, а точка L – ребро BB_1 в отношении $BL : LB_1 = 1 : 3$. Найти с точностью до 1° угол между прямыми MK и NL.

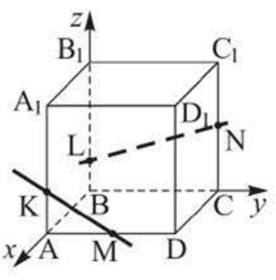


Рисунок 99

Р е ш е н и е. Расположим куб в системе координат, как показано на рисунке 99. Найдем координаты точек $M(12;\ 6;\ 0)$, $K(12;\ 0;\ 4)$, $N(0;\ 12;\ 6)$, $L(0;\ 0;\ 3)$. Тогда имеем $\overrightarrow{MK}(0;\ -6;\ 4)$, $\overrightarrow{NL}(0;\ -12;\ -3)$,

$$\cos\angle(MK;\ NL) = \frac{|0\cdot 0+6\cdot 12-4\cdot 3|}{\sqrt{36+16}\cdot\sqrt{144+9}} = \frac{60}{2\sqrt{13}\cdot 3\sqrt{17}} = \frac{10\sqrt{221}}{221} \approx 0{,}673,\ \angle(MK;\ NL) \approx 48°.$$

О т в е т. $\approx 48°$.

ВОПРОСЫ

1. По каким формулам можно найти угол между двумя прямыми?

2. Запишите условия параллельности и перпендикулярности двух прямых пространства.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

218. Докажите, что прямые:

а) $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-2}{3}$ и $\dfrac{x+2}{15} = \dfrac{y-1}{12} = \dfrac{z-2}{9}$ параллельны;

б) $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-2}{3}$ и $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{4(y-1)}{-19} = \dfrac{z-2}{3}$ перпендикулярны.

219. Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями:

а) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-4}{1}$ и $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+1}{4}$;

б) $\dfrac{x-5}{-3} = \dfrac{y+1}{12} = \dfrac{z+2}{-4}$ и $\dfrac{x+7}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-4}{6}$.

220. Найдите угол между прямой:

а) $\frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{2\sqrt{2}} = \frac{z}{-2\sqrt{2}}$ и осью абсцисс;

б) $\frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{y+1}{4\sqrt{3}} = \frac{z}{2\sqrt{2}}$ и осью ординат.

221. а) Даны векторы $\vec{a}(0; -1; 2)$, $\vec{b}(2; 1; 2)$. Найдите угол между прямыми, содержащими векторы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

б) Даны векторы $\vec{p}(1; -2; 3)$, $\vec{q}(0; 4; -5)$. Найдите угол между прямыми, на которых лежат векторы $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = -2\vec{p} - 3\vec{q}$.

222. а) Дан треугольник, вершинами которого являются точки $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$. Найдите углы между прямыми, содержащими средние линии этого треугольника.

б) Дан треугольник, вершинами которого являются точки $A(3; -2; 1)$, $B(3; 0; 2)$ и $C(1; 2; 5)$. Найдите угол между прямыми: 1) AB и BC; 2) AC и BM, где M – середина AC.

223. Дан треугольник, вершинами которого являются точки $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ и $C(1; -2; 1)$. Найдите с точностью до 1° угол между прямыми, на которых лежат сторона AC и биссектриса AL этого треугольника.

224. Найдите наибольший угол треугольника, вершинами которого являются точки $A(1; 2; 2)$, $B(1; 4; -1)$ и $C(-1; 2; 5)$.

225. Точки $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$ и $C(1; 2; 0)$ являются последовательными вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите угол между прямыми AC и BD.

226. Основание $ABCD$ пирамиды $PABCD$ – квадрат, сторона которого равна 4, ребро PB равно 6 и является ее высотой. Найдите угол между прямыми AP и BD.

227. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 7$, $BC = 8$, $BB_1 = 10$, точки M и N – середины ребер AD и CC_1 соответственно. Найдите угол между прямыми: а) AB и MN; б) CB_1 и MN.

228. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны координаты вершин $B(1; 2; 3)$, $A(9; 6; 4)$, $C(5; 2; 6)$, $B_1(3; 0; 4)$. Найдите с точностью до 1° угол между прямыми BB_1 и CD.

Уровень B

229. Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями:

а) $\begin{cases} x - y = 0, \\ y + z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y + z = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ -x + 2y - z = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y - z - 1 = 0, \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} -x + y + 2z + 3 = 0, \\ 2x - y - z + 4 = 0. \end{cases}$

230. Используя условие перпендикулярности прямых, докажите, что диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости A_1BD.

231. Представьте, что кубик Рубика обозначен $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и расположен в системе координат. В нем точки K и M – середины ребер AA_1 и AD соответственно, точка N – центр грани CC_1D_1D. Найдите угол между прямыми: а) B_1M и KN; б) MN и B_1D.

Памятник кубику Рубика, г. Будапешт, Венгрия

232. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ длина стороны основания равна 12, ее высота равна 18, а точка K делит ребро PC в отношении $PK : KC = 2 : 1$. Найдите с точностью до 1° угол между прямыми: а) AK и BD; б) BK и AD.

233. Основание $ABCD$ пирамиды $PABCD$ – ромб с диагоналями $AC = 16$, $BD = 9$, O – точка пересечения диагоналей, PO – высота пирамиды, $PO = 12$. Найдите с точностью до 1° угол между прямыми AD и PC.

234. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – прямоугольный треугольник с катетами $AC = 5$ и $BC = 12$, а ее боковое ребро равно 12. Найдите угол между прямыми AB и CB_1.

Уровень С

235. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O – точка пересечения его диагоналей, $M \in DC$ и $CM : MD = 1 : 4$. Найдите с точностью до 1° угол между прямыми OM и AM.

236. Дана пирамида $PABC$, вершинами основания которой являются точки $A(5; 1; -1)$, $B(5; -2; 2)$ и $C(2; -2; 1)$, а вершина P принадлежит оси Oz и $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{CB}$. Найдите угол между прямыми PC и AB.

237. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ длина каждого ребра равна a, точка K делит ребро PC в отношении $PK : KC = 1 : 2$. Найдите угол между прямыми: а) AK и DC; б) BK и AD.

238. В правильном тетраэдре $DABC$ точка K – середина ребра AD, точки M и N – центры граней ABC и BCD соответственно. Найдите угол между прямыми: а) MN и AB; б) MK и AC.

10. Угол между прямой и плоскостью, двумя плоскостями

Учебные достижения по изучению темы:

• знать формулы для нахождения угла между прямой и плоскостью, двумя плоскостями;

• уметь выводить их и применять при решении задач.

Выведем формулу для нахождения угла между прямой, проходящей через точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$, и плоскостью α, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$.

Рассмотрим векторы $\vec{n}(a;\ b;\ c)$, перпендикулярный плоскости α, и $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ (рисунок 100). Обозначим $\angle(A_1A_2;\ \alpha) = \varphi$, а $\angle(\vec{n};\ \overrightarrow{A_1A_2}) = \beta$. Тогда имеем: $\cos\beta = \dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{A_1A_2}|}$.

Если $0° \le \beta \le 90°$, то $\varphi = 90° - \beta$ (рисунок 100, *а*); если $90° < \beta \le 180°$, то $\varphi = \beta - 90°$ (рисунок 100, *б*). В обоих случаях $\boldsymbol{\sin\varphi = |\cos\beta|}$, тогда имеем:

$$\boldsymbol{\sin\varphi} = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{A_1A_2}|} \text{ или } \sin\varphi = \frac{|a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\cdot\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}.$$

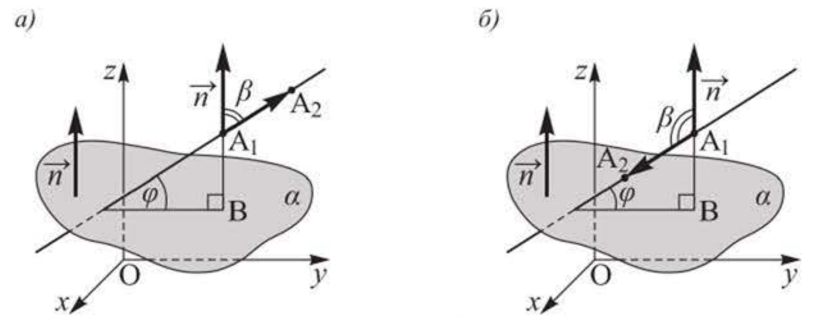


Рисунок 100

Отметим, что если $\sin\varphi = 1$, то $\angle(A_1A_2;\ \alpha) = 90°$; если $\sin\varphi = 0$, то $\angle(A_1A_2;\ \alpha) = 0°$.

Напомним, что за величину угла между пересекающимися плоскостями принимается градусная мера двугранного угла, образованного ими, которая не больше 90°. Пусть плоскости заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$. Тогда угол γ между ними равен углу между перпендикулярными им векторами $\vec{n_1}(a_1;\ b_1;\ c_1)$ и $\vec{n_2}(a_2;\ b_2;\ c_2)$, если $\angle(\vec{n_1};\ \vec{n_2})$

не больше 90° (рисунок 101, *а*), и $\gamma = 180° - \angle(\vec{n_1}; \vec{n_2})$, если $\angle(\vec{n_1}; \vec{n_2})$ – тупой (рисунок 101, *б*). В обоих случаях $\mathbf{\cos\gamma = |\cos\angle(\vec{n_1}; \vec{n_2})|}$.

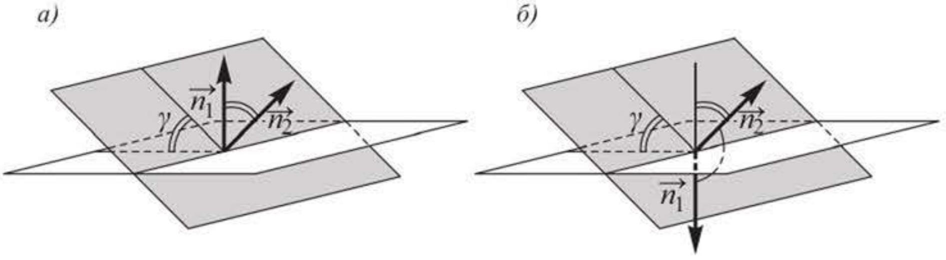


Рисунок 101

Следовательно, $\cos\gamma = \dfrac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$ или $\cos\gamma = \dfrac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$.

Плоскости параллельны, если перпендикулярные им векторы $\vec{n_1}(a_1; b_1; c_1)$ и $\vec{n_2}(a_2; b_2; c_2)$ коллинеарные. Угол между параллельными плоскостями принимается равным 0°. Угол между плоскостями прямой, если $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 = 0$.

Задача 1. Найти: а) угол между прямой, проходящей через точки $A_1(1; 2; -3)$ и $A_2(-2; 0; 3)$, и плоскостью $x + y + z = 0$; б) угол между плоскостями $3y - z - 2 = 0$ и $-2y - z + 5 = 0$.

Решение. а) Пусть искомый угол равен φ, тогда $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1A_2}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_2}|}$.

Запишем координаты векторов $\vec{n}(1; 1; 1)$, $\overrightarrow{A_1A_2}(-3; -2; 6)$. Тогда $\sin\varphi = \dfrac{|-3-2+6|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{49}} = \dfrac{1}{\sqrt{3} \cdot 7} = \dfrac{\sqrt{3}}{21}$, $\varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{21}$.

б) Пусть искомый угол равен γ. Векторы, перпендикулярные данным плоскостям, это $\vec{n_1}(0; 3; -1)$ и $\vec{n_2}(0; -2; -1)$. Тогда $\cos\gamma = \dfrac{|0-6+1|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\gamma = 45°$.

Ответ. а) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{21}$; б) 45°.

Задача 2. Дан тетраэдр $DABC$, в котором все грани равны, с вершинами в точках $D(0; 0; 10)$, $A(6; 0; 0)$, $B(6; 8; 10)$. Найдите с точностью до 1° угол между его ребром AD и плоскостью ABC.

Решение. Учитывая координаты данных вершин тетраэдра, построим в системе координат прямоугольный параллелепипед с измерениями 6, 8, 10 (рисунок 102). Тогда ребрами тетраэдра $DABC$ будут диагонали граней параллелепипеда, координаты точки $C(0;\ 8;\ 0)$, $\overrightarrow{AD}(-6;\ 0;\ 10)$. Уравнение плоскости ABC имеет вид $20x + 15y - 12z - 120 = 0$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Пусть искомый угол равен φ, тогда $\sin\varphi = \dfrac{|20\cdot(-6)+15\cdot 0-12\cdot 10|}{\sqrt{400+225+144}\cdot\sqrt{136}} = \dfrac{120}{\sqrt{769}\cdot\sqrt{34}} \approx 0{,}742$, $\varphi \approx 48°$.

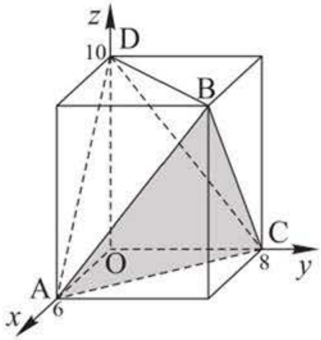


Рисунок 102

Ответ. $\approx 48°$.

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором точки M, N, K – середины ребер CC_1, AA_1, AD соответственно. Найти угол между плоскостями BNK и A_1B_1M.

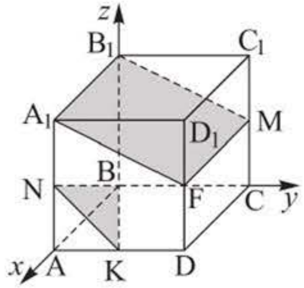


Рисунок 103

Решение. Пусть ребро куба равно 1, а искомый угол равен γ. Введем систему координат, началом которой является вершина B, а оси Ox, Oy и Oz содержат ребра BA, BC, BB_1 куба соответственно (рисунок 103). Запишем координаты точек $B(0;\ 0;\ 0)$, $N\left(1;\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$, $K\left(1;\ \frac{1}{2};\ 0\right)$, $A_1(1;\ 0;\ 1)$, $B_1(0;\ 0;\ 1)$, $M\left(0;\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$. Тогда уравнения плоскостей BNK и A_1B_1M следующие: $x - 2y - 2z = 0$ и $y + 2z - 2 = 0$ (убедитесь в этом самостоятельно). Запишем векторы, перпендикулярные этим плоскостям: $\vec{n_1}(1;\ -2;\ -2)$, $\vec{n_2}(0;\ 1;\ 2)$. Тогда $\cos\gamma = \dfrac{|0-2-4|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\gamma = \arccos\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ответ. $\arccos\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

ВОПРОСЫ

1. По каким формулам можно найти угол между прямой и плоскостью?
2. Как можно найти угол между двумя плоскостями?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

239. Найдите угол, который образует вектор $\vec{a}(6;\ 2;\ -3)$ с плоскостью: а) $3x - 2y + 6z - 1 = 0$; б) $-3x - 4y + 7 = 0$.

240. Найдите угол, образованный прямой, на которой лежит вектор $\vec{c}\,(-3; 0; 4)$, с плоскостью: а) $4x + 6y + 3z = 0$; б) $3x - 4z + 2 = 0$.

241. Докажите, что: а) прямая $\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+4}{4}$ параллельна плоскости $-4x - 6y + 8z - 1 = 0$; б) прямая AB перпендикулярна плоскости $-8x + 13y + 4z - 1 = 0$, если $A(1; -2; 4)$, $B(-7; 11; 8)$.

242. Найдите угол между прямой, проходящей через точки $A(3; 8; 1)$ и $B(-3; 5; 3)$, и плоскостью: а) xOy; б) yOz.

243. Найдите угол между прямой, проходящей через точки $A(-2; 4; -3)$ и $B(0; 3; -5)$, и плоскостью: а) $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} + \frac{z}{6} + 1 = 0$; б) $\frac{3x}{14} + \frac{3y}{7} - \frac{3z}{7} + 1 = 0$.

244. Найдите угол между плоскостями:

а) $-4x + 2y + 4z - 5 = 0$ и $2x - 2y + 3 = 0$;

б) $-x + 2y - 2z + 3 = 0$ и $6x + 3y - 6z - 2 = 0$;

в) $2x + 5y - z = 0$ и $x - y - 3z + 4 = 0$;

г) $x + y + z + 2 = 0$ и $4x - 4y + 2z - 3 = 0$.

245. Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $A(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 1)$, $C(3; 2; 1)$ и $D(5; 4; 0)$.

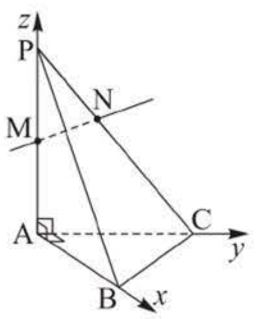


Рисунок 104

246. Дан тетраэдр $PABC$, плоские углы при вершине A которого прямые, $AB = AC = 5$ см, $AP = 10$ см. Точка M – середина ребра AP, точка N делит ребро PC в отношении $PN : NC = 2 : 3$ (рисунок 104). Найдите угол между прямой MN и плоскостью: а) ABC; б) PBC.

247. Дан тетраэдр $PABC$, в котором $\angle APB = \angle APC = 45°$, а плоские углы при вершине A – прямые. Найдите угол между: а) прямой AB и плоскостью BCP; б) плоскостями ABC и BCP.

248. Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$, диагонали основания и высота которой равны по 8 см. Точка M – середина ее высоты PH. Найдите угол между: а) прямой DM и плоскостью CDP; б) плоскостями APD и ACD.

Уровень В

249. Найдите с точностью до 1° угол между прямой, проходящей через начало координат и точку $M(1; 2; 3)$, и плоскостью, параллельной вектору $\vec{p}\,(3; 1; -1)$, содержащей начало координат и точку $C(0; 2; -1)$.

250. Найдите с точностью до 1° угол между прямой, проходящей через точки $M(-2; 0; -1)$ и $N(10; 3; 3)$, и плоскостью, параллельной оси Oz и содержащей точки $A(1; -2; 0)$ и $B(3; 1; 0)$.

251. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро вдвое больше стороны основания. Найдите угол между прямой BD_1 и плоскостью B_1C_1D.

252. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой, проходящей через центры граней $ABCD$ и DD_1C_1C, и плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BB_1 и CC_1.

Уровень С

253. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -1; 2)$ и перпендикулярной прямой: а) $\begin{cases} 3x - y - z - 1 = 0, \\ 2x + y + 3z + 4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z - 5 = 0, \\ -x + 4y + 3 = 0. \end{cases}$

254. Вектор $\vec{a}\,(1 - t; 4 + t; t)$ имеет наименьшую длину. Найдите угол между прямой, содержащей этот вектор, и плоскостью $4x - 4y + 2z - 7 = 0$.

255. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, каждое ребро которой равно 2. Точки O и O_1 – середины ребер AB и A_1B_1 соответственно, точка K принадлежит лучу C_1O_1, причем $O_1K = C_1O_1$ (рисунок 105). Найдите с точностью до 1° угол между: а) прямой OK и плоскостью ABC; б) плоскостями ABC и KBC_1.

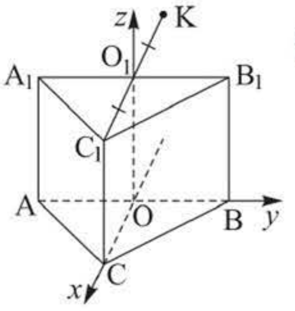


Рисунок 105

11. Упражнения на повторение раздела «Применение уравнений прямой и плоскости»

Уровень А

256. Дан треугольник, вершинами которого являются точки $A(-1; 3; 0)$, $B(0; 2; -5)$ и $C(4; -6; -1)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной медиане AM этого треугольника.

257. Исследуйте, лежит ли прямая $\begin{cases} 3x + y - z - 2 = 0, \\ 7x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$ в плоскости $x + y - 2z - 1 = 0$.

258. Прямая задана уравнениями $\frac{x+5}{5} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{3}$. Найдите расстояния от каких-либо двух точек этой прямой до плоскости $2x + 2y - z = 0$.

259. При каких значениях t угол между прямыми, содержащими векторы $\vec{a}(0; 1; t)$ и $\vec{b}(-1; 0; t)$, равен: а) 90°; б) 60°?

260. Прямые заданы уравнениями $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ и $\frac{x-1}{t^2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{-3}$. При каких значениях t эти прямые перпендикулярны?

261. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно перпендикулярны, а их длины соответственно равны 3, 2, 6, $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$. Найдите угол между: а) прямыми, на которых лежат векторы $\vec{d}$ и $\vec{p}$; б) прямой, содержащей вектор $\vec{d}$, и плоскостью $x + 2y + 2z - 1 = 0$; в) плоскостью, заданной векторами $\vec{d}$ и $\vec{p}$, и плоскостью $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$.

262. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = AD = 2$, $DD_1 = 4$. Найдите: а) расстояние от точки A до плоскости C_1NK, где N – середина BC, K – середина DC; б) угол между прямой AM, где M – центр грани BB_1C_1C, и плоскостью BB_1D; в) угол между плоскостями BB_1D и ABC_1.

Уровень В

263. Запишите уравнение фигуры, состоящей из множества всех точек, удаленных на расстояние, равное 9, от координатной плоскости Oyz.

264. Две вершины правильного тетраэдра $PABC$ лежат на оси Ox, а третьей является точка $(0; 6; 0)$. Найдите высоту PH этого тетраэдра.

265. Из точки $M(0; 0; 18)$ к плоскости Oxy проведены наклонные MK и MN, длины ортогональных проекций которых на эту плоскость соответственно равны 40 и 30, а $KN = 50$. Найдите расстояние от ортогональной проекции точки M на плоскость Oxy до плоскости MNK.

266. Найдите площадь поверхности тетраэдра, вершинами которого являются начало координат и точки пересечения плоскости $5x - 2y - 4z - 20 = 0$ с осями координат.

267. Существует ли плоскость, которой принадлежат точки $A(3; 4; 5)$, $B(3; 5; 4)$, $C(4; 3; 5)$, $D(4; 5; 3)$, $M(5; 3; 4)$, $N(5; 4; 3)$? Если существует, то найдите расстояние от начала координат до такой плоскости.

268. Дана плоскость $20{,}2x + 20{,}25y + 20{,}3z + 20500 = 0$. Докажите, что расстояние от начала координат до этой плоскости, выраженное в метрах, меньше высоты горы Акбет, но больше высоты горы Айыртау.

Гора Акбет,
Павлодарская область

Гора Айыртау,
Северо-Казахстанская область

269. Найдите значение k, при котором прямая, содержащая вектор $\vec{a}(1; 0; -1)$, образует угол, равный 30°, с плоскостью: а) $y + kz - 3 = 0$; б) $-x + ky + z - 4 = 0$.

Уровень С

270. Даны точки $B(-1; 2; 3)$ и $C(-2; 3; 4)$. Какую фигуру образует множество всех точек $M(x; y; z)$, для каждой из которых верно равенство $MB^2 - MC^2 = 16$? Запишите уравнение этой фигуры.

271. Даны векторы $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Найдите угол между прямыми AC и CB.

272. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{i}$ равен 120°, а между векторами $\vec{a}$ и $\vec{k}$ – 135°. Найдите угол между прямыми, на которых лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{j}$.

273. Дан тетраэдр $PABC$. Известны координаты его вершины $C(0; 4; 0)$ и точки $M(2; 3; -2)$ – середины ребра AB. Найдите высоту PH этого тетраэдра, если H принадлежит прямой CM, а координаты вершины P равны: а) (1; 2; –1); б) (1; 2; 3).

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

Выберите верный ответ

274. Расстояние от точки $M(0; 0; 2)$ до плоскости $x - y + z + 1 = 0$ равно:

1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; 5) $\frac{3}{2}$.

275. Угол между прямыми, содержащими векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, равен:

1) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; 2) $\arccos\frac{1}{3}$; 3) 45°; 4) 60°; 5) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

276. Даны точки $A(-4; -4; 4)$, $B(-3; 2; 2)$, $C(2; 5; 1)$, $D(3; -2; 2)$. Тогда угол между прямыми AC и BD равен:

1) 0°; 2) $\arccos\frac{2}{3\sqrt{182}}$; 3) 90°; 4) $\arccos\frac{1}{21\sqrt{17}}$; 5) 45°.

277. Синус угла между прямой, проходящей через точки $A(2; 3; -4)$, $B(1; -4; 1)$, и плоскостью $2x - y + z + 1 = 0$ равен:

1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) 0; 3) $-\frac{2}{3\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; 5) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

278. Угол между прямой $\begin{cases} x - y - z = 0, \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $2x - y + 2z + 1 = 0$ равен:

1) $\arcsin\frac{\sqrt{8}}{3}$; 2) $\arcsin\frac{1}{3\sqrt{3}}$; 3) 0°; 4) $\arcsin\frac{5}{3\sqrt{6}}$; 5) 45°.

279. Угол между плоскостями, заданными уравнениями $3x - y + z - 6 = 0$ и $x + y - 3z - 4 = 0$, равен:

1) $\arccos\frac{1}{11}$; 2) 90°; 3) $\arccos\frac{7}{11}$; 4) 60°; 5) $\arccos\left(-\frac{1}{11}\right)$.

280. Дан тетраэдр $PABC$, высотой которого является ребро PA, причем $PA = 6$, $\angle APC = \angle APB = 45°$, $\angle BPC = 60°$. Точка M – середина ребра AP, N делит ребро AC в отношении 1 : 2, считая от точки A, K делит ребро AB в отношении 2 : 1, считая от точки A. Тогда расстояние от точки A до плоскости MNK равно:

1) $\frac{12}{\sqrt{61}}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{12}{\sqrt{13}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{29}}$; 5) $\frac{4}{3}$.

Выполните упражнения

281. Даны точки $A_1(1; 0; 4)$ и $A_2(-2; 3; 0)$. Запишите уравнение плоскости, перпендикулярной отрезку A_1A_2 и проходящей через его середину.

282. Даны точки $A(1; 2; 3)$, $B(-3; 3; 2)$. Найдите угол между прямыми MA и MB, где M – точка оси абсцисс, одинаково удаленная от точек A и B.

283. Найдите угол между прямой, проходящей через точки $A(1; -2; 3)$, $B(-3; 2; 5)$, и плоскостью $2x - 2y - z + 4 = 0$.

284. Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – квадрат, сторона которого равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите: а) расстояние от точки A_1 до плоскости AB_1M, где M – середина ребра DD_1; б) угол между прямой BD_1 и плоскостью A_1BD; в) угол между плоскостями AB_1D_1 и A_1C_1D.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Применение координат для доказательства теорем и решения стереометрических задач стало распространенным в XVIII столетии благодаря научным трудам французских математиков Алекси Клода Клеро (1713–1765), Гаспара Монжа (1746–1818), Жозефа Луи Лагранжа (1736–1813) и швейцарского математика Леонарда Эйлера (1707–1783).

Г. Монж решил задачи о составлении уравнения плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой, о нахождении расстояния от точки до данной прямой. Ж. Лагранж одним из первых использовал координаты для нахождения длин ребер и площадей граней тетраэдра.

С. Лакруа

Аналитическая геометрия в пространстве была изложена в виде, близком к современному, в трудах французского ученого Сильвестра Франсуа Лакруа (1765–1843). Им же был введен термин «Аналитическая геометрия». Первой книгой, названной «Начала аналитической геометрии», был учебник французского математика Жана Гийома Гарнье (1766–1840), изданный в 1808 году.

III. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ И ИХ ЭЛЕМЕНТЫ

В результате изучения раздела надо

знать

- понятия тела вращения и его развертки;
- определения: цилиндра, конуса, усеченного конуса, сферы, шара и их элементов;
- понятия сечения цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара плоскостью;
- взаимное расположение плоскости и сферы;
- определение и свойства касательной плоскости к сфере;
- формулы площадей поверхностей: цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара.

уметь

- изображать на плоскости: цилиндр, конус, усеченный конус, сферу, шар и их элементы;
- строить развертки: цилиндра, конуса, усеченного конуса;
- изображать сечения: цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара плоскостью;
- решать задачи на нахождение элементов тел вращения (цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара);
- решать задачи, связанные с касательной плоскостью шара и его сечениями плоскостью;
- выводить формулы площадей поверхностей цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара и применять при решении задач.

12. Цилиндр и его элементы. Сечение цилиндра плоскостью

Учебные достижения по изучению темы:
• знать понятие тела вращения;
• знать определения цилиндра, его элементов;
• уметь изображать цилиндр и его сечения;
• уметь решать задачи на нахождение элементов цилиндра.

Телом вращения называется тело, образованное вращением плоской фигуры вокруг прямой. Эта прямая называется *осью вращения*. Например, при вращении четырехугольника $MPNK$ вокруг оси m получится тело вращения, изображенное на рисунке 106.

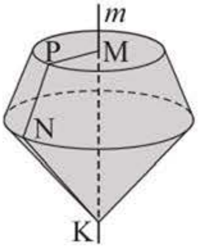


Рисунок 106

Понятие тела вращения непосредственно связано с видом движения фигур в пространстве, которое называется поворотом.

Поворотом вокруг прямой m на угол φ называется такое движение в пространстве, при котором в каждой плоскости, перпендикулярной m, происходит поворот на угол φ вокруг точки пересечения этой плоскости с прямой m (рисунок 107).

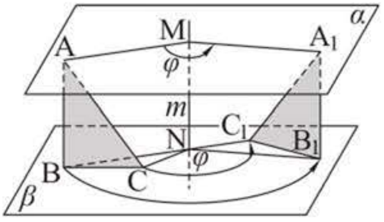


Рисунок 107

Поворот задается его осью и углом, отсчитываемым по часовой стрелке или против часовой стрелки. Таким образом, например, осуществляется поворот двери или колеса вокруг оси. Отметим, что осевая симметрия в пространстве является поворотом на 180° вокруг оси симметрии.

Цилиндром называется тело, образованное вращением прямоугольника вокруг его стороны. Например, на рисунке 108 дано изображение цилиндра, полученного вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг его стороны CD. При этом его стороны CB и DA описывают равные круги, лежащие в параллельных плоскостях. Эти круги – **основания** цилиндра. Прямая, содержащая ось вращения (или отрезок, соединяющий центры оснований цилиндра), называется **осью цилиндра**. Сторона AB, параллельная

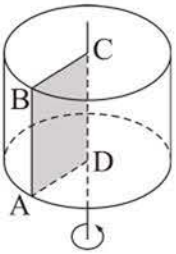


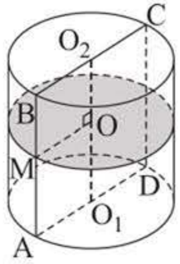
Рисунок 108

оси цилиндра, описывает поверхность, которая называется **боковой поверхностью** цилиндра.

Фигура, состоящая из оснований и боковой поверхности цилиндра, называется **полной поверхностью цилиндра**. Перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания к другому основанию, называется **высотой** цилиндра. Длину этого перпендикуляра также называют высотой цилиндра. Высота цилиндра равна расстоянию между плоскостями его оснований. Отрезок AB и каждый отрезок, лежащий на боковой поверхности и параллельный оси CD, – **образующие** цилиндра.

Сечение цилиндра, перпендикулярное его оси, является кругом, равным основанию цилиндра (рисунок 109, *а*). Это следует из того, что любая точка M образующей AB цилиндра удалена от его оси на расстояние, равное радиусу основания цилиндра.

а)



б)

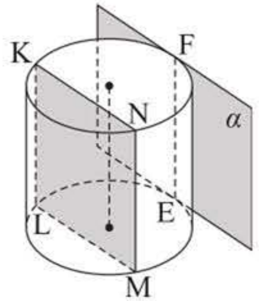


Рисунок 109

Сечением цилиндра, перпендикулярным его основанию, является прямоугольник (например, $ABCD$ или $MNKL$ на рисунках 109, *а*, *б*). Обоснуйте это самостоятельно. Сечение цилиндра, перпендикулярное основанию и проходящее через его центр, называется **осевым сечением** (например, прямоугольник $ABCD$ на рисунке 109, *а*). Цилиндр, осевое сечение которого квадрат, называется **равносторонним цилиндром**.

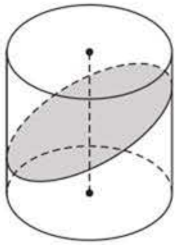


Рисунок 110

Плоскость, содержащая образующую цилиндра и не имеющая с ним других общих точек, называется *плоскостью, касательной к цилиндру* (плоскость α на рисунке 109, *б*).

Сечение боковой поверхности цилиндра, не параллельное его основанию, является эллипсом (рисунок 110). Например, в наклоненном стакане цилиндрической формы с водой поверхность воды образует фигуру, граница которой – эллипс.

З а д а ч а 1. Высота цилиндра равна 8 см, а радиус его основания – 5 см. Построено сечение, параллельное оси цилиндра, являющееся квадратом. Найти расстояние между осью цилиндра и плоскостью этого сечения.

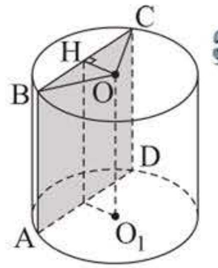


Рисунок 111

Р е ш е н и е. Пусть квадрат $ABCD$ – данное сечение, а прямая OO_1 – ось цилиндра (рисунок 111). Тогда высота OH треугольника OBC – искомое расстояние, так как это расстояние между прямой OO_1 и параллельной ей плоскостью $ABCD$. По условию $AB = BC = 8$ см, следовательно, $BH = HC = 4$ см, а $OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см).

О т в е т. 3 см.

З а д а ч а 2. Длины перпендикуляров AA_1 и BB_1, проведенных из точек A и B боковой поверхности цилиндра к плоскости одного из оснований, равны $6\frac{3}{4}$ дм и $2\frac{1}{4}$ дм соответственно. Радиус основания цилиндра равен 5 дм, а расстояние от центра O этого основания до плоскости AA_1B равно 4 дм (рисунок 112). Найти длину отрезка AB.

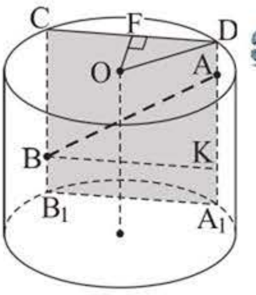


Рисунок 112

Р е ш е н и е. Через точки A и B проведем образующие DA_1 и CB_1 цилиндра.

Четырехугольник A_1B_1CD – прямоугольник. Расстояние от точки O до плоскости AA_1B равно длине отрезка OF, где F – середина отрезка CD. В прямоугольной трапеции AA_1B_1B проведем высоту BK, $BK \parallel B_1A_1$.

В прямоугольном ΔABK $AB = \sqrt{AK^2 + BK^2}$. Так как $AK = 6\frac{3}{4} - 2\frac{1}{4} = 4{,}5$ (дм), $BK = B_1A_1 = 2FD = 2\sqrt{5^2 - 4^2} = 6$ (дм), то $AB = \sqrt{4{,}5^2 + 6^2} = 7{,}5$ (дм).

О т в е т. 7,5 дм.

ВОПРОСЫ

1. Что называется цилиндром?
2. Что называется образующей, основанием, высотой цилиндра?
3. Что называется боковой и полной поверхностями цилиндра?
4. В каком случае сечением цилиндра плоскостью является: а) круг; б) прямоугольник?
5. Что называется осевым сечением цилиндра?
6. Какой цилиндр называется равносторонним цилиндром?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

285. На рисунке 113 укажите четырехугольник, при вращении которого вокруг стороны AB, получится равносторонний цилиндр:

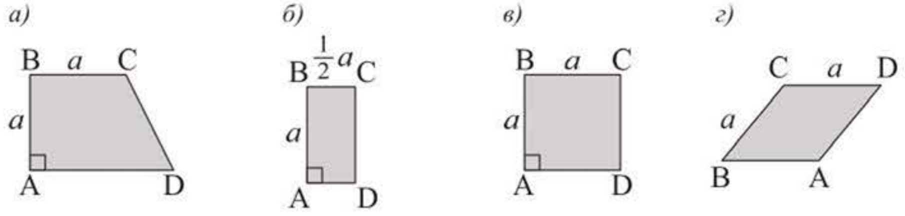


Рисунок 113

286. Осевые сечения двух цилиндров равны. Можно ли утверждать, что равны и высоты этих цилиндров?

287. Какую фигуру образует ось цилиндра, если он катится по плоскости, оставляя след – прямоугольник?

288. Верно ли, что: а) если отрезок с концами на боковой поверхности цилиндра пересекает его ось, то он делится этой осью пополам; б) если все вершины прямоугольника принадлежат боковой поверхности цилиндра, то две из его противоположных сторон перпендикулярны оси этого цилиндра?

289. а) Диагональ осевого сечения равностороннего цилиндра равна $16\sqrt{2}$ см. Чему равен радиус основания цилиндра?

б) Найдите высоту цилиндра, если диагональ его осевого сечения составляет с образующей цилиндра угол 30°, а диаметр его основания равен $4\sqrt{3}$ см.

290. а) Радиус основания цилиндра равен 2,6 см, а образующая – 4,8 см. На каком расстоянии от оси цилиндра находится его сечение – квадрат, параллельное оси?

б) Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, является квадратом, площадь которого равна 144 см^2, и удалено от оси на 8 см. Найдите радиус основания цилиндра.

291. а) Высота цилиндра 20 см, а радиус его основания 5 см. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и удаленной от нее на 1,4 см.

б) Радиус основания цилиндра 7 см. На расстоянии 3 см от оси цилиндра построено сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси. Площадь сечения равна 320 $см^2$. Найдите высоту цилиндра.

292. Цилиндр получен вращением квадрата около его стороны, равной 15 см. Найдите расстояние от оси цилиндра до плоскости его сечения, параллельного ей, площадь которого равна 270 $см^2$.

293. Радиус основания цилиндра равен 12 см. Найдите расстояние между осевым сечением цилиндра и параллельным ему сечением, площадь которого вдвое меньше.

294. Через две образующие цилиндра проведена плоскость, отсекающая от окружности его основания дугу в 300°. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью, если его высота равна 1 м, а радиус основания – 1 дм.

295. Образующая цилиндра является общей стороной двух его перпендикулярных сечений, площади которых равны 15 $дм^2$ и 8 $дм^2$. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, если его высота равна 5 дм.

296. Плоскость пересекает основания цилиндра по хордам, равным 12 см и 16 см, расстояние между которыми равно 18 см. Найдите высоту цилиндра, если радиус его основания равен 10 см.

297. Найдите высоту цилиндра, в котором диагональ сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 дм от нее, в два раза длиннее радиуса основания.

Уровень B

298. Имеет ли цилиндр: а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскость симметрии?

299. Через образующую цилиндра проведены две секущие плоскости, угол между которыми равен β. Найдите отношение площадей сечений цилиндра этими плоскостями, если одно из сечений является осевым.

300. Цилиндр расположен внутри двугранного угла, равного 60°, так, что на гранях угла лежит по одной его образующей. Расстояние от центра основания цилиндра до ребра двугранного угла равно 15 см. Найдите радиус основания цилиндра.

301. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу, равную 120°, и удалена от оси на расстояние d. Диагональ полученного сечения равна $4d$. Найдите высоту и радиус основания цилиндра.

302. Через образующую цилиндра проведены две секущие плоскости цилиндра. Площади полученных сечений равны $10\sqrt{3}$ см^2 и $10\sqrt{2}$ см^2. Найдите угол между плоскостями этих сечений, если радиус основания цилиндра равен 2 см, а его высота 5 см.

303. Двугранный угол между плоскостями двух сечений цилиндра, проходящими через одну из его образующих, равен 60°. Площади этих сечений равны 110 см^2 и 130 см^2. Найдите радиус основания цилиндра, если его высота равна 10 см.

Уровень C

304. Образующая цилиндра является общей стороной двух его перпендикулярных сечений, площади которых равны S_1 и S_2. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

305. а) Найдите наибольшее расстояние между двумя точками поверхности цилиндра, радиус основания которого равен 6 см, а высота – 5 см.
б) Дан цилиндр, радиус основания которого равен r, а образующая – l. Найдите наименьший угол между плоскостью его основания и прямой, проходящей через две точки окружностей его оснований.

306. Даны куб с ребром 4 дм и цилиндр с радиусом основания r (r – переменная величина). Ось цилиндра проходит через центры двух противоположных граней куба. Для каждого значения r укажите число образующих цилиндра, лежащих на гранях куба.

307. В помещении высотой 1,9 м на полу стоит цилиндрическая бочка. Можно ли в этом помещении повалить бочку на бок, если диаметр ее основания 1,2 м, а высота – 1,6 м?

13. Площадь поверхности цилиндра

Учебные достижения по изучению темы:

• знать понятия боковой и полной поверхностей цилиндра, развертки цилиндра;

• знать формулы площадей боковой и полной поверхностей цилиндра;

• уметь выводить их и применять при решении задач.

Призма называется *вписанной в цилиндр* (а цилиндр – описанным около призмы), если основания призмы вписаны в основания цилиндра. Только прямую призму можно вписать в цилиндр, если ее основание можно вписать в основание цилиндра. Например, на рисунке 114, *а* изображен прямоугольный параллелепипед, вписанный в цилиндр.

Призма называется *описанной около цилиндра* (а цилиндр – вписанным в призму), если основания призмы описаны около оснований цилиндра. Около цилиндра можно описать только прямую призму, основание которой можно описать около основания цилиндра. Например, на рисунке 114, *б* прямая треугольная призма описана около цилиндра.

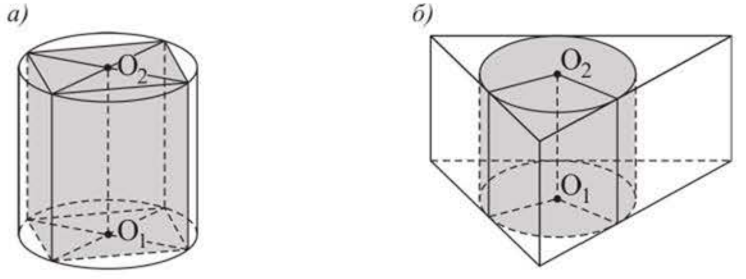


Рисунок 114

За площадь боковой поверхности цилиндра принимается величина, к которой стремится площадь боковой поверхности правильной призмы, вписанной в цилиндр, при неограниченном увеличении числа сторон ее оснований.

Теорема. **Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на его высоту:**

$$S_{бок.} = 2\pi Rh,$$

где R – радиус основания, h – высота цилиндра.

Доказательство. Впишем в цилиндр правильную n-угольную призму (рисунок 115). Ее высота равна высоте цилиндра, а площадь боковой поверхности этой призмы равна произведению периметра ее основания на высоту. Так как основанием призмы является правильный многоугольник, вписанный в окружность, то при неограниченном увеличении числа его сторон периметр многоугольника стремится к длине $2\pi R$ окружности. Тогда площадь боковой поверхности призмы стремится к величине, равной $2\pi Rh$. Следовательно, площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_{бок.} = 2\pi Rh$.

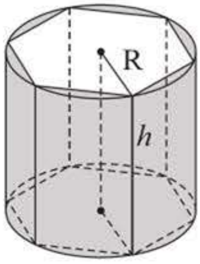


Рисунок 115

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей его оснований и боковой поверхности. **Площадь полной поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на сумму радиуса основания и высоты цилиндра:**

$$S_{п.п.} = 2\pi R(R + h).$$

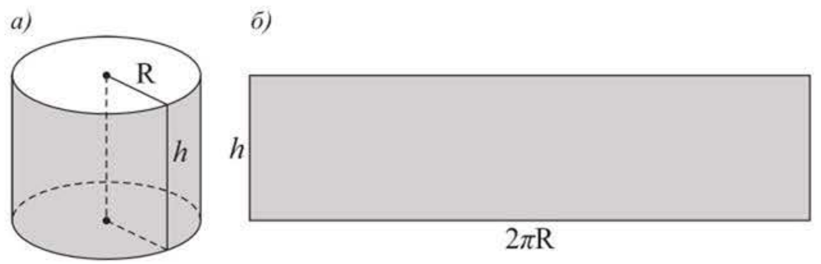


Рисунок 116

Если боковую поверхность цилиндра (рисунок 116, *а*) разрезать по образующей и развернуть ее так, чтобы все образующие лежали в одной плоскости, то получим прямоугольник, который называется *разверткой* боковой поверхности цилиндра (рисунок 116, *б*).

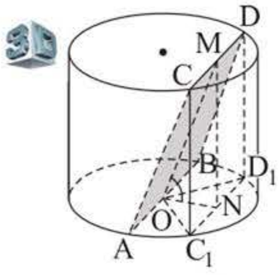


Рисунок 117

З а д а ч а 1. Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра, наклонена к нему под углом 60°. Эта плоскость пересекает верхнее основание цилиндра по хорде, равной 10 см, стягивающей дугу 90°. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

Р е ш е н и е. Пусть секущая плоскость пересекает основания цилиндра по хордам AB и CD, тогда $AB \parallel CD$ (рисунок 117). Построим хорду $C_1D_1 = CD$ и точки N и M – середины этих хорд, тогда MN – высота цилиндра, OD_1 – радиус его основания, $\angle MON = 60°$, $\angle C_1OD_1 = 90°$. Из прямоугольных треугольников C_1OD_1 и MON имеем: $ON = ND_1 = 5$ см, $OD_1 = 5\sqrt{2}$ см,

$MN = ON \cdot \operatorname{tg} 60° = 5\sqrt{3}$ см. Тогда площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_{бок.} = 2\pi \cdot OD_1 \cdot MN = 2\pi \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = 50\pi\sqrt{6}$ (см^2).

Ответ. $50\pi\sqrt{6}$ см^2.

Отметим, что *цилиндр* называется *вписанным в пирамиду* (или пирамида – описанной около цилиндра), если одно его основание принадлежит основанию пирамиды, а другое касается каждой боковой грани пирамиды.

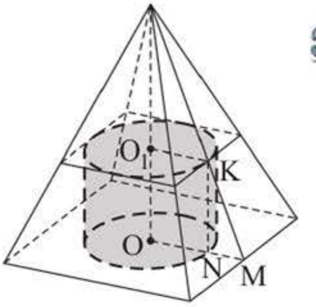


Рисунок 118

Сечение пирамиды, параллельное основанию, подобно ему. Если в это сечение можно вписать окружность, то в пирамиду можно вписать цилиндр. Например, на рисунке 118 цилиндр вписан в четырехугольную пирамиду, основание которой – ромб.

Задача 2. Цилиндр вписан в правильную треугольную пирамиду со стороной основания a, а высотой h. Найти высоту цилиндра, если радиус его основания равен r.

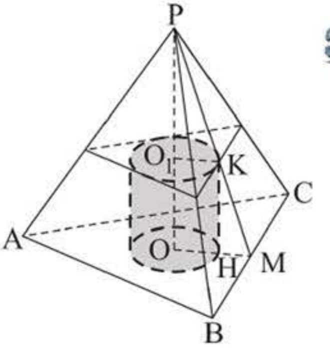


Рисунок 119

Решение. Пусть высота пирамиды $PO = h$, сторона основания $AB = a$, радиус основания цилиндра $O_1K = r$ (рисунок 119). Обозначим длину образующей KH цилиндра, равную его высоте O_1O, через x. Из подобия прямоугольных треугольников POM и PO_1K имеем: $\frac{PO}{PO_1} = \frac{OM}{O_1K}$, то есть $\frac{h}{h-x} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{r}$. Отсюда $h \cdot r = (h-x) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $h - x = \frac{6hr}{a\sqrt{3}}$, $x = h - \frac{2hr\sqrt{3}}{a}$.

Ответ. $h - \frac{2hr\sqrt{3}}{a}$.

ВОПРОСЫ

1. Что принимается за площадь поверхности цилиндра?
2. По каким формулам можно найти площади боковой и полной поверхностей цилиндра? Выведите эти формулы.
3. Что является разверткой боковой поверхности цилиндра? Изобразите развертку полной поверхности цилиндра.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

308. Укажите, какой из рисунков 120, *а*, *б*, *в*, *г* является изображением развертки боковой поверхности цилиндра с радиусом основания 3 и образующей 6:

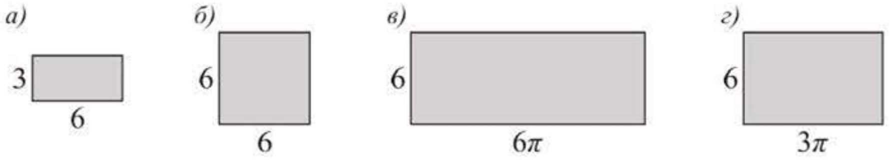


Рисунок 120

309. Существует ли цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна сумме площадей его оснований? Ответ объясните.

310. Прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см вращается вокруг: а) его меньшей стороны; б) большей стороны. Найдите площадь полной поверхности тела вращения.

311. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если диагональ его осевого сечения, равная $10\sqrt{2}$ см, составляет с образующей угол 45°.

312. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, площадь основания которого равна π дм^2, а площадь его осевого сечения – 2 дм^2.

313. Найдите площадь полной поверхности равностороннего цилиндра, если его высота равна h.

314. Каким должен быть радиус основания равностороннего цилиндра, чтобы площадь его полной поверхности была равной: а) 12π м^2; б) площади поверхности куба с ребром 2 м?

315. Найдите площадь полной поверхности равностороннего цилиндра, если площадь его боковой поверхности равна 16π дм^2.

316. Прямоугольник с размерами $\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ дм и $\sqrt{\frac{24}{\pi}}$ дм является разверткой боковой поверхности двух разных цилиндров. Найдите разность площадей их полных поверхностей.

317. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если: а) развертка его боковой поверхности – квадрат со стороной 1 дм; б) в развертке его боковой поверхности образующая составляет с диагональю угол, равный 60°, а высота цилиндра равна 2 дм.

318. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси, отсекает от окружности основания дугу в 90°. Диагональ сечения вдвое больше радиуса цилиндра, равного 4 см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

319. Хватит ли 9 м^2 жести для изготовления 20 ведер формы равностороннего цилиндра высотой 30 см, если на швы используется 1 % площади боковой поверхности ведра?

Уровень B

320. а) Чему равно отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади его осевого сечения?

б) Найдите площадь поверхности цилиндра, если площади его основания и осевого сечения равны Q и S соответственно.

321. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно $9\sqrt{2}$ см и образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите высоту равностороннего цилиндра, вписанного в эту пирамиду.

322. Основание пирамиды – правильный треугольник со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а третья образует с ней угол α. В пирамиду вписан цилиндр, высота которого равна радиусу его основания. Найдите радиус основания цилиндра.

323. Правильный тетраэдр $OABC$, ребро которого равно b, и цилиндр расположены так, что вершина O тетраэдра является центром одного основания цилиндра, а вершины A, B, C лежат на окружности другого основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Уровень C

324. Периметр осевого сечения цилиндра равен P. Найдите высоту и радиус основания этого цилиндра, если площадь его боковой поверхности наибольшая.

325. Дан цилиндр, диаметр основания которого равен d. Сечением боковой поверхности этого цилиндра является эллипс, плоскость которого наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью.

326. Цилиндр и правильный октаэдр $EABCDF$ расположены так, что вершины E и F октаэдра являются центрами оснований цилиндра, а вершины A, B, C, D принадлежат цилиндрической поверхности (рисунок 121). Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если ребро октаэдра равно a.

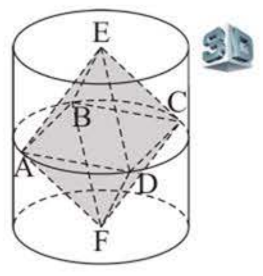


Рисунок 121

14. Конус и его элементы. Сечение конуса плоскостью

Учебные достижения по изучению темы:
- знать определения конуса, его элементов;
- уметь изображать конус и его сечения;
- уметь решать задачи на нахождение элементов конуса.

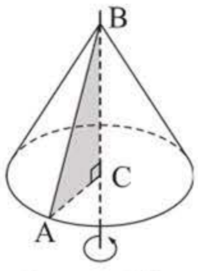


Рисунок 122

Конусом называется тело, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг его катета. Прямая, содержащая ось вращения конуса (или отрезок, соединяющий его вершину с центром основания), называется **осью конуса.** Например, на рисунке 122 дано изображение конуса, полученного вращением прямоугольного ΔABC вокруг его катета BC. Точка B называется **вершиной** конуса. Гипотенуза BA называется **образующей** конуса. Она описывает поверхность, которая называется **боковой поверхностью** конуса, катет CA описывает круг – **основание** конуса. Перпендикуляр, проведенный из вершины конуса к плоскости его основания, называют **высотой** конуса. Длина этого отрезка также называется высотой конуса. Фигура, состоящая из объединения боковой поверхности конуса и его основания, называется **полной поверхностью конуса**.

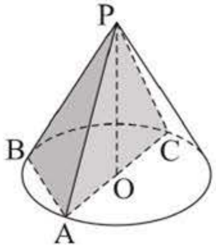


Рисунок 123

Все сечения конуса, содержащие его вершину, являются равнобедренными треугольниками (например, ΔPAB или ΔPAC на рисунке 123).

Сечение конуса, содержащее его вершину и центр основания, называется **осевым сечением** конуса. Конус, осевое сечение которого – равносторонний треугольник, называется **равносторонним конусом**.

Т е о р е м а. **Сечением конуса плоскостью, параллельной его основанию, является круг.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть основание конуса – F, параллельное ему сечение – F_1, O_1 – точка, в которой высота PO пересекает плоскость сечения (рисунок 124). Докажем, что фигуры F_1 и F подобны.

Поставим в соответствие произвольной точке X основания F конуса точку X_1 – пересечение отрезка PX и плоскости сечения, а точке Y – точку Y_1. Тогда по свойству сечения пирамиды $POXY$ плоскостью, параллельной его основанию, имеем: $\frac{X_1Y_1}{XY} = \frac{PO_1}{PO} = k$, где k – постоянное число. Так как для любых точек X и Y основания F конуса и соответствующих им точек сечения F_1 верно равенство $\frac{X_1Y_1}{XY} = k$, то $F_1 \sim F$. Следовательно, сечением конуса плоскостью, параллельной основанию, является круг.

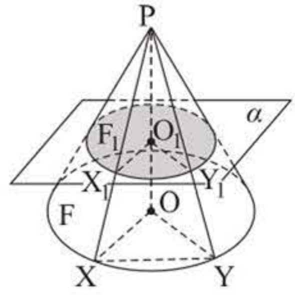


Рисунок 124

З а д а ч а 1. Плоскость проходит через вершину равностороннего конуса и хорду его основания. Образующая конуса равна l. Найти расстояние от центра основания конуса до этой плоскости, если она наклонена к основанию под углом $\alpha = 60°$.

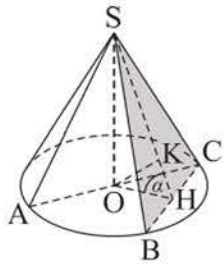


Рисунок 125

Р е ш е н и е. Пусть ΔSBC – сечение конуса указанной плоскостью, а ΔASC – его осевое сечение, тогда $AS = SC = AC = l$ (рисунок 125). Высота конуса $SO = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Угол наклона плоскости SBC к основанию равен углу SHO, где H – середина хорды BC, а расстояние от точки O до плоскости SBC – это высота OK ΔSOH (объясните почему). Так как $OK = OH \cdot \sin\alpha$ (из ΔOKH), $OH = SO \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ (из ΔSOH), то $OK =$
$= SO \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha = SO \cdot \cos\alpha = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{4}$.

О т в е т. $\frac{l\sqrt{3}}{4}$.

З а д а ч а 2. Построено сечение конуса наибольшей площади, содержащее его вершину P. Найти площадь этого сечения, если образующая конуса равна 8 см, а угол при вершине P его осевого сечения равен α (α – переменная величина).

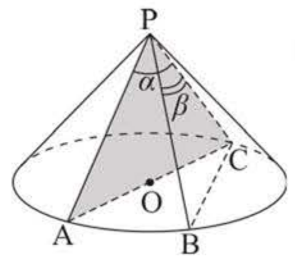


Рисунок 126

Р е ш е н и е. Пусть ΔPAC – осевое сечение конуса, тогда $\angle APC = \alpha$. Другое сечение конуса, содержащее его вершину, – ΔPBC, пусть $\angle BPC = \beta$ (рисунок 126). Площадь S любого сечения конуса, проходящего через две его образующие, равна: $S = \frac{1}{2}l^2 \cdot \sin\varphi$, где l – длина образующей конуса, φ – угол между образующими.

Наибольшее значение S достигается при наибольшем значении $\sin\varphi$.

Если $\alpha \leq 90°$, то наибольшую площадь имеет осевое сечение конуса, так как $\sin\alpha > \sin\beta$. $S = \frac{1}{2}l^2 \cdot \sin\alpha = 32\sin\alpha$ (см^2).

Если $90° < \alpha < 180°$, то найдутся две образующие конуса, угол между которыми равен 90°. Тогда площадь сечения, содержащего эти образующие, будет наибольшая, так как $\sin 90° > \sin\alpha$. $S = \frac{1}{2}l^2 \cdot \sin 90° = \frac{1}{2}l^2 = 32$ (см^2).

Ответ. $32\sin\alpha$ см^2, если $0° < \alpha \leq 90°$; 32 дм^2, если $90° < \alpha < 180°$.

Отметим, что *призма* называется *вписанной в конус* (а конус – описанным около призмы), если одно ее основание лежит на основании конуса, а вершины другого – на его боковой поверхности.

Сечением конуса, параллельного его основанию, является круг, поэтому в конус можно вписать n-угольную призму, если в этот круг можно вписать n-угольник (рисунок 127).

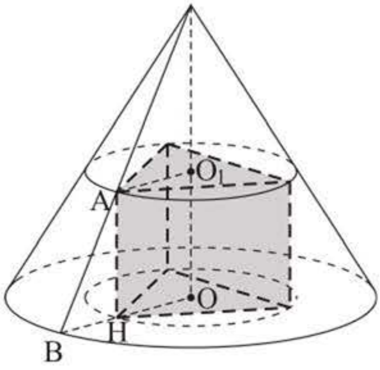


Рисунок 127

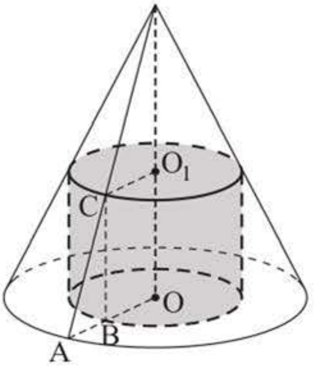


Рисунок 128

Цилиндр называется *вписанным в конус* (или конус – описанным около цилиндра), если одно его основание лежит на основании конуса, а окружность другого основания – на боковой поверхности конуса (рисунок 128).

ВОПРОСЫ

1. Что называется конусом?
2. Дайте определения вершины, образующей, основания, высоты конуса.
3. Что называется боковой поверхностью конуса и полной поверхностью конуса?
4. Что называется осевым сечением конуса?
5. Какой конус называется равносторонним конусом?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

327. Через точку основания конуса и середину его высоты проведите прямую и отметьте точку пересечения этой прямой с боковой поверхностью конуса.

328. В конусе с радиусом основания 12 см проведены два сечения, параллельные основанию и делящие высоту конуса на три равные части. Найдите площади этих сечений.

329. Найдите высоту конуса и его образующую, если осевое сечение конуса: а) прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 12 см; б) треугольник, площадь которого равна $16\sqrt{3}$ см^2, а один из углов равен 120°.

330. Через вершину конуса проведены две плоскости, образующие равные углы с плоскостью основания. Верно ли, что сечения конуса этими плоскостями равны? Ответ объясните.

331. а) Длины двух сторон осевого сечения конуса равны 4 см и 8 см. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и отсекающей дугу основания в 60°.

б) Один из углов осевого сечения конуса равен 90°. Хорда основания конуса, равная $4\sqrt{3}$ см, стягивает дугу в 120°. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и данную хорду основания.

332. Площади осевого сечения конуса и сечения, проведенного через середину его высоты параллельно основанию, равны соответственно 48 см^2 и 9π см^2. Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса.

333. Радиус основания равностороннего конуса равен 10 см. Найдите с точностью до 0,1 см радиус сечения конуса плоскостью, параллельной его основанию, если площадь этого сечения равна площади осевого сечения конуса.

334. Радиус основания конуса равен 6 см, а его образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину, если высота конуса образует с этой плоскостью угол 30°.

Уровень В

335. Одна из образующих конуса принадлежит плоскости, не имеющей с конусом общих внутренних точек. На каком наибольшем расстоянии от этой плоскости находятся точки конуса, если его образующая равна 2,5 дм, а радиус основания – 2 дм?

336. Два конуса имеют общую вершину и общий центр оснований. Из точки окружности основания большего конуса проведены две касательные к окружности основания меньшего конуса, угол между которыми 60°. Образующая большего конуса наклонена к основанию под углом 45°. Найдите радиус основания меньшего конуса, если его высота равна 5 см.

337. а) Найдите ребро куба, вписанного в конус, образующая которого равна 1 дм и наклонена к плоскости основания под углом 45°.
б) В конус вписан куб. Найдите косинус угла при вершине конуса в его осевом сечении, если середина высоты конуса принадлежит верхней грани куба.

338. Найдите площадь основания конуса высотой h, в котором имеются три взаимно перпендикулярные образующие.

Уровень С

339. а) Радиус основания конуса равен 12 см, а его высота равна 8 см. Какую наибольшую площадь может иметь сечение конуса, содержащее его вершину?
б) Площадь наибольшего сечения конуса, содержащего его вершину, вдвое больше площади его осевого сечения. Найдите угол наклона образующей конуса к основанию.

340. а) Образующая конуса равна 1 м и наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите высоту равностороннего цилиндра, вписанного в конус.
б) Можно ли в равносторонний конус, образующая которого равна 1 м, вписать равносторонний цилиндр? Если можно, то найдите радиус основания такого цилиндра.

341. В конус вписана прямая треугольная призма с равными ребрами. Радиус основания конуса равен R, а угол наклона образующей к плоскости основания равен 60°. Найдите длину ребра призмы.

15. Площадь поверхности конуса

Учебные достижения по изучению темы:

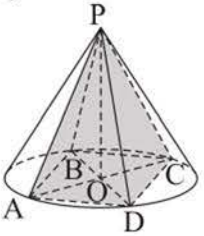
• знать понятия боковой и полной поверхностей конуса, развертки конуса;

• знать формулы площадей боковой и полной поверхностей конуса;

• уметь выводить их и применять при решении задач.

Пирамида называется *вписанной в конус* (или конус – описанным около пирамиды), если их вершины совпадают, а основание пирамиды – многоугольник, вписанный в основание конуса. В конус можно вписать любую пирамиду, боковые ребра которой равны (рисунок 129, *а*). При этом ее боковые ребра являются образующими конуса.

а)



б)

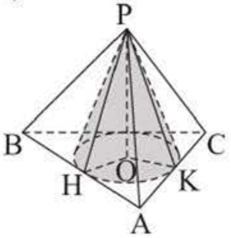


Рисунок 129

Пирамида называется *описанной около конуса* (а конус – вписанным в пирамиду), если их вершины совпадают, а основание пирамиды описано около основания конуса. При этом все плоскости боковых граней пирамиды касаются боковой поверхности конуса (рисунок 129, *б*).

За площадь боковой поверхности конуса принимается величина, к которой стремится площадь боковой поверхности правильной пирамиды, вписанной в конус, при неограниченном увеличении числа сторон ее основания.

Теорема. **Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую:**

$$S_{бок.} = \pi R l,$$

где R – радиус основания конуса, l – длина его образующей.

Доказательство. Впишем в конус правильную n-угольную пирамиду (рисунок 130). Площадь боковой поверхности этой пирамиды равна произведению полупериметра ее основания на апофему. При неограниченном увеличении числа n сторон основания пирамиды площадь ее боковой

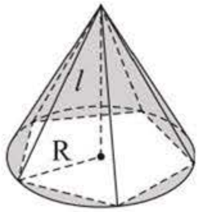


Рисунок 130

поверхности стремится к величине, равной πRl. Следовательно, площадь боковой поверхности конуса равна $S_{бок.} = \pi Rl$.

Если боковую поверхность конуса (рисунок 131, *а*) разрезать по образующей и развернуть ее так, чтобы все образующие лежали в одной плоскости, то получим круговой сектор, который называется *разверткой боковой поверхности конуса* (рисунок 131, *б*).

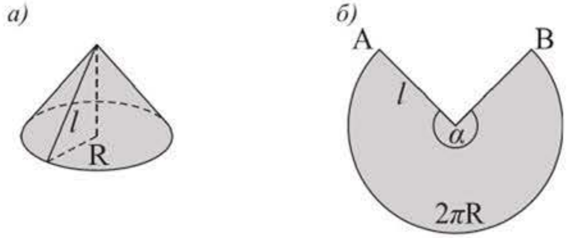


Рисунок 131

Площадь развертки боковой поверхности конуса равна площади боковой поверхности конуса. По формуле площади сектора имеем: $\boldsymbol{S_{бок.кон.}} = \dfrac{\boldsymbol{\pi l^2 \cdot \alpha}}{\boldsymbol{360^\circ}}$, где l – длина его образующей, α – градусная мера дуги AB или центрального угла, которым она измеряется.

Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей его боковой поверхности и основания. Площадь полной поверхности $S_{п.п.}$ конуса равна $\boldsymbol{S_{п.п.} = \pi R(R + l)}$, R – радиус основания конуса, l – длина его образующей.

З а д а ч а (о площади боковой поверхности конуса). Доказать, что площадь боковой поверхности конуса равна $\boldsymbol{S_{бок.} = 2\pi hd}$, где h – высота конуса, d – длина отрезка серединного перпендикуляра к образующей конуса, один конец которого лежит на ней, а другой – на оси конуса.

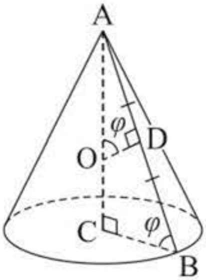


Рисунок 132

Доказательство. $S_{\text{бок.кон.}} = \pi Rl$, где $l = 2AD$, $R = BC$ (рисунок 132). Отрезок серединного перпендикуляра к образующей $DO = d$, высота конуса $AC = h$. Так как треугольники ABC и AOD подобны, то $\angle ABC = \angle AOD = \varphi$, тогда $BC = AC \cdot \operatorname{ctg}\varphi = h \cdot \operatorname{ctg}\varphi$, $AD = DO \cdot \operatorname{tg}\varphi = d \cdot \operatorname{tg}\varphi$. Следовательно, $S_{\text{бок.кон.}} = 2\pi \cdot BC \cdot AD = 2\pi h \cdot \operatorname{ctg}\varphi \cdot d \cdot \operatorname{tg}\varphi = 2\pi hd$.

ВОПРОСЫ

1. Что принимается за площадь полной поверхности конуса?
2. По каким формулам можно найти площади боковой и полной поверхностей конуса?
3. Что является разверткой боковой поверхности конуса?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

342. а) Может ли площадь боковой поверхности конуса быть равной площади его основания?

б) Радиусы оснований и высоты цилиндра и конуса равны. Могут ли быть равными площади их боковых поверхностей?

343. Как относятся площади основания, боковой поверхности и полной поверхности равностороннего конуса?

344. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если: а) его высота равна 8 дм, а радиус основания – 6 дм; б) образующая конуса наклонена к основанию под углом 45°, а его высота равна 4 дм.

345. Крыша башни имеет форму конуса. Высота крыши 1,5 м, а диаметр основания башни равен 4 м. Найдите с точностью до 0,1 м^2 площадь поверхности крыши.

346. а) Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, разверткой боковой поверхности которого является полукруг.

б) Площадь боковой поверхности конуса втрое больше площади его основания. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания конуса.

347. Радиус сектора равен 6 дм, а его угол 120°. Сектор свернут в коническую воронку. Найдите радиус основания конуса.

348. Найдите центральный угол развертки боковой поверхности конуса, если: а) площадь полной поверхности конуса 27π, а площадь его боковой поверхности 18π; б) его образующая 5 см, а площадь полной поверхности 24π см^2.

349. Коническая жестяная воронка должна иметь диаметр основания 10 см и высоту 12 см. Найдите размеры ее заготовки (радиус и угол сектора развертки боковой поверхности конуса).

350. Найдите площадь осевого сечения конуса, если его высота равна 6 дм, а площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания.

Уровень B

351. Найдите площадь поверхности тела вращения, если: а) равнобедренный треугольник с углом при основании 60° и боковой стороной 8 см вращается вокруг боковой стороны; б) прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вращается вокруг гипотенузы.

352. Найдите площадь поверхности тела, полученного в результате вращения ромба со стороной 4 см и углом 30° вокруг: а) его стороны; б) его меньшей диагонали.

353. В равносторонний конус вписана правильная шестиугольная пирамида. Найдите двугранный угол пирамиды при ребре ее основания.

354. Найдите высоту конуса, в который вписана правильная четырехугольная пирамида со стороной основания a и углом 30° между соседними боковыми ребрами.

Уровень C

355. Найдите наибольшую площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в конус с высотой 12 дм и радиусом основания 5 дм.

356. В конусе радиус основания относится к его высоте как $1 : \sqrt{2}$. Найдите угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус.

357. В правильной треугольной пирамиде вершина основания удалена на 10 см от противолежащей боковой грани. В пирамиду вписан конус, образующая которого наклонена к основанию под углом 75°. Найдите высоту и радиус основания конуса.

16. Усеченный конус и его элементы

Учебные достижения по изучению темы:
- знать определения усеченного конуса, его элементов;
- уметь изображать усеченный конус и его сечения;
- уметь решать задачи на нахождение элементов усеченного конуса.

Усеченным конусом называется тело, отсеченное от конуса плоскостью, параллельной его основанию и содержащее это основание (рисунок 133, *а*). При этом основание конуса и его сечение указанной плоскостью называются **основаниями** усеченного конуса. **Высотой** усеченного конуса называется перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания к плоскости другого его основания. Длина этого перпендикуляра также называется высотой усеченного конуса. Отрезок, лежащий на образующей конуса, концы которого находятся на окружностях оснований усеченного конуса, называется **образующей** усеченного конуса. Любое сечение усеченного конуса, содержащее две его образующие, – равнобедренная трапеция. Фигура, состоящая из всех образующих усеченного конуса, называется его *боковой поверхностью*, а объединение оснований усеченного конуса и его боковой поверхности называется *полной поверхностью усеченного конуса*.

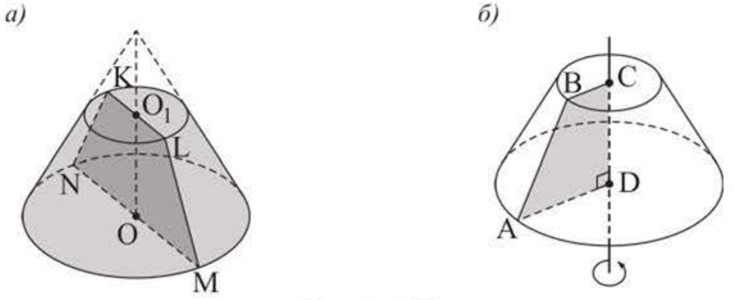


Рисунок 133

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее меньшей боковой стороны. Например, на рисунке 133, *б* дано изображение усеченного конуса, полученного вращением прямоугольной трапеции *ABCD* вокруг ее меньшей боковой стороны *CD*. Основания *BC* и *AD* трапеции описывают круги – основания усеченного конуса, а отрезок *AB* – его боковую поверхность. Прямую, проходящую через центры оснований усеченного конуса (или отрезок, соединяющий эти центры), называют **осью** усеченного конуса. Любое сечение усеченного конуса, содержащее его ось, называется **осевым сечением** усеченного конуса. На рисунке 133, *а* равнобедренная трапеция $MNKL$ – осевое сечение усеченного конуса.

Задача. Площади оснований усеченного конуса равны $4\,см^2$ и $16\,см^2$. Через середину его высоты проведена плоскость, параллельная основаниям усеченного конуса. Найти площадь сечения конуса этой плоскостью.

Решение. Указанное сечение – круг с диаметром, равным средней линии MN трапеции $ABCD$ – осевого сечения усеченного конуса (рисунок 134). $MN = 0,5(AD + BC) = AO_1 + BO_2$. Так как по условию $4 = \pi \cdot BO_2^2$, $16 = \pi \cdot AO_1^2$, то $BO_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $AO_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$. Значит, $MN = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, $MO = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$. Тогда $S_{сеч.} = \pi \cdot MO^2 = \pi \cdot \frac{9}{\pi} = 9$ ($см^2$).

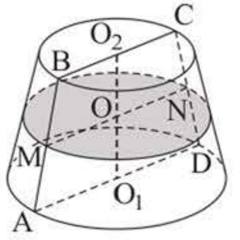


Рисунок 134

Ответ. $9\,см^2$.

ВОПРОСЫ

1. Что называется усеченным конусом?

2. Дайте определения образующей, оснований, высоты усеченного конуса.

3. Что называется боковой поверхностью и полной поверхностью усеченного конуса?

4. Что называется осевым сечением усеченного конуса?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

358. Найдите площадь осевого сечения усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 8 см и 14 см, а образующая равна 10 см.

359. Найдите высоту усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 3 м и 6 м, а образующая наклонена к основанию под углом: а) $45°$; б) $30°$.

360. а) Найдите высоту ведра, имеющего форму усеченного конуса с большим верхним основанием, если его образующая 2,5 дм, а радиусы оснований равны 1,7 дм и 1 дм.

б) Найдите длину образующей усеченного конуса, высота которого равна $\sqrt{30}$ дм, а площади оснований 6π дм^2 и 24π дм^2.

361. Дан усеченный конус, площадь осевого сечения которого равна 32 см^2. Высота усеченного конуса равна диаметру верхнего основания, а его образующая наклонена к плоскости основания под углом $45°$. Найдите: а) радиусы оснований этого усеченного конуса; б) длину его образующей.

362. а) Дан усеченный конус, высота которого равна 12 см, радиус нижнего основания равен 8 см, а тангенс угла между образующей и основанием равен 2,4. Найдите площадь верхнего основания этого усеченного конуса.

б) Образующая усеченного конуса, равная 16 см, наклонена к основанию под углом $60°$. Найдите радиусы оснований этого усеченного конуса, если их отношение равно 3.

363. Сшит колпак формы усеченного конуса, образующая которого 20 см, диаметр верхнего основания 8 см, а высота 16 см. Подойдет ли такая шляпа для головы снеговика, если окружность его головы равна 1 м?

364. Бревно высотой 5 м формы усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 0,25 м и 0,09 м, распилили на три бревна, высоты которых равны. Найдите с точностью до 0,01 м длины образующих полученных усеченных конусов.

Уровень B

365. Образующая усеченного конуса равна 8 см и наклонена к плоскости его нижнего основания под углом $60°$. Прямая, содержащая диагональ его осевого сечения, делит этот угол пополам. Найдите радиусы оснований усеченного конуса.

366. а) Найдите длину образующей конуса, от которого отделен усеченный конус с радиусами оснований 18 см, 15 см и образующей 9 см.

б) Высота конуса равна $\sqrt{2}$ м. На каком расстоянии от его вершины надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площади оснований отсеченного усеченного конуса относились как 1 : 2?

367. Образующая усеченного конуса равна l и наклонена к плоскости его нижнего основания под углом φ. Найдите радиусы оснований усеченного конуса, если отношение площадей его оснований равно $\frac{1}{9}$.

Уровень C

368. Найдите отношение площади сечения, перпендикулярного высоте усеченного конуса и проходящего через ее середину, к площади его осевого сечения, диагонали которого перпендикулярны.

369. Площадь осевого сечения усеченного конуса равна S. Найдите площадь сечения конуса, которое содержит хорды его оснований, стягивающие дуги, равные 2α, если известно, что угол между плоскостями сечения и основания равен φ.

17. Площадь поверхности усеченного конуса

Учебные достижения по изучению темы:

• знать понятия боковой и полной поверхностей усеченного конуса, развертки усеченного конуса;

• знать формулы площадей боковой и полной поверхностей усеченного конуса;

• уметь выводить их и применять при решении задач.

За площадь боковой поверхности усеченного конуса принимается величина, к которой стремится площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды, вписанной в усеченный конус, при неограниченном увеличении числа сторон ее оснований.

Теорема. **Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению половины суммы длин окружностей оснований на его образующую:**

$$S_{бок.} = \pi(R_1 + R_2) \cdot l,$$

где R_1, R_2 – радиусы оснований усеченного конуса, l – длина его образующей.

Доказательство. Впишем в усеченный конус правильную n-угольную усеченную пирамиду (рисунок 135). Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды равна произведению суммы полупериметров ее оснований на апофему. При неограниченном увеличении числа n сторон оснований усеченной пирамиды периметры ее оснований стремятся к величинам $2\pi R_1$ и $2\pi R_2$, а апофема усеченной пирамиды – к длине образующей усеченного конуса. Тогда площадь ее боковой поверхности стремится к величине, равной $\pi l(R_1 + R_2)$. Следовательно, площадь боковой поверхности усеченного конуса $S_{бок.} = \pi l(R_1 + R_2)$.

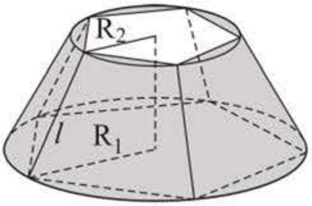


Рисунок 135

Площадью полной поверхности усеченного конуса называется сумма площадей его боковой поверхности и оснований. Площадь полной поверхности усеченного конуса равна $\boldsymbol{S_{п.п.} = \pi R_1^2 + \pi l(R_1 + R_2) + \pi R_2^2}$, где R_1, R_2 – радиусы оснований усеченного конуса, l – длина его образующей.

Задача 1 (о площади боковой поверхности усеченного конуса). Доказать, что площадь боковой поверхности усеченного конуса равна:

$S_{бок.} = 2\pi hd$, где h – высота усеченного конуса, d – длина отрезка серединного перпендикуляра к образующей усеченного конуса, один конец которого лежит на ней, а другой – на оси конуса.

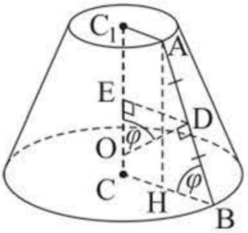


Рисунок 136

Доказательство. $S_{бок. ус. кон.} = \pi \cdot l \cdot (R_1 + R_2)$, где $l = AB$, $R_1 = BC$, $R_2 = AC_1$ (рисунок 136). Отрезок серединного перпендикуляра к образующей $DO = d$, высота усеченного конуса $CC_1 = h$. Проведем $AH \perp BC$ и $DE \perp CC_1$, тогда $\angle ABC = \angle DOE = \varphi$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами) и $AH = CC_1 = h$. Из ΔABH имеем: $AB = \dfrac{AH}{\sin\varphi} = \dfrac{h}{\sin\varphi}$.
В трапеции $ABCC_1$ по свойству ее средней линии $BC + AC_1 = 2DE$. Из ΔDOE имеем: $DE = DO \cdot \sin\varphi = d \cdot \sin\varphi$. Следовательно, $S_{бок. ус. кон.} = \pi \cdot AB \cdot 2DE = \pi \cdot \dfrac{h}{\sin\varphi} \cdot 2d \cdot \sin\varphi = 2\pi hd$. Что и требовалось доказать.

Задача 2. Ромб с углом 60° и стороной c вращается вокруг оси, перпендикулярной его стороне и проходящей через вершину острого угла. Найти площадь поверхности тела вращения.

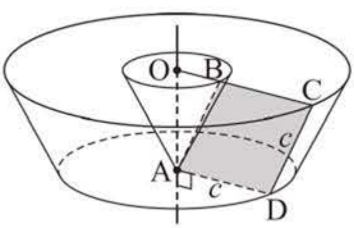


Рисунок 137

Решение. Поверхность этого тела вращения состоит из боковой поверхности усеченного конуса с радиусами оснований AD, OC и образующей CD, боковой поверхности конуса с радиусом основания OB и образующей AB, круга с радиусом AD и кольца с радиусами OC и OB (рисунок 137).

$S_{бок. ус. кон.} = \pi \cdot l \cdot (R_1 + R_2) = \pi c(c + c + 0{,}5c) = 2{,}5c^2\pi$, где $l = CD = c$, $R_2 = OC = BC + OB = c + 0{,}5c$, так как в ΔABO $\angle A = 30°$ и $OB = 0{,}5AB = 0{,}5c$.

$S_{бок. кон.} = \pi Rl = 0{,}5c^2\pi$, где $l = AB = c$, $R = OB = 0{,}5c$.

$S_{круга} = \pi c^2$.

$S_{кольца} = \pi(OC^2 - OB^2) = \pi((1{,}5c)^2 - (0{,}5c)^2) = 2\pi c^2$.

Тогда искомая площадь равна: $2{,}5c^2\pi + 0{,}5c^2\pi + \pi c^2 + 2\pi c^2 = 6\pi c^2$.

Ответ. $6\pi c^2$.

ВОПРОСЫ

1. Что принимается за площадь полной поверхности усеченного конуса?

2. По каким формулам можно найти площади боковой и полной поверхностей усеченного конуса?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

370. Равнобедренная трапеция с основаниями 4 см, 10 см и боковой стороной 5 см вращается вокруг своей оси симметрии. Найдите площадь поверхности тела вращения.

371. Образующая усеченного конуса равна 6 см и образует с плоскостью нижнего основания угол 60°. Найдите площадь полной поверхности этого усеченного конуса, если диаметр его верхнего основания равен 10 см.

372. Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса, если площади его оснований равны 4π см^2 и 100π см^2, а площадь осевого сечения – 180 см^2.

373. Образующая усеченного конуса равна 10 см, высота – 8 см, а площадь боковой поверхности – 140π см^2. Найдите радиусы его оснований.

374. а) Найдите с точностью до 1 см^2 площадь боковой поверхности усеченного конуса, радиусы оснований которого относятся как 1 : 2, высота равна 8 см, а его образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°.

б) Сколько квадратных сантиметров материала нужно для изготовления рупора в виде усеченного конуса, образующая которого равна 2 дм, а радиусы оснований 2 см и 4 см? Ответ дайте с точностью до 1 см^2.

375. Существует ли усеченный конус, площадь боковой поверхности которого равна сумме площадей его оснований?

Уровень В

376. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если диагонали его осевого сечения перпендикулярны, а образующая, равная 12 см, наклонена к плоскости нижнего основания под углом 60°.

377. Через две образующие усеченного конуса, угол между которыми 60°, проведена плоскость, пересекающая основания конуса по хордам, равным 6 см и 4 см. Каждая из этих хорд стягивает дугу 90°. Найдите площадь боковой поверхности этого усеченного конуса.

378. Какую высоту будет иметь ведро, если в заготовке для получения его боковой поверхности величины дуг равны по 60°, а их радиусы – 72 см и 48 см? Ответ дайте с точностью до 0,1 см.

379. Через две образующие усеченного конуса, угол между которыми 90°, проведена плоскость, отсекающая от окружностей его оснований дуги в 120°. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если отношение площадей его оснований равно $\frac{1}{4}$, а образующая $2\sqrt{6}$ см.

380. Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса, если диагонали его осевого сечения перпендикулярны, высота равна 12 см, а образующая наклонена к плоскости нижнего основания под углом 60°.

Уровень C

381. Площади нижнего, верхнего оснований и боковой поверхности усеченного конуса относятся как 4 : 3 : 2 соответственно. Найдите угол наклона образующей к его нижнему основанию.

382. Какую высоту будет иметь ведро, если в заготовке для получения его боковой поверхности величины дуг равны по 72°, а их радиусы – 92 см и 65 см? Достаточно ли листа жести размером 105×30 см для его изготовления?

18. Сфера и шар. Сечение шара плоскостью

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определения сферы, шара;

• знать взаимное расположение плоскости и сферы; определение и свойство касательной плоскости к сфере;

• уметь изображать шар, сечение шара плоскостью; плоскость, касательную к сфере;

• уметь решать задачи на взаимное расположение плоскости и сферы и задачи, связанные с сечениями шара и сферы плоскостью.

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки на одно и то же расстояние, а шаром – множество всех точек пространства, находящихся от некоторой точки на расстоянии, не большем данного. Данную точку называют *центром сферы* (или шара). Шар – это тело, поверхностью которого является сфера.

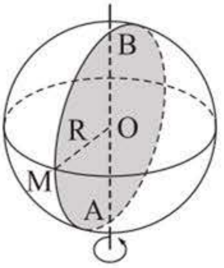


Рисунок 138

Сфера может быть получена вращением окружности вокруг прямой, содержащей ее диаметр, а шар – вращением круга вокруг такой прямой (рисунок 138). Центр этого круга – *центр шара* и, соответственно, центр сферы, являющейся поверхностью шара.

Отрезок, соединяющий центр шара с любой точкой его поверхности, называется **радиусом шара** или радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы, называется **хордой сферы** или хордой шара, границей которого является эта сфера. Хорда, которой принадлежит центр сферы, называется **диаметром сферы** (шара). Любая хорда шара не больше его диаметра. Прямую, содержащую диаметр шара (или сам диаметр шара), называют **осью шара**.

Сфера (или шар) может иметь с плоскостью только одну общую точку, не иметь общих точек или иметь бесконечно много общих точек. Если плоскость и сфера имеют более одной общей точки, то эта плоскость называется *секущей плоскостью*. Множество всех общих точек сферы и секущей плоскости называется *сечением сферы*, а множество всех общих точек шара и секущей плоскости – *сечением шара*.

Т е о р е м а. **Сечение сферы плоскостью является окружностью.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть плоскость α пересекает сферу и не содержит ее центр. Возьмем произвольную точку M на линии их пересечения (рисунок 139). Из центра O сферы проведем перпендикуляр OH к плоскости α. $MH = \sqrt{OM^2 - OH^2}$ – величина постоянная для любой точки M.

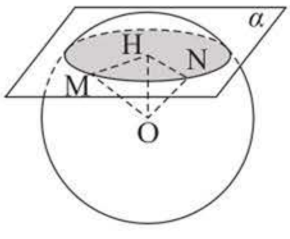


Рисунок 139

Так как все точки линии пересечения сферы и плоскости лежат в плоскости α и одинаково удалены от точки H, то все они лежат на окружности с центром в точке H. Кроме того, для любой точки N этой окружности выполняется равенство $ON^2 = NH^2 + OH^2$. Поскольку $MH = NH$, то эта точка принадлежит сфере.

Если секущая плоскость проходит через центр сферы, то каждая ее точка пересечения со сферой удалена от этого центра на расстояние, равное радиусу сферы, следовательно, и в этом случае сечение сферы плоскостью – окружность. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что:

1) любое сечение шара плоскостью является кругом;
2) сечения шара плоскостями, одинаково удаленными от его центра, равны;
3) сечение шара плоскостью, проходящей через его центр, называемое **большим кругом шара**, имеет наибольшую площадь, а все большие круги шара равны;
4) диаметр, перпендикулярный плоскости сечения, проходит через центр круга, являющегося сечением шара и обратно, диаметр шара, проходящий через центр его сечения, перпендикулярен к плоскости сечения;
5) если две сферы имеют три общие точки, то они имеют общую окружность, проходящую через эти точки (такие сферы называются *пересекающимися*).

Если к некоторому большому кругу шара проведен перпендикулярный ему диаметр, то концы диаметра называются *полюсами*, окружность большого круга – *экватором*, а окружности больших кругов, проходящие через полюсы, – *меридианами*. Сечения сферы плоскостями, параллельными экватору, называются *параллелями*. Сферу и шар изображают в проекции, например, как на рисунке 140.

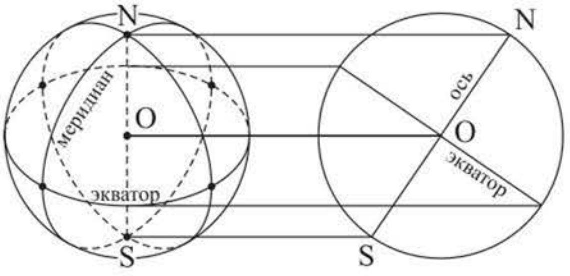


Рисунок 140

Отметим, что планету Земля условно считают шаром, на котором два полюса (Северный и Южный) и множество связанных с ними параллелей и меридианов (рисунок 141). На сфере, как и на плоскости, можно ввести систему координат. Обычно пользуются географической системой координат: долготой и широтой.

Рисунок 141

Долгота – это угол φ ($0° \leq \varphi \leq 360°$), измеряемый в плоскости экватора от начального (нулевого) меридиана против часовой стрелки до меридиана, на котором лежит данная точка (рисунок 142).

Широта – угол β ($-90° \leq \beta \leq 90°$), измеряемый в плоскости меридиана данной точки от экватора до радиуса, на котором лежит эта точка; знак «плюс» – к Северному полюсу, «минус» – к Южному.

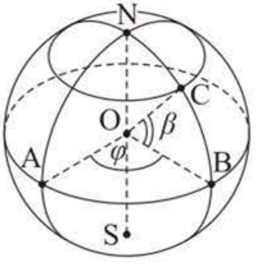


Рисунок 142

Плоскостью, **касательной к сфере**, называется плоскость, имеющая с ней единственную общую точку, а эта точка – их точкой касания.

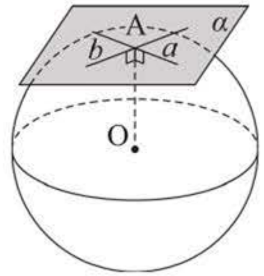


Рисунок 143

Если прямая имеет со сферой только одну общую точку, то она называется касательной к сфере. Любая прямая, лежащая в плоскости, касательной к сфере, и проходящая через точку касания, имеет со сферой только одну общую точку. Все такие прямые являются касательными к сфере (рисунок 143). Сфера и прямая могут иметь только одну общую точку, не иметь общих точек или иметь только две общие точки.

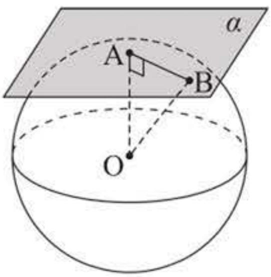


Рисунок 144

Т е о р е м а (*признак плоскости, касательной к сфере*). **Если плоскость проходит через точку, принадлежащую сфере и перпендикулярна ее радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной плоскостью к сфере.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть плоскость α проходит через точку A сферы и перпендикулярна ее радиусу OA, где O – центр сферы (рисунок 144). Возьмем произвольную точку B плоскости α, отличную от точки A. Треугольник OAB – прямоугольный. Его гипотенуза OB длиннее катета OA, поэтому точка B расположена вне сферы. Таким образом, любая точка плоскости α, кроме точки A, не принадлежит сфере. Значит, точка A – единственная общая точка плоскости α и сферы, поэтому плоскость α является касательной плоскостью к сфере. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что *через каждую точку сферы можно провести только одну плоскость, касающуюся ее*, удаленную от центра сферы на расстояние, равное ее радиусу.

Т е о р е м а (*свойство плоскости, касательной к сфере*). **Плоскость, касательная к сфере, перпендикулярна ее радиусу, проведенному в точку касания.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть α – плоскость, касательная к сфере с центром O и A – точка касания (рисунок 144). Докажем, что $OA \perp \alpha$. Допустим, что это не так. Тогда радиус OA сферы является наклонной к плоскости α и расстояние от центра сферы до плоскости α меньше радиуса сферы. Поэтому плоскость α и сфера пересекаются. Но это противоречит условию, что плоскость α касается сферы. Значит, наше предположение неверно, следовательно, $OA \perp \alpha$. Теорема доказана.

Две сферы называются *касающимися*, если они имеют единственную общую точку, которая называется их точкой касания. Касание сфер может быть внутренним и внешним.

Два шара касаются, если расстояние между их центрами равно сумме их радиусов.

Задача 1. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Найти отношение площади сечения шара этой плоскостью к площади его большого круга.

Решение. Пусть радиус шара равен R (рисунок 145). Найдем радиус r круга, являющегося сечением шара: $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Тогда искомое отношение равно: $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{3}{4}$.

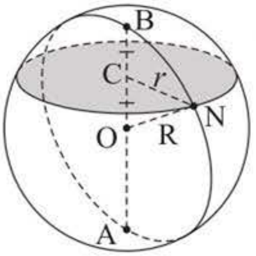


Рисунок 145

Ответ. 0,75.

Задача 2. На поверхности шара даны три точки, расстояния между которыми равны 6 дм, 8 дм, 10 дм. Радиус шара 13 дм. Найти расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти точки.

Решение. Пусть A, B, C – три данные точки, O – центр шара, $BC = 6$ дм, $AC = 8$ дм, $AB = 10$ дм, $OA = OB = OC = 13$ дм (рисунок 146). Сечением шара плоскостью ABC будет круг, окружность которого описана около прямоугольного ΔABC (по теореме, обратной теореме Пифагора). Искомое расстояние – отрезок OO_1, где O_1 – середина отрезка AB, центр окружности, описанной около ΔABC. Тогда $OO_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (дм).

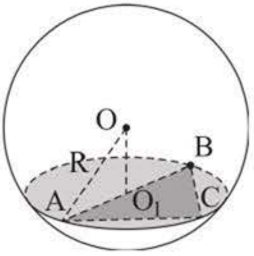


Рисунок 146

Ответ. 12 дм.

Задача 3. Шар радиуса R касается всех сторон правильного ΔABC со стороной, равной a (a – переменная величина). Найти расстояние от центра O шара до плоскости треугольника.

Решение. Пусть точки M, N, K – точки касания шара со сторонами ΔABC (рисунок 147). Проведем из центра O шара перпендикуляр OO_1 к плоскости треугольника ABC. Тогда точка

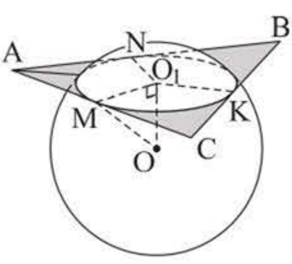


Рисунок 147

O_1 – центр окружности, вписанной в ΔABC. Так как ΔABC – правильный, то радиус O_1M этой окружности равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Из прямоугольного ΔMOO_1 находим искомое расстояние $OO_1 = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$, где $R^2 - \frac{a^2}{12} > 0$, $0 < a < 2R\sqrt{3}$.

Ответ. $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$, $0 < a < 2R\sqrt{3}$.

Задача 4. Дан шар радиуса R. Через одну точку его поверхности проведены две плоскости: первая – касательная к шару, вторая – секущая, под углом 30° к первой. Найти площадь полученного сечения шара.

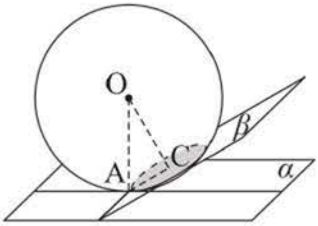


Рисунок 148

Решение. Пусть шар с центром O касается плоскости α в точке A, а секущая плоскость β образует с плоскостью α угол 30° (рисунок 148). Причем сечением шара и плоскости β является круг с центром в точке C и радиусом CA. Тогда $OA \perp \alpha$, $OC \perp \beta$, а $\angle AOC = 30°$, так как угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Из ΔAOC найдем $CA = 0{,}5R$. Следовательно, площадь сечения равна $0{,}25\pi R^2$.

Ответ. $0{,}25\pi R^2$.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение: а) сферы; б) шара.
2. Что является сечением: а) сферы плоскостью; б) шара плоскостью?
3. Какая плоскость называется плоскостью, касательной к сфере?
4. Какие свойства плоскости, касательной к сфере, вы знаете?
5. Пусть R – радиус сферы, d – расстояние от ее центра до плоскости. Объясните, почему плоскость: а) пересекает сферу, если $d < R$; б) касается ее, если $d = R$; в) не имеет с ней общих точек, если $d > R$.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

383. Плоскость проходит через центр сферы и пересекает ее по окружности, длина которой 31,4 см. Найдите диаметр сферы с точностью до 1 см.

384. а) Площадь сечения шара плоскостью равна 36π см^2. Найдите расстояние от секущей плоскости до центра шара, если радиус шара равен 10 см.

б) Площадь сечения шара плоскостью в 4 раза меньше площади его большого круга. Найдите расстояние от центра шара до плоскости сечения, если радиус сечения равен 2 см.

385. а) Арбуз формы шара радиуса 16 см разделен сечением, проходящим через середину одного из его радиусов, перпендикулярным ему. Какова площадь этого сечения?

б) Дан шар радиуса 8 см. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью.

386. Сечение шара плоскостью удалено на 5 см от его центра. Найдите площадь правильного шестиугольника, вписанного в это сечение, если радиус шара равен 7 см.

387. Точка плоскости, касательной к сфере радиуса 5 см, удалена от точки касания на 12 см. Найдите расстояние от этой точки до ближайшей к ней точки сферы.

388. Длина окружности колодца приближенно равна 3,5 м. Можно ли накрыть его крышей формы полусферы, высота которой 0,6 м?

389. Составьте уравнение сферы радиуса 3 с центром в точке $A(2; -4; 7)$ и определите: а) пересекает ли она координатные плоскости; б) наименьшее расстояние от точек сферы до плоскости xOy.

390. Сфера задана уравнением $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$. Установите, каково взаимное расположение этой сферы и плоскости: а) $2x-3y+4z-10=0$; б) $2x+y-2z-6=0$; в) $6x-3y+6z+5=0$.

391. Составьте уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2+y^2+z^2=9$ в точке: а) $M(1; 2; 2)$; б) $N(1; -2; -2)$.

392. Сфера $(x-3)^2+(y+4)^2+(z-12)^2=169$ проходит через начало координат. Напишите уравнение касательной плоскости к этой сфере, проходящей через начало координат.

393. Расстояния от концов диаметра шара до касающейся его плоскости равны 6 см и 4 см. Найдите радиус шара.

394. Два шара, радиусы которых равны 16 см и 9 см, касаются в точке C и имеют общую касательную AB (A и B – точки касания). Общая касательная CM этих шаров пересекает прямую AB в точке M (рисунок 149). Найдите расстояние CM.

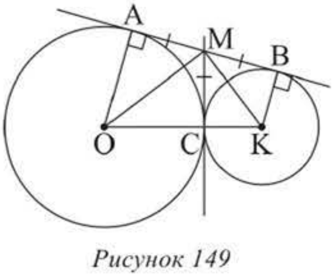


Рисунок 149

395. Шар радиуса 3 см касается двух параллельных плоскостей в точках A и B. Через середину отрезка AB проведена прямая, составляющая с прямой AB угол 60°. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между данными плоскостями.

396. а) Два касающихся шара, радиусы которых 7 дм и 1 дм, имеют общую касательную AB (A и B – точки касания). Найдите расстояние AB.

б) Два касающихся шара, радиусы которых 8 см и 12 см, лежат на плоскости. Найдите расстояние от точки касания шаров до этой плоскости.

397. Даны три попарно касающихся шара, расстояния между центрами которых равны 8 см, 9 см, 10 см. Найдите диаметры этих шаров.

398. Центр шара, касающегося двух взаимно перпендикулярных плоскостей, удален от общей прямой этих плоскостей на 8 см. Найдите радиус шара.

Уровень B

399. Город X находится на 60° северной широты. Найдите длину пути, который совершает этот пункт за сутки вследствие вращения Земли вокруг своей оси. Радиус Земли считать равным 6370 км. Ответ округлите до десятков километров.

400. Сфера проходит через вершины равнобедренного треугольника с основанием $6\sqrt{2}$ см и углом 45° при вершине. Расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно 8 см. Найдите радиус сферы.

401. а) Сфера радиуса 10 см проходит через вершины A, B, D параллелограмма $ABCD$. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости параллелограмма, если $AD = BD = 10$ см, $\angle BCD = 45°$.

б) Сфера проходит через три вершины ромба со стороной 12 см и углом 60°. Найдите расстояние от центра сферы до четвертой вершины ромба, если радиус сферы 8 см.

402. а) Центр шара радиуса R лежит внутри прямого двугранного угла. Шар касается одной из граней этого угла, а диаметр сечения шара плоскостью второй грани R. Найдите расстояние от центра шара до ребра двугранного угла.

б) Найдите радиус сферы, касающейся граней двугранного угла, равного 120°, если ее центр удален от ребра этого двугранного угла на b см.

403. а) Сфера касается плоскости треугольника со сторонами 6 см, 8 см, 10 см в центре описанной около него окружности. Найдите расстояние от центра сферы до вершин треугольника, если радиус сферы равен 12 см.

б) Сфера касается плоскости треугольника со сторонами 3 см, 4 см, 5 см в центре вписанной в него окружности. Найдите расстояние от центра сферы до сторон треугольника, если радиус сферы равен 2,4 см.

404. Сфера касается сторон треугольника ABC. Найдите радиус сферы, если ее центр лежит в плоскости этого треугольника, $AB = BC = 15$ см, $AC = 24$ см.

405. а) Каждая сторона ромба, равная $6\sqrt{2}$ см, касается шара, радиус которого 5 см. Найдите площадь ромба, если его плоскость удалена от центра шара на 4 см.

б) Диагонали ромба 15 см и 20 см. Сфера радиуса 10 см касается всех сторон ромба. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба.

Уровень С

406. а) Докажите, что если две сферы имеют три общие точки, то они пересекаются по окружности, содержащейся в плоскости, перпендикулярной прямой, проходящей через их центры.

б) Найдите длину линии пересечения сфер, радиусы которых равны 50 мм и 58 мм, а расстояние между их центрами 72 мм.

407. а) Докажите, что если хорды AB и CD шара пересекаются в точке M, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

б) Сферу радиуса $\sqrt{41}$ см пересекают две перпендикулярные плоскости по равным окружностям с общей хордой 6 см. Найдите радиусы этих окружностей.

408. Докажите, что если через точку C проведены к сфере касательная CM (M – точка касания) и прямая, пересекающая сферу в точках A и B, то $CM^2 = CA \cdot CB$.

409. В сосуд формы полусферы с внутренним диаметром 5 дм налита вода до уровня 1 дм. Сосуд надо наклонить, но так, чтобы вода из него не выливалась. Найдите множество допустимых значений величины угла наклона.

19. Площадь поверхности шара

Учебные достижения по изучению темы:

- знать понятие площади поверхности шара (площади сферы);
- знать формулу площади поверхности шара;
- уметь применять ее при решении задач.

Рассмотрим правильный многоугольник с четным числом сторон, вписанный в круг. При вращении этого многоугольника вокруг оси симметрии круга, на которой лежит его наибольшая диагональ, получится тело, содержащееся в шаре (рисунок 150). Поверхность этого тела состоит из боковых поверхностей конусов, усеченных конусов и цилиндра. При неограниченном удвоении числа сторон многоугольника площадь поверхности такого тела вращения стремится к некоторой величине. Эту величину принимают за площадь поверхности шара. Площадь поверхности шара называют **площадью сферы**, являющейся его границей.

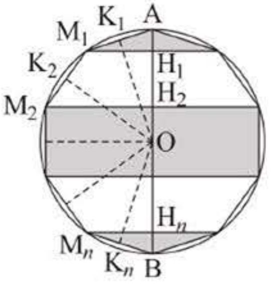


Рисунок 150

Площадь поверхности шара (площадь сферы) радиуса *R* равна:

$$\boldsymbol{S_{\text{сф.}} = 4\pi R^2}.$$

Выведем эту формулу. Пусть шар образован вращением круга радиуса R вокруг своего диаметра AB. Впишем в окружность большого круга шара правильный многоугольник с четным числом n сторон (рисунок 150). Из его вершин M_1, M_2, $M_3, \ldots, M_n$, лежащих по одну сторону от прямой AB, проведем перпендикуляры к диаметру $AB(M_1H_1 \perp AB, \ldots, M_nH_n \perp AB)$. При вращении вокруг прямой AB стороны многоугольника будут описывать боковые поверхности конусов или усеченных конусов, или цилиндра. Проведем перпендикуляры OK_1, $OK_2, \ldots, OK_n$ из центра окружности к сторонам многоугольника. Длины всех этих перпендикуляров равны, пусть $OK_1 = OK_2 = \ldots = OK_n = d$. Тогда, используя формулу площади боковой поверхности конуса и усеченного конуса $S_{\text{бок.}} = 2\pi hd$, получим, что площадь S поверхности тела вращения равна:

$$S = 2\pi d(AH_1 + H_1H_2 + \ldots + H_nB) = 2\pi d \cdot AB.$$

При неограниченном увеличении числа n сторон рассматриваемого многоугольника значение d стремится к R, а значение выражения $2\pi d \cdot AB$ – к $2\pi R \cdot 2R$, равному $4\pi R^2$. Следовательно, $S_{\text{сф.}} = 4\pi R^2$.

Шаровым сегментом называется тело, отсеченное от шара плоскостью, а сечение шара этой плоскостью называется основанием шарового сегмента. Высотой шарового сегмента называется перпендикуляр к его основанию, проведенный к нему из конца диаметра. Всю часть поверхности шарового сегмента без его основания называют *сферическим сегментом* (рисунок 151).

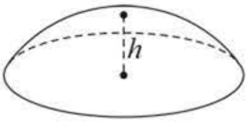


Рисунок 151

З а д а ч а 1. Доказать, что площадь $S_{\text{сегм.}}$ сферического сегмента равна: $\boldsymbol{S_{\text{сегм.}} = 2\pi Rh}$, где h – высота сегмента, R – радиус сферы, содержащей этот сегмент.

Р е ш е н и е. Пусть такой сегмент образован вращением дуги AB вокруг его высоты $AH = h$, O – центр окружности, содержащей эту дугу. Разделим дугу AB на n равных частей и построим ломаную $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$. Проведем перпендикуляры OK_1, OK_2, ..., OK_n из центра окружности к звеньям ломаной (рисунок 152).

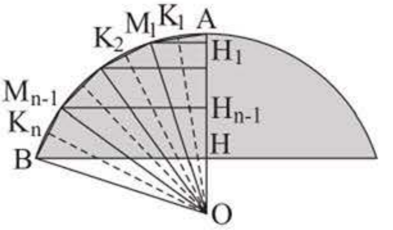


Рисунок 152

Длины всех этих перпендикуляров равны, пусть $OK_1 = OK_2 = \dots = OK_n = d$. Используя формулы площади боковой поверхности конуса и усеченного конуса, получим, что площадь S поверхности, образованной при вращении ломаной равна:

$$S = 2\pi d \cdot (AH_1 + H_1H_2 + \dots + H_{n-1}H) = 2\pi d \cdot h.$$

При неограниченном увеличении числа n звеньев ломаной значение d стремится к R, а значение выражения $2\pi dh$ – к $2\pi Rh$. Следовательно, $S_{\text{сегм.}} = 2\pi Rh$.

З а д а ч а 2. В шаре проведены два параллельных сечения, радиусы которых 7 см и 2 см. Найти площадь поверхности шара, если расстояние между сечениями равно 9 см.

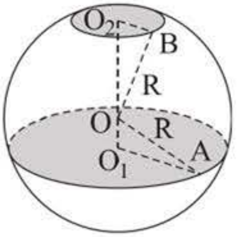


Рисунок 153

Р е ш е н и е. Пусть O – центр шара, O_1, O_2 – центры кругов – сечений шара, O – точка отрезка O_1O_2, $O_1A = 7$ см, $O_2B = 2$ см, $OB = OA = R$, $OO_2 = x$ см, тогда $OO_1 = (9 - x)$ см (рисунок 153).

Из прямоугольных треугольников BO_2O и AO_1O имеем: $R^2 = x^2 + 4$ и $R^2 = (9 - x)^2 + 49$. Решив уравнение $x^2 + 4 = (9 - x)^2 + 49$, получим $x = 7$. Тогда $R^2 = 53$, $4\pi R^2 = 212\pi$ (см^2).

О т в е т. 212π см^2.

Отметим, что *цилиндр* называется *вписанным в шар* (а шар – описанным около цилиндра), если окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара. Около любого цилиндра можно описать шар, при этом ось цилиндра является осью шара, а ее середина – его центром (рисунок 154).

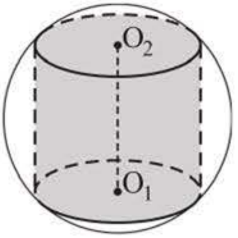


Рисунок 154

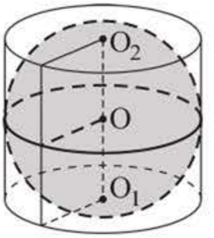


Рисунок 155

Цилиндр называется *описанным около шара* (или шар – вписанным в цилиндр), если основания цилиндра и каждая его образующая касаются шара. Около шара можно описать только равносторонний цилиндр, при этом ось цилиндра является осью шара, а ее середина – его центром (рисунок 155).

Конус называется *вписанным в шар* (а шар – описанным около конуса), если его вершина и окружность основания лежат на поверхности шара. Осевое сечение такого конуса – равнобедренный треугольник, вписанный в большой круг шара, а центр шара принадлежит прямой, содержащей высоту конуса (рисунки 156, *а*, *б*).

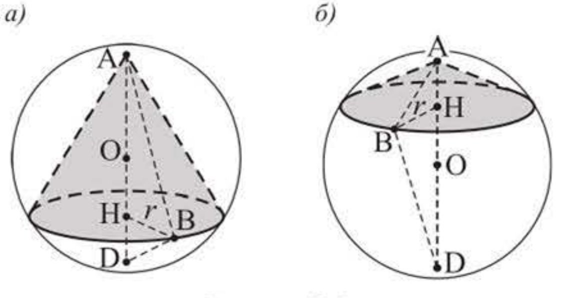


Рисунок 156

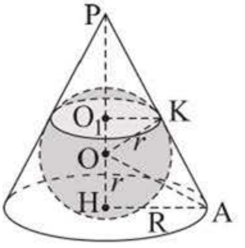


Рисунок 157

Конус называется *описанным около шара* (или шар – вписанным в конус), если его основание и каждая образующая касаются поверхности шара. Отметим, что шар касается боковой поверхности конуса по окружности, центр которой не может быть центром шара. Например, на рисунке 157 точка O – центр шара, OK – радиус шара, проведенный в точку касания, O_1 –

центр окружности касания шара и боковой поверхности конуса. Центр шара, вписанного в конус, – точка пересечения высоты конуса и биссектрисы угла между образующей и радиусом основания конуса.

Усеченный конус называется *вписанным в шар* (или шар – описанным около усеченного конуса), если окружности его оснований лежат на поверхности шара (рисунки 158, *а*, *б*). При этом осевым сечением конуса является равнобедренная трапеция, вписанная в большой круг шара. Так как любую равнобедренную трапецию можно вписать в круг, то и любой усеченный конус можно вписать в шар. Центр этого шара лежит на прямой, содержащей центры оснований усеченного конуса.

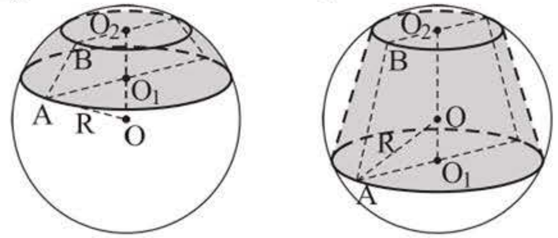


Рисунок 158

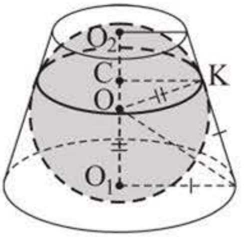


Рисунок 159

Усеченный конус называется *описанным около шара* (а шар – вписанным в усеченный конус), если его основания и каждая образующая касаются шара. При этом осевым сечением такого конуса является равнобедренная трапеция, в которую вписан большой круг шара (рисунок 159).

З а д а ч а 3. В шар радиуса 2 дм вписан конус, в котором угол между образующей и высотой равен 60°. Найти площадь боковой поверхности конуса.

Р е ш е н и е. Пусть ΔABC – осевое сечение конуса, AB – его образующая, BH – высота (рисунок 160). Центр O шара лежит на продолжении высоты BH, так как угол ABC – тупой. Окружность, описанная около этого осевого сечения, является окружностью большого круга шара. Так как $OA = OB = 2$ дм – радиусы шара, а $\angle ABH = 60°$, то ΔABO – равносторонний, значит, $AB = 2$ дм, $AH = AB \cdot \sin 60° = \sqrt{3}$ дм. Искомая площадь S равна: $S = \pi \cdot AH \cdot AB = 2\pi\sqrt{3}$ (дм^2).

О т в е т. $2\pi\sqrt{3}$ дм^2.

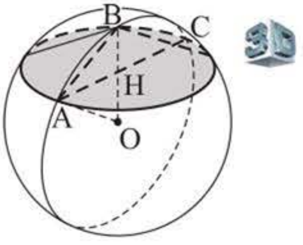


Рисунок 160

ВОПРОСЫ

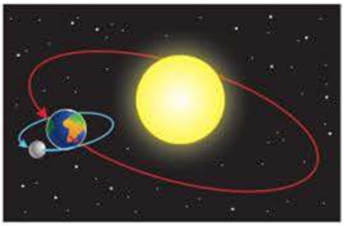
1. Что принимается за площадь поверхности шара?
2. По какой формуле можно найти площадь поверхности шара?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

410. а) Верно ли, что площадь поверхности шара равна произведению длины окружности его большого круга на диаметр?

б) Как изменится площадь поверхности шара, если его диаметр увеличить в 3 раза?



Вращение Земли и Луны вокруг Солнца

411. Чему равна площадь поверхности чаши формы полушара, диаметр которого 8 см?

412. Известно, что диаметр Луны составляет $\frac{3}{11}$ диаметра Земли. Найдите отношение площади поверхности Земли к площади поверхности Луны, считая их шарами.

413. Длина линии пересечения сферы и плоскости равна 8π см, а расстояние от центра сферы до этой плоскости равно 5 см. Найдите площадь данной сферы.

414. а) В каком случае расходуется больше материала: на никелировку двух шаров диаметром 5 см каждый или десяти шаров диаметром 2 см каждый?

б) Что больше: площадь поверхности двух сфер диаметром 1 дм каждая или площадь полной поверхности правильного тетраэдра с ребром 2 дм?

Нур Алем, г. Нур-Султан

415. Самое большое в мире сферическое здание Нур Алем имеет диаметр, равный 80 м. Найдите с точностью до 1 м^2 площадь этой сферы, считая $\pi \approx 3{,}1416$.

416. Сфера задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 10$. Найдите ее площадь.

417. Шар касается всех сторон правильного треугольника, периметр которого равен 18 см. Найдите площадь поверхности шара, если расстояние от его центра до плоскости треугольника равно 3 см.

418. а) Сфера касается сторон треугольника ABC, плоскости которого принадлежит ее центр. Найдите площадь сферы, если $AB = BC = 15$ см, $AC = 24$ см.

б) Каждая сторона ромба, равная $6\sqrt{2}$ см, касается шара, а плоскость ромба удалена от центра шара на расстояние, равное 4 см. Найдите площадь поверхности шара, если площадь ромба равна $36\sqrt{2}$ см^2.

419. Докажите, что:

а) площадь полной поверхности равностороннего конуса равна площади сферы, диаметр которой равен высоте конуса;

б) сумма площадей сфер, диаметры которых равны катетам прямоугольного треугольника, равна площади сферы с диаметром, равным его гипотенузе.

420. Шар радиуса r вписан в цилиндр, около которого описан шар. Найдите радиус описанного шара.

421. Около цилиндра, высота которого равна 8 см, описан шар. Найдите площадь большого круга этого шара, если разность радиусов шара и основания цилиндра равна 2 см.

422. Дан усеченный конус, в который можно вписать шар. Высота этого конуса равна 6 см, а диаметр одного из оснований – 9 см. Найдите диаметр второго основания.

423. а) Шар радиуса r вписан в конус, образующая которого наклонена к плоскости основания конуса под углом φ. Найдите площадь основания конуса.

б) В конус вписан шар и через точки его касания с образующими проведено сечение шара плоскостью. Найдите расстояние от вершины конуса до плоскости сечения, если радиус его основания R, а образующая составляет с основанием угол 45°.

424. В усеченный конус, радиусы оснований которого 9 дм и 6 дм, вписан шар. Найдите угол наклона образующей усеченного конуса к плоскости его нижнего основания.

Уровень B

425. Найдите площадь сферы, описанной около равностороннего цилиндра, площадь поверхности которого равна 3 дм^2.

426. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого увеличивается на 20π дм^2 при увеличении радиуса шара на 1 дм.

427. Докажите, что площадь поверхности равностороннего конуса равна площади сферы, диаметр которой равен высоте конуса.

428. Около конуса описан шар, площадь большого круга которого равна 4π см^2, и в него вписан шар. Найдите радиус вписанного в конус шара, если образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом $30°$.

429. Около цилиндра описан шар радиуса R, диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости его основания под углом φ. Найдите высоту цилиндра.

Уровень C

430. Найдите площадь поверхности шара вписанного: а) в куб, площадь полной поверхности которого равна S; б) в равносторонний конус, площадь полной поверхности которого равна Q.

431. В конус вписана сфера радиуса R. Окружность касания этой сферы с боковой поверхностью конуса является окружностью основания цилиндра, вписанного в сферу. Найдите площадь осевого сечения этого цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом β.

432. В цилиндр высотой 14 см вписан шар. Найдите радиус сечения шара плоскостью, проходящей через две образующие цилиндра, расстояние между которыми 10 см.

20. Упражнения на повторение раздела «Тела вращения и их элементы»

Уровень А

433. а) Около правильной треугольной призмы описан цилиндр. Высота призмы равна 24 см, а диагональ ее боковой грани равна 26 см. Найдите радиус основания цилиндра.

б) Правильная треугольная призма, все ребра которой равны a, вписана в цилиндр. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

434. Дан конус, в осевое сечение которого вписана окружность. Высота конуса в 4 раза больше радиуса этой окружности. Найдите площадь поверхности конуса, если его образующая равна 9 см.

435. В шар радиуса R вписан конус, угол между высотой и образующей которого равен α. Найдите высоту конуса.

436. Дан тетраэдр, в который можно вписать конус, причем стороны его основания равны 6,5 см, 7 см, 7,5 см, а образующая конуса наклонена к основанию под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности этого тетраэдра.

Уровень В

437. Докажите, используя рисунок 161, что площадь поверхности шарового сегмента равна площади круга $S = \pi l^2$, имеющего радиусом отрезок l, который проведен от вершины сегмента к окружности, служащей ему основанием (задача Архимеда).

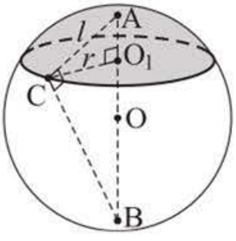


Рисунок 161

438. В шар радиуса 10 см вписан конус, в который вписана пирамида, причем ее основание – прямоугольный треугольник с гипотенузой 19,2 см. Найдите высоту этой пирамиды.

439. Найдите радиус шара, описанного около конуса, в который вписана правильная треугольная пирамида со стороной основания $12\sqrt{3}$ см и боковым ребром 20 см.

440. а) Прямоугольный параллелепипед, стороны основания которого 9 см и 12 см, а боковое ребро 20 см, вписан в цилиндр. Найдите длину образующей цилиндра, радиус его основания и диагональ осевого сечения этого цилиндра.

б) В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма, боковая грань которой – квадрат. Найдите угол между диагональю боковой грани призмы и осью цилиндра.

441. Найдите наибольшую площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в конус, высота которого равна 8 дм, а радиус основания – 6 дм.

Уровень С

442. Плоскость, образующая с осью цилиндра угол 45°, делит ось в отношении 1 : 3. Найдите радиус сечения этой плоскостью вписанного в цилиндр шара, если высота цилиндра равна $4\sqrt{2}$ см.

443. В конус вписана правильная треугольная пирамида, высота которой равна 20 см, а расстояние от основания этой высоты до плоскости боковой грани пирамиды равно 12 см. Найдите радиус сферы, описанной около этого конуса.

444. Найдите высоту равностороннего цилиндра, вписанного в правильную треугольную пирамиду, боковое ребро которой равно b и наклонено к основанию под углом α.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

Выберите верный ответ

445. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого равна 1 дм^2. Тогда площадь основания цилиндра равна:

1) $0{,}25\pi$ дм^2;
2) $0{,}8$ дм^2;
3) 1 дм^2;
4) $0{,}5\pi$ дм^2;
5) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ дм^2.

446. Высота цилиндра 6 см, а радиус его основания 5 см. Тогда площадь сечения цилиндра, проведенного параллельно его оси на расстоянии 4 см от нее, равна:

1) $30\sqrt{2}$ см^2;
2) $24\sqrt{3}$ см^2;
3) 24 см^2;
4) 36 см^2;
5) 30 см^2.

447. В равностороннем цилиндре точка окружности верхнего основания соединена отрезком с точкой окружности нижнего основания, при этом угол между радиусами окружностей, проведенными в эти точки, равен 60°. Тогда тангенс угла между осью цилиндра и прямой, содержащей указанный отрезок равен:

1) 1;
2) $\frac{1}{2}$;
3) $\sqrt{3}$;
4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$;
5) 2.

448. Каким должен быть радиус основания равностороннего цилиндра, чтобы площадь его боковой поверхности была равна площади поверхности шара радиуса 1,5 дм?

1) 1 дм;
2) 2 дм;
3) 1,5 дм;
4) $\sqrt{\pi}$ дм;
5) 0,5 дм.

449. Площадь основания цилиндра равна 8 дм^2, а площадь его осевого сечения – 16 дм^2. Площадь полной поверхности этого цилиндра равна:

1) 16π дм^2;
2) $8(\pi + 2)$ дм^2;
3) $16(\pi + 1)$ дм^2;
4) 48 дм^2;
5) 65 дм^2.

450. В цилиндре с высотой b проведены два сечения, параллельные оси, такие, что сечение $ABCD$ – квадрат, сечение $ABKH$ – прямоугольник со сторонами b и $2b$, угол между плоскостями сечений равен 60°. Тогда расстояние от точки C до плоскости ABK равно:

1) b;
2) $0{,}5b$;
3) $\frac{b\sqrt{3}}{2}$;
4) $b\sqrt{3}$;
5) $1{,}5b$.

451. Из деревянного цилиндра, высота которого равна диаметру основания, выточен шар наибольшего радиуса. На сколько процентов площадь поверхности цилиндра больше площади поверхности шара?

1) $33\frac{1}{3}$ %;
2) 20 %;
3) 10 %;
4) ≈ 66 %;
5) ≈ 11 %.

452. Площадь основания конуса равна 1 м^2, а его образующая наклонена к основанию под углом 60°. Площадь боковой поверхности этого конуса равна:

1) 2 м^2;
2) 1 м^2;
3) 1,5 м^2;
4) $\sqrt{3}$ м^2;
5) $0{,}75\sqrt{3}$ м^2.

453. Радиус основания равностороннего конуса равен $\sqrt{3}$ дм. Тогда площадь сечения конуса, содержащего две его образующие, угол между которыми 60°, равна:

1) 3 дм^2;
2) $3\sqrt{3}$ дм^2;
3) $2\sqrt{3}$ дм^2;
4) 5 дм^2;
5) $1{,}5\sqrt{3}$ дм^2.

454. Через середину высоты конуса проведена прямая, параллельная его образующей и пересекающая поверхность конуса в точках A и B. Длина образующей равна 10 см. Тогда длина отрезка AB равна:

1) 6,5 см;
2) 8 см;
3) 5,5 см;
4) 5 см;
5) 7,5 см.

455. Высота конуса равна 20 см, а радиус его основания – 25 см. Сечение конуса, содержащее его вершину, удалено от центра основания конуса на 12 см. Площадь этого сечения равна:

1) 6 дм^2;
2) 10 дм^2;
3) 5 дм^2;
4) $5\sqrt{2}$ дм^2;
5) $3\sqrt{2}$ дм^2.

456. Площади оснований усеченного конуса 4 дм^2 и 16 дм^2. Через середину его высоты проведено сечение, параллельное основанию. Тогда площадь сечения равна:

1) 8 дм^2;
2) 10 дм^2;
3) 6 дм^2;
4) 9 дм^2;
5) 7 дм^2.

457. На поверхности шара радиуса 13 см даны три точки, расстояния между которыми равны 6 см, 8 см, 10 см. Тогда расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти точки, равно:

1) 10 см;
2) 12 см;
3) 6 см;
4) 8 см;
5) 7 см.

458. Шар радиуса 3 дм касается всех сторон правильного треугольника со стороной 6 дм. Тогда расстояние от центра шара до плоскости этого треугольника равно:

1) 2,5 дм;
2) 3 дм;
3) $\sqrt{6}$ дм;
4) $2\sqrt{2}$ дм;
5) $\sqrt{5}$ дм.

459. Диагонали ромба равны 15 см и 20 см. Сфера касается всех сторон ромба. Если расстояние от центра сферы до плоскости ромба равно 8 см, то радиус сферы равен:

1) 10 см; 4) 9 см;
2) $8\sqrt{2}$ см; 5) 12 см.
3) 8,75 см;

460. Радиус сферы – 7 см. Сечение сферы двумя перпендикулярными плоскостями – две равные окружности, имеющие общую хорду длиной 2 см. Радиус этих окружностей равен:

1) 6 см; 4) 5 см;
2) 4,5 см; 5) $4\sqrt{2}$ см.
3) $3\sqrt{2}$ см;

461. Угол при вершине осевого сечения конуса 2α, а его высота равна $\sqrt{2}$. Площадь сечения конуса, содержащего две образующие, угол между которыми 30°, равна:

1) $0{,}5\cos^{-2}\alpha$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2\alpha}$;
2) $0{,}5\cos^{-1}\alpha$; 5) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos^2\alpha}$.
3) $0{,}5\cos\alpha$;

462. В равносторонний конус вписана правильная шестиугольная пирамида. Ее двугранный угол при ребре основания равен:

1) arcctg 2; 4) arctg 2;
2) arcsin 0,5; 5) arctg 3.
3) arccos 0,5;

463. Около усеченного конуса, радиусы оснований которого 2 дм и 1 дм, а образующая наклонена к основанию под углом 45°, описана сфера. Тогда радиус этой сферы равен:

1) $\sqrt{5}$ дм; 4) $2\sqrt{2}$ дм;
2) $2\sqrt{5}$ дм; 5) 5 дм.
3) $\sqrt{10}$ дм;

Выполните упражнения

464. Дан равносторонний цилиндр. Выразите площадь его полной поверхности через радиус основания цилиндра R.

465. Хорда нижнего основания цилиндра, равная 6 дм, удалена от его центра на расстояние 4 дм, а от центра верхнего основания – на 5 дм. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

466. Найдите площадь боковой поверхности конуса, у которого образующая равна $6\sqrt{3}$ см и наклонена к плоскости основания под углом 60°.

467. Найдите площадь полной поверхности равностороннего конуса, высота которого равна $2\sqrt{3}$ см.

468. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 60°. Найдите центральный угол в развертке боковой поверхности этого конуса.

469. Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 см и 4 см. Найдите площадь сечения этого усеченного конуса плоскостью, параллельной основаниям и проходящей через середину его высоты.

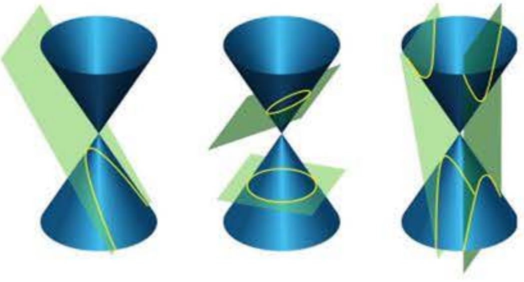
470. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 1 : 3, его высота равна 8 см, а образующая наклонена к нижнему основанию под углом 45°. Найдите площадь полной поверхности этого усеченного конуса.

471. Шар радиуса 6 см касается всех сторон правильного треугольника со стороной $4\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости этого треугольника.

472. Сравните площадь поверхности тела, полученного вращением квадрата вокруг его стороны, равной a, и площадь сферы радиуса a.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Аполлоний Пергский



Конические сечения: парабола, эллипс, гипербола

Тела вращения и их свойства исследовались древнегреческими учеными Евклидом, Архимедом, Аполлонием и другими. При этом рассматривались и сечения этих тел. Например, Аполлоний Пергский (262–190 гг. до н. э.) посвятил им целый труд под названием «Конические сечения». По историческим сведениям формулы площадей поверхностей цилиндра, конуса, усеченного конуса и шара впервые вывел Архимед и изложил эти результаты в труде «О шаре и цилиндре».

Используя интернет-ресурсы, найдите сведения о том, как:

1) определял понятие цилиндра Евклид;

2) формулу площади боковой поверхности конуса записывал Архимед;

3) находили площадь поверхности корзины в Древнем Египте (задачи из «Московского математического папируса»).

IV. ОБЪЕМЫ ТЕЛ

В результате изучения раздела надо

знать

- понятие объема тела;
- свойства объемов тел;
- формулы объемов: призмы, пирамиды, усеченной пирамиды, цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара и его частей.

уметь

- применять свойства объемов пространственных тел;
- применять формулы объемов: призмы, пирамиды, усеченной пирамиды, цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара и его частей при решении задач, в том числе на комбинации геометрических тел.

21. Общие свойства объемов тел. Объем призмы

Учебные достижения по изучению темы:
• знать понятие объема тела и его свойства;
• знать формулы объемов прямой и наклонной призм;
• уметь решать задачи на нахождение объемов призм.

С понятием объема некоторых тел вы знакомы, например, знаете формулу объема прямоугольного параллелепипеда, единицы объема. **Объемом тела** называется положительная величина, для которой выполняются следующие **свойства** (аксиомы):

1) *равные тела имеют равные объемы*;

2) *если тело разделено на конечное число тел, то его объем равен сумме их объемов*;

3) *куб, ребро которого равно единице длины, имеет объем, равный единице.*

Основными единицами измерения объема являются: 1 мм^3, 1 см^3, 1 дм^3, 1 м^3, 1 км^3. Напомним, что 1 дм^3 равен 1 литру.

Из аксиом объема следует, что:

- если тело содержится внутри другого тела, то его объем меньше объема этого тела;
- объем куба, ребро которого равно $\frac{1}{n}$ единицы длины ($n \in N$), равен $\frac{1}{n^3}$ кубической единицы;
- при увеличении длины ребра куба в k раз его объем увеличивается в k^3 раз.

Два тела, имеющие одинаковые объемы, называются **равновеликими**.

Теорема. **Объем V призмы равен произведению площади S ее основания на высоту h призмы:**

$$V = S \cdot h.$$

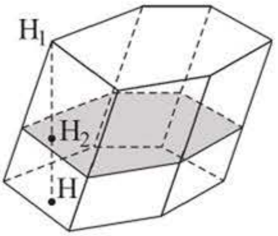


Рисунок 162

Доказательство. Для доказательства этой формулы используем формулу объема тела, известную из курса алгебры и начал анализа:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Пусть $S(x)$ – площадь произвольного сечения призмы плоскостью, параллельной ее основанию и перпендикулярной высоте $H_1H = h$ призмы, $x = H_1H_2$ (рисунок 162). Так как $S(x) = S$, то объем V призмы равен:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h Sdx = S\int_0^h dx = S \cdot x\Big|_0^h = Sh.$$

З а д а ч а 1. Найти объем треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, каждое ребро которой равно b, а ее плоские углы при вершине A равны.

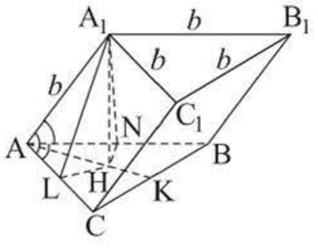


Рисунок 163

Р е ш е н и е. Искомый объем равен $S_{\Delta ABC} \cdot A_1H$, где A_1H – высота призмы (рисунок 163), причем точка H лежит на биссектрисе AK ΔABC. Это следует из равенства прямоугольных треугольников ALH и ANH, где HL и HN – проекции высот A_1L и A_1N граней AA_1C_1C и ABB_1A_1 соответственно на плоскость основания призмы.

Из условия задачи следует, что каждый из плоских углов при вершине A равен 60°, так как равен углу равностороннего ΔABC. $S_{\Delta ABC} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Найдем высоту A_1H. Из ΔA_1AL имеем $AL = \frac{b}{2}$, $A_1L = b \cdot \sin 60° = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. Из ΔALH имеем $LH = AL \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{b\sqrt{3}}{6}$. Тогда из ΔA_1HL находим $A_1H = \sqrt{\frac{3b^2}{4} - \frac{b^2}{12}} = \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Искомый объем равен $V = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{b^3\sqrt{2}}{4}$.

О т в е т. $\frac{b^3\sqrt{2}}{4}$.

З а д а ч а 2. Площадь поверхности закрытого ящика формы прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием равна 50 дм^2. При каких размерах ящика его объем будет наибольшим?

Р е ш е н и е. Пусть сторона основания ящика равна x дм, а высота ящика – y дм, тогда $2 \cdot x^2 + 4 \cdot xy = 50$. Отсюда $y = \frac{50 - 2x^2}{4x}$, где $0 < x < 5$. Тогда объем ящика равен: $V = x^2y$, $V = 0{,}5(25x - x^3)$. Исследуем функцию $V(x) = 0{,}5(25x - x^3)$ на наибольшее значение на промежутке $(0; 5)$ при помощи производной. $V' = 0{,}5(25 - 3x^2)$, $V' = 0$ при $x_0 = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$,

$V' > 0$ при $0 < x < x_0$ и $V' < 0$ при $x_0 < x < 5$. Следовательно, наибольшее значение функция $V(x)$ на промежутке (0; 5) принимает при $x_0 = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Тогда $y_0 = \frac{50 - 2x_0^2}{4x_0} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Ответ. Наибольший объем имеет коробка формы куба с ребром $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ дм.

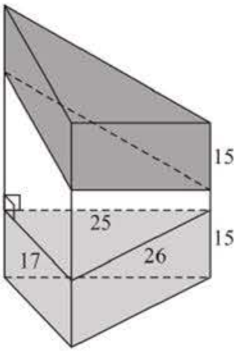


Рисунок 164

Задача 3. Найти объем наклонной треугольной призмы, боковые ребра которой равны 15 см, а расстояния между ними 26 см, 25 см и 17 см.

Решение. Данная наклонная призма равновелика прямой призме, основанием которой является треугольник, перпендикулярный ее боковому ребру, все вершины которого лежат на прямых, содержащих боковые ребра, а высотой – боковое ребро (рисунок 164). Длины сторон этого треугольника равны 26 см, 25 см и 17 см, а его площадь вычисляем по формуле Герона: $S = \sqrt{34 \cdot (34 - 26) \cdot (34 - 25) \cdot (34 - 17)} = \sqrt{17^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2} = 204$ (см^2). Тогда искомый объем равен: $V = 204 \cdot 15 = 3060$ (см^3).

Ответ. 3060 см^3.

ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте основные свойства объемов тел.
2. Назовите основные единицы измерения объема и укажите соотношения между ними.
3. Запишите формулу объема: а) куба; б) прямоугольного параллелепипеда; в) призмы.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

473. Верно ли, что если два тела равновелики, то они равны?

474. Деревянный куб, площадь поверхности которого равна 24 см^2, распилили на 8 равных кубиков. Чему равен объем одного малого кубика?

475. Объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 8 дм^3. Точки M и M_1 – середины ребер DC и D_1C_1 соответственно. Найдите объем призмы $ADMA_1D_1M_1$.

476. Найдите объем правильной четырехугольной призмы, которая имеет высоту 5 дм и площадь полной поверхности 78 дм^2.

477. Кирпич имеет размер 25 × 12 × 6 см. Найдите объем стены, выложенной из 10000 кирпичей, с учетом того, что раствор увеличивает объем на 15 %.

478. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 4 см и 5 см, а угол между ними 45°. Найдите объем параллелепипеда, если площадь его боковой поверхности равна $54\sqrt{2}$ см^2.

479. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 8 см и составляет с ее боковым ребром угол 30°. Найдите объем этой призмы.

480. В наклонной треугольной призме стороны основания равны 5 м, 6 м и 9 м, а боковое ребро равно 10 м и составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите ее объем.

481. При рытье котлована, имеющего форму правильной четырехугольной призмы со стороной основания, равной 3 м, было вынуто 25 тонн земли, плотность которой равна $1{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найдите с точностью до 0,1 м глубину котлована.

482. Основание прямого параллелепипеда – ромб, меньшая диагональ которого 4 см, а острый угол 60°. Площадь боковой поверхности параллелепипеда равна $80\sqrt{3}$ см^2. Найдите объем параллелепипеда.

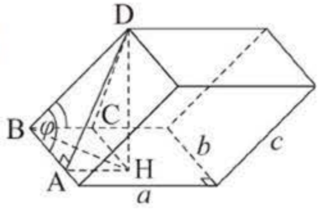


Рисунок 165

483. В параллелепипеде длины трех ребер, исходящих из одной вершины, равны $a = 12$ см, $b = 7$ см, $c = 10$ см. Ребра, длины которых равны a и b, взаимно перпендикулярны, а третье ребро образует с каждым из них угол $\varphi = 60°$ (рисунок 165). Найдите объем параллелепипеда.

Уровень B

484. Из прямоугольного листа жести требуется изготовить коробку, вырезая во всех его углах равные квадраты и загибая края жести. Найдите длину стороны такого квадрата, если размеры листа жести 60 × 70 см, а объем коробки 20 дм^3.

485. После сушки и обжига объем кирпича составляет 75 % объема сырого кирпича. Какими должны быть размеры сырого кирпича, если он уменьшается при обжиге в одинаковом отношении, а размеры готового кирпича – $25 \times 12 \times 6$ см?

486. а) Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, в котором диагонали боковых граней, выходящие из одной вершины, равны 6 см и 8 см, а угол между ними 60°.

б) Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, периметр основания которого равен 16 см, площадь поверхности равна 168 см^2, а объем равен 108 см^3.

487. В треугольной призме расстояния между боковыми ребрами 37 см, 13 см и 30 см, а площадь ее боковой поверхности равна 480 см^2. Найдите объем призмы.

488. Площадь одной из боковых граней треугольной призмы равна Q, а расстояние между плоскостью этой грани и противолежащим ей боковым ребром равно d. Найдите объем этой призмы.

Уровень C

489. а) Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности, если периметры двух его смежных боковых граней равны 16 см и 24 см.

б) Найдите площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, имеющего наибольший объем, если стороны его основания относятся как 3 : 5, а периметр меньшей боковой грани равен 36 см.

490. а) Высота прямого параллелепипеда равна h, а стороны его основания a и b. Чему должен быть равен двугранный угол при боковом ребре параллелепипеда, чтобы его объем был наибольшим? Найдите этот объем.

б) Докажите, что из всех прямоугольных параллелепипедов, сумма трех измерений которых равна d, наибольший объем имеет куб с ребром $\frac{d}{3}$.

491. а) Требуется изготовить ящик с крышкой формы прямоугольного параллелепипеда, объем которого равен 9 м^3, причем стороны основания должны относиться как 1 : 2. Каковы должны быть размеры ящика, чтобы площадь его поверхности была наименьшей?

б) Объем правильной треугольной призмы равен 16 дм^3. Каковы должны быть длины стороны основания и высоты призмы, чтобы площадь ее поверхности была наименьшей?

22. Объемы пирамиды и усеченной пирамиды

Учебные достижения по изучению темы:

- знать формулы нахождения объемов пирамиды и усеченной пирамиды;
- уметь решать задачи на нахождение объемов пирамид различных видов.

Теорема. **Объем V пирамиды равен одной трети произведения площади S ее основания на высоту h пирамиды:**

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h.$$

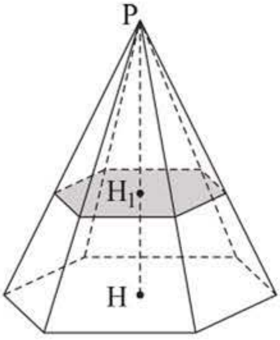


Рисунок 166

Доказательство. Выведем эту формулу, используя формулу объемов тел: $V = \int_a^b S(x)dx$. Пусть $S(x)$ – площадь произвольного сечения пирамиды плоскостью, параллельной ее основанию и перпендикулярной высоте $PH = h$ пирамиды, $x = PH_1$ (рисунок 166). По свойству такого сечения: $\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{h^2}$, $S(x) = \frac{S}{h^2} \cdot x^2$. Тогда объем V пирамиды равен:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{S}{h^2} x^2 dx = \frac{S}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3} Sh.$$

Теорема. **Объем V усеченной пирамиды равен одной трети произведения ее высоты h на сумму площадей S_1, S_2 оснований и их среднего геометрического:**

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}).$$

Доказательство. Достроим усеченную пирамиду до полной пирамиды (рисунок 167). Пусть высота полной пирамиды равна x. Тогда $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2$. Отсюда $x = \frac{h \cdot \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$.

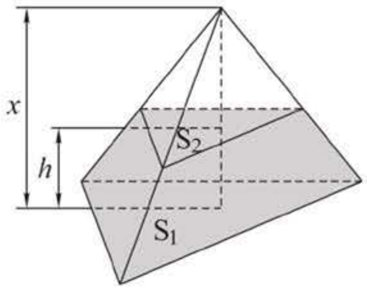


Рисунок 167

Объем усеченной пирамиды равен разности объемов двух пирамид: одной с площадью основания S_1 и высотой x, другой – с площадью основания S_2 и высотой $x - h$.

Преобразуем выражение $x - h$, получим:

$x - h = \dfrac{h \cdot \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - h = \dfrac{h \cdot \sqrt{S_1} - h\sqrt{S_1} + h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} = \dfrac{h \cdot \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$. Выразим объем усеченной пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}\left(S_1 \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - S_2 \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}\right) = \frac{1}{3}h \cdot \frac{S_1\sqrt{S_1} - S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} =$$

$$= \frac{1}{3}h \cdot \frac{(\sqrt{S_1})^3 - (\sqrt{S_2})^3}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} = \frac{1}{3}h \cdot \frac{(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} =$$

$$= \frac{1}{3}h \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}).$$

З а д а ч а 1. Найти объем правильного тетраэдра $PABC$, если расстояние от середины M его высоты PH до вершины A равно d.

Р е ш е н и е. Пусть ребро правильного тетраэдра $PABC$ равно a (рисунок 168), тогда $AH = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2a}{\sqrt{6}}$, $MH = \dfrac{1}{2}PH = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Из треугольника AMH получим: $AM^2 = AH^2 + HM^2$, то есть $d^2 = \dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{6}$, $d^2 = \dfrac{a^2}{2}$, $a^2 = 2d^2$, $a = d\sqrt{2}$.

Тогда $S_{осн.} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2d^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{d^2\sqrt{3}}{2}$, $PH = \dfrac{2d\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{2d}{\sqrt{3}}$.

Следовательно, $V_{PABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{осн.} \cdot PH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{d^2\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2d}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}d^3$.

О т в е т. $\dfrac{1}{3}d^3$.

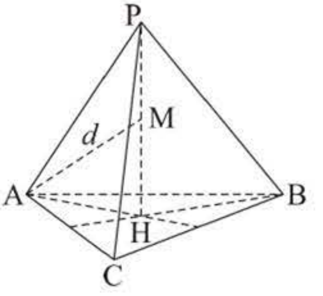


Рисунок 168

З а д а ч а 2. Найти с точностью до 0,1 м^3 объем правильной усеченной четырехугольной пирамиды, стороны оснований которой равны 5 м и 2 м, а острый угол α ее боковой грани равен 60°.

Р е ш е н и е. Пусть в данной усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 5$ м, $A_1B_1 = 2$ м, $\angle B_1BA = 60°$ (рисунок 169). Ее объем

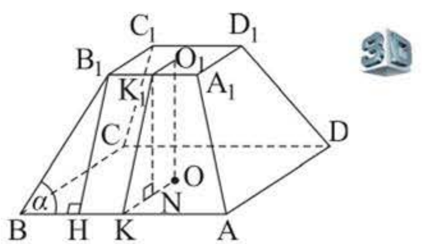


Рисунок 169

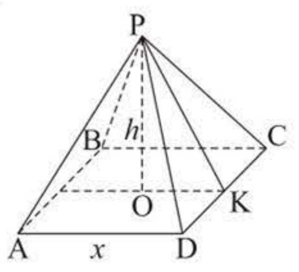
$V = \frac{1}{3} \cdot OO_1 \cdot (5^2 + 2^2 + \sqrt{5^2 \cdot 2^2})$, где точки O и O_1 – центры оснований данной усеченной пирамиды.

Найдем высоту OO_1, рассмотрев прямоугольные треугольники KK_1N и BB_1H, где K и K_1 – середины сторон AB и A_1B_1, $K_1N \perp OK$, $B_1H \perp AB$. Так как основаниями правильной усеченной четырехугольной пирамиды являются квадраты, то $BH = KN = \frac{AB - A_1B_1}{2} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$ (см). Тогда $B_1H = K_1K = BH \cdot \operatorname{tg} 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $O_1O = K_1N = \sqrt{K_1K^2 - KN^2} = \sqrt{\frac{27}{4} - \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Искомый объем равен: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 39 = \frac{39\sqrt{2}}{2} \approx 27{,}6$ (м^3).

О т в е т. $\approx 27{,}6$ м^3.

З а д а ч а 3. Из квадратного листа картона со стороной 1 дм надо вырезать развертку поверхности правильной четырехугольной пирамиды так, чтобы вершины этого листа склеивались в ее вершину. Какой длины надо взять сторону основания пирамиды, чтобы ее объем был наибольший?



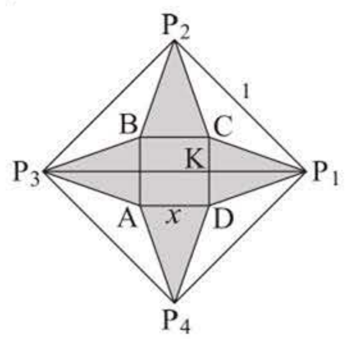


Рисунок 170

Р е ш е н и е. Пусть x дм – сторона основания пирамиды $PABCD$, h дм – ее высота (рисунок 170, *а*). Так как диагональ листа картона равна $\sqrt{2}$ дм, то $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Пусть точка K – середина стороны DC, тогда $PK = P_1K = \frac{\sqrt{2} - x}{2}$ (рисунок 170, *б*). Высота пирамиды: $h = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2} - x - x)(\sqrt{2} - x + x)}{4}} = \sqrt{\frac{2 - 2\sqrt{2}x}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \sqrt{2}x}$, а ее объем:

$V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \sqrt{2}\,x} = \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{x^4 - \sqrt{2}\,x^5}$. Этот объем будет наибольшим, когда функция $f(x) = x^4 - \sqrt{2}\,x^5$, где $x \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, принимает наибольшее значение.

Исследуем эту функцию с использованием производной:

$$f'(x) = 4x^3 - 5\sqrt{2} \cdot x^4 = x^3 \cdot (4 - 5\sqrt{2} \cdot x); \quad f'(x) = 0, \text{ если } x = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

В окрестности этой точки производная функции $f(x)$ меняет знак с «+» на «–», следовательно, при $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ эта функция достигает наибольшего значения. Таким образом, объем пирамиды будет наибольшим, если сторона ее основания равна $\frac{2}{5}$ диагонали данного листа картона.

Ответ. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ дм.

ВОПРОСЫ

Запишите формулу объема: а) пирамиды; б) усеченной пирамиды.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

492. а) Из одного металла изготовлены две детали в форме пирамид, имеющих равновеликие основания и равные высоты. Равны ли массы деталей?

б) Правильная n-угольная пирамида пересечена плоскостью, содержащей ее высоту. Равны ли объемы многогранников, на которые эта плоскость делит пирамиду?

493. Найдите объем правильной n-угольной пирамиды, каждое ребро которой равно a, если: а) $n = 4$; б) $n = 3$.

494. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее высота равна 6 см, а тангенс двугранного угла при ребре основания равен $\frac{15}{8}$.

495. Найдите ребро основания правильной треугольной пирамиды, если ее объем равен 9 дм^3, а двугранный угол при ребре основания 45°.

496. Докажите, что объем правильной треугольной пирамиды равен $\frac{1}{3}Sa$, где a – сторона основания, S – площадь сечения пирамиды, проходящего через боковое ребро и перпендикулярного основанию.

497. В правильной усеченной пирамиде стороны верхнего и нижнего оснований соответственно равны $2\sqrt{3}$ дм и $4\sqrt{3}$ дм, а двугранный угол при ребре нижнего основания равен 60°. Найдите объем пирамиды, если она: а) четырехугольная; б) треугольная.

498. Котлован для пруда имеет форму правильной усеченной четырехугольной пирамиды, сторона верхнего основания которой равна 12 м, а нижнего – 10 м. Ее боковые грани наклонены к плоскостям оснований под углом 45°. Сколько кубометров воды может вместить этот котлован?

499. Треугольная призма $ABCPB_1C_1$ (рисунок 171, *а*) разделена на три пирамиды, как показано на рисунке 171, *б*. Объясните, почему объемы этих пирамид равны.

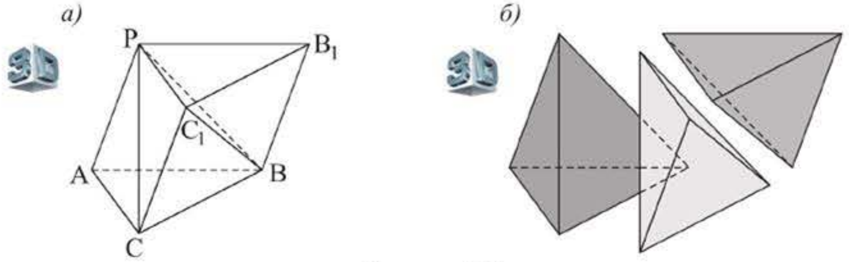


Рисунок 171

500. Можно ли разрезать произвольную треугольную усеченную пирамиду на три равновеликие усеченные пирамиды? Если можно, то объясните, как это сделать.

501. а) Одно из самых грандиозных сооружений древности – пирамида Хеопса в Египте – имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с высотой 150 м и боковым ребром 220 м. Найдите объем этой пирамиды.

б) Алмаз массой 42 карата имеет форму правильного октаэдра. Верно ли, что ребро этого октаэдра $\approx 1{,}72$ см? (Плотность алмаза 3,5 г/см^3, 1 карат равен 0,2 г.)

502. Силосная яма формы усеченной четырехугольной пирамиды, основания которой – прямоугольники, причем стороны нижнего основания равны 13 м и 6 м, а большая сторона верхнего основания 26 м, имеет глубину 5 м. Какова масса силоса, заложенного в ней, если его 1 м^3 весит 0,5 т?

503. Высота пирамиды 8 см. На расстоянии 3 см от вершины параллельно основанию проведена плоскость. Площадь полученного сечения 27 см^2. Найдите объем образованной при этом усеченной пирамиды.

504. Высота пирамиды, основанием которой является правильный шестиугольник, равна 3 дм. Через точку этой высоты, удаленной от ее вершины на 1 дм, проходит сечение пирамиды, параллельное основанию, площадь которого равна Q. Найдите объем усеченной пирамиды, которая отделена указанным сечением от данной пирамиды.

Уровень B

505. Основание пирамиды – прямоугольная трапеция, в которой большая из боковых сторон 12 см, а меньший угол 30°. Все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости ее основания. Площадь боковой поверхности пирамиды равна 90 см^2. Найдите объем пирамиды.

506. а) Найдите объем треугольной пирамиды, боковые ребра которой взаимно перпендикулярны, и каждое из них равно 6 дм.
б) Найдите с точностью до 0,1 дм^3 объем тетраэдра $PABC$, стороны основания ABC которого равны 5 дм, 6 дм, 7 дм, а все плоские углы при вершине P – прямые.

507. Высота правильной усеченной треугольной пирамиды равна $3\sqrt{3}$ см, ее объем равен 189 см^3, а площади оснований относятся как 1 : 4. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

508. В треугольной пирамиде две боковые грани перпендикулярны и перпендикулярны плоскости основания пирамиды. Площади этих граней равны S и Q, а длина их общего ребра равна b. Через середину высоты пирамиды проведено сечение, параллельное ее основанию. Найдите объем образованной при этом усеченной пирамиды.

509. Найдите объем треугольной усеченной пирамиды, стороны одного основания которой равны 2,7 дм, 2,9 дм и 5,2 дм, периметр другого основания равен 7,2 дм, а высота этой пирамиды равна 1 дм.

Уровень C

510. а) Найдите наибольший объем правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 6 см.

б) Чему равен наибольший объем правильной треугольной пирамиды, сумма длин всех ребер которой равна 9 дм?

511. Из одного металла изготавливаются неравные детали формы усеченных пирамид, имеющих равные суммы площадей оснований и равные высоты. Равны ли массы этих деталей? Можно ли изготовить такую деталь с наибольшей массой?

512. Объем усеченной треугольной пирамиды равен V, а отношение площадей ее оснований равно 4. Через сторону верхнего основания проведена секущая плоскость, параллельная противоположному ребру. а) Найдите объем каждого из многогранников, на которые делит эту усеченную пирамиду ее сечение указанной плоскостью. б) Докажите, что отношение объемов подобных многогранников равно кубу коэффициента их подобия.

23. Объем цилиндра

Учебные достижения по изучению темы:

• знать формулу объема цилиндра;

• уметь решать задачи на нахождение объемов цилиндра и его комбинаций с многогранниками.

Т е о р е м а. **Объем V цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:**

$$V = \pi R^2 h,$$

где R – радиус основания, h – высота цилиндра.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выведем эту формулу, используя формулу объемов тел: $V = \int_a^b S(x)dx$. Пусть $S(x)$ – площадь произвольного сечения цилиндра плоскостью, параллельной его основанию и перпендикулярной высоте $O_1O = h$ цилиндра, $x = O_1O_2$ (рисунок 172). Так как $S(x) = S = \pi R^2$, то объем V цилиндра равен:

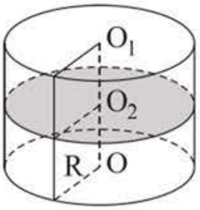


Рисунок 172

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h Sdx = S\int_0^h dx = S \cdot x\Big|_0^h = Sh = \pi R^2 h.$$

З а д а ч а 1. Можно ли налить 200 литров воды в бочку формы равностороннего цилиндра, площадь осевого сечения которого равна 36 дм^2?

Р е ш е н и е. Пусть h – высота цилиндра, а R – радиус его основания. По условию задачи $h = 2R$, $4R^2 = 36$, откуда $R = 3$ дм, $h = 6$ дм. Тогда объем V цилиндра равен: $V = 9 \cdot 6\pi \approx 170$ дм^3. 170 дм^3 = 170 л.

О т в е т. Нельзя.

З а д а ч а 2. Какую наименьшую площадь поверхности может иметь цилиндр, описанный около правильной треугольной призмы, объем которой равен 4 м^3? Найдите объем такого цилиндра.

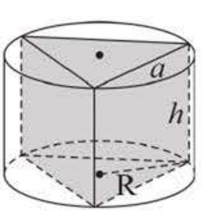


Рисунок 173

Р е ш е н и е. Пусть h – высота призмы, a – сторона ее основания (рисунок 173). Тогда по условию задачи $4 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$, откуда $h = \frac{16}{a^2\sqrt{3}}$. Учитывая, что радиус основания цилиндра $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, выразим площадь его поверхности:

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi\left(\frac{a^2}{3} + \frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{16}{a^2\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}\left(a^2 + \frac{16}{a}\right).$$

Найдем наименьшее значение функции $S(a) = \frac{2\pi}{3}\left(a^2 + \frac{16}{a}\right)$, используя ее производную.

$S'(a) = \frac{2\pi}{3}\left(2a - \frac{16}{a^2}\right)$, $S'(a) = 0$, если $a = 2$. Так как в окрестности этой точки производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то функция $S(a)$ принимает наименьшее значение при $a = 2$. Тогда $S(2) = \frac{2\pi}{3}(4 + 8) = 8\pi$, а искомая площадь равна 8π м^2.

Объем указанного цилиндра найдите самостоятельно.

Ответ. 8π м^2; $\frac{16\pi\sqrt{3}}{9}$ м^3.

ВОПРОСЫ

Запишите формулу объема цилиндра.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

513. Объем цилиндра увеличился в 25 раз.

а) Во сколько раз увеличилась его высота, если радиус основания остался прежним?

б) Во сколько раз увеличился радиус его основания, если высота не изменилась?

514. У цилиндра, объем которого равен 72 дм^3, высоту увеличили в 3 раза, а радиус основания уменьшили в 3 раза. Чему равен объем нового цилиндра?

515. Чему равен объем тела, полученного вращением прямоугольника со сторонами 4 см и 6 см вокруг: а) его большей стороны; б) его меньшей стороны?

516. Найдите объем равностороннего цилиндра, площадь полной поверхности которого равна 24π см^2.

517. Найдите объем цилиндра, если: а) развертка его боковой поверхности – квадрат со стороной, равной 8 см; б) в развертке его боковой поверхности образующая составляет с диагональю угол, равный 60°, а высота цилиндра равна h.

518. В сосуд с водой формы цилиндра, диаметр дна которого равен 10 см, опустили камень, при этом уровень воды в нем поднялся на 2 см. Найдите с точностью до 1 $см^3$ объем камня.

519. Длина хорды нижнего основания цилиндра равна 4 см. Треугольник, образованный этой хордой и центром верхнего основания, имеет периметр 12 см и наклонен к плоскости основания цилиндра под углом 60°. Найдите объем цилиндра.

520. Прямоугольник с размерами $2a$ м и a м является разверткой боковой поверхности двух разных цилиндров. Найдите отношение их объемов.

Уровень B

521. а) Около прямой треугольной призмы, стороны основания которой равны 6 см, 8 см и 10 см, описан цилиндр. Найдите его объем, если известно, что диагонали осевого сечения цилиндра взаимно перпендикулярны.

б) Найдите объем равностороннего цилиндра, вписанного в прямую треугольную призму со сторонами основания 12 см, 16 см и 20 см.

522. Стальной вал формы цилиндра с образующей 97 см и диаметром основания 8,4 см обтачивается так, что его диаметр уменьшается на 0,2 см. Считая $\pi \approx 3{,}1416$, укажите с точностью до 1 г на сколько граммов уменьшится масса вала в результате обточки. (Плотность стали 7,4 г/$см^3$.)

523. Диагонали осевого сечения цилиндра пересекаются под углом 60°, периметр этого сечения равен $(12 + 4\sqrt{3})$ дм. Найдите наибольший возможный объем цилиндра.

Уровень C

524. На изготовление открытой цилиндрической банки расходуется 75π $см^2$ жести. Каковы должны быть высота и радиус основания банки, чтобы ее объем был наибольшим? (Расход материала на швы не учитывается).

525. Закрытая цилиндрическая бочка вмещает 128π л жидкости. Каковы должны быть высота и радиус основания бочки, чтобы на ее изготовление тратилось наименьшее количество материала? (Без учета расхода материала на швы).

24. Объемы конуса и усеченного конуса

Учебные достижения по изучению темы:

• знать формулы нахождения объемов конуса и усеченного конуса;

• уметь решать задачи на нахождение объемов конуса, усеченного конуса и их комбинаций с многогранниками и круглыми телами.

Теорема. **Объем V конуса равен одной трети произведения площади его основания на высоту:**

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

где R – радиус основания конуса, h – высота конуса.

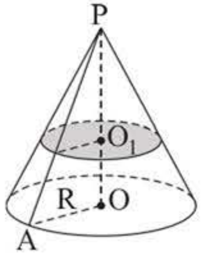


Рисунок 174

Доказательство. Выведем эту формулу, используя формулу объемов тел: $V = \int_a^b S(x)dx$. Пусть $S(x)$ – площадь произвольного сечения конуса плоскостью, параллельной его основанию и перпендикулярной высоте $PO = h$, $S = \pi R^2$ – площадь основания конуса, $x = PO_1$ (рисунок 174). Так как $\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{h^2}$, то $S(x) = \frac{S}{h^2} \cdot x^2$. Тогда объем V конуса равен:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Теорема. **Объем V усеченного конуса равен:**

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2),$$

где R_1 и R_2 – радиусы оснований, а h – его высота.

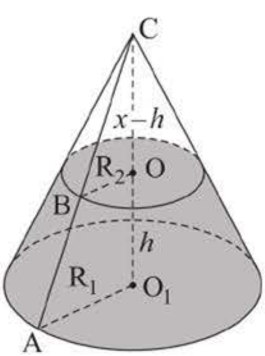


Рисунок 175

Доказательство. Достроим данный усеченный конус до конуса (рисунок 175). Пусть его высота $CO_1 = x$. Объем усеченного конуса равен разности объемов двух конусов: одного – с радиусом основания R_1 и высотой x, другого – с радиусом основания R_2 и высотой $x - h$. Из подобия треугольников CAO_1 и CBO имеем: $\frac{x}{x-h} = \frac{R_1}{R_2}$, $x = \frac{hR_1}{R_1 - R_2}$.

Преобразуем выражение $x - h$, получим: $\frac{hR_1}{R_1 - R_2} - h = \frac{hR_2}{R_1 - R_2}$. Тогда объем усеченного конуса равен:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot R_1^2 x - \frac{1}{3}\pi \cdot R_2^2 (x - h) = \frac{1}{3}\pi\left(R_1^2 \cdot \frac{hR_1}{R_1 - R_2} - R_2^2 \cdot \frac{hR_2}{R_1 - R_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2} = \frac{1}{3}\pi h (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2).$$

З а д а ч а 1. Из круга радиуса 3 дм вырезается сектор, угол φ которого равен 300°, и сворачивается в коническую воронку. Какое количество целых литров воды вмещает эта воронка?

Р е ш е н и е. Обозначим через R и r радиусы круга и основания конуса соответственно (рисунки 176, *а*, *б*). Учитывая, что длина дуги сектора равна длине окружности основания воронки, получим: $\frac{\pi R \cdot 300°}{180°} = 2\pi r$, откуда $r = \frac{5}{6}R = \frac{5}{2}$ (дм). Находим высоту h конуса и его объем V:

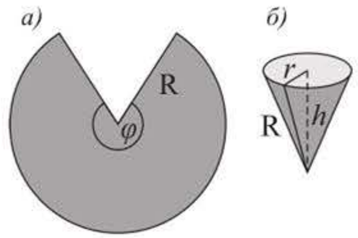


Рисунок 176

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2};\ V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{25\pi\sqrt{11}}{24}\ (\text{дм}^3) \approx 10{,}85\ (\text{л}).$$

О т в е т. 10 литров.

З а д а ч а 2. Образующая l усеченного конуса равна 8 см и наклонена к нижнему основанию под углом $\alpha = 60°$, а отношение площадей его оснований равно 4. Найти с точностью до 1 см^3 объем этого усеченного конуса.

Р е ш е н и е. Пусть R и r – радиусы оснований усеченного конуса, h – его высота, а данный угол $\alpha = 60°$ (рисунок 177). Его объем равен: $V = \frac{1}{3}\pi h \cdot (R^2 + Rr + r^2)$. Проведем высоту BH усеченного конуса. Из ΔABH найдем $AH = 4$ см, $BH = 4\sqrt{3}$. По условию задачи $\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = 4$, откуда $R = 2r$. Так как $AH = R - r$, то $r = 4$ см, $R = 8$ см. Тогда искомый объем равен:

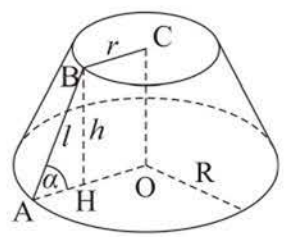


Рисунок 177

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot (64 + 32 + 16) = \frac{448\pi\sqrt{3}}{3} \approx 813\ (\text{см}^3).$$

О т в е т. ≈ 813 см^3.

ВОПРОСЫ

1. Запишите формулу объема конуса.
2. По какой формуле можно найти объем усеченного конуса?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

526. Докажите, что объем конуса равен одной шестой произведения площади его осевого сечения на длину окружности основания.

527. Равнобедренный треугольник, основание которого 12 см, а угол при вершине 120°, вращается вокруг своей оси симметрии. Найдите объем полученного при этом тела вращения.

528. Для изготовления конического сосуда вырезан сектор, угол которого равен 216°. Найдите объем сосуда, если: а) радиус сектора 10 см; б) длина дуги сектора 18π дм.

529. Найдите объем усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 3 дм и 6 дм, а образующая: а) равна 5 дм; б) наклонена к плоскости основания под углом 30°.

530. Сколько целых литров воды вмещается в сосуд формы усеченного конуса, высота которого 27 см, а длины окружностей оснований 99 см и 33 см?

531. В конусе, диаметр основания которого 4 дм, построено сечение, параллельное основанию. Площадь сечения равна π дм^2. Найдите отношение объемов данного конуса и отсеченного усеченного конуса.

532. Найдите отношение объемов равносторонних конуса и цилиндра, площади поверхностей которых равны.

533. Треугольник, стороны которого равны 15 см, 41 см и 52 см, вращается вокруг большей стороны. Найдите объем тела вращения.

534. Найдите объем усеченного конуса, если его высота равна: а) 8 см, образующая 10 см, а площадь боковой поверхности равна 100π см^2; б) 12 см, образующая 13 см, а диагонали осевого сечения перпендикулярны.

Уровень В

535. Чему равно отношение объема конуса, описанного около правильного тетраэдра, к объему вписанного в него конуса?

536. В конус вписана правильная четырехугольная пирамида, сторона основания которой 6 см, а угол между соседними боковыми ребрами 45°. Найдите объем конуса.

537. Найдите объем конуса, площадь поверхности которого равна 96π дм^2, а радиус окружности, вписанной в осевое сечение конуса, равен 3 дм.

538. Через две образующие усеченного конуса, угол между которыми 30°, проведена плоскость, пересекающая основания конуса по хордам, равным 2 дм и 1 дм. Каждая из этих хорд стягивает дугу 150°. Найдите объем усеченного конуса.

Уровень C

539. Около шара радиуса R описан конус наименьшего объема. Найдите этот объем.

540. Бревно длиной 2 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 2 дм и 1 дм. Из бревна изготовлен брус наибольшего объема с квадратным поперечным сечением. Найдите высоту этого бруса.

25. Объемы шара и его частей

Учебные достижения по изучению темы:

• знать формулы объемов шара, шаровых сегмента и сектора;

• уметь решать задачи на нахождение объемов шара, шаровых сегмента и сектора и их комбинаций с многогранниками и круглыми телами.

Теорема. **Объем V шара радиуса R вычисляется по формуле**

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

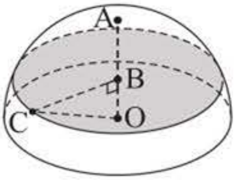


Рисунок 178

Доказательство. Выведем эту формулу, используя формулу объемов тел: $V = \int_a^b S(x)dx$. Пусть $S(x)$ – площадь произвольного сечения полушара плоскостью, параллельной его большому кругу и перпендикулярной радиусу шара $OA = R$, $x = OB$ (рисунок 178). Тогда $S(x) = \pi BC^2 = \pi(R^2 - x^2)$.

Объем полушара равен:

$$\frac{1}{2}V = \int_0^R S(x)dx = \int_0^R \pi(R^2 - x^2)dx = \int_0^R \pi R^2 dx - \int_0^R \pi x^2 dx =$$

$$= \pi R^2 \int_0^R dx - \pi \int_0^R x^2 dx = \pi R^2 \cdot x\Big|_0^R - \pi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^R = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Тогда объем V шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

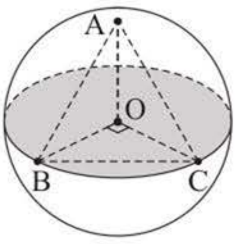


Рисунок 179

Задача 1. На поверхности шара с центром O отмечены точки A, B и C так, что $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 90°$ (рисунок 179). Найти объем шара, если известно, что периметр треугольника ABC равен 18 см.

Решение. Из равенства прямоугольных треугольников AOB, AOC и BOC следует, что $AB = AC = BC = 6$ см. Из ΔBOC получаем: $OB = 3\sqrt{2}$ см. Тогда объем шара равен: $V = \frac{4}{3}\pi OB^3 = \frac{4 \cdot 54\sqrt{2}}{3}\pi = 72\pi\sqrt{2}$ (см^3).

Ответ. $72\pi\sqrt{2}$ см^3.

Отметим, что выпуклый многогранник называется **вписанным в шар** (или шар – описанным около многогранника), если все его вершины лежат на поверхности шара (рисунок 180). Выпуклый многогранник называется **описанным около шара** (а шар – вписанным в многогранник), если все его грани касаются шара (рисунок 181). Аналогично определяются понятия многогранников, вписанного в сферу и описанного около нее.

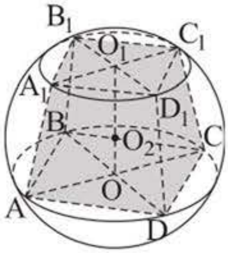


Рисунок 180

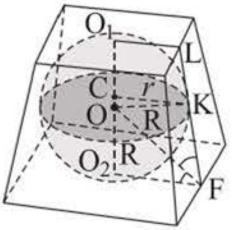


Рисунок 181

З а д а ч а 2. Найти объем шара, вписанного в многогранник, объем которого равен V, а площадь поверхности равна S.

Р е ш е н и е. Пусть дан многогранник, в который можно вписать сферу радиуса r. Разобьем его на пирамиды, основаниями которых являются грани многогранника, а их общей вершиной – центр сферы (рисунок 182). Объем каждой из таких пирамид равен одной третьей произведения площади грани многогранника на радиус шара. Тогда объем V описанного многогранника

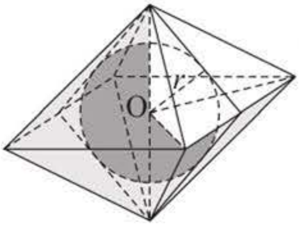


Рисунок 182

равен сумме объемов всех таких пирамид, то есть $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r$, где S – площадь поверхности многогранника. Отсюда $r = \frac{3V}{S}$, тогда искомый объем равен: $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3V}{S}\right)^3 = 36\pi\left(\frac{V}{S}\right)^3$.

О т в е т. $36\pi\left(\frac{V}{S}\right)^3$.

З а д а ч а 3. Доказать, что **объем шарового сегмента**, высота которого равна h, а радиус шара равен R, находится по формуле $\boldsymbol{V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем ось Ox перпендикулярно плоскости основания сегмента (рисунок 183), где высота сегмента $h = BO_1$. Тогда площадь $S(x)$ любого сечения этого сегмента плоскостью, перпендикулярной оси Ox, равна $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$, где $R - h \le x \le R$. Применяя формулу для нахождения объемов тел, получаем:

$$V = \int_{R-h}^{R} S(x)dx = \int_{R-h}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi R^2 \cdot x\Big|_{R-h}^{R} - \pi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{R-h}^{R} = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

Что и требовалось доказать.

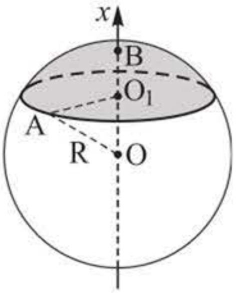


Рисунок 183

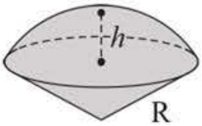


Рисунок 184

Шаровым сектором называется часть шара – тело, ограниченное сферическим сегментом и боковой поверхностью конуса, вершиной которого является центр этого шара. Шаровой сектор, содержащийся в полушаре, является объединением конуса и шарового сегмента, основание которых – общее (рисунок 184). Высотой шарового сектора называется высота соответствующего ему шарового сегмента, а его радиусом – радиус шара.

Задача 4. Доказать, что объем $V_{\text{сект.}}$ шарового сектора, содержащегося в полушаре, равен: $\boldsymbol{V_{\text{сект.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$, где R – радиус шара, h – высота сектора.

Доказательство проведите самостоятельно, найдя сумму объемов шарового сегмента и конуса, из которых состоит шаровой сектор.

Шаровым слоем называется тело, заключенное между двумя параллельными секущими плоскостями шара. Расстояние между этими плоскостями называется высотой шарового слоя, а круги – сечения шара – его основаниями.

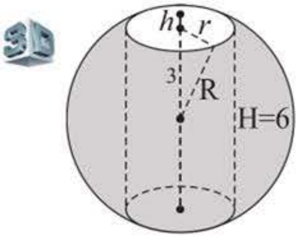


Рисунок 185

Задача 5. В шаре высверлен ствол вдоль его диаметра (рисунок 185). Найти объем оставшейся части шара, если расстояние между плоскими срезами равно 6 см.

Решение. Для нахождения искомого объема V надо от объема шара отнять сумму объемов двух равных шаровых сегментов и цилиндра. Обозначим h высоту сегмента, радиус R шара и радиус r основания цилиндра. Тогда $h = R - 3$, $r^2 = R^2 - 9$, объем сегмента равен:

$V_{\text{сегм.}} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \pi(R-3)^2 \cdot \left(R - \frac{R-3}{3}\right) = \pi(R^2 - 6R + 9)\left(\frac{2}{3}R + 1\right)$, объем цилиндра: $V_{\text{цил.}} = 6\pi(R^2 - 9)$. Искомый объем равен:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - 2\pi(R^2 - 6R + 9)\left(\frac{2}{3}R + 1\right) - 6\pi(R^2 - 9) = 36\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ. 36π см^3.

При решении задачи в общем виде получается ответ $\frac{\pi H^3}{6}$, где H – высота цилиндра, то есть объем такого тела не зависит от радиуса шара и радиуса основания цилиндра (убедитесь в этом самостоятельно).

ВОПРОСЫ

1. По какой формуле можно найти объем шара? Объясните, почему объем шара равен одной третьей произведения площади его поверхности на радиус шара.

2. Запишите формулы объемов шаровых сегмента и сектора и проиллюстрируйте их, используя чертежи.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

541. Во сколько раз увеличится объем шара, если его диаметр увеличить в 2 раза?

542. Два шара радиусами 2 см и 3 см переплавили в один шар. Найдите его радиус.

543. Найдите объем шара, если площадь его поверхности равна 9π дм^2.

544. а) Площадь сечения шара плоскостью в 9 раз меньше площади поверхности шара. Найдите объем шара, если радиус сечения равен 2 см.

б) Найдите объем шара, площадь большого круга которого равна $\frac{9\pi}{16}$ см^2.

545. Сектор AOB, угол которого равен 90°, вращается вокруг радиуса OA. Найдите объем тела вращения, если радиус сектора равен $\frac{3}{4}$ дм.

546. Радиусы четырех шаров образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 12, а ее разность равна 4. Сравните наибольший из объемов этих шаров с суммой объемов остальных.

547. Найдите объем шара, площадь поверхности которого увеличивается на 20π дм^2 при увеличении его радиуса на 1 дм.

548. а) Правильная треугольная призма вписана в шар. Найдите объем шара, если сторона основания призмы равна 3 см, а ее высота – $2\sqrt{6}$ см.
б) Найдите объем шара, описанного около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 2 дм, 3 дм и 6 дм.

549. а) Шар из алюминия имеет массу $93{,}6\pi$ г. Найдите радиус этого шара, если известно, что плотность алюминия равна 2,6 г/см^3.
б) Масса свинцового шара равна 0,5 кг. Найдите с точностью до 0,1 см диаметр этого шара. (Плотность свинца равна 11,4 г/см^3.)

550. а) Найдите с точностью до 0,01 м^3 объем шара, вписанного в равносторонний конус, образующая которого равна 1 м.
б) В шар радиуса 3 дм вписан конус, объем которого равен 25 % объема шара. Найдите высоту конуса.

551. Найдите объем шарового сектора, если известно, что: а) дуга в его осевом сечении равна 120°, а стягивающая хорда равна $4\sqrt{3}$ см; б) длина окружности основания равна 18π см, а радиус шара 15 см.

552. а) Найдите объем сегмента, содержащегося в полушаре, если его основание находится на расстоянии 2 см от центра шара, радиус которого 5 см.
б) Плоскость, проведенная через конец радиуса шара и образующая с ним угол 60°, отсекает от полушара сегмент. Найдите его объем, если радиус шара равен 2 дм.

553. Диаметр шара, равный 20 см, разделен на три части в отношении 1 : 4 : 5. Через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные диаметру. Найдите объем получившегося шарового слоя.

Уровень B

554. В цилиндрическую мензурку с водой, наполненную до некоторого уровня, опущены 4 металлических шарика, радиус каждого из которых равен 5 мм. На сколько миллиметров поднялся уровень воды в мензурке, если диаметр ее основания равен 2,5 см? Ответ дайте с точностью до 0,1 мм.

555. Прямая треугольная призма, стороны основания которой 29 см, 35 см и 48 см, описана около шара. Найдите объем шара.

556. Найдите: а) объем шарового сектора, радиус которого равен 3 дм, а угол между двумя радиусами в его осевом сечении 120°; б) отношение объема шарового сектора к объему шара, если площадь осевого сечения сектора в 3 раза меньше площади большого круга шара.

557. Диаметр шара разделен на три равные части и через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные диаметру. Сравните объем полученного шарового слоя с суммой объемов двух шаровых сегментов.

Уровень C

558. Основанием прямой призмы, вписанной в шар, является треугольник, две стороны которого равны 4 дм и 14 дм, а угол между ними равен $60°$. Объем призмы равен 168 дм^3. Найдите площадь поверхности шара.

559. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, площадь диагонального сечения которой $3\sqrt{3}$ дм^2. Найдите объем шара, если боковое ребро пирамиды равно диагонали ее основания.

560. В конус, образующая которого в 3 раза больше радиуса его основания, помещены два шара, один из которых вписан в конус, а второй касается первого и боковой поверхности конуса. Найдите отношение объемов первого и второго шаров.

26. Упражнения на повторение раздела «Объемы тел»

Уровень А

561. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если: а) стороны его основания равны 9 м и 16 м, а отношение длин диагоналей боковых граней равно 0,75; б) периметр основания равен 72 дм, а диагонали боковых граней равны 25 дм и 29 дм.

562. Найдите объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, в которой $AC = 2$ см, $BC = 2\sqrt{7}$ см, двугранный угол при ребре AA_1 равен 150°, $AM = \sqrt{7}$ см, где M – середина ребра B_1C_1.

563. Основанием призмы является правильный шестиугольник, сторона которого равна a. Боковое ребро призмы наклонено к плоскости ее основания под углом α, а его ортогональная проекция на плоскость основания равна радиусу окружности, описанной около основания призмы. Найдите объем призмы.

564. В наклонной четырехугольной призме боковое ребро равно 6 дм, а ее перпендикулярным сечением является ромб с диагоналями 4 дм и 3 дм. Найдите объем призмы.

565. Из куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 9 см, вырезана треугольная пирамида C_1A_1BD. Найдите объем этой пирамиды.

566. Основанием четырехугольной пирамиды $PABCD$ является параллелограмм $ABCD$, причем $AB = BP = 1$ дм, $PD = 2$ дм, $\angle ABD = \angle BPD = 90°$. Найдите объем этой пирамиды, если основание ее высоты является внутренней точкой отрезка BD.

567. Найдите объем n-угольной усеченной пирамиды, площади оснований которой равны 289 см^2 и 100 см^2, а высота пирамиды, до которой дополнена эта усеченная пирамида, равна 9 см.

568. Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра, наклонена к нему под углом 60°. Эта плоскость пересекает верхнее основание цилиндра по хорде, равной 10 см, стягивающей дугу 90°. Найдите объем цилиндра.

569. Из жести вырезан круговой сектор радиусом 18 см и дугой 240°, который свернут в коническую воронку. Найдите ее объем.

570. Около правильной треугольной пирамиды описан шар. Найдите его объем, если высота пирамиды равна 5,76 см, а боковое ребро – 7,2 см.

Уровень B

571. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC = b$, $\angle A = \alpha$. Боковая грань BB_1C_1C призмы является квадратом. Найдите объем призмы.

572. Докажите, что если в сечение, перпендикулярное боковому ребру призмы, можно вписать окружность, то объем такой призмы равен половине произведения длины радиуса этой окружности на площадь боковой поверхности призмы.

573. Требуется изготовить открытую коробку формы правильной шестиугольной призмы объемом 9 дм^3 из правильного шестиугольника со стороной 3 дм, вырезав из его углов равные четырехугольники, как показано на рисунке 186. Какую высоту будет иметь такая коробка?

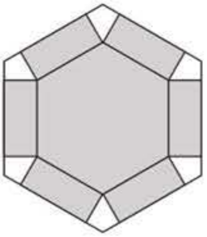


Рисунок 186

574. Цистерна вместимостью 50 м^3 имеет форму тела, состоящего из цилиндра и двух равных шаровых сегментов. Найдите с точностью до 0,01 м длину образующей цилиндра, если диаметр его основания равен 3 м, а высота сегмента 0,57 м.

Уровень C

575. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = 10$ см, $BC = 24$ см, $AC = 26$ см, а площадь ΔAB_1C_1 равна 180 см^2. Найдите объем пирамиды $B_1A_1ACC_1$.

576. Дана правильная четырехугольная пирамида. Найдите: а) наименьшую площадь ее боковой поверхности, если объем пирамиды равен 4 дм^3; б) ее наибольший объем, если площадь боковой поверхности пирамиды равна 36 см^2.

577. Докажите, что объемы цилиндра, конуса и усеченного конуса, описанных около шара, равны одной трети произведений площадей их поверхностей на радиус шара.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

Выберите верный ответ

578. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то объем нового куба будет больше объема первоначального куба на 98 см^3. Чему равен объем первоначального куба?

1) 30 см^3;
2) 27 см^3;
3) 24 см^3;
4) 49 см^3;
5) 36 см^3.

579. Диагональ прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием равна 3,5 м, а диагональ его боковой грани равна 2,5 м. Тогда объем этого параллелепипеда равен:

1) 4 $м^3$;
2) 6 $м^3$;
3) 3,5 $м^3$;
4) 2,5 $м^3$;
5) 3 $м^3$.

580. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 дм и 17 дм и образуют угол 30°. Площадь боковой поверхности параллелепипеда равна 1 $м^2$. Тогда объем этого параллелепипеда равен:

1) 136 $дм^3$;
2) 148 $дм^3$;
3) 1,5 $м^3$;
4) 1,6 $м^3$;
5) 2 $м^3$.

581. В наклонной призме построено сечение, пересекающее все боковые ребра и перпендикулярное им. Площадь сечения равна 1 $дм^2$, а боковое ребро равно 1 м. Тогда объем призмы равен:

1) 100 $дм^3$;
2) 10 $дм^3$;
3) 1000 $дм^3$;
4) 0,1 $м^3$;
5) 0,001 $м^3$.

582. Грани параллелепипеда – равные ромбы со стороной 10 см и острым углом 60°. Тогда его объем равен:

1) 700 $см^3$;
2) 1000 $см^3$;
3) $250\sqrt{2}$ $см^3$;
4) $0,5\sqrt{3}$ $дм^3$;
5) $0,5\sqrt{2}$ $дм^3$.

583. Высота прямой четырехугольной призмы равна 4 см, а ее диагонали наклонены к основанию под углами 30° и 45°. Острый угол между диагоналями основания равен 60°. Объем призмы равен:

1) 48 $см^3$;
2) 36 $см^3$;
3) 24 $см^3$;
4) 64 $см^3$;
5) $24\sqrt{3}$ $см^3$.

584. Ребро правильного тетраэдра равно 6 м. Тогда его объем равен:

1) 24 $м^3$;
2) $18\sqrt{2}$ $м^3$;
3) $24\sqrt{2}$ $м^3$;
4) $24\sqrt{3}$ $м^3$;
5) 25 $м^3$.

585. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник со сторонами 6 см, 6 см и 8 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 9 см. Объем этой пирамиды равен:

1) $\frac{8}{9}\sqrt{3245}$ см^3;
2) $\frac{8}{3}\sqrt{3245}$ см^3;
3) $\frac{16}{3}\sqrt{95}$ см^3;
4) 114 см^3;
5) 48 см^3.

586. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2 дм, а двугранный угол между основанием и боковой гранью равен 45°. Объем пирамиды равен:
1) 8 дм^3;
2) 10 дм^3;
3) 6 дм^3;
4) $4\sqrt{2}$ дм^3;
5) $6\sqrt{2}$ дм^3.

587. Основанием пирамиды является треугольник, два угла которого равны 15° и 75°, а радиус описанной около него окружности равен 3 м. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом 45°. Тогда объем этой пирамиды равен:
1) 9 м^3;
2) 10 м^3;
3) 5 м^3;
4) 4,5 м^3;
5) $3\sqrt{3}$ м^3.

588. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 12 см и 10 см, а двугранный угол при ребре нижнего основания равен 45°. Объем этой пирамиды равен:
1) $121\frac{1}{3}$ см^3;
2) 91 см^3;
3) $60\frac{2}{3}$ см^3;
4) 45,5 см^3;
5) $30\frac{1}{3}$ см^3.

589. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны $5\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$, а ее боковое ребро наклонено к основанию под углом 60°. Тогда объем этой пирамиды равен:
1) $78\sqrt{3}$;
2) $58\sqrt{3}+50\sqrt{6}$;
3) $234\sqrt{3}$;
4) $\frac{78\sqrt{3}}{3}$;
5) $80\sqrt{3}$.

590. Объем цилиндра равен 36 см^3, его высоту увеличили в 3 раза, а радиус основания уменьшили в 3 раза. Объем нового цилиндра равен:

1) 36 см^3;
2) 24 см^3;
3) 12 см^3;
4) 18 см^3;
5) 6 см^3.

591. Образующая конуса равна 2 м и составляет с плоскостью его основания угол 30°. Объем этого конуса равен:

1) 2π м^3;
2) π м^3;
3) 3π м^3;
4) $1{,}5\pi$ м^3;
5) $\sqrt{3}\,\pi$ м^3.

592. Площади поверхностей двух шаров относятся как 4 : 9. Тогда их объемы относятся как:

1) 8 : 27;
2) 4 : 9;
3) 16 : 81;
4) 64 : 729;
5) 8 : 18.

593. В конусе, радиус основания которого равен 2 дм, построено сечение, параллельное основанию. Площадь сечения равна π дм^2. Тогда отношение объемов данного и полученного усеченного конусов равно:

1) 1,5;
2) 2,5;
3) 1,25;
4) $\frac{8}{3}$;
5) $\frac{8}{7}$.

594. Сосуд объемом 27π дм^3 имеет форму полушара, дополненного цилиндром. Радиус полушара равен 3 дм. Высота цилиндра равна:

1) 2 дм;
2) 1,5 дм;
3) 0,5 дм;
4) 1 дм;
5) $\sqrt{\pi}$ дм.

595. В шар радиуса 3 дм вписан конус, образующая которого составляет с высотой конуса угол 60°. Объем этого конуса равен:

1) 3π дм^3;
2) 4π дм^3;
3) $\frac{27\pi}{8}$ дм^3;
4) $\frac{29\pi}{9}$ дм^3;
5) $3{,}5\pi$ дм^3.

Выполните упражнения

596. Два металлических куба с ребрами 3,4 дм и 1,4 дм переплавлены в один куб. Сравните длину ребра этого куба с 3,5 дм.

597. Объем правильной треугольной призмы равен $20\sqrt{3}$ см^3. Радиус окружности, описанной около основания призмы, равен $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см. Найдите высоту призмы.

598. В наклонном параллелепипеде основание и боковая грань – прямоугольники, их площади соответственно равны 20 дм^2 и 24 дм^2, а угол между их плоскостями 30°. Другая его боковая грань имеет площадь 15 дм^2. Найдите объем параллелепипеда.

599. Из жести вырезан круговой сектор радиусом 18 см и дугой 240°, который свернут в коническую воронку. Сколько целых литров воды вмещает эта воронка?

600. Прямоугольная трапеция, основания которой равны $\sqrt{3}$ дм и $4\sqrt{3}$ дм, вращается вокруг ее меньшей боковой стороны. Найдите объем тела вращения, если известно, что большая боковая сторона трапеции составляет с ее меньшим основанием угол 150°.

601. Около правильной треугольной призмы описан цилиндр. Высота призмы равна 8 см, а диагональ ее боковой грани равна 10 см. Найдите объем цилиндра.

602. Из деревянного цилиндра, высота которого равна диаметру основания, выточен шар наибольшего радиуса. Сколько процентов материала сточено?

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Демокрит Абдерский

Б. Кавальери

По историческим сведениям формулы объемов пирамиды и конуса впервые были найдены древнегреческим ученым Демокритом Абдерским (460–370 гг. до н. э.).

В XII книге «Начал» Евклида было изложено доказательство утверждения, что треугольные пирамиды, имеющие равные высоты и равновеликие основания, равновелики. В Древней Греции более полно теория объемов тел была предложена Архимедом.

Большой вклад в развитие теории объемов внес итальянский ученый Бонавентура Кавальери (1598–1647), предвосхитивший идеи применения интеграла для вычисления объемов тел.

1. Используя интернет-ресурсы, узнайте, в чем заключается «принцип Кавальери» для нахождения объемов тел.

2. Решите задачи Архимеда:

а) найдите радиус шара, имеющего объем конуса, радиус основания которого равен r, а высота равна h;

б) докажите, что цилиндр, основанием которого является большой круг шара, а высота равна его диаметру, имеет объем, равный $\frac{3}{2}$ объема шара.

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 10–11 КЛАССОВ

Уровень A

603. Через сторону правильного n-угольника проведена плоскость. Найдется ли его сторона, параллельная построенной плоскости, если: а) $n = 3$; б) $n = 6$? Ответ объясните.

604. Можно ли провести прямую, параллельную любым двум плоскостям?

605. Верно ли, что две плоскости параллельны, если две прямые одной из них соответственно параллельны двум прямым другой?

606. Сторона правильного треугольника лежит в некоторой плоскости. Может ли быть перпендикулярна этой плоскости: а) другая его сторона; б) медиана треугольника?

607. Могут ли быть перпендикулярными одной плоскости две стороны: а) треугольника; б) трапеции; в) правильного шестиугольника?

608. Правильно ли дано определение понятия? Если нет, то укажите ошибку:

а) две прямые в пространстве называются параллельными, если они не имеют общих точек;

б) две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек;

в) пирамидой называется многогранник, одна грань которого многоугольник, а остальные – треугольники.

609. Отрезок AB пересекает плоскость α в точке O. Прямые AD и BC перпендикулярны этой плоскости и пересекают ее в точках D и C соответственно. Найдите длину отрезка AB, если $AD = 6$ см, $BC = 2$ см, $OC = 1{,}5$ см.

610. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна $4\sqrt{3}$ см, а боковое ребро – $3\sqrt{3}$ см. Через ребро AB и середину стороны A_1C_1 проведена плоскость. Найдите угол наклона этой плоскости к основанию призмы и площадь сечения.

611. Основание наклонной призмы – прямоугольный треугольник с катетами, равными 5 см и 12 см. Боковая грань, содержащая гипотенузу, перпендикулярна основанию и имеет площадь 130 см^2. Найдите объем призмы.

612. Верно ли, что середина отрезка с концами:
а) $A(3;\ 5;\ -7)$ и $B(-3;\ 9;\ 7)$ принадлежит оси ординат;
б) $C(3;\ 4;\ 5)$ и $D(10;\ 12;\ -5)$ принадлежит плоскости Oxy?

613. Верно ли, что если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, то точки A, B, C лежат: а) на одной прямой; б) на параллельных прямых?

614. Найдите все значения m, при которых векторы $\vec{a}(m;\ 4;\ 2)$ и $\vec{b}(m+2;\ 6;\ 3)$:
а) коллинеарны; б) компланарны; в) перпендикулярны.

Долина Киин-Кериш, Восточно-Казахстанская область

615. Долина Киин-Кериш напоминает марсианские пейзажи. Сколько гектаров занимает эта долина, если их количество равно числу, выражающему площадь поверхности куба, ребро которого равно $5\sqrt{2}$ дм?

616. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда длиной 0,5 м и шириной 37 см. Найдите его высоту, если вместимость аквариума 0,074 $м^3$.

617. Высота конуса равна половине образующей, а радиус его основания равен $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности этого конуса.

618. В шар вписан конус, радиус основания которого равен r, а высота h. Найдите радиус R шара.

619. Сравните объем шара радиуса 1 дм с объемом правильной треугольной призмы, каждое ребро которой равно 2 дм.

620. Найдите объем шарового сегмента, площадь поверхности которого равна π $дм^2$, а радиус шара равен 1 дм.

621. Дана трапеция $ABCD$, точки M и N – середины ее оснований AB и CD. Докажите, что $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XN} = 0{,}5(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB})$, где X – произвольная точка пространства.

622. Даны векторы $\vec{a}(3;\ 4;\ 5)$ и $\vec{b}(1;\ 0;\ -1)$. Найдите скалярный квадрат суммы этих векторов.

623. Покажите, как можно вырезать развертку поверхности правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1 дм, из квадратного листа картона со стороной, равной 2 дм. Чему равна площадь полной поверхности этой пирамиды?

624. В основание конуса вписан квадрат со стороной 10 см. Сечение конуса плоскостью, проходящей через сторону квадрата и вершину конуса, имеет угол при вершине 60°. Найдите площадь боковой поверхности этого конуса.

625. Высшей точкой Казахстана является пик Хан-Тенгри (горы Тянь-Шань). Какова его высота, если она выражается в метрах тем же числом, что и объем тетраэдра в $м^3$, боковые ребра которого перпендикулярны и равны 5 м, 6 м и 1339 м?

Пик Хан-Тенгри, Алматинская область

Уровень B

626. Основание пирамиды $DABC$ – ΔABC, в котором $AB = AC = 25$ см, $BC = 40$ см. Грань BCD перпендикулярна основанию. Расстояние от основания высоты DM пирамиды до грани ACD равно $6\sqrt{2}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

627. Расстояние от центра сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, до ее основания в 2 раза меньше радиуса сферы (рисунок 187). Найдите угол между боковым ребром и высотой пирамиды.

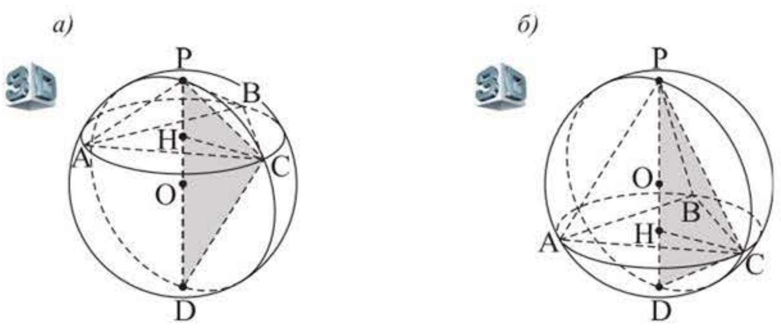


Рисунок 187

628. Найдите площадь сферы, вписанной в конус, образующая которого равна 9 см и наклонена к основанию под углом 30°.

629. В правильную четырехугольную пирамиду, объем которой равен 96 $см^3$, вписан шар. Найдите высоту и сторону основания пирамиды, если радиус шара равен 2 см.

630. В треугольной пирамиде все плоские углы при ее вершине – прямые, а боковые ребра равны $2\sqrt{2}$ см, 3 см и $\sqrt{10}$ см. Найдите площадь поверхности и объем описанного около этой пирамиды шара.

Уровень C

631. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите отношение объема тетраэдра B_1ACD_1 к объему этого параллелепипеда.

632. Основания усеченной пирамиды – равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны m и n ($m > n$). Две ее боковые грани перпендикулярны плоскостям оснований, а третья наклонена к плоскости нижнего основания под углом φ. Найдите объем этой пирамиды. Рассмотрите возможные случаи расположения высоты пирамиды (рисунок 188).

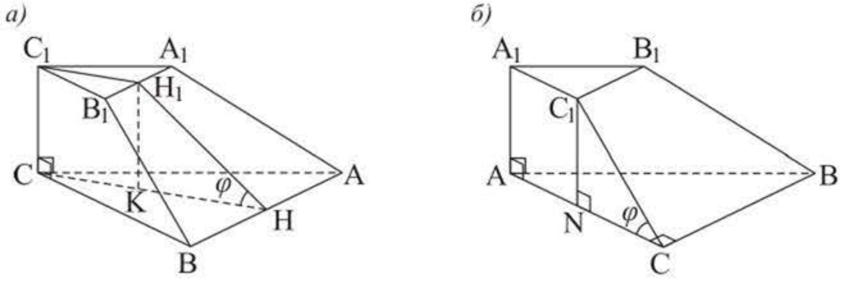


Рисунок 188

633. а) В конус с высотой 0,5 м и радиусом основания 1 м вписан цилиндр с радиусом основания r м. Найдите объем цилиндра и установите, при каком значении r объем цилиндра наибольший.

б) В шар радиуса 3 дм вписан конус, высота которого равна h дм. Найдите объем конуса и установите, при каком значении h объем будет наибольшим.

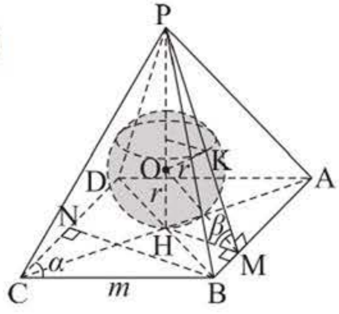


Рисунок 189

634. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна m, а острый угол – α. Каждый двугранный угол пирамиды при стороне ее основания равен β (рисунок 189). Докажите, что в эту пирамиду можно вписать шар и найдите его радиус.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

Выберите верный ответ

635. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Угол между прямыми A_1D и D_1C равен:

1) 30°; 2) 45°; 3) 90°; 4) 120°; 5) 60°.

636. Ребро правильного тетраэдра равно $\sqrt{2}$ дм. Расстояние между двумя его ребрами, лежащими на скрещивающихся прямых, равно:

1) 1 дм;
2) 1,5 дм;
3) $0{,}5\sqrt{2}$ дм;
4) $0{,}3\sqrt{3}$ дм;
5) 2 дм.

637. Даны ромб $ABCD$ со стороной $4\sqrt{2}$ дм и углом 45° и равносторонний треугольник DCE. Если расстояние от точки E до прямой AB равно $2\sqrt{10}$ дм, то угол между плоскостями ABC и DCE равен:

1) 90°;
2) 60°;
3) 45°;
4) 30°;
5) $\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

638. Даны двугранный угол 60° и точка, удаленная от его граней на 3 см и 9 см. Расстояние от этой точки до его ребра равно:

1) 12 см;
2) 12,5 см;
3) $2\sqrt{39}$ см;
4) $5\sqrt{6}$ см;
5) $4\sqrt{10}$ см.

639. Объем прямой треугольной призмы, каждое ребро которой равно $\sqrt{3}$ дм, равен:

1) 4,5 дм^3;
2) 3 дм^3;
3) 1,5 дм^3;
4) 2,25 дм^3;
5) 2,75 дм^3.

640. Стороны основания наклонного параллелепипеда 2 дм и $\sqrt{2}$ дм, а угол между ними 135°. Диагональное сечение параллелепипеда, содержащее большую диагональ основания, перпендикулярно ему и является ромбом. Если боковое ребро параллелепипеда наклонено к основанию под углом 45°, то его объем равен:

1) $4\sqrt{5}$ дм^3;
2) $2\sqrt{10}$ дм^3;
3) 2 дм^3;
4) 4 дм^3;
5) $2\sqrt{5}$ дм^3.

641. Площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна 6 см, а апофема – 6,5 см, равна:

1) 78 см^2;
2) 80 см^2;
3) 90 см^2;
4) 100 см^2;
5) 120 см^2.

642. Основание пирамиды – трапеция с боковыми сторонами 8 см и 10 см, каждая ее боковая грань наклонена к основанию под углом 60°, высота пирамиды равна $4\sqrt{3}$ см. Тогда площадь ее полной поверхности равна:

1) $96\sqrt{3}$ см^2;
2) 144 см^2;
3) 200 см^2;
4) 216 см^2;
5) 360 см^2.

643. На поверхности шара лежат три точки A, B и C такие, что $AB = BC = AC = 1{,}5$ см. Расстояние от центра шара до плоскости треугольника ABC равно 1,5 см. Площадь поверхности шара равна:

1) 24π см^2;
2) 21π см^2;
3) 12π см^2;
4) 6π см^2;
5) 4π см^2.

644. Резервуар состоит из цилиндра, закрытого сверху полушаром. Внутренний диаметр основания цилиндра равен 12 м, а высота цилиндра – 4 м. Емкость этого резервуара равна:

1) 800 м^3;
2) 750 м^3;
3) 300π м^3;
4) 298π м^3;
5) 288π м^3.

645. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 60°. Центральный угол в развертке боковой поверхности этого конуса равен:

1) 270°;
2) 180°;
3) 150°;
4) 120°;
5) 90°.

646. Если объем шара, вписанного в равносторонний конус, равен $10\frac{2}{3}\pi$ см^3, то объем этого конуса равен:

1) 24π см^3;
2) 20π см^3;
3) 25π см^3;
4) $24\frac{1}{3}\pi$ см^3;
5) 21π см^3.

647. Образующая конуса наклонена к его основанию под углом 45°. Построено сечение конуса, содержащее две образующие. Если сечение наклонено к основанию под углом 60° и удалено от центра основания на $2\sqrt{3}$ см, то его площадь равна:

1) $64\sqrt{2}$ см^2;
2) 64 см^2;
3) 48 см^2;
4) $32\sqrt{2}$ см^2;
5) $24\sqrt{2}$ см^2.

648. Прямоугольная трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $\angle A = 90°$) вращается вокруг оси, содержащей сторону AB. Если $BD = 10$ см, $BC = 2$ см и $\angle DBC = 60°$, то объем тела вращения равен:

1) $\frac{335\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3;
2) $\frac{215}{3}\pi$ см^3;
3) $\frac{145\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3;
4) $195\sqrt{3}\pi$ см^3;
5) $65\sqrt{3}\pi$ см^3.

649. Наибольший объем правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в сферу радиуса 9 см, равен:

1) 576 см^3;
2) 600 см^3;
3) 640 см^3;
4) 536 см^3;
5) 729 см^3.

Выполните упражнения

650. Вычислите площадь полной поверхности:
а) правильной треугольной призмы, каждое ребро которой равно 6 см;
б) правильного тетраэдра, ребро которого равно 10 см.

651. Радиусы оснований усеченного конуса равны 8 см и 12 см. Найдите площадь его боковой поверхности, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45°.

652. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, катеты которого равны 6 см и 8 см. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

653. Найдите объем шара, если известно уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 1$ его поверхности.

654. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковые грани AA_1B_1B и AA_1C_1C перпендикулярны и каждая из них – квадрат со стороной a. Найдите расстояние между прямыми AC_1 и BA_1.

ТАБЛИЦА ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ УГЛОВ ОТ 0° ДО 90°

A	sin *A*	*B*	*A*	sin *A*	*B*	*A*	sin *A*	*B*
0°	0,000	90°	30°	0,500	60°	60°	0,866	30°
1°	0,017	89°	31°	0,515	59°	61°	0,875	29°
2°	0,035	88°	32°	0,530	58°	62°	0,883	28°
3°	0,052	87°	33°	0,545	57°	63°	0,891	27°
4°	0,070	86°	34°	0,559	56°	64°	0,899	26°
5°	0,087	85°	35°	0,574	55°	65°	0,906	25°
6°	0,105	84°	36°	0,588	54°	66°	0,914	24°
7°	0,122	83°	37°	0,602	53°	67°	0,921	23°
8°	0,139	82°	38°	0,616	52°	68°	0,927	22°
9°	0,156	81°	39°	0,629	51°	69°	0,934	21°
10°	0,174	80°	40°	0,643	50°	70°	0,940	20°
11°	0,191	79°	41°	0,656	49°	71°	0,946	19°
12°	0,208	78°	42°	0,669	48°	72°	0,951	18°
13°	0,225	77°	43°	0,682	47°	73°	0,956	17°
14°	0,242	76°	44°	0,695	46°	74°	0,961	16°
15°	0,259	75°	45°	0,707	45°	75°	0,966	15°
16°	0,276	74°	46°	0,719	44°	76°	0,970	14°
17°	0,292	73°	47°	0,731	43°	77°	0,974	13°
18°	0,309	72°	48°	0,743	42°	78°	0,978	12°
19°	0,326	71°	49°	0,755	41°	79°	0,982	11°
20°	0,342	70°	50°	0,766	40°	80°	0,985	10°
21°	0,358	69°	51°	0,777	39°	81°	0,988	9°
22°	0,375	68°	52°	0,788	38°	82°	0,990	8°
23°	0,391	67°	53°	0,799	37°	83°	0,993	7°
24°	0,407	66°	54°	0,809	36°	84°	0,995	6°
25°	0,423	65°	55°	0,819	35°	85°	0,996	5°
26°	0,438	64°	56°	0,829	34°	86°	0,998	4°
27°	0,454	63°	57°	0,839	33°	87°	0,999	3°
28°	0,469	62°	58°	0,848	32°	88°	0,999	2°
29°	0,485	61°	59°	0,857	31°	89°	1,000	1°
30°	0,500	60°	60°	0,866	30°	90°	1,000	0°
A	cos *B*	*B*	*A*	cos *B*	*B*	*A*	cos *B*	*B*

ТАБЛИЦА ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТАНГЕНСОВ УГЛОВ ОТ 0° ДО 89°

A	tg A	A	tg A	A	tg A
0°	0,000	30°	0,577	60°	1,73
1°	0,017	31°	0,601	61°	1,80
2°	0,035	32°	0,625	62°	1,88
3°	0,052	33°	0,649	63°	1,96
4°	0,070	34°	0,675	64°	2,05
5°	0,087	35°	0,700	65°	2,14
6°	0,105	36°	0,727	66°	2,25
7°	0,123	37°	0,754	67°	2,36
8°	0,141	38°	0,781	68°	2,48
9°	0,158	39°	0,810	69°	2,60
10°	0,176	40°	0,839	70°	2,75
11°	0,194	41°	0,869	71°	2,90
12°	0,213	42°	0,900	72°	3,08
13°	0,231	43°	0,933	73°	3,27
14°	0,249	44°	0,966	74°	3,49
15°	0,268	45°	1,000	75°	3,73
16°	0,287	46°	1,04	76°	4,01
17°	0,306	47°	1,07	77°	4,33
18°	0,325	48°	1,11	78°	4,70
19°	0,344	49°	1,15	79°	5,14
20°	0,364	50°	1,19	80°	5,67
21°	0,384	51°	1,23	81°	6,31
22°	0,404	52°	1,28	82°	7,12
23°	0,424	53°	1,33	83°	8,14
24°	0,445	54°	1,38	84°	9,51
25°	0,466	55°	1,43	85°	11,4
26°	0,488	56°	1,48	86°	14,3
27°	0,510	57°	1,54	87°	19,1
28°	0,532	58°	1,60	88°	28,6
29°	0,554	59°	1,66	89°	57,3

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

2. а) Да; б) нет. **3.** а) Могут быть параллельными или пересекающимися; б), в) – пересекаются. **4.** а) Нет; б) могут быть параллельными или пересекающимися. **5.** Нет. **6.** Используйте теорему о трех перпендикулярах. **7.** $2\sqrt{2}$ м. **8.** 15 см или 20 см. **9.** $6\sqrt{2}$. **10.** 60°. **11.** в) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$. **12.** $l = \frac{nh}{\sin\alpha}$. **13.** ≈ 84°. **14.** $8\sqrt{2}$ см. **15.** а) 7; б) 5. **16.** $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$. **17.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$; $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$; $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. **18.** а) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{b\sqrt{21}}{7}$. **19.** $32\sqrt{3}$. **20.** 6. **21.** а) 4; б) 6; в) 4. **23.** а) 8; б) 12; в) 6; г) 3. **24.** а) 270°; б) 180°. **25.** г). **26.** а) 4 см; б) $4\sqrt{2}$ см; в) $4\sqrt{3}$ см; г) 96 см^2. **28.** Может. **29.** 22 см. **30.** 26 см. **31.** 10 см. **33.** а) 5; б) пятиугольник. **34.** Верные утверждения: а), в), д). **35.** б) Есть. **37.** в) Неверно. **39.** Не существует. **42.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) 45°. **44.** б) Пусть в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AD = a$, $CD = b$, $DD_1 = c$. Докажите, что треугольники AB_1D, CB_1D, D_1B_1D – прямоугольные с гипотенузой $B_1D = d$. Обозначьте проекции катетов a, b, c на гипотенузу d через a_1, b_1, c_1 соответственно и, используя свойство катета в прямоугольном треугольнике (катет – есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу, например, $a^2 = d \cdot a_1$), выразите сумму $a^2 + b^2 + c^2$ через d и a_1, b_1, c_1. **45.** ≈ 20,9 см. **46.** $\sqrt{6}$ дм^2. **47.** $\frac{a^2}{\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha \le \frac{h}{a}$; $\frac{ah}{\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha > \frac{h}{a}$; $0° < \alpha < 90°$. **48.** а) 48 м^2; б) 180 м^2. **49.** $14\sqrt{3}$. **50.** 2 дм и 4 дм. **51.** а) 188 дм^2; б) $(120\sqrt{3} + 230)$ м^2. **52.** а) 78 дм^2; б) 1320 см^2. **53.** а) $96\sqrt{3}$ см^2; б) $(12\sqrt{3} + 24)$ дм^2. **54.** а) $(40\sqrt{2} + 126)$ см^2; б) 200 см^2. **55.** а) 45 см^2; б) $(20\sqrt{2} + 40)$ см^2. **56.** а) $(64\sqrt{3} + 24)$ м^2; б) $(40\sqrt{13} + 60)$ см^2. **57.** а) 48 м^2; б) 336 дм^2. **58.** $(2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)$ дм^2. **59.** а) 96 см^2; б) $(16\sqrt{3} + 64)$ см^2. **60.** $(60\sqrt{2} + 72)$ м^2. **61.** $(64\sqrt{91} + 512)$ см^2. **62.** 30 листов. **64.** а) 17 см; б) $4\sqrt{2}$ дм. **65.** а) 60°; б) 45°; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ см. **66.** а) 6 см; б) 60°; в) $2\sqrt{6}$ см. **67.** а) $4\sqrt{2}$ см; б) $75\sqrt{3}$ см^2. **68.** 4 см. **69.** $(150\sqrt{3} + 240)$ см^2. **70.** а) 36 м^2; б) $16\sqrt{3}$ м^2. **71.** а) 230 см^2; б) $50\sqrt{2}$ см^2. **72.** а) ≈ 82 300 м^2; б) ≈ 8595 м^2. **73.** а) $24\sqrt{3}$ см^2; б) $12\sqrt{39}$ см^2. **74.** $16\sqrt{2}$ дм^2. **75.** а) 45°; б) $8\sqrt{3}$ дм^2. **76.** У второй пирамиды площадь боковой поверхности больше. **78.** а) $5\sqrt{3}$ дм, основание высоты – середина гипотенузы; б) 8 см, основание высоты – центр окружности, описанной около данного тупоугольного треугольника. **79.** 3 м. **81.** ≈ 13,7 см. **82.** $(63+9\sqrt{21})$ м^2. **83.** $(2+\sqrt{2})$ дм^2. **84.** а) $64\sqrt{3}$ см^2; б) $4\sqrt{7}$ дм^2. **85.** а) $(63\sqrt{5}+56)$ см^2; б) 245 дм^2. **86.** ≈ 16,5 м^2. **87.** $\sqrt{17\cdot(17-2m)}$ см, $0<m<8{,}5$. **88.** $a^2\cdot\sin\beta\cdot\mathrm{ctg}\left(45°-\frac{\varphi}{2}\right)$. **89.** $\frac{c^2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$. **91.** а) Верно; б) может; в) нет. **92.** б) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. **93.** Верно. **94.** а) $2\sqrt{2}$ см; б) 24 см^2. **95.** 4 см. **96.** 14 см. **97.** а) $(52+40\sqrt{3})$ см^2; б) $43\sqrt{3}$ см^2. **98.** а) $(100+140\sqrt{2})$ см^2; б) $276\sqrt{3}$ см^2. **99.** а) $360\sqrt{3}$ см^2; б) $180\sqrt{3}$ см^2. **100.** 280 дм^2. **101.** а) $126\sqrt{3}$ см^2; б) $64\sqrt{2}$ см^2. **102.** 32 см^2 и 200 см^2. **103.** $(20\sqrt{3}+90)$ см^2. **104.** 360 см^2. **105.** $(18+6\sqrt{3})$ дм^2. **106.** а) 211,68 см^2. **107.** 11 см. **108.** $108\sqrt{3}$ см^2, $432\sqrt{3}$ см^2. **109.** 2. **110.** ≈ 35 м. **111.** Верно. **112.** 294 см^2. **113.** $4{,}5\sqrt{7}$ дм^2. **114.** $27\sqrt{15}$ см^2. **115.** 72 см^2. **116.** $\frac{3b^2}{2}$. **117.** ≈ 35°. **118.** а) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})h(p+q)$; б) $(1{,}5m^2-0{,}5n^2)(\sqrt{2}+1)$. **120.** б) – существует; а), в), г), д) – нет. **121.** а), б) – нет; в) существует при условии, что $\alpha+\beta+\gamma<360°$; г) существует. **122.** б). **123.** Например, в четырехгранном угле $PABCD$ сечение APC разбивает его на два трехгранных угла, для которых имеем: $\angle APD<\angle APC+\angle DPC$, $\angle APC<\angle APB+\angle BPC$. Далее сложите левые и правые части этих неравенств. **124.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$; $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{6}}{2}$. **126.** а) $\arccos\frac{1}{3}$; б) $\mathrm{arctg}\,2\sqrt{3}$. **127.** 90°, отложите на ребрах данного угла от его вершины равные отрезки $PA_1=PB_1=PC_1=PD_1$, тогда пирамида $PA_1B_1C_1D_1$ – правильная... **128.** $(222+6\sqrt{481})$ см^2. **129.** $5\sqrt{3}$ дм^2. **131.** $2\arcsin\frac{\sqrt{13}}{7}$. **132.** Разверткой поверхности такого тетраэдра является треугольник, в котором отрезки AB, BC, AC – средние линии. **133.** $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Составьте тригонометрическое уравнение, выразив боковое ребро через сторону основания и указанные углы. **134.** а) $2\arcsin\frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{2}$; б) $2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2\sin\beta}$. Пусть сторона основания равна a, искомый угол – x, тогда выразите: а) боковое ребро через a и $\sin\frac{\alpha}{2}$, и найдите $\sin\frac{x}{2}$; б) например, перпендикуляр DK к ребру SC через a и $\sin\frac{\beta}{2}$, и найдите синус $\angle C$ в ΔDKC. Учитывая, что $\angle C = 90°-\frac{x}{2}$, найдите x. **135.** а), б) – неверно, приведите примеры таких многогранников. **137.** а) Не является; б) является. **138.** а) 180°; д) 324°.

139. а) Нельзя; б), в) можно. **140.** $\sqrt{3}$. **141.** а) 60° или 90°; б) $-\frac{1}{3}$. **143.** а) 2 см; б) $2\sqrt{2}$ см. **144.** $\frac{1}{2}$. **145.** а) Не является; б) 1 дм. **146.** $9\sqrt{3}$ м^2. **147.** а) 3 см; б) 4 см. **148.** $2\sqrt{3}$ м^2. **149.** $\frac{1}{9}$. **150.** $16\sqrt{3}$ дм^2. **152.** Сечение – правильный шестиугольник, $S_{сеч.} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **153.** $\frac{a^2}{16} \cdot (4 + 3\sqrt{3} + \sqrt{11})$. **154.** $(32 + 96\sqrt{3})$ см^2. **156.** Существует, например, если на всех гранях правильного икосаэдра построить правильные тетраэдры, то получится указанный многогранник. **157.** arctg $\frac{\sqrt{5}}{4}$. Постройте указанное сечение – четырехугольник $BMPN$ ($P \in DD_1$). Докажите, что $CE \perp BM$, где E – середина AB, тогда $\angle NFC$ – искомый ($F = CE \cap BM$). Обозначив ребро куба, выразите CE и CF. Используйте теорему о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике: $BC^2 = CE \cdot CF$. **158.** $\frac{4b^2}{3}$. **159.** Рассмотрите пирамиды с вершиной в центре октаэдра, основаниями которых являются указанные грани октаэдра; $\frac{b\sqrt{6}}{3}$. **160.** а) 588 см^2; б) $3\sqrt{2}$ м^2. **161.** а) $(\sqrt{3} + 6\sqrt{2})$ дм^2; б) $32\sqrt{2}$ см^2. **162.** $(a + b + c)n$. **163.** $(6\sqrt{3} + 4)$ дм^2. **164.** $3a^2$. **165.** а) 48 см^2; б) $84\sqrt{2}$ см^2. Используйте зависимость между площадями фигуры и ее ортогональной проекции на плоскость: $S_{осн.} = S_{бок.} \cdot \cos\varphi$. **166.** $20\sqrt{3}$ см^2, $10\sqrt{7}$ см^2. **167.** $180\sqrt{39}$ см^2. **168.** $6\sqrt{6}$ дм^2. **169.** $2a^2\sin\frac{\varphi}{2}$; установите, что BB_1D_1D – прямоугольник. **170.** $96(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ дм^2. **171.** $1002\frac{6}{7}$ см^2. **173.** а) $d^2 - l^2$; б) $\frac{2Q\sqrt{2}}{\sin\beta}$. **174.** $d^2\sqrt{2}$. Рассмотрите квадрат площади боковой поверхности как функцию, зависящую от переменной a (где a – сторона основания), и исследуйте ее на наибольшее значение. **175.** $4{,}5\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}$, $30° < \alpha < 90°$. **176.** $(1280 \cdot \sin\varphi)$, $0 < \varphi < 36°$. **177.** $\frac{m^2\sqrt{3}}{8}$. Установите, что искомое сечение состоит из двух равных прямоугольных треугольников. **178.** 1). **179.** 3). **180.** 3). **181.** 4). **182.** 2). **183.** 1). **184.** 2). **185.** 4). **186.** 1). **187.** 4). **188.** а) 7 граней, 15 ребер, 10 вершин; б) 7 граней, 12 ребер, 7 вершин. **189.** 384 см^2. **190.** 57 м^2. **191.** а) $(256 + 64\sqrt{3})$ см^2. **192.** а) 90°; б) $2\sqrt{3}$ см. **193.** 16 см^2. **194.** $\frac{64\sqrt{6}}{6}$ см^2, $\frac{32\sqrt{15}}{3}$ см^2. **195.** 315 м^2. **196.** 26 м^2. **197.** Наибольшую площадь имеет икосаэдр, наименьшую – октаэдр. **198.** а) 6; б) 7. **199.** а) 2 и 3; б) 4 и 5. **200.** 2.

201. $3\sqrt{3}$. **202.** а) 2030; б) 5. **203.** а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $1\frac{2}{3}$. **204.** 3. **205.** $d_A = d_{B_1} = d_{D_1} = d_{A_1} = \sqrt{3}$, $d_{C_1} = d_B = d_D = 3\sqrt{3}$, $d_C = 5\sqrt{3}$. **206.** $9\sqrt{3}$. **207.** $\frac{6\sqrt{26}}{13}$. **208.** $\frac{8}{3}$. **209.** $\approx 6{,}6$ см. **210.** $\frac{62\sqrt{3}}{3}$ м. **211.** Установите, что ΔABC – прямоугольный. Пусть M – середина гипотенузы, $OM = \frac{5\sqrt{6}}{2}$; $OH \perp (ABC)$, $OH = 5$. **212.** $x + y + z + 2 = 0$ и $x + y + z - 4 = 0$. **213.** а) 10; б) $2\sqrt{7}$. **214.** а) $\frac{15\sqrt{53}}{53}$; б) $\frac{8\sqrt{11}}{11}$. **215.** $d_{A_1} = d_{C_1} = d_D = 3$, $d_A = d_{B_1} = d_C = 9$, $d_B = 15$. **216.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **217.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Установите, что ΔABC равносторонний. Для нахождения координат центра P окружности, описанной около треугольника, используйте формулу $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, где O – начало координат. **219.** а) $\arccos\frac{8}{9}$; б) $\arccos\frac{6}{91}$. **220.** а) 45°; б) 30°. **221.** а) $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$; б) $\arccos\sqrt{\frac{5}{149}}$. **222.** а) 45°, 45°, 90°; б) 1) $\arccos\frac{7}{\sqrt{85}}$; 2) 45°. **223.** $\approx 32°$. **224.** $\arccos\frac{9}{13}$. **225.** 60°. **226.** $\arccos\sqrt{\frac{2}{13}}$. **227.** а) $\arccos\frac{7}{3\sqrt{10}}$; б) $\arccos\frac{3}{\sqrt{410}}$. **228.** $\approx 71°$. **229.** а) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$; б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{33}}$; в) $\arccos\sqrt{\frac{8}{11}}$. **231.** а) 90°; б) $\arccos\frac{1}{3}$. **232.** а) 90°; б) $\approx 32°$. **233.** $\approx 61°$. **234.** $\arccos\frac{6\sqrt{2}}{13}$. **235.** $\approx 41°$. **236.** $\arccos\sqrt{\frac{2}{11}}$. **237.** а) $\arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$; б) $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. **238.** а) 60°; б) 60°. **239.** а) $\arcsin\frac{4}{49}$; б) $\arcsin\frac{26}{35}$. **240.** а) 0°; б) 90°. **242.** а) $\arcsin\frac{2}{7}$; б) $\arcsin\frac{6}{7}$. **243.** а) $\arcsin\frac{1}{3}$; б) $\arcsin\frac{4}{9}$. **244.** а) 45°; б) $\arccos\frac{4}{9}$; в) 90°; г) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{9}$. **245.** $\arccos\frac{5\sqrt{7}}{14}$. **246.** а) $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}$. **247.** а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **248.** а) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{6}$; б) $\arccos\frac{1}{3}$. **249.** $\approx 80°$. **250.** $\approx 40°$. **251.** $\arcsin\frac{2\sqrt{30}}{15}$. **252.** 30°. **253.** а) $-2x - 11y + 5z - 19 = 0$; б) $4x + y - 5z + 7 = 0$. **254.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{14}}$. **255.** а) $\approx 49°$; б) $\approx 64°$. **256.** $3x - 5y - 3z + 18 = 0$. **257.** Лежит. **258.** Если $A(5; 4; 3)$, то $l = 5$. **259.** а) 0; б) ±1. **260.** ±2. **261.** а) $\arccos\frac{13}{21}$; б) 90°;

в) $\arccos\frac{16}{17}$. **262.** а) $\frac{12}{\sqrt{33}}$; б) 45°; в) $\arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$. **263.** Две плоскости $x + 9 = 0$ и $x - 9 = 0$. **264.** $4\sqrt{2}$. **265.** 14,4. **266.** $55 + 15\sqrt{5}$. **267.** Существует, $l = 4\sqrt{3}$. **268.** $503 < (\approx 585) < 1022$. **269.** а) ±1; б) $\pm\sqrt{6}$. **270.** Плоскость $2x - 2y - 2z + 31 = 0$. **271.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. **272.** 60°. **273.** а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{122}}{3}$. Установите вид ΔCPM. **274.** 3). **275.** 2). **276.** 3). **277.** 4). **278.** 5). **279.** 1). **280.** 1). **281.** $-3x + 3y - 4z + 2 = 0$. **282.** $\arccos\frac{8}{17}$. **283.** 90°. **284.** а) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}$; в) $\arccos\frac{1}{9}$. **285.** На рисунке б). **286.** Нельзя. **288.** а) Верно; б) неверно, приведите пример. **289.** а) 8 см; б) 12 см. **290.** а) 1 см; б) 10 см. **291.** а) 192 см^2; б) $8\sqrt{10}$ см. **292.** 12 см. **293.** $6\sqrt{3}$ см. **294.** 10 дм^2. **295.** 17 дм^2. **296.** $8\sqrt{2}$ см. **297.** 8 дм. **300.** 7,5 см. **301.** $2d$, $2d$. **302.** 75° или 15°. **303.** 7 см. **304.** $\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$. **305.** а) 13 см; б) $\operatorname{arctg}\frac{l}{2r}$. **306.** Ни одной при $r < 2$ или $r > 2\sqrt{2}$; 4 при $r = 2$ или $r = 2\sqrt{2}$; 8 при $2 < r < 2\sqrt{2}$. **307.** Нельзя. **308.** Рисунок в). **309.** Существует. **310.** а) 224π см^2; б) 168π см^2. **311.** 150π см^2. **312.** 4π дм^2. **313.** $\frac{3}{2}\pi h^2$. **314.** а) $\sqrt{2}$ м; б) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ м. **315.** 24π дм^2. **316.** $\frac{9}{\pi^2}$ дм^2. **317.** а) $\left(\frac{1}{2\pi} + 1\right)$ дм^2; б) $\left(\frac{6}{\pi} + 4\sqrt{3}\right)$ дм^2. **318.** $32\pi(1 + \sqrt{2})$ см^2. **319.** Хватит. **320.** а) π; б) $2Q + \pi S$. **321.** 4,5 см. **322.** $\frac{a\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\alpha}{2(3\operatorname{tg}\alpha+1)}$. **323.** $\frac{2+2\sqrt{2}}{3}\pi b^2$. **324.** $h = \frac{P}{4}$, $R = \frac{P}{8}$. **325.** $\frac{\pi d^2}{2\sqrt{3}}$. Используйте зависимость между площадями фигуры и ее ортогональной проекции. **326.** $3\pi a^2$. **328.** 16π см^2 и 64π см^2. **329.** а) 6 см и $6\sqrt{2}$ см; б) 4 см и 8 см. **330.** Верно. **331.** а) $3\sqrt{7}$ см^2; б) $4\sqrt{15}$ см^2. **332.** $\approx 53°$. **333.** $\approx 7,4$ см. **334.** $24\sqrt{2}$ см^2. **335.** 2,4 дм. **336.** 2,5 см. **337.** а) $(\sqrt{2} - 1)$ дм; б) $\frac{1}{3}$. **338.** $2\pi h^2$. **339.** а) 104 см^2; б) 15°. **340.** а) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ м; б) $(\sqrt{3} - 1,5)$ м. **341.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **342.** а) Не может; б) может. **343.** 1 : 2 : 3. **344.** а) 60π дм^2; б) $16\pi\sqrt{2}$ дм^2. **345.** $\approx 15,7$ м^2. **346.** а) 60°; б) $\approx 71°$. **347.** 2 дм. **348.** а) 180°; б) 216°. **349.** 13 см и $\left(138\frac{6}{13}\right)^\circ$. **350.** $12\sqrt{3}$ дм^2. **351.** а) $64\pi\sqrt{3}$ см^2; б) $67,2\pi$ см^2. **352.** а) 32π см^2; б) $8\pi(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ см^2. **353.** $\operatorname{arctg} 2$. **354.** $\frac{a}{2}\sqrt{6+4\sqrt{3}}$. **355.** 30π дм^2. **356.** $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **357.** $\frac{10}{3}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, $\frac{10}{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. **358.** 176 см^2. **359.** а) 3 м; б) $\sqrt{3}$ м. **360.** а) 2,4 дм; б) 6 дм.

361. а) 2 см и 6 см; б) $4\sqrt{2}$ см. **362.** а) 9π см^2; б) 4 см и 12 см. **363.** Подойдет. **364.** $\approx$ 1,67 м. **365.** 4 см и 8 см. **366.** а) 54 см; б) 1 м. **367.** $0{,}5l \cdot \cos\varphi$, $1{,}5l \cdot \cos\varphi$. **368.** $\frac{\pi}{4}$. **369.** $\frac{S \cdot \sin\alpha}{\sin\varphi}$. **370.** 64π см^2. **371.** 167π см^2. **372.** 308π см^2. **373.** 4 см и 10 см. **374.** а) $\approx$ 853 см^2; б) $\approx$ 377 см^2. **375.** Существует, приведите пример. **376.** $72\pi\sqrt{3}$ см^2. **377.** $10\pi\sqrt{2}$ см^2. **378.** $\approx$ 23,7 см. **379.** $24\pi\sqrt{6}$ см^2. **380.** $96\pi(1 + \sqrt{3})$ см^2. **381.** 60°. **382.** $10{,}8\sqrt{6}$ см; нет. **383.** $\approx$ 10 см. **384.** а) 8 см; б) $2\sqrt{3}$ см. **385.** а) 192π см^2; б) 16π см^2. **386.** $36\sqrt{3}$ см^2. **387.** 8 см. **388.** Можно. **389.** а) Пересекает плоскость yOz; б) 4. **390.** Плоскость: а) пересекает сферу; б) касается ее; в) не имеет с ней общих точек. **391.** а) $x + 2y + 2z - 9 = 0$; б) $x - 2y - 2z - 9 = 0$. **392.** $3x - 4y + 12z = 0$. **393.** 5 см. **394.** 12 см. **395.** 12 см. **396.** а) $2\sqrt{7}$ дм; б) 9,6 см. **397.** 7 см, 9 см, 11 см. **398.** $4\sqrt{2}$ см. **399.** $\approx$ 20 000 км. **400.** 10 см. **401.** а) $5\sqrt{2}$ см; б) $4\sqrt{13}$ см. **402.** а) $\frac{R\sqrt{7}}{2}$; б) $\frac{b\sqrt{3}}{2}$ см. **403.** а) $OA = OB = OC = 13$ см; б) $OM = ON = OL = 2{,}6$ см. **404.** 4 см. **405.** а) $36\sqrt{2}$ см^2; б) 8 см. **406.** б) 80π мм. **407.** б) 5 см. **409.** (0; arcsin 0,6]. **410.** а) Верно; б) увеличится в 9 раз. **411.** 32π см^2. **412.** $13\frac{4}{9}$. **413.** 164π см^2. **414.** а) На никелировку двух шаров; б) площадь полной поверхности тетраэдра. **415.** $\approx$ 20 106 м^2. **416.** 44π. **417.** 48π см^2. **418.** а) 64π см^2; б) 100π см^2. **420.** $r\sqrt{2}$. **421.** 25π см^2. **422.** 4 см. **423.** а) $\pi r^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}$; б) $\frac{R(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$. **424.** arctg $2\sqrt{6}$. **425.** 4 дм^2. **426.** 2 дм. **428.** $(2\sqrt{3} - 3)$ см. **429.** $2R \cdot \sin\varphi$. **430.** а) $\frac{1}{6}\pi S$; б) $\frac{4}{9}Q$. **431.** $2R^2 \cdot \sin 2\beta$. **432.** 5 см. **433.** а) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см; б) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$. **434.** 36π см^2. **435.** $2R\cos^2\alpha$. **436.** 63 см^2. **438.** 12,8 см или 7,2 см. **439.** 12,5 см. **440.** а) 20 см, 7,5 см, 25 см; б) 45°. **441.** 24π дм^2. **442.** $\sqrt{7}$ см. **443.** 32,5 см. **444.** $\frac{b \cdot \sin\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$. **445.** 1). **446.** 4). **447.** 2). **448.** 3). **449.** 3). **450.** 3). **451.** 1). **452.** 1). **453.** 2). **454.** 5). **455.** 3). **456.** 4). **457.** 2). **458.** 3). **459.** 1). **460.** 4). **461.** 1). **462.** 4). **463.** 1). **464.** $S = 6\pi R^2$. **465.** 80π дм^2. **466.** 54π см^2. **467.** 12π см^2. **468.** 180°. **469.** 9π см^2. **470.** $(160\pi + 128\pi\sqrt{2})$ см^2. **471.** $4\sqrt{2}$ см. **472.** Площади равны. **473.** Неверно. **474.** 1 см^3. **475.** 2 дм^3. **476.** 45 дм^3. **477.** 20,7 м^3. **478.** 60 см^3. **479.** 72 см^3. **480.** 100 м^3. **481.** $\approx$ 1,5 м. **482.** 120 см^3. **483.** $420\sqrt{2}$ см^3. **484.** 1 дм или $\frac{11 - \sqrt{41}}{4}$ дм. **485.** $\approx$ (27,5 × 13,2 × 6,6) см. **486.** а) $48\sqrt{5}$ см^3; б) 11 см. **487.** 1080 см^3.

488. $0{,}5dQ$. **489.** а) 105 см^3; б) 384 см^2. **490.** а) 90°, abh. **491.** а) $1{,}5 \times 3 \times 2$ м; б) 4 дм и $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ дм. **492.** а) Равны; б) равны. **493.** а) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$; б) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **494.** 81,92 см^3. **495.** 6 дм. **497.** а) 84 дм^3; б) 21 дм^3. **498.** $121\frac{1}{3}$ м^3. **499.** Объемы пирамид PCC_1B и PC_1B_1B равны, так как в них равны основания – треугольники CC_1B и C_1B_1B и общая высота, проведенная из вершины P. Объемы пирамид $PABC$ и PC_1B_1B также равны, так как если принять за основания их равные грани APB и PB_1B соответственно, то высоты, проведенные к ним из точек C и C_1, равны, поскольку $CC_1 \parallel (APB_1)$. Следовательно, объемы пирамид $PABC$, PCC_1B и PC_1B_1B равны. **500.** Можно, например, если построить два ее сечения, которые содержат боковое ребро усеченной пирамиды и делят сторону основания на 3 равные части. **501.** а) 2 590 000 м^3; б) верно. **502.** 455 т. **503.** 485 см^3. **504.** $\frac{26Q}{3}$. **505.** 72 см^3. **506.** а) 36 дм^3; б) $\approx 9{,}7$ дм^3. **507.** $27\sqrt{30}$ см^2. **508.** $\frac{7QS}{12b}$. **509.** 1,9 дм^3. **510.** а) $32\sqrt{3}$ см^3; б) $\frac{9\sqrt{2}}{32}$ дм^3. **511.** Не равны. Нельзя, т. к. объем будет наибольшим, если равны основания усеченной пирамиды, что невозможно. **512.** а) $\frac{3}{7}V$ и $\frac{4}{7}V$. **513.** а) В 25 раз; б) в 5 раз. **514.** 24 дм^3. **515.** а) 96π см^3; б) 144π см^3. **516.** 16π см^3. **517.** а) $\frac{128}{\pi}$ см^3; б) $\frac{3h^2}{4\pi}$. **518.** ≈ 157 см^3. **519.** 21π см^3. **520.** 2 или $\frac{1}{2}$. **521.** а) 250π см^3; б) 128π см^3. **522.** ≈ 1872 г. **523.** $18\pi\sqrt{3}$ дм^3. **524.** $h = r = 5$ см. **525.** $h = 8$ дм, $R = 4$ дм. **527.** $24\pi\sqrt{3}$ см^3. **528.** а) 96π см^3; б) 324π дм^3. **529.** а) 84π дм^3; б) $21\pi\sqrt{3}$ дм^3. **530.** 10 л. **531.** $\frac{8}{7}$. **532.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **533.** 1404π см^3. **534.** а) 224π см^3; б) 457π см^3. **535.** 4. **536.** $18\pi \cdot \sqrt{2(1+\sqrt{2})}$ см^3. **537.** 96π дм^3. Выразите высоту h конуса через радиус R его основания, для чего найдите $l + R$ (l – образующая конуса), зная площадь поверхности конуса и выразив площадь его осевого сечения двумя способами. **538.** $\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}\,\pi}{3}(14 - 7\sqrt{3})$ дм^3. **539.** $\frac{8}{3}\pi R^3$. **540.** $13\frac{1}{3}$ дм. **541.** В 8 раз. **542.** $\sqrt[3]{35}$ см. **543.** $4{,}5\pi$ дм^3. **544.** а) 36π см^3; б) $\frac{9\pi}{16}$ см^3. **545.** $\frac{9\pi}{32}$ дм^3. **546.** $V_4 = V_1 + V_2 + V_3$. **547.** $\frac{32\pi}{3}$ дм^3. **548.** а) 36π см^3; б) $\frac{343\pi}{6}$ дм^3. **549.** а) 3 см; б) $\approx 4{,}4$ см. **550.** а) $\approx 0{,}10$ м^3; б) 3 дм или $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ дм. **551.** а) $\frac{64}{3}\pi$ см^3; б) 450π см^3. **552.** а) 36π см^3; б) $\frac{16-9\sqrt{3}}{3}\pi$ дм^3. **553.** $\frac{1888}{3}\pi$ см^3.

554. $\approx 4{,}3$ мм. **555.** 972π см^3. **556.** а) 9π дм^3; б) $\frac{1}{4}$. **557.** $V_{слоя} < 2V_{сегм.}$. **558.** 256π дм^2. **559.** $\frac{32}{3}\pi$ дм^3. **560.** 8. **561.** а) 1728 м^3; б) 6300 дм^3. **562.** $3\sqrt{2}$ см^3. **563.** $1{,}5a^3\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\alpha$. **564.** 36 дм^3. **565.** 243 см^3. **566.** $\frac{2}{3}$ дм^3. **567.** $690\frac{9}{17}$ см^3. **568.** $250\sqrt{3}\pi$ см^3. **569.** $288\pi\sqrt{5}$ см^3. **570.** $121{,}5\pi$ см^3. **571.** $b^3\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$. **573.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ дм. **574.** 6,48 м. **575.** $400\sqrt{5}$ см^3. Чтобы найти боковое ребро призмы, выразите косинус угла φ между плоскостями (AB_1C_1) и $(A_1B_1C_1)$ и используйте соотношение между площадями фигуры и ее ортогональной проекции: $S_{A_1B_1C_1} = S_{AB_1C_1}\cdot\cos\varphi$. **576.** а) $6\sqrt[6]{48}$ дм^2; б) $12\sqrt[4]{12}$ см^3. **578.** 2). **579.** 5). **580.** 1). **581.** 2). **582.** 5). **583.** 1). **584.** 2). **585.** 5). **586.** 3). **587.** 4). **588.** 5). **589.** 1). **590.** 3). **591.** 2). **592.** 1). **593.** 5). **594.** 4). **595.** 3). **596.** $a < 3{,}5$ дм. **597.** 5 см. **598.** 60 дм^3. **599.** 2 л. **600.** 63π дм^3. **601.** 96π см^3. **602.** $33\frac{1}{3}$ %. **603.** а) Нет; б) найдется. **604.** Можно, объясните как. **605.** Неверно. Сформулируйте правильное утверждение. **606.** а) Нет; б) может. **607.** а) Нет; б), в) могут. **608.** а) Нет, они могут быть скрещивающимися; б) да; в) нет, так как не указано, что треугольники имеют общую вершину. **609.** 10 см. **610.** 60° и $18\sqrt{3}$ см^2. **611.** 300 см^3. **612.** а) и б) верно. **613.** а) Верно; б) нет. **614.** а) $m = 4$; б) при любых m; в) нет таких значений m. **615.** 300 га. **616.** 40 см. **617.** $(12+8\sqrt{3})\pi$ см^2. **618.** $\frac{r^2+h^2}{2h}$. **619.** $V_{ш} > V_{пр}$. **620.** $\frac{5\pi}{24}$ дм^3. **622.** 48. **623.** $(1+\sqrt{3})$ дм^2. **624.** $50\pi\sqrt{2}$ см^2. **625.** 6695 м. Примите за основание тетраэдра прямоугольный треугольник с катетами 5 м и 6 м, тогда высота тетраэдра будет равна 1339 м. **626.** $(300\sqrt{2}+240)$ см^2. **627.** 60° или 30°. **628.** $243\pi(7-4\sqrt{3})$ см^2. **629.** 12 см и $2\sqrt{6}$ см или 6 см и $4\sqrt{3}$ см. **630.** 27π см^2, $\frac{27\sqrt{3}}{2}\pi$ см^3. **631.** $\frac{1}{3}$. **632.** $\frac{1}{24}(m^3-n^3)\operatorname{tg}\varphi$ или $\frac{\sqrt{2}}{24}(m^3-n^3)\operatorname{tg}\varphi$. **633.** а) $0{,}5(r^2-r^3)\pi$ м^3, при $r=\frac{2}{3}$ м; б) $\frac{\pi}{3}(6h^2-h^3)$ дм^3, при $h = 4$ дм. **634.** $\frac{1}{2}m\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. **635.** 5). **636.** 1). **637.** 1). **638.** 3). **639.** 4). **640.** 5). **641.** 3). **642.** 4). **643.** 3). **644.** 5). **645.** 2). **646.** 1). **647.** 4). **648.** 5). **649.** 1). **650.** а) $(18\sqrt{3}+108)$ см^2; б) $100\sqrt{3}$ см^2. **651.** $80\pi\sqrt{2}$ см^2. **652.** 48 см^2. **653.** $\frac{7\pi\sqrt{7}}{6}$ куб. ед. **654.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Глейзер Г. И. История математики в школе: 9–10 классы. – М.: Просвещение, 1981.

2. Сергеев И. Н., Олехник С. Н., Гашков С. Б. Примени математику. – М.: Наука, 1990.

3. Солтан Г. Н., Солтан А. Е., Жумадилова А. Ж. Геометрия: учебник для учащихся 9 класса общеобразовательной школы + CD. – Кокшетау: Келешек-2030, 2019.

4. Солтан Г. Н., Солтан А. Е., Жумадилова А. Ж. Геометрия. Учебник для учащихся 10 (ч. 1), 11 (ч. 2) классов естественно-математического направления общеобразовательной школы. В двух частях. 10 класс (ч. 1). – Кокшетау: Келешек-2030 баспасы, 2020.

5. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.

Список фотоснимков,
использованных в иллюстрациях на шмуцтитулах

1. Дворец культуры горняков, г. Караганды – 15 стр.

2. Мост «Нурлы жол» – самый длинный в Центральной Азии, г. Павлодар – 69 стр.

3. Верхний элемент монумента «Астана-Байтерек» в виде шара, г. Нур-Султан – 88 стр.

4. Назарбаев центр, г. Нур-Султан – 140 стр.

СОЛТАН Геннадий Николаевич
СОЛТАН Алла Евгеньевна
ЖУМАДИЛОВА Аманбала Жумадиловна

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК
для учащихся 10 (ч. 1), 11 (ч. 2) классов естественно-математического направления общеобразовательной школы

В двух частях
11 класс (ч. 2)
+CD

Редактор	С. Ш. Алибеков
Технический редактор	Р. Н. Максутов
Художник	А. Б. Жусупов
Дизайн	Е. Е. Велькер
Корректоры	М. О. Джусупова
	Г. М. Шарипова

Код **6**13089

ИП Келешек-2030 баспасы
Республика Казахстан,
020000, г. Кокшетау.
Офис издательства: ул. Абая, 112а,
тел.: 8 (7162) 72-29-43 (приемная),
+7 708 444 18 64, 8 (7162) 44-18-64,
моб. тел.: +7 702 781 06 78, +7 705 745 09 75.
http://www.keleshek-2030.kz, E-mail: torg@keleshek-2030.kz