Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы 10 (1-б.), 11 (2-б.) сыныптардың оқушыларына арналған

ОҚУЛЫҚ

Екі бөлімді
11-сынып (2-б.)

+CD

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі ұсынған

KELESHEK 2030
КӨКШЕТАУ

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151я72
С64

Солтан Г. Н.

С64 **Геометрия.** Жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы 10 (1-б.), 11 (2-б.) сыныптардың оқушыларына арналған оқулық. Екі бөлімді. 11-сынып (2-б.) +CD / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Көкшетау: Келешек-2030 баспасы, 2020. – 128 б.

ISBN 978-601-317-514-0
ISBN 978-601-317-516-4

Оқулықтың электрондық нұсқасы: http://keleshek-2030.kz/books/geom_ogn_11kz.php

Ұсынылып отырған оқулық Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилованың авторлығымен «Келешек-2030» баспасында білім берудің жаңартылған мазмұндағы оқу бағдарламасы бойынша әзірленген «Геометрия» оқулықтарының топтамасын жалғастыруда. Оқулық жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы сыныптардың оқушыларына арналған және екі бөлімнен тұрады: 10-сынып – 1-бөлім, 11-сынып – 2-бөлім.

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151я72

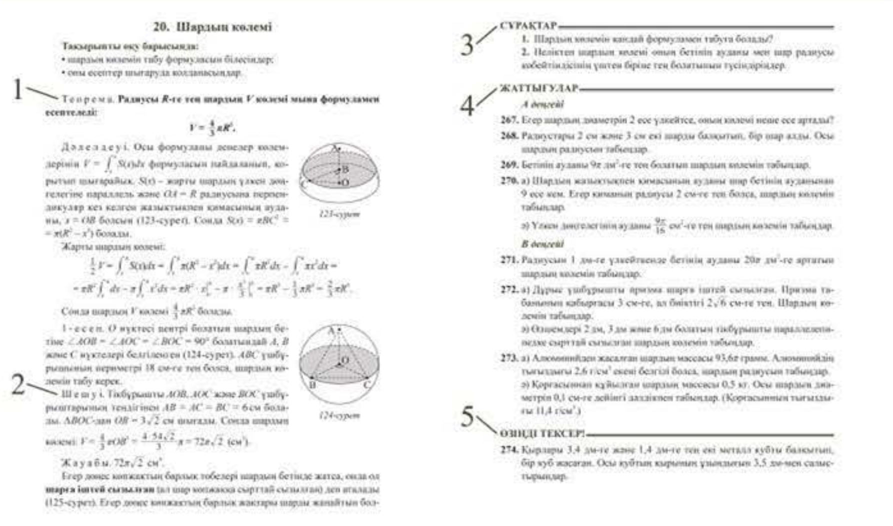
ISBN 978-601-317-516-4
ISBN 978-601-317-514-0

МАЗМҰНЫ

АЛҒЫ СӨЗ

Құрметті оқушылар! Бұл оқу жылында «Геометрия» пәнін оқуды аяқтайсыңдар. 11-сыныптың стереометрия курсында көпжақтар мен олардың беттерінің аудандары, айналу денелері, олардың элементтері мен беттерінің аудандары, денелердің көлемдері қарастырылады. Теориялық білімдеріңді қолдануға берілген есептерді шығаруға көп көңіл бөлесіңдер. Бұл ретте планиметрия, 10-сыныптың стеореометрия, алгебра және анализ бастамалары курстарында меңгерген материалды пайдалану қажет болады.

Аталмыш оқулық оқу бағдарламасының әрбір тақырыбы бойынша сабақтарға арналған теориялық және практикалық материалдан тұрады. Ұғымдардың анықтамалары, аксиомалар, теоремалар мен олардың салдарлары арнайы қаріппен (1) ерекшеленген. Әр тақырыпта типтік есептердің шешімдері (2) мен теорияны меңгеру деңгейін тексеруге арналған бақылау сұрақтары (3) ұсынылған. Практикалық біліктілік пен дағдыларды қалыптастыруға арналған күрделілігі бойынша екі деңгейге (А және В) бөлінген жаттығулар (4) берілген. Әр бөлімнің соңында «Өзіңді тексер!» айдарында тапсырмалар (5) мен тарихи мағлұматтар ұсынылған. Жаттығуларға нұсқаулар мен жауаптар берілген.



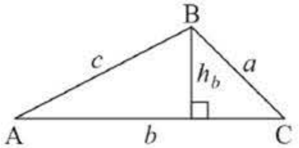
Сәттілік тілейміз!

Авторлар

ПЛАНИМЕТРИЯ КУРСЫНАН АНЫҚТАМАЛЫҚ МАТЕРИАЛ

Негізгі формулалар мен теоремалар

Кез келген үшбұрыш



1-сурет

a, b, c – қабырғалар;

$\angle A, \angle B, \angle C$ – оларға қарсы жатқан бұрыштар;

h_b – b қабырғасына жүргізілген биіктік;

S – аудан; p – жарты периметр;

R – сырттай сызылған шеңбердің радиусы;

r – іштей сызылған шеңбердің радиусы.

Үшбұрыштың MN орта сызығы (2-сурет):

$$MN \parallel AC,\ MN = \frac{1}{2}AC;$$

$$S = \frac{1}{2}b \cdot h_b;\ S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\angle A;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

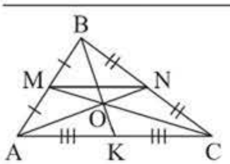
$$S = p \cdot r; \quad S = \frac{abc}{4R}.$$

Синустар теоремасы:

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

Косинустар теоремасы:

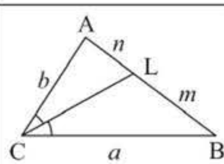
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\angle A.$$



2-сурет

Үшбұрыштың медианалары:

$$\frac{AO}{ON} = \frac{BO}{OK} = \frac{CO}{OM} = \frac{2}{1}.$$



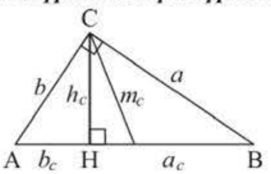
3-сурет

Үшбұрыштың биссектрисасы:

$$\frac{n}{m} = \frac{b}{a}.$$

$$CL = \sqrt{ab - mn}.$$

Тікбұрышты үшбұрыш



4-сурет

a, b – катеттер; c – гипотенуза;

a_c, b_c – катеттердің гипотенузадағы проекциялары;

m_c – гипотенузаға жүргізілген медиана;

h_c – гипотенузаға жүргізілген биіктік.

$$S = \frac{1}{2}ab; \qquad S = \frac{1}{2}c \cdot h_c;$$

$$m_c = \frac{1}{2}c = R; \qquad r = \frac{1}{2}(a + b - c);$$

$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}, \qquad a = \sqrt{c \cdot a_c}, \qquad b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

Пифагор теоремасы: $a^2 + b^2 = c^2$.

Тікбұрышты үшбұрышты шешу:

$$a = c \cdot \sin\angle A; \qquad b = c \cdot \cos\angle A;$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg}\angle A; \qquad b = a \cdot \operatorname{ctg}\angle A.$$

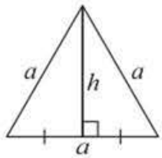
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Тригонометриялық формулалар:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Дұрыс үшбұрыш



5-сурет

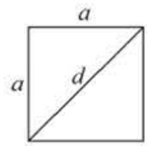
$h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$r = \dfrac{1}{3}h$;

$R = 2r$.

Шаршы



6-сурет

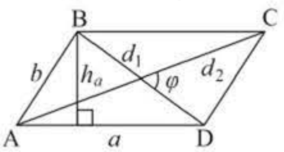
$d = a\sqrt{2}$;

$S = a^2$; $S = \dfrac{1}{2}d^2$;

$r = \dfrac{1}{2}a$;

$R = \dfrac{1}{2}d$.

Параллелограмм



7-сурет

a, b – сыбайлас қабырғалар;

d_1, d_2 – диагональдар;

φ – диагональдардың арасындағы бұрыш;

h_a – a қабырғасына жүргізілген биіктік;

S – аудан.

$S = a \cdot h_a$; $S = ab \cdot \sin\angle A$;

$S = \dfrac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$;

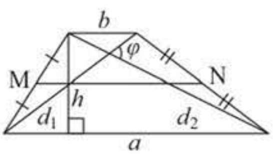
$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Егер $d_1 = d_2$ болса, онда $ABCD$ – тіктөртбұрыш (8, *а*-сурет).

8-сурет

Егер $d_1 \perp d_2$ болса, онда $ABCD$ – ромб (8, ә-сурет).

Трапеция



9-сурет

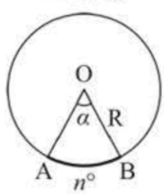
$S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$; $S = \dfrac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$;

MN – орта сызық (9-сурет);

MN табандарына параллель және

$MN = \dfrac{a+b}{2}$.

Шеңбер



10-сурет

C – шеңбердің ұзындығы;

S – дөңгелектің ауданы;

l – AB доғасының ұзындығы;

$S_{сект.}$ – сектордың ауданы;

$n°$ – AB доғасының (AOB центрлік бұрышының) градустық өлшемі;

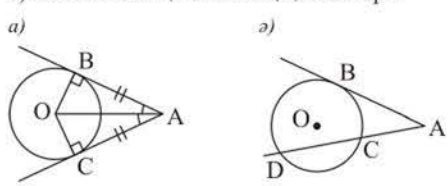
α – центрлік бұрыштың радиандық өлшемі.

$C = 2\pi R$; $S = \pi R^2$; $l = \dfrac{\pi R n°}{180°}$; $l = R\alpha$.

$S_{сект.} = \dfrac{\pi R^2 n°}{360°}$; $S_{сект.} = \dfrac{1}{2}R^2\alpha$.

а) Шеңберге жанамалардың;

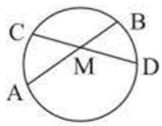
ә) жанама мен қиюшының қасиеттері.



11-сурет

$AB^2 = AD \cdot AC$ (11, ә-сурет)

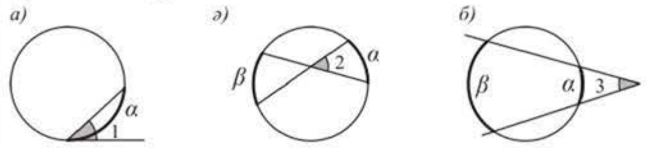
Хордалардың қасиеті



12-сурет

$AM \cdot MB = CM \cdot MD$

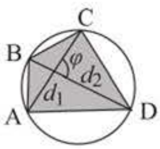
а) Жанама мен хорданың; ә) хордалардың; б) қиюшылардың арасындағы бұрыш.



13-сурет

а) $\angle 1 = \frac{1}{2}\alpha$; ә) $\angle 2 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; б) $\angle 3 = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

Іштей сызылған төртбұрыш



14-сурет

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

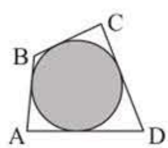
$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$,

мұндағы

d_1, d_2 – диагональдар;

φ – олардың арасындағы бұрыш.

Сырттай сызылған төртбұрыш



15-сурет

$AB + CD = AD + BC$.

$S = rp$,

мұндағы

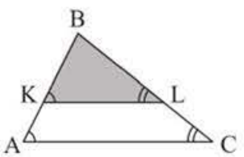
r – іштей сызылған шеңбердің радиусы;

p – төртбұрыштың жарты периметрі.

Ұқсас үшбұрыштар

1) бұрыштары тең;

2) қабырғалары пропорционал.



16-сурет

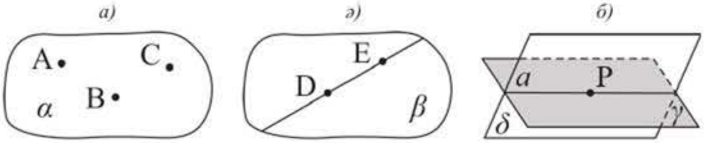
Үшбұрыштың қабырғасына параллель түзу одан берілген үшбұрышқа ұқсас үшбұрыш қияды (16-сурет).

$$\Delta ABC \sim \Delta KBL \Rightarrow \frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KL} = \frac{BC}{BL} = k;$$

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle KBL}} = k; \ \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle KBL}} = k^2.$$

10-СЫНЫПТЫҢ СТЕРЕОМЕТРИЯ КУРСЫНАН АНЫҚТАМАЛЫҚ МАТЕРИАЛ

Стереометрия аксиомалары



17-сурет

1) Бір түзуде жатпайтын үш нүкте арқылы бір ғана жазықтық өтеді.

2) Жазықтықтың әртүрлі екі нүктесі арқылы өтетін түзу осы жазықтықта жатады.

3) Егер екі жазықтықтың ортақ нүктесі бар болса, онда олардың осы нүктеден өтетін ортақ түзуі бар болады.

Аксиомалардың салдарлары

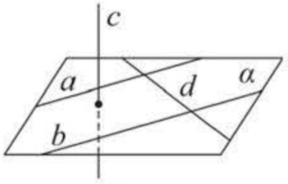
1) Түзу мен онда жатпайтын нүкте арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады.

2) Қиылысатын екі түзу арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады.

3) Кеңістіктің әртүрлі екі нүктесі арқылы бір ғана түзу жүргізуге болады.

Т е о р е м а. Параллель екі түзу арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады.

Параллель және айқас түзулер



18-сурет

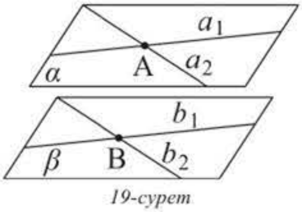
Түзулердің параллельдік белгісі: егер екі түзудің әрқайсысы үшінші түзуге параллель болса, онда ол екі түзу параллель болады.

Айқас түзулердің белгісі: егер бір түзу жазықтықта жатса, ал басқа түзу осы жазықтықты бірінші түзуде жатпайтын нүктеде қиып өтсе, онда ол екі түзу айқас болады. 18-суреттегі c мен a, c мен b, c мен d – айқас түзулер.

Түзу мен жазықтықтың, екі жазықтықтың өзара орналасуы

Түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі: егер жазықтықта жатпайтын түзу сол жазықтықта жататын қандай да бір түзуге параллель болса, онда ол түзу осы жазықтыққа параллель болады.

Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі: егер түзу жазықтықта жататын қиылысатын екі түзудің әрқайсысына перпендикуляр болса, онда ол түзу осы жазықтыққа перпендикуляр болады. Мысалы, 18-суретте, егер $c \perp b$ және $c \perp d$ болса, онда $c \perp \alpha$ болады.



19-сурет

Екі жазықтықтың параллельдік белгісі: егер бір жазықтықтың қиылысатын екі түзуі екінші жазықтықтың екі түзуіне параллель болса, онда ол жазықтықтар параллель болады (19-сурет).

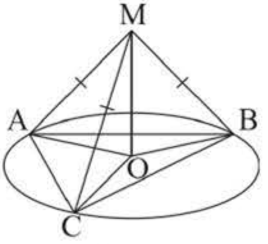
Жазықтықтардың перпендикулярлық белгісі: егер екі жазықтықтың бірі екінші жазықтыққа перпендикуляр түзу арқылы өтсе, онда ол жазықтықтар перпендикуляр болады.

Перпендикуляр және көлбеу

Егер жазықтықтан тыс жатқан бір нүктеден жазықтыққа екі көлбеу жүргізілсе, онда:

1) проекциялары тең көлбеулер тең болады және керісінше, тең көлбеулердің проекциялары тең болады (20-сурет);

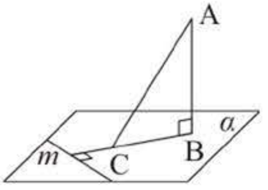
2) проекциялары тең емес екі көлбеудің қайсысының проекциясы үлкен болса, сол көлбеу үлкен болады және керісінше, үлкен көлбеудің проекциясы үлкен болады.



20-сурет

Теорема (*үш перпендикуляр туралы*). Егер жазықтықтағы түзу осы жазықтыққа жүргізілген көлбеудің проекциясына перпендикуляр болса, онда ол көлбеудің өзіне де перпендикуляр болады.

Мысалы, 21-суретте, егер $m \perp CB$ болса, онда $m \perp AC$ болады.

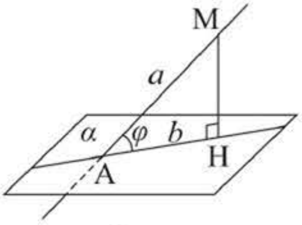


21-сурет

Теорема (*үш перпендикуляр туралы теоремаға кері теорема*). Егер жазықтықтағы түзу осы жазықтыққа жүргізілген көлбеуге перпендикуляр болса, онда ол түзу көлбеудің осы жазықтықтағы проекциясына да перпендикуляр болады.

Түзу мен жазықтықтың, екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

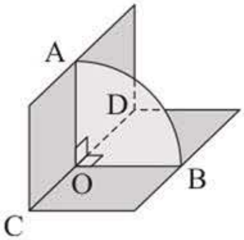
Түзу мен оған перпендикуляр емес жазықтықтың арасындағы бұрыш деп осы түзу мен оның берілген жазықтықтағы проекциясының арасындағы бұрыш аталады. Мысалы, 22-суретте $\angle MAH = \varphi$ – a түзуі мен α жазықтығының арасындағы бұрыш, $0° \leq \varphi < 90°$.



22-сурет

Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы деп төбесі оның қырына тиісті, ал қабырғалары оның жақтарында жататын және сол қырына перпендикуляр бұрыш аталады. Мысалы, 23-суретте AOB бұрышы – қыры CD болатын екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы.

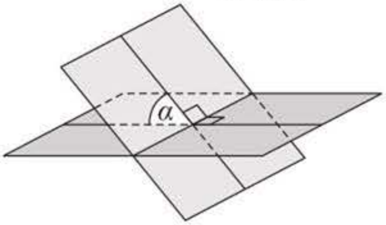
Егер екіжақты бұрыш 90°-қа тең болса, оны *тік* бұрыш деп, 90°-тан кем болса, *сүйір*, 90°-тан артық, бірақ 180°-тан кем болса, *доғал* бұрыш деп атайды.



23-сурет

Қиылысатын екі жазықтықтың арасындағы бұрыш деп солардан құралған екіжақты бұрыштардың басқаларының әрқайсысынан үлкен емес біреуінің градустық өлшемі аталады.

Қиылысатын жазықтықтардың арасындағы бұрыштың шамасы 90°-тан артық емес.



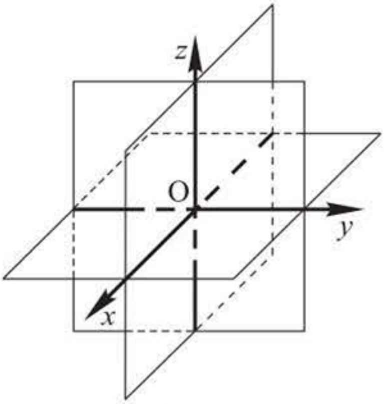
24-сурет

Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі

Ox – абсциссалар осі, Oy – ординаталар осі, Oz – аппликаталар осі.

Егер кеңістікте $A(x_1, y_1, z_1)$ және $B(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері берілген болса, онда олардың арақашықтығы: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

AB кесіндісінің ортасы болатын $C(x, y, z)$ нүктесінің координаталары: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ формулаларымен беріледі.



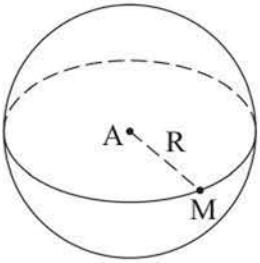
25-сурет

Радиусы R, центрі $A(a, b, c)$ нүктесінде болатын сфераның теңдеуі:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Радиусы R, центрі координаталар басында болатын сфераның теңдеуі:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$



26-сурет

10-СЫНЫПТАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

1. A, B және C нүктелері бір жазықтықта жатыр, ал D нүктесі ол жазықтыққа тиісті емес. $ABCD$ төртбұрышының трапеция болуы мүмкін бе?

2. a, b параллель түзулері мен олардың ешбірінде жатпайтын M нүктесі берілген. Егер M нүктесі арқылы: а) a мен b түзулерінің екеуін де қиятын; ә) осы түзулердің біреуін ғана қиятын түзу жүргізуге болса, M нүктесі a және b түзулерімен бір жазықтықта жата ма?

3. Егер a түзуі: а) α мен β жазықтықтарын қиып өтсе; ә) жазықтықтардың бірін қиып өтіп, екіншісіне параллель болса; б) бір жазықтықты қиып өтсе және екіншісіне тиісті болса, онда α мен β жазықтықтары өзара қалай орналасқан болады?

4. а) Үшбұрыштың екі қабырғасының орталары арқылы өтетін жазықтық оның үшінші қабырғасын қиып өтуі мүмкін бе?
ә) Екі жазықтықтың әрқайсысы бір түзуге параллель. Осы жазықтықтар өзара қалай орналасуы мүмкін?

5. Егер α мен β жазықтықтарының γ жазықтығымен қиылысу сызықтары параллель болса, онда α мен β жазықтықтары параллель деген ақиқат па?

6. Дұрыс $ABCDEK$ алтыбұрышы берілген және оның жазықтығына AH перпендикуляры жүргізілген. Неліктен HE мен DE кесінділерінің өзара перпендикуляр болатынын түсіндіріңдер.

7. Арақашықтығы 2 м-ге тең екі параллель жазықтық олардың әрқайсысымен 45° бұрыш жасайтын түзумен қиылған. Осы түзудің жазықтықтардың арасындағы кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

8. A және B нүктелерінен α жазықтығына дейінгі қашықтық 12,5 см және 3,5 см. AB кесіндісінің осы жазықтықтағы проекциясының ұзындығы 12 см-ге тең. A мен B нүктелерінің арақашықтығын табыңдар. AB кесіндісі α жазықтығын қиятын және қимайтын жағдайларды қарастырыңдар.

9. Төбелерінің координаталары $A(4;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$ болатын ABC үшбұрышы берілген. C төбесі Oz осінің оң жарты осінде жатыр. Егер $\frac{AB^2}{CB^2} = \frac{2}{5}$ болса, CM медианасының ұзындығын табыңдар.

10. Қабырғалары 2 дм және 4 дм-ге тең $ABCD$ тіктөртбұрышының AD қабырғасы арқылы α жазықтығы жүргізілген. Тіктөртбұрыштың α жазықтығындағы проекциясы – шаршы. CD түзуінің α жазықтығына көлбеулік бұрышын табыңдар.

В деңгейі

11. «Барыс Арена» кешені трибуналарының біріндегі баспалдақ әрқайсысының биіктігі h-қа тең n сатыдан тұрады. Егер баспалдақ бойындағы тіреу табанымен α бұрыш жасайтын болса, тіреудің l ұзындығын табу формуласын құрыңдар.

«Барыс Арена» спорт кешені, Нұр-Сұлтан қ.

12. Тікбұрышты параллелепипедтің табан қабырғалары 6 см және 8 см, ал бүйір қыры 10 см. Оның диагоналінің табан жазықтығымен және кез келген бүйір жағымен жасайтын бұрыштарының қосындысын табыңдар.

13. Дұрыс ABC үшбұрышы мен $ACDE$ шаршысының жазықтықтары өзара перпендикуляр. Егер $AC = 8$ см болса, B мен D нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

I. КӨПЖАҚТАР

Бөлімді оқу нәтижесінде

- көпжақтың анықтамасын, оның элементтерін;
- көпжақ жазбасы ұғымын;
- призманың, тікбұрышты параллелепипедтің, пирамиданың, қиық пирамиданың анықтамасы мен қасиеттерін;
- призманың, пирамиданың, қиық пирамиданың бүйір және толық беті аудандарының формулаларын;
- дұрыс көпжақтың анықтамасын ***білу керек.***

- призманы, пирамиданы, қиық пирамиданы жазықтықта кескіндей алу;
- көпжақтардың жазбаларын жасай алу;
- көпжақтардың элементтерін табуға есептер шығара алу;
- призманың, пирамиданың, қиық пирамиданың бүйір және толық беті аудандарының формулаларын есептер шығаруда қолдана алу;
- дұрыс көпжақтардың түрлерін ажырата ***алу керек.***

1. Көпжақ ұғымы. Тікбұрышты параллелепипед және оның қасиеттері

Тақырыпты оқу барысында:

• көпжақтың анықтамасын және оның элементтерін, көпжақ жазбасы ұғымын білесіңдер;

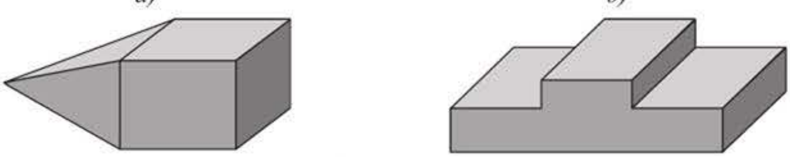
• тікбұрышты параллелепипедтің анықтамасы мен қасиеттерін білесіңдер және оны жазықтықта кескіндейсіңдер;

• параллелепипедтің элементтерін табуға есептер шығарасыңдар.

Көпжақ ұғымы алдыңғы сыныпта қарастырылған болатын. Енді көпжақтардың түрлері мен олардың қасиеттерін толығырақ оқып-үйренетін боламыз. **Беті саны шектеулі көпбұрыштардан тұратын дене көпжақ** деп аталатынын еске салайық. Осы көпбұрыштардың қабырғасы ортақ болатын кез келген екеуі бір жазықтықта жатпайтынын атап өтейік. Параллелепипедтер, пирамидалар – көпжақтардың мысалдары.

Көпжақтың бетін құрайтын көпбұрыштар оның **жақтары** деп, көпбұрыштың қабырғалары **қырлары**, ал олардың төбелері көпжақтың **төбелері** деп аталады. Көпжақтар дөңес және дөңес емес болады. Егер көпжақ өзінің жағын қамтитын әрбір жазықтықтың бір жағында орналасса, оны **дөңес** деп (27, *а*-сурет), ал егер жазықтықтың ол орналаспаған жағында ең болмағанда бір жағы бар болса, оны **дөңес емес** көпжақ деп атайды (27, *ә*-сурет). Мектептегі геометрия курсында негізінен дөңес көпжақтар оқытылады, сондықтан «дөңес» сөзі қолданылмаса, сондай көпжақ қарастырылуда деп есептеледі.

а) *ә)*

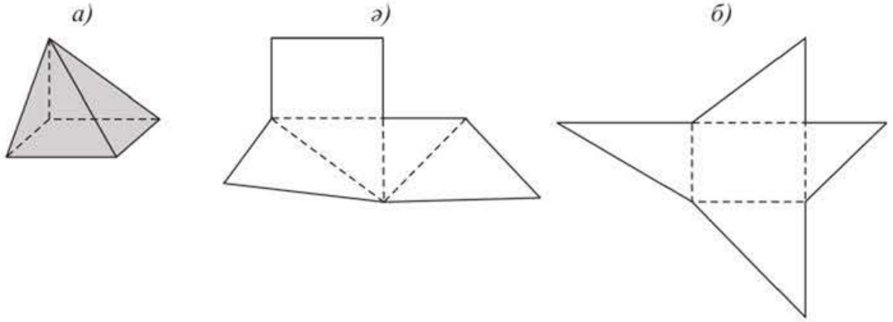


27-сурет

Дөңес көпжақтың жақтары дөңес көпбұрыштар болады, көпбұрыштың төбесі көрсетілген бұрышы көпжақтың сол төбедегі **жазық бұрышы** деп аталады. Дөңес көпжақтың қыры ортақ жақтары *іргелес* (немесе *көршілес*) деп аталады. Көпжақтың іргелес екі жағын қамтитын жарты жазықтықтардың арасындағы екіжақты бұрыш **көпжақтың екіжақты бұрышы** деп аталады.

Дөңес көпжақтың бір жағында жатпайтын екі төбесін қосатын кесінді көпжақтың **диагоналі** деп аталады. **Көпжақтың барлық жақтары аудандарының қосындысы көпжақ бетінің ауданы деп аталады.**

Көпжақтың бетін бірнеше қыры бойымен кесіп, барлық жақтарын қандай да бір көпбұрыш шығатындай етіп бір жазықтыққа жазып орналастыруға болады. Сонда шыққан көпбұрыш көпжақ бетінің **жазбасы** (немесе қысқаша **көпжақтың жазбасы**) деп аталады. 28, *ә*, *б*-суреттерде 28, *а*-суретте кескінделген көпжақ бетінің жазбалары көрсетілген. Іс жүзінде, мысалы, көпжақтың қатырғы қағаздан моделін жасау үшін, алдымен оның бетінің жазбасын дайындап алу керек.



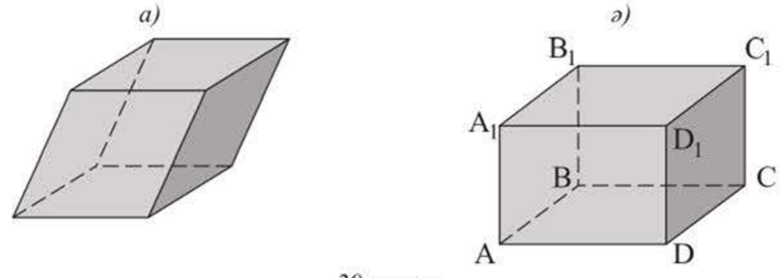
28-сурет

1 - е с е п. Тек 7 қыры болатын көпжақ бар бола ма?

Ш е ш у і. Ондай көпжақ бар болады делік. Егер оның барлық m жақтары үшбұрыштар болса, онда көпжақтың әрбір қыры екі жағында жататындықтан, $\frac{3m}{2}$ қыры бар болады. Шарт бойынша $\frac{3m}{2} = 7$, бұдан $m = \frac{14}{3}$, бұлай болуы мүмкін емес, себебі m – 4-тен кем емес натурал сан. Егер көпжақтың ең болмағанда бір жағы n-бұрыш болса, мұндағы $n \geq 4$, онда оның қырлары 8-ден кем болмас еді. Демек, тек 7 қыры болатын көпжақ болмайды.

Ж а у а б ы. Болмайды.

Көпжақтардың ең қарапайым түрінің бірі – тікбұрышты параллелепипед. **Барлық жақтары параллелограмм болатын 6 жағы бар көпжақ параллелепипед** деп аталатынын еске салайық (29, *а*-сурет). Параллелепипедтің қарама-қарсы жақтары тең және параллель. Барлық жақтары тіктөртбұрыш болатын параллелепипед **тікбұрышты параллелепипед** деп аталады.

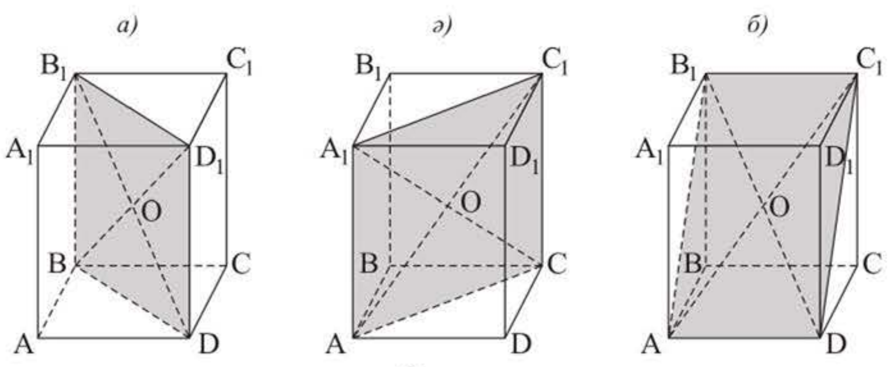


29-сурет

Егер тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген болса (29, *ә*-сурет), онда оның $ABCD$ мен $A_1B_1C_1D_1$ жақтарын әдетте **табандары** деп, ал қалған жақтарын **бүйір жақтары** деп атайды. Параллелепипедтің барлық бүйір жақтары аудандарының қосындысы **оның бүйір бетінің ауданы** деп аталады. Тікбұрышты параллелепипедтің кез келген бүйір қырын оның **биіктігі** деп атайды.

Тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі мен бүйір қыры арқылы өтетін жазықтықпен қимасын оның **диагональдық қимасы** деп атайды. Мысалы, 30, *а*-суретте кескінделген BB_1D_1D төртбұрышы тікбұрышты параллелепипедтің диагональдық қимасы болады, ал 30, *б*-суреттегі AB_1C_1D төртбұрышы диагональдық қима болмайды.

Тікбұрышты параллелепипедтің диагональдары тең және бір нүктеде қиылысады, қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді. 30-суретті пайдаланып, осы қасиеттерді өздігінен дәлелдеңдер.



30-сурет

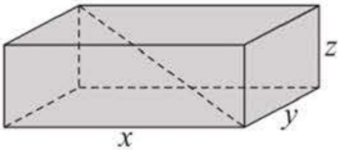
Тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі ұзындығының квадраты оның бір нүктеден шығатын үш қырының ұзындықтары квадраттарының қосындысына тең болатынын еске сала кетелік. Егер тікбұрышты параллелепипедтің өлшемдері a, b, c, ал d оның диагоналі болса, онда $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Дербес жағдайда, қыры a болатын кубтың диагоналі: $d = a\sqrt{3}$.

2 - е с е п. Тікбұрышты параллелепипед тәріздес қырлы бөрененің диагоналі 1 м-ге, ал үш өлшемінің қосындысы 2 м-ге тең. Бөрене бетінің ауданын табу керек.

Ш е ш у і. Қырлы бөрене өлшемдерін x м, y м, z м деп белгілейік (31-сурет). Оның $(2xy + 2xz + 2yz)$-ке тең бетінің ауданын табайық.

Есептің шарты бойынша $x + y + z = 2$. Тікбұрышты параллелепипедтің диагоналінің қасиеті бойынша $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. $x + y + z = 2$ теңдігінің сол және оң жақтарын квадраттап, $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 4$ аламыз. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ екенін ескере отырып, $2xy + 2xz + 2yz = 3$ аламыз.



31-сурет

Ж а у а б ы. 3 м^2.

СҰРАҚТАР

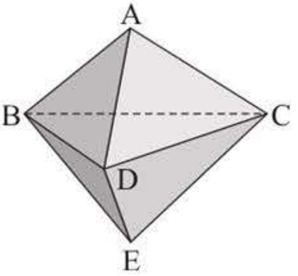
1. Көпжақ дегеніміз не? Көпжақтың мысалдарын келтіріңдер.
2. Көпжақтың мысалынан оның қандай да бір: а) төбесін; ә) жағын; б) қырын; в) диагоналін көрсетіңдер.
3. Қандай көпжақ дөңес, ал қандай көпжақ дөңес емес деп аталады?
4. Көпжақтың жазбасы дегеніміз не екенін түсіндіріңдер.
5. Тікбұрышты параллелепипедтің анықтамасын тұжырымдап, оның өздерің білетін қасиеттерін атап шығыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

14. Көпжақтың ең аз дегенде неше: а) жағы; ә) қыры; б) төбесі бар болуы мүмкін?

15. 32-суретте барлық жақтары дұрыс үшбұрыш болатын $ABCDE$ көпжағы кескінделген. Оның: а) іргелес жақтарын; ә) D төбесіндегі жазық бұрыштарын; б) диагоналін атаңдар.



32-сурет

16. Төртбұрышты $PABCD$ және $SABCD$ пирамидаларының бірігуінен тұратын көпжақты кескіндеңдер. Оның неше:
а) жағы; ә) қыры; б) төбесі; в) диагоналі бар?

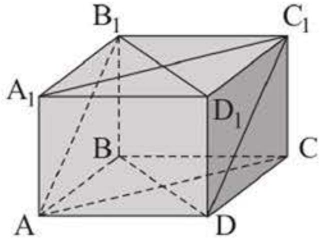
17. а) Тікбұрышты параллелепипедтің; ә) дұрыс тетраэдрдің әрбір төбесіндегі жазық бұрыштарының қосындысы неге тең?

18. Кубты және табаны оның төменгі жағымен, ал төбесі жоғарғы жағының бір төбесімен беттесетін төртбұрышты пирамиданы кескіндеңдер. Осы пирамида мен кубтың неше ортақ қыры бар?

19. Ақиқат болмайтын тұжырымды таңдаңдар: а) куб – тікбұрышты параллелепипед; ә) кубтың барлық жақтары тең; б) қыры a-ға тең кубтың диагоналі $a\sqrt{3}$ -ке тең; в) кубтың диагональдық қимасы – шаршы.

20. Кубтың диагональдық қимасының ауданы $16\sqrt{2}$ см^2. а) Куб қырының ұзындығын; ә) табанының диагоналін; б) кубтың диагоналін; в) бетінің ауданын табыңдар.

21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген, оның AD мен B_1C_1 қырлары арқылы жазықтық жүргізілген. Кубтың осы жазықтықпен қимасының ауданы $98\sqrt{2}$ см^2-ге тең болса, куб бетінің ауданын табыңдар.



33-сурет

22. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде (33-сурет):
а) $(B_1C_1C) \parallel (AA_1D_1)$;
ә) $AB_1 \parallel (DD_1C)$;
б) $CC_1 \perp (ABD)$;
в) $A_1D_1 \perp C_1D$;
г) AB_1C_1D – тіктөртбұрыш;
ғ) диагональдық қималары тең болатынын дәлелдеңдер.

23. Тікбұрышты параллелепипедтің диагональдық қимасы шаршы болуы мүмкін бе? Егер мүмкін болса, онда қандай жағдайда мүмкін болатынын көрсетіңдер.

24. Қойманың ұзындығы, ені және биіктігі, сәйкесінше, 8 м, 6 м және 3 м-ге тең. а) Еденінің ауданын; ә) жақтарының аудандарының қосындысын табыңдар.

25. Тікбұрышты параллелепипедтің өлшемдері 12 см, 8 см және 24 см-ге тең. а) Параллелепипедтің диагоналін; ә) бетінің ауданын табыңдар.

26. Тікбұрышты параллелепипедтің табаны – ауданы 144 см^2-ге тең шаршы. Параллелепипедтің биіктігі 14 см-ге тең болса, оның диагоналінің ұзындығын табыңдар.

27. Тікбұрышты параллелепипед табанының қабырғалары 24 см және 10 см, ал оның диагоналі табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Параллелепипедтің бүйір қырын табыңдар.

28. Тікбұрышты параллелепипедтің табан қабырғалары 16 см және 12 см-ге, ал диагональдық қимасының ауданы 200 см^2-ге тең. Параллелепипедтің биіктігін табыңдар.

29. Табаны – диагоналі $6\sqrt{2}$ м-ге тең шаршы, ал бүйір жағының диагоналі 10 м-ге тең болатын тікбұрышты параллелепипед бетінің ауданын табыңдар.

30. Тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі 8 см-ге, ал табанындағы шаршының диагоналі $4\sqrt{2}$ см-ге тең. Параллелепипедтің диагоналі мен оның бүйір жағы диагоналінің арасындағы бұрышты табыңдар.

31. Табаны шаршы болатын тікбұрышты параллелепипедтің 6 дм-ге тең диагоналі табан жазықтығына 60° бұрышпен көлбеген. Параллелепипедтің бүйір бетінің ауданын табыңдар.

32. а) Қыры 2 см-ге тең дұрыс тетраэдрдің; ә) өлшемдері 1 см, 2 см, 3 см болатын тікбұрышты параллелепипед бетінің жазбасын салып көрсетіңдер.

В деңгейі

33. Әрбір жағы үшбұрыш болатын бесжақ бар бола ма?

34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубынан $A_1AB_1D_1$ пирамидасын қиып алғанда пайда болатын көпжақты кескіндеңдер. Осы көпжақтың қанша жағы болса, сонша төбесі бар деген ақиқат па?

35. а) Тетраэдрдің әрбір жағына оған тең тетраэдрді; ә) кубтың әрбір жағына оған тең кубты; б) кубтың әрбір жағына табаны кубтың жағына тең төртбұрышты пирамиданы желімдеп, жабыстырғанда шығатын дөңес емес көпжақтың моделін жасаңдар.

36. Бетінің ауданы 24 см^2-ге тең ағаш кубты өлшемдері бірдей кішірек 8 кубқа бөлді. Сондай бір куб бетінің ауданын табыңдар.

37. Диагональдық қимасының ауданы 1 м^2-ге тең куб бетінің ауданын табыңдар.

38. а) Табаны шаршы болатын тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі табанымен 60° бұрыш жасайды. Параллелепипедтің осы диагоналі мен бүйір жағының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

ә) Табаны шаршы болатын тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі оның бүйір жағымен 30° бұрыш құрайды. Осы диагональ мен табан жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

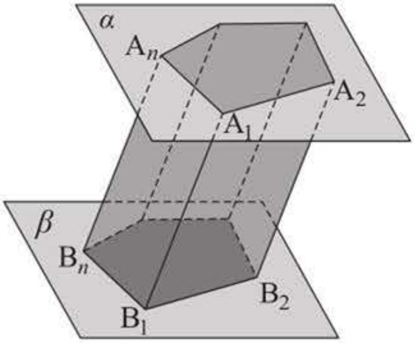
2. Призма және оның элементтері. Призма бетінің ауданы

Тақырыпты оқу барысында:

• призманың анықтамасын, оның элементтерін, призма түрлерін білесіңдер, оларды жазықтықта кескіндей аласыңдар;

• призма элементтерін табуға есептер шығарасыңдар;

• призманың бүйір және толық беті аудандарының формулаларын білесіңдер және оларды есептер шығаруда қолданасыңдар.



34-сурет

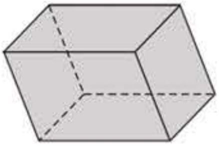
Екі жағы параллель жазықтықтарда жататын тең *n*-бұрыштар, ал басқа *n* жағы параллелограмдар болатын көпжақ *n*-бұрышты призма деп аталады (34-сурет).

Параллель жазықтықтарда жататын екі тең *n*-бұрыштар призманың *табандары* деп, параллелограмдар призманың *бүйір жақтары*, ал призманың табан қабырғалары болмайтын қырлары призманың *бүйір қырлары* деп аталады. Призма ұғымының анықтамасынан шығатыны: **оның барлық бүйір қырлары тең, ал әрбір екі бүйір қыры параллель.**

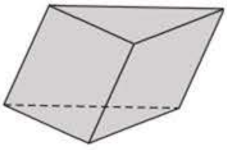
Табан қабырғаларының санына байланысты призманы үшбұрышты, төртбұрышты, бесбұрышты т. с. с. деп атайды (35, 36-суреттер). Егер призманың табаны параллелограмм болса, онда ол параллелепипед болады (35, *а*-сурет).

Егер призманың бүйір қырлары табандарына перпендикуляр болса, онда ол **тік** призма деп (36-сурет), ал перпендикуляр болмаса, **көлбеу** призма деп аталады (35-сурет).

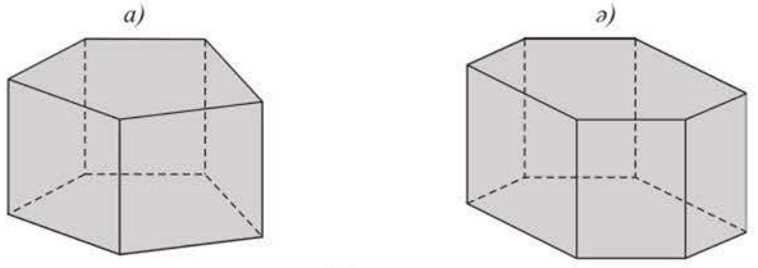
а)



ә)



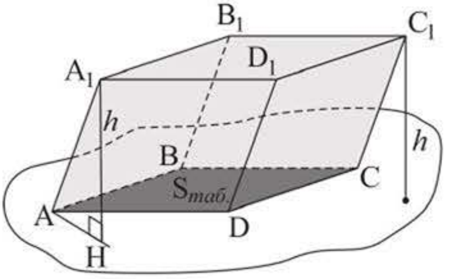
35-сурет



36-сурет

Призманың диагоналі мен бүйір қыры арқылы өтетін қимасы призманың *диагональдық қимасы* деп аталады. Тік призманың әрбір бүйір жағы және әрбір диагональдық қимасы тіктөртбұрыш болады.

Призманың бір табанының кез келген нүктесінен екінші табан жазықтығына жүргізілген перпендикуляр призманың **биіктігі** деп аталады. Призма биіктігінің ұзындығы оның табандарының арақашықтығына тең болады. Мысалы, 37-суреттегі A_1H – $ABCDA_1B_1C_1D_1$ көлбеу параллелепипедінің биіктігі. *Тік призманың биіктігі оның бүйір қырына тең.*



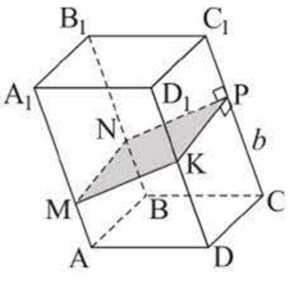
37-сурет

Тік және табандары дұрыс *n*-бұрыштар болатын призма дұрыс призма деп аталады. 36, *ә*-суретте дұрыс алтыбұрышты призма кескінделген. Дұрыс призманың барлық бүйір жақтары – өзара тең тіктөртбұрыштар.

Призманың бүйір жақтарынан құралған фигура оның *бүйір беті* деп аталады. **Призманың толық бетінің ауданы** деп оның барлық жақтары аудандарының қосындысы, ал призманың *бүйір бетінің ауданы* деп оның барлық бүйір жақтары аудандарының қосындысы аталады. Призманың толық бетінің $S_{т.б.}$ ауданы оның бүйір бетінің $S_{б.б.}$ ауданы мен табанының $S_{таб.}$ ауданы арқылы $\boldsymbol{S_{т.б.} = S_{б.б.} + 2S_{таб.}}$ формуласымен өрнектеледі.

Теорема. **Тік призманың бүйір бетінің ауданы оның табанының периметрі мен бүйір қыры ұзындығының көбейтіндісіне тең.**

Дәлелдеуі. Тік призманың барлық бүйір жақтары – тіктөртбұрыштар. Призманың бүйір жағының ауданы осы тіктөртбұрыштардың аудандарының қосындысына, яғни призманың табан қабырғалары ұзындықтарын оның бүйір қырының ұзындығына көбейтінділерінің қосындысына тең болады. Осыдан мына формуланы аламыз: $\boldsymbol{S_{б.\,б.} = P_{таб.} \cdot h}$, мұндағы $P_{таб.}$ – табанының периметрі, h – призманың бүйір қырының ұзындығы.



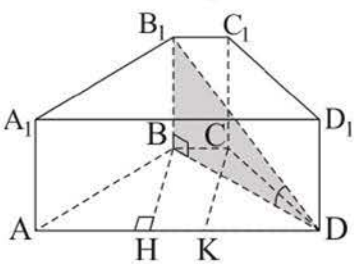
38-сурет

Призманың әрбір бүйір қырын қиятын және оларға перпендикуляр жазықтықпен қимасын **призманың перпендикуляр қимасы** деп атайды. Мысалы, 38-суреттегі $MNPK$ төртбұрышы – көлбеу параллелепипедтің перпендикуляр қимасы.

Т е о р е м а. **Көлбеу призманың бүйір бетінің ауданы призманың перпендикуляр қимасының периметрі мен бүйір қыры ұзындығының көбейтіндісіне тең.**

Д ә л е л д е у і. Көлбеу призманың барлық бүйір жақтары – параллелограмдар, ал барлық бүйір қырлары тең. Призманың бүйір бетінің ауданы осы параллелограмм аудандарының қосындысына тең. Призманың перпендикуляр қимасы – көпбұрыш, оның әрбір қабырғасы параллелограмның (призманың бүйір жағының) биіктігі болады. Демек, $\boldsymbol{S_{б.\,б.} = P_{перп.\,қима} \cdot b}$, мұндағы $P_{перп.\,қима}$ – призманың перпендикуляр қимасының периметрі, b – бүйір қырының ұзындығы.

1 - е с е п. Тік призманың табаны – теңбүйірлі трапеция, оның табандары 2 см және 10 см-ге, ал бүйір қабырғасы 5 см-ге тең. Призманың диагоналі табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Призманың толық бетінің ауданын табу керек.



39-сурет

Ш е ш у і. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тік призмасы берілген болсын, онда $AB = 5$ см, $BC = 2$ см, $AD = 10$ см, ал B_1D диагоналінің табан жазықтығымен жасайтын B_1DB бұрышы 30°-қа тең (39-сурет). Призманың толық бетінің ауданы: $S_{т.\,б.} = S_{б.\,б.} + 2S_{таб.}$.

Табанының ауданын табайық. Ол үшін $ABCD$ трапециясының BH және CK биіктіктерін жүргіземіз. Сонда $AH = KD = \dfrac{10-2}{2} = 4$ (см), $BH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см),

$S_{таб.} = \dfrac{2+10}{2} \cdot 3 = 18$ (см^2).

Призманың бүйір бетінің ауданын $S_{б.\,б.} = P_{таб.} \cdot h$ формуласымен табамыз. Призма тік болғандықтан, h биіктігі оның бүйір қырына тең. Тікбұрышты ΔBB_1D-дан: $B_1B = BD \cdot \mathrm{tg}\,30°$ аламыз. Тікбұрышты ΔBHD-дан: $BD =$

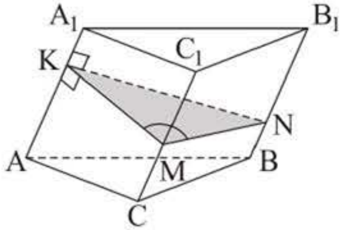
$= \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ (см). Сонда $B_1B = 3\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{15}$ (см), $S_{\text{б. б.}} = 22 \times$ $\times \sqrt{15}$ см^2.

Сонымен, $S_{\text{т. б.}} = S_{\text{б. б.}} + 2S_{\text{таб.}} = (22\sqrt{15} + 36)$ см^2.

Ж а у а б ы. $(22\sqrt{15} + 36)$ см^2.

2 - е с е п. Үшбұрышты көлбеу призманың $\sqrt{3}$-ке тең бүйір қыры оның басқа екі бүйір қырынан 1 дм қашықтықта жатыр, ал осы қырындағы екіжақты бұрышы 120°-қа тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табу керек.

Ш е ш у і. $ABCA_1B_1C_1$ көлбеу призмасы берілген болсын, $CC_1 = \sqrt{3}$ дм. Оның перпендикуляр қимасын – ΔKMN-ді саламыз, $MN = MK = 1$ дм (40-сурет). KMN бұрышы CC_1 қырындағы екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы болады, $\angle KMN = 120°$. Призманың бүйір бетінің ауданы: $S_{\text{б. б.}} = (KN + KM + MN) \cdot CC_1$.



40-сурет

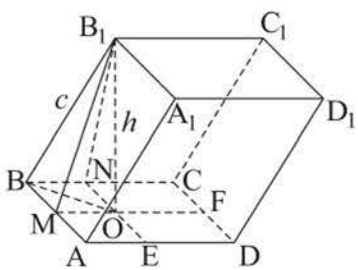
Косинустар теоремасы бойынша KMN үшбұрышынан: $KN^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \times$ $\times 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3$. Сонда $S_{\text{б. б.}} = (\sqrt{3} + 2) \cdot \sqrt{3} = (3 + 2\sqrt{3})$ (дм^2).

Ж а у а б ы. $(3 + 2\sqrt{3})$ дм^2.

3 - е с е п. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ көлбеу параллелепипедінің табаны – $ABCD$ тіктөртбұрышы. $BB_1 = 7$ см, табаны мен AA_1B_1B жағының арасындағы бұрыш 60°-қа, ал осы табан мен BB_1C_1C жағының арасындағы бұрыш 45°-қа тең. Параллелепипедтің биіктігін табу керек.

Ш е ш у і. BA мен BC қабырғаларына, сәйкесінше, B_1M, MF және B_1N, NE перпендикулярларын жүргіземіз (41-сурет). MF және NE түзулерінің қиылысу нүктесін O деп белгілейміз.

Сонда $AB \perp (B_1MO)$, демек, $AB \perp B_1O$ және $BC \perp (B_1NO)$, бұдан $BC \perp B_1O$, ендеше, $B_1O \perp (ABC)$. Яғни B_1O кесіндісі – параллелепипедтің биіктігі, $B_1O = h$ болсын.



41-сурет

B_1MO үшбұрышында $\angle B_1MO = 60°$, $MO = \frac{h}{\text{tg } 60°} = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

B_1NO үшбұрышында $\angle B_1NO = 45°$, $NO = h$. $MONB$ тіктөртбұрыш болғандықтан, $NO = BM$.

ΔBMO-дан: $BO^2 = h^2 + \frac{h^2}{3} = \frac{4h^2}{3}$.

ΔBB_1O-дан: $7^2 = \frac{4h^2}{3} + h^2$, бұдан $49 \cdot 3 = 7h^2$, $h = \sqrt{21}$ (см).

Жауабы. $\sqrt{21}$ см.

СҰРАҚТАР

1. Призма дегеніміз не?
2. Қандай призма: а) тік; ә) көлбеу; б) дұрыс деп аталады?
3. Призманың бүйір беті деп нені атайды?
4. а) Тік призманың; ә) көлбеу призманың толық бетінің ауданын қандай формуламен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

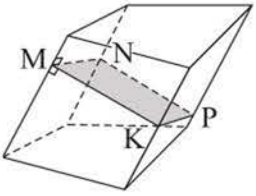
А деңгейі

39. а) Призманың ең аз дегенде неше жағы бар болуы мүмкін?
ә) 10 төбесі бар призманың табаны қандай n-бұрыш болады?

40. Дұрыс тұжырымды көрсетіңдер: а) призманың табандары тең; ә) призманың жақтары тең; б) призманың барлық бүйір жақтары – параллелограмдар; в) призманың барлық жақтары – параллелограмдар; г) призманың барлық бүйір қырлары өзара параллель.

41. а) Төртбұрышты тік призманың тік параллелепипедтен айырмашылығы неде?
ә) Тік және тікбұрышты параллелепипедтердің айырмашылығы бар ма?

42. Егер тік параллелепипедтің диагональдық қима жазықтықтары өзара перпендикуляр болса, онда оның табаны ромб болатынын дәлелдеңдер.

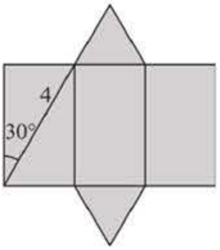


42-сурет

43. а) Кез келген призма қырларының саны 3-ке еселік; ә) төртбұрышты призманың барлық бүйір қырларындағы екіжақты бұрыштарының қосындысы 360°-қа тең (42-сурет); б) дұрыс призманың барлық диагональдық қималары тең шамалы деген ақиқат па?

44. а) Барлық қырлары тең дұрыс үшбұрышты призманың; ә) табан қабырғасы биіктігінен екі есе кем дұрыс алтыбұрышты призманың моделін жасаңдар.

45. 43-суретте дұрыс үшбұрышты призма бетінің жазбасы кескінделген. Суреттегі берілгендерді пайдаланып, осы призманың толық бетінің ауданын табыңдар.



43-сурет

46. Дұрыс төртбұрышты призманың толық бетінің ауданы 40 дм^2, ал бүйір бетінің ауданы одан 8 дм^2-ге кем. Оның табан қабырғасы мен биіктігін табыңдар.

47. а) Тік параллелепипедтің табан қабырғалары 6 дм және 8 дм, ал олардың арасындағы бұрышы 30°. Параллелепипедтің бүйір қыры 5 дм-ге тең болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

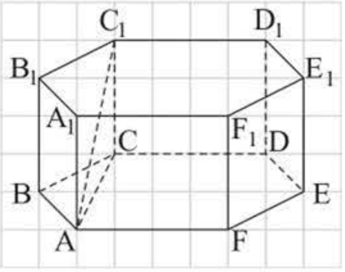
ә) Тік параллелепипедтің табан қабырғалары 8 м және 15 м, ал олардың арасындағы бұрышы 60°. Оның диагональдық қималары аудандарының ең кішісі 65 м^2-ге тең. Параллелепипедтің толық бетінің ауданын табыңдар.

48. а) Үшбұрышты тік призманың табан қабырғалары 5 дм, 5 дм және 8 дм, ал биіктігі табанының кіші биіктігіне тең. Оның толық бетінің ауданын табыңдар.

ә) Үшбұрышты тік призманың табан қабырғалары 21 см, 17 см, 10 см, ал кіші бүйір жағының диагоналі 26 см-ге тең. Оның толық бетінің ауданын табыңдар.

49. а) Дұрыс алтыбұрышты призма табанының үлкен диагоналі 8 см-ге, ал призманың биіктігі $2\sqrt{3}$ см-ге тең. Призманың толық бетінің ауданын табыңдар.

ә) Дұрыс алтыбұрышты призма табанының қабырғасы 2 дм-ге, ал призманың кіші диагоналі 4 дм-ге тең (44-сурет). Оның толық бетінің ауданын табыңдар.



44-сурет

50. а) Тік призманың табаны – теңбүйірлі трапеция. Оның бір бұрышы 45°, табандарының бірі екіншісінен 8 см-ге артық, ал орта сызығы 7 см-ге тең. Егер призманың биіктігі 5 см-ге тең болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

ә) Тік призманың табаны – теңбүйірлі трапеция, оның табандары 8 см және 2 см. Призманың үлкен бүйір жағының диагоналі оның бүйір қырымен 45° бұрыш жасайды. Призманың табанына іштей шеңбер салуға болатыны белгілі болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

51. а) Үшбұрышты көлбеу призманың бүйір қырлары 5 см-ге тең, ал олардың арақашықтықтары 2 см, 3 см және 4 см-ге тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

ә) Үшбұрышты көлбеу призманың бүйір қырына перпендикуляр жазықтықпен қимасы – ауданы 8 см^2-ге тең теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыш. Призманың бүйір қыры 5 см-ге тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

В деңгейі

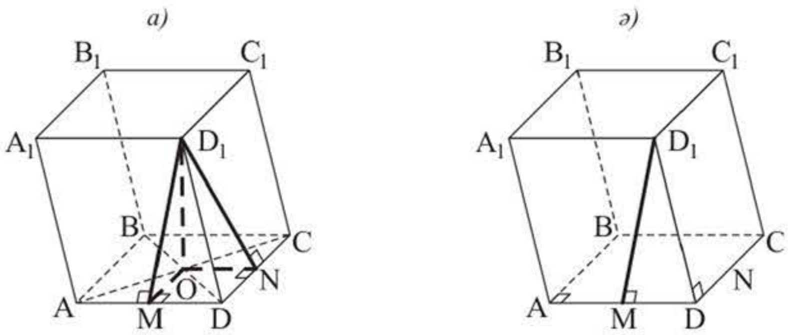
52. а) Тік параллелепипедтің табан қабырғалары 5 м және 3 м, табанының кіші диагоналі 4 м, ал параллелепипедтің кіші диагоналі табанына 60° бұрышпен көлбеген. Параллелепипедтің толық бетінің ауданын табыңдар.

ә) Тік параллелепипедтің табаны – ромб. Параллелепипедтің диагональдық қималарының аудандары 40 см^2 және 60 см^2, ал кіші диагоналі табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. Параллелепипедтің толық бетінің ауданын табыңдар.

53. а) Үшбұрышты көлбеу призманың екі бүйір жағы тең, олардың арасындағы бұрыш 60°. Осы жақтарының ортақ қыры $2\sqrt{3}$ м-ге тең және одан қарсы бүйір жағына дейінгі қашықтық 4 м-ге тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

ә) Үшбұрышты көлбеу призманың екі бүйір жағының арасындағы бұрыш 120°-қа тең, ал олардың 12 дм-ге тең ортақ бүйір қырынан басқа қырларына дейінгі қашықтықтар 7 дм және 8 дм-ге тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

54. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ көлбеу призмасының табаны – қабырғасы 4 см-ге тең шаршы. Призманың биіктігі $2\sqrt{3}$ см-ге тең. Егер призманың биіктігі: а) D_1O кесіндісі, мұндағы O – табан диагональдарының қиылысу нүктесі (45, *а*-сурет); ә) D_1M кесіндісі, мұндағы M нүктесі AD қырының ортасы (45, *ә*-сурет) болса, призманың толық бетінің ауданын табыңдар.



45-сурет

55. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ көлбеу призмасының табаны – тіктөртбұрыш. Оның қабырғалары $CD = 6$ м және $AD = 10$ м. Призманың ABB_1A_1 бүйір жағы – шаршы, ал AB қырындағы екіжақты бұрышы 135°-қа тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

56. Төрт жағы шаршы болатын төртбұрышты көлбеу призманың моделін жасаңдар.

3. Пирамида және оның элементтері

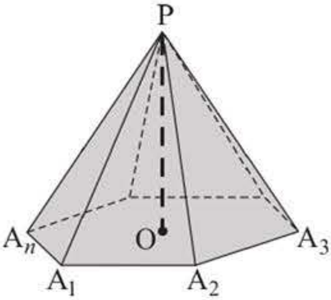
Тақырыпты оқу барысында:

• пирамиданың анықтамасын, оның элементтерін, пирамида түрлерін білесіңдер;

• оларды жазықтықта кескіндей аласыңдар;

• пирамида элементтерін табуға есептер шығарасыңдар.

Бір жағы *n*-бұрыш, ал қалған *n* жағы төбелері ортақ үшбұрыштар болатын көпжақ *n*-бұрышты пирамида деп аталады.



46-сурет

n-бұрышты пирамиданың $n + 1$ жағы бар болады. $A_1A_2...A_n$ көпбұрышы пирамиданың *табаны* деп аталады (46-сурет). P нүктесі пирамиданың *төбесі*, PA_1, PA_2, ... , PA_n кесінділері *бүйір қырлары*, PA_1A_2, PA_2A_3, ... , $PA_{n-1}A_n$ үшбұрыштары пирамиданың *бүйір жақтары* деп аталады. Пирамиданың төбесінен оның табан жазықтығына жүргізілген перпендикуляр пирамиданың **биіктігі** деп аталады, мысалы, 46-суреттегі PO кесіндісі. Осы перпендикулярдың ұзындығын да пирамиданың биіктігі деп атайды. Пирамиданың бүйір қыры мен табанының диагоналі арқылы өтетін жазықтықпен қимасын пирамиданың **диагональдық қимасы** деп атайды.

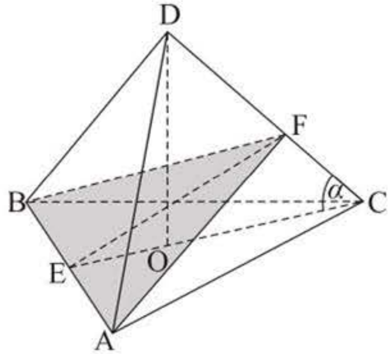
Табаны дұрыс көпбұрыш, ал барлық қырлары тең болатын пирамида дұрыс пирамида деп аталады. Дұрыс пирамиданың төбесінен оның табан қабырғасына жүргізілген бүйір жағының биіктігі пирамиданың **апофемасы** деп аталады. Дұрыс пирамида табанының центрі оның төбесінің табан жазықтығына түскен проекциясы болады.

Дөңес көпжақтың әрбір төбесіндегі жазық бұрыштарының қосындысы 360°-тан кем. Бұл қасиетті көрнекі түрде түсіндіруге болады. Егер біз қатырғы қағаздан *n*-бұрышты пирамида жасағымыз келсе, онда оның кез келген төбесіндегі жазық бұрыштарының қосындысы 360°-тан кем болуы керек. Ал егер оның төбесіндегі жазық бұрыштарының қосындысы 360°-қа тең болса, онда олар төбелері ортақ жақтары жататын жазықтық құрар еді, олай болуы мүмкін емес.

Тетраэдрдің кез келген төбесіндегі екі жазық бұрышының қосындысы сол төбедегі үшінші жазық бұрышынан артық болатынын атап өтейік. (Осы қасиеттің көрнекі түсініктемесін өздігінен ұсыныңдар.)

1 - е с е п. Дұрыс үшбұрышты $DABC$ пирамидасының табан қабырғасы 1 дм-ге тең, ал бүйір қыры табан жазықтығымен $\alpha = 60°$ бұрыш жасайды. Пирамида табанының AB қабырғасы мен DC бүйір қырына перпендикуляр өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табу керек.

Ш е ш у і. DBC үшбұрышының BF биіктігін жүргіземіз, сонда AF – ADC үшбұрышының биіктігі, ал теңбүйірлі ABF үшбұрышы – көрсетілген қима, FE – оның биіктігі (47-сурет).



47-сурет

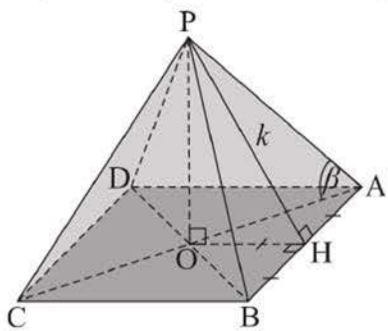
$S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2} AB \cdot EF$. Тікбұрышты ΔEFC-дан $EF = CE \cdot \sin 60° = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$ (дм).

Сонда $S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ (дм^2).

Ж а у а б ы. $\frac{3}{8}$ дм^2.

2 - е с е п. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың бүйір қыры табан жазықтығымен β бұрышын жасайды, пирамиданың апофемасы k-ға тең. Пирамиданың биіктігін табу керек.

Ш е ш у і. $PABCD$ берілген пирамида (48-сурет), PO оның биіктігі, PH апофемасы болсын. Шарты бойынша $PH = k$, $\angle PAO = \beta$. $PO = x$ болсын, сонда $AO = x \cdot \operatorname{ctg}\beta$, $OH = AO \cdot \sin 45° = \frac{x \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \sqrt{2}}{2}$. Пифагор теоремасы бойынша ΔPOH-тан $PO^2 + OH^2 = PH^2$ аламыз. Бұдан $x^2 + \frac{x^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\beta}{2} = k^2$ теңдігі шығады, оны түрлендіріп, $x^2(2 + \operatorname{ctg}^2\beta) = 2k^2$, $x = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2\beta}}$ аламыз.



48-сурет

Ж а у а б ы. $\frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2\beta}}$.

СҰРАҚТАР

1. Пирамида дегеніміз не?
2. Қандай пирамиданы дұрыс пирамида деп атайды?
3. Дұрыс пирамиданың апофемасы дегеніміз не?
4. Кез келген пирамиданың төбесіндегі жазық бұрыштарының қосындысының қандай қасиеті бар?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

57. а) Кез келген пирамиданың қырларының саны неліктен жұп сан болатынын түсіндіріңдер. ә) 15 төбесі бар пирамиданың неше жағы және неше қыры бар? б) 16 қыры бар пирамиданың неше төбесі және неше жағы бар?

58. Төбесіндегі жазық бұрыштары: а) 130°, 85°, 36°; ә) 100°, 70°, 40°; б) 160°, 130°, 80°; в) 150°, 120°, 90° болатын тетраэдр салуға бола ма?

59. а) Пирамиданың табаны – параллелограмм. Оның іргелес екі бүйір жағы табан жазықтығына перпендикуляр, ал кіші бүйір қыры 17 см-ге тең. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

ә) Пирамиданың табаны – қабырғасы 4 дм-ге тең шаршы. Оның бүйір қырларының бірі табан жазықтығына перпендикуляр, ал оған қарама-қарсы қыры табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

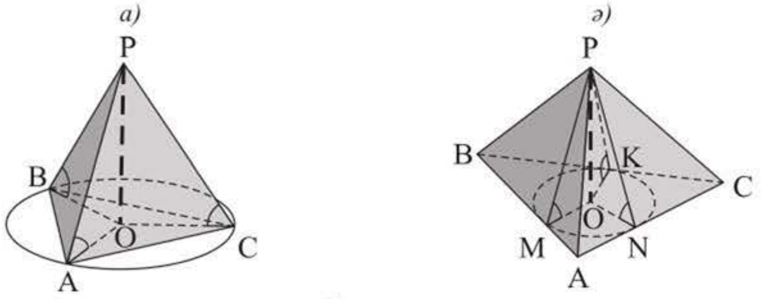
60. Дұрыс төртбұрышты $SABCD$ пирамидасының әрбір бүйір қыры 9 см-ге тең. Пирамиданың: а) S төбесіндегі жазық бұрышын; ә) бүйір қырының табан жазықтығына көлбеулік бұрышын; б) бүйір жағының табан жазықтығымен жасайтын бұрышының косинусын; в) биіктігін табыңдар.

61. Дұрыс үшбұрышты $DABC$ пирамидасының D төбесіндегі жазық бұрыштары тік, ал ABC үшбұрышының табанының қабырғасы 12 см-ге тең. Пирамиданың: а) апофемасын; ә) BC қыры мен DAB жағының DM медианасының арасындағы бұрышты; б) биіктігін табыңдар.

62. Неліктен пирамида төбесінің проекциясы оның табанына: а) сырттай сызылған шеңбердің центрі болса, онда пирамиданың барлық бүйір қырлары тең және табан жазықтығымен тең бұрыштар құрайтынын (49, *а*-сурет);

ә) іштей сызылған шеңбердің центрі болса, онда пирамиданың барлық бүйір жақтары табан жазықтығымен тең бұрыштар құрайтынын (49, *ә*-сурет) түсіндіріңдер.

б) а) мен ә) есептерде берілген тұжырымдарға кері тұжырымдар ақиқат бола ма?



49-сурет

В деңгейі

63. Егер пирамиданың табаны: а) гипотенузасы 10 дм-ге тең тікбұрышты үшбұрыш, ал әрбір бүйір қыры табан жазықтығымен $60°$ бұрыш жасайтын болса; ә) қабырғалары 6 см, 6 см, $6\sqrt{3}$ см-ге тең доғал бұрышты үшбұрыш, ал әрбір бүйір қыры 10 см-ге тең болса, пирамиданың биіктігін кескіндеп, ұзындығын табыңдар.

64. Пирамиданың табаны – қабырғалары 10 м, 10 м, 12 м болатын үшбұрыш. Пирамиданың бүйір жақтары табан жазықтығымен $45°$ бұрыш жасайды. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

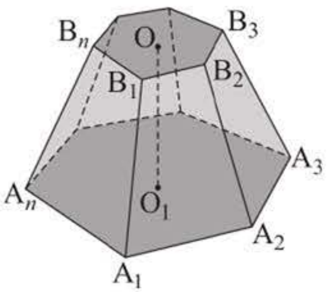
65. Табаны: а) тікбұрышты үшбұрыш, ал екі бүйір жағы табанына перпендикуляр болатын; ә) тіктөртбұрыш, ал биіктігінің табаны – оған сырттай сызылған шеңбердің центрі болатын пирамиданың моделін жасаңдар.

4. Қиық пирамида

Тақырыпты оқу барысында:

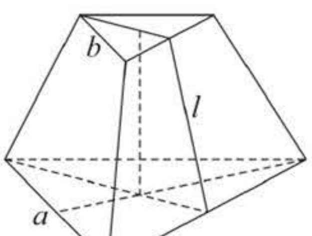
- қиық пирамиданың анықтамасын, оның элементтерін білесіңдер;
- оны жазықтықта кескіндей аласыңдар;
- қиық пирамида элементтерін табуға есептер шығарасыңдар.

***n*-бұрышты қиық пирамида деп *n*-бұрышты пирамиданың табаны мен табан жазықтығына параллель қима жазықтықтың арасындағы көпжақ аталады.**



50-сурет

Мысалы, 50-суреттегі $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ көпжағы – қиық пирамида. $A_1A_2...A_n$ және $B_1B_2...B_n$ көпбұрыштары қиық пирамиданың **табандары** деп, $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ..., $A_nB_nB_1A_1$ трапециялары *бүйір жақтары* деп аталады. Ұштары қиық пирамиданың табандарына тиісті және оларға перпендикуляр кесінді де, осы кесіндінің ұзындығы да қиық пирамиданың **биіктігі** деп аталады. Қиық пирамиданың бүйір қыры мен табанының диагоналін қамтитын қима оның **диагональдық қимасы** деп аталады.



51-сурет

Дұрыс пирамиданың табаны мен табан жазықтығына параллель қима жазықтықтың арасындағы көпжақ **дұрыс қиық пирамида** деп аталады. Дұрыс қиық пирамиданың барлық бүйір жақтары бірдей теңбүйірлі трапециялар болады, осы трапециялардың биіктіктері дұрыс қиық пирамиданың **апофемалары** деп аталады. Мысалы, 51-суретте дұрыс үшбұрышты қиық пирамида кескінделген, оның табан қабырғалары a мен b, апофемасы l.

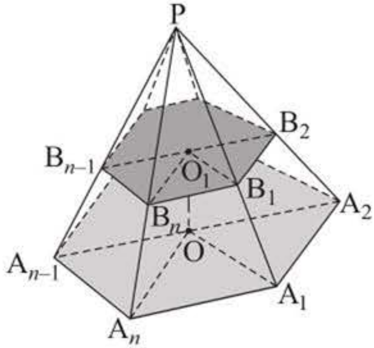
Егер пирамида табанына параллель жазықтықпен қиылған болса, онда:

1) *пирамиданың қимасы табанына ұқсас көпбұрыш болады;*

2) *пирамиданың бүйір қырлары және биіктігі осы жазықтықпен пропорционал кесінділерге бөлінеді;*

3) *қимасы мен табанының аудандарының қатынасы олардан пирамиданың төбесіне дейінгі қашықтықтары квадраттарының қатынасындай болады.*

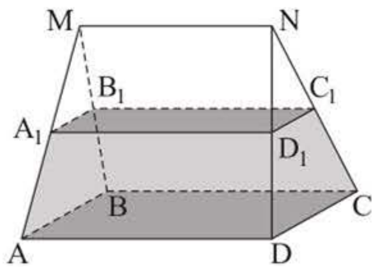
52-суретті пайдаланып, осы қасиеттерді өздігінен негіздеңдер.



52-сурет

Қиық пирамида салу үшін толық пирамиданың қырынан бір нүкте алып, басқа қырларын табан қабырғасына параллель кесінділермен қию керек. Сонда шыққан қима – көпбұрыш жалғыз болады, ол толық пирамидадан қиық пирамида қияды, себебі толық пирамиданың қимасы табанына параллель және оған ұқсас көпбұрыш болады.

Екі жағы параллель жазықтықтарда жататын, ал басқа жақтары трапеция болатын көпжақтардың бәрі бірдей қиық пирамида бола бермейді. Мысалы, 53-суретте $MNABCD$ көпжағынан қиылған $ABCDA_1B_1C_1D_1$ көпжағы кескінделген.

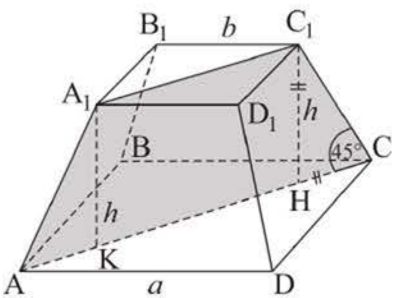


53-сурет

1 - е с е п. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамида табандарының аудандары S_1 және S_2 ($S_1 > S_2$), ал бүйір қыры табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Пирамиданың диагональдық қимасының ауданын табу керек.

Ш е ш у і. Дұрыс төртбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ қиық пирамидасы берілген болсын (54-сурет). Ізделінді аудан теңбүйірлі AA_1C_1C трапециясының ауданына тең.

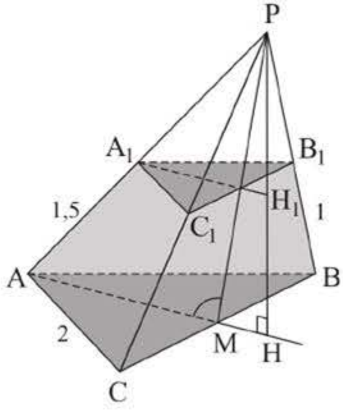
$$S_{AA_1C_1C} = \frac{AC + A_1C_1}{2} \cdot h = \frac{AC + A_1C_1}{2} \times$$
$$\times \frac{AC - A_1C_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{AC^2}{2} - \frac{A_1C_1^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(S_1 - S_2).$$



54-сурет

Ж а у а б ы. $0{,}5(S_1 - S_2)$.

2 - е с е п. Қиық пирамиданың табандары – дұрыс үшбұрыштар. Төменгі табанының қабырғасы 2 м-ге, бүйір қырларының бірі 1,5 м-ге тең, ал жоғарғы табанының қабырғасы мен қалған бүйір қырларының әрқайсысы 1 м-ден. Үлкен бүйір қырына қарсы жатқан табан қабырғасындағы екіжақты бұрышты табу және осы қиық пирамида алынған толық пирамиданың биіктігін кескіндеу керек.



55-сурет

Ш е ш у і. $ABCA_1B_1C_1$ қиық пирамидасында $AB = BC = AC = 2$ м, $AA_1 = 1{,}5$ м, $A_1B_1 = A_1C_1 = B_1C_1 = BB_1 = CC_1 = 1$ м болсын. Оны $PABC$ пирамидасына дейін толықтырып салайық (55-сурет).

Есептің шарты бойынша $\Delta PBC \sim \Delta PB_1C_1$ және $\Delta PAC \sim \Delta PA_1C_1$, ұқсастық коэффициенті 2-ге тең, демек, $PB_1 = PC_1 = 1$ м, $PA_1 = 1{,}5$ м.

Ендеше, $\Delta PBC = \Delta ABC$ және олардың биіктіктері: $PM = AM = \sqrt{3}$ м.

ΔAPM-нен: $\cos\angle PMA = \dfrac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 3^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} =$

$= -\dfrac{1}{2}$. Демек, $\angle PMA = 120°$, ал пирамиданың PH биіктігінің H табаны AM медианасының созындысында жатыр.

Ж а у а б ы. 120°.

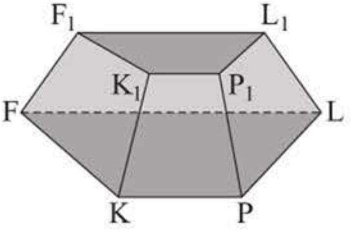
СҰРАҚТАР

1. Қиық пирамида дегеніміз не?
2. Қандай қиық пирамида дұрыс қиық пирамида деп аталады?
3. Дұрыс қиық пирамиданың апофемасы дегеніміз не?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

66. 56-суретте кескінделген көпжақ неге қиық пирамида болмайтынын түсіндіріңдер.



56-сурет

67. а) Кез келген n-бұрышты қиық пирамида қырларының саны $3n$-ге бөлінеді деген ақиқат па?

ә) Қиық пирамиданың биіктігі оның бүйір қырларының біріне тең болуы мүмкін бе?

б) Қиық пирамиданың табандары шаршы емес ромб болса, онда оның бүйір қырлары тең болуы мүмкін бе?

68. а) Табандарының аудандарының қатынасы 1 : 4 болатын үшбұрышты қиық пирамида салыңдар. ә) Пирамиданың PO биіктігінің M нүктесі арқылы табанына параллель ауданы табанының ауданынан екі есе кем болатын қима жүргізілген. M нүктесі PO биіктігін қандай қатынаста бөледі?

69. Егер қиық пирамиданың табандары тіктөртбұрыштар және оның бүйір қырларының бірі табан жазықтығына перпендикуляр болса, онда оның барлық бүйір жақтары тікбұрышты трапециялар болады деген ақиқат па? Жауабын түсіндіріңдер.

70. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табан қабырғалары 8 см және 4 см, ал бүйір қыры мен табан жазықтығының арасындағы бұрыш 45°-қа тең. Қиық пирамиданың: а) биіктігін; ә) диагональдық қимасының ауданын табыңдар.

71. Дұрыс үшбұрышты қиық пирамида табандарының қабырғалары 8 см және 16 см, ал бүйір жағы табан жазықтығына 60° бұрыш жасап көлбеген. Қиық пирамиданың биіктігін табыңдар.

72. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамида табандарының қабырғалары 5 см және 11 см, ал оның биіктігі 13 см. Қиық пирамиданың апофемасын табыңдар.

В деңгейі

73. Пирамида табанының ауданы 512 см^2-ге, ал биіктігі 16 см-ге тең. Ауданы 50 см^2-ге тең және пирамиданың табанына параллель қима одан қандай қашықтықта болатынын табыңдар.

74. Дұрыс үшбұрышты қиық пирамида табандарының қабырғалары 1 : 2 қатынасындай, ал оның биіктігі 6 см-ге тең. Пирамиданың бүйір жағы мен табан жазықтығының арасындағы бұрыш 45°-қа тең болса, оның табандарының аудандарын табыңдар.

75. Үшбұрышты қиық пирамиданың екі бүйір жағы – сүйір бұрышы 45°-қа тең және кіші бүйір қабырғасы ортақ болатын өзара тең тікбұрышты трапециялар. Осы жақтардың арасындағы екіжақты бұрышы 120°-қа тең. Пирамиданың үшінші бүйір жағының табан жазықтығына көлбеулік бұрышының тангенсін табыңдар.

«Алтынемел» ұлттық саябағындағы Айғайқұм, Алматы облысы

76. Шағылдардың бірінің пішіні дұрыс үшбұрышты қиық пирамида тәріздес, оның табандарының қабырғалары 50 м және 2 м, ал бүйір жағының ауданы 988 м^2. Шағылдың биіктігін 1 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

77. а) Бесбұрышты призманың; ә) алтыбұрышты пирамиданың неше жағы, қыры, төбесі бар? Осындай көпжақтарды кескіндеңдер.

78. Әрбір қыры 4 см-ге тең дұрыс үшбұрышты $ABCA_1B_1C_1$ призмасы берілген. Призманың: а) толық бетінің ауданын; ә) B_1 төбесінен ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің центріне дейінгі қашықтықты табыңдар.

79. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тік призмасының табаны – BAD бұрышы 60°-қа тең ромб. Призманың биіктігі 8 см-ге, ал B_1 төбесінен AC түзуіне дейінгі қашықтық 10 см-ге тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

80. Көлбеу параллелепипедтің төрт жағы – қабырғалары 8 см-ге тең шаршылар, ал оның бүйір қыры табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайды. Параллелепипедтің толық бетінің ауданын табыңдар.

81. $PABCD$ дұрыс пирамидасының P төбесіндегі жазық бұрыштарының әрқайсысы 60°-қа тең. а) APC бұрышын; ә) $AB = 4$ см болса, пирамиданың апофемасын табыңдар.

82. Пирамиданың табанына параллель қима оның биіктігін 2 : 3 қатынасына (төбесінен бастап есептегенде) бөледі. Пирамида табанының ауданынан 84 см^2-ге кем болатын қимасының ауданын табыңдар.

83. Пирамиданың табаны – қабырғасы 8 см-ге тең шаршы. Оның іргелес екі бүйір жағы табан жазықтығына перпендикуляр, қалған жақтарының әрқайсысы оған 30° бұрышпен көлбеген. Пирамиданың диагональдық қималарының аудандарын табыңдар.

84. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамида табандарының қабырғалары 8 см және 6 см-ге, ал оның биіктігі 9 см-ге тең. Қиық пирамиданың ең үлкен диагональдық қимасының ауданын табыңдар.

5. Пирамида бетінің ауданы

Тақырыпты оқу барысында:

• пирамиданың бүйір және толық беті аудандарының формулаларын білесіңдер;

• сол формулаларды есептер шығаруда қолданасыңдар;

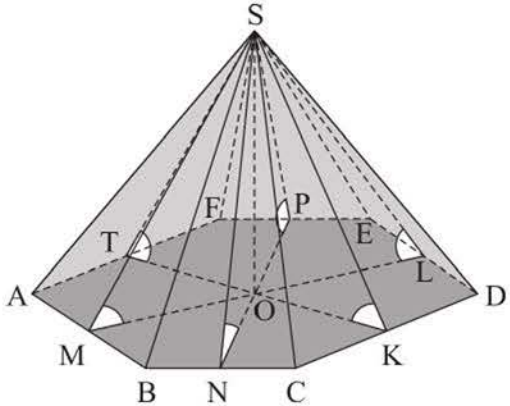
• тең және ұқсас көпжақтардың беттері аудандарының қасиеттерін білесіңдер.

Пирамиданың барлық жақтары аудандарының қосындысы оның *толық бетінің ауданы* деп, ал барлық бүйір жақтары аудандарының қосындысы *бүйір бетінің ауданы* деп аталады. Пирамиданың толық бетінің ауданы оның бүйір бетінің ауданы мен табанының ауданы арқылы, $\boldsymbol{S}_{\text{т. б.}} = \boldsymbol{S}_{\text{б. б.}} + \boldsymbol{S}_{\text{таб.}}$ формуласымен өрнектеледі.

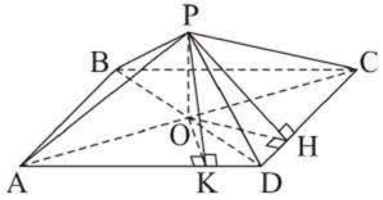
Теорема. **Дұрыс пирамиданың бүйір бетінің ауданы оның табанының жарты периметрі мен апофемасының көбейтіндісіне тең.**

Дәлелдеуі. Дұрыс пирамида табанының қабырғасы a-ға, табан қабырғаларының саны n-ге, ал апофемасы l-ге тең болсын. Сонда пирамиданың бүйір бетінің ауданы $(0{,}5a \cdot l) \cdot n = p \cdot l$, мұндағы p – табанының жарты периметрі, яғни $\boldsymbol{S}_{\text{б. б.}} = \boldsymbol{p \cdot l}$ болады.

Егер пирамида төбесінің табан жазықтығына түскен проекциясы табанына іштей сызылған шеңбердің центрі болса, онда пирамиданың барлық бүйір жақтары табанымен тең бұрыштар жасайды. *Мұндай пирамиданың бүйір бетінің ауданы оның табанының ауданын көрсетілген екіжақты бұрыштың косинусына бөлгенге тең.* Мысалы, 57-суретте $\boldsymbol{S}_{\text{б. б.}} = \dfrac{\boldsymbol{S}_{\text{таб.}}}{\cos\angle SKO}$.



57-сурет



58-сурет

1 - е с е п. *PABCD* пирамидасының табаны – ромб, оның 12 см және 16 см-ге тең диагональдары *O* нүктесінде қиылысады, *PO* – пирамиданың биіктігі, $PO = 2$ см (58-сурет). Пирамиданың толық бетінің ауданын табу керек.

Ш е ш у і. 1) $S_{\text{таб.}} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$ (см^2).

2) Тікбұрышты ΔDOC-ның катеттері 6 см және 8 см, демек, гипотенузасы $DC = 10$ см, $OH = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$ (см).

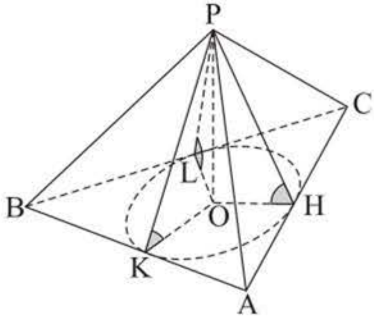
3) $\Delta AOD = \Delta COD$ болғандықтан, $OK = OH$. Ендеше $PK = PH$, яғни бүйір жақтарының биіктіктері тең. Сондықтан $S_{\text{б. б.}} = p \cdot PH$, мұндағы p – табанының жарты периметрі.

4) *POH* үшбұрышының гипотенузасы $PH = \sqrt{2^2 + 4{,}8^2} = 5{,}2$ (см). $S_{\text{б. б.}} = 20 \cdot 5{,}2 = 104$ (см^2).

5) Ізделінді аудан $S_{\text{т. б.}} = 96 + 104 = 200$ (см^2).

Ж а у а б ы. 200 см^2.

2 - е с е п. Үшбұрышты пирамида табанының қабырғалары 13 м, 14 м және 15 м, пирамиданың барлық бүйір жақтары табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табу керек.



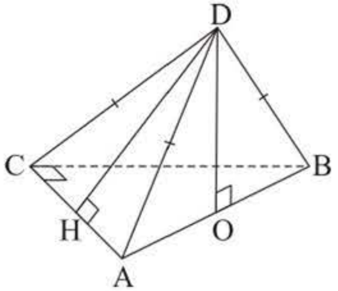
59-сурет

Ш е ш у і. *PABC* пирамидасында $AB = 13$ м, $AC = 14$ м, $BC = 15$ м, *PO* – пирамиданың биіктігі, *PH*, *PK*, *PL* кесінділері оның бүйір жақтарының биіктіктері болсын (59-сурет). $\angle OHP = \angle OKP = \angle OLP = 45°$ болғандықтан, *O* нүктесі ΔABC-ға іштей сызылған шеңбердің центрі болады. Сондықтан берілген пирамиданың бүйір бетінің ауданы: $S_{\text{б.б.}} = \frac{S_{\Delta ABC}}{\cos 45°}$. Герон формуласын $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ пайдаланып, мұндағы p – ΔABC-ның жарты периметрі, a, b, c – оның қабырғалары, $S_{\Delta ABC} = 84$ (м^2) аламыз. Сонда $S_{\text{б. б.}} = 84\sqrt{2}$ (м^2) болады.

Ж а у а б ы. $84\sqrt{2}$ м^2.

3 - е с е п. Тетраэдрдің табаны – тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрыш, оның барлық бүйір жақтары тең шамалы және әрбір бүйір қыры 1 дм-ге тең. Тетраэдрдің бүйір бетінің ауданын табу керек.

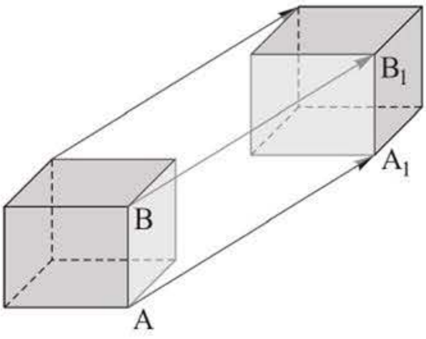
Ш е ш у і. Берілген $DABC$ тетраэдрінде ΔABC – табаны, $AC = BC = a$ дм, $AB = a\sqrt{2}$ дм, $DA = DB = DC = 1$ дм болсын (60-сурет). Сонда AB гипотенузасының ортасы болатын O нүктесі тетраэдрдің DO биіктігінің табаны болады (тең көлбеулер мен олардың проекцияларының қасиеті бойынша). $S_{\Delta ADB} = S_{\Delta ADC}$ екенін, яғни $\frac{1}{2}AB \cdot DO = \frac{1}{2}AC \cdot DH$ болатынын ескере отырып, $a\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a \cdot \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$ теңдеуін аламыз. Осы теңдеудің сол жағы мен оң жағын a-ға бөліп және оларды квадраттап, $\frac{2(4-2a^2)}{4} = \frac{4-a^2}{4}$, $3a^2 = 4$, $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ аламыз. Сонда ізделінді аудан: $3 \cdot S_{\Delta ADC} =$
$= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1-\frac{4}{12}} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2}$ (дм^2).



60-сурет

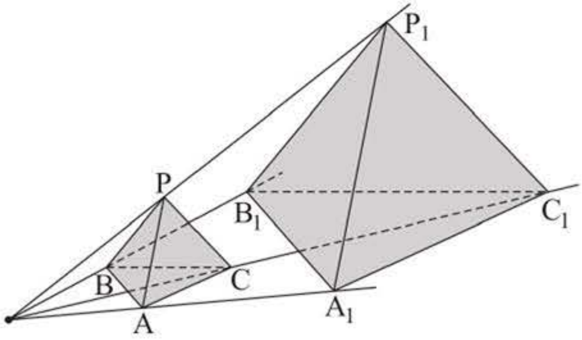
Ж а у а б ы. $\sqrt{2}$ дм^2.

Кеңістіктегі фигуралардың теңдігі, ұқсастығы және фигураларды түрлендіру ұғымдары планиметрияда сияқты анықталатынын айта кетелік. *F фигурасының әрбір A және B нүктелерінің және F_1 фигурасының оларға сәйкестендірілген A_1 мен B_1 нүктелерінің арақашықтықтары өзгермей сақталатын түрлендіру қозғалыс (немесе орын ауыстыру) деп аталады.* **Қозғалыс арқылы беттестіруге болатын екі фигура тең фигуралар деп аталады.** Мысалы, белгілі бір бағытта берілген қашықтыққа көшіретін орын ауыстыруда, яғни параллель көшіру деп аталатын түрлендіруде куб оған тең кубқа бейнеленеді (61-сурет).



61-сурет

F фигурасының әрбір A және B нүктелері мен F_1 фигурасының оларға сәйкес A_1 және B_1 нүктелері үшін $A_1B_1 = k \cdot AB$, мұндағы $k > 0$, теңдігі орындалатын түрлендіруді ұқсастық түрлендіру деп атайды. Мұндағы k оң саны *ұқсастық коэффициенті* деп аталады. **Біреуін екіншісінен ұқсастық түрлендіру арқылы алуға болатын екі фигураны ұқсас фигуралар деп атайды**. Мысалы, 62-суретте $PABC$ және $P_1A_1B_1C_1$ ұқсас тетраэдрлері бейнеленген.



62-сурет

Тең көпжақтар беттерінің аудандары тең, ал ұқсас көпжақтардың беттері аудандарының қатынасы олардың ұқсастық коэффициентінің квадратына тең.

СҰРАҚТАР

1. Пирамиданың толық бетінің ауданы және бүйір бетінің ауданы дегеніміз не?

2. Дұрыс пирамиданың бүйір бетінің ауданын қандай формулалармен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

A деңгейі

85. а) Егер дұрыс үшбұрышты пирамиданың бүйір бетінің ауданы 48 $см^2$-ге, ал табанының қабырғасы 8 см-ге тең болса, оның бүйір қырын табыңдар.

ә) Дұрыс үшбұрышты пирамида табанының қабырғасы 10 см-ге және төбесіндегі жазық бұрышы 60°-қа тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

86. Дұрыс төртбұрышты пирамида табанының қабырғасы 6 см-ге тең. Егер пирамиданың толық бетінің ауданы 96 $см^2$-ге тең болса, оның биіктігін табыңдар.

87. Дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғасы 10 см-ге, ал апофемасы 8 см-ге тең. Пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

88. Пирамиданың 4 м-ге тең биіктігі оның бір бүйір қырымен беттеседі. Егер пирамиданың табаны: а) қабырғасы 3 м-ге тең шаршы; ә) қабырғасы $2\sqrt{3}$ м-ге тең теңқабырғалы үшбұрыш болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

89. а) Пирамиданың табаны – қабырғалары 12 см және 5 см болатын тіктөртбұрыш, ал пирамида төбесінің табан жазықтығына түскен проекциясы оның диагональдарының қиылысу нүктесі болады. Пирамиданың биіктігі 8 см-ге тең болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

ә) Дұрыс төртбұрышты пирамида табанының диагоналі 10 см-ге, ал бүйір жағы мен табан жазықтығының арасындағы бұрыш 45°-қа тең. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

90. а) Хеопс пирамидасы дұрыс төртбұрышты пирамида пішіндес. Оның табанының қабырғасы 230 м-ге, ал биіктігі шамамен 137 м-ге тең. Осы пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар (жауабын 100 $м^2$-ге дейін дөңгелектеңдер).

Хеопс пирамидасы, Египет

Бейбітшілік және Келісім сарайы, Нұр-Сұлтан қ.

ә) Нұр-Сұлтан қаласындағы Бейбітшілік және Келісім сарайы дұрыс төртбұрышты пирамида пішіндес. Оның биіктігі мен табанының қабырғасы 62 м-ге тең. Осы пирамиданың бүйір бетінің ауданын 1 $м^2$-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

91. Дұрыс үшбұрышты пирамида табанының қабырғасы $4\sqrt{3}$ см-ге тең. Егер пирамиданың табан жазықтығы мен: а) бүйір жағының; ә) бүйір қырының арасындағы бұрыш 60°-қа тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

92. Пирамиданың табаны – бір бұрышы 45°-қа тең ромб. Пирамиданың бүйір жақтары табан жазықтығына 60° бұрышпен көлбеген. Ромбыға іштей сызылған шеңбердің радиусы $\sqrt{2}$ дм-ге тең болса, пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

93. а) Табанының ауданы $25\sqrt{2}$ см^2-ге, ал бүйір бетінің ауданы 50 см^2-ге тең дұрыс пирамиданың бүйір жағының жазықтығы мен табан жазықтығы арасындағы бұрышты табыңдар.

ә) Табанының қабырғасы $2\sqrt{3}$ дм-ге, ал бүйір жағы мен табан жазықтығының арасындағы бұрышы 30°-қа тең дұрыс төртбұрышты пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

94. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың биіктігі 4 см-ге, ал табанының қабырғасы $2\sqrt{3}$ см-ге тең. Осы пирамида мен табаны осы пирамиданың табанындай, ал 4 см-ге тең биіктігі бүйір қырларының бірімен беттесетін пирамиданың бүйір беттерінің аудандарын салыстырыңдар.

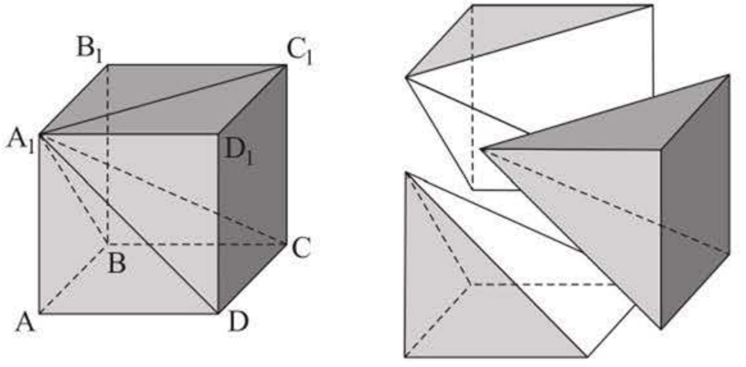
95. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың моделін жасап, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

В деңгейі

96. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың толық бетінің ауданы $112\sqrt{3}$ см^2-ге, ал бүйір бетінің ауданы $96\sqrt{3}$ см^2-ге тең. Осы пирамиданың биіктігін 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

97. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, оның $AB = 3$ м, $BC = 6$ м, $BB_1 = 12$ м. B_1ABC пирамидасының толық бетінің ауданын табыңдар.

98. Қыры 1 дм-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ағаш кубын A_1ABCD, $A_1BCC_1B_1$, $A_1DCC_1D_1$ пирамидаларына бөлген (63-сурет). Осы пирамидалардың неліктен тең болатынын түсіндіріңдер және олардың толық бетінің ауданын табыңдар.



63-сурет

99. Егер дұрыс төртбұрышты пирамиданың диагональдық қимасы: а) ауданы $32\,см^2$-ге тең тікбұрышты үшбұрыш; ә) ауданы $2\sqrt{3}$ $дм^2$-ге тең дұрыс үшбұрыш болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

100. а) $PABC$ пирамидасының табаны – ΔABC және $AB = 21$ см, $BC = 8$ см, $AC = 15$ см. Егер $PA \perp (ABC)$, $PA = 3{,}5\sqrt{5}$ см болса, пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

ә) $PABC$ пирамидасының биіктігі $PA = 5$ дм. Егер $AB = 13$ дм, $BC = 14$ дм, $AC = 15$ дм болса, пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

6. Қиық пирамида бетінің ауданы

Тақырыпты оқу барысында:

- қиық пирамиданың бүйір және толық беті аудандарының формулаларын білесіңдер;
- сол формулаларды есептер шығаруда қолданасыңдар;
- жазықтыққа қатысты симметрия ұғымын білесіңдер.

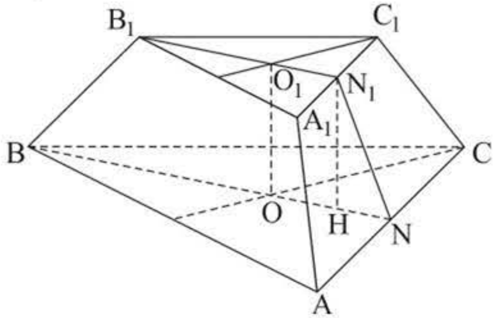
Қиық пирамиданың барлық жақтарының аудандарының қосындысы *толық бетінің ауданы* деп, ал оның барлық бүйір жақтары аудандарының қосындысы *бүйір бетінің ауданы* деп аталады. Пирамиданың толық бетінің $S_{т.\,б.}$ ауданы оның бүйір бетінің $S_{б.\,б.}$ ауданы мен табандарының S_1 және S_2 аудандары арқылы, $\boldsymbol{S_{т.\,б.} = S_{б.\,б.} + S_1 + S_2}$ формуласымен өрнектеледі.

Т е о р е м а. **Дұрыс қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданы оның табандары периметрлерінің қосындысының жартысын апофемаға көбейткенге тең:**

$$\boldsymbol{S_{б.\,б.} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l.}$$

Дәлелдеуін өздігінен орындаңдар.

Е с е п. Табандарының қабырғалары 12 м және 6 м, ал биіктігі 1 м болатын дұрыс үшбұрышты қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын табу керек.



64-сурет

Ш е ш у і. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс қиық пирамидасында $AB = 12$ м, $A_1B_1 = 6$ м, N_1H биіктігі 1 м-ге тең және N_1N апофемасы болсын (64-сурет). Ізделінді ауданды $S_{б.\,б.} = \dfrac{3 \cdot AB + 3 \cdot A_1B_1}{2} \cdot N_1N$ формуласын пайдаланып табайық.

N_1N апофемасын тікбұрышты N_1HN үшбұрышынан табамыз:

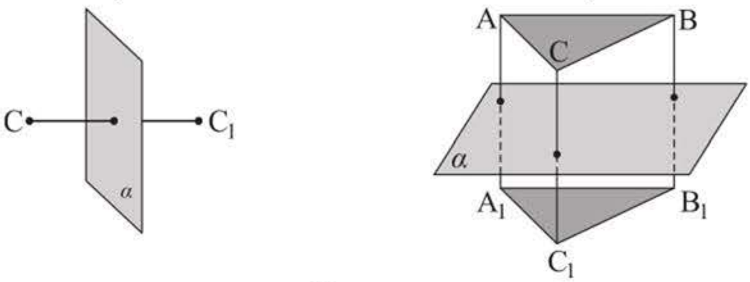
$HN = ON - O_1N_1 = \dfrac{12\sqrt{3}}{6} - \dfrac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$ (м), сонда $N_1N = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ (м).

$S_{б.\,б.} = \dfrac{1}{2}(36 + 18) \cdot 2 = 54$ (м^2).

Ж а у а б ы. 54 м^2.

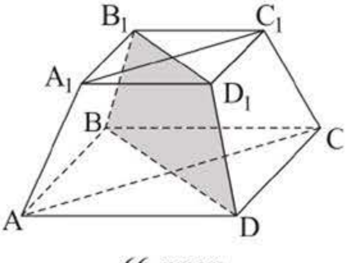
Фигураның маңызды қасиеттерінің бірі – оның симметриялы болуы. Центрлік және остік симметриялар, центрлік симметриялы және остік симметриялы фигуралар ұғымдары планиметрияда қарастырылған болатын. Осы ұғымдардың анықтамалары стереометрияда да сақталады.

Кеңістікте симметрияның осы түрлерінен өзге жазықтыққа қатысты симметрия қарастырылады. CC_1 кесіндісі α жазықтығына перпендикуляр болса және осы жазықтықпен қақ бөлінсе, онда C мен C_1 нүктелері α жазықтығына (симметрия жазықтығына) қатысты симметриялы нүктелер деп аталады (65, *а*-сурет).



65-сурет

F фигурасының әрбір нүктесіне F_1 фигурасының α жазықтығына қатысты симметриялы нүктесі бар болса және керісінше, онда F және F_1 симметриялы фигуралар деп аталады. Бұл жағдайда α жазықтығының әрбір нүктесі осы жазықтыққа қатысты өзіне-өзі симметриялы деп есептеледі. Мысалы, 65, *ә*-суреттегі ΔABC мен $\Delta A_1B_1C_1$ – α жазықтығына қатысты симметриялы үшбұрыштар.



66-сурет

Фигура қандай да бір жазықтыққа қатысты өзіне-өзі симметриялы болуы мүмкін. Осы жазықтық сол фигураның симметрия жазықтығы деп, ал фигураның өзі *осы жазықтыққа қатысты симметриялы* деп аталады. Жазықтыққа қатысты симметрияны айналық симметрия деп те атайды. Мысалы, дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың диагональдық қимасын қамтитын жазықтық оның симметрия жазықтығы болады (66-сурет). Бұл жазықтық оны толық беттерінің аудандары тең болатын екі тең фигураға бөледі.

Симметрияны табиғаттан да байқауға болады, ол адамдардың күнделікті қызметінде де кеңінен қолданылады.

СҰРАҚТАР

1. Қиық пирамиданың толық бетінің ауданы және бүйір бетінің ауданы дегеніміз не?

2. Дұрыс қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын қандай формуламен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

101. Дұрыс қиық пирамида табандарының қабырғалары 4 см және 6 см-ге, ал апофемасы $2\sqrt{3}$ см-ге тең. Егер осы қиық пирамиданың табандары: а) төртбұрыштар; ә) үшбұрыштар болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

102. Табандарының қабырғалары 8 см және 6 см болатын: а) төртбұрышты және биіктігі 7 см-ге тең; ә) алтыбұрышты және биіктігі $2\sqrt{6}$ см-ге тең дұрыс қиық пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

103. Табандарының қабырғалары 12 см және 18 см болатын: а) үшбұрышты және биіктігі $3\sqrt{21}$ см-ге тең; ә) төртбұрышты және бүйір жағындағы трапецияның бұрышы 60°-қа тең дұрыс қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

104. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамида табандарының қабырғалары 15 дм-ге және 5 дм-ге, ал диагональдық қимасының ауданы $40\sqrt{3}$ дм^2-ге тең. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

105. а) Дұрыс үшбұрышты қиық пирамида табандарының қабырғалары $4\sqrt{3}$ см-ге және $10\sqrt{3}$ см-ге тең. Оның табанының қырындағы сүйір екіжақты бұрышы 60°-қа тең болса, бүйір бетінің ауданын табыңдар.
ә) Дұрыс төртбұрышты қиық пирамида табандарының диагональдары 12 см-ге және 4 см-ге, ал төменгі табанының қырындағы екіжақты бұрышы 45°-қа тең. Осы қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

106. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамида табандарының қабырғалары және биіктігі 10 : 4 : 4 қатынасындай, ал оның бүйір бетінің ауданы 280 см^2-ге тең. Осы пирамида табандарының аудандарын табыңдар.

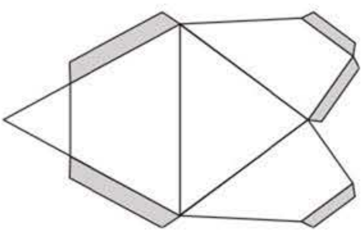
107. Дұрыс үшбұрышты пирамида табанының ауданы $16\sqrt{3}$ см^2, ал апофемасы 10 см. Пирамида биіктігінің ортасы арқылы табанына параллель қима салынған. Сонда пайда болған қиық пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

108. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың апофемасы 5 см-ге, ал бүйір жағының орта сызығы 9 см-ге тең. Төменгі табан қырындағы екіжақты бұрыштың синусы $\frac{4}{5}$-ке тең. Қиық пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

109. Дұрыс үшбұрышты $ABCA_1B_1C_1$ призмасының табан қабырғасы 4 дм-ге, ал бүйір қыры 3 дм-ге тең. M және N нүктелері, сәйкесінше, A_1B_1 және B_1C_1 кесінділерінің орталары. $ABCMB_1N$ көпжағы қиық пирамида болатынын анықтап, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

В деңгейі

110. а) Ұзындығы 9 см-ге тең B_1B кесіндісі үшбұрышты қиық $ABCA_1B_1C_1$ пирамидасының биіктігі болады. Төменгі табанының қабырғалары $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. Қиық пирамиданың жоғарғы және төменгі табандары аудандарының қатынасы $\frac{4}{25}$-ке тең. Қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.


67-сурет

ә) а) есебінде берілген қиық пирамиданың моделін жасаңдар. 67-суретте осы қиық пирамиданың кішірейтілген жазбасы желімдеуге арналған қақпақшаларымен көрсетілген.

111. Егер үшбұрышты қиық пирамиданың бүйір қырларындағы екіжақты бұрыштары тең болса, онда оның бүйір бетінің ауданы табандарының периметрлері қосындысының жартысы мен кез келген бүйір жағы биіктігінің көбейтіндісіне тең деген ақиқат па?

112. Үшбұрышты пирамида төбесінің проекциясы – қабырғалары 20 см, 16 см және 12 см болатын табанына іштей сызылған шеңбердің центрі. Пирамиданың табанына параллель жазықтықпен қимасы одан табандарының қатынасы 9 : 16 болатын қиық пирамида бөледі. Егер сол қиық пирамиданың биіктігі $4\sqrt{3}$ см-ге тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

113. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамиданың әр бүйір қыры $\sqrt{2}$ дм-ге тең және төменгі табанымен $45°$ бұрыш жасайды. Егер қиық пирамида табандары аудандарының қатынасы 4-ке тең болса, оның бүйір бетінің ауданы қандай болғаны?

114. Дұрыс үшбұрышты қиық пирамиданың табандары қабырғаларының қатынасы $1:2$, биіктігі $2\sqrt{3}$ см-ге тең, ал бүйір қыры табан жазықтығына $45°$ бұрышпен көлбеген. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

115. Үшбұрышты қиық пирамиданың бүйір жақтары – әрқайсысының табандарының қосындысы 12 см-ге тең теңбүйірлі трапециялар. Әрбір трапецияның биіктігі 4 см-ге тең, ал олардың бүйір қабырғаларын қамтитын түзулер тік бұрыш жасап қиылысады. Осы қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

7. Дұрыс көпжақтар

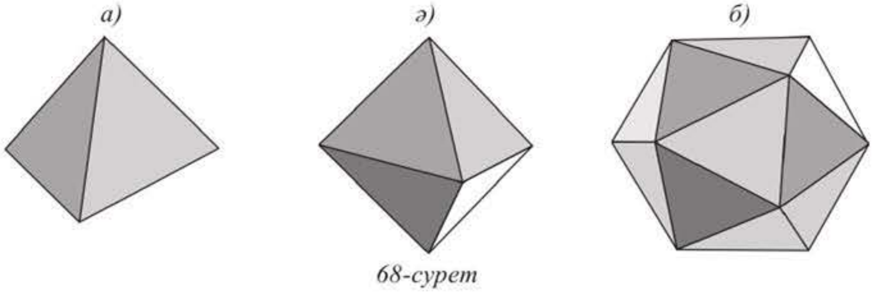
Тақырыпты оқу барысында:
- дұрыс көпжақтың анықтамасын білесіңдер;
- дұрыс көпжақтардың түрлерін ажыратасыңдар.

Барлық жақтары тең дұрыс көпбұрыштар және әр төбесінде түйісетін қырларының саны бірдей болатын дөңес көпжақты дұрыс көпжақ деп атайды.

Т е о р е м а. **Дұрыс көпжақтың бес түрі болады.**

Д ә л е л д е у і. Дөңес көпжақтың төбесіндегі жазық бұрыштары қосындысының қасиетін пайдаланамыз. Бір төбесінен n қыры шығатын болсын ($n \geq 3$), сонда осы төбедегі жазық бұрыштар саны да n болады және олар өзара тең. Жазық бұрыштарының бірі $x°$ болсын, сонда осы төбедегі барлық жазық бұрыштардың қосындысы $nx°$ болады. Жазық бұрыштар қосындысының қасиеті бойынша $nx° < 360°$.

1) Дұрыс көпжақтың жақтары дұрыс үшбұрыштар болсын. Сонда бір төбеде олардың 3, 4 және 5-уі түйісуі мүмкін, себебі $60° \cdot 3 < 360°$, $60° \cdot 4 < 360°$, $60° \cdot 5 < 360°$, ал $60° \cdot 6 = 360°$. Оған сәйкес келетін дұрыс көпжақтар – дұрыс *тетраэдр* (төртжақ), дұрыс *октаэдр* (сегізжақ), дұрыс *икосаэдр* (жиырмажақ) (68-сурет). Демек, жақтары дұрыс үшбұрыш болатын дұрыс көпжақтардың тек 3 түрі ғана бар.



68-сурет

2) Дұрыс көпжақтың жақтары шаршылар болсын. Бір төбеде олардың тек 3-уі түйісуі мүмкін, өйткені $90° \cdot 3 < 360°$, ал $90° \cdot 4 = 360°$. Оған сәйкес келетін дұрыс көпжақ – бұрыннан білетін куб, оны дұрыс *гексаэдр* (алтыжақ) деп те атайды (69, *а*-сурет). Демек, жақтары шаршы болатын дұрыс көпжақтардың тек 1 түрі ғана бар.

3) Дұрыс көпжақтың жақтары дұрыс бесбұрыштар болсын. Бір төбеде олардың тек 3-уі түйісуі мүмкін, өйткені $108° \cdot 3 < 360°$, ал $108° \cdot 4 > 360°$.

Оған сәйкес келетін дұрыс көпжақ – дұрыс *додекаэдр* (12-жақ) (69, *ә*-сурет). Демек, жақтары дұрыс бесбұрыш болатын дұрыс көпжақтардың тек 1 түрі ғана бар. Алты жақты, жеті жақты және одан да көп жақты дұрыс көпжақ болмайды, себебі $120° \cdot 3 = 360°$. Сонымен дұрыс көпжақтың тек бес түрі ғана болады. Теорема дәлелденді.

69-сурет

Келесі кестеде дұрыс көпжақтардың әрқайсысының жақтарының (Ж), төбелерінің (Т) және қырларының (Қ) саны көрсетілген.

Дұрыс көпжақтың түрі	**Ж**	**Т**	**Қ**
Дұрыс тетраэдр	4	4	6
Дұрыс гексаэдр	6	8	12
Дұрыс октаэдр	8	6	12
Дұрыс додекаэдр	12	20	30
Дұрыс икосаэдр	20	12	30

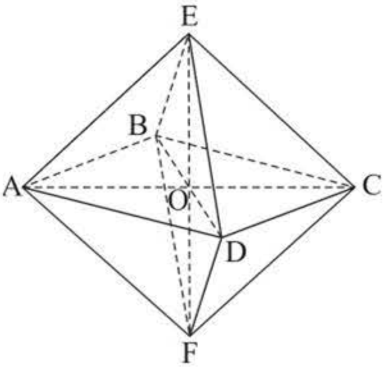
Кез келген дұрыс көпжақ үшін кез келген дөңес көпжақ сияқты **Ж + Т – Қ = 2** теңдігі орындалатынын атап өтейік. Дөңес көпжақтардың бұл тамаша қасиетін оны ашқан көрнекті швейцар математигі Леонард Эйлердің (1707–1783) құрметіне *эйлерлік сипаттама* деп атайды.

Дұрыс көпжақтардың әрқайсысының барлық жақтарынан және төбелерінен бірдей қашықтықта орналасатын бір ғана нүктесі бар, оны дұрыс көпжақтың **центрі** деп атайды.

1 - е с е п. Қыры a-ға тең дұрыс октаэдрдің диагональдық қималарының ауданын табу керек.

Ш е ш у і. Дұрыс $EABCDF$ октаэдрі берілген болсын (70-сурет). Октаэдрдің $ABCD$, $AECF$, $BEDF$ диагональдық қималарының шаршы болатынын дәлелдейік.

1) Теңбүйірлі AEF, BEF, CEF, DEF үшбұрыштарының AO, BO, CO, DO медианалары тең және олардың биіктіктері болады. Демек, AO, BO, CO, DO түзулері EF түзуіне перпендикуляр. O нүктесі арқылы EF түзуіне перпендикуляр бір ғана жазықтық жүргізуге болатындықтан, A, B, C, D нүктелері бір жазықтықта жатады және $ABCD$ шаршы болады.



70-сурет

2) Дәл осылай BDA, BDE, BDC, BDF үшбұрыштарын қарастыра отырып, $AECF$ төртбұрышының шаршы болатынын анықтаймыз, ал ABC, AEC, ADC, AFC үшбұрыштарын қарастыру арқылы $BEDF$ төртбұрышының да шаршы екенін анықтаймыз.

3) Қарастырылған шаршылар тең, сондықтан берілген дұрыс октаэдрдің әрбір диагональдық қимасының ауданы a^2-қа тең.

Ж а у а б ы. a^2.

2 - е с е п. Қыры 3 см-ге тең дұрыс додекаэдрдің толық бетінің ауданын 1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен табу керек.

Ш е ш у і. Дұрыс додекаэдрдің өзара тең дұрыс бесбұрыш болатын 12 жағы бар. Осындай бір бесбұрыштың ауданын табу үшін оның төбелерін бесбұрыштың O центрімен қосып, тең бес үшбұрышқа бөлеміз (71-сурет). Сонда $\angle AOB = 72°$, биіктігі $OH = \dfrac{3}{2 \cdot \operatorname{tg} 36°}$, ал бесбұрыштың S_1 ауданы $S_1 = \dfrac{5 \cdot 9}{4 \cdot \operatorname{tg} 36°}$ болады. Сонда ізделінді аудан $S = 12 \cdot S_1 = \dfrac{135}{\operatorname{tg} 36°} \approx \dfrac{135}{0{,}727} \approx 186$ (см^2).

71-сурет

Ж а у а б ы. ≈ 186 см^2.

СҰРАҚТАР

1. Дұрыс көпжақ дегеніміз не?

2. Дұрыс көпжақтардың барлығы қанша түрі бар? Олар қалай аталады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

116. Барлық жақтары: а) тең; ә) дұрыс көпбұрыштар болатын көпжақ дұрыс көпжақ болады деген ақиқат па?

117. Екі тең дұрыс тетраэдрден құрастырылған көпжақты кескіндеңдер. Оның неліктен дұрыс көпжақ болмайтынын түсіндіріңдер.

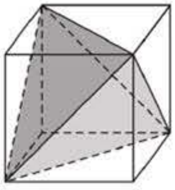
118. Егер тікбұрышты параллелепипедтің:

а) диагональдық қимасы шаршы болса;

ә) бір төбесінен шығатын үш жағының диагональдары тең болса, ол дұрыс гексаэдр бола ма?

119. Дұрыс: а) тетраэдрдің; ә) гексаэдрдің; б) октаэдрдің; в) икосаэдрдің; г) додекаэдрдің әрбір төбесіндегі жазық бұрыштарының қосындысы неге тең?

120. Ұзындығы 1 м сымнан: а) қыры 1 дм-ге тең кубтың; ә) қыры 1,5 дм-ге тең дұрыс тетраэдрдің; б) қыры 0,5 дм-ге тең дұрыс октаэдрдің қорабының моделін жасауға бола ма?



72-сурет

121. 72-суретте көрсетілгендей куб жақтарының диагональдарын жүргізсе, шыққан тетраэдр дұрыс болады деген ақиқат па? Жауабын түсіндіріңдер.

122. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ағаш кубынан D_1AB_1C пирамидасын бөліп алған. Осы куб пен пирамиданың толық беттері аудандарының қатынасын табыңдар.

123. Дұрыс көпжақтың 8 жағы бар. Оның: а) бір төбесінен шығатын екі қырының арасындағы бұрышын; ә) қырындағы екіжақты бұрышының косинусын табыңдар.

124. Қыры 6 см-ге тең дұрыс көпжақ берілген. Егер осы көпжақ: а) тетраэдр; ә) октаэдр болса, оның іргелес екі жағының центрлерінің арақашықтығын табыңдар.

125. Әрқайсысының қыры a-ға тең дұрыс тетраэдр мен октаэдрдің толық беттерінің аудандарының қатынасын табыңдар.

126. а) Табанының ауданы $\sqrt{3}$ дм^2-ге, ал апофемасы $\sqrt{3}$ дм-ге тең дұрыс үшбұрышты пирамида дұрыс тетраэдр бола ма?

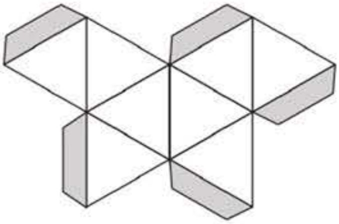
ә) Табанының қабырғасы $\sqrt{1,5}$ дм-ге тең дұрыс үшбұрышты пирамида берілген. Осы пирамида дұрыс тетраэдр болуы үшін оның биіктігінің ұзындығы қандай болу керек?

127. Биіктігі $\sqrt{6}$ м-ге тең дұрыс тетраэдрдің толық бетінің ауданы қандай?

128. а) Дұрыс додекаэдрдің толық бетінің ауданы $\frac{135}{\text{tg}\,36^\circ}$ см^2. Оның қырының ұзындығын табыңдар.

ә) Толық бетінің ауданы $80\sqrt{3}$ см^2-ге тең дұрыс икосаэдр қырының ұзындығын табыңдар.

129. Қыры 8 см-ге тең дұрыс октаэдрдің моделін жасаңдар. 73-суретте октаэдрдің желімдеуге арналған қақпақшалары бар жазбасы көрсетілген.



73-сурет

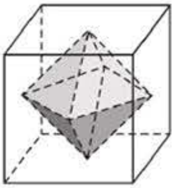
В деңгейі

130. $PABC$ дұрыс тетраэдрінің AP мен BC қырларының арақашықтығы 1 м-ге тең. Оның толық бетінің ауданын табыңдар.

131. Дұрыс тетраэдр жақтарының центрлері жаңа тетраэдрдің төбелері болады. Осы тетраэдрлердің толық беттері аудандарының қатынасын табыңдар.

132. а) Егер кубтың барлық жақтарының центрлерін салсақ, сонда шыққан алты нүкте дұрыс октаэдрдің төбелері болады деген ақиқат па (74-сурет)? Жауабын түсіндіріңдер.

ә) 74-суретте қыры 4 дм-ге тең кубтың ішіне төбелері осы кубтың жақтарының центрлері болатын көпжақ кескінделген. Көпжақтың толық бетінің ауданын табыңдар.



74-сурет

133. Қыры 8 см-ге тең $PABCDF$ дұрыс октаэдрінен P және F төбелері болатын, бүйір қырлары 4 см-ге тең екі тең дұрыс пирамида кесіп алынды. Шыққан көпжақтың толық бетінің ауданын табыңдар.

134. Ғаламтордан дұрыс додекаэдр мен икосаэдрдің жазбаларын тауып, олардың модельдерін жасаңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

135. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың бүйір бетінің ауданы 14,76 м^2, ал толық бетінің ауданы 18 м^2-ге тең. Пирамиданың апофемасын табыңдар.

136. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың бүйір жағы табан жазықтығымен $60°$ бұрыш жасайды. Табанына сырттай сызылған шеңбердің радиусы 2 дм-ге тең. Осы пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

137. Пирамиданың табаны – қабырғасы 20 дм-ге тең шаршы, ал шаршы төбелерінің бірі пирамида биіктігінің табаны болады. Пирамиданың биіктігі 15 дм-ге тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

138. $DABC$ пирамидасының табаны – қабырғалары $AC = 13$ м, $AB = 15$ м, $BC = 14$ м болатын үшбұрыш. Пирамиданың 9 м-ге тең DA бүйір қыры табан жазықтығына перпендикуляр. Пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

139. Пирамиданың табаны – диагональдары 6 м және 8 м-ге тең ромб. Пирамиданың 1 м-ге тең биіктігінің табаны – ромб диагональдарының қиылысу нүктесі. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

140. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамида табандарының қабырғалары 8 дм және 2 дм-ге, ал биіктігі 4 дм-ге тең. Пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

141. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамида табандарының қабырғалары 10 м және 9 м-ге, ал биіктігі 0,5 м-ге тең. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

142. а) Егер тетраэдрдің барлық жазық бұрыштары тең болса, онда ол дұрыс тетраэдр болатынын дәлелдеңдер.

ә) Егер октаэдрдің барлық қырлары тең болса, онда ол дұрыс октаэдр бола ма?

143. Қыры 8 см-ге тең дұрыс октаэдрдің диагоналінің ұзындығын табыңдар.

144. Әрқайсысының қыры 4 см-ге тең болатын кубтың, дұрыс октаэдрдің және дұрыс икосаэдрдің толық беттерінің аудандарын салыстырыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Көпжақтардың түрлері мен қасиеттерін ғалымдар көп ғасырлар бойы зерттеген. Дұрыс көпжақтар теориясымен ежелгі грек математиктері айналысқан, ол туралы ілімдер Евклидтің «Негіздерінің» XIII кітабында айтылған және ол геометрия «шыңы» болып саналған. Дұрыс көпжақтар «мінсіз фигуралар» деп аталған.

Ежелгі Грекияда болмыстың негізі деп төрт табиғат күші саналған: жер, су, ауа және от. Пифагорлықтар оларға, сәйкесінше, дұрыс тетраэдрдің, октаэдрдің, гексаэдрдің және икосаэдрдің пішінін берген.

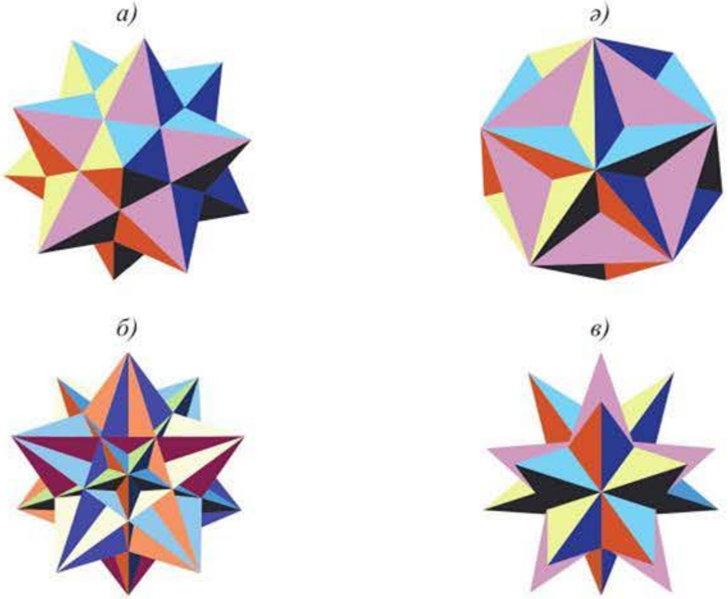
Ежелгі грек философы Платон (б. д. д. 429–348 жж.) бүкіл әлемге тұтастай дұрыс додекаэрдің пішінін берген болатын.

Ғаламторды пайдаланып:

а) ежелгі грек математиктері көпжақты қалай атағанын және ол сөздің тура мағынасы нені білдіргенін;

ә) 75-суретте бейнеленген дөңес емес дұрыс көпжақтар туралы мәліметтерді табыңдар;

б) көлбеу параллелепипед, дұрыс көпжақ пішінді ғимараттар немесе сәулет құрылыстары бар ма екенін анықтаңдар.



75-сурет

II. АЙНАЛУ ДЕНЕЛЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Бөлімді оқу нәтижесінде

- айналу денесі мен оның жазбасы ұғымдарын;
- цилиндрдің, конустың, қиық конустың, шардың жазықтықпен қимасын;
- цилиндрдің, конустың, қиық конустың, сфераның, шардың және олардың элементтерінің анықтамаларын;
- цилиндрдің, конустың, қиық конустың, шардың беттері аудандарының формулаларын **білу керек.**

- цилиндрді, конусты, қиық конусты, сфераны, шарды және олардың элементтерін жазықтықта кескіндей алу;
- цилиндрдің, конустың, қиық конустың, шардың жазықтықпен қималарын кескіндей алу;
- цилиндрдің, конустың, қиық конустың жазбаларын жасай білу;
- айналу денелерінің (цилиндр, конус, қиық конус, шар) элементтерін табуға берілген есептерді шығара алу;
- цилиндрдің, конустың, қиық конустың, шардың беттерінің аудандары формулаларын есептер шығаруда қолдана **алу керек.**

8. Цилиндр және оның элементтері. Цилиндрдің жазықтықпен қимасы

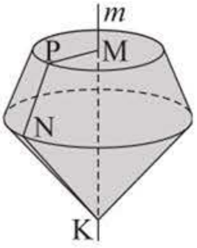
Тақырыпты оқу барысында:

• айналу денелерінің, цилиндрдің және оның элементтерінің анықтамаларын білесіңдер;

• цилиндрді және оның жазықтықпен қимасын кескіндейсіңдер;

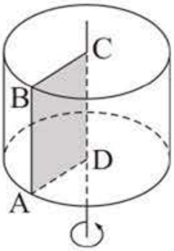
• цилиндр элементтерін табуға есептер шығарасыңдар.

Жазық фигураны түзуден айналдырғанда пайда болған дене айналу денесі деп аталады. Мұндағы түзу *айналу осі* деп аталады. Мысалы, *MPNK* төртбұрышын *m* осінен айналдырғанда, 76-суретте кескінделген айналу денесі шығады.



76-сурет

Цилиндр деп тіктөртбұрышты оның қабырғасынан айналдырғанда шығатын фигура аталады. Мысалы, 77-суретте *ABCD* тіктөртбұрышын оның *CD* қабырғасынан айналдырғанда шыққан цилиндрдің кескіні берілген. Бұл ретте оның *CB* мен *DA* қабырғалары параллель жазықтықтарда жататын тең дөңгелектер сызады. Осы дөңгелектер – цилиндрдің **табандары**. Айналу осін қамтитын түзу (немесе цилиндр табандарының центрлерін қосатын кесінді) **цилиндрдің осі** деп аталады. Цилиндрдің *CD* осіне параллель *AB* қабырғасы цилиндрдің **бүйір беті** деп аталатын бетті сызады.



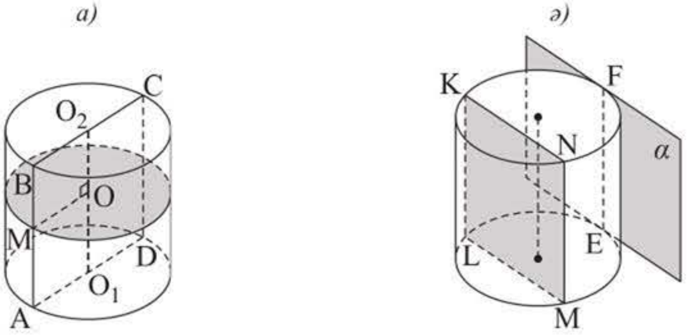
77-сурет

Цилиндрдің табандары мен бүйір бетінен тұратын фигура **цилиндрдің толық беті** деп аталады. Цилиндрдің бір табанының кез келген нүктесінен екінші табанына жүргізілген перпендикуляр цилиндрдің **биіктігі** деп аталады. Осы биіктіктің ұзындығын да цилиндрдің биіктігі деп атайды. Цилиндрдің биіктігі оның табан жазықтықтарының арақашықтығына тең. *AB* кесіндісі және бүйір жағының *CD* осіне параллель әрбір кесіндісі – цилиндрдің **жасаушылары**.

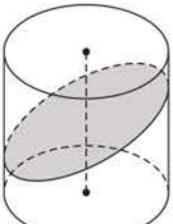
Цилиндрдің осіне перпендикуляр қимасы оның табанына тең дөңгелек болады (78, *а*-сурет). Бұл цилиндрдің *AB* жасаушысының кез келген *M* нүктесі оның осінен цилиндр табанының радиусына тең қашықтықта болатынынан шығады.

Цилиндрдің табанына перпендикуляр қимасы тіктөртбұрыш болады (мысалы, 78-суреттегі *ABCD* және *MNKL*). Мұны өздігінен негіздеңдер.

Цилиндрдің табанына перпендикуляр және оның центрінен өтетін қима оның **осьтік қимасы** деп аталады (мысалы, 78, *а*-суреттегі *ABCD* тіктөртбұрышы). Осьтік қимасы шаршы болатын цилиндр **теңқабырғалы цилиндр** деп аталады.



78-сурет

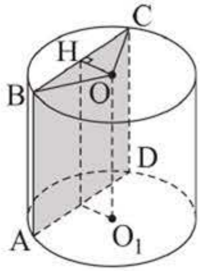


79-сурет

Цилиндрдің жасаушысын қамтитын және цилиндрмен одан басқа ортақ нүктесі болмайтын жазықтық *цилиндрге жанама жазықтық* деп аталады (78, *ә*-суреттегі α жазықтығы).

Цилиндрдің бүйір бетінің оның табанына параллель емес жазықтықпен қимасы эллипс болады (79-сурет). Мысалы, цилиндр пішінді көлбеу стақандағы судың беті шекарасы эллипс болатын фигураны құрайды.

Е с е п. Цилиндрдің биіктігі 8 см-ге, ал табанының радиусы 5 см-ге тең. Оның осіне параллель шаршы болатын қимасы жүргізілген. Цилиндрдің осі мен осы қима жазықтығының арасындағы қашықтықты табу керек.



80-сурет

Ш е ш у і. *ABCD* шаршысы – берілген қима, ал OO_1 түзуі цилиндрдің осі болсын (80-сурет). Сонда *OBC* үшбұрышының *OH* биіктігі ізделінді қашықтық болады, себебі ол OO_1 түзуі мен оған параллель *ABCD* жазықтығының арақашықтығы. Шарт бойынша $AB = BC = 8$ см, демек, $BH = HC = 4$ см, ал $OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см).

Ж а у а б ы. 3 см.

СҰРАҚТАР

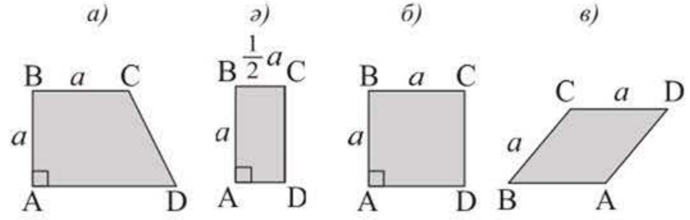
1. Цилиндр дегеніміз не?
2. Цилиндрдің жасаушысы, табаны, биіктігі деп нені атайды?

3. Цилиндрдің бүйір беті және толық беті деп нені атайды?
4. Цилиндрдің осьтік қимасы дегеніміз не?
5. Қандай цилиндрді теңқабырғалы цилиндр деп атайды?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

145. 81-суреттегі қай төртбұрышты AB қабырғасынан айналдырғанда теңқабырғалы цилиндр шығады?



81-сурет

146. а) Теңқабырғалы цилиндрдің осьтік қимасының диагоналі $16\sqrt{2}$ см-ге тең. Цилиндр табанының радиусы неге тең?

ә) Цилиндрдің осьтік қимасының диагоналі оның жасаушысымен $30°$ бұрыш жасайды, ал табанының диаметрі $4\sqrt{3}$ см-ге тең. Цилиндрдің биіктігін табыңдар.

147. а) Цилиндр табанының радиусы 2,6 см-ге, ал жасаушысы 4,8 см-ге тең. Цилиндр осіне параллель қимасы – шаршы цилиндр осінен қандай қашықтықта орналасқан?

ә) Цилиндрдің осіне параллель және одан 8 см қашықтықта орналасқан жазықтықпен қимасы – ауданы 144 см^2-ге тең шаршы. Цилиндр табанының радиусын табыңдар.

148. а) Цилиндрдің биіктігі 20 см-ге, ал табанының радиусы 5 см-ге тең. Цилиндр осіне параллель және одан 1,4 см қашықтықта жатқан жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

ә) Цилиндр табанының радиусы 7 см. Цилиндрдің осіне параллель және одан 3 см қашықтықта жататын, ауданы 320 см^2-ге тең қима жазықтық жүргізілген. Цилиндрдің биіктігін табыңдар.

149. Шаршыны 15 см-ге тең қабырғасынан айналдырып, цилиндр алынған. Цилиндрдің осіне параллель жазықтықпен қимасының ауданы 270 см^2-ге тең. Цилиндр осінен қима жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

В деңгейі

150. Цилиндр табанының радиусы 12 см-ге тең. Цилиндрдің осьтік қимасынан оған параллель және ауданы оның ауданынан екі есе аз болатын қимасына дейінгі қашықтықты табыңдар.

151. Цилиндрдің екі жасаушысы арқылы оның табан шеңберінен 300°-қа тең доғаны қиятын жазықтық жүргізілген. Егер цилиндрдің биіктігі 1 м-ге, табанының радиусы 1 дм-ге тең болса, цилиндрдің осы жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

152. Цилиндрдің жасаушысы – оның аудандары 15 $дм^2$-ге және 8 $дм^2$-ге тең екі перпендикуляр қимасының ортақ қабырғасы. Егер цилиндрдің биіктігі 5 дм-ге тең болса, оның осьтік қимасының ауданын табыңдар.

153. Жазықтық цилиндр табандарын 12 см-ге және 16 см-ге тең хордалармен қиып өтеді. Хордалардың арақашықтықтары 18 см-ге тең. Егер цилиндр табанының радиусы 10 см-ге тең болса, оның биіктігін табыңдар.

9. Цилиндрдің жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары

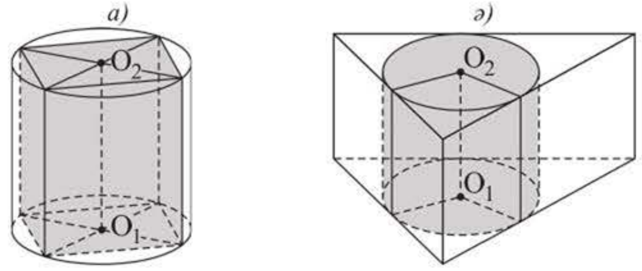
Тақырыпты оқу барысында:

• цилиндрдің бүйір және толық беті аудандарының формулаларын білесіңдер;

• сол формулаларды есептер шығаруда қолданасыңдар.

Егер призманың табандары цилиндрдің табандарына іштей сызылған болса, *призма цилиндрге іштей сызылған* (ал цилиндр призмаға сырттай сызылған) деп аталады. Табанын цилиндрдің табанына іштей сызуға болатын тік призманы ғана цилиндрге іштей сызуға болады. Мысалы, 82, *а*-суретте цилиндрге іштей сызылған тікбұрышты параллелепипед кескінделген.

Егер призманың табандары цилиндрдің табандарына сырттай сызылған болса, призма *цилиндрге сырттай сызылған* (ал цилиндр призмаға іштей сызылған) деп аталады. Табанын цилиндрдің табанына сырттай сызуға болатын тік призманы ғана цилиндрге сырттай сызуға болады. Мысалы, 82, *ә*-суретте үшбұрышты тік призма цилиндрге сырттай сызылған.

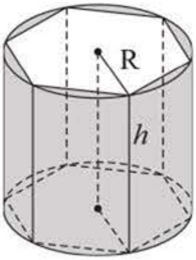


82-сурет

Цилиндрдің бүйір бетінің ауданына оған іштей сызылған дұрыс призманың табан қабырғаларының санын шексіз өсіргенде призманың бүйір бетінің ауданы ұмтылатын шама алынады.

Т е о р е м а. **Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы табан шеңберінің ұзындығы мен оның биіктігінің көбейтіндісіне тең: $S_{б.б.} = 2\pi Rh$**, мұндағы R – табанының радиусы, h – цилиндрдің биіктігі.

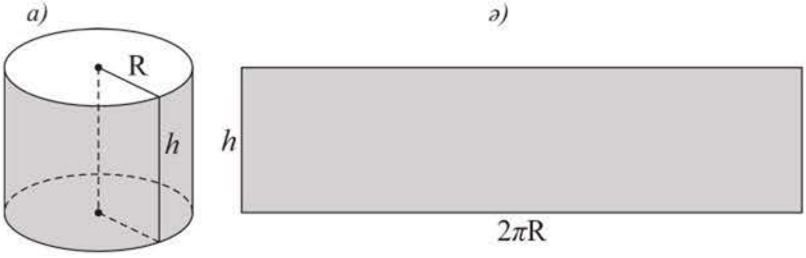
Д ә л е л д е у і. Цилиндрге іштей дұрыс n-бұрышты призма сызайық (83-сурет). Оның биіктігі цилиндрдің биіктігіне, ал осы призманың бүйір бетінің ауданы оның табанының периметрі мен биіктігінің көбейтіндісіне тең. Призманың табаны шеңберге іштей сызылған дұрыс көпбұрыш болғандықтан, оның табан қабырғаларының санын шексіз өсіргенде көпбұрыштың периметрі шеңбердің $2\pi R$ ұзындығына ұмтылады. Сонда призманың бүйір бетінің ауданы $2\pi Rh$-қа тең шамаға ұмтылады. Демек, цилиндрдің бүйір бетінің ауданы $S_{б.б.} = 2\pi Rh$ болады.



83-сурет

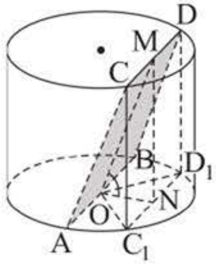
Цилиндрдің толық бетінің ауданы деп оның бүйір бетінің ауданы мен табандары аудандарының қосындысы аталады. **Цилиндрдің толық бетінің ауданы табан шеңберінің ұзындығын табанының радиусы мен цилиндр биіктігінің қосындысына көбейткенге тең: $S_{т.б.} = 2\pi R(R + h)$.**

Егер цилиндрді оның бүйір бетінің (84, *а*-сурет) жасаушысы бойымен қиып, барлық жасаушылары бір жазықтықта жататындай етіп жазсақ, онда цилиндрдің бүйір бетінің *жазбасы* деп аталатын тіктөртбұрышты аламыз (84, *ә*-сурет).



84-сурет

Е с е п. Цилиндрдің төменгі табанының центрі арқылы өтетін жазықтық оған 60° бұрышпен көлбеген. Осы жазықтық цилиндрдің жоғарғы табанын 90°-тық доғаны керетін, ұзындығы 10 см-ге тең хорда бойымен қияды. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табу керек.



85-сурет

Ш е ш у і. Қима жазықтық цилиндрдің табандарын AB және CD хордалары бойымен қиятын болсын, сонда $AB \parallel CD$ (85-сурет). $C_1D_1 = CD$ хордасын салайық және N мен M нүктелері осы хордалардың орталары болсын. Сонда MN – цилиндрдің биіктігі, OD_1 – табанының радиусы, $\angle MOH = 60°$, $\angle C_1OD_1 = 90°$. Тікбұрышты C_1OD_1 мен MON үшбұрыштарынан $ON = ND_1 = 5$ см, $OD_1 = 5\sqrt{2}$ см, $MN = ON \cdot \operatorname{tg} 60° = 5\sqrt{3}$ см шығады. Сонда цилиндрдің бүйір бетінің ауданы: $S_{б.б.} = 2\pi \cdot OD_1 \cdot MN =$ $= 2\pi \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = 50\pi\sqrt{6}$ (см^2).

Ж а у а б ы. $50\pi\sqrt{6}$ см^2.

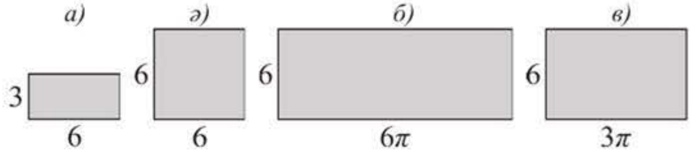
СҰРАҚТАР

1. Цилиндр бетінің ауданы деп нені атайды?
2. Цилиндрдің бүйір бетінің және толық бетінің аудандарын қандай формулалармен табуға болады?
3. Цилиндрдің бүйір бетінің жазбасы не болып табылады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

154. 86, *а*, *ә*, *б*, *в*-суреттерінің қайсысы табанының радиусы 3-ке, жасаушысы 6-ға тең цилиндрдің бүйір беті жазбасының кескіні болатынын көрсетіңдер:



86-сурет

155. Бүйір бетінің ауданы табандары аудандарының қосындысына тең цилиндр бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

156. Қабырғалары 6 см-ге және 8 см-ге тең тіктөртбұрышты оның: а) кіші қабырғасынан; ә) үлкен қабырғасынан айналдырғанда шыққан дененің толық бетінің ауданын табыңдар.

157. Цилиндрдің осьтік қимасының диагоналі $10\sqrt{2}$ см-ге тең және жасаушымен 45° бұрыш жасайды. Цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

158. Цилиндр табанының ауданы π дм^2-ге, ал осьтік қимасының ауданы 2 дм^2-ге тең. Цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

159. Теңқабырғалы цилиндрдің толық бетінің ауданы: а) 12π м^2-ге; ә) қыры 2 м-ге тең куб бетінің ауданына тең болса, оның табанының радиусы қандай болуы керек?

160. Бүйір бетінің ауданы 16π дм^2-ге тең теңқабырғалы цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

В деңгейі

161. Өлшемдері $\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ дм және $\sqrt{\frac{24}{\pi}}$ дм тіктөртбұрыш – әртүрлі екі цилиндрдің бүйір беттерінің жазбасы. Олардың толық беттері аудандарының айырымын табыңдар.

162. Цилиндрдің: а) бүйір бетінің жазбасы – қабырғасы 1 дм-ге тең шаршы; ә) бүйір беті жазбасының диагоналі жасаушымен 60°-қа тең бұрыш жасайды, ал цилиндрдің биіктігі 2 дм-ге тең болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

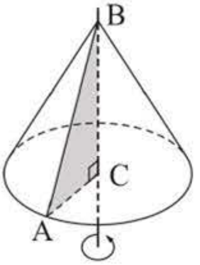
163. Цилиндрдің осіне параллель жазықтықпен қимасы оның табанындағы шеңберден 90°-қа тең доғаны қияды. Қиманың диагоналі цилиндрдің 4 см-ге тең радиусынан екі есе үлкен. Цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

164. Биіктігі 30 см-ге тең теңқабырғалы цилиндр пішіндес 20 шелек жасау үшін, оның тігісіне бүйір бетінің ауданының 1 %-ы кететін болса, 9 $м^2$ қаңылтыр жете ме?

10. Конус және оның элементтері. Конустың жазықтықпен қимасы

Тақырыпты оқу барысында:
• конустың анықтамасын, оның элементтерін білесіңдер;
• конусты және оның жазықтықпен қимасын кескіндейсіңдер;
• конус элементтерін табуға есептер шығарасыңдар.

Тікбұрышты үшбұрышты оның катетінен айналдырғанда шығатын дене конус деп аталады. Конустың айналу осін қамтитын түзу (немесе оның төбесін табанының центрімен қосатын кесінді) **конустың осі** деп аталады. Мысалы, 87-суретте тікбұрышты ΔABC-ны оның BC катетінен айналдырғанда шыққан конустың кескіні берілген. B нүктесі **конустың төбесі** деп аталады. BA гипотенузасы конустың **жасаушысы** деп аталып, оның **бүйір бетін** сызады. CA катеті конустың **табаны** – дөңгелекті сызады. Конустың төбесінен оның табан жазықтығына жүргізілген перпендикуляр конустың **биіктігі** деп аталады. Осы кесіндінің ұзындығы да конустың биіктігі деп аталады. Конустың бүйір беті мен табанының бірігуінен тұратын фигура конустың **толық беті** деп аталады.

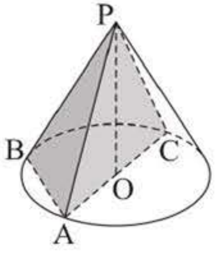


87-сурет

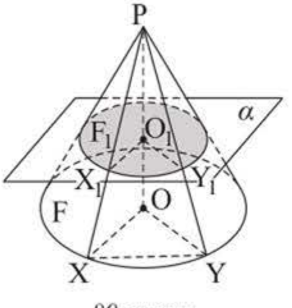
Конустың төбесін қамтитын барлық қималары теңбүйірлі үшбұрыштар болады (мысалы, 88-суреттегі ΔPAB немесе ΔPAC).

Конустың төбесі мен табанының центрін қамтитын қимасы конустың **осьтік қимасы** деп аталады. Осьтік қимасы теңқабырғалы үшбұрыш болатын конус **теңқабырғалы конус** деп аталады.

Конустың табанына параллель жазықтықпен қимасы дөңгелек болады.



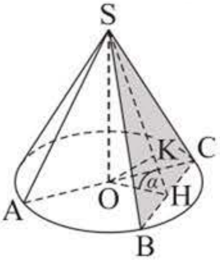
88-сурет



89-сурет

Шынымен де, конустың F табанының қайсыбір X нүктесіне PX кесіндісі мен қима жазықтығының қиылысу нүктесі – X_1, ал Y нүктесіне Y_1 нүктесі сәйкес келетін болсын (89-сурет). Сонда тікбұрышты PO_1X_1 мен POX үшбұрыштарының ұқсастығынан $\frac{X_1Y_1}{XY} = \frac{PO_1}{PO} = k$ шығады, мұндағы k – тұрақты сан. Конустың F табанының кез келген X және Y нүктелері мен F_1 қимасының оларға сәйкес келетін нүктелері үшін $\frac{X_1Y_1}{XY} = k$ теңдігі ақиқат болатындықтан, $F_1 \sim F$. Демек, конустың табанына параллель жазықтықпен қимасы дөңгелек болады.

Е с е п. Теңқабырғалы конустың төбесі мен табанының хордасы арқылы өтетін жазықтық табанымен 60° бұрыш жасайды. Конустың жасаушысы l-ге тең болса, оның табанының центрінен осы жазықтыққа дейінгі қашықтықты табу керек.



90-сурет

Ш е ш у і. ΔSBC конустың көрсетілген жазықтықпен қимасы, ал ΔASC оның осьтік қимасы болсын, сонда $AS = SC = AC = l$ болады (90-сурет). Конустың биіктігі $SO = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. SBC жазықтығының табанына көлбеулік бұрышы SHO-ға тең, мұндағы H – BC хордасының ортасы, ал O нүктесінен SBC жазықтығына дейінгі қашықтық – ΔSOH-тың OK биіктігі (неге екенін түсіндіріңдер). ΔOKH-тан $OK = OH \cdot \sin\alpha$ болғандықтан, ΔSOH-тан $OH = SO \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$ болады, бұдан $OK = SO \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \sin\alpha = SO \cdot \cos\alpha = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{4}$.

Ж а у а б ы. $\frac{l\sqrt{3}}{4}$.

СҰРАҚТАР

1. Конус дегеніміз не?
2. Конустың төбесі, жасаушысы, табаны, биіктігі деп нені атайды?
3. Конустың бүйір беті және толық беті дегеніміз не?
4. Конустың осьтік қимасы дегеніміз не?
5. Қандай конус теңқабырғалы конус деп аталады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

165. Конус табанының нүктесі мен биіктігінің ортасы арқылы түзу жүргізіп, оның конустың бүйір бетімен қиылысу нүктесін белгілеңдер.

166. Табанының радиусы 12 см-ге тең конустың табанына параллель және биіктігін тең үш бөлікке бөлетін екі қима жүргізілген. Осы қималардың аудандарын табыңдар.

167. Егер конустың осьтік қимасы: а) гипотенузасы 12 см-ге тең тікбұрышты үшбұрыш; ә) ауданы $16\sqrt{3}$ см^2-ге тең, ал бұрыштарының бірі 120°-қа тең үшбұрыш болса, конустың биіктігі мен жасаушысын табыңдар.

168. Конустың төбесі арқылы табан жазықтығымен тең бұрыш жасайтын екі жазықтық жүргізілген. Конустың осы жазықтықтармен жасайтын қималары тең болады деген ақиқат па? Жауабын түсіндіріңдер.

169. а) Конустың осьтік қимасының екі қабырғасы 4 см және 8 см. Конустың төбесі арқылы өтіп, табанынан 60° доғаны қиятын жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

ә) Конустың осьтік қимасының бір бұрышы 90°-қа тең. Конус табанының $4\sqrt{3}$ см-ге тең хордасы 120°-қа тең доғаны кереді. Конустың төбесі мен осы хорда арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

В деңгейі

170. Конустың осьтік қимасы мен биіктігінің ортасы арқылы табанына параллель жүргізілген қимасының аудандары, сәйкесінше, 48 см^2 және 9π см^2. Конустың жасаушысы мен табан жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

171. Теңқабырғалы конус табанының радиусы 10 см-ге тең. Конустың осьтік қимасының ауданы оның табанына параллель жазықтықпен қимасының ауданына тең болса, сол қиманың радиусын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

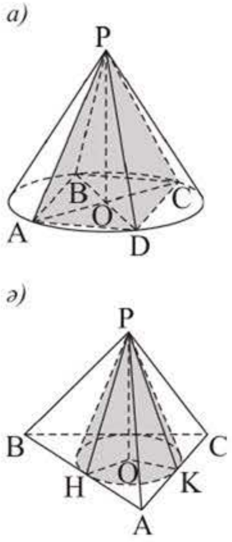
172. Конус табанының радиусы 6 см-ге тең, ал оның жасаушысы табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. Конустың биіктігі оның төбесі арқылы өтетін жазықтықпен 30° бұрыш жасайтын болса, осы қиманың ауданын табыңдар.

11. Конустың жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары

Тақырыпты оқу барысында:

• конустың бүйір және толық беті аудандарының формулаларын білесіңдер;

• сол формулаларды есептер шығаруда қолданасыңдар.



91-сурет

Егер пирамиданың төбесі конустың төбесімен беттессе, ал пирамиданың табаны конустың табанына іштей сызылған көпбұрыш болса, онда *пирамида конусқа іштей сызылған* (ал конус пирамидаға сырттай сызылған) деп аталады. Конусқа бүйір қырлары тең кез келген пирамиданы іштей сызуға болады (91, *а*-сурет). Бұл ретте пирамиданың бүйір қырлары конустың жасаушылары болады.

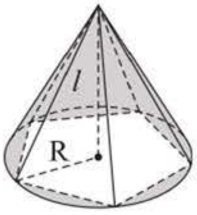
Егер пирамиданың төбесі конустың төбесімен беттессе, ал пирамиданың табаны конустың табанына сырттай сызылған болса, онда *пирамида конусқа сырттай сызылған* (ал конус пирамидаға іштей сызылған) деп аталады. Бұл ретте пирамиданың барлық бүйір жақтарының жазықтықтары конустың бүйір бетімен жанасады (91, *ə*-сурет).

Конустың бүйір бетінің ауданы ретінде оған іштей сызылған дұрыс пирамиданың табан қабырғаларының санын шексіз өсіргенде пирамиданың бүйір бетінің ауданы ұмтылатын шама алынады.

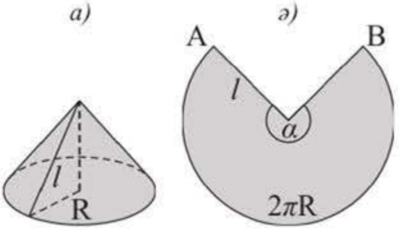
Теорема. **Конустың бүйір бетінің ауданы табан шеңбері ұзындығының жартысы мен жасаушысының көбейтіндісіне тең:** $S_{б.б.} = \pi Rl$, мұндағы R – конус табанының радиусы, l – жасаушысының ұзындығы.

Дәлелдеуі. Конусқа іштей дұрыс n-бұрышты пирамида салайық (92-сурет). Осы пирамиданың бүйір бетінің ауданы табанының жарты периметрі мен оның апофемасының көбейтіндісіне тең. Пирамиданың табан қабырғасының n санын шексіз өсіргенде, оның бүйір бетінің ауданы πRl-ге тең шамаға ұмтылады. Демек конустың бүйір бетінің ауданы $S_{б.б.} = \pi Rl$.

Егер конустың бүйір бетін оның жасаушысы бойымен қиып (93, *а*-сурет), барлық жасаушылары бір жазықтықта жататындай етіп жазсақ, онда конустың бүйір бетінің жазбасы деп аталатын дөңгелек сектор шығады (93, ə-сурет).



92-сурет



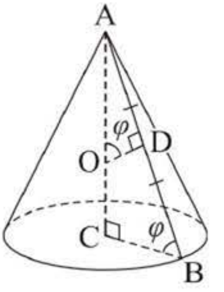
93-сурет

Конустың бүйір беті жазбасының ауданы конустың бүйір бетінің ауданына тең. Сектор ауданының формуласы бойынша $\boldsymbol{S_{б.б.}} = \frac{\pi l^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$, мұндағы l – жасаушының ұзындығы, α – AB доғасының градустық өлшемі немесе оның центрлік бұрышының өлшемі.

Конустың толық бетінің ауданы деп оның бүйір бетінің және табанының аудандарының қосындысын айтады. Конустың толық бетінің ауданы: $\boldsymbol{S_{т.б.} = \pi R(R + l)}$, R – конус табанының радиусы, l – жасаушысының ұзындығы.

Е с е п (конустың бүйір бетінің ауданы туралы). Конустың бүйір бетінің ауданы $\boldsymbol{S_{б.б.} = 2\pi hd}$ болатынын дәлелдеңдер, мұндағы h – конустың биіктігі, d – конус жасаушысына жүргізілген, бір ұшы жасаушыда, екіншісі – конустың осінде жататын орта перпендикуляр кесіндісінің ұзындығы.

Д ә л е л д е у і. $S_{б.б.} = \pi Rl$, мұндағы $l = 2AD$, $R = BC$ (94-сурет). AB жасаушысына жүргізілген орта перпендикулярдың кесіндісі $DO = d$, конустың биіктігі $AC = h$. ABC мен AOD үшбұрыштары ұқсас болғандықтан, $\angle ABC = \angle AOD = \varphi$, сонда $BC = AC \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi = h \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi$, $AD = DO \cdot \mathrm{tg}\,\varphi = d \cdot \mathrm{tg}\,\varphi$. Демек, $S_{б.б.} = 2\pi \cdot BC \cdot AD = 2\pi h \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot d \cdot \mathrm{tg}\,\varphi = 2\pi hd$.



94-сурет

СҰРАҚТАР

1. Конустың толық бетінің ауданы деп нені айтады?
2. Конустың бүйір бетінің және толық бетінің аудандарын қандай формулалармен табуға болады?
3. Конустың бүйір бетінің жазбасы не болып табылады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

173. а) Конустың бүйір бетінің ауданы табанының ауданына тең болуы мүмкін бе? ә) Цилиндр мен конустың табандарының радиустары мен биіктіктері тең. Олардың бүйір беттерінің аудандары тең болуы мүмкін бе?

174. Теңқабырғалы конустың табанының, бүйір бетінің және толық бетінің аудандары қандай қатынаста болады?

175. Егер конустың: а) биіктігі 8 дм-ге, ал табанының радиусы 6 дм-ге тең болса; ә) жасаушысы табан жазықтығымен 45° бұрыш жасаса, ал биіктігі 4 дм-ге тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

176. Мұнараның шатыры конус пішіндес. Шатырдың биіктігі 1,5 м, ал мұнара табанының диаметрі 4 м. Шатыр бетінің ауданын 0,1 $м^2$-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

177. а) Бүйір бетінің жазбасы жарты дөңгелек болатын конустың осьтік қимасының төбесіндегі бұрышты табыңдар.
ә) Конустың бүйір бетінің ауданы оның табанының ауданынан үш есе үлкен. Конус жасаушысының табан жазықтығына көлбеулік бұрышын табыңдар.

178. Сектордың радиусы 6 дм, ал бұрышы 120°. Секторды орап, конустық бет жасаған. Конус табанының радиусын табыңдар.

В деңгейі

179. Егер конустың: а) толық бетінің ауданы 27π, ал бүйір бетінің ауданы 18π; ә) жасаушысы 5 см, ал толық бетінің ауданы 24π $см^2$ болса, оның бүйір беті жазбасының центрлік бұрышын табыңдар.

180. Конус тәрізді қаңылтыр құйғыштың табан диаметрі 10 см, ал биіктігі 12 см болуы керек. Оның дайындамасының өлшемдерін (конустың бүйір бетінің жазбасы секторының бұрышы мен радиусын) табыңдар.

181. Конустың биіктігі 6 дм, ал бүйір бетінің ауданы табанының ауданынан екі есе үлкен болса, оның осьтік қимасының ауданын табыңдар.

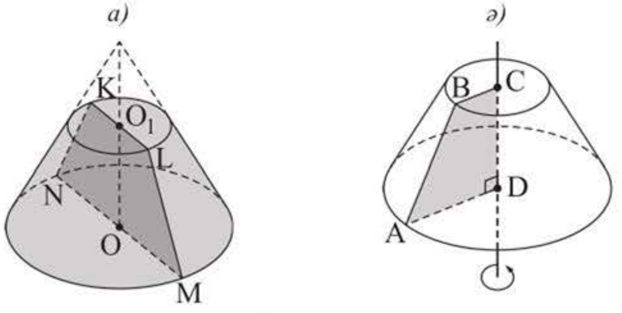
182. а) Бүйір қабырғасы 8 см, табанындағы бұрышы 60° болатын теңбүйірлі үшбұрышты бүйір қабырғасынан; ә) катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрышты гипотенузасынан айналдырғанда шығатын айналу денесі бетінің ауданын табыңдар.

12. Қиық конус және оның элементтері

Тақырыпты оқу барысында:

- қиық конустың анықтамасын, оның элементтерін білесіңдер;
- қиық конусты және оның жазықтықпен қимасын кескіндейсіңдер;
- қиық конус элементтерін табуға есептер шығарасыңдар.

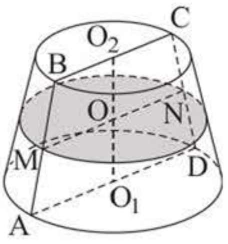
Конустың табаны мен осы табанына параллель жазықтықпен қимасының арасындағы бөлігі қиық конус деп аталады (95, *а*-сурет). Бұл ретте конустың табаны мен оның көрсетілген жазықтықпен қимасы қиық конустың **табандары** деп аталады. Қиық конустың бір табанының кез келген нүктесінен екінші табан жазықтығына жүргізілген перпендикуляр қиық конустың **биіктігі** деп аталады. Осы перпендикулярдың ұзындығы да қиық конустың биіктігі деп аталады. Конустың жасаушысында жататын және ұштары қиық конус табандарының шеңберлерінде болатын кесінді қиық конустың **жасаушысы** деп аталады. Қиық конустың екі жасаушысын қамтитын кез келген қимасы теңбүйірлі трапеция болады. Қиық конустың барлық жасаушыларынан тұратын фигура оның *бүйір беті* деп, ал табандары мен бүйір бетінің бірігуінен тұратын фигура *қиық конустың толық беті* деп аталады.



95-сурет

Қиық конусты тікбұрышты трапецияны оның кіші бүйір қабырғасынан айналдыру арқылы алуға болады. Мысалы, 95, *ә*-суретте тікбұрышты *ABCD* трапециясын оның кіші *CD* бүйір қабырғасынан айналдырғанда шыққан қиық конустың кескіні берілген. Трапецияның *BC* мен *AD* табандары қиық конус табандарының дөңгелектерін, ал *AB* кесіндісі оның бүйір бетін сызады. Қиық конус табандарының центрлерінен өтетін түзуді (немесе осы центрлерді қосатын кесіндіні) қиық конустың **осі** деп атайды. Қиық конустың осін қамтитын кез келген қима қиық конустың **осьтік қимасы** деп аталады. 95, *а*-суреттегі *MNKL* теңбүйірлі трапециясы – қиық конустың осьтік қимасы.

Е с е п. Қиық конус табандарының аудандары 4 см^2 және 16 см^2. Оның биіктігінің ортасы арқылы қиық конустың табандарына параллель жазықтық жүргізілген. Конустың осы жазықтықпен қимасының ауданын табу керек.



96-сурет

Ш е ш у і. Көрсетілген қима – диаметрі қиық конустың осьтік қимасы болатын *ABCD* трапециясының *MN* орта сызығына тең дөңгелек (96-сурет). $MN = 0{,}5(AD + BC) = AO_1 + BO_2$. Есептің шарты бойынша $4 = \pi \cdot BO_2^2$, $16 = \pi \cdot AO_1^2$ болғандықтан, $BO_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $AO_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$. Демек, $MN = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, $MO = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$. Сонда $S_{\text{қима}} = \pi \cdot MO^2 = \pi \cdot \frac{9}{\pi} = 9$ (см^2).

Ж а у а б ы. 9 см^2.

СҰРАҚТАР

1. Қиық конус дегеніміз не?
2. Қиық конустың жасаушысы, табандары, биіктігі деп нені атайды?
3. Қиық конустың бүйір беті және толық беті дегеніміз не?
4. Қиық конустың осьтік қимасы дегеніміз не?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

183. Табандарының радиустары 8 см-ге және 14 см-ге, ал жасаушысы 10 см-ге тең қиық конустың осьтік қимасының ауданын табыңдар.

184. Табандарының радиусы 3 м және 6 м-ге тең, ал жасаушысы табанына: а) 45°; ә) 30° бұрышпен көлбеген қиық конустың биіктігін табыңдар.

185. а) Жоғарғы табаны үлкен болатын қиық конус пішіндес шелектің жасаушысы 2,5 дм, ал табандарының радиустары 1,7 дм және 1 дм. Шелектің биіктігін табыңдар.

ә) Қиық конустың биіктігі $\sqrt{30}$ дм-ге тең, ал табандарының аудандары 6π дм^2 және 24π дм^2. Қиық конус жасаушысының ұзындығын табыңдар.

186. Қиық конустың осьтік қимасының ауданы 32 см^2-ге, биіктігі жоғарғы табанының диаметріне тең, ал жасаушысы табан жазықтығымен 45°

бұрыш жасайды. Қиық конустың: а) табандарының радиустарын; ә) жасаушысын табыңдар.

187. а) Биіктігі 12 см-ге, төменгі табанының радиусы 8 см-ге, ал жасаушысы мен табанының арасындағы бұрыштың тангенсі 2,4-ке тең қиық конус берілген. Осы қиық конустың жоғарғы табанының ауданын табыңдар.

ә) Қиық конустың 16 см-ге тең жасаушысы табанына 60° бұрышпен көлбеген. Қиық конус табандарының радиустарының қатынасы 3-ке тең болса, осы радиустарды табыңдар.

188. Жасаушысы 20 см, жоғарғы табанының диаметрі 8 см, биіктігі 16 см болатын қиық конус пішіндес қалпақ тігілген. Басының айналымы 1 м-ге тең аққалаға осы қалпақ келе ме?

В деңгейі

189. Биіктігі 5 м-ге, табанының радиустары 0,25 м және 0,09 м-ге тең қиық конус пішіндес бөренені биіктіктері тең үш бөлікке бөлді. Сонда шыққан қиық конус жасаушыларының ұзындықтарын 0,01 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

190. Қиық конустың 8 см-ге тең жасаушысы оның төменгі табанымен 60°-қа тең бұрыш жасайды. Оның осьтік қимасының диагоналін қамтитын түзу осы бұрышты қақ бөледі. Қиық конус табандарының радиустарын табыңдар.

191. а) Конустан қиып алынған қиық конустың табандарының радиустары 18 см, 15 см және жасаушысы 9 см. Бастапқы конус жасаушысының ұзындығын табыңдар.

ә) Конустың биіктігі $\sqrt{2}$ м-ге тең. Конустан оның табанына параллель жазықтықпен қиып алынған қиық конустың табандары аудандарының қатынасы 1 : 2 болуы үшін, қима жазықтықты конустың төбесінен қандай қашықтықта жүргізу керек?

13. Қиық конус бетінің ауданы

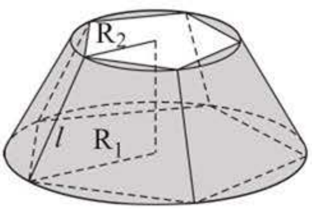
Тақырыпты оқу барысында:

• қиық конустың бүйір және толық беті аудандарының формулаларын білесіңдер;

• сол формулаларды есептер шығаруда қолданасыңдар.

Қиық конустың бүйір бетінің ауданы ретінде оған іштей сызылған дұрыс қиық пирамиданың табандары қабырғаларының санын шексіз өсіргенде қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданы ұмтылатын шама алынады.

Теорема. **Қиық конустың бүйір бетінің ауданы табан шеңберлерінің ұзындықтары қосындысының жартысы мен жасаушысының көбейтіндісіне тең:** $\boldsymbol{S_{б.б.} = \pi(R_1 + R_2) \cdot l}$, мұндағы R_1, R_2 – қиық конус табандарының радиустары, l – жасаушысының ұзындығы.

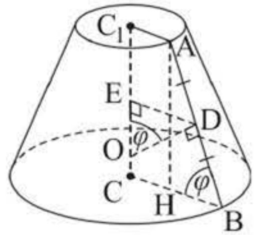


97-сурет

Дәлелдеуі. Қиық конусқа іштей дұрыс n-бұрышты қиық пирамида сызайық (97-сурет). Қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданы табандарының жарты периметрлерінің қосындысы мен апофемасының көбейтіндісіне тең. Қиық пирамида табандарының қабырғаларының n санын шексіз өсіргенде, оның табандарының периметрлері $2\pi R_1$ және $2\pi R_2$ шамаларына, ал қиық пирамида апофемасының ұзындығы қиық конус жасаушысының ұзындығына ұмтылады. Сонда оның бүйір бетінің ауданы $\pi l(R_1 + R_2)$ шамасына ұмтылады. Демек, қиық конустың бүйір бетінің ауданы $S_{б.б.} = \pi l(R_1 + R_2)$ болады.

Қиық конустың толық бетінің ауданы деп оның бүйір бетінің және табандары аудандарының қосындысын айтады. Қиық конустың толық бетінің ауданы: $\boldsymbol{S_{т.б.} = \pi R_1^2 + \pi l(R_1 + R_2) + \pi R_2^2}$, мұндағы R_1, R_2 – қиық конус табандарының радиустары, l – жасаушысының ұзындығы.

Есеп (қиық конустың бүйір бетінің ауданы туралы). Қиық конустың бүйір бетінің ауданы $\boldsymbol{S_{б.б.} = 2\pi hd}$ болатынын дәлелдеңдер, мұндағы h – қиық конустың биіктігі, d – қиық конус жасаушысына жүргізілген, бір ұшы жасаушыда, екіншісі қиық конустың осінде жататын орта перпендикуляр кесіндісінің ұзындығы.



98-сурет

Дәлелдеуі. $S_{\text{к.к.б.б.}} = \pi \cdot l \cdot (R_1 + R_2)$, мұндағы $l = AB$, $R_1 = BC$, $R_2 = AC_1$ (98-сурет). AB жасаушысына жүргізілген орта перпендикулярдың кесіндісі $DO = d$, қиық конустың биіктігі $CC_1 = h$. $AH \perp BC$ және $DE \perp CC_1$ жүргіземіз, сонда $\angle ABC = \angle DOE = \varphi$ (қабырғалары өзара перпендикуляр бұрыштар ретінде) және $AH = CC_1 = h$. ΔABH-тан $AB = \dfrac{AH}{\sin\varphi} = \dfrac{h}{\sin\varphi}$ аламыз. $ABCC_1$ трапециясы орта сызығының қасиеті бойынша $BC + AC_1 = 2DE$. DOE үшбұрышынан $DE = DO \cdot \sin\varphi = d \cdot \sin\varphi$ аламыз. Демек, $S_{\text{к.к.б.б.}} = \pi \cdot AB \cdot 2DE = \pi \cdot \dfrac{h}{\sin\varphi} \cdot 2d \cdot \sin\varphi = 2\pi hd$.

СҰРАҚТАР

1. Қиық конустың толық бетінің ауданы дегеніміз не?
2. Қиық конустың бүйір бетінің және толық бетінің аудандарын қандай формулалармен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

192. Табандары 4 см, 10 см және бүйір қабырғасы 5 см болатын теңбүйірлі трапеция өзінің симметрия осінен айналдырылған. Айналу денесі бетінің ауданын табыңдар.

193. Қиық конустың 6 см-ге тең жасаушысы төменгі табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайды. Қиық конустың жоғарғы табанының диаметрі 10 см-ге тең болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

194. Қиық конус табандарының аудандары 4π см^2-ге және 100π см^2-ге тең, ал осьтік қимасының ауданы 180 см^2. Қиық конустың толық бетінің ауданын табыңдар.

195. Қиық конустың жасаушысы 10 см-ге, биіктігі 8 см-ге, ал бүйір бетінің ауданы 140π см^2-ге тең. Қиық конус табандарының радиустарын табыңдар.

196. а) Табандары радиустарының қатынасы 1 : 2, биіктігі 8 см-ге тең, ал жасаушысы табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайтын қиық конустың бүйір бетінің ауданын 1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

ә) Жасаушысы 2 дм, табандарының радиустары 2 см және 4 см болатын қиық конус пішіндес дауыс зорайтқыш жасау үшін қанша материал қажет? Жауабын 1 $см^2$-ге дейінгі дәлдікпен беріңдер.

В деңгейі

197. Бүйір бетінің ауданы табандары аудандарының қосындысына тең қиық конус бола ма?

198. Қиық конус берілген, оның осьтік қимасының диагональдары перпендикуляр, ал 12 см-ге тең жасаушысы төменгі табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайды. Қиық конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

199. Қиық конустың арасындағы бұрышы 60°-қа тең екі жасаушысы арқылы жүргізілген жазықтық оның табандарын 6 см-ге және 4 см-ге тең хордалар бойымен қияды. Осы хордалардың әрқайсысы 90°-қа тең доғаларды кереді. Қиық конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

200. Шелектің бүйір бетін жасауға дайындаған қаңылтыр доғаларының шамалары 60°-қа, ал олардың радиустары 72 см-ге және 48 см-ге тең. Шелектің биіктігі қандай болады? Жауабын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен беріңдер.

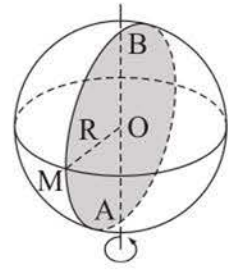
14. Сфера және шар. Шардың жазықтықпен қимасы

Тақырыпты оқу барысында:

• сфераның, шардың анықтамаларын білесіңдер;
• сфера мен жазықтықтың өзара орналасуын білесіңдер;
• сфераны, шарды және олардың жазықтықпен қималарын кескіндейсіңдер;
• сфера мен шардың элементтерін табуға есептер шығарасыңдар.

Кеңістіктің берілген нүктесінен бірдей қашықтықтағы барлық нүктелерінен тұратын фигура сфера деп, ал кеңістіктің қайсыбір нүктесінен берілгеннен артық емес қашықтықта жататын барлық нүктелер жиыны шар деп аталады. Берілген нүктені *сфераның* (немесе шардың) *центрі* деп атайды. Шар – беті сфера болатын дене.

Шеңберді оның диаметрін қамтитын түзуден айналдырып, сфераны, ал дөңгелекті сондай түзуден айналдырып, шарды алуға болады (99-сурет). Осы дөңгелектің центрі *шардың центрі* және шардың беті болатын сфераның да центрі болады.



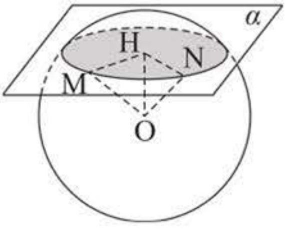
99-сурет

Шардың центрін оның бетінің кез келген нүктесімен қосатын кесінді **шардың радиусы** немесе сфераның радиусы деп аталады. Сфераның екі нүктесін қосатын кесінді **сфераның хордасы** немесе шекарасы осы сфера болатын шардың хордасы деп аталады. Сфераның центрі арқылы өтетін хорда **сфераның** (шардың) **диаметрі** деп аталады. Шардың кез келген хордасы оның диаметрінен үлкен емес. Шардың диаметрін қамтитын түзу (немесе диаметрдің өзі) **шардың осі** деп аталады.

Сфераның (немесе шардың) жазықтықпен бір ғана ортақ нүктесі болуы, ортақ нүктесі болмауы немесе шексіз көп ортақ нүктесі болуы мүмкін. Сферамен бірден артық ортақ нүктесі бар болатын жазықтық *қиюшы жазықтық* деп аталады. Сфера мен қима жазықтықтың барлық ортақ нүктелері *сфераның қимасы* деп, ал шар мен қима жазықтықтың барлық ортақ нүктелері *шардың қимасы* деп аталады.

Теорема. **Сфераның жазықтықпен қимасы шеңбер болады.**

Дәлелдеуі. α жазықтығы сфераны қиып өтсін және сфера центрі бұл жазықтықта жатпасын. Олардың қиылысу сызығынан қайсыбір



100-сурет

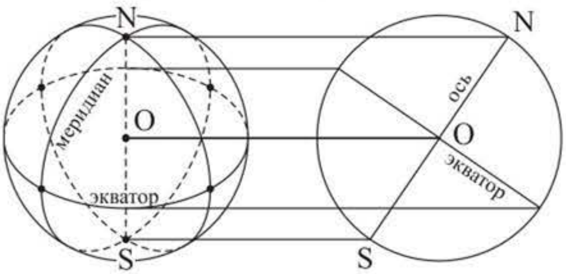
M нүктесін алайық (100-сурет). Сфераның O центрінен α жазықтығына OH перпендикулярын жүргізейік. ΔOMH-тан $MH = \sqrt{OM^2 - OH^2}$ – кез келген M нүктесі үшін тұрақты шама.

Сфера мен жазықтықтың қиылысу сызығы α жазықтығында жататындықтан және H нүктесінен бірдей қашықтықта болатындықтан, олардың барлығы центрі H нүктесі болатын шеңберде жатады. Сонымен бірге осы шеңбердің кез келген N нүктесі үшін $ON^2 = NH^2 + OH^2$ теңдігі орындалады. $MH = NH$ болғандықтан, бұл нүкте сфераға тиісті болады.

Егер қиюшы жазықтық сфераның центрі арқылы өтсе, онда оның сферамен қиылысу нүктелері сфераның центрінен оның радиусына тең қашықтықта болады, демек, бұл жағдайда да сфераның жазықтықпен қимасы шеңбер болады. Теорема дәлелденді.

Осы теоремадан шығатыны:

1) шардың жазықтықпен кез келген қимасы дөңгелек болады;
2) шарды оның центрінен бірдей қашықтықтағы жазықтықтармен қиятын қималары тең болады;
3) шардың центрі арқылы өтетін жазықтықпен қимасын **шардың үлкен дөңгелегі** деп атайды және оның ауданы да ең үлкен болады. Шардың барлық үлкен дөңгелектері өзара тең.

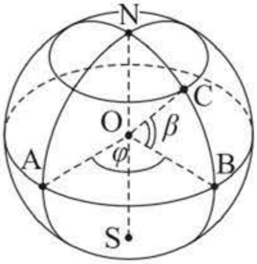


101-сурет

Егер шардың қайсыбір үлкен дөңгелегіне оған перпендикуляр диаметр жүргізілсе, онда диаметрдің ұштары *полюстер*, үлкен дөңгелектің шеңбері *экватор*, ал полюстер арқылы өтетін үлкен дөңгелектердің шеңберлері *меридиандар* деп аталады. Сфераның экваторға параллель жазықтықтармен қималары *параллельдер* деп аталады. Сфера мен шардың проекциядағы кескінін, мысалы, 101-суреттегідей етіп көрсетеді.

Жер планетасын шартты түрде шар деп есептейді, оның екі полюсі (Солтүстік және Оңтүстік) және олармен байланысқан көптеген параллельдері мен меридиандары бар. Жазықтықта сияқты сферада да координаталар жүйесін енгізуге болады. Әдетте, географиялық координаталар жүйесін, бойлық пен ендікті пайдаланады.

Бойлық – φ бұрышы ($0° \le \varphi \le 360°$), экватор жазықтығында бастапқы (нөлдік) меридианнан сағат тіліне қарсы бағытта берілген нүкте жататын меридианға дейін өлшенеді (102-сурет).

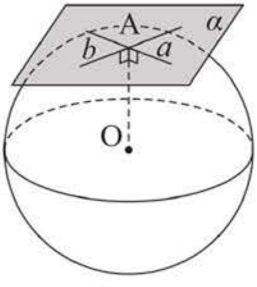


102-сурет

Ендік – β бұрышы ($-90° \le \beta \le 90°$), берілген нүктенің меридиан жазықтығында экватордан осы нүкте жататын радиусқа дейін өлшенеді; «плюс» таңбасы – Солтүстік полюске, «минус» – Оңтүстік полюске қарай.

Сферамен бір ғана ортақ нүктесі бар жазықтық **сфераға жанама** жазықтық деп, ал сол нүкте олардың жанасу нүктесі деп аталады. *Сфераға жанама жазықтық жанасу нүктесіне жүргізілген радиусқа перпендикуляр.*

Сферамен бір ғана ортақ нүктесі бар болатын түзу сфераға жанама түзу деп аталады. Сфераға жанама жазықтықта жататын және жанасу нүктесі арқылы өтетін кез келген түзудің сферамен бір ғана ортақ нүктесі болады. Осындай түзулердің барлығы сфераға жанама болады (103-сурет).

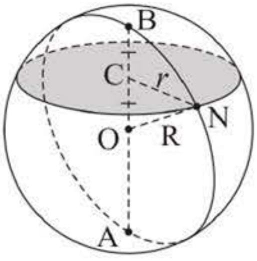


103-сурет

Сфера мен түзудің бір ғана ортақ нүктесі болуы, ортақ нүктелері болмауы немесе тек екі ортақ нүктесі болуы мүмкін.

1 - е с е п. Шар радиусының ортасы арқылы оған перпендикуляр жазықтық жүргізілген. Шардың осы жазықтықпен қимасы ауданының оның үлкен дөңгелегінің ауданына қатынасын табу керек.

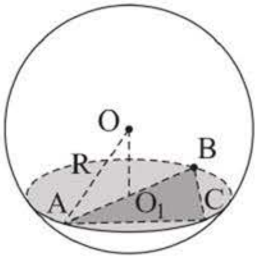
Ш е ш у і. Шардың радиусы R-ге тең болсын (104-сурет). Шардың қимасы болатын дөңгелектің r радиусы: $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Сонда ізделінді қатынас: $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{3}{4}$.



104-сурет

Ж а у а б ы. 0,75.

2 - е с е п. Шардың бетінде жататын, арақашықтықтары 6 дм, 8 дм, 10 дм болатын үш нүкте берілген. Шардың радиусы 13 дм. Шардың центрінен осы нүктелер арқылы өтетін жазықтыққа дейінгі қашықтықты табу керек.



105-сурет

Ш е ш у і. A, B, C – берілген үш нүкте, O шардың центрі болсын, $BC = 6$ дм, $AC = 8$ дм, $AB = 10$ дм, $OA = OB = OC = 13$ дм (105-сурет). Шардың ABC жазықтығымен қимасы дөңгелек болады, оның шеңбері тікбұрышты ΔABC-ға сырттай сызылған (Пифагор теоремасына кері теорема бойынша). Ізделінді қашықтық – OO_1 кесіндісі, мұндағы O_1 – AB кесіндісінің ортасы, ΔABC-ға сырттай сызылған шеңбердің центрі. Сонда $OO_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (дм).

Ж а у а б ы. 12 дм.

СҰРАҚТАР

1. Сфераның және шардың анықтамасын беріңдер.
2. Сфераның және шардың жазықтықпен қимасы не болады?
3. Қандай жазықтық сфераға жанама жазықтық деп аталады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

201. Жазықтық сфераның центрі арқылы өтіп, оны ұзындығы 31,4 см-ге тең шеңбер бойымен қияды. Сфераның диаметрін 1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

202. а) Шардың жазықтықпен қимасының ауданы 36π см^2-ге тең. Шардың радиусы 10 см-ге тең болса, қима жазықтығынан шардың центріне дейінгі қашықтықты табыңдар.

ә) Шардың жазықтықпен қимасының ауданы оның үлкен дөңгелегінің ауданынан 4 есе кем. Қиманың радиусы 2 см-ге тең болса, шардың центрінен қима жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

203. а) Радиусы 16 см-ге тең шар пішіндес қарбызды оның бір радиусының ортасынан оған перпендикуляр қимамен бөлген. Осы қиманың ауданы қандай?

ә) Радиусы 8 см-ге тең шар берілген. Радиустың ұшы арқылы онымен $60°$ бұрыш жасайтын жазықтық жүргізілген. Шардың осы жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

204. Шардың жазықтықпен қимасы оның центрінен 5 см қашықтықта орналасқан. Шардың радиусы 7 см-ге тең болса, сол қимаға іштей сызылған дұрыс алтыбұрыштың ауданын табыңдар.

205. Радиусы 5 см-ге тең сфераға жүргізілген жанама жазықтықтың нүктесі жанасу нүктесінен 12 см қашықтықта орналасқан. Осы нүктеден сфераның оған ең жақын нүктесіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

В деңгейі

206. Құдық шеңберінің ұзындығы шамамен 3,5 м. Құдықтың бетін биіктігі 0,6 м-ге тең жарты сфера пішіндес қақпақпен жабуға бола ма?

207. Центрі $A(2; -4; 7)$ нүктесінде, радиусы 3-ке тең сфераның теңдеуін құрыңдар. а) Ол сфера координаталар жазықтықтарын қия ма? ә) Сфераның нүктелерінен xOy жазықтығына дейінгі ең қысқа қашықтықты анықтаңдар.

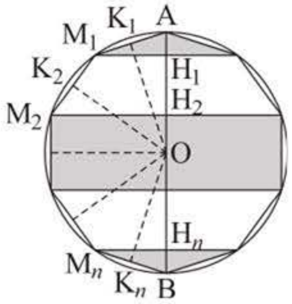
208. X қаласы солтүстік ендіктің 60°-да орналасқан. Осы қаланың Жердің өз осінен айналу нәтижесінде бір тәулікте өтетін жолының ұзындығын табыңдар. Жердің радиусын 6370 км-ге тең деп санаңдар. Жауабын 10 км-ге дейінгі дәлдікпен дөңгелектеңдер.

15. Шар бетінің ауданы

Тақырыпты оқу барысында:

• шар беті ауданының формуласын білесіңдер;

• оны есептер шығаруда қолданасыңдар.



106-сурет

Дөңгелекке іштей сызылған қабырғаларының саны жұп болатын дұрыс көпбұрышты қарастырайық. Осы көпбұрышты оның ең үлкен диагоналі жататын дөңгелектің симметрия осінен айналдырғанда, шардың ішінде жататын дене шығады (106-сурет). Осы дененің беті конустардың, қиық конустардың және цилиндрдің бүйір бетінен тұрады. Көпбұрыш қабырғаларының санын шексіз еселеп арттырғанда осы айналу бетінің ауданы қандай да бір шамаға ұмтылады. Осы шаманы шар бетінің ауданы деп қабылдайды. Шар бетінің ауданын оның шекарасы болатын **сфераның ауданы** деп атайды.

Радиусы R-ге тең шар бетінің ауданы (сфераның ауданы):

$$S_{сф.} = 4\pi R^2.$$

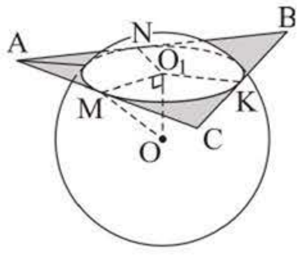
Осы формуланы қорытып шығарайық. Шар радиусы R-ге тең дөңгелекті өзінің AB диаметрінен айналдырғанда пайда болсын. Шардың үлкен дөңгелегіне іштей жұп сан болатын n қабырғалы дұрыс көпбұрыш сызайық (106-сурет). Оның AB түзуінің бір жағында жататын $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ төбелерінен AB диаметріне ($M_1H_1 \perp AB, \dots, M_nH_n \perp AB$) перпендикулярларын жүргіземіз. AB түзуінен айналдырғанда көпбұрыштың қабырғалары конустың немесе қиық конустың, немесе цилиндрдің бүйір беттерін сызатын болады. Шеңбердің центрінен көпбұрыштың қабырғаларына $OK_1, OK_2, \dots, OK_n$ перпендикулярларын жүргіземіз. Осы барлық перпендикулярлардың ұзындықтары тең, $OK_1 = OK_2 = \dots = OK_n = d$ болсын. Конустың және қиық конустың бүйір бетінің $S_{б.б.} = 2\pi hd$ формуласын пайдаланып, айналу денесі бетінің S ауданын аламыз:

$$S = 2\pi d(AH_1 + H_1H_2 + \dots + H_nB) = 2\pi d \cdot AB.$$

Қарастырылып отырған көпбұрыштың қабырғасының n санын шексіз өсіргенде d-ның мәні R-ге, ал $2\pi d \cdot AB$ өрнегінің мәні $2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$ мәніне ұмтылады. Демек, $S_{сф.} = 4\pi R^2$.

1 - е с е п. Шар периметрі 18 см-ге тең дұрыс үшбұрыштың барлық қабырғаларымен жанасады. Егер шардың центрінен үшбұрыш жазықтығына дейінгі қашықтық 3 см-ге тең болса, шар бетінің ауданын табу керек.

Ш е ш у і. M, N, K нүктелері шардың ABC үшбұрышы қабырғаларымен жанасу нүктелері болсын (107-сурет). Шардың O центрінен үшбұрыш жазықтығына OO_1 перпендикулярын жүргіземіз, есептің шарты бойынша $OO_1 = 3$ см. Сонда O_1 нүктесі ΔABC-ға іштей сызылған шеңбердің центрі болады. ΔABC қабырғасы 6 см-ге тең дұрыс үшбұрыш болғандықтан, осы шеңбердің O_1M радиусы $\frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см)



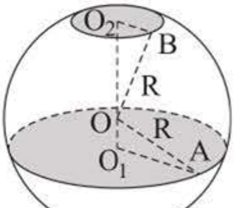
107-сурет

болады. Тікбұрышты ΔMOO_1-ден шардың радиусын табамыз: $OM = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$ (см). Сонда шар бетінің ауданы 48π см^2-ге тең.

Ж а у а б ы. 48π см^2.

2 - е с е п. Шарда радиустары 7 см және 2 см болатын екі параллель қима жүргізілген. Осы қималардың арақашықтығы 9 см-ге тең болса, шар бетінің ауданын табу керек.

Ш е ш у і. O – шардың центрі, O_1, O_2 шардың қимасы болатын дөңгелектердің центрлері болсын. O нүктесі O_1O_2 кесіндісіне тиісті және $O_1A = 7$ см, $O_2B = 2$ см, $OB = OA = R$, $OO_2 = x$ см болсын, сонда $OO_1 = (9 - x)$ см болады (108-сурет).



108-сурет

Тікбұрышты BO_2O мен AO_1O үшбұрыштарынан мынаны аламыз: $R^2 = x^2 + 4$ және $R^2 = (9 - x)^2 + 49$. $x^2 + 4 = (9 - x)^2 + 49$ теңдеуін шешіп, $x = 7$ аламыз. Сонда $R^2 = 53$, $4\pi R^2 = 212\pi$ (см^2) болады.

O_1 нүктесі OO_2 кесіндісіне тиісті емес, тиісті болған жағдайда $OO_1 = x - 9 < 0$ болатынын алар едік.

Ж а у а б ы. 212π см^2.

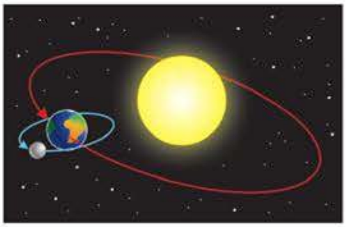
СҰРАҚТАР

1. Шар бетінің ауданын не деп атайды?
2. Шар бетінің ауданын қандай формуламен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

209. а) Шар бетінің ауданы оның үлкен дөңгелегі шеңберінің ұзындығын диаметрге көбейткенге тең деген ақиқат па? ә) Егер шардың диаметрін 3 есе үлкейтсе, шар бетінің ауданы қалай өзгереді?



Жер мен Айдың Күнді айналуы

210. Диаметрі 8 см-ге тең жарты шар пішіндес кесе бетінің ауданы неге тең?

211. Айдың диаметрі Жер диаметрінің $\frac{3}{11}$-ін құрайды. Жер беті ауданының Ай бетінің ауданына қатынасын табыңдар, оларды шар деп есептеңдер.

212. Сфера мен жазықтықтың қиылысу сызығының ұзындығы 8π см-ге, ал сфераның центрінен осы жазықтыққа дейінгі арақашықтық 5 см-ге тең. Сфераның ауданын табыңдар.

213. а) Әрқайсысының диаметрі 5 см-ге тең екі шарды никельдеуге көп материал жұмсала ма, әлде әрқайсысының диаметрі 2 см-ге тең он шарды никельдеуге ме?

Нұр Әлем, Нұр-Сұлтан қ.

ә) Әрқайсысының диаметрі 1 дм-ге тең екі сфера бетінің ауданы үлкен бе, әлде қыры 2 дм-ге тең дұрыс тетраэдрдің толық бетінің ауданы үлкен бе?

214. Әлемдегі ең үлкен сфералық «Нұр Әлем» ғимаратының диаметрі 80 м-ге тең. Осы сфераның ауданын 1 $м^2$-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар, $\pi \approx 3{,}1416$ деп есептеңдер.

В деңгейі

215. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 10$ теңдеуімен берілген. Сфераның ауданын табыңдар.

216. а) Сфера ABC үшбұрышының қабырғаларымен жанасады және сфераның центрі ABC жазықтығына тиісті. Егер $AB = BC = 15$ см, $AC = 24$ см болса, сфераның ауданын табыңдар.

ә) Ромбының $6\sqrt{2}$ см-ге тең әрбір қабырғасы шармен жанасады, ал ромбының жазықтығы шардың центрінен 4 см қашықтықта орналасқан. Ромбының ауданы $36\sqrt{2}$ см^2-ге тең болса, шар бетінің ауданын табыңдар.

217. а) Теңқабырғалы конустың толық бетінің ауданы диаметрі конустың биіктігіне тең сфераның ауданына; ә) диаметрлері тікбұрышты үшбұрыштың катеттеріне тең сфералардың аудандарының қосындысы диаметрі осы үшбұрыштың гипотенузасына тең сфераның ауданына тең екенін дәлелдеңдер.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

218. Теңқабырғалы цилиндр берілген. Оның толық бетінің ауданын цилиндр табанының R радиусы арқылы өрнектеңдер.

219. Цилиндрдің төменгі табанының 6 дм-ге тең хордасы оның центрінен 4 дм, ал жоғарғы табанының центрінен 5 дм қашықтықта орналасқан. Цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

220. Конустың $6\sqrt{3}$ см-ге тең жасаушысы табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайды. Конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

221. Биіктігі $2\sqrt{3}$ см-ге тең болатын теңқабырғалы конустың толық бетінің ауданын табыңдар.

222. Конустың осьтік қимасының төбесіндегі бұрышы 60°-қа тең. Конустың бүйір беті жазбасының центрлік бұрышын табыңдар.

223. Қиық конус табандарының радиустары 2 см-ге және 4 см-ге тең. Қиық конустың табандарына параллель және биіктігінің ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

224. Қиық конустың табандары радиустарының қатынасы 1 : 3, биіктігі 8 см-ге тең, ал жасаушысы төменгі табанымен 45° бұрыш жасайды. Қиық конустың толық бетінің ауданын табыңдар.

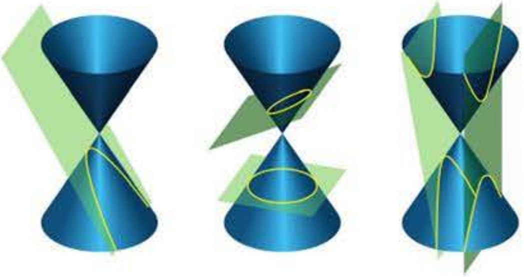
225. Радиусы 6 см-ге тең шар қабырғасы $4\sqrt{3}$ см-ге тең теңқабырғалы үшбұрыштың барлық қабырғаларымен жанасады. Шардың центрінен осы үшбұрыш жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

226. Шаршыны оның a-ға тең қабырғасынан айналдырғанда шыққан дене бетінің ауданы мен радиусы a-ға тең сфераның ауданын салыстырыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Айналу денелері мен олардың қасиеттерін ежелгі грек оқымыстылары Евклид, Архимед, Аполлоний тағы басқалары зерттеген. Бұл ретте денелердің қималары да қарастырылған болатын. Мысалы, Аполлоний Пергский (б. д. д. 262–190 жж.) «Конустық қималар» деп аталатын үлкен еңбегін арнаған. Тарихи деректер бойынша цилиндрдің, конустың, қиық конустың және шардың беттері аудандарының формулаларын алғаш рет Архимед қорытып шығарған және оның нәтижесін «Шар мен цилиндр туралы» атты еңбегінде баяндаған.

Аполлоний Пергский



Конустық қималар: парабола, эллипс, гипербола

Ғаламторды пайдаланып:

1) цилиндр ұғымын Евклидтің қалай анықтағаны;

2) конустың бүйір беті ауданының формуласын Архимедтің қалай жазғаны туралы деректерді табыңдар.

III. ДЕНЕЛЕРДІҢ КӨЛЕМДЕРІ

Бөлімді оқу нәтижесінде

- дененің көлемі ұғымын;
- денелердің көлемдерінің қасиеттерін;
- призманың, пирамиданың, қиық пирамиданың, цилиндрдің, конустың, қиық конустың, шардың көлемдерінің формулаларын **білу керек.**
- кеңістіктегі денелердің көлемдерінің қасиеттерін қолдана алу;
- призманың, пирамиданың, қиық пирамиданың, цилиндрдің, конустың, қиық конустың, шардың көлемдерінің формулаларын есептер шығаруда қолдана **алу керек.**

16. Денелер көлемдерінің жалпы қасиеттері. Призманың көлемі

Тақырыпты оқу барысында:

• кеңістіктегі денелердің көлемдерінің қасиеттерін білесіңдер және қолданасыңдар;

• призма көлемін табу формуласын білесіңдер;

• оны есептер шығаруда қолданасыңдар.

Кейбір денелердің көлемдері ұғымымен сендер таныссыңдар, мысалы, тікбұрышты параллелепипед көлемінің формуласын, көлем бірліктерін білесіңдер. **Дененің көлемі** деп келесі **қасиеттер** (аксиомалар) орындалатын оң шама аталады:

1) *тең денелердің көлемдері тең;*

2) *егер денелер саны ақырлы денелерге бөлінсе, онда оның көлемі сол денелер көлемдерінің қосындысына тең;*

3) *қыры ұзындық бірлігіне тең кубтың көлемі 1-ге тең.*

Көлемнің негізгі өлшем бірліктері: 1 мм^3, 1 см^3, 1 дм^3, 1 м^3, 1 км^3. 1 дм^3-дің 1 литрге тең болатынын еске сала кетелік.

Көлемнің аксиомаларынан шығатыны:

- егер дене басқа дененің ішінде болса, онда оның көлемі сол дененің көлемінен кіші болады;
- қыры ұзындық бірлігінің $\frac{1}{n}$-іне тең ($n \in N$) кубтың көлемі куб бірлігінің $\frac{1}{n^3}$-іне тең;
- куб қырының ұзындығын k есе үлкейткенде оның көлемі k^3 есе үлкейеді.

Көлемдері бірдей екі дене **тең шамалы** деп аталады.

Теорема. **Призманың V көлемі оның табанының S ауданы мен призманың h биіктігінің көбейтіндісіне тең:**

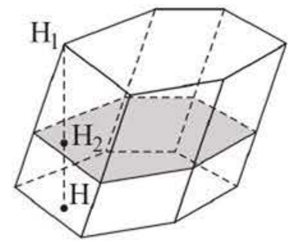
$$V = S \cdot h.$$

Дәлелдеуі. Осы формуланы дәлелдеу үшін алгебра және анализ бастамалары курсынан белгілі дененің көлемі формуласын пайдаланамыз:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

$S(x)$ – призманың табанына параллель және биіктігіне перпендикуляр қайсыбір қимасының ауданы, призманың биіктігі $H_1H = h$, $x = H_1H_2$ болсын (109-сурет). $S(x) = S$ болғандықтан, призманың V көлемі:

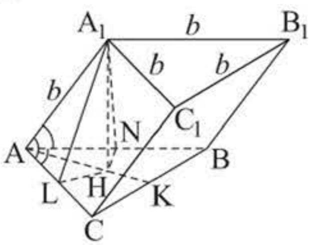
$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h Sdx = S\int_0^h dx = S \cdot x\Big|_0^h = Sh.$$



109-сурет

Е с е п. Үшбұрышты $ABCA_1B_1C_1$ призмасының әрбір қыры b-ға тең, ал A төбесіндегі жазық бұрыштары өзара тең. Призманың көлемін табу керек.

Ш е ш у і. Ізделінді көлем $V = S_{\Delta ABC} \cdot A_1H$, мұндағы A_1H – призманың биіктігі (110-сурет), H нүктесі ΔABC-ның AK биссектрисасында жатыр. Бұл тікбұрышты ALH және ANH үшбұрыштарының теңдігінен шығады, мұндағы HL мен HN, сәйкесінше, AA_1C_1C және ABB_1A_1 жақтарының табан жазықтығына жүргізілген A_1L және A_1N биіктіктерінің проекциялары.



110-сурет

Есептің шарты бойынша A төбесіндегі әрбір жазық бұрыш 60°-қа тең, өйткені ол теңқабырғалы ABC үшбұрышының бұрышына тең. $S_{\Delta ABC} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. A_1H биіктігін табамыз. ΔA_1AL-ден $AL = \frac{b}{2}$, $A_1L = b \cdot \sin 60° = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ аламыз. ΔALH-тан $LH = AL \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{b\sqrt{3}}{6}$ аламыз. Сонда ΔA_1HL-ден $A_1H = \sqrt{\frac{3b^2}{4} - \frac{b^2}{12}} = \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ болады. Ізделінді көлем $V = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{b^3\sqrt{2}}{4}$.

Ж а у а б ы. $\frac{b^3\sqrt{2}}{4}$.

СҰРАҚТАР

1. Денелердің көлемдерінің негізгі қасиеттерін тұжырымдаңдар.

2. Көлемнің негізгі өлшем бірліктерін атаңдар және олардың арасындағы қатынастарды көрсетіңдер.

3. а) Кубтың; ә) тікбұрышты параллелепипедтің; б) призманың көлемдерінің формулаларын хабарлы сөйлем түрінде тұжырымдап, оларды жазыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

227. Егер екі дене тең шамалы болса, онда олар тең болады деген ақиқат па?

228. Бетінің ауданы 24 см^2-ге тең ағаш кубты тең 8 кубқа бөлді. Бір кішірек кубтың көлемі неге тең?

229. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының көлемі 8 дм^3-ге тең. M және M_1 нүктелері, сәйкесінше, DC және D_1C_1 қырларының орталары. $ADMA_1D_1M_1$ призмасының көлемін табыңдар.

230. Дұрыс төртбұрышты призманың биіктігі 5 дм және толық бетінің ауданы 78 дм^2. Призманың көлемін табыңдар.

231. Кірпіштің өлшемдері 25 × 12 × 6 см. Кірпішті қалауға қажет ерітіндінің оның көлемін 15 %-ға арттыратынын ескере отырып, 10000 кірпіштен қаланған қабырғаның көлемін табыңдар.

232. Тік параллелепипедтің табан қабырғалары 4 см және 5 см-ге, ал олардың арасындағы бұрышы 45°-қа тең. Параллелепипедтің бүйір бетінің ауданы $54\sqrt{2}$ см^2-ге тең болса, оның көлемін табыңдар.

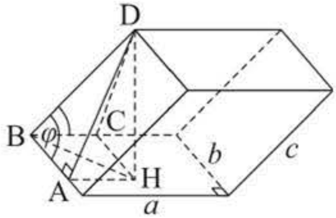
233. Дұрыс алтыбұрышты призманың ең үлкен диагоналі 8 см-ге тең және бүйір қырымен 30° бұрыш жасайды. Призманың көлемін табыңдар.

234. Үшбұрышты көлбеу призманың табан қабырғалары 5 м, 6 м және 9 м, ал 10 м-ге тең бүйір қыры табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Призманың көлемін табыңдар.

В деңгейі

235. Табанының қабырғасы 3 м-ге тең дұрыс төртбұрышты призма пішінді шұңқырды қазғанда, тығыздығы $1{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3-ге тең 25 тонна жер шығарылды. Шұңқырдың тереңдігін 0,1 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

236. Тік параллелепипедтің табаны – ромб, оның кіші диагоналі 4 см-ге, ал сүйір бұрышы 60°-қа тең. Параллелепипедтің бүйір бетінің ауданы $80\sqrt{3}$ см^2-ге тең болса, оның көлемін табыңдар.



111-сурет

237. Параллелепипедтің бір төбесінен шығатын үш қырының ұзындықтары a = 12 см, b = 7 см, c = 10 см. Ұзындықтары a мен b-ға тең қырлары өзара перпендикуляр, ал үшінші қыры олардың әрқайсысымен φ = 60° бұрыш құрайды (111-сурет). Параллелепипедтің көлемін табыңдар.

17. Пирамиданың және қиық пирамиданың көлемдері

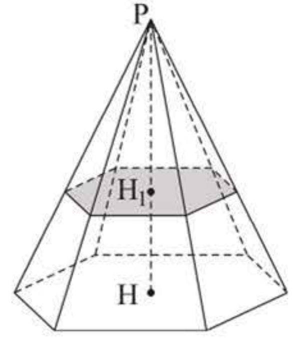
Тақырыпты оқу барысында:

- пирамида мен қиық пирамида көлемдерін табу формулаларын білесіңдер;
- сол формулаларды есептер шығаруда қолданасыңдар.

Теорема. **Пирамиданың V көлемі оның табанының S ауданы мен h биіктігінің көбейтіндісінің үштен біріне тең:**

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h.$$

Дәлелдеуі. Бұл формуланы дененің көлемінің формуласын пайдаланып, қорытып шығарайық: $V = \int_a^b S(x)dx$. $S(x)$ – пирамиданың табан жазықтығына параллель және $PH = h$ биіктігіне перпендикуляр қайсыбір жазықтықпен қимасының ауданы, $x = PH_1$ болсын (112-сурет). Мұндай қиманың қасиеті бойынша: $\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{h^2}$, $S(x) = \frac{S}{h^2} \cdot x^2$. Сонда пирамиданың V көлемі:



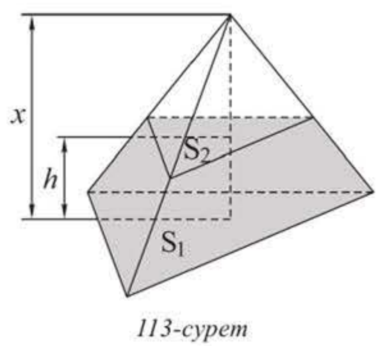
112-сурет

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}Sh.$$

Теорема. **Қиық пирамиданың V көлемі оның h биіктігінің табандарының S_1, S_2 аудандары мен олардың геометриялық ортасының қосындысына көбейтіндісінің үштен біріне тең:**

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}).$$

Дәлелдеуі. Қиық пирамиданы толық пирамидаға дейін толықтырып салайық (113-сурет). Толық пирамиданың биіктігі x-ке тең болсын. Сонда $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2$, бұдан $x = \frac{h \cdot \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$.



113-сурет

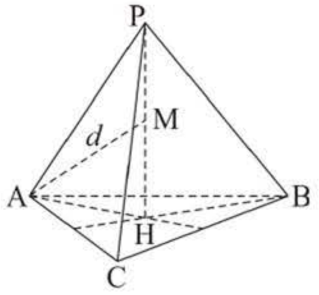
Қиық пирамиданың көлемі біреуінің табанының ауданы S_1, биіктігі x, екіншісінің табанының ауданы S_2, биіктігі $x - h$ болатын екі пирамида көлемдерінің айырымына тең. $x - h$ өрнегін түрлендіріп, мынаны аламыз:

$x - h = \dfrac{h \cdot \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - h = \dfrac{h \cdot \sqrt{S_1} - h\sqrt{S_1} + h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} = \dfrac{h \cdot \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$. Қиық пирамиданың көлемін өрнектейік:

$$V = \frac{1}{3}\left(S_1 \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - S_2 \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}\right) = \frac{1}{3}h \cdot \frac{S_1\sqrt{S_1} - S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} =$$
$$= \frac{1}{3}h \cdot \frac{(\sqrt{S_1})^3 - (\sqrt{S_2})^3}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} = \frac{1}{3}h \cdot \frac{(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} =$$
$$= \frac{1}{3}h \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}).$$

1 - е с е п. Дұрыс $PABC$ тетраэдрінің PH биіктігінің ортасындағы M нүктесінен оның A төбесіне дейінгі қашықтық d-ға тең болсын. Тетраэдрдің көлемін табу керек.

Ш е ш у і. Дұрыс $PABC$ тетраэдрінің қыры a-ға тең болсын (114-сурет), сонда $AH = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$



114-сурет

$= \dfrac{2a}{\sqrt{6}}$, $MH = \dfrac{1}{2}PH = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

AMH үшбұрышынан мынаны аламыз: $AM^2 = AH^2 + HM^2$, яғни $d^2 = \dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{6}$, $d^2 = \dfrac{a^2}{2}$, $a^2 = 2d^2$, $a = d\sqrt{2}$.

Сонда $S_{\text{таб.}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2d^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{d^2\sqrt{3}}{2}$, $PH = \dfrac{2d\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{2d}{\sqrt{3}}$.

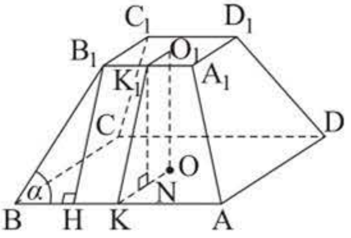
Демек, $V_{PABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\text{таб.}} \cdot PH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{d^2\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2d}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}d^3$.

Ж а у а б ы. $\dfrac{1}{3}d^3$.

2 - е с е п. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табан қабырғалары 5 м және 2 м, ал бүйір жағының α сүйір бұрышы 60°-қа тең. Осы қиық пирамиданың көлемін 0,1 м^3-ге дейінгі дәлдікпен табу керек.

Ш е ш у і. Берілген $ABCDA_1B_1C_1D_1$ қиық пирамидасында $AB = 5$ м, $A_1B_1 = 2$ м, $\angle B_1BA = 60°$ болсын (115-сурет). Оның көлемі $V = \dfrac{1}{3} \cdot OO_1 \times$

$\times\ (5^2 + 2^2 + \sqrt{5^2 \cdot 2^2})$, мұндағы O мен O_1 нүктелері – берілген қиық пирамида табандарының центрлері.



115-сурет

Тікбұрышты KK_1N және BB_1H үшбұрыштарын қарастырып, OO_1 биіктігін табамыз, мұндағы K мен K_1 – AB мен A_1B_1 қабырғаларының орталары, $K_1N \perp OK$, $B_1H \perp AB$. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табандары шаршылар болғандықтан, $BH = KN = \frac{AB - A_1B_1}{2} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$ (см). Сонда $B_1H = K_1K = BH \cdot \operatorname{tg} 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $O_1O = K_1N = \sqrt{K_1K^2 - KN^2} = \sqrt{\frac{27}{4} - \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Ізделінді көлем: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 39 = \frac{39\sqrt{2}}{2} \approx 27{,}6$ (м^3).

Ж а у а б ы. $\approx 27{,}6$ м^3.

СҰРАҚТАР

а) Пирамиданың; ә) қиық пирамиданың көлемдерінің формулаларын хабарлы сөйлем түрінде тұжырымдап, оларды жазыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

238. а) Бір металдан табандары тең шамалы, биіктіктері тең пирамида пішіндес екі бөлшек жасалды. Осы бөлшектердің массалары тең бе?

ә) Дұрыс n-бұрышты пирамиданы оның биіктігін қамтитын жазықтық арқылы қиған. Осы жазықтықпен қиылған көпжақтардың көлемдері тең бе?

239. Егер: а) $n = 4$; ә) $n = 3$ болса, әрбір қыры a-ға тең дұрыс n-бұрышты пирамиданың көлемін табыңдар.

240. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 6 см-ге, ал табан қабырғасындағы екіжақты бұрыштың тангенсі $\frac{15}{8}$-ке тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.

241. Көлемі 9 дм^3-ге, ал табан қабырғасындағы екіжақты бұрышы 45°-қа тең дұрыс үшбұрышты пирамиданың табан қабырғасын табыңдар.

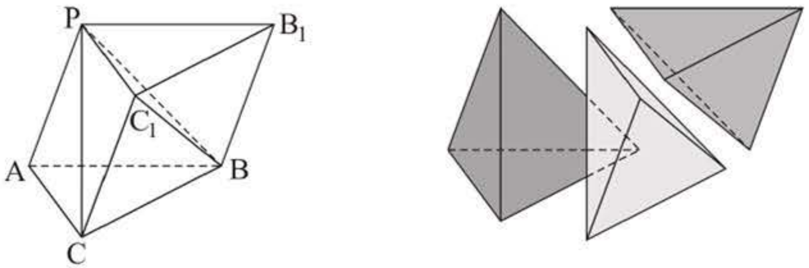
242. Дұрыс қиық пирамиданың жоғарғы және төменгі табан қабырғалары, сәйкесінше, $2\sqrt{3}$ дм-ге және $4\sqrt{3}$ дм-ге, ал төменгі табан қабырғасының екіжақты бұрышы 60°-қа тең. Егер қиық пирамида: а) төртбұрышты; ә) үшбұрышты болса, оның көлемін табыңдар.

243. Тоған шұңқыры дұрыс төртбұрышты қиық пирамида пішіндес. Оның жоғарғы табан қабырғасы 12 м, төменгісі 10 м, ал бүйір жақтары табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. Осы шұңқырға неше куб метр су сияды?

В деңгейі

244. Үшбұрышты $ABCPB_1C_1$ призмасы (116, *а*-сурет) 116, *ә*-суретте көрсетілгендей үш пирамидаға бөлінген. Осы пирамидалардың көлемдері неліктен тең болатынын түсіндіріңдер.

а) *ә)*



116-сурет

245. Кез келген үшбұрышты қиық пирамиданы үш тең шамалы қиық пирамидаға бөлуге бола ма? Егер болса, онда оны қалай істеуге болатынын түсіндіріңдер.

246. Массасы 42 карат алмаз дұрыс октаэдр пішіндес. Осы октаэдрдің қыры ≈ 1,72 см деген ақиқат па? (Алмаздың тығыздығы 3,5 г/см^3, 1 карат 0,2 г-ға тең).

247. Сүрлем дайындау шұңқыры табаны тіктөртбұрыш болатын қиық пирамида пішіндес. Оның төменгі табанының қабырғалары 13 м және 6 м, жоғарғы табанының үлкен қабырғасы 26 м, ал шұңқырдың тереңдігі 5 м. Егер ондағы сүрлемнің 1 м^3-нің массасы 0,5 т болса, барлығы неше тонна сүрлем салынған?

18. Цилиндрдің көлемі

Тақырыпты оқу барысында:

• цилиндр көлемін табу формуласын білесіңдер;

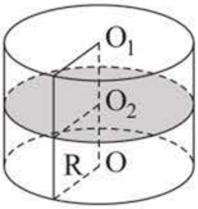
• оны есептер шығаруда қолданасыңдар.

Т е о р е м а. **Цилиндрдің V көлемі оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең:**

$$V = \pi R^2 h,$$

мұндағы R – табанының радиусы, h – цилиндрдің биіктігі.

Д ә л е л д е у і. Осы формуланы денелер көлемдерінің $V = \int_a^b S(x)dx$ формуласын пайдаланып, қорытып шығарайық. $S(x)$ – цилиндрдің табан жазықтығына параллель және $OO_1 = h$ биіктігіне перпендикуляр кез келген жазықтықпен қимасының ауданы, $x = O_1O_2$ болсын (117-сурет). $S(x) = S = \pi R^2$ болғандықтан, цилиндрдің V көлемі:

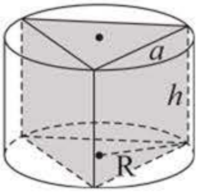


117-сурет

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h Sdx = S\int_0^h dx = S \cdot x\Big|_0^h = Sh = \pi R^2 h.$$

1 - е с е п. Цилиндрге барлық қырлары тең, көлемі $16\sqrt{3}$ см^3 болатын үшбұрышты дұрыс призма іштей сызылған. Цилиндрдің көлемін табу керек.

Ш е ш у і. Призманың табан қабырғасы a-ға тең болсын. Есептің шарты бойынша оның биіктігі $h = a$ (118-сурет). Призманың көлемін біле отырып, теңдеу құрамыз: $16\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$, бұдан $a = 4$. Сонда цилиндр табанының радиусы $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, ал ізделінді көлем: $V = \pi R^2 h = \frac{64\pi}{3}$ (см^3).



118-сурет

Ж а у а б ы. $\frac{64\pi}{3}$ см^3.

2 - е с е п. 200 л су осьтік қимасының ауданы 36 дм^2-ге тең теңқабырғалы цилиндр пішіндес бөшкеге сыя ма?

Ш е ш у і. Цилиндрдің биіктігі h, табанының радиусы R болсын. Есептің шарты бойынша $h = 2R$, $4R^2 = 36$, бұдан $R = 3$ (дм), $h = 6$ (дм). Сонда цилиндрдің V көлемі: $V = 9 \cdot 6\pi \approx 170$ (дм^3). 170 дм^3 = 170 л.

Ж а у а б ы. Сыймайды.

СҰРАҚТАР

Цилиндрдің көлемінің формуласын хабарлы сөйлем түрінде тұжырымдап, оны жазыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

248. Цилиндрдің көлемі 25 есе үлкейді.

а) Егер цилиндр табанының радиусы өзгермесе, оның биіктігі неше есе үлкейген?

ә) Егер цилиндрдің биіктігі өзгермесе, оның табанының радиусы неше есе үлкейген?

249. Көлемі 72 $дм^3$-ге тең цилиндрдің биіктігін 3 есе үлкейтіп, табанының радиусын 3 есе кішірейткен. Сонда шыққан цилиндрдің көлемі неге тең?

250. Қабырғалары 4 см-ге және 6 см-ге тең тіктөртбұрышты оның: а) үлкен қабырғасынан; ә) кіші қабырғасынан айналдырғанда шыққан дененің көлемі неге тең?

251. Толық бетінің ауданы 24π $см^2$-ге тең теңқабырғалы цилиндрдің көлемін табыңдар.

252. Бүйір бетінің жазбасы қабырғасы 8 см-ге тең шаршы болатын цилиндрдің көлемін табыңдар.

253. Түбінің диаметрі 10 см-ге тең цилиндр пішіндес ыдысқа тас салғанда, ондағы судың деңгейі 2 см-ге көтерілді. Тастың көлемін 1 $см^3$-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

254. Цилиндрдің төменгі табанының хордасы 4 см-ге тең. Осы хорда мен жоғарғы табанының центрі арқылы құралған үшбұрыштың периметрі 12 см-ге тең және ол цилиндр табанымен 60° бұрыш жасайды. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

В деңгейі

255. Өлшемдері $2a$ м және a м тіктөртбұрыш – әртүрлі екі цилиндрдің бүйір бетінің жазбасы. Олардың көлемдерінің қатынасын табыңдар.

256. а) Табан қабырғалары 6 см, 8 см және 10 см болатын тік призмаға сырттай цилиндр сызылған. Цилиндрдің осьтік қимасының диагональдары өзара перпендикуляр болса, оның көлемін табыңдар.

ә) Табан қабырғалары 12 см, 16 см және 20 см болатын үшбұрышты тік призмаға іштей сызылған теңқабырғалы цилиндрдің көлемін табыңдар.

257. Жасаушысы 97 см-ге, табанының диаметрі 8,4 см-ге тең цилиндр пішіндес болат білікті жонғанда, оның диаметрі 0,2 см-ге кішірейеді. $\pi \approx 3{,}1416$ деп алып, жонған кезде біліктің массасы неше грамға азаятынын 1 г-ға дейінгі дәлдікпен табыңдар. (Болаттың тығыздығы 7,4 г/см^3.)

19. Конустың және қиық конустың көлемдері

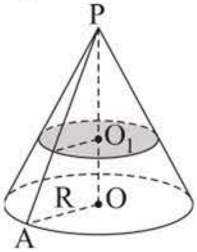
Тақырыпты оқу барысында:

- конус пен қиық конус көлемдерін табу формулаларын білесіңдер;
- сол формулаларды есептер шығаруда қолданасыңдар.

Теорема. **Конустың V көлемі оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісінің үштен біріне тең:**

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

мұндағы R – конус табанының радиусы, h – конустың биіктігі.



119-сурет

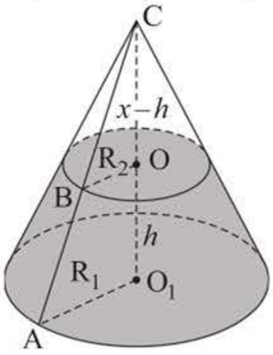
Дәлелдеуі. Осы формуланы денелер көлемдерінің $V = \int_a^b S(x)dx$ формуласын пайдаланып, қорытып шығарайық. $S(x)$ – конустың табан жазықтығына параллель және $PO = h$ биіктігіне перпендикуляр кез келген жазықтықпен қимасының ауданы, $S = \pi R^2$ – конус табанының ауданы, $x = PO_1$ болсын (119-сурет). $\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{h^2}$ болғандықтан, $S(x) = \frac{S}{h^2} \cdot x^2$ болады. Сонда конустың V көлемі:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Теорема. **Қиық конустың V көлемі:**

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2),$$

мұндағы R_1 және R_2 – табандарының радиустары, ал h – оның биіктігі.



120-сурет

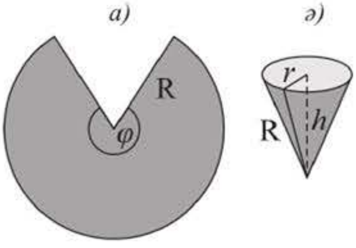
Дәлелдеуі. Берілген қиық конусты конусқа дейін толықтырып салайық (120-сурет). Конустың биіктігі $CO_1 = x$ болсын. Қиық конустың көлемі – біреуінің табан радиусы R_1, биіктігі x, екіншісінің табан радиусы R_2, биіктігі $x - h$ болатын екі конустың көлемдерінің айырымына тең. CAO_1 және CBO үшбұрыштарының ұқсастығынан мынаны аламыз: $\frac{x}{x-h} = \frac{R_1}{R_2}$, $x = \frac{hR_1}{R_1 - R_2}$, сонда $x - h = \frac{hR_1}{R_1 - R_2} - h = \frac{hR_2}{R_1 - R_2}$. Сонымен, қиық конустың көлемі:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot R_1^2 x - \frac{1}{3}\pi \cdot R_2^2 (x-h) = \frac{1}{3}\pi\left(R_1^2 \cdot \frac{hR_1}{R_1 - R_2} - R_2^2 \cdot \frac{hR_2}{R_1 - R_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h\,\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2} = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2).$$

1 - е с е п. Радиусы 3 дм-ге тең дөңгелектен бұрышы $\varphi = 300°$ болатын сектор қиып алынып, конустық құйғыш жасалған. Осы құйғышқа қанша бүтін литр су сыяды?

Ш е ш у і. Дөңгелектің және конус табанының радиустарын, сәйкесінше, R және r деп белгілейік (121-сурет). Сектор доғасының ұзындығы құйғыштың табан шеңберінің ұзындығына тең екенін ескере отырып, мынаны аламыз: $\frac{\pi R \cdot 300°}{180°} = 2\pi r$, бұдан $r = \frac{5}{6}R = \frac{5}{2}$ (дм). Конустың h биіктігі мен



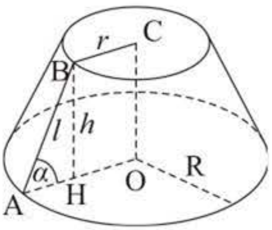
121-сурет

V көлемін табайық: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$; $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h =$ $= \frac{25\pi\sqrt{11}}{24}$ (дм^3) $\approx 10{,}85$ (л).

Ж а у а б ы. 10 литр.

2 - е с е п. Қиық конустың жасаушысы $l = 8$ см және төменгі табанына $\alpha = 60°$ бұрышпен көлбеген, ал табандары аудандарының қатынасы 4-ке тең. Осы қиық конустың көлемін 1 см^3-ге дейінгі дәлдікпен табу керек.

Ш е ш у і. R және r қиық конус табандарының радиустары, h биіктігі болсын, ал берілген бұрыш $\alpha = 60°$ (122-сурет). Қиық конустың көлемі: $V = \frac{1}{3}\pi h \cdot (R^2 + Rr + r^2)$. Оның BH биіктігін жүргізейік. ΔABH-тан $AH = 4$ см, $BH = 4\sqrt{3}$ аламыз. Есептің шарты бойынша $\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = 4$, бұдан $R = 2r$. $AH = R - r$ болғандықтан, $r = 4$ см, $R = 8$ см. Сонда ізделінді көлем:



122-сурет

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot (64 + 32 + 16) = \frac{448\pi\sqrt{3}}{3} \approx 813 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ж а у а б ы. ≈ 813 см^3.

СҰРАҚТАР

1. Конустың көлемінің формуласын хабарлы сөйлем түрінде тұжырымдап, оны жазыңдар.
2. Қиық конустың көлемін қандай формуламен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

258. Конустың көлемі оның остік қимасының ауданы мен табан шеңберінің ұзындығы көбейтіндісінің алтыдан біріне тең болатынын дәлелдеңдер.

259. Табаны 12 см-ге, төбесіндегі бұрышы 120°-қа тең теңбүйірлі үшбұрышты өзінің симметрия осінен айналдырғанда пайда болған айналу денесінің көлемін табыңдар.

260. Конус пішінді ыдыс жасау үшін бұрышы 216°-қа тең сектор қиып алынған. Егер: а) сектордың радиусы 10 см; ә) сектор доғасының ұзындығы 18π дм болса, ыдыстың көлемін табыңдар.

261. Қиық конус табандарының радиустары 3 дм және 6 дм, ал жасаушысы: а) 5 дм-ге тең; ә) табан жазықтығына 30° бұрышпен көлбеген болса, оның көлемін табыңдар.

262. Биіктігі 27 см-ге, табандары шеңберлерінің ұзындықтары 99 см және 33 см болатын қиық конус пішінді ыдысқа бүтін санды неше литр су сыяды?

263. Табанының диаметрі 4 дм-ге тең конусқа табанына параллель қима жүргізілген. Қиманың ауданы π дм^2-ге тең. Осы конус пен одан қиылып алынған қиық конустың көлемдерінің қатынасын табыңдар.

В деңгейі

264. Толық беттерінің аудандары тең теңқабырғалы конус пен цилиндрдің көлемдерінің қатынасын табыңдар.

265. Қабырғалары 15 см, 41 см және 52 см болатын үшбұрышты үлкен қабырғасынан айналдырғанда шыққан айналу денесінің көлемін табыңдар.

266. Қиық конустың: а) биіктігі 8 см, жасаушысы 10 см, ал бүйір бетінің ауданы 100π см^2; ә) биіктігі 12 см, жасаушысы 13 см, ал остік қимасының диагональдары перпендикуляр болса, оның көлемін табыңдар.

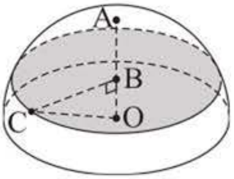
20. Шардың көлемі

Тақырыпты оқу барысында:
- шардың көлемін табу формуласын білесіңдер;
- оны есептер шығаруда қолданасыңдар.

Т е о р е м а. **Радиусы R-ге тең шардың V көлемі мына формуламен есептеледі:**

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Д ә л е л д е у і. Осы формуланы денелер көлемдерінің $V = \int_a^b S(x)dx$ формуласын пайдаланып, қорытып шығарайық. $S(x)$ – жарты шардың үлкен дөңгелегіне параллель және $OA = R$ радиусына перпендикуляр кез келген жазықтықпен қимасының ауданы, $x = OB$ болсын (123-сурет). Сонда $S(x) = \pi BC^2 = \pi(R^2 - x^2)$ болады.



123-сурет

Жарты шардың көлемі:

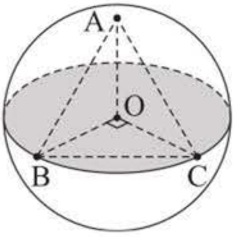
$$\frac{1}{2}V = \int_0^R S(x)dx = \int_0^R \pi(R^2 - x^2)dx = \int_0^R \pi R^2 dx - \int_0^R \pi x^2 dx =$$

$$= \pi R^2 \int_0^R dx - \pi \int_0^R x^2 dx = \pi R^2 \cdot x\Big|_0^R - \pi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^R = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Сонда шардың V көлемі $\frac{4}{3}\pi R^3$ болады.

1 - е с е п. O нүктесі центрі болатын шардың бетіне $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 90°$ болатындай A, B және C нүктелері белгіленген (124-сурет). ABC үшбұрышының периметрі 18 см-ге тең болса, шардың көлемін табу керек.

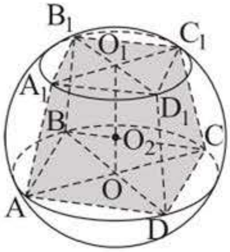
Ш е ш у і. Тікбұрышты AOB, AOC және BOC үшбұрыштарының теңдігінен $AB = AC = BC = 6$ см болады. ΔBOC-дан $OB = 3\sqrt{2}$ см шығады. Сонда шардың көлемі: $V = \frac{4}{3}\pi OB^3 = \frac{4 \cdot 54\sqrt{2}}{3}\pi = 72\pi\sqrt{2}$ (см^3).



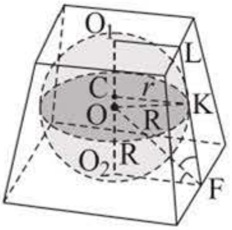
124-сурет

Ж а у а б ы. $72\pi\sqrt{2}$ см^3.

Егер дөңес көпжақтың барлық төбелері шардың бетінде жатса, онда ол **шарға іштей сызылған** (ал шар көпжаққа сырттай сызылған) деп аталады (125-сурет). Егер дөңес көпжақтың барлық жақтары шарды жанайтын болса, онда ол **шарға сырттай сызылған** (ал шар көпжаққа іштей сызылған) деп аталады (126-сурет). Сфераға іштей сызылған және оған сырттай сызылған көпжақтар ұғымы да осыған ұқсас анықталады.

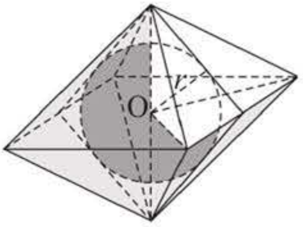


125-сурет



126-сурет

2 - е с е п. Көлемі V-ға, толық бетінің ауданы S-ке тең көпжаққа іштей сызылған шардың көлемін табу керек.



127-сурет

Ш е ш у і. Радиусы r-ге тең сфераны іштей сызуға болатын көпжақ берілген болсын. Осы көпжақты табандары көпжақтың жақтары, ал олардың ортақ төбесі сфераның центрі болатындай етіп пирамидаларға бөлеміз (127-сурет). Осындай әрбір пирамиданың көлемі көпжақ жағының ауданы мен шар радиусы көбейтіндісінің үштен біріне тең. Сонда сырттай сызылған көпжақтың V көлемі осындай барлық пирамидалардың көлемдерінің қосындысына тең, яғни $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r$, мұндағы S – көпжақтың толық бетінің ауданы. Осыдан $r = \frac{3V}{S}$ шығады, сонда шардың ізделінді көлемі: $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3V}{S}\right)^3 = 36\pi\left(\frac{V}{S}\right)^3$.

Ж а у а б ы. $36\pi\left(\frac{V}{S}\right)^3$.

СҰРАҚТАР

1. Шардың көлемін қандай формуламен табуға болады?

2. Неліктен шардың көлемі оның бетінің ауданы мен шар радиусы көбейтіндісінің үштен біріне тең болатынын түсіндіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

267. Егер шардың диаметрін 2 есе үлкейтсе, оның көлемі неше есе артады?

268. Радиустары 2 см және 3 см екі шарды балқытып, бір шар алды. Осы шардың радиусын табыңдар.

269. Бетінің ауданы 9π дм^2-ге тең болатын шардың көлемін табыңдар.

270. а) Шардың жазықтықпен қимасының ауданы шар бетінің ауданынан 9 есе кем. Егер қиманың радиусы 2 см-ге тең болса, шардың көлемін табыңдар.

ә) Үлкен дөңгелегінің ауданы $\frac{9\pi}{16}$ см^2-ге тең шардың көлемін табыңдар.

271. Бұрышы 90°-қа тең AOB секторын OA радиусынан айналдырған. Егер сектордың радиусы $\frac{3}{4}$ дм-ге тең болса, айналу денесінің көлемін табыңдар.

272. Төрт шардың радиусы арифметикалық прогрессияны құрайды, оның бірінші мүшесі 12-ге, ал айырымы 4-ке тең. Ең үлкен шардың көлемі мен қалған шарлардың көлемдерінің қосындысын салыстырыңдар.

В деңгейі

273. Радиусын 1 дм-ге үлкейткенде бетінің ауданы 20π дм^2-ге артатын шардың көлемін табыңдар.

274. а) Дұрыс үшбұрышты призма шарға іштей сызылған. Призма табанының қабырғасы 3 см-ге, ал биіктігі $2\sqrt{6}$ см-ге тең. Шардың көлемін табыңдар.
ә) Өлшемдері 2 дм, 3 дм және 6 дм болатын тікбұрышты параллелепипедке сырттай сызылған шардың көлемін табыңдар.

275. а) Алюминийден жасалған шардың массасы $93{,}6\pi$ грамм. Алюминийдің тығыздығы 2,6 г/см^3 екені белгілі болса, шардың радиусын табыңдар.
ә) Қорғасыннан құйылған шардың массасы 0,5 кг. Осы шардың диаметрін 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар. (Қорғасынның тығыздығы 11,4 г/см^3.)

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

276. Қырлары 3,4 дм-ге және 1,4 дм-ге тең екі металл кубты балқытып, бір куб жасаған. Осы кубтың қырының ұзындығын 3,5 дм-мен салыстырыңдар.

277. Үшбұрышты дұрыс призманың көлемі $20\sqrt{3}$ см^3-ге тең. Призманың табанына сырттай сызылған шеңбердің радиусы $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см. Призманың биіктігін табыңдар.

278. Көлбеу параллелепипедтің табаны мен бүйір жағы – тіктөртбұрыштар, олардың аудандары, сәйкесінше, 20 дм^2-ге және 24 дм^2-ге тең, ал олардың жазықтықтары арасындағы бұрыш 30°. Параллелепипедтің басқа бүйір жағының ауданы 15 дм^2-ге тең болса, оның көлемін табыңдар.

279. Қаңылтырдан радиусы 18 см-ге, доғасы 240°-қа тең сектор қиып алынып, конустық құйғыш жасалған. Осы құйғышқа неше бүтін санды литр су сыяды?

280. Табандары $\sqrt{3}$ дм-ге және $4\sqrt{3}$ дм-ге тең тікбұрышты трапецияны оның кіші бүйір қабырғасынан айналдырған. Трапецияның үлкен бүйір қабырғасы оның кіші табанымен 150° бұрышты құрайтын болса, айналу денесінің көлемін табыңдар.

281. Үшбұрышты дұрыс призмаға сырттай цилиндр сызылған. Призманың биіктігі 8 см-ге, ал бүйір жағының диагоналі 10 см-ге тең. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

282. Биіктігі табанының диаметріне тең ағаш цилиндрден радиусы ең үлкен болатын шар жонып алынды. Ағаштың неше пайызы жонылып қалды?

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Тарихи деректер бойынша пирамида мен конустың көлемдерінің формулаларын алғаш рет ежелгі грек ғалымы Демокрит Абдерский (б. д. д. 460–380 жж.) тапқан.

Евклидтің «Негіздерінің» 12-ші кітабында биіктіктері тең, табандары тең шамалы үшбұрышты пирамидалардың тең шамалы болатыны туралы тұжырымның дәлелдеуі келтірілген. Ежелгі Грекияда денелер көлемдерінің толық теориясын Архимед ұсынған болатын.

Демокрит Абдерский

Б. Кавальери

Көлемдер теориясының дамуына итальяндық ғалым Бонавентура Кавальери (1598–1647) үлкен үлес қосты. Оны денелердің көлемдерін интегралды қолданып есептеу туралы ой қатты қызықтырды.

1. Ғаламторды пайдаланып, денелердің көлемдерін табуға арналған «Кавальери принципі» неде екенін біліңдер.

2. Архимедтің есептерін шығарыңдар:

а) көлемі табанының радиусы r-ге, ал биіктігі h-қа тең конустың көлеміне тең шардың радиусын табыңдар;

ә) табаны шардың үлкен дөңгелегіне, ал биіктігі оның диаметріне тең цилиндрдің көлемі шар көлемінің $\frac{3}{2}$-іне тең болатынын дәлелдеңдер.

10–11-СЫНЫПТАРДАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

283. Дұрыс n-бұрыштың қабырғасы арқылы жазықтық жүргізілген. Егер: а) $n = 3$; ә) $n = 6$ болса, n-бұрыштың осы жазықтыққа параллель қабырғасы табыла ма? Жауабын түсіндіріңдер.

284. Кез келген екі жазықтыққа параллель түзу жүргізуге бола ма?

285. Бір жазықтықта жататын екі түзу екінші жазықтықта жататын екі түзуге параллель болса, ондай жазықтықтар параллель болады деген тұжырым ақиқат па?

286. Дұрыс үшбұрыштың бір қабырғасы қайсыбір жазықтықта жатыр. а) Оның екінші қабырғасы; ә) үшбұрыштың медианасы осы жазықтыққа перпендикуляр болуы мүмкін бе?

287. а) Үшбұрыштың; ә) трапецияның; б) дұрыс алтыбұрыштың екі қабырғасы бір жазықтыққа перпендикуляр болуы мүмкін бе?

288. Төмендегі ұғымдардың анықтамалары дұрыс берілген бе? Егер дұрыс берілмесе, қатесін көрсетіңдер:

а) кеңістіктегі екі түзудің ортақ нүктелері болмаса, олар параллель түзулер деп аталады;

ә) екі жазықтықтың ортақ нүктелері болмаса, олар параллель жазықтықтар деп аталады;

б) бір жағы көпбұрыш, қалған жақтары үшбұрыш болатын көпжақ пирамида деп аталады.

289. AB кесіндісі α жазықтығын O нүктесінде қияды. AD мен BC түзулері осы жазықтыққа перпендикуляр және оны, сәйкесінше, D мен C нүктелерінде қияды. Егер $AD = 6$ см, $BC = 2$ см, $OC = 1{,}5$ см болса, AB кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

290. Дұрыс үшбұрышты $ABCA_1B_1C_1$ призмасының табан қабырғасы $4\sqrt{3}$ см-ге, ал бүйір қыры $3\sqrt{3}$ см-ге тең. AB қыры мен A_1C_1 қабырғасының ортасы арқылы жазықтық жүргізілген. Осы жазықтықтың призма табанымен жасайтын бұрышын және қимасының ауданын табыңдар.

291. Ұштары: а) $A(3; 5; -7)$ және $B(-3; 9; 7)$ нүктелерінде болатын кесіндінің ортасы ордината осіне;

ә) $C(3; 4; 5)$ және $D(10; 12; -5)$ нүктелерінде болатын кесіндінің ортасы Oxy жазықтығына тиісті деген ақиқат па?

292. $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{AC}$ векторлары коллинеар болса, онда A, B, C нүктелері: а) бір түзуде; ә) параллель түзулерде жатады деген ақиқат па?

293. $\vec{a}\,(m; 4; 2)$ және $\vec{b}\,(m+2; 6; 3)$ векторлары: а) коллинеар; ә) компланар; б) перпендикуляр болатындай m-нің барлық мәндерін табыңдар.

294. Қиын Керше алқабы Марстың көрінісін еске салады. Осы алқаптың алып жатқан ауданының сандық мәні қыры $5\sqrt{2}$ дм-ге тең куб бетінің ауданына тең болса, оның неше гектарды алып жатқанын анықтаңдар.

Қиын Керше алқабы, ШҚО

295. Тікбұрышты параллелепипед пішінді аквариумның ұзындығы 0,5 м, ені 37 см. Аквариумның сыйымдылығы 0,074 $м^3$ болса, оның биіктігін табыңдар.

296. а) Әрбір қыры 6 см-ге тең дұрыс үшбұрышты призманың; ә) қыры 10 см-ге тең дұрыс тетраэдрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

297. Конустың биіктігі жасаушысының жартысына, ал табанының радиусы $2\sqrt{3}$ см-ге тең. Конустың толық бетінің ауданын табыңдар.

298. Қиық конус табандарының радиустары 8 см-ге және 12 см-ге тең. Конустың жасаушысы табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайтын болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

299. Радиусы 1 дм-ге тең шардың көлемі мен әрбір қыры 2 дм-ге тең дұрыс үшбұрышты призманың көлемін салыстырыңдар.

В деңгейі

300. $ABCD$ трапециясы берілген, M және N нүктелері – оның AB мен CD табандарының орталары. $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XN} = 0{,}5(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB})$ болатынын дәлелдеңдер, мұндағы X – кеңістіктің кез келген нүктесі.

301. $\vec{a}\,(3; 4; 5)$ және $\vec{b}\,(1; 0; -1)$ векторлары берілген. Осы векторлар қосындысының скаляр квадратын табыңдар.

302. Қабырғасы 2 дм-ге тең шаршы пішінді қағаздан барлық қырлары 1 дм-ге тең дұрыс төртбұрышты пирамида бетінің жазбасын қалай қиып алуға болатынын көрсетіңдер. Осы пирамиданың толық бетінің ауданы неге тең?

303. Пирамиданың табаны – катеттері 6 см-ге және 8 см-ге тең тікбұрышты үшбұрыш. Пирамиданың барлық бүйір жақтары табан жазықтығына 60° бұрышпен көлбеген. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

304. Қабырғасы 10 см-ге тең шаршы конус табанына іштей сызылған. Конустың төбесі мен шаршының қабырғасы арқылы өтетін қиманың төбесіндегі бұрышы 60°-қа тең. Конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

305. Хан Тәңірі – Тянь-Шань тауының Қазақстан аумағындағы ең биік шыңы. Оның метрмен өлшенетін биіктігі бүйір қырлары өзара перпендикуляр және 5 м, 6 м, 1339 м болатын тетраэдрдің м^3-мен өлшенетін көлемінің сандық мәнімен өрнектелетін болса, шыңның биіктігі қандай болғаны?

Хан Тәңірі шыңы, Алматы облысы

306. Белгілі бір деңгейге дейін сумен толтырылған цилиндр пішінді ыдысқа әрқайсысының радиусы 5 мм-ге тең, металдан жасалған 4 кішірек шар салынған. Егер ыдыстың табанының радиусы 2,5 см-ге тең болса, ондағы судың деңгейі неше миллиметрге көтерілді? Жауабын 0,1 мм-ге дейінгі дәлдікпен беріңдер.

307. Егер $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 1$ шар бетінің теңдеуі болса, шардың көлемін табыңдар.

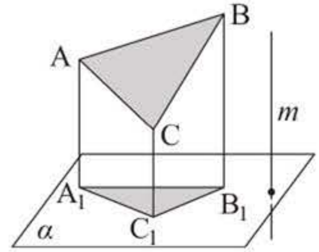
ҚОСЫМШАЛАР

1-ҚОСЫМША

ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ЖӘНЕ КЕҢІСТІКТЕГІ ФИГУРАЛАРДЫҢ КЕСКІНДЕРІ

Кеңістіктегі фигураларды жазықтықта кескіндеу, әдетте, параллель проекциялау арқылы іске асырылады. Фигураларды кескіндеудің бұл тәсілі былай орындалады. α жазықтығын қиятын кез келген m түзуін алып, фигураның қайсыбір A нүктесінен m түзуіне параллель түзу жүргіземіз. Осы түзудің α жазықтығымен қиылысатын A_1 нүктесі A нүктесінің кескіні деп аталады және m түзуі проекциялау бағытын көрсетеді дейді.

m түзуіне параллель түзулердің әрқайсысы бірдей проекциялау бағытын көрсетеді. Осы түзулер m түзуімен бірге *проекциялаушы түзулер* деп аталады. Фигураның әрбір нүктесінің кескінін салып, оның өзінің кескінін аламыз (128-сурет).



128-сурет

Проекциялау бағытын беретін түзуге параллель емес түзулерді және онда жататын кесінділерді параллель проекциялағанда келесі қасиеттер орындалады:

1) түзудің проекциясы түзу, ал кесіндінің проекциясы кесінді болады;

2) параллель түзулердің проекциялары параллель түзулер болады немесе беттеседі;

3) бір түзуде немесе параллель түзулерде жататын кесінділердің проекция ұзындықтарының қатынасы сол кесінділердің өздерінің ұзындықтарының қатынасына тең.

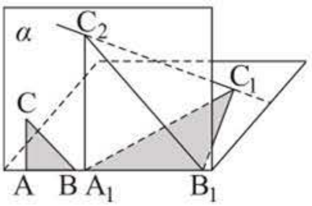
Параллель проекциялаудың қасиеттерінен мынаны аламыз:

- кесіндінің ортасы оның проекциясының ортасына кескінделеді;
- үшбұрыш медианаларының проекциялары оны проекциялағанда шыққан үшбұрыштың медианалары болады;
- центрлік-симметриялы фигураның параллель проекциясы да центрлік-симметриялы фигура болады.

Фигураның кескіні деп оның қайсыбір жазықтыққа түскен параллель проекциясын ғана атау жөнсіз болар еді. Бұл жағдайда біз, мысалы, дәптерге немесе тақтаға өлшемдері 10 м, 10 м, 20 м болатын тікбұрышты параллелепипедті кескіндей алмас едік.

Стереометрияда берілген фигураның (түпнұсқасының) **кескіні деп берілген фигураның қайсыбір жазықтыққа түскен параллель проекциясына ұқсас кез келген фигураны атайды.** Фигураның кескіні көрнекі болуы және кескінделетін фигура туралы дұрыс көрініс беруі керек. Кейбір фигураларды кескіндеу тәсілдерін қарастырайық.

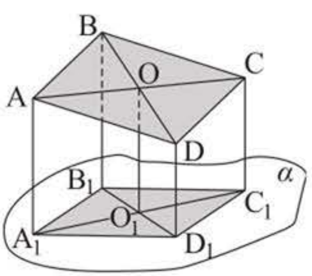
Ү ш б ұ р ы ш. Әрбір үшбұрышты проекциясында **кез келген түрдегі үшбұрыш** шығатындай етіп параллель проекциялауға болады. Шынымен де, әртүрлі ABC мен $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары берілген болсын. $\Delta A_1B_1C_1$-дің ΔABC-ның проекциясы болуы мүмкін екенін көрсетейік.



129-сурет

A_1B_1 түзуі арқылы $\Delta A_1B_1C_1$-дің жазықтығын қиятын α жазықтығын жүргізейік. Осы жазықтыққа ΔABC-ға ұқсас $\Delta A_1B_1C_2$ саламыз (129-сурет). Сонда $\Delta A_1B_1C_1$-ді C_1C_2 түзуі бағытымен α жазықтығына проекциялағанда ΔABC-ға ұқсас $\Delta A_1B_1C_2$ шығады. Сондықтан берілген ΔABC-ның кескіні $\Delta A_1B_1C_1$ болуы да мүмкін.

Мысалы, кез келген үшбұрышты теңқабырғалы үшбұрыш шығатындай етіп проекциялауға, немесе керісінше, теңқабырғалы үшбұрыштың кескіні кез келген үшбұрыш болатындай етіп проекциялауға болады.



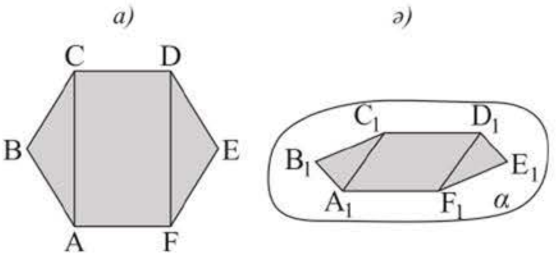
130-сурет

П а р а л л е л о г р а м м. Параллелограммның кескіні **кез келген параллелограмм** болуы мүмкін, себебі параллель проекциялауда параллель түзулердің кескіні параллель түзулер болады (130-сурет).

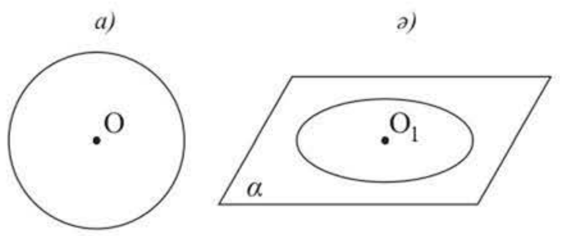
Кейбір жағдайда шаршы мен ромбының кескіндері де кез келген параллелограмм болуы мүмкін.

Т р а п е ц и я. Трапецияның кескіні – табан ұзындықтарының қатынасы түпнұсқа трапецияның табан ұзындықтарының қатынасына тең **трапеция**, себебі параллель проекциялау кезінде параллель түзулердің кескіні параллель түзулер болады және оларда жататын кесінділердің ұзындықтарының қатынасы сақталады.

Д ұ р ы с а л т ы б ұ р ы ш. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышы берілген болсын (131, *а*-сурет). Оның AC мен DF диагональдарын жүргізіп, $ACDF$ тіктөртбұрышы мен екі тең үшбұрыш аламыз және $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ болады. Сонда 131, *ә*-суретте көрсетілген кескін шығады. $ACDF$ тіктөртбұрышының кескіні болатын қайсыбір $A_1C_1D_1F_1$ параллелограмын және ΔABC-ның кескіні болатын қайсыбір $\Delta A_1B_1C_1$-ді саламыз. Содан кейін $D_1E_1 \parallel A_1B_1$; $F_1E_1 \parallel B_1C_1$ кесінділерін саламыз. Сонда шыққан $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыбұрышы дұрыс $ABCDEF$ алтыбұрышының кескіні болады.

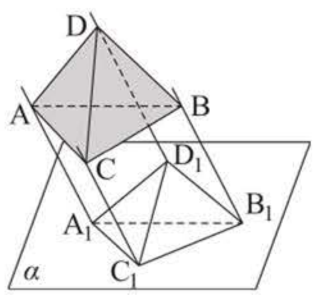


131-сурет



132-сурет

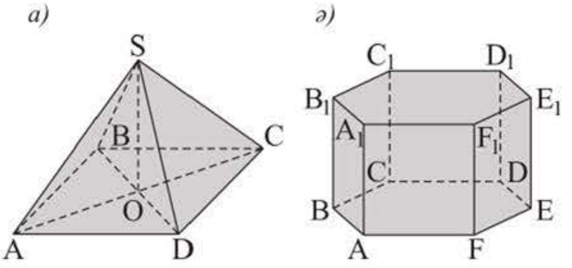
Ш е ң б е р. Шеңбердің параллель проекциясы эллипс болады (132-сурет). Параллель проекциялаудың қасиеттерінен берілген шеңбердің O центрінің проекциясы эллипстің симметрия центрі болатыны шығады (132, *ә*-суреттегі O_1 нүктесі). Ол нүктені эллипстің центрі деп атайды. Эллипс деп жазықтықтың берілген екі нүктесінен қашықтықтарының қосындысы бірдей болатын нүктелер жиынынан тұратын фигура аталады.



133-сурет

Т е т р а э д р. $ABCD$ – кез келген тетраэдр, ал A_1, B_1, C_1, D_1 нүктелері оның төбелерінің проекциялары болсын (133-сурет). Сонда $A_1B_1C_1D_1$ төртбұрышы мен оның көрсетілген диагональдарынан тұратын фигура $ABCD$ тетраэдрінің кескіні болады.

П и р а м и д а. Пирамида табанының кескіні параллель проекциялаудың қасиеттеріне сүйеніп салынады, ал төбесінің кескіні ретінде оның табанының кескініне тиісті емес кез келген нүкте алынады. Мысалы, 134, *а*-суретте дұрыс төртбұрышты пирамиданың кескіні берілген.



134-сурет

П р и з м а. Призманың бір табанының кескіні параллель проекциялаудың қасиеттеріне сүйеніп салынады. Бүйір қырларын бірдей етіп салады, өйткені олар параллель және тең. Екінші табанын салып, призманың кескінін аламыз. Мысалы, 134, *ә*-суретте дұрыс алтыбұрышты призманың кескіні берілген.

2-ҚОСЫМША

10–11-сыныптардағы геометрия курсын қайталауға арналған тест тапсырмалары

Стереометрия аксиомалары.
Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтардың өзара орналасуы

1. Екі қыры параллель кесінділермен бейнеленген тетраэдр берілген. Шындығында осы қырлары параллель бола ма?

1) Иә;
2) жоқ;
3) иә, егер сол қырлары тең болса;
4) иә, егер дұрыс тетраэдр болса;
5) тетраэдрдің түріне байланысты.

2. Бір жазықтықта жатпайтын A, B, C, D нүктелері берілген. M, N, P, K нүктелері, сәйкесінше, AB, BC, CD, AD кесінділерінің орталары. Дұрыс тұжырымды көрсетіңдер: а) $MN \parallel KP$; ә) $KM \parallel PN$; б) KN мен PM түзулері қиылысады; в) KN мен PM – айқас түзулер.

1) а, ә;
2) б;
3) в;
4) а, ә, в;
5) а, ә, б.

3. Бір жазықтықта жатпайтын екі түзудің әрқайсысы қайсыбір жазықтыққа параллель болса, онда олар:

1) қиылысатын;
2) айқас;
3) параллель;
4) қиылысатын немесе айқас;
5) параллель немесе айқас түзулер болады.

4. Егер a, b, c түзулері α жазықтығында жатса, әрі олардың әрқайсысы β жазықтығына параллель болса, онда α мен β жазықтықтары:

1) параллель;
2) параллель емес;
3) қиылысады;
4) қиылысады немесе параллель болады;
5) беттеседі.

Кеңістіктегі бұрыш пен арақашықтық

5. A және B нүктелерінен жазықтыққа дейінгі қашықтық, сәйкесінше, a және b-ға тең, ал AB кесіндісі осы жазықтықты қияды. Сонда осы кесіндінің ортасынан жазықтыққа дейінгі қашықтық неге тең?

1) $0{,}5a - b$;
2) $0{,}5|a - b|$;
3) $0{,}5(a - b)$;
4) $0{,}5(a + b)$;
5) $|a - b|$.

6. Дұрыс тетраэдрдің қыры $\sqrt{2}$ дм-ге тең. Оның айқас түзулерде жататын екі қырының арақашықтығы неге тең?

1) 1 дм;
2) 1,5 дм;
3) $0{,}5\sqrt{2}$ дм;
4) $0{,}3\sqrt{3}$ дм;
5) 2 дм.

7. Екі тең шаршы перпендикуляр жазықтықтарда жатыр және бір қабырғасы ортақ. Осы шаршылардың ортақ төбесінен жүргізілген диагональдарының арасындағы бұрыш неге тең?

1) 90°;
2) 45°;
3) 30°;
4) 60°;
5) 120°.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. A_1D мен D_1C түзулерінің арасындағы бұрыш неге тең?

1) 30°; 2) 45°; 3) 90°; 4) 120°; 5) 60°.

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. AB_1 мен A_1C түзулерінің арасындағы бұрыштың шамасы неге тең?

1) 45°;
2) ≈ 55°;
3) 60°;
4) ≈ 72°;
5) 90°.

Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі және векторлар

10. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, онда $A(5; 0; 0)$, $C(0; 5; 0)$, $B_1(0; 0; 3)$. Сонда оның BB_1C_1C жағы диагональдарының қиылысу нүктесінің координаталары неге тең?

1) (2,5; 2,5; 2,5);
2) (0; 2,5; 1,5);
3) (2; 2; 0);
4) (0; 2; 2);
5) (0; 2,5; 0).

11. $A(3; 4; 5)$ және $B(-2; 1; 6)$ нүктелері берілген. Сонда xOz жазықтығына тиісті және $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{AC}$ коллинеар болатындай C нүктесінің координаталары неге тең?

1) $\left(-\frac{11}{3}; 0; \frac{19}{3}\right)$;
2) (28; 19; 0);
3) $\left(\frac{29}{3}; 0; \frac{11}{3}\right)$;
4) $\left(0; \frac{29}{5}; \frac{22}{5}\right)$;
5) $\left(0; \frac{11}{5}; \frac{28}{5}\right)$.

12. Қыры 1-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Сонда $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{B_1C}$ неге тең?

1) 1;
2) 0;
3) –1;
4) 2;
5) $\sqrt{2}$.

13. $\vec{a}\,(1; -\sqrt{3}\,; 0)$ векторы мен Oy осінің арасындағы бұрыш неге тең?

1) 60°;
2) 60° немесе –60°;
3) 120°;
4) 150°;
5) 30°.

14. t-ның қандай мәнінде $\vec{a}\,(-6; 0; 2t)$ мен $\vec{b}\,(3; 0; t)$ векторлары перпендикуляр болады?

1) ±9; 2) 9; 3) –9; 4) 0; 5) ±3.

Көпжақтар

15. Ақиқат тұжырымды көрсетіңдер: а) призманың табандары тең; ә) призманың жақтары тең; б) призманың барлық бүйір жақтары – параллелограмдар; в) призманың барлық жақтары – параллелограмдар; г) призманың барлық бүйір қырлары өзара параллель.

1) а, б, г;
2) барлығы;
3) в-дан басқасының барлығы;
4) а, в;
5) ә-ден басқасының барлығы.

16. Ақиқат тұжырымды көрсетіңдер. Тура: а) бес; ә) алты; б) жеті; в) тоғыз; г) он қыры бар пирамида болмайды.

1) а;
2) б;
3) а, б, в;
4) а, б;
5) а-дан басқасының барлығы.

17. Мына денелердің қайсысы дұрыс көпжақ болады: а) куб; ә) дұрыс призма; б) дұрыс пирамида; в) барлық қырлары тең тетраэдр; г) барлық жақтары тең n-бұрыштар болатын көпжақ?

1) а, ә, б;
2) барлығы;
3) ә-ден басқасының барлығы;
4) а, в;
5) а, г.

18. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 14 см-ге, ал табан қабырғасы 16 см-ге тең. Сонда пирамиданың бүйір қыры неге тең?

1) 15 см;
2) 18 см;
3) 20 см;
4) $\sqrt{330}$ см;
5) $\sqrt{300}$ см.

19. Дұрыс үшбұрышты призманың табан қабырғасы 5 см-ге, ал бүйір қыры 6 см-ге тең. Сонда призманың толық бетінің ауданы неге тең?

1) $(90 + 12{,}5\sqrt{3})$ см^2;
2) $(80 + 18\sqrt{3})$ см^2;
3) 110 см^2;
4) 105 см^2;
5) 120 см^2.

20. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табан қабырғасы мен биіктігі a-ға тең. Сонда пирамиданың толық бетінің ауданы неге тең?

1) $\frac{3a^2\sqrt{10}}{2}$;
2) $1{,}5a^2(\sqrt{3} + \sqrt{7})$;
3) $3a^2\left(\sqrt{7} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
4) $\frac{3a^2\sqrt{5}}{2}$;
5) $3a^2\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Айналу денелері және олардың элементтері

21. Цилиндрдің осьтік қимасы – ауданы 1 дм^2-ге тең шаршы. Сонда цилиндр табанының ауданы неге тең?

1) $0{,}25\pi$ дм^2;
2) 0,8 дм^2;
3) 1 дм^2;
4) $0{,}5\pi$ дм^2;
5) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ дм^2.

22. Цилиндрдің биіктігі 6 см, ал табанының радиусы 5 см. Сонда цилиндр осіне параллель және одан 4 см қашықтықта өтетін цилиндр қимасының ауданы неге тең?

1) $30\sqrt{2}$ см^2;
2) $24\sqrt{3}$ см^2;
3) 24 см^2;
4) 36 см^2;
5) 30 см^2.

23. Теңқабырғалы цилиндрдің бүйір бетінің ауданы радиусы 1,5 дм-ге тең шар бетінің ауданына тең болуы үшін цилиндр табанының радиусы қандай болу керек?

1) 1 дм;
2) 2 дм;
3) 1,5 дм;
4) $\sqrt{\pi}$ дм;
5) 0,5 дм.

24. Конус табанының ауданы 1 м^2-ге тең, ал жасаушысы табанына 60° бұрышпен көлбеген. Конустың бүйір бетінің ауданы неге тең?

1) 2 м^2;
2) 1 м^2;
3) 1,5 м^2;
4) $\sqrt{3}$ м^2;
5) $0{,}75\sqrt{3}$ м^2.

25. Қиық конус табандарының аудандары 4 дм^2 және 16 дм^2. Оның биіктігінің ортасынан табанына параллель қима жүргізілген. Сонда қиманың ауданы неге тең?

1) 8 дм^2;
2) 10 дм^2;
3) 6 дм^2;
4) 9 дм^2;
5) 7 дм^2.

26. Радиусы 13 см-ге тең шар бетінде бір-бірінен арақашықтығы 6 см, 8 см, 10 см болатын үш нүкте берілген. Сонда шардың центрінен осы үш нүктеден өтетін жазықтыққа дейінгі қашықтық неге тең?

1) 10 см;
2) 12 см;
3) 6 см;
4) 8 см;
5) 7 см.

27. Радиусы 3 дм-ге тең шар қабырғасы 6 дм-ге тең дұрыс үшбұрыштың барлық қабырғасымен жанасады. Сонда шар центрінен үшбұрыш жазықтығына дейінгі қашықтық неге тең?

1) 2,5 дм;
2) 3 дм;
3) $\sqrt{6}$ дм;
4) $2\sqrt{2}$ дм;
5) $\sqrt{5}$ дм.

Денелер көлемдері

28. Кубтың әрбір қырын 2 см-ге ұзартса, онда жаңа кубтың көлемі бастапқы кубтың көлемінен 98 см^3-ге артады. Бастапқы кубтың көлемі неге тең?

1) 30 см^3;
2) 27 см^3;
3) 24 см^3;
4) 49 см^3;
5) 36 см^3.

29. Табаны шаршы болатын тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі 3,5 м-ге, ал оның бүйір жағының диагоналі 2,5 м-ге тең. Сонда параллелепипедтің көлемі неге тең?

1) 4 м^3;
2) 6 м^3;
3) 3,5 м^3;
4) 2,5 м^3;
5) 3 м^3.

30. Тік параллелепипедтің табан қабырғалары 8 дм және 17 дм-ге, ал олардың арасындағы бұрышы 30°-қа тең. Параллелепипедтің бүйір бетінің ауданы 1 м^2-ге тең, сонда оның көлемі неге тең?

1) 136 дм^3;
2) 148 дм^3;
3) 1,5 м^3;
4) 1,6 м^3;
5) 2 м^3.

31. Дұрыс тетраэдрдің қыры 6 м-ге тең. Сонда оның көлемі неге тең?

1) 24 м^3;
2) $18\sqrt{2}$ м^3;
3) $24\sqrt{2}$ м^3;
4) $24\sqrt{3}$ м^3;
5) 25 м^3.

32. Төртбұрышты дұрыс қиық пирамида табандарының қабырғалары $5\sqrt{2}$-ге және $2\sqrt{2}$-ге тең, ал оның бүйір қыры табанына 60° бұрышпен көлбеген. Сонда осы пирамиданың көлемі неге тең?

1) $78\sqrt{3}$;
2) $58\sqrt{3}+50\sqrt{6}$;
3) $234\sqrt{3}$;
4) $\frac{78\sqrt{3}}{3}$;
5) $80\sqrt{3}$.

33. Көлемі 36 см^3-ге тең цилиндрдің биіктігін 3 есе үлкейтіп, ал табан радиусын 3 есе кішірейткен. Сонда шыққан цилиндрдің көлемі неге тең?

1) 36 см^3;
2) 24 см^3;
3) 12 см^3;
4) 18 см^3;
5) 6 см^3.

34. Конустың 2 м-ге тең жасаушысы оның табан жазықтығымен 30° бұрыш құрайды. Конустың көлемі неге тең?

1) 2π м^3;
2) π м^3;
3) 3π м^3;
4) $1{,}5\pi$ м^3;
5) $\sqrt{3}\pi$ м^3.

35. Екі шардың беттері аудандарының қатынасы 4 : 9 қатынасындай. Сонда олардың көлемдерінің қатынасы қандай?

1) 8 : 27;
2) 4 : 9;
3) 16 : 81;
4) 64 : 729;
5) 8 : 18.

36. Су қоймасы төбесі жарты шармен жабылған цилиндрден тұрады. Цилиндр табанының ішкі диаметрі 12 м, ал цилиндрдің биіктігі 4 м. Осы су қоймасының сыйымдылығы неге тең?

1) 800 м^3;
2) 750 м^3;
3) 300π м^3;
4) 298π м^3;
5) 288π м^3.

3-ҚОСЫМША

0°-ТАН 90°-ҚА ДЕЙІНГІ БҰРЫШТАРДЫҢ СИНУСТАРЫ МЕН КОСИНУСТАРЫНЫҢ ЖУЫҚ МӘНДЕРІНІҢ КЕСТЕСІ

A	sin *A*	*B*	*A*	sin *A*	*B*	*A*	sin *A*	*B*
0°	0,000	90°	30°	0,500	60°	60°	0,866	30°
1°	0,017	89°	31°	0,515	59°	61°	0,875	29°
2°	0,035	88°	32°	0,530	58°	62°	0,883	28°
3°	0,052	87°	33°	0,545	57°	63°	0,891	27°
4°	0,070	86°	34°	0,559	56°	64°	0,899	26°
5°	0,087	85°	35°	0,574	55°	65°	0,906	25°
6°	0,105	84°	36°	0,588	54°	66°	0,914	24°
7°	0,122	83°	37°	0,602	53°	67°	0,921	23°
8°	0,139	82°	38°	0,616	52°	68°	0,927	22°
9°	0,156	81°	39°	0,629	51°	69°	0,934	21°
10°	0,174	80°	40°	0,643	50°	70°	0,940	20°
11°	0,191	79°	41°	0,656	49°	71°	0,946	19°
12°	0,208	78°	42°	0,669	48°	72°	0,951	18°
13°	0,225	77°	43°	0,682	47°	73°	0,956	17°
14°	0,242	76°	44°	0,695	46°	74°	0,961	16°
15°	0,259	75°	45°	0,707	45°	75°	0,966	15°
16°	0,276	74°	46°	0,719	44°	76°	0,970	14°
17°	0,292	73°	47°	0,731	43°	77°	0,974	13°
18°	0,309	72°	48°	0,743	42°	78°	0,978	12°
19°	0,326	71°	49°	0,755	41°	79°	0,982	11°
20°	0,342	70°	50°	0,766	40°	80°	0,985	10°
21°	0,358	69°	51°	0,777	39°	81°	0,988	9°
22°	0,375	68°	52°	0,788	38°	82°	0,990	8°
23°	0,391	67°	53°	0,799	37°	83°	0,993	7°
24°	0,407	66°	54°	0,809	36°	84°	0,995	6°
25°	0,423	65°	55°	0,819	35°	85°	0,996	5°
26°	0,438	64°	56°	0,829	34°	86°	0,998	4°
27°	0,454	63°	57°	0,839	33°	87°	0,999	3°
28°	0,469	62°	58°	0,848	32°	88°	0,999	2°
29°	0,485	61°	59°	0,857	31°	89°	1,000	1°
30°	0,500	60°	60°	0,866	30°	90°	1,000	0°
A	cos *B*	*B*	*A*	cos *B*	*B*	*A*	cos *B*	*B*

0°-ТАН 89°-ҚА ДЕЙІНГІ БҰРЫШТАРДЫҢ ТАНГЕНСІНІҢ ЖУЫҚ МӘНДЕРІНІҢ КЕСТЕСІ

A	tg A	A	tg A	A	tg A
0°	0,000	30°	0,577	60°	1,73
1°	0,017	31°	0,601	61°	1,80
2°	0,035	32°	0,625	62°	1,88
3°	0,052	33°	0,649	63°	1,96
4°	0,070	34°	0,675	64°	2,05
5°	0,087	35°	0,700	65°	2,14
6°	0,105	36°	0,727	66°	2,25
7°	0,123	37°	0,754	67°	2,36
8°	0,141	38°	0,781	68°	2,48
9°	0,158	39°	0,810	69°	2,60
10°	0,176	40°	0,839	70°	2,75
11°	0,194	41°	0,869	71°	2,90
12°	0,213	42°	0,900	72°	3,08
13°	0,231	43°	0,933	73°	3,27
14°	0,249	44°	0,966	74°	3,49
15°	0,268	45°	1,000	75°	3,73
16°	0,287	46°	1,04	76°	4,01
17°	0,306	47°	1,07	77°	4,33
18°	0,325	48°	1,11	78°	4,70
19°	0,344	49°	1,15	79°	5,14
20°	0,364	50°	1,19	80°	5,67
21°	0,384	51°	1,23	81°	6,31
22°	0,404	52°	1,28	82°	7,12
23°	0,424	53°	1,33	83°	8,14
24°	0,445	54°	1,38	84°	9,51
25°	0,466	55°	1,43	85°	11,4
26°	0,488	56°	1,48	86°	14,3
27°	0,510	57°	1,54	87°	19,1
28°	0,532	58°	1,60	88°	28,6
29°	0,554	59°	1,66	89°	57,3

ЖАУАПТАР МЕН НҰСҚАУЛАР

2. а) Иә; ә) жоқ. **3.** а) Параллель болуы немесе қиылысуы мүмкін; ә), б) – қиылысады. **4.** а) Жоқ; ә) параллель болуы немесе қиылысуы мүмкін. **5.** Жоқ. **6.** Үш перпендикуляр туралы теореманы пайдаланыңдар. **7.** $2\sqrt{2}$ м. **8.** 15 см немесе 20 см. **9.** $6\sqrt{2}$. **10.** 60°. **11.** $l = \dfrac{nh}{\sin\alpha}$. **12.** ≈ 84°. **13.** $8\sqrt{2}$ см. **14.** а) 4; ә) 6; б) 4. **16.** а) 8; ә) 12; б) 6; в) 3. **17.** а) 270°; ә) 180°. **18.** 5. **19.** в). **20.** а) 4 см; ә) $4\sqrt{2}$ см; б) $4\sqrt{3}$ см; в) 96 см^2. **21.** 588 см^2. **23.** Болады. **24.** а) 48 м^2; ә) 180 м^2. **25.** а) 28 см; ә) 11,52 дм^2. **26.** 22 см. **27.** 26 см. **28.** 10 см. **29.** 264 м^2. **30.** 30°. **31.** $18\sqrt{6}$ дм^2. **33.** Болмайды. **36.** 6 см^2. **37.** $3\sqrt{2}$ м^2. **38.** а) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; ә) 45°. **39.** а) 5; ә) 5-бұрыш. **40.** Дұрыс тұжырымдар: а), б), г). **41.** ә) Бар. **43.** б) Ақиқат емес. **45.** $14\sqrt{3}$. **46.** 2 дм, 4 дм. **47.** а) 188 дм^2; ә) $(120\sqrt{3} + 230)$ м^2. **48.** а) 78 дм^2; ә) 1320 см^2. **49.** а) $96\sqrt{3}$ см^2; ә) $(12\sqrt{3} + 24)$ дм^2. **50.** а) $(40\sqrt{2} + 126)$ см^2; ә) 200 см^2. **51.** а) 45 см^2; ә) $(20\sqrt{2} + 40)$ см^2. **52.** а) $(64\sqrt{3} + 24)$ м^2; ә) $(40\sqrt{13} + 60)$ см^2. **53.** а) 48 м^2; ә) 336 дм^2. **54.** а) 96 см^2; ә) $(16\sqrt{3} + 64)$ см^2. **55.** $(60\sqrt{2} + 72)$ м^2. **58.** а), б), в) болмайды. **59.** а) 17 см; ә) $4\sqrt{2}$ дм. **60.** а) 60°; ә) 45°; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ см. **61.** а) 6 см; ә) 60°; б) $2\sqrt{6}$ см. **62.** б) Кері тұжырымдар ақиқат, оларды тұжырымдаңдар. **63.** а) $5\sqrt{3}$ дм, биіктіктің табаны – гипотенузаның ортасы; ә) 8 см, биіктіктің табаны осы доғал бұрышты үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрінде. **64.** 3 м. **66.** Бүйір қырларын қамтитын түзулер бір нүктеде түйіспейді. **67.** а) Ақиқат; ә) мүмкін; б) жоқ. **68.** ә) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$. **69.** Ақиқат. **70.** а) $2\sqrt{2}$ см; ә) 24 см^2. **71.** 4 см. **72.** 14 см. **73.** 11 см. **74.** $108\sqrt{3}$ см^2, $432\sqrt{3}$ см^2. **75.** 2. **76.** ≈ 35 м. **77.** а) 7 жағы, 15 қыры, 10 төбесі; ә) 7 жағы, 12 қыры, 7 төбесі. **78.** а) $(8\sqrt{3} + 48)$ см^2; ә) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ см. **79.** 384 см^2. **80.** а) $(256 + 64\sqrt{3})$ см^2. **81.** а) 90°; ә) $2\sqrt{3}$ см. **82.** 16 см^2. **83.** $\dfrac{64\sqrt{6}}{6}$ см^2, $\dfrac{32\sqrt{15}}{3}$ см^2. **84.** 126 см^2. **85.** а) $4\sqrt{2}$ см; ә) $75\sqrt{3}$ см^2. **86.** 4 см. **87.** $(150\sqrt{3} + 240)$ см^2. **88.** а) 36 м^2; ә) $16\sqrt{3}$ м^2. **89.** а) 230 см^2; ә) $50\sqrt{2}$ см^2. **90.** а) ≈ 82 300 м^2; ә) ≈ 8595 м^2. **91.** а) $24\sqrt{3}$ см^2; ә) $12\sqrt{39}$ см^2. **92.** $16\sqrt{2}$ дм^2. **93.** а) 45°; ә) $8\sqrt{3}$ дм^2. **94.** Екінші пирамиданың бүйір бетінің ауданы үлкен. **96.** ≈ 13,7 см. **97.** $(63 + 9\sqrt{21})$ м^2. **98.** $(2 + \sqrt{2})$ дм^2. **99.** а) $64\sqrt{3}$ см^2; ә) $4\sqrt{7}$ дм^2. **100.** а) $(63\sqrt{5} + 56)$ см^2; ә) 245 дм^2. **101.** а) $(52 + 40\sqrt{3})$ см^2; ә) $43\sqrt{3}$ см^2. **102.** а) $(100 + 140\sqrt{2})$ см^2; ә) $276\sqrt{3}$ см^2. **103.** а) $360\sqrt{3}$ см^2; ә) $180\sqrt{3}$ см^2. **104.** 280 дм^2. **105.** а) $126\sqrt{3}$ см^2; ә) $64\sqrt{2}$ см^2. **106.** 32 см^2 және 200 см^2.

107. $(20\sqrt{3}+90)$ см^2. **108.** 360 см^2. **109.** $(18+6\sqrt{3})$ дм^2. **110.** а) 211,68 см^2. **111.** Ақиқат. **112.** 294 см^2. **113.** $4{,}5\sqrt{7}$ дм^2. **114.** $27\sqrt{15}$ см^2. **115.** 72 см^2. **116.** а), ә) Ақиқат емес, сондай көпжақтарға мысалдар келтіріңдер. **118.** а) Болмайды; ә) болады. **119.** а) 180°; г) 324°. **120.** а) Болмайды; ә), б) болады. **121.** Ақиқат. **122.** $\sqrt{3}$. **123.** а) 60° немесе 90°; ә) $-\frac{1}{3}$. **124.** а) 2 см; ә) $2\sqrt{2}$ см. **125.** $\frac{1}{2}$. **126.** а) Болмайды; ә) 1 дм. **127.** $9\sqrt{3}$ м^2. **128.** а) 3 см; ә) 4 см. **130.** $2\sqrt{3}$ м^2. **131.** $\frac{1}{9}$. **132.** а) Ақиқат; ә) $16\sqrt{3}$ дм^2. **133.** $(32+96\sqrt{3})$ см^2. **135.** 4,1 м. **136.** $6\sqrt{3}$ дм^2. **137.** 800 дм^2. **138.** 315 м^2. **139.** 26 м^2. **140.** 168 дм^2. **141.** 57 м^2. **142.** ә) Болады. **143.** $8\sqrt{2}$ см. **144.** Ең үлкен аудан икосаэдрдікі, ең кіші – октаэдрдікі. **145.** ә)-суретте. **146.** а) 8 см; ә) 12 см. **147.** а) 1 см; ә) 10 см. **148.** а) 192 см^2; ә) $8\sqrt{10}$ см. **149.** 12 см. **150.** $6\sqrt{3}$ см. **151.** 10 дм^2. **152.** 17 дм^2. **153.** $8\sqrt{2}$ см. **154.** б)-суретте. **155.** Болады. **156.** а) 224π см^2; ә) 168π см^2. **157.** 150π см^2. **158.** 4π дм^2. **159.** а) $\sqrt{2}$ м; ә) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ м. **160.** 24π дм^2. **161.** $\frac{9}{\pi^2}$ дм^2. **162.** а) $\left(\frac{1}{2\pi}+1\right)$ дм^2; ә) $\left(\frac{6}{\pi}+4\sqrt{3}\right)$ дм^2. **163.** $32\pi(1+\sqrt{2})$ см^2. **164.** Жетеді. **166.** 16π см^2 және 64π см^2. **167.** а) 6 см және $6\sqrt{2}$ см; ә) 4 см және 8 см. **168.** Ақиқат. **169.** а) $3\sqrt{7}$ см^2; ә) $4\sqrt{15}$ см^2. **170.** ≈ 53°. **171.** ≈ 7,4 см. **172.** $24\sqrt{2}$ см^2. **173.** а) Мүмкін емес; ә) мүмкін. **174.** 1 : 2 : 3. **175.** а) 60π дм^2; ә) $16\pi\sqrt{2}$ дм^2. **176.** ≈ 15,7 м^2. **177.** а) 60°; ә) ≈ 71°. **178.** 2 дм. **179.** а) 180°; ә) 216°. **180.** 13 см және $\left(138\frac{6}{13}\right)^{\circ}$. **181.** $12\sqrt{3}$ дм^2. **182.** а) $64\pi\sqrt{3}$ см^2; ә) $67{,}2\pi$ см^2. **183.** 176 см^2. **184.** а) 3 м; ә) $\sqrt{3}$ м. **185.** а) 2,4 дм; ә) 6 дм. **186.** а) 2 см және 6 см; ә) $4\sqrt{2}$ см. **187.** а) 9π см^2; ә) 4 см және 12 см. **188.** Жарайды. **189.** ≈ 1,67 м. **190.** 4 см және 8 см. **191.** а) 54 см; ә) 1 м. **192.** 64π см^2. **193.** 167π см^2. **194.** 308π см^2. **195.** 4 см және 10 см. **196.** а) ≈ 853 см^2; ә) ≈ 377 см^2. **197.** Болады, мысал келтіріңдер. **198.** $72\pi\sqrt{3}$ см^2. **199.** $10\pi\sqrt{2}$ см^2. **200.** ≈ 23,7 см. **201.** ≈ 10 см. **202.** а) 8 см; ә) $2\sqrt{3}$ см. **203.** а) 192π см^2; ә) 16π см^2. **204.** $36\sqrt{3}$ см^2. **205.** 8 см. **206.** Болады. **207.** а) yOz жазықтығын қияды; ә) 4. **208.** ≈ 20 000 км. **209.** а) Ақиқат; ә) 9 есе үлкейеді. **210.** 32π см^2. **211.** $13\frac{4}{9}$. **212.** 164π см^2. **213.** а) Екі шарды; ә) тетраэдрдің толық бетінің ауданы. **214.** ≈ 20 106 м^2. **215.** 44π. **216.** а) 64π см^2; ә) 100π см^2. **218.** $S=6\pi R^2$. **219.** 80π дм^2. **220.** 54π см^2. **221.** 12π см^2. **222.** 180°. **223.** 9π см^2. **224.** $(160\pi+128\pi\sqrt{2})$ см^2. **225.** $4\sqrt{2}$ см. **226.** Аудандары тең. **227.** Ақиқат емес. **228.** 1 см^3. **229.** 2 дм^3. **230.** 45 дм^3. **231.** 20,7 м^3. **232.** 60 см^3. **233.** 72 см^3. **234.** 100 м^3. **235.** ≈ 1,5 м. **236.** 120 см^3. **237.** $420\sqrt{2}$ см^3.

238. а) Тең; ә) тең. **239.** а) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$; ә) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **240.** 81,92 см^3. **241.** 6 дм. **242.** а) 84 дм^3; ә) 21 дм^3. **243.** $121\frac{1}{3}$ м^3. **244.** PCC_1B және PC_1B_1B пирамидаларының көлемдері тең, себебі олардың табандары болатын CC_1B мен C_1B_1B үшбұрыштары тең және P төбесінен жүргізілген биіктігі ортақ. $PABC$ және PC_1B_1B пирамидаларының да көлемдері тең, себебі, егер олардың табандары ретінде тең болатын APB және PB_1B жақтарын алсақ, оларға C мен C_1 нүктелерінен жүргізілген биіктіктері де тең болады, өйткені $CC_1 \parallel (APB_1)$. Демек, $PABC$, PCC_1B және PC_1B_1B пирамидаларының көлемдері тең. **245.** Болады, мысалы, қиық пирамиданың бүйір қырын қамтитын және табан қабырғасын тең 3 бөлікке бөлетін екі қимасын жүргізсе. **246.** Ақиқат. **247.** 455 т. **248.** а) 25 есе; ә) 5 есе. **249.** 24 дм^3. **250.** а) 96π см^3; ә) 144π см^3. **251.** 16π см^3. **252.** $\frac{128}{\pi}$ см^3. **253.** $\approx$ 157 см^3. **254.** 21π см^3. **255.** 2 немесе $\frac{1}{2}$. **256.** а) 250π см^3; ә) 128π см^3. **257.** $\approx$ 1872 г. **259.** $24\pi\sqrt{3}$ см^3. **260.** а) 96π см^3; ә) 324π дм^3. **261.** а) 84π дм^3; ә) $21\pi\sqrt{3}$ дм^3. **262.** 10 л. **263.** $\frac{8}{7}$. **264.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **265.** 1404π см^3. **266.** а) 224π см^3; ә) 457π см^3. **267.** 8 есе. **268.** $\sqrt[3]{35}$ см. **269.** $4{,}5\pi$ дм^3. **270.** а) 36π см^3; ә) $\frac{9\pi}{16}$ см^3. **271.** $\frac{9\pi}{32}$ дм^3. **272.** $V_4 = V_1 + V_2 + V_3$. **273.** $\frac{32\pi}{3}$ дм^3. **274.** а) 36π см^3; ә) $\frac{343\pi}{6}$ дм^3. **275.** а) 3 см; ә) $\approx$ 4,4 см. **276.** $a < 3{,}5$ дм. **277.** 5 см. **278.** 60 дм^3. **279.** 2 л. **280.** 63π дм^3. **281.** 96π см^3. **282.** $33\frac{1}{3}$ %. **283.** а) Жоқ; ә) бар. **284.** Болады, қалай екенін түсіндіріңдер. **285.** Ақиқат емес. Дұрыс тұжырым жасаңдар. **286.** а) Жоқ; ә) мүмкін. **287.** а) Жоқ; ә), б) – мүмкін. **288.** а) Жоқ, олар айқас түзулер болуы мүмкін; ә) иә; б) жоқ, себебі үшбұрыштардың ортақ төбесі бар екені айтылмаған. **289.** 10 см. **290.** 60° және $18\sqrt{3}$ см^2. **291.** а) және ә) – ақиқат. **292.** а) Ақиқат; ә) жоқ. **293.** а) $m = 4$; ә) кез келген m үшін; б) m-нің ондай мәндері жоқ. **294.** 300 га. **295.** 40 см. **296.** а) $(18\sqrt{3} + 108)$ см^2; ә) $100\sqrt{3}$ см^2. **297.** $(12 + 8\sqrt{3})\pi$ см^2. **298.** $80\pi\sqrt{2}$ см^2. **299.** $V_{ш} > V_{пр}$. **301.** 48. **302.** $(1 + \sqrt{3})$ дм^2. **303.** 48 см^2. **304.** $50\pi\sqrt{2}$ см^2. **305.** 6695 м. Тетраэдрдің табаны ретінде катеттері 5 м және 6 м болатын тікбұрышты үшбұрышты алыңдар, сонда тетраэдрдің биіктігі 1339 м-ге тең болады. **306.** $\approx$ 4,3 мм. **307.** $\frac{7\pi\sqrt{7}}{6}$ куб бірл.

10–11-сыныптардағы геометрия курсын қайталауға арналған тест тапсырмаларының жауаптары

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2)	5)	2)	4)	2)	1)	4)	5)	5)	2)	1)	3)
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
4)	5)	1)	3)	4)	2)	1)	2)	1)	4)	3)	1)
25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
4)	2)	3)	2)	5)	1)	2)	1)	3)	2)	1)	5)

ПӘНДІК КӨРСЕТКІШ

ҚОСЫМША ӘДЕБИЕТ

1. Бадаев С. А., Досанбай П. Т., Мажитова А. Д., Таласбаева Ж. Т. Аналитикалық геометрия. Есептер жинағы: оқу құралы. – Алматы: Қазақ университеті баспасы, 2016.

2. Глейзер Г. И. История математики в школе: 9–10 классы. – М.: Просвещение, 1981.

3. Гусев В., Қайдасов Ж., Есенғазин Е. Есептер жинағы: жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныбына арналған оқу құралы. – Алматы: Мектеп, 2015.

4. Сергеев И. Н., Олехник С. Н., Гашков С. Б. Примени математику. – М.: Наука, 1990.

5. Солтан Г. Н., Солтан А. Е., Жумадилова А. Ж. Геометрия: жалпы білім беретін мектептің 9-сынып оқушыларына арналған оқулық + CD. – Көкшетау: Келешек-2030, 2019.

6. Солтан Г. Н., Солтан А. Е., Жумадилова А. Ж. Геометрия. Жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы 10 (1-б.), 11 (2-б.) сыныптардың оқушыларына арналған оқулық. Екі бөлімді. 10-сынып (1-б.). – Көкшетау: Келешек-2030 баспасы, 2020.

7. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.

Қосалқы беттердегі иллюстрацияларда пайдаланылған фотосуреттер тізімі

1. Қазақстан Республикасы Ұлттық музейі – 13 б.
2. Нұр-Сұлтан қаласындағы ЭКСПО-2017 ғимараты – 56 б.
3. Хан Шатыр – Нұр-Сұлтан қ. әлемдегі ең үлкен шатыр түріндегі ғимарат – 87 б.

СОЛТАН Геннадий Николаевич
СОЛТАН Алла Евгеньевна
ЖУМАДИЛОВА Аманбала Жумадиловна

Геометрия

Жалпы білім беретін мектептің
қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы
10 (1-б.), 11 (2-б.) сыныптардың оқушыларына арналған
ОҚУЛЫҚ
Екі бөлімді
11-сынып (2-б.)
+CD

Редакторы	С. Ш. Алибеков
Суретшісі	А. Б. Жусупов
Техникалық редакторы	Б. К. Еслямов
Мұқаба дизайнері	Е. Е. Велькер
Корректорлары	Р. С. Какаманова
	С. А. Абденова

Коды **5**13077

ИП Келешек-2030 баспасы
Қазақстан Республикасы,
020000, Көкшетау қ.
Баспа кеңсесі: Абай к-сі, 112а,
тел.: 8 (7162) 72-29-43 (қабылдау бөлімі),
8 (7162) 44-18-74, +7 708 444 18 74,
ұялы тел.: +7 702 781 06 78, +7 705 745 09 75.
http://www.keleshek-2030.kz, E-mail: torg@keleshek-2030.kz