Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова, С.Ш.Алибеков

УЧИМСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

10 КЛАСС

для учащихся 10, 11 классов естественно-математического направления общеобразовательной школы

KELESHEK 2030
КОКШЕТАУ

УДК
ББК

Солтан Г. Н. и др.
Учимся решать задачи по стереометрии: пособие для учащихся 10 класса общеобразовательной школы. Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Кокшетау: ИП Келешек-2030 баспасы, 2020. – 112 с.

В пособии предлагаются решения задач из учебника «Геометрия 10 класс» (авторы Г.Н. Солтан, А.Е. Солтан, А.Ж. Жумадилова, издательство «Келешек-2030»). Оно предназначено в помощь учащимся для формирования умений решать стереометрические задачи.

ISBN

УДК
ББК

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 4
Введение в стереометрию. Повторение планиметрии 5
I. Аксиомы стереометрии. Параллельность прямых и плоскостей 7
1. Аксиомы стереометрии и их следствия 7
2. Параллельные прямые в пространстве и их свойства 9
3. Скрещивающиеся прямые 12
4. Взаимное расположение прямой и плоскости 13
5. Параллельность плоскостей 15
6. Изображение фигур. Параллельное проектирование и его свойства 17
7. Упражнения на повторение раздела «Аксиомы стереометрии. Параллельность прямых и плоскостей» 22
II. Перпендикулярность прямых и плоскостей. Углы и расстояния в пространстве 30
8. Угол между двумя прямыми в пространстве. Перпендикулярность двух прямых 30
9. Перпендикулярность прямой и плоскости 33
10. Перпендикуляр и наклонная. Теорема о двух перпендикулярах 35
11. Расстояния между прямыми и плоскостями 37
12. Угол между прямой и плоскостью 40
13. Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями 44
14. Перпендикулярность плоскостей 50
15. Прямоугольный параллелепипед и его свойства 55
16. Ортогональная проекция плоской фигуры 60
17. Упражнения на повторение раздела «Перпендикулярность прямых и плоскостей. Углы и расстояния в пространстве» 65
III. Прямоугольная система координат и векторы в пространстве 69
18. Прямоугольная система координат в пространстве 69
19. Расстояние между двумя точками. Координаты середины отрезка 72
20. Векторы в пространстве и действия над ними 75
21. Коллинеарные и компланарные векторы. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам 80
22. Скалярное произведение двух векторов 84
23. Уравнения сферы и плоскости 90
24. Уравнения прямой в пространстве 95
25. Упражнения на повторение раздела «Прямоугольная система координат и векторы в пространстве» 100
IV. Повторение курса геометрии 10 класса 106

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие предназначено в помощь учащимся, испытывающим затруднения при самостоятельном решении задач по стереометрии из учебника «Геометрия 10 класс» (авторы Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова, издательство «Келешек 2030»). Им целесообразно пользоваться после поиска решения задачи, а также для проверки правильности своего решения. Возможно, что самостоятельно найденное решение отличается от предложенного в этой книге. Тогда полезно проанализировать и сравнить различные способы, выбрать из них более рациональный.

Решение задач различными способами способствует закреплению теоретических знаний, их повторению и приобретению умений и навыков решения задач. При решении стереометрических задач надо обращать внимание на правильность построения чертежа, стремиться, чтобы изображение фигур были наглядными. Для решения задач по стереометрии необходимо применять знания не только по геометрии, но и по алгебре и началам анализа. Поэтому решение таких задач способствует систематическому повторению всего школьного курса математики и направлено на подготовку к вступительным экзаменам в различные учебные заведения.

Надеемся, что предлагаемое пособие будет полезным для вас при изучении стереометрии.

Желаем успехов!

Авторы

ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ. ПОВТОРЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИИ

11. Какие размеры может иметь прямоугольный лист бумаги, если известно, что из него можно вырезать развертку куба с ребром 7 см?

Р е ш е н и е. Так как у куба 6 граней – квадратов со стороной, равной 7 см, то для изготовления развертки куба нужен лист бумаги размером более, чем 21 см × 28 см, с учетом клапанов для склеивания (на рисунке 1 они выделены цветом) или более чем 14 см × 35 см.

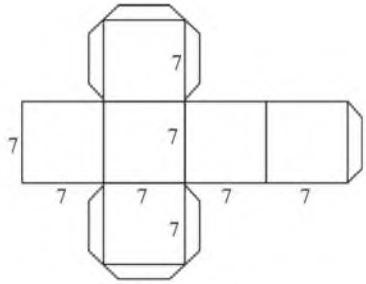


Рисунок 1

О т в е т. Более, чем 21 см × 28 см или более чем 14 см × 35 см.

12. В треугольной пирамиде *PABC* все боковые ребра равны между собой, а основание *ABC* – правильный треугольник. Известно, что площадь боковой поверхности данной пирамиды равна $96\sqrt{3}$ см^2, а площадь её полной поверхности – $112\sqrt{3}$ см^2. Найдите сторону основания пирамиды.

Р е ш е н и е.

1) Так как площадь боковой поверхности пирамиды – это сумма площадей всех её боковых граней, а площадь полной поверхности – это сумма площадей всех её граней, то площадь основания равна разности:

$112\sqrt{3} - 96\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ (см^2).

2) Пусть сторона основания равна a, тогда $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$ (см^2). Откуда $a^2 = 64$, $a = 8$ см.

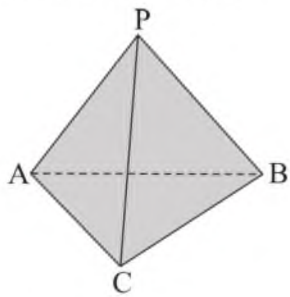


Рисунок 2

О т в е т. 8 см.

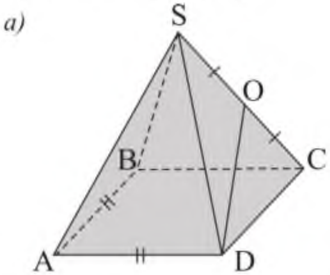
13. Основание *ABCD* пирамиды *SABCD* – квадрат, каждое её боковое ребро равно 10 см. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды, если медиана *DO* боковой грани *SDC* равна $\sqrt{97}$ см.

Р е ш е н и е. 1) Все боковые грани этой пирамиды – равные равнобедренные треугольники, поэтому площадь боковой поверхности равна: $4 \cdot S_{\Delta DSC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot DC \cdot SH$.

2) Для нахождения отрезка DC продлим медиану DO и отложим отрезок $OM = DO$, получим параллелограмм $DSMO$. По свойству диагоналей и сторон параллелограмма имеем:

$10^2 + (2\sqrt{97})^2 = 2(10^2 + DC^2)$, $100 + 388 = 200 + 2DC^2$, $DC^2 = 144$, $DC = 12$ см.

3) Из ΔDSH по теореме Пифагора $SH = 8$ см. Тогда искомая площадь равна $2 \cdot 12 \cdot 8 = 192$ (см^2).



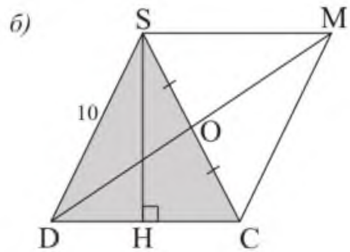


Рисунок 3

О т в е т. 192 см^2.

I. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

1. Аксиомы стереометрии и их следствия

26. Докажите, что если две плоскости имеют две различные общие точки, то они имеют единственную общую прямую, проходящую через эти точки.

Доказательство. Через две различные точки пространства можно провести единственную прямую. По аксиоме 2 эта прямая лежит в каждой из указанных плоскостей. Следовательно, данные две плоскости имеют единственную общую прямую, проходящую через две указанные точки.

27. а) Докажите, что ломаная, концы которой лежат по разные стороны от плоскости, имеет с этой плоскостью хотя бы одну общую точку.

б) Вершины треугольника лежат по одну сторону от некоторой плоскости. Докажите, что он весь лежит по одну сторону от этой плоскости. Будет ли верно это утверждение, если взять вершины четырехугольника?

Доказательство.

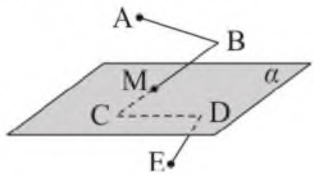


Рисунок 4

а) Если предположить, что ломаная и плоскость не имеют общих точек, тогда получим, что все её точки лежат по одну сторону от плоскости. Но это противоречит условию задачи «концы ломаной лежат по разные стороны от плоскости». Следовательно, наше предположение неверно, ломаная и плоскость имеют хотя бы одну общую точку (рисунок 4).

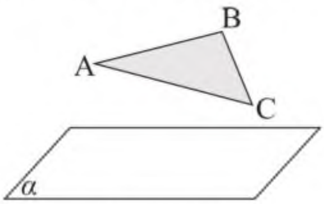


Рисунок 5

б) Пусть вершины треугольника ABC лежат по одну сторону от некоторой плоскости, тогда отрезки AC, BA и BC также лежат по одну сторону от этой плоскости (рисунок 5). Следовательно, все отрезки, соединяющие точку B с любой точкой отрезка AC, лежат по одну сторону от этой плоскости. A это значит, что весь ΔABC лежит по одну сторону от этой плоскости. Это утверждение будет верно и для вершин четырехугольника.

33. Дана треугольная пирамида $DABC$, основание которой – правильный ΔABC со стороной, равной a. Точки M и N – точки пересечения медиан грани ADC и BDC соответственно. а) Найдите длину отрезка MN. б) Постройте точку пересечения прямой CO и плоскости ABD, если O – середина отрезка MN.

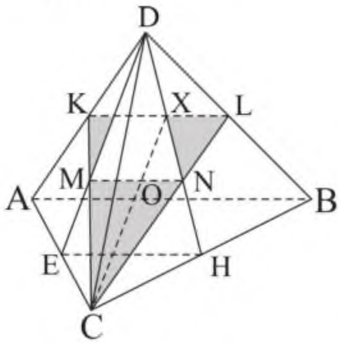


Рисунок 6

Р е ш е н и е. а) Так как $\frac{DM}{DE} = \frac{DN}{DH} = \frac{2}{3}$, то $\Delta DMN \sim \Delta DEH$, значит $\frac{MN}{EH} = \frac{2}{3}$ (рисунок 6). $EH = \frac{a}{2}$ как средняя линия ΔABC, следовательно, $MN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3}a$.

б) Прямая CO лежит в плоскости CKL, где K и L – середины ребер AD и BD, и пересекает KL в точке X. Так как точка O – середина отрезка MN, то точка X – середина отрезка KL.

О т в е т. а) $\frac{1}{3}a$; б) $CO \cap (ABD) = X$.

35. Дан правильный тетраэдр $DABC$, ребро которого равно $6\sqrt{3}$ см. Найдите радиус окружности, проходящей через середины его ребер AB, AC и DA.

Р е ш е н и е. Пусть середины ребер AB, AC и DA – это точки M, K и N (рисунок 7). Тогда $MN = MK = KN = 3\sqrt{3}$ см. Пусть O – центр окружности, описанной около ΔMNK, NH – его медиана и высота. Так как ΔMNK –правильный, то $\angle OMH = 30°$. Из ΔMOH найдем $OM = \frac{MH}{\cos 30°} = 3$ (см).

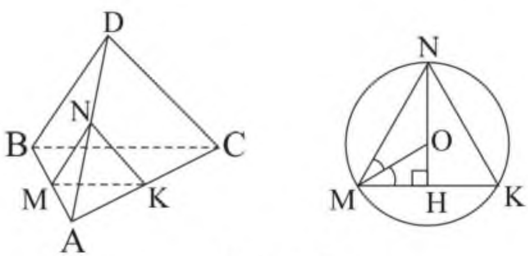


Рисунок 7

О т в е т. 3 см.

2. Параллельные прямые в пространстве и их свойства

46. Вершины A, B, C параллелограмма $ABCD$ лежат по одну сторону от плоскости α, а вершина D – по другую сторону. Докажите, что прямые AB и BC пересекают плоскость α. Укажите прямую, на которой лежат точки пересечения прямых AB и BC с плоскостью α.

Решение. Так как точки A и D лежат по разные стороны от плоскости α, то отрезок AD пересекает её, например, в точке M. Аналогично, отрезок CD пересекает плоскость α, например, в точке N (рисунок 8). По свойству параллельных прямых, если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

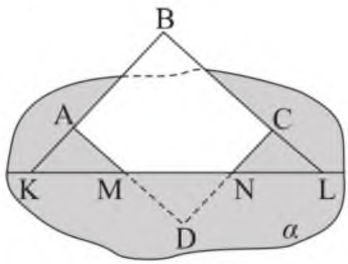


Рисунок 8

Следовательно, прямые BA и BC также пересекают плоскость α, например, в точках K и L. Причем эти точки принадлежат прямой MN, так как все общие точки плоскостей ABC и α лежат на этой прямой.

49. Два треугольника ABC и ADE имеют общую медиану AO и лежат в разных плоскостях. Точки K, L, M, N – середины отрезков AB, AD, AE, AC соответственно. Докажите, что прямые KL и MN параллельны.

Доказательство. Так как отрезки BC и DE лежат в одной плоскости и точкой пересечения делятся пополам, то четырехугольник $BDCE$ – параллелограмм (рисунок 9).

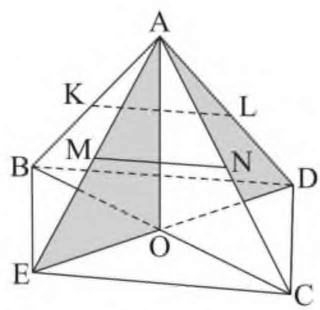


Рисунок 9

По признаку параллельности двух прямых в пространстве, если каждая из двух прямых параллельна третьей, то эти две прямые параллельны. В ΔACE отрезок MN – средняя линия, поэтому $MN \parallel CE$. В ΔABD отрезок KL – средняя линия, поэтому $KL \parallel BD$; а $BD \parallel CE$, значит $KL \parallel CE$.

$MN \parallel CE$ и $KL \parallel CE$, следовательно, $MN \parallel KL$.

50. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O – точка пересечения диагоналей грани $ABCD$, K – середина отрезка B_1O. Постройте прямую MN, проходящую через

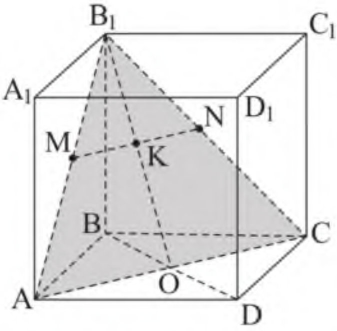


Рисунок 10

точку K и параллельную отрезку AO (M, N – точки пересечения этой прямой с гранями куба). Найдите площадь поверхности куба, если $MN = \sqrt{3}$ дм.

Р е ш е н и е. Отрезок B_1O лежит в плоскости AB_1O. В этой плоскости построим прямую параллельную отрезку AO. Эта прямая пересечет отрезок AB_1 в его середине, точке M, и отрезок CB_1 в его середине N.

Так как отрезки AB_1 и CB_1 лежат в гранях AA_1B_1B и BB_1C_1C куба, то M, N – точки пересечения прямой, параллельной отрезку AO, с гранями куба.

Так как MN – средняя линия ΔAB_1C и $MN = \sqrt{3}$ дм, то $AC = 2\sqrt{3}$ дм. Учитывая, что диагональ квадрата со стороной a равна $a\sqrt{2}$, найдем $a = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$ (дм). Поверхность куба состоит из шести квадратов, поэтому площадь поверхности куба равна: $6a^2 = 36$ (дм^2).

О т в е т. 36 дм^2.

51. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ основания $BD = 12$ см, $\angle DBC = 60°$. Через точку O – середину его диагонали BD_1 проведите прямую, параллельную биссектрисе BK ΔBCD. Укажите точку P пересечения этой прямой с гранью CC_1D_1D и найдите длину отрезка OP.

Р е ш е н и е. В плоскости BD_1K через точку O – середину BD_1 проведем прямую, параллельную прямой BK (рисунок 11). Эта прямая пересечет отрезок D_1K в его середине, точке P. Эта и есть точка пересечения построенной прямой с гранью CC_1D_1D.

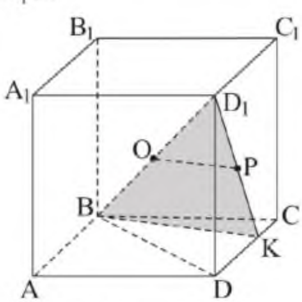


Рисунок 11

В ΔBD_1K отрезок $OP = \frac{1}{2}BK$. Найдем длину биссектрисы BK.

В прямоугольном параллелепипеде все грани прямоугольники, поэтому в ΔBCD $\angle C = 90°$. Кроме того, по условию $\angle DBC = 60°$ и $\angle BDC = 30°$, следовательно $BC = 6$ см, $DC = 6\sqrt{3}$ см. Биссектриса BK этого треугольника делит сторону DC на отрезки пропорциональные прилежащим сторонам треугольника,то есть $\frac{CK}{KD} = \frac{BC}{BD} = \frac{1}{2}$.

Значит $CK = \frac{1}{3}\ DC = 2\sqrt{3}$ (см).

В ΔBCK $\angle C = 90°$, $\angle KBC = 30°$, поэтому $BK = 2CK = 4\sqrt{3}$ (см). Тогда $OP = 2\sqrt{3}$ (см).

Ответ. $2\sqrt{3}$ см.

3. Скрещивающиеся прямые

64. Дан правильный тетраэдр $DABC$, ребро которого равно a. Точка K – середина ребра BD. На медиане BM треугольника ABC отмечена точка N так, что $BN : BM = 1 : 3$. Докажите, что отрезки CK и DN лежат на скрещивающихся прямых и равны.

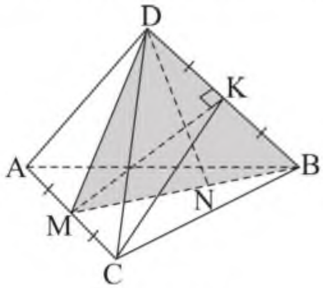


Рисунок 12

Р е ш е н и е. Прямая DN лежит в плоскости BDM, а прямая CK пересекает эту плоскость в точке K, не принадлежащей прямой DN (рисунок 12). Следовательно отрезки CK и DN лежат на скрещивающихся прямых.

Отрезок CK – медиана правильного ΔBDC, сторона которого равна a, поэтому $CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Длину отрезка DN найдем из ΔBDN: $DN = \sqrt{BD^2 + BN^2 - 2BD \cdot BN \cdot \cos\angle DBN}$, где $BD = a$, $BN = \frac{1}{3} \cdot BM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $\cos\angle DBN = \frac{BK}{BM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (из прямоугольного ΔBKM). Тогда $DN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Таким образом, отрезки CK и DN равны.

4. Взаимное расположение прямой и плоскости

81. Дан правильный тетраэдр $PABC$, ребро которого равно a. а) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через середину бокового ребра PA, параллельной высоте AH треугольника ABC и стороне BC. б) Найдите площадь этого сечения.

Р е ш е н и е. а) В плоскости APH строим $MN \parallel AH$, N – середина PH (рисунок 13). В плоскости CPB через точку N проводим $KL \parallel CB$, точки K и L – середины ребер PC и PB соответственно. Получили $(MKL) \parallel AH$ и $(MKL) \parallel CB$, следовательно, ΔMKL – искомое сечение.

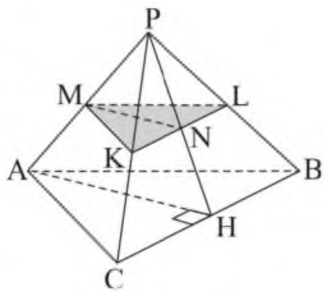


Рисунок 13

б) ΔMKL – равносторонний, так как $MK = KL = ML = \frac{1}{2}a$ (как средние линии равных треугольников). $S_{\Delta MKL} = \frac{MK^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

О т в е т. б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

82. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Точка K – середина отрезка DA, а точка F лежит на отрезке DB так, что $BF : FD = 3 : 2$. Постройте плоскость, проходящую через точку K и параллельную прямым AF и AC.

Р е ш е н и е. Пусть данные точки являются вершинами тетраэдра $DABC$ (рисунок 14). Тогда в плоскостях его граней ABD и ACD проведем соответственно прямые $KN \parallel AF$ и $KM \parallel AC$. По теореме Фалеса точки N и M середины отрезков DF и DC соответственно.

Плоскость KMN искомая.

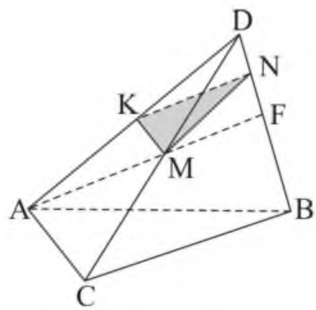


Рисунок 14

83. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M лежит на ребре BC так, что $BM : MC = 1 : 2$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку M и параллельной прямым BD и BC_1. Найдите площадь этого сечения, если $AB = 6$ дм.

Р е ш е н и е. В плоскостях BC_1C и BCD проводим прямые MK и MN соответственно параллельные прямым BC_1 и BD (рисунок 15). При этом

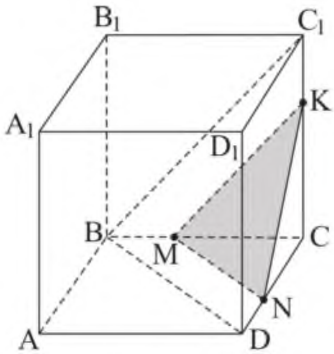


Рисунок 15

$K \in CC_1$, $N \in DC$ и $C_1K : KC = 1 : 2$, $DN : NC = 1 : 2$ (по теореме Фалеса). Тогда ΔMKN – искомое сечение.

Так как $MK = \frac{2}{3}BC_1$, $MN = \frac{2}{3}BD$ и $NK = \frac{2}{3}DC_1$ то ΔMKN – равносторонний, со стороной, равной $\frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{2}$ дм $= 4\sqrt{2}$ дм. Следовательно, его площадь равна $\frac{(4\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}$ (дм^2).

Ответ. $8\sqrt{3}$ дм^2.

84. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, все ребра которой равны a. Точки M, N – середины ребер SA, SB соответственно, O – точка пересечения медиан ΔSDC. Постройте сечение пирамиды плоскостью MNO и найдите его периметр.

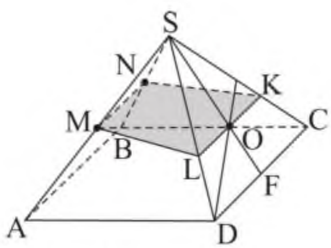


Рисунок 16

Решение. Так как $MN \parallel AB$, $AB \parallel DC$, то плоскость $MNO \parallel DC$, поэтому эта плоскость пересекает грань SDC по прямой, параллельной DC. В плоскости SDC через точку O проводим прямую $KL \parallel DC$, $K \in SC$, $L \in SD$. Четырехугольник $MNKL$ – искомое сечение (рисунок 16).

MN – средняя линия ΔSAB, $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$. Из подобия треугольников SLK и SDC следует, что $\frac{LK}{DC} = \frac{SO}{SF} = \frac{2}{3}$, значит $KL = \frac{2}{3}DC = \frac{2}{3}a$.

В ΔMSL $\angle S = 60°$, $SM = \frac{1}{2}a$, $SL = \frac{2}{3}a$, $ML = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{13}}{6}$.

$\Delta MSL = \Delta NSK$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $NK = ML = \frac{a\sqrt{13}}{6}$.

$$P_{MNKL} = \frac{a}{2} + 2 \cdot \frac{a\sqrt{13}}{6} + \frac{2a}{3} = \frac{(7 + 2\sqrt{13})a}{6}.$$

Ответ. $\frac{(7 + 2\sqrt{13})a}{6}$.

5. Параллельность плоскостей

99. Плоскости α и β параллельны. Из точки O, не принадлежащей этим плоскостям, проведены три луча, пересекающие плоскость α в точках A, B, C, а плоскость β – в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, причем $OA < OA_1$. Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$, если $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $OA = m$, $AA_1 = n$.

Решение. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = k$, $k = \frac{m}{m+n}$. $P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{(a+b+c)(m+n)}{m}$.

102. Точка M лежит на ребре DC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и параллельной плоскости BA_1D_1.

Решение. Так как плоскость сечения параллельна плоскости BA_1D_1, то линии их пересечения с гранями параллелепипеда параллельны. Поэтому в плоскости ABC проводим прямую $MN \parallel BC$, $N \in AB$; в плоскости ABB_1 – прямую $NK \parallel BA_1$, $K \in AA_1$; в плоскости ADD_1 – прямую $KL \parallel A_1D_1$. Четырехугольник $MNKL$ – искомое сечение (рисунок 17).

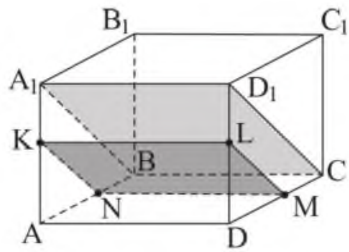


Рисунок 17

103. Дана пирамида $SABCD$ с квадратным основанием, все ребра которой равны a. Точки M и N – середины её ребер AB и SC соответственно. а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку N и параллельной плоскости SDM. б) Найдите площадь полученного сечения, если $\angle SDM = 45°$.

Решение. а) Так как плоскость сечения, проходящая через точку N параллельна плоскости SDM, то она пересечет грань SDC пирамиды по прямой $NK \parallel SD$, K – середина CD, а грань $ABCD$ по прямой, проходящей через точку K и параллельной DM – это прямая KB (рисунок 18). ΔNKB искомое сечение.

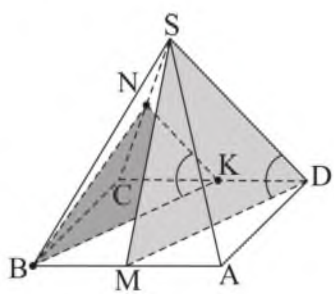


Рисунок 18

б) $S_{\Delta NKB} = \frac{1}{2}KN \cdot KB \cdot \sin\angle NKB$.

$NK = \frac{1}{2}SD = \frac{a}{2}$ (как средняя линия ΔSCD).

$BK = MD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ (как противоположные стороны параллелограмма $MBKD$).

$\angle NKB = \angle SDM = 45°$ (как углы с соответственно параллельными сторонами).

$S_{\Delta NKB} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Ответ. $\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

104. В тетраэдре $DABC$ точка M – середина ребра AD. Отрезок DD_1 – медиана грани ABD, точки E и P – середины отрезков BC и DD_1 соответственно. Точка K принадлежит ребру DC, причем $DK : KC = 4 : 1$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку E параллельно плоскости MPK. Укажите вид многоугольника, который является построенным сечением.

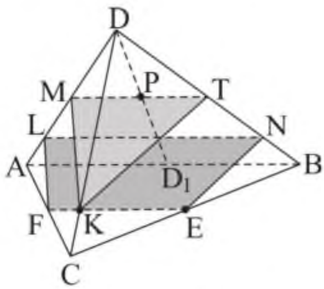


Рисунок 19

Решение. Прямая MP лежит в плоскости ADB и параллельна AB, $MP \cap DB = T$. Сечением данного тетраэдра плоскостью MPK является ΔMKT.

Так как плоскость, проходящая через точку E, и плоскость MKT параллельны, то они пересекают грани тетраэдра по параллельным прямым. Поэтому в плоскости грани DBC проводим прямую $EN \parallel KT$, в плоскостях ABC и ABD – прямые EF и NL соответственно, параллельные AB (так как $AB \parallel MT$). Тогда четырехугольник $EFLN$ – искомое сечение.

Так как $EF \parallel AB$ и $LN \parallel AB$, но $EF \neq LN$, то $EFLN$ – трапеция.

6. Изображение фигур. Параллельное проектирование и его свойства

105. Дана параллельная проекция равнобедренного треугольника. Изобразите проекцию:

а) точки пересечения его медиан; б) средней линии этого треугольника; в) биссектрисы внешнего угла при его вершине.

Решение. Пусть ΔABC – параллельная проекция данного равнобедренного треугольника, в нем $AB = BC$. По свойству параллельного проектирования середина отрезка изображается серединой отрезка – его проекции. Поэтому отметим середины отрезков AC и BC – точки H и K, и построим медианы BH и AK.

Тогда: а) точка M их пересечения является проекцией точки пересечения медиан данного треугольника; б) HK – проекция его средней линии (рисунок 20).

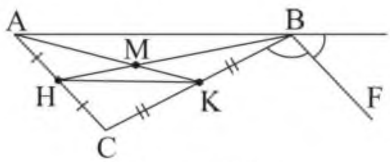


Рисунок 20

Так как биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна его основанию, а их проекции тоже параллельны, то луч BF, параллельный AC, является изображением этой биссектрисы (рисунок 20).

106. Изобразите параллельную проекцию: а) прямоугольника и проекции двух его осей симметрии; б) равнобедренной трапеции, в которой одно основание в два раза больше другого и ось её симметрии.

Решение. На рисунке 21 изображена проекция прямоугольника $ABCD$ и его осей симметрии MN и KL. На рисунке 22 – проекция данной равнобедренной трапеции $ABCD$ и её оси симметрии KL.

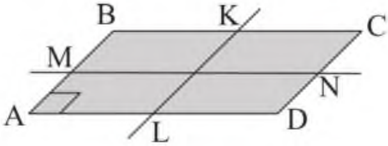


Рисунок 21

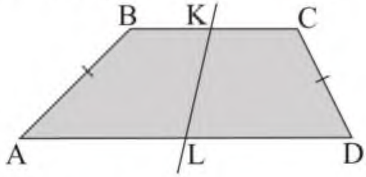


Рисунок 22

108. Даны три точки, не лежащие на одной прямой, которые являются проекциями двух соседних вершин квадрата и точки пересечения его диагоналей. Постройте проекцию этого квадрата.

Р е ш е н и е. Пусть точки A и B – проекции двух соседних вершин квадрата, O – проекция точки пересечения диагоналей квадрата. Тогда отложив на лучах AO и BO отрезки $OC = AO$ и $OD = BO$, получим параллелограмм $ABCD$ – проекцию данного квадрата.

110. На плоскости дано изображение проекции равностороннего треугольника в виде произвольного треугольника. Постройте изображение проекции окружности: а) описанной около этого треугольника; б) вписанной в этот треугольник.

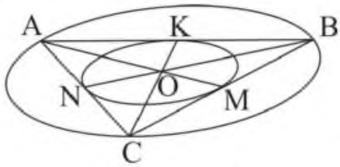


Рисунок 23

Р е ш е н и е. Пусть ΔABC является проекцией равностороннего треугольника. Построим его медианы AM, BN, CK и обозначим точку O их пересечения. Проекциями указанных окружностей являются:

а) эллипс с центром в точке O, содержащий точки A, B, C;

б) эллипс с центром в точке O, содержащий точки M, N, K (рисунок 23).

111. Дана трапеция, диагонали которой точкой пересечения делятся в отношении 2 : 3. Параллельной проекцией этой трапеции на некоторую плоскость является трапеция $ABCD$, средняя линия которой равна 9 см. Найдите основания BC и AD этой трапеции.

Р е ш е н и е. Пусть диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O (рисунок 24). Так как отношение длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой, или на параллельных прямых, равно отношению длин самих отрезков, то $BO : OD = 2 : 3$. Из подобия треугольников BOC и DOA следует, что $BC : AD = 2 : 3$.

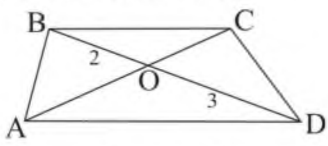


Рисунок 24

Обозначим $BC = 2x$ (см), $AD = 3x$ (см). Тогда по свойству средней линии трапеции получим $2x + 3x = 18$, откуда $x = 3{,}6$. $BC = 7{,}2$ см, $AD = 10{,}8$ см. (Рисунок 24)

О т в е т. 7,2 см; 10,8 см.

112. Проекция отрезка $AB = 18$ см на параллельную ему плоскость α – отрезок DC. Точки M и N делят отрезок BC на три равные части. Прямые AM и AN пересекают плоскость α в точках K и L соответственно. Найдите длину отрезка KL.

Р е ш е н и е. Так как $AB \parallel \alpha$, то $AB \parallel DC$.

$\Delta ABM \sim \Delta KCM$, $\frac{AB}{KC} = \frac{BM}{CM} = \frac{1}{2}$, $KC = 2 \cdot AB = 36$ (см).

$\Delta ABN \sim \Delta LCN$, $\frac{AB}{LC} = \frac{BN}{CN} = \frac{2}{1}$, $LC = \frac{AB}{2} = 9$ (см).

$KL = KC - LC = 36 - 9 = 27$ (см).

О т в е т. 27 см.

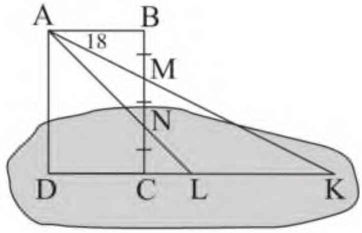


Рисунок 25

113. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a. Точки P и K – середины его ребер AB и AA_1. Постройте проекцию P_1K_1 отрезка PK на плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ в направлении AD_1. Докажите, что точка E пересечения прямых PK и P_1K_1 принадлежит прямой A_1B_1 и найдите длину отрезка A_1E.

Р е ш е н и е. В плоскости ADD_1 проводим $KK_1 \parallel AD_1$, $K_1 \in A_1D_1$.

В плоскости BAD_1 строим $PP_1 \parallel AD_1$, $P_1 \in C_1D_1$. Отрезок P_1K_1 – проекция отрезка PK на плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ в направлении AD_1.

Прямая P_1K_1 лежит в плоскости $A_1B_1C_1$ и пересекает прямую A_1B_1 в точке E. Из равенства прямоугольных треугольников $D_1K_1P_1$ и A_1K_1E следует, что $A_1E = \frac{a}{2}$.

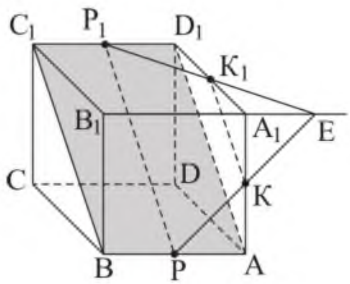


Рисунок 26

Прямая PK лежит в плоскости ABA_1 и пересекает прямую A_1B_1 в точке E'. Из равенства треугольников AKP и A_1K_1E' следует, что $A_1E' = \frac{a}{2}$. Следовательно, точки E и E' совпадают и $P_1K_1 \cap PK = E$, $E \in A_1B_1$.

О т в е т. $A_1E = \frac{a}{2}$.

114. Трапеция ABC_1D_1 является проекцией трапеции $ABCD$ на плоскость, проходящую через прямую AB. Равны ли средние линии этих трапеций, если: а) $AB \parallel C_1D_1$; б) $BC_1 \parallel AD_1$?

Р е ш е н и е. а) Если $AB \parallel C_1D_1$, то основания трапеции AB и CD, причем $CD = C_1D_1$ (рисунок 27, *а*). Тогда средние линии MN и M_1N_1 равны.

б) Если $BC_1 \parallel AD_1$, тогда основания трапеции AD и BC не равны их проекциям AD_1 и BC_1. Поэтому средние линии MN и M_1N не равны (рисунок 27, *б*).

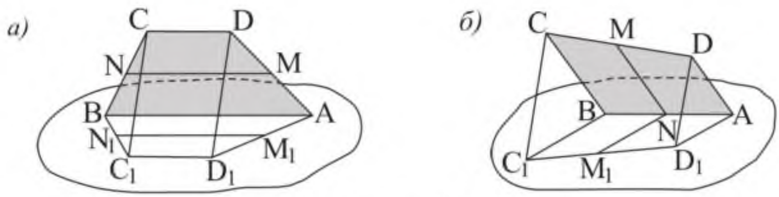


Рисунок 27

116. Даны квадрат $ABCD$ и ромб $AMKD$, не лежащие в одной плоскости, причем точка B является параллельной проекцией точки M на плоскость ABC. Найдите периметр четырехугольника $BMKC$, если $AB = 5$ см, $\angle MAB = 120°$.

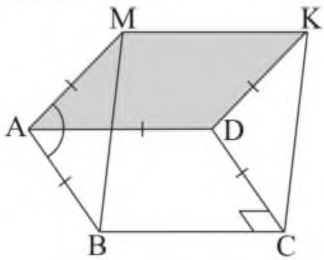


Рисунок 28

Р е ш е н и е. Четырехугольник $BMKC$ – параллелограмм (рисунок 28), в котором $MK = BC = 5$ см, $MB = KC = \sqrt{25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos 120°} = 5\sqrt{3}$ (см). Следовательно, $P_{BMKC} = 10(1 + \sqrt{3})$ см.

О т в е т. $10(1 + \sqrt{3})$ см.

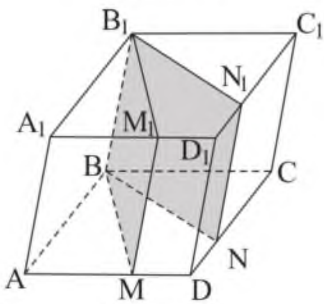


Рисунок 29

117. Через ребро BB_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведите две плоскости, делящие его нижнее основание на три равновеликие части.

Р е ш е н и е. Разделим отрезки AD и DC на три равные части и отметим точки M и N такие, что $AM : MD = CN : ND = 2 : 1$.

Плоскость MBB_1 пересечет грань AA_1D_1D по прямой $MM_1 \parallel AA_1$, а плоскость NBB_1 пересечет грань DD_1C_1C по прямой $NN_1 \parallel CC_1$, где $M_1 \in A_1D_1$, $N_1 \in C_1D_1$.

Так как $\Delta ABD = \Delta CBD$, то $\frac{2}{3} S_{\Delta ABD} = \frac{2}{3} S_{\Delta CBD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABD} + \frac{1}{3} S_{\Delta CBD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$.

Следовательно, параллелограммы BB_1M_1M и BB_1N_1N являются искомыми сечениями, так как делят основание на три части, площади которых равны $\frac{1}{3} S_{ABCD}$.

118. Боковое ребро четырехугольной пирамиды разделено на четыре равные части. Через точки деления проведены три плоскости, каждая из которых параллельна плоскости основания. Известно, что площадь среднего из полученных сечений равна 1 м^2. Найдите площади остальных сечений и основания пирамиды.

Р е ш е н и е. Каждое из построенных сечений является четырехугольником, подобным основанию, поэтому отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия:

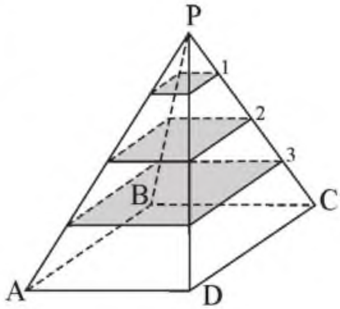


Рисунок 30

$$\frac{S_1}{S_{ABCD}} = \frac{1}{16}, \ \frac{S_2}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4}, \ \frac{S_3}{S_{ABCD}} = \frac{9}{16}.$$

Так как $S_2 = 1$ м^2, то $S_{ABCD} = 4$ м^2, $S_1 = \frac{1}{4}$ м^2, $S_3 = \frac{9}{4}$ м^2.

О т в е т. 0,25 м^2, 2,25 м^2, 4 м^2.

7. Упражнения на повторение раздела «Аксиомы стереометрии. Параллельность прямых и плоскостей»

120. Докажите, что можно провести единственную плоскость, содержащую данную: а) двухзвенную ломаную; б) окружность.

Доказательство. а) Через три точки, вершины ломаной, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость (аксиома 1). Так как вершины ломаной лежат в этой плоскости, то и каждое её звено лежит в данной плоскости (аксиома 2).

б) Через три точки окружности можно провести единственную плоскость. В этой плоскости через данные три точки проходит единственная окружность.

Следовательно, можно провести единственную плоскость, содержащую данную: а) двухзвенную ломаную; б) окружность.

121. Даны две параллельные прямые a и b и точка C, не лежащая ни на одной из них. Исследуйте, лежит ли точка C в одной плоскости с прямыми a и b, если известно, что через точку C можно провести прямую, пересекающую: а) только одну из данных прямых; б) обе данные прямые.

Решение. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость. а) Если бы точка С принадлежала этой плоскости, то прямая, проходящая через эту точку и пересекающая одну из параллельных прямых, пересекала бы и вторую прямую, что противоречит условию. Следовательно, точка С не принадлежит данной плоскости.

б) Так как третья прямая пересекает прямые a и b, то две её точки лежат в данной плоскости. Следовательно, и вся третья прямая, значит и точка C, лежит в этой плоскости.

122. Изобразите четыре прямые, каждые две из которых пересекаются, если эти прямые: а) лежат в одной плоскости; б) не лежат в одной плоскости.

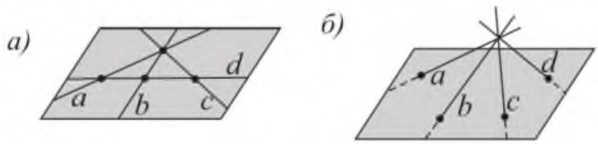


Рисунок 31

Ответ. а) Рисунок 31, *а*; б) рисунок 31, *б*.

125. а) Точка O – центр окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, точка M – не принадлежит плоскости ΔABC. Исследуйте, можно ли провести плоскость через прямую DM и точки B и O.

б) Точка O – центр вписанной в равнобедренный ΔABC окружности, точка P – середина основания AC, точка E не принадлежит плоскости ABC. Исследуйте, можно ли провести плоскость через прямую BE и точки P и O.

Р е ш е н и е. а) Через прямую DM и точки B и O можно провести плоскость, так как точка O – середина отрезка BD, а через две пересекающие прямые MD и BD можно провести единственную плоскость.

в) Через прямую BE и точки P и O можно провести плоскость, так как центр O вписанной в равнобедренный ΔABC окружности лежит на медиане BP.

126. Параллелограммы $ABCD$ и $ADEF$ не лежат в одной плоскости. Точки M и N – середины отрезков AB и AF соответственно. а) Докажите, что прямая MN лежит в плоскости ABF. Постройте точку пересечения: б) прямой CM и плоскости DEF; в) прямой EN и плоскости BCD.

Р е ш е н и е. а) Так как точки M и N лежат в плоскости ABF, то и вся прямая MN лежит в этой плоскости (аксиома 2).

б) Прямая CM лежит в плоскости $ABCD$ и пересекает прямую AD в точке K. Так как AD лежит и в плоскости DEF, то $CM \cap (DEF) = K$.

в) Прямая EN лежит в плоскости $ADEF$ и пересекает прямую AD в какой-то точке L. Так как $\Delta EFN = \Delta LAN$ и $\Delta CBM = \Delta KAM$, то $EF = AL$ и $CB = AK$. Из того, что $EF = CB$ следует, что $AL = AK$, то есть точки L и K совпадают. Следовательно, $EN \cap (BCD) = K$.

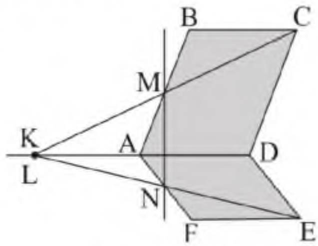


Рисунок 32

127. На ребрах AB и AD пирамиды $SABCD$ отмечены точки M и N соответственно. Постройте точку пересечения прямой MN и плоскости: а) SBC; б) SDC. По какой прямой пересекаются плоскости: в) SMN и SBC; г) SMN и SDC?

Р е ш е н и е . а) $MN \cap (SBC) = K$;

б) $MN \cap (SDC) = L$;

в) $(SMN) \cap (SBC) = SK$; г) $(SMN) \cap (SDC) = SL$ (рисунок 33).

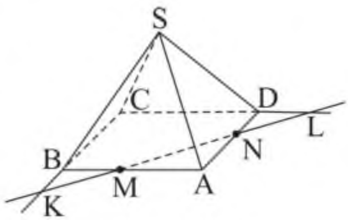


Рисунок 33

131. В серединах четырех ребер здания Национального центра водных видов спорта в Пекине (рисунок 93, *а* учебника) сидели птицы. Исследуйте, находились ли они в одной плоскости, проходящей через любые три из этих точек M, N, P, K (рисунок 34).

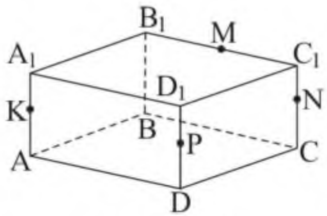


Рисунок 34

Р е ш е н и е. Построим все различные плоскости, проходящие через три из указанных точек: KPN, MPN, MPK, MNK (рисунок 35). На каждом из рисунков четвертая из данных точек не принадлежит плоскости, проходящей через три из них. Это можно доказать, используя признак скрещивающихся прямых. Например на рисунке 35, *а* прямая PK лежит в плоскости PKN, а прямая MN пересекает её в точке, не принадлежащей этой прямой.

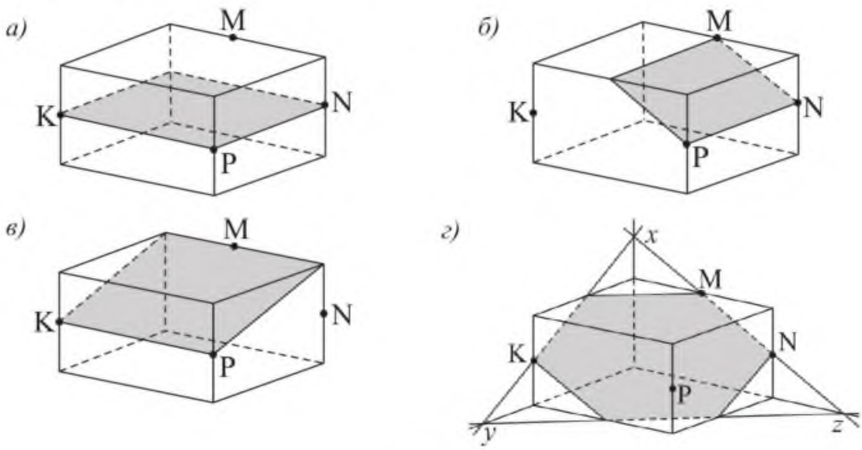


Рисунок 35

133. На ребрах DA, DB и DC тетраэдра $DABC$ взяты точки M, K и P так, что $DM : MA = DK : KB = DP : PC = 3 : 2$. Докажите, что плоскости MKP и ABC параллельны. Найдите площадь ΔMKP, если площадь ΔABC равна 9 см^2.

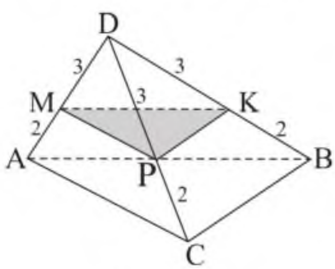


Рисунок 36

Р е ш е н и е. Так в треугольниках MDP и ADC угол D – общий и $\frac{MD}{AD} = \frac{PD}{CD} = \frac{3}{5}$, то $\Delta MDP \sim \Delta ADC$, следовательно, $MP \parallel AC$ (рисунок 36).

Аналогично, $\Delta KDP \sim \Delta BDC$, поэтому $KP \parallel BC$. Следовательно, $(MKP) \parallel (ABC)$ по признаку параллельности двух плоскостей. $\frac{S_{\Delta MKP}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$, откуда $S_{\Delta MKP} = \frac{9}{25} \cdot 9 = 3{,}24$ (см^2).

О т в е т. 3,24 см^2.

134. В пространстве даны три точки A, B, C, расстояние между каждыми двумя из которых равно 1 м. Точка K пространства удалена от точек A и B на расстояние, равное 0,5 м. Найдите расстояние между точками K и C.

Р е ш е н и е. Так как $AK + KB = AB$, то точка K – середина отрезка AB (рисунок 37). Через три точки A, B, C пространства проходит единственная плоскость, в которой лежит равносторонний ΔABC. Отрезок CK – медиана этого треугольника, $CK = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 0{,}5\sqrt{3}$ (м).

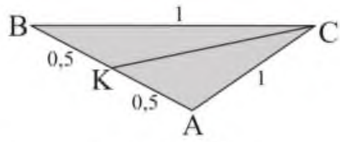


Рисунок 37

О т в е т. $0{,}5\sqrt{3}$ м.

136. Параллельной проекцией равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD является неравнобедренная трапеция. Постройте проекцию: а) оси симметрии; б) высоты BH этой трапеции.

Р е ш е н и е. а) Проекцией оси симметрии равнобедренной трапеции будет прямая, проходящая через середины M и N её оснований (рисунок 38).

б) Проекцией высоты этой трапеции будет отрезок $BH \parallel MN$.

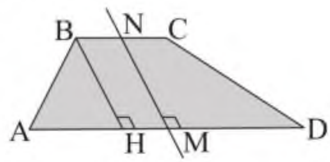


Рисунок 38

137. Квадрат AA_1B_1B и правильный треугольник ABC не лежат в одной плоскости. На диагонали AB_1 квадрата отмечена точка D так, что $AD : DB_1 = 4 : 3$. Прямая A_1D пересекает плоскость ABC в точке O. Найдите расстояние AO, если $AB = 12$ см.

Р е ш е н и е. В плоскости ABB_1 прямая A_1D пересекает прямую AB в точке O (рисунок 39). Так как $AB \subset (ABC)$, то $A_1D \cap (ABC) = O$.

$\Delta OAD \sim \Delta A_1B_1D$ (по двум равным углам), следовательно, $\frac{OA}{A_1B_1} = \frac{AD}{B_1D}$, или $\frac{AO}{12} = \frac{4}{3}$, откуда $AO = 16$ см.

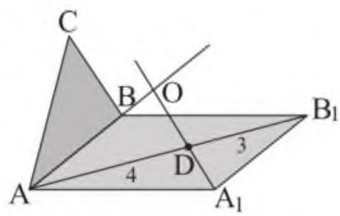


Рисунок 39

О т в е т. 16 см.

140. Основание пирамиды $DABC$ правильный треугольник со стороной, равной 20 см, а её боковые ребра равны. Точка M – середина ребра DC, известно, что $AM = 13$ см. Найдите расстояние от середины ребра DB до отрезка AM.

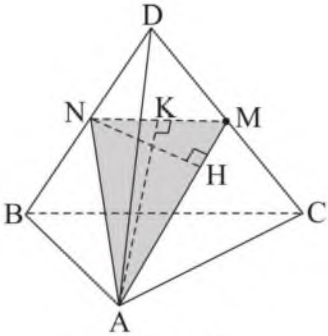


Рисунок 40

Р е ш е н и е. Пусть N – середина ребра BD. Построим сечение пирамиды плоскостью AMN (рисунок 40). Это равнобедренный треугольник AMN, в котором $MN = 10$ см, $AM = AN = 13$ см. Высота NH этого треугольника и есть искомое расстояние.

Высота AK ΔAMN равна:

$\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot NH$,

откуда $NH = \frac{120}{13} = 9\frac{3}{13}$ (см).

О т в е т. $9\frac{3}{13}$ см.

142. Параллельной проекцией равнобедренного ΔABC на плоскость, параллельную стороне AB, является равносторонний $\Delta A_1B_1C_1$. Постройте проекцию A_1E_1 биссектрисы AE ΔABC. Найдите длину отрезка A_1E_1, если $AB = 8$ см, $AC = CB = 13\frac{1}{3}$ см.

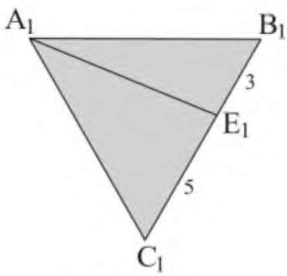


Рисунок 41

Р е ш е н и е. Так как плоскость проекции параллельна AB, то $A_1B_1 \parallel AB$ и $A_1B_1 = AB$. По свойству биссектрисы треугольника точка E делит сторону BC на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то есть $\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{8 \cdot 3}{40} = \frac{3}{5}$.

По свойствам параллельного проектирования отношение длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой, равно отношению длин самих отрезков. Поэтому $\frac{B_1E_1}{C_1E_1} = \frac{3}{5}$ (рисунок 41).

В $\Delta A_1B_1E_1$ известны две стороны $A_1B_1 = 8$ см, $B_1E_1 = 3$ см и угол между ними $\angle B_1 = 60°$, поэтому $A_1E_1 = \sqrt{8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos 60°} = \sqrt{49} = 7$ (см).

О т в е т. 7 см.

143. Дан правильный тетраэдр $DABC$. Точки M, N, K, L – середины его ребер AD, CD, AC и BD соответственно.

а) Постройте точку O пересечения прямой KL и плоскости BMN. б) Найдите отношение $KO : OL$.

Решение. а) Так как точка L принадлежит ребру BD, то прямая KL лежит в плоскости BDK (рисунок 42).

Так как DK – медиана ΔADC, то она пересекает его среднюю линию MN в точке F – середине MN.

Плоскости BDK и BMN пересекаются по прямой BF.

Отрезки BF и KL – медианы ΔBDK, они пересекаются в точке O – это и есть точка пересечения прямой KL и плоскости BMN.

б) По свойству медиан $KO : OL = 2 : 1$.

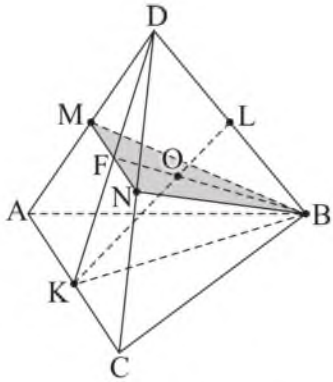


Рисунок 42

145. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отмечены точки M – середина ребра A_1B_1, N на ребре DD_1 так, что $DN : ND_1 = 1 : 5$. а) Постройте прямые MP и NK, каждая из которых параллельна диагонали B_1D, где P и K – точки пересечения этих прямых с гранями параллелепипеда. б) Найдите длины отрезков MP и NK, если $B_1D = 30$ см. в) Лежат ли прямые MP и NK в одной плоскости? Если лежат, то постройте сечение данного параллелепипеда этой плоскостью.

Р е ш е н и е. а), б) В плоскости A_1B_1D через точку M проведем прямую $MP \parallel B_1D$, $P \in A_1D$ (рисунок 43, *а*). Отрезок MP – средняя линия ΔA_1B_1D, $MP = \frac{1}{2}B_1D = 15$ (см).

В плоскости B_1D_1D через точку N проведем прямую $NK \parallel B_1D$, $K \in B_1D_1$ (рисунок 43, *а*). Из подобия треугольников B_1D_1D и KD_1N следует, что $\frac{KN}{B_1D} = \frac{D_1D}{D_1N}$, или $\frac{KN}{30} = \frac{5}{6}$, откуда $KN = 25$ (см).

в) Прямые MP и KN параллельны, так как каждая из них параллельна прямой B_1D, поэтому они лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересечет верхнюю грань параллелепипеда по прямой MK.

В плоскости $A_1B_1C_1D_1$ прямая MK пересечет ребро B_1C_1 в точке F, а прямую C_1D_1 в точке X. Прямая XN принадлежит секущей плоскости и плоскости грани CC_1D_1D и пересекает ребро CC_1 параллелепипеда в точке S.

Грань BB_1C_1C и секущая плоскость имеют две общие точки F и S, следовательно, они пересекаются по прямой FS.

Грань AA_1D_1D и секущая плоскость имеют две общие точки N и P, следовательно, они пересекаются по прямой NP. Причем эта прямая пересекает ребро AA_1 в точке E.

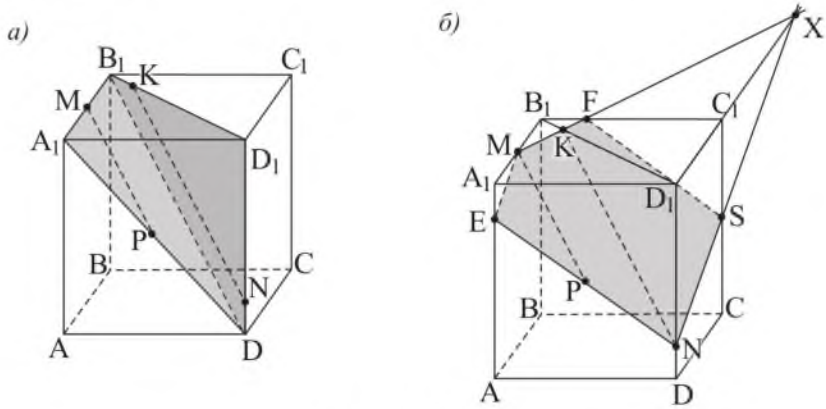


Рисунок 43

Грань AA_1B_1B и секущая плоскость имеют две общие точки E и M, следовательно, они пересекаются по прямой EM. Таким образом, искомым сечением параллелепипеда является пятиугольник $MFSNE$ (рисунок 43, б).

146. Даны тетраэдр $DABC$ и точки M, N – середины его ребер BD и DC соответственно.

а) Постройте два параллельных между собой сечения тетраэдра плоскостями AML и BNK. б) В каком отношении точки L и K делят ребра тетраэдра? в) Найдите отношение площадей полученных сечений.

Р е ш е н и е. а) В плоскости BCD построим прямую $ML \parallel BN$, $L \in CD$. В плоскости ACD проведем прямую $NK \parallel LA$, $K \in AC$. Тогда по признаку параллельности плоскостей $(AML) \parallel (BNK)$ и треугольники AML и BNK являются искомыми сечениями.

б) Отрезок ML является средней линией ΔBDN, поэтому $\frac{DL}{LC} = \frac{1}{3}$. Из подобия треугольников CNK и CLA следует, что $\frac{CK}{KA} = \frac{2}{1}$.

в) $S_{\Delta ALM} = \frac{1}{2}\ LM \cdot LA \cdot \sin\angle L$, $S_{\Delta BNK} = \frac{1}{2}\ NB \cdot NK \cdot \sin\angle N$. Углы L и N этих треугольников равны, как углы с соответственно параллельными сторонами,

$NB = 2LM$ (по свойству средней линии треугольника), $NK = \frac{2}{3}AL$ (из подобия треугольников CNK и CLA). Следовательно, $\frac{S_{\Delta ALM}}{S_{\Delta BNK}} = = \frac{LM \cdot LA}{2LM \cdot \frac{2}{3}AL} = \frac{3}{4}$.

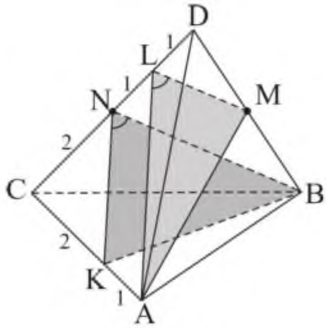


Рисунок 44

Ответ. б) $DL : LC = 1 : 3$, $AK : KC = 1 : 2$; в) $S_{\Delta AML} : S_{\Delta BNK} = 3 : 4$.

161. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AA_1, BC, CC_1 и найдите его периметр, если ребро куба равно a.

Решение. Пусть точки M, K и N середины ребер AA_1, BC и CC_1 соответственно. Так как плоскость сечения MNK содержит прямую MN, параллельную прямым AC и A_1C_1, то она пересечет нижнюю и верхнюю грани куба по прямым, параллельным AC и A_1C_1. Поэтому в плоскости ABC проведем прямую $KL \parallel AC$, где L – середина AB.

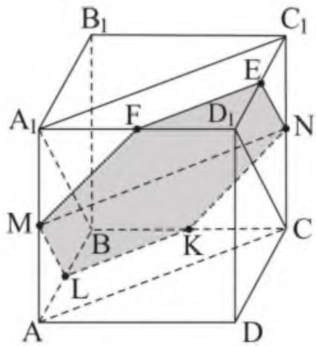


Рисунок 45

Грань AA_1B_1B плоскость сечения пересечет по прямой LM. Причем $LM \parallel A_1B$, а $A_1B \parallel D_1C$, поэтому по выше указанному свойству плоскость MNK пересечет грань DD_1C_1C по прямой $NE \parallel D_1C$, где E – середина ребра D_1C_1.

Далее в плоскости $A_1B_1C_1D_1$ строим прямую $EF \parallel A_1C_1$, где F – середина A_1D_1 и в плоскости AA_1D_1D проводим отрезок MF. Получили шестиугольник $MFENKL$ – сечение данного куба плоскостью MNK.

Этот шестиугольник – правильный, так как каждая его сторона равна половине диагонали грани куба, то есть $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, его периметр равен $3a\sqrt{2}$.

Ответ. Сечение – правильный шестиугольник, его периметр равен $3a\sqrt{2}$.

II. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ. УГЛЫ И РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

8. Угол между двумя прямыми в пространстве. Перпендикулярность двух прямых

171. Дана пирамида $PABC$, основание которой правильный ΔABC со стороной 12 см, а все её боковые ребра равны по 18 см. Точки M, D, K – середины ребер AB, PC, AC соответственно. Найдите синус угла между прямыми MP и KD.

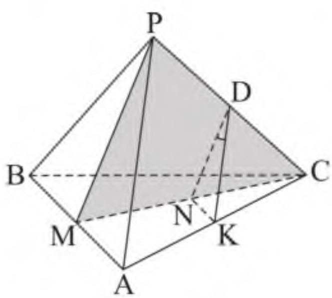


Рисунок 46

Р е ш е н и е. Прямые MP и KD скрещивающиеся, так как MP лежит в плоскости CPM, а KD пересекает её в точке D, не принадлежащей прямой MP (рисунок 46).

Тогда $\angle(MP; AP) = \angle APM$, так как $AP \parallel KD$ или $\angle(MP; KD) = \angle(ND; KD) = \angle KDN$, где $DN \parallel MP$, N – середина CM.

Из прямоугольного ΔAPM находим:

$\sin\angle APM = \dfrac{AM}{AP} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$.

О т в е т. $\dfrac{1}{3}$.

172. Дан правильный тетраэдр $DABC$, ребро которого равно a, точка M – середина ребра AC. Найдите с точностью до 1° угол между прямыми DM и BC.

Р е ш е н и е. $\angle(DM; BC) = \angle(DM; MN)$, где $MN \parallel BC$ (рисунок 47).

Так как MN – средняя линия ΔABC, то $MN = \dfrac{a}{2}$.

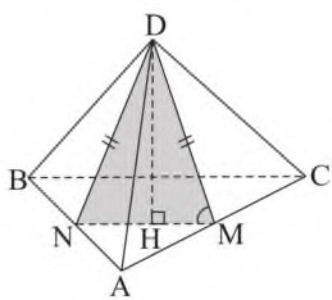


Рисунок 47

ΔDMN – равнобедренный, так как в правильном тетраэдре все грани равные равносторонние треугольники и $DM = DN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Проведем высоту DH ΔDMN, тогда $MH = \dfrac{a}{4}$.

$\cos\angle DMH = \dfrac{MH}{DM} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}289$,

$\angle DMH = \angle(DM; BC) \approx 73°$.

О т в е т. $\approx 73°$.

176. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 6$ см, $AD = 8$ см, $BD = 12$ см. Найдите с точностью до 1° угол между прямыми: а) A_1B_1 и AD; б) AD и B_1D_1; в) содержащими биссектрису AL ΔABD и медиану A_1M_1 $\Delta A_1B_1C_1$.

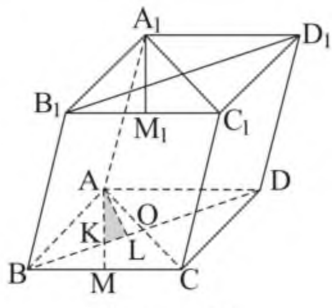


Рисунок 48

Р е ш е н и е. а) $\angle(A_1B_1; AD) = \angle(AB; AD)$ так как $A_1B_1 \parallel AB$ (рисунок 48); $\cos\angle BAD = $ $= \dfrac{36+64-144}{2\cdot 6\cdot 8} = -\dfrac{11}{24} \approx -0{,}458$, $\angle BAD \approx 117°$.

Следовательно, $\angle(A_1B_1; AD) \approx 180 - 117° = 63°$.

б) $\angle(B_1D_1; AD) = \angle(BD; AD) = \angle BDA$, так как $B_1D_1 \parallel BD$; $\cos\angle BDA = \dfrac{144+64-36}{2\cdot 12\cdot 8} = \dfrac{43}{48} \approx$ $\approx 0{,}896$, $\angle BDA \approx 26°$.

в) $\angle(AL; A_1M_1) = \angle(AL; AM) = \angle MAL$, так как $A_1M_1 \parallel AM$, $\angle MAL$ найдем из ΔAKL, где K – точка пересечения AM и BD.

В ΔABD биссектриса AL делит сторону BD на части BL и LD так, что $\dfrac{BL}{LD} = \dfrac{3}{4}$. Следовательно, $BL = \dfrac{36}{7} = 5\dfrac{1}{7}$ (см), $LD = \dfrac{48}{7} = 6\dfrac{6}{7}$ (см). Тогда AL $= \sqrt{6\cdot 8 - \dfrac{36}{7}\cdot\dfrac{48}{7}} = \dfrac{4\sqrt{39}}{7}$ (см).

По свойству диагоналей и сторон параллелограмма: $AC^2 + 144 = 2(36+64)$, $AC^2 = 56$;

$(2AM)^2 + 64 = 2(36+56)$, $AM^2 = 30$, $AM = \sqrt{30}$ см.

В ΔABC отрезки AM и BO – медианы, следовательно, $AK = \dfrac{2\sqrt{30}}{3}$ см, $BK = 4$ см, $KL = 1\dfrac{1}{7}$ см.

$$\cos\angle LAK = \left(\frac{16\cdot 39}{49} + \frac{4\cdot 30}{9} - \frac{64}{49}\right) : \left(2\cdot\frac{4\sqrt{39}}{7}\cdot\frac{2\sqrt{30}}{3}\right) = \frac{520\cdot 21}{21\cdot 48\sqrt{130}} =$$
$$= \frac{\sqrt{130}}{12} \approx 0{,}950,\ \angle LAK \approx 18°.$$

О т в е т. а) $\approx 63°$; б) $\approx 26°$; в) $\approx 18°$.

177. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a, точка M – середина ребра C_1D_1, точка N принадлежит ребру DD_1 и $D_1N : ND = 1 : 3$. Найдите угол между прямыми A_1M и AN.

Р е ш е н и е. $\angle(A_1M; AN) = \angle(AM_1; AN) = \angle NAM_1$, где M_1 – середина CD и $AM_1 \parallel A_1M$ (рисунок 49).

Так как $AN = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{16}} = \frac{5a}{4}$, $AM_1 = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $NM_1 = \sqrt{\frac{9a^2}{6} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$, то $\cos \angle NAM_1 = \left(\frac{25a^2}{16} + \frac{5a^2}{4} - \frac{13a^2}{16}\right) : \left(\frac{5a^2\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{8\sqrt{5}}{25} \approx 0{,}716$. Следовательно, $\angle NAM_1 = \arccos \frac{8\sqrt{5}}{25} \approx 44°$.

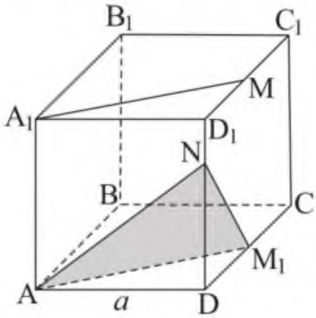


Рисунок 49

О т в е т. $\arccos \frac{8\sqrt{5}}{25} \approx 44°$.

9. Перпендикулярность прямой и плоскости

193. Даны отрезки $AB = a$ и $CD = b$, перпендикулярные плоскости α, причем точки A и D принадлежат этой плоскости, а отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Найдите расстояние от точки O до отрезка AD.

Р е ш е н и е. Так как отрезки AB и CD перпендикулярны одной плоскости, то $AB \parallel CD$, следовательно они лежат в одной плоскости. А из того, что отрезки AC и BD пересекаются в точке O следует, что отрезки AB и CD лежат в одной полуплоскости относительно прямой AD (рисунок 50).

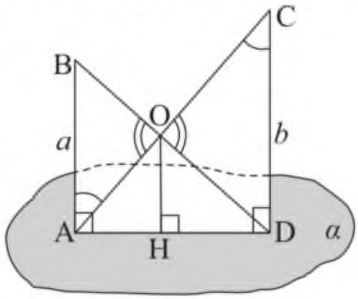


Рисунок 50

$\Delta BAD \sim \Delta OHD$ как прямоугольные с общим острым углом D. Следовательно, $\frac{a}{OH} = \frac{BD}{OD}$. $\Delta ABO \sim \Delta CDO$ по двум равным углам. Следовательно, $\frac{BO}{OD} = \frac{a}{b}$, или $\frac{BO}{OD} + 1 = \frac{a}{b} + 1$, $\frac{BD}{OD} = \frac{a+b}{b}$. Тогда $\frac{a}{OH} = \frac{a+b}{b}$, откуда $OH = \frac{ab}{a+b}$.

О т в е т. $\frac{ab}{a+b}$.

194. Дан правильный тетраэдр $KCDM$, ребро которого равно a. Постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через середину ребра DM и перпендикулярной ребру CM. Найдите площадь этого сечения.

Р е ш е н и е. Так как тетраэдр правильный, то все его грани равносторонние треугольники, поэтому медианы DH и KH его граней CDM и CKM перпендикулярны ребру CM(рисунок 51). Следовательно, плоскость $(DKH) \perp CM$.

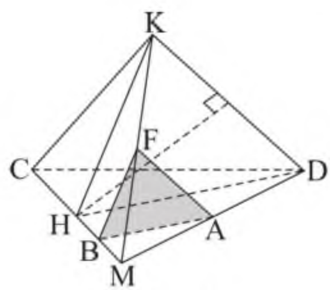


Рисунок 51

Для построения плоскости, проходящей через середину ребра DM, точку A, и перпендикулярной ребру CM, проведем прямые $AB \parallel DH$ и $BF \parallel HK$, где B – середина MH, F – середина KM.

Тогда $(ABF) \parallel (DKH)$ и поэтому $(ABF) \perp CM$, ΔABF – искомое сечение $\Delta ABF \sim \Delta DHK$ так как $\frac{AB}{DH} = \frac{BF}{HK} = \frac{FA}{KD} = \frac{1}{2}$, следовательно, $\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta DHK}} = \frac{1}{4}$.

ΔDHK – равнобедренный, $HD = HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, тогда его высота, проведенная к основанию DK равна: $\sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, и площадь $S_{\Delta DHK} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

$S_{\Delta ABF} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta DHK} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{16}$.

О т в е т. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{16}$.

195. Дана пирамида $PABC$, основание которой правильный треугольник со стороной 3 дм, и каждое её боковое ребро равно 2 дм. Какая фигура является пересечением пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания BC и перпендикулярной её боковому ребру PA?

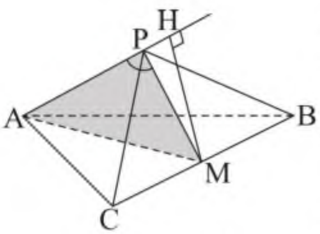


Рисунок 52

Р е ш е н и е. Так как медианы AM и PM перпендикулярны BC, то $BC \perp (APM)$, значит $BC \perp AP$ (рисунок 52). Плоскость, проходящая через ребро BC и высоту MH треугольника APM, будет перпендикулярна ребру AP.

Чтобы определить положение точки H, установим вид ΔAPM: его стороны $AM = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ дм, $PM = \sqrt{4 - \dfrac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ (дм), $AP = 2$ дм, $\cos\angle APM = \left(4 + \dfrac{7}{4} - \dfrac{27}{4}\right) : 2\sqrt{7} < 0$. Следовательно, ΔAPM тупоугольный, поэтому точка H лежит вне его.

Плоскость CBH перпендикулярна ребру AP, но не имеет с ним общих точек, поэтому пересечением пирамиды плоскостью CBH является отрезок BC.

О т в е т. Отрезок BC.

10. Перпендикуляр и наклонная. Теорема о двух перпендикулярах

229. Окружность с центром в точке O расположена в плоскости α. Через точку H этой плоскости проведены к окружности касательная HM (M – точка касания) и секущая HN, пересекающая окружность в точках N и K, причем $HK = 4$ см, $KN = 5$ см. Отрезок PH перпендикуляр к плоскости α. Найдите угол PMO, радиус окружности и длину отрезка PM, если $PO = 25$ см, $HO = \sqrt{85}$ см.

Р е ш е н и е. Радиус $OM \perp HM$ и $OM \perp PH$ (так как $PH \perp \alpha$), следовательно, $OM \perp (MPH)$, значит $OM \perp MP$, то есть $\angle PMO = 90°$ (рисунок 53).

По свойству касательной и секущей имеем: $HM^2 = HN \cdot HK$,

$HM = \sqrt{9 \cdot 4} = 6$ (см).

Из ΔHOM находим $OM = \sqrt{85 - 36} = 7$ (см).

Из ΔPOM найдем $PM = \sqrt{625 - 49} = 24$ (см).

О т в е т. 90°, 7 см, 24 см.

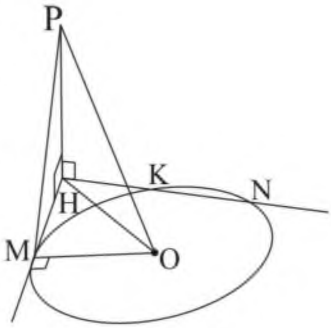


Рисунок 53

230. Ортогональной проекцией точки K на плоскость равнобедренного ΔABC, в котором $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, является центр O окружности, описанной около него. Найдите высоту KH ΔABK, если угол между прямыми KH и OK равен 30°.

Р е ш е н и е. Проведем высоту CD ΔABC и отрезок $OH \parallel CD$(рисунок 54). Тогда точка H – середина AB, так как центр O окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

Так как $KO \perp (ABC)$, KH – наклонная, OH – её проекция на эту плоскость, тогда из того, что $OH \perp AB$ следует, что $KH \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах).

В ΔABC высота и медиана $BF = 8$ см. $\Delta ABF \sim \Delta OBH$ как прямоугольные с общим

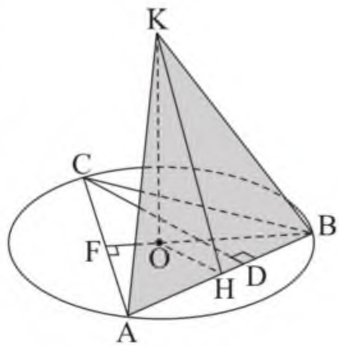


Рисунок 54

острым углом B. Тогда $\frac{OH}{6} = \frac{5}{8}$, $OH = \frac{15}{4}$ см. В ΔKOH $\angle OKH = 30°$, $KH =$ $= 2OH = \frac{15}{2} = 6{,}5$ (см).

Ответ. 6,5 см.

231. В пирамиде $PABC$ боковое ребро PA является её высотой, а основание – прямоугольный ΔABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, $AC = 5$ см. Найдите расстояние PO, где O – центр окружности, вписанной в ΔABC, если $AP = 5\sqrt{2}$ см.

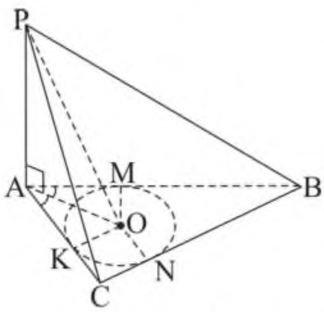


Рисунок 55

Решение. В ΔABC стороны $AB = 2AC =$ $= 10$ см, $CB = 5\sqrt{3}$ см (рисунок 55). Радиус $OK =$ $= \frac{AC + CB - AB}{2} = \frac{5(\sqrt{3} - 1)}{2}$ см. Так как AO – биссектриса $\angle A$, то $\angle OAK = 30°$. Поэтому в прямоугольном ΔAOK гипотенуза

$AO = 2OK = 5(\sqrt{3} - 1)$см.

Из ΔAPO найдем:

$$PO = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (5(\sqrt{3} - 1))^2} = 5\sqrt{6 - 2\sqrt{3}} \text{ (см)}.$$

Ответ. $5\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$ см.

11. Расстояния между прямыми и плоскостями

249. Полуокружность AC разделена на две дуги AB и BC, длины которых относятся как 1 : 2 и проведены хорды AB и BC. Проведены отрезки MA и NC перпендикулярные плоскости ABC и расположенные по одну сторону от нее. Найдите расстояние MN, если $AM - NC = BC - AB = 10$ см.

Решение. Отношение длин дуг равно отношению их градусных мер, поэтому учитывая, что $\smile AB + \smile BC = 180°$, получим: $\smile AB = 60°$, $\smile BC = 120°$. Тогда в ΔABC $\angle C = 30°$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$, $AB = R$, $BC = R\sqrt{3}$, где R – радиус данной окружности (рисунок 56).

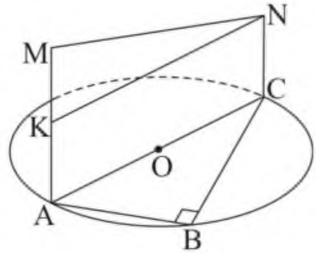


Рисунок 56

По условию $BC - AB = 10$ см, тогда $R\sqrt{3} - R = 10$, $R = \frac{10}{\sqrt{3}-1} = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{2} = 5(\sqrt{3}+1)$ (см); $AC = 10(\sqrt{3}+1)$ см.

Так как отрезки AM и CN параллельны, то они лежат в одной плоскости MAC. Проведем в этой плоскости $NK \parallel AC$, $K \in AM$. Тогда в ΔMKN $\angle K = 90°$, $MK = AM - NC = 10$ см, $KN = 10(\sqrt{3}+1)$ см,

$$MN = \sqrt{10^2 + 10^2(4+2\sqrt{3})} = 10\sqrt{5+2\sqrt{3}} \text{ (см)}.$$

Ответ. $10\sqrt{5+2\sqrt{3}}$ см.

250. Точка A на вершине скалы Шеркала видна из точки B у её подножия под углом 50° к горизонтальной плоскости, а точка C этой плоскости удалена от точки B на 400 м. Найдите в метрах высоту AH этой скалы, если $\angle CBH = 60°$, а $\angle BCH = 40°$ (рисунок 57).

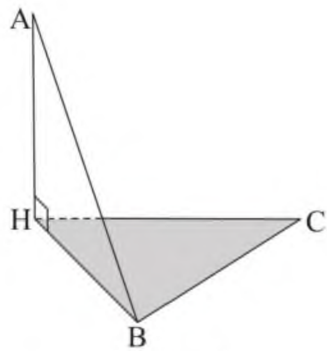


Рисунок 57

Решение. В ΔCBH по теореме синусов имеем: $\frac{400}{\sin 80^\circ} = \frac{BH}{\sin 40^\circ}$,

$$BH = \frac{400 \cdot \sin 40^\circ}{2\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \frac{200}{\cos 40^\circ}.$$

Из ΔABH найдем $AH = BH \cdot \operatorname{tg} 50° = \frac{200 \cdot \sin 50^\circ}{\cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ} = \frac{200}{\cos 50^\circ} \approx 311$ (м).

Ответ. ≈ 311 м.

251. Через точку пересечения медиан основания ABC правильного тетраэдра $SABC$ проведено сечение, параллельное прямым AC и BS. Найдите площадь этого сечения и расстояние от прямой AC до плоскости сечения, если ребра тетраэдра равны по 24 см.

Решение. 1) В плоскости ABC через точку O пересечения медиан ΔABC проводим прямую $MN \parallel AC$, $M \in AB$, $N \in BC$ (рисунок 58).

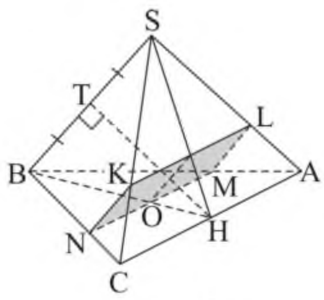


Рисунок 58

2) В плоскостях BCS и ABS проводим соответственно прямые

$NK \parallel BS$ и $ML \parallel BS$, $K \in CS$, $L \in AS$.

3) Четырехугольник $MNKL$ – искомое сечение. Этот четырехугольник является параллелограммом, так как $NK \parallel ML$ и $NM \parallel KL$. Кроме того, $MN \perp NK$, так как в правильном тетраэдре $AC \perp SB$, следовательно, и параллельные этим ребрам прямые перпендикулярны. Тогда параллелограмм $MNKL$ является прямоугольником.

4) $S_{MNKL} = MN \cdot NK$. $\Delta ABC \sim \Delta MBN$, $\frac{AC}{MN} = \frac{3}{2}$, $MN = \frac{2}{3}AC = 16$ см.

$\Delta CKN \sim \Delta CSB$, $\frac{NK}{BS} = \frac{1}{3}$, $NK = \frac{1}{3}BS = 8$ см. Тогда $S_{MNKL} = 16 \cdot 8 = 128$ (см^2).

5) Высота HT треугольника SHB является общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых AC и BS. Следовательно, прямая $HT \perp (MNK)$ и $\frac{1}{3} \cdot HT$ является расстоянием от прямой AC до плоскости сечения. Из ΔHBT найдем $HT = \sqrt{(12\sqrt{3})^2 - 12^2} = 12\sqrt{2}$ (см). Значит, искомое расстояние равно $4\sqrt{2}$ см.

Ответ. 128 см^2; $4\sqrt{2}$ см.

252. Основанием пирамиды $DABC$ является правильный треугольник, все её боковые ребра равны по 13 см, а высота пирамиды равна 11 см. На ребре DC отмечена точка M так, что $DM : MC = 2 : 1$, и проведена прямая MN, параллельная ребру DB. Найдите расстояние между медианой DH треугольника ADC и прямой MN.

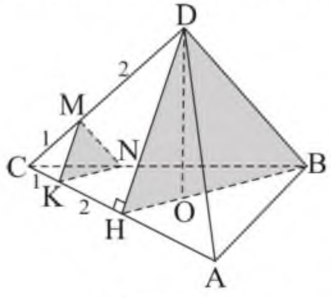


Рисунок 59

Решение. Так как все боковые ребра данной пирамиды равны, то основанием её высоты DO является центр окружности, описанной около ΔABC. Учитывая, что ΔABC правильный, заключаем, что O – точка пересечения его медиан (рисунок 59).

В плоскости ADC проведем отрезок $MK \parallel DH$, $K \in AC$.

Прямые DH и MN скрещивающиеся, по этому расстояние между ними равно расстоянию между параллельными плоскостями BDH и NMK, в которых они лежат.

$AC \perp (BDH)$, следовательно, $AC \perp (MNK)$ и отрезок HK равен расстоянию между этими плоскостями. Учитывая, что $HK = \frac{2}{3}CH$, $CH = \frac{1}{2}AC$, получим $HK = \frac{1}{3}AC$.

Пусть $AC = a$, тогда $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BO = \frac{2}{3}BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Из ΔBOD найдем $BO = \sqrt{13^2 - 11^2} = 4\sqrt{3}$ (см). Тогда $4\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, откуда $a = 12$; $HK = 4$ см.

О т в е т. 4 см.

12. Угол между прямой и плоскостью

268. К плоскости прямоугольного ΔABC ($\angle C = 90°$) восстановлен перпендикуляр DC, равный a. Прямые DA и DB образуют с плоскостью ABC углы, равные 45° и 30° соответственно. Найдите расстояние от точки D до прямой AB.

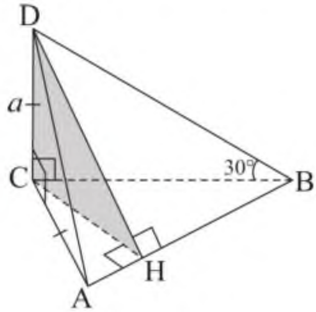


Рисунок 60

Р е ш е н и е. Расстояние от точки D до прямой AB – это длина перпендикуляра DH к прямой AB. По условию задачи $DC \perp (ABC)$, тогда CH – проекция наклонной DH на эту плоскость и $CH \perp AB$ (рисунок 60).

Так как угол между прямой DB и плоскостью ABC – это $\angle DBC = 30°$, то в ΔBDC катет $CB = a \cdot \text{ctg}\, 30° = a\sqrt{3}$. Угол между прямой DA и плоскостью ABC – это $\angle DAC = 45°$, следовательно, в ΔADC катет $CA = CD = a$.

В ΔABC гипотенуза $AB = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ или $a \cdot CH$, тогда $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

В ΔDCH $\angle DCH = 90°$, $DH = \sqrt{a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

О т в е т. $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

269. К плоскости ромба $ABCD$, в котором $\angle A = 60°$, $AB = a$, проведен перпендикуляр MD. Угол между прямой MB и плоскостью ABC равен 60°. Найдите с точностью до 1° угол между прямой MB и плоскостью CDM.

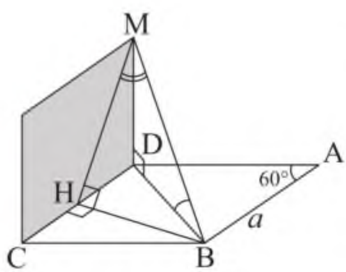


Рисунок 61

Р е ш е н и е. Угол между прямой MB и плоскостью CDM – это угол между прямой MB и её проекцией на эту плоскость.

В ΔCDB, который является равносторонним, проведем высоту BH. Отрезок $BH \perp CD$ и $BH \perp MD$, следовательно, $BH \perp (CDM)$. Тогда BM – наклонная, а MH – её проекция на плоскость CDM. Поэтому искомый угол – это угол BMH.

В ΔBDM катет $DB = a$, $\angle MBD = 60°$, гипотенуза $MB = 2a$.

В ΔBDC высота и медиана $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Из ΔHMB найдем $\sin\angle BMH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\cdot 2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}433$, тогда $\angle BMH \approx 26°$.

Ответ. $\approx 26°$.

270. Через вершину C прямого угла ΔABC проведена плоскость α, параллельная гипотенузе AB. Известно, что прямые BC и AC составляют с плоскостью α углы, равные $45°$ и $30°$ соответственно, а ортогональная проекция катета BC на эту плоскость равна 3 м. Найдите ортогональную проекцию гипотенузы на плоскость α.

Решение. Так как гипотенуза $AB \parallel \alpha$, то её ортогональная проекция на эту плоскость $A_1B_1 = AB$ (рисунок 62).

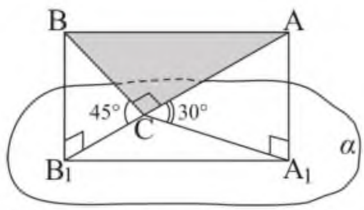


Рисунок 62

Угол между прямой BC и плоскостью α – это $\angle BCB_1 = 45°$. В ΔBCB_1 катет $CB_1 = 3$ м $= BB_1$, гипотенуза $BC = 3\sqrt{2}$ м.

Угол между прямой AC и плоскостью α – это $\angle ACA_1 = 30°$.

В ΔACA_1 катет $AA_1 = 3$ м, $(BB_1 = AA_1)$, гипотенуза $AC = 6$ м.

В ΔABC гипотенуза $AB = \sqrt{(18 + 36)} = 3\sqrt{6}$ (м).

Ответ. $3\sqrt{6}$ м.

271. Найдите высоту пирамиды, основание которой треугольник со сторонами 13 см, 14 см, 15 см, а боковые ребра образуют с плоскостью основания углы по $45°$.

Решение. Пусть дана пирамида $PABC$ (рисунок 63). Так как боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости её основания, то основанием высоты PO пирамиды является центр окружности, описанной около ΔABC. В ΔPOC катет $PO = CO$.

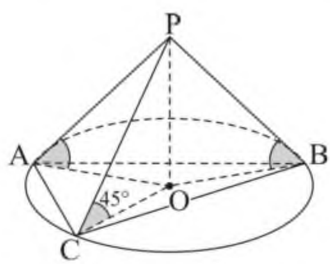


Рисунок 63

Отрезок $CO = R$ радиусу описанной окружности, найдем его используя формулу площади треугольника $S_{\Delta ABC} = \dfrac{13\cdot 14\cdot 15}{4R}$, а площадь ΔABC найдем по формуле Герона: $S_{\Delta ABC} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 84$ (см^2).

Тогда $R = \dfrac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \dfrac{65}{8} = 8{,}125$ (см).

О т в е т. 8,125см.

272. Основание треугольной пирамиды – правильный треугольник, а все её боковые ребра равны по 16 см. Через точку, которая делит высоту пирамиды в отношении 1 : 3, считая от вершины, проведено сечение, параллельное основанию пирамиды. Найдите площадь этого сечения, если боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°.

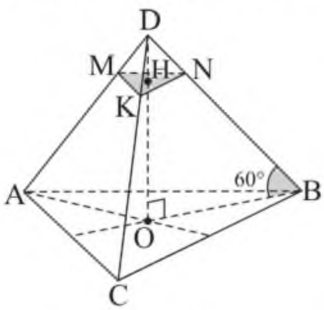


Рисунок 64

Р е ш е н и е. Пусть дана пирамида $DABC$, в которой основание – равносторонний ΔABC. Так как её боковые ребра одинаково наклонены к плоскости ΔABC, то основание высоты DO пирамиды – точка пересечения медиан этого треугольника (рисунок 64).

Пусть точка H делит высоту пирамиды в отношении 1 : 3 и через эту точку проведено сечение MNK, параллельное основанию пирамиды. Тогда $\Delta MNK \sim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия, равным $\frac{1}{4}$, а $\frac{S_{\Delta MNK}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$, $S_{\Delta MNK} = \frac{1}{16} S_{\Delta ABC}$.

Пусть сторона ΔABC равна a, тогда отрезок $BO = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Из ΔBOD, в котором $\angle DBO = 60°$, найдем $BO = \frac{1}{2} DB = 8$ см. Тогда $a = 8\sqrt{3}$ см,

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{64 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3}$ (см^2) $S_{\Delta MNK} = 3\sqrt{3}$ см^2.

О т в е т. $3\sqrt{3}$ см^2.

273. Основание пирамиды $DABC$ – равнобедренный треугольник, в котором $AC = BC$ и $AB = 12$ см. Боковое ребро DC перпендикулярно плоскости основания пирамиды и равно $8\sqrt{3}$ см. Найдите радиус окружности, вписанной в ΔABC, если высота DH треугольника ABD составляет с плоскостью ABC угол 60°.

Р е ш е н и е. Радиус r окружности, вписанной в ΔABC, найдем используя формулу $S_{\Delta ABC} = p \cdot r$, где p – полупериметр ΔABC.

В ΔDHC катет $CH = 8\sqrt{3}$: tg 60° = 8 (см). Тогда $S_{\Delta ABC} = 48$ см^2.

Так как в ΔCHB $\angle H = 90°$, катеты $CH = 8$ см, $BH = 6$ см, то $BC = 10$ см.

Следовательно, $p = 16$ см, $r = 3$ см.

О т в е т. 3 см.

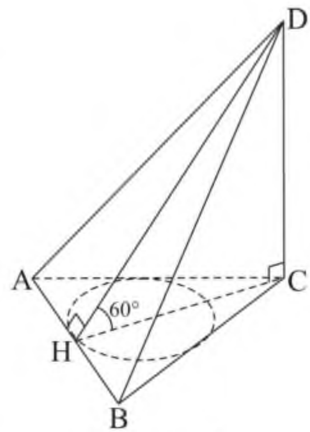


Рисунок 65

275. Прямая AB пересекает плоскость α в точке B, а прямая BM лежит в этой плоскости, прямая BC – ортогональная проекция прямой AB на плоскость α. Известно, что $\angle CBM = 25°$, $\angle ABM = 75°$. Найдите с точностью до 1° угол между прямой AB и плоскостью α.

Р е ш е н и е. Угол между прямой AB и плоскостью α – это угол ABC (рисунок 66). В ΔABC имеем: $\cos\angle ABC = \dfrac{BC}{AB}$.

Из ΔABM находим $\cos\angle ABM = \dfrac{BM}{AB}$.

Из ΔBCM находим $\cos\angle CBM = \dfrac{BM}{BC}$.

Следовательно, $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BM}{AB} : \dfrac{BM}{BC}$, то есть $\cos\angle ABC = \dfrac{\cos 75°}{\cos 25°} \approx \dfrac{0,259}{0,906} \approx$ $\approx 0,286$. Значит, $\angle ABC \approx 73°$.

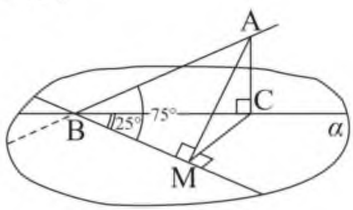


Рисунок 66

О т в е т. ≈ 73°.

13. Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями

291. В параллелограмме $ABCD$ $\angle ADC = 120°$, $AD = 8$ см, $DC = 6$ см. Из вершины С параллелограмма к его плоскости проведен перпендикуляр CP, равный 9 см. Найдите величину двугранного угла между плоскостями APD и ABC.

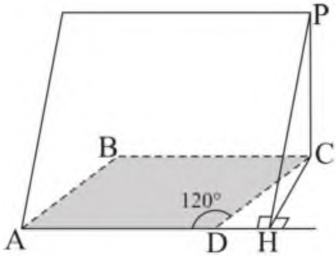


Рисунок 67

Р е ш е н и е. Проведем высоту параллелограмма CH, тогда $PH \perp AD$, а $\angle PHC$ – линейный угол двугранного угла с ребром AD (рисунок 67).

В ΔDCH $\angle CDH = 60°$, $CH = 6 \cdot \sin 60° = 3\sqrt{3}$ (см).

Из ΔPHC найдем $\operatorname{tg} \angle PHC = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, тогда $\angle PHC = 60°$.

О т в е т. 60°.

292. Два равных прямоугольных треугольника ABC и ADC с общей гипотенузой AC расположены в разных плоскостях. Известно, что расстояние между их вершинами B и D равно 9 дм, $AB = AD = 8$ дм, $BC = DC = 6$ дм. Найдите, с точностью до 1°, величину двугранного угла с ребром AC.

Р е ш е н и е. Проведем высоты BH и DH данных треугольников, тогда $\angle BHD$ – линейный угол двугранного угла с ребром AC (рисунок 68).

Гипотенуза AC данных треугольников равна 10 см, а высоту найдем из равенства: $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot BH$, $BH = 4{,}8$ см $= DH$.

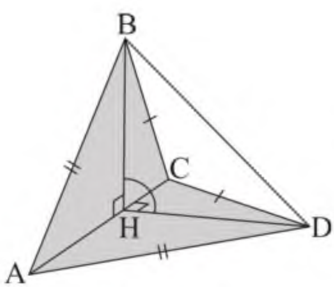


Рисунок 68

В ΔBHD $\cos \angle BHD = \frac{4{,}8^2 + 4{,}8^2 - 9^2}{2 \cdot 4{,}8^2} = \frac{-17{,}46}{23{,}04} \approx -0{,}758$. Следовательно, $\angle BHD \approx 139°$.

О т в е т. ≈ 139°.

293. Из точки K, взятой внутри двугранного угла, проведен перпендикуляр к его ребру, который образует с гранями этого угла углы, равные 30° и 60°. Найдите расстояние от точки K до граней двугранного угла, если она удалена на 10 см от его ребра.

Р е ш е н и е. Из точки K проведем перпендикуляры KA и KB к граням двугранного угла (рисунок 69). Тогда плоскость ABK перпендикулярна ребру двугранного угла. Пусть эта плоскость пересекает его в точке C, тогда KC перпендикуляр к ребру двугранного угла и $KC = 10$ см.

По условию $\angle ACK = 30°$, тогда в ΔAKC катет $AK = \frac{1}{2}KC = 5$ см; $\angle KCB = 60°$, тогда в ΔKCB катет $BK = KC \cdot \sin 60° = 5\sqrt{3}$ см.

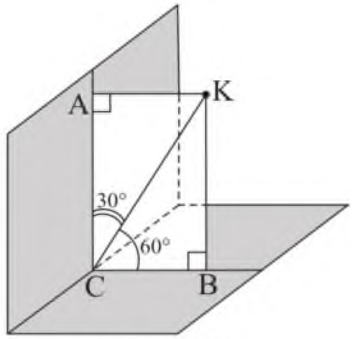


Рисунок 69

О т в е т. 5 см и $5\sqrt{3}$ см.

294. Выступ крыши длиной 1,5 м над стеной дома наклонен к горизонту под углом 30°. Крышка круглого стола площадью 1 м^2, стоящего у стены, касается её. Будет ли попадать вода, стекающая с крыши, на этот стол?

Р е ш е н и е. Пусть AB – выступ крыши над стеной AC (рисунок 70). По условию $\angle ABC = 30°$, тогда $BC = AB \cdot \cos 30° = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 2} \approx 1{,}3$ (м).

Зная площадь стола, найдем его диаметр: $\pi R^2 = 1$, $2R = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \approx 1{,}13$ (м).

Так как $BC > 2R$, то вода, стекающая с крыши, не будет попадать на стол.

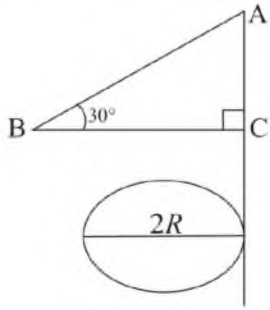


Рисунок 70

О т в е т. Не будет

296. Дан ΔABC, в котором $AB = BC = 18$ см, $AC = 24$ см. Сторона AB лежит в плоскости α, проекции двух других сторон треугольника на эту плоскость относятся как 1 : 2. Найдите величину двугранного угла между плоскостями ABC и α.

Р е ш е н и е. Пусть $CC_1 \perp \alpha$, $CD \perp AB$, тогда $C_1D \perp AB$ и $\angle CDC_1$ – линейный угол двугранного угла между плоскостями ABC и α (рисунок 71).

В ΔABC высоты $BH = \sqrt{18^2 - 12^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ (см), $CD = \frac{24 \cdot 6\sqrt{5}}{18} = 8\sqrt{5}$ (см).

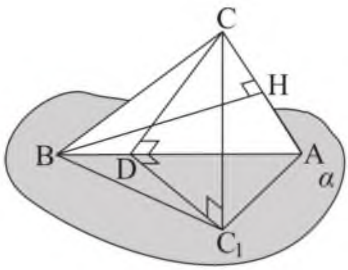


Рисунок 71

Обозначим длины проекций сторон BC и CA данного треугольника $BC_1 = x$ см, $AC_1 = 2x$ см.

Составим уравнение, выразив длину перпендикуляра CC_1 из треугольников BCC_1 и ACC_1: $18^2 - x^2 = 24^2 - 4x^2$. Отсюда $x^2 = 84$. Тогда $CC^2_1 = 240$, $CC_1 = 4\sqrt{15}$ см.

Из ΔCDC_1 найдем $\sin \angle CDC_1 = \frac{CC_1}{CD} = \frac{4\sqrt{15}}{8\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно, $\angle CDC_1 = 60°$.

О т в е т. 60°.

297. Основанием пирамиды $DABC$ является равносторонний ΔABC. Боковая грань ADB, в которой $AD = DB$, образует с плоскостью основания прямой угол, а две другие наклонены к нему под углом 40º. Найдите, с точностью до 1° углы, которые образуют боковые ребра этой пирамиды с плоскостью её основания.

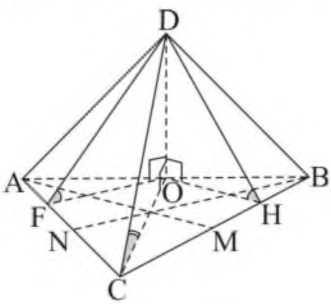


Рисунок 72

Р е ш е н и е. В ΔABC отрезки AM, BN и CO – его медианы и высоты, $OF \parallel BN$, $OH \parallel AM$. Следовательно, $\angle DFO$ и $\angle DHO$ – углы, образованные боковыми гранями ADC и BDC с плоскостью основания пирамиды (рисунок 72). Углы, которые образуют боковые ребра данной пирамиды с плоскостью её основания, это $\angle DAO$, $\angle DBO$ и $\angle DCO$, причем $\angle DAO = \angle DBO$.

Пусть $AB = a$, тогда $OF = OH = \frac{1}{2}AM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Из ΔDOH выразим $DO = OH \cdot \text{tg}\, 40° = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \text{tg}\, 40°$.

В ΔDOB найдем $\text{tg} \angle DBO = \frac{DO}{OB} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \text{tg}\, 40° \cdot 2}{4 \cdot a} \approx 0{,}727$, значит $\angle DBO \approx 36°$.

Из ΔDOC найдем $\text{tg} \angle DCO = \frac{DO}{OC} = \frac{a\sqrt{3}\, \text{tg}\, 40° \cdot 2}{4 \cdot a\sqrt{3}} \approx 0{,}420$, значит $\angle DCO \approx 23°$.

О т в е т. ≈ 36°, ≈23°, ≈ 36°.

298. Под каким углом наклонены башни в Мадриде, называемые «Воротами в Европу», если известно, что он в 2,5 раза больше угла α, при котором верно равенство $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha = 0{,}25$? Какова высота каждой башни, если ортогональная проекция её ребра на плоскость основания равна 30,5 м?

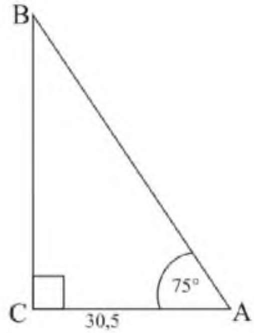


Рисунок 73

Р е ш е н и е. Из равенства $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha = 0{,}25$ следует, что $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 0{,}25$, $\cos 2\alpha = 0{,}5$, $2\alpha = 60°$, $\alpha = 30°$. Тогда угол наклона башни равен $2{,}5 \cdot 30° = 75°$.

Пусть AB ребро башни, AC – его проекция на плоскость основания, тогда высота башни (высота наклонного параллелепипеда) равна: $BC = 30{,}5 \times \operatorname{tg} 75° \approx 30{,}5 \cdot 3{,}73 \approx 114$ (м).

О т в е т. 75°; ≈ 114 м.

299. Расстояние от точки A, взятой внутри острого двугранного угла, до одной из его граней равно 2 дм, а до другой грани – 1 дм. Найдите, с точностью до 0,1 дм, расстояние от точки А до ребра двугранного угла, если его величина равна: а) 60°; б) 30°.

Р е ш е н и е. Пусть AB и AC – перпендикуляры к граням двугранного угла, $AB = 1$ дм, $AC = 2$ дм (рисунок 74). Тогда плоскость ABC перпендикулярна ребру данного двугранного угла, а отрезок AD – искомый. Пусть лучи DB и CA пересекаются в точке M.

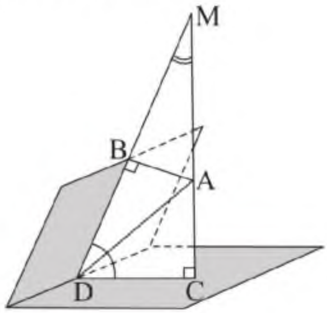


Рисунок 74

а) Если $\angle BDC = 60°$, то в ΔDMC $\angle M = 30°$, $AM = 2$ дм, $DC = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Тогда из ΔADC найдем $AD = \sqrt{\dfrac{16}{3} + 4} = \sqrt{\dfrac{28}{3}} = \dfrac{2\sqrt{21}}{3} \approx 3{,}1$ (дм).

б) Если $\angle BDC = 30°$, то в ΔDMC $\angle M = 60°$, $AM = \dfrac{1}{\sin 60^\circ} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ дм, $MC =$

$= (2 + \dfrac{2}{\sqrt{3}})$ дм, $DC = \dfrac{2 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}}{\operatorname{tg} 30^\circ} = (2\sqrt{3} + 2)$ дм.

Тогда из ΔADC найдем $AD = \sqrt{4(\sqrt{3}+1)^2 + 4} = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{3}} \approx 5{,}8$ (дм).

О т в е т. а) $\approx 3{,}1$ дм; б) $\approx 5{,}8$ дм.

300. а) Концы отрезка принадлежат граням двугранного прямого угла и удалены от его ребра на 5 см и 12 см. Найдите расстояние между отрезком и ребром двугранного угла.

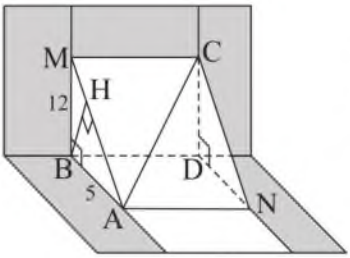


Рисунок 75

Р е ш е н и е. Пусть дан отрезок AC, расстояния от его концов до ребра двугранного угла $AB = 5$ см, $CD = 12$ см (рисунок 75). Проведем отрезки AN и CM, параллельные BD, тогда $\Delta ABM = \Delta NDC$.

Прямые BD и AC скрещивающиеся, причем AC лежит в плоскости AMC, а BD параллельна этой плоскости, поэтому расстояние между BD и AC равно длине перпендикуляра, проведенного из любой точки прямой BD к плоскости AMC. Высота BH ΔABM и является таким перпендикуляром, так как $BH \perp AM$ и $BH \perp AN$ (учитывая, что $AN \parallel BD$, а $BH \perp BD$).

ΔABM прямоугольный, так как $\angle MBA$ – линейный угол данного двугранного угла, по условию он прямой, его гипотенуза $AM = 13$ см. Тогда $BH = \dfrac{12 \cdot 5}{13} = 4\dfrac{8}{13}$ (см).

О т в е т. $4\dfrac{8}{13}$ см.

300. б) Концы отрезка AC, равного 26 см, лежат в разных гранях двугранного угла. Расстояния AB и CD от его концов до ребра равны 7 см и 9 см соответственно. Найдите, с точностью до 1°, величину двугранного угла, если $BD = 24$ см.

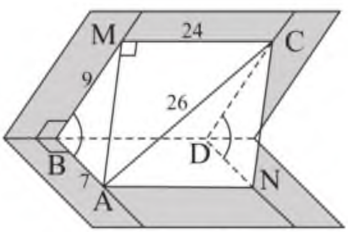


Рисунок 76

Р е ш е н и е. Проведем $CM \parallel BD$, $AN \parallel BD$, тогда $\Delta ABM = \Delta NDC$, $MC = BD$, а $\angle ABM$ является линейным углом данного двугранного угла.

Ребро $BD \perp (ABM)$, значит $BD \perp AM$. Так как $CM \parallel BD$, то $CM \perp AM$.

Из ΔAMC найдем $AM = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10$ (см).

В ΔABM $\cos \angle ABM = \dfrac{7^2 + 9^2 + 10^2}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \dfrac{5}{21} \approx 0{,}238$, следовательно, $\angle ABM \approx 76°$.

Ответ. $\approx 76°$.

301. Ортогональной проекцией вершины треугольной пирамиды является центр правильного треугольника – её основания, сторона которого равна 6 дм. Высота пирамиды равна 3 дм. Постройте сечение пирамиды плоскостью, которая делит пополам двугранный угол при её основании, и найдите площадь ортогональной проекции сечения на плоскость основания.

Решение. Пусть дана пирамида $DABC$, основание которой правильный ΔABC, в котором O – точка пересечения его медиан, DO – высота пирамиды (рисунок 77). Угол DHA – линейный угол двугранного угла с ребром BC. Плоскость, делящая этот двугранный угол пополам, содержит биссектрису HL угла DHA.

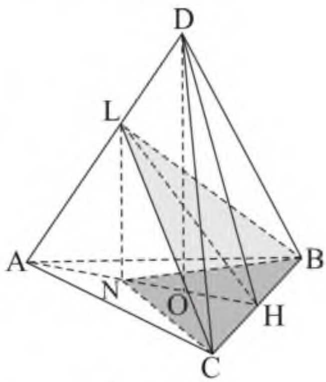


Рисунок 77

Точка $L \in AD$ и $\dfrac{AL}{LD} = \dfrac{AH}{DH}$. Отрезки $AH = 3\sqrt{3}$ дм, $OH = \sqrt{3}$ дм, $DH = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3}$ (дм).

Тогда $\dfrac{AL}{LD} = \dfrac{3}{2}$, ΔLBC – искомое сечение.

Его ортогональной проекцией на плоскость основания является ΔNBC.

$S_{\Delta NBC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot NH$. Так как $LN \parallel DO$, то $\dfrac{AN}{NO} = \dfrac{3}{2}$.

Найдем NO и NH: $NO = \dfrac{2}{5} \cdot AO = \dfrac{4\sqrt{3}}{5}$ дм, $NH = \dfrac{4\sqrt{3}}{5} + \sqrt{3} = \dfrac{9\sqrt{3}}{5}$ (дм).

Следовательно, $S_{\Delta NBC} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot \dfrac{9\sqrt{3}}{5} = \dfrac{27\sqrt{3}}{5} = 5{,}4\sqrt{3}$ (дм^2).

Ответ. $5{,}4\sqrt{3}$ дм^2.

14. Перпендикулярность плоскостей

312. Точки A и B принадлежат различным граням прямого двугранного угла и находятся на равных расстояниях AA_1 и BB_1 от его ребра. Известно, что $AB : AA_1 = 2$. Найдите угол: а) между прямой AB и каждой из граней данного двугранного угла; б) между прямой AB и ребром данного двугранного угла.

Решение. Проведем $AC \parallel A_1B_1$ и $BD \parallel A_1B_1$, тогда $\Delta BB_1C = \Delta AA_1D$ (рисунок 78). Так как данный двугранный угол прямой, то $AA_1 \perp (BB_1A_1)$ и $BB_1 \perp (AA_1B_1)$. Пусть $AA_1 = a$, тогда $AB = 2a$.

а) Угол между прямой AB и гранью BB_1A_1 это $\angle ABA_1 = 30°$, а между этой прямой и гранью AA_1B_1 это $\angle BAB_1 = 30°$, что следует из свойств треугольников ABA_1 и BAB_1.

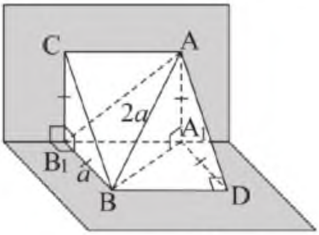


Рисунок 78

б) Прямые AB и A_1B_1 скрещивающиеся, угол между ними равен углу ABD, так как $BD \parallel A_1B_1$. В прямоугольном ΔABD катеты $AD = BD = a\sqrt{2}$, следовательно, $\angle ABD = 45°$.

Ответ. а) 30°, 30°; б) 45°.

313. Плоскости, в которых лежат два равных треугольника ABC и ABM, перпендикулярны. Известно, что $AB = AC = 13$ см, $BC = BM = 10$ см. Найдите расстояние: а) между точками C и M; б) между точками пересечения медиан этих треугольников.

Решение. а) Проведем высоты CD и MD данных треугольников, тогда $\angle CDM = 90°$, так как плоскости ABC и ABM перпендикулярны (рисунок 79, *а*). Так как высота ΔABC, проведенная к стороне CB, равна 12 см, то $CD = \frac{12 \cdot 10}{13} = \frac{120}{13}$ (см). В ΔCDM катеты $CD = DM$, следовательно, гипотенуза $CM = \frac{120\sqrt{2}}{13}$.

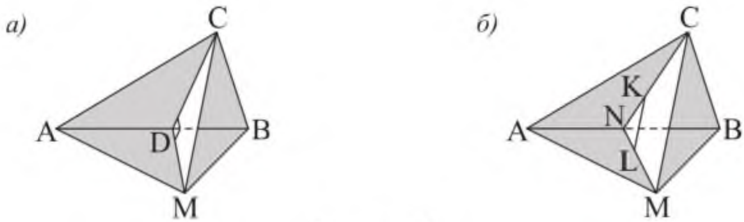


Рисунок 79

б) Проведем медианы CN и MN данных треугольников и отметим на них точки K и L пересечения медиан этих треугольников (рисунок 79, *б*). Тогда $\Delta KNL \sim \Delta CNM$, так как у них $\angle N$ – общий и $\frac{NK}{NC} = \frac{NL}{NM} = \frac{1}{3}$. Следовательно, $KL = \frac{1}{3} \cdot CM = \frac{40\sqrt{2}}{13}$ см.

О т в е т. а) $\frac{120\sqrt{2}}{13}$ см; б) $\frac{40\sqrt{2}}{13}$ см.

314. Плоскости параллелограмма $ABCD$ и прямоугольного ΔBCM с гипотенузой BC образуют прямой двугранный угол. Найдите расстояние от точки M до вершин A и D параллелограмма, если $AB = 1{,}8$ дм, $BM = 4$ дм, $CM = 3$ дм, $\angle BCD = 60°$.

Р е ш е н и е. Проведем высоту MN треугольника BCM (рисунок 80). Так как плоскости параллелограмма $ABCD$ и треугольника BCM перпендикулярны, то $MN \perp (ABC)$. Следовательно, отрезок MN перпендикулярен любой прямой плоскости ABC, поэтому треугольники MDN и MAN – прямоугольные.

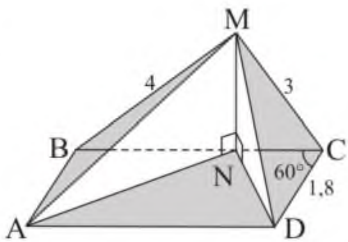


Рисунок 80

В ΔBCM гипотенуза $BC = 5$ дм, высота $MN = \frac{12}{5} = 2{,}4$ (дм); отрезок CN найдем из равенства $3^2 = 5 \cdot CN$, $CN = 1{,}8$ дм, тогда $BN = 3{,}2$ дм.

Получили, что ΔDCN – равнобедренный с углом 60°, значит он равносторонний, отсюда $DN = 1{,}8$ дм.

Из ΔMDN найдем $MD = \sqrt{2,4^2 + 1,8^2} = 3$ (дм).

В ΔABN сторона $AN = \sqrt{1,8^2 + 3,2^2 - 2 \cdot 1,8 \cdot 3,2 \cdot \cos 120°} = \sqrt{19,24}$ (дм).

Из ΔAMN найдем $MA = \sqrt{2,4^2 + 19,24} = 5$ (дм).

О т в е т. 5дм, 3 дм.

317. Дан прямой двугранный угол, в одной из граней которого расположен прямоугольный ΔABC ($\angle C = 90°$), причем вершина C принадлежит ребру двугранного угла. Проекции катетов этого треугольника на плоскость другой грани равны между собой, а точки A и B удалены от этой плоскости на расстояние равное 1,8 дм и 3,2 дм. Найдите стороны ΔABC.

Р е ш е н и е. Так как двугранный угол прямой, то ортогональной проекцией ΔABC на плоскость другой грани является отрезок A_1B_1, а проекциями его катетов – отрезки A_1C и B_1C.

Треугольники BCB_1 и ACA_1 подобны как прямоугольные, имеющие равные острые углы (например, если $\angle CBB_1 = \alpha$, то $\angle ACA_1 = 180° - (90° - \alpha) - 90° = \alpha$. Пусть $B_1C = CA_1 = a$, тогда $\frac{3,2}{a} = \frac{a}{1,8}$, откуда $a^2 = 5,76$, $a = 2,4$ дм. Следовательно, $BC = \sqrt{3,2^2 + 2,4^2} = 4$ (дм), $AC = \sqrt{2,4^2 + 1,8^2} = 3$ (дм), $AB = 5$ дм.

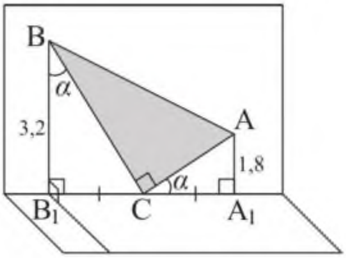


Рисунок 81

О т в е т. 3 дм, 4 дм, 5 дм.

318. Два правильных треугольника ABC и ABM лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Докажите, что углы между прямой AC и прямыми AM и BM равны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем высоты CD и MD данных треугольников (рисунок 82). По условию $\angle CDM = 90°$ и $CD = MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, где a – длина стороны данных треугольников. Тогда $CM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $\cos\angle(AC;AM) = $

$$= \cos\angle CAM = \frac{a^2 + a^2 - \frac{6a^2}{4}}{2 \cdot a^2} = \frac{1}{4}$$

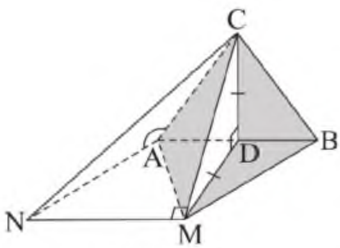


Рисунок 82

Для нахождения угла между скрещивающимися прямыми AC и BM проведем $AN \parallel BM$ и $MN \parallel BA$, тогда $AN = MN = a$. Так как $AB \perp CM$, то и $MN \perp CM$, ΔCMN – прямоугольный, в нем гипотенуза $CN = \sqrt{a^2 + \frac{6a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{2}}$.

Из ΔCAN найдем:

$$\cos\angle CAN = \frac{a^2 + a^2 - \frac{5a^2}{2}}{2 \cdot a^2} = -\frac{1}{4}.$$

Так как угол между прямыми не больше 90°, то $\cos\angle(AC;\ BM) =$ $= |\cos\angle CAN| = \frac{1}{4}$, следовательно, углы между прямой AC и прямыми AM и ВМ равны. Что и требовалось доказать.

319. Каждое ребро пирамиды $PABCD$ равно a, а её основание – квадрат. Постройте сечение пирамиды плоскостью α и найдите площадь сечения, если плоскость α проходит через: а) диагональ BD основания и перпендикулярна грани PCD; б) середину высоты пирамиды и перпендикулярна её боковому ребру PC и плоскости APC.

Р е ш е н и е. а) Пусть O – точка пересечения диагоналей основания пирамиды. Проведем отрезок $OK \perp CD$, K – середина CD (рисунок 83). Тогда высота OM треугольника POK перпендикулярна грани PCD, так как $OM \perp PK$ и $OM \perp CD$. Следовательно, $(BDM) \perp (PCD)$. Прямая DM пересечет ребро PC данной пирамиды в точке N, а ΔBDN – искомое сечение.

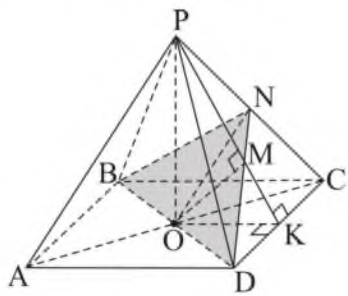


Рисунок 83

В данной пирамиде ΔAPC – прямоугольный, следовательно,

$PO = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Так как точка O одинаково удалена от вершин равностороннего ΔPCD, то основанием перпендикуляра к плоскости этого треугольника является точка пересечения его медиан, тогда $DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$S_{\Delta BDN} = \frac{1}{2}BD \cdot NO$, где NO – высота ΔBDN,

$NO = \frac{1}{2}\ AP = \frac{a}{2}$(как средняя линия ΔAPC).

Тогда $S_{\Delta BDN} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

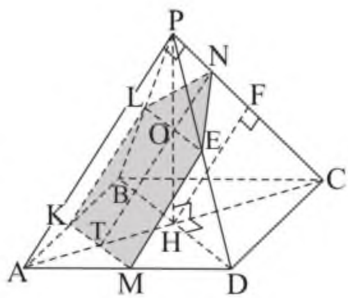


Рисунок 84

б) Пусть точка O – середина высоты PH данной пирамиды (рисунок 84). В плоскости APC проведем через точку O прямую, параллельную прямой AP, она пересечет ребро PC в точке N, а прямую AC в точке T. Так как $AP \perp PC$, то и $TN \perp PC$.

В плоскости DPB через точку O проведем прямую, параллельную DB, она пересечет ребра PB и PD пирамиды в точках L и E соответственно. Так как $BD \perp (APC)$, то и $LE \perp (APC)$.

Следовательно, $(ELN) \perp PC$ и $(ELN) \perp (APC)$, поэтому плоскость ELN – искомая. Так как $(ELN) \parallel BD$, то она пересечет основание пирамиды по прямой проходящей через точку T и параллельной BD. Эта прямая пересечет ребра AB и AD пирамиды в точках K и M соответственно.

Пятиугольник $KMENL$ искомое сечение, его площадь равна: $S_{KMENL} = S_{\Delta ENL} + S_{LKME}$.

$S_{\Delta ENL} = \frac{1}{2} LE \cdot NO$, $LE = \frac{1}{2} BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $NO = \frac{1}{2} HF = \frac{a}{4}$, тогда $S_{\Delta ENL} = \frac{a^2\sqrt{2}}{16}$.

Четырехугольник $LKME$ является прямоугольником, так как $BD \perp (APC)$, значит $BD \perp TO$, следовательно, параллельные им прямые $KM \perp ME$, $S_{LKME} = KM \cdot ME = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Тогда искомая площадь равна: $S_{KMENL} = \frac{a^2\sqrt{2}}{16} + \frac{a^2\sqrt{2}}{4} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$.

Ответ. а) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$.

15. Прямоугольный параллелепипед и его свойства

322. Существует ли прямоугольный параллелепипед, в котором диагонали трех граней равны 3 см, 4 см и 5 см? Обоснуйте ответ.

Р е ш е н и е. Допустим, что измерения прямоугольного параллелепипеда равны a см, b см и c см, тогда

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9, \\ a^2 + c^2 = 16, \\ b^2 + c^2 = 25. \end{cases}$$

Сложив левые и правые части уравнений системы, получим $2(a^2 + b^2 + c^2) = 50$ или $a^2 + b^2 + c^2 = 25$. Откуда следует, что $a^2 = 0$. Следовательно, такой прямоугольный параллелепипед не существует.

О т в е т. Не существует.

323. Найдите высоту прямоугольного параллелепипеда, диагональ основания которого равна $2\sqrt{10}$ м, а диагонали боковых граней наклонены к нему под углами 30° и 60°.

Р е ш е н и е. Пусть дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AC = 2\sqrt{10}$ м, $\angle A_1DA = 30°$, $\angle C_1DC = 60°$ (рисунок 85). Обозначим длины ребер $AD = a$ м, $DC = b$ м, $AA_1 = c$ м. Так как высота прямоугольного параллелепипеда – это его боковое ребро, то выразим a и b через с и составим уравнение, зная диагональ AC.

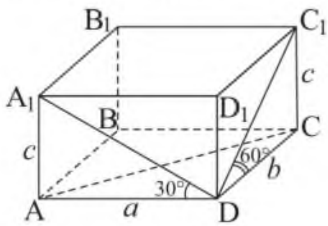


Рисунок 85

Из ΔAA_1D выразим а $= c \cdot \text{ctg } 30° = c\sqrt{3}$ м.

Из ΔCC_1D выразим $b = c \cdot \text{ctg } 60° = \frac{c}{\sqrt{3}}$ м.

В ΔACD имеем: $a^2 + b^2 = AC^2$, то есть $3c^2 + \frac{1}{3}c^2 = 40$, откуда $c^2 = 12$, $c = 2\sqrt{3}$ м.

О т в е т. $2\sqrt{3}$ м.

325. Найдите длину бокового ребра прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна 2 м и наклонена к плоскостям двух его смежных боковых граней под углами 45° и 30°.

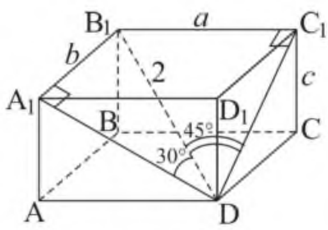


Рисунок 86

Р е ш е н и е. Пусть дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $B_1D = 2$ м, $\angle B_1DA_1 = 30°$, $\angle B_1DC_1 = 45°$ (рисунок 86). Обозначим $A_1B_1 = b$ м, $B_1C_1 = a$ м, $CC_1 = c$ м, тогда $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.

Из треугольников B_1A_1D и B_1C_1D следует, что $b = 1$ м, $a = \sqrt{2}$ м.

Тогда $c^2 = 4 - 2 - 1$, $c = 1$ м.

О т в е т. 1 м.

335. а) P – внутренняя точка двугранного угла между плоскостями α и β, равного 50°. Она симметрична точке M относительно плоскости α и точке K относительно плоскости β. Найдите углы ΔMPK, если он равнобедренный.

б) B – внутренняя точка двугранного угла между плоскостями α и β, равного 60°. Она симметрична точке A относительно плоскости α и точке C относительно плоскости β. Найдите длину отрезка AC, если расстояние от точки B до плоскости α равно 1 м, а до плоскости β – 3 м.

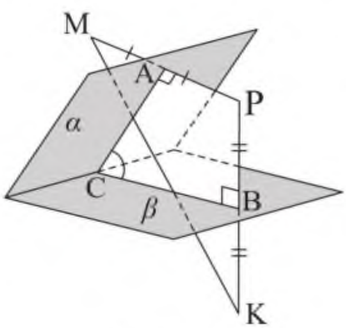


Рисунок 87

Р е ш е н и е. а) Из точки P опустим перпендикуляры PA и PB к плоскостям α и β соответственно (рисунок 87). На луче PA отложим отрезок $AM = PA$, а на луче PB – отрезок $BK = PB$, тогда точки M и K симметричны точке P относительно плоскостей α и β соответственно.

Пусть плоскость APB пересекает ребро данного двугранного угла в точке C, тогда $\angle ACB$ – его линейный угол, по условию он равен 50°. В четырехугольнике $CAPB$ $\angle APB = 130°$.

Так как ΔMPK равнобедренный, то $\angle M = \angle K = 25°$.

б) Рисунок аналогичный рисунку 87. Так как угол между плоскостями равен 60°, то в ΔABC $\angle B = 120°$ и отрезок $AC = \sqrt{2^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot \cos 120°} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (м).

О т в е т. а) 25°, 130°, 25°; б) $2\sqrt{13}$ м.

339. Установите, от какой точки прямоугольного параллелепипеда сумма расстояний до его вершин наименьшая. Найдите эту сумму, если его измерения равны a, b, c.

Р е ш е н и е. Пусть дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок 88). Его диагонали равны и пересекаются в одной точке O, эта точка и является искомой. Расстояние от точки O до вершин прямоугольного параллелепипеда равно длине четырех его диагоналей: $OA + OC_1 + OC + OA_1 + OB + OD_1 + OD + OB_1 = 4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

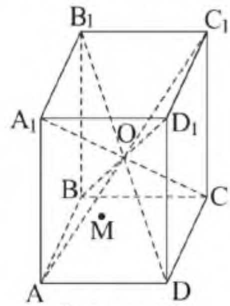


Рисунок 88

Для произвольной точки M прямоугольного параллелепипеда, учитывая неравенство треугольника, имеем: $MA + MC_1 \geq AC_1$, $MC + MA_1 \geq CA_1$, $MB + MD_1 \geq BD_1$, $MD + MB_1 \geq DB_1$. Сложив левые и правые части этих неравенств, получим, что сумма расстояний от точки M до вершин параллелепипеда не меньше длины четырех его диагоналей.

О т в е т. $4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

341. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, периметр основания которого равен 28 см, а расстояние от точки пересечения его диагоналей до сторон основания равны 5 см и $4\sqrt{2}$ см. Докажите, что плоскость диагонального сечения AA_1C_1C параллелепипеда перпендикулярна его основанию и найдите площадь этого сечения.

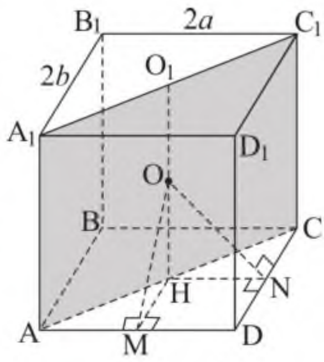


Рисунок 89

Р е ш е н и е. Так как плоскость AA_1C_1C содержит прямую AA_1, перпендикулярную плоскости основания, то $(AA_1C_1) \perp (ABC)$ и AA_1C_1C – прямоугольник (рисунок 89). $S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC$.

Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелепипеда, $OH \perp (ABC)$, H – середина AC, $HN \perp DC$, $HM \perp AD$, N и M – середины сторон DC и AD соответственно. Тогда $ON \perp DC$, $OM \perp AD$ и $ON = 5$ см, $OM = 4\sqrt{2}$ см.

Обозначим стороны основания $AB = 2b$ см, $AD = 2a$ см, тогда $HM = b$ см, $HN = a$ см. Зная периметр основания, получим $a + b = 7$.

Выразив OH из треугольников OHN и OHM, получим $25 - a^2 = 32 - b^2$ или $b^2 - a^2 = 7$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} b + a = 7 \\ b - a = 1 \end{cases}$ найдем $b = 4$ см, $a = 3$ см. Следовательно, $AB = 8$ см, $AD = 6$ см, $AC = 10$ см, $OH = 4$ см, $AA_1 = 2 \cdot OH = 8$ см. Тогда $S_{AA_1C_1C} = 80$ см^2.

Ответ. 80 см^2.

342. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что диагональ B_1D куба перпендикулярна плоскости AD_1C.

б) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите отношение, в котором плоскость AD_1C делит диагональ B_1D.

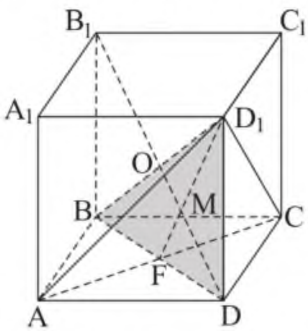


Рисунок 90

Решение. а) Пусть диагонали B_1D и BD_1 пересекаются в точке O (рисунок 90). В ΔBD_1D медианы DO и D_1F пересекаются в точке M.

Обозначим ребро куба через a, тогда его диагональ $B_1D = a\sqrt{3}$. В точке O диагонали куба делятся пополам, поэтому $DO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Отрезок $DM = \frac{2}{3}DO = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, $DF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$D_1F = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$,

$MF = \frac{1}{3}D_1F = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Для сторон ΔDMF выполняется равенство $DF^2 = DM^2 + MF^2$, значит он прямоугольный, то есть $DM \perp FM$. Кроме того, диагональ $B_1D \perp AC$ (так как $AC \perp (BB_1D)$). Следовательно, $B_1D \perp (AD_1C)$.

б) Используем рисунок 90. В прямоугольном параллелепипеде диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам. Диагональ B_1D пересекает плоскость AD_1C в точке M. Отрезок $DM = \frac{2}{3}DO = \frac{1}{3}B_1D$, тогда $B_1M = \frac{2}{3}B_1D$. Следовательно, $DM : MB_1 = 1 : 2$.

Ответ. б) 1 : 2, считая от точки D.

343. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a. Найдите расстояние между прямыми A_1B и B_1D_1.

Решение. Прямая A_1B лежит в плоскости BA_1D, а прямая B_1D_1 параллельна этой плоскости, поэтому расстояние между скрещивающимися прямыми A_1B и B_1D_1 равно длине перпендикуляра, проведенного из любой точки прямой B_1D_1 к плоскости BA_1D (рисунок 91).

Используя решение задачи 342, а), можно установить, что диагональ куба $C_1A \perp (BA_1D)$. Поэтому отрезок $ON \parallel C_1A$, где $N \in A_1F$, является искомым перпендикуляром.

В ΔAA_1C_1 отрезок ON – средняя линия, $ON = \frac{1}{2}C_1M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

О т в е т. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

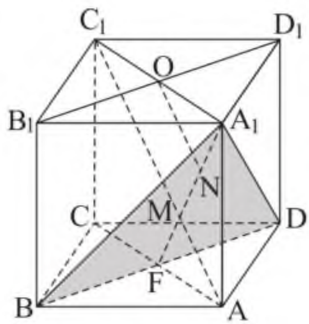


Рисунок 91

344. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно $\sqrt{6}$ см и точки M, N – середины ребер CC_1 и AA_1 соответственно. Докажите, что расстояние между прямыми B_1N и BD равно расстоянию между плоскостями B_1ND_1 и BDM, найдите его.

Р е ш е н и е. Прямые B_1N и BD скрещивающиеся, они лежат в параллельных плоскостях B_1ND_1 и BDM. Следовательно, расстояние между прямыми B_1N и BD равно расстоянию между плоскостями B_1ND_1 и BDM и равно длине перпендикуляра, про-веденного из любой точки одной плоскости к другой (рисунок 92).

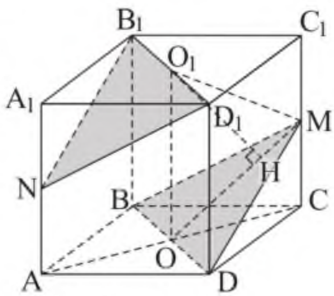


Рисунок 92

Рассмотрим ΔOO_1M, где O и O_1 – середины диагоналей BD и B_1D_1 соответственно. Высота O_1H этого треугольника и является искомым перпендикуляром. Так как $(OO_1M) \perp (BDM)$ и $O_1H \perp OM$, следовательно, $O_1H \perp (BDM)$.

Треугольник OO_1M – равнобедренный, в нем $OM = O_1M = \sqrt{OC^2 + CM^2} = \sqrt{3 + \frac{6}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (см), основание $OO_1 = \sqrt{6}$ см, высота, проведенная к основанию, $h = \sqrt{\frac{18}{4} - \frac{6}{4}} = \sqrt{3}$ (см). Тогда его площадь равна $\frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot O_1H$, откуда $O_1H = 2$ см.

О т в е т. 2 см.

16. Ортогональная проекция плоской фигуры

350. В треугольнике две стороны равны a и b, а угол между ними не больше 30°. Может ли площадь ортогональной проекции этого треугольника на плоскость быть равной: а) 0,2ab; б) 0,25ab; в) 0,3ab?

Р е ш е н и е. Площадь ортогональной проекции фигуры $S_{Ф_1}$ не больше площади $S_Ф$ самой фигуры, так как они связаны формулой $S_{Ф_1} = S_Ф \cdot \cos\varphi$, а $\cos\varphi \le 1$.

Площадь треугольника с углом 30° между данными сторонами равна $\frac{1}{2}\,ab \cdot \sin 30°$. По условию этот угол не больше 30°, поэтому $S_Ф \le \frac{ab}{4}$ Следовательно, $S_{Ф_1} \le S_Ф \le \frac{ab}{4}$. Поэтому площадь ортогональной проекции данного треугольника может быть равной 0,2ab или 0,25ab, но не может быть равной 0,3ab.

О т в е т. а) Может; б) может; в) не может.

352. а) Дана пирамида, основание которой – правильный n-угольник, а её боковые ребра равны. Докажите, что сумма площадей боковых граней этой пирамиды равна отношению площади её основания к косинусу двугранного угла при ребре основания пирамиды.

б) Ученик составил задачу: «В шестиугольной пирамиде основание правильный шестиугольник, площадь которого равна 23 см^2. Все боковые грани этой пирамиды – равные равнобедренные треугольники, площади которых равны 3,5 см^2. Найти угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания». Имеет ли решение эта задача?

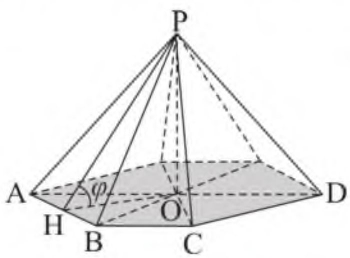


Рисунок 93

Р е ш е н и е. а) Так как боковые ребра данной пирамиды равны, то ортогональной проекцией её вершины является центр окружности, описанной около её основания, и все боковые грани этой пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. Пусть этот угол равен φ. Ортогональной проекцией всех её боковых граней на плоскость основания является основание данной пирамиды (рисунок 93). Сумма площадей боковых граней этой пирамиды равна площади её боковой поверхности $S_{бок.пов.}$. Следовательно, $S_{Ф_1} = S_{осн.}$, $S_Ф = S_{бок.пов.}$, тогда $S_{бок.пов.} = \frac{S_{осн.}}{\cos\varphi}$

б) По условию этой задачи ортогональной проекцией боковой поверхности пирамиды является её основание, искомый угол φ (рисунок 93). Учитывая решение задачи а), получим $cos\ \varphi = \frac{S_{осн}}{S_{бок.пов.}} = \frac{23}{3,5 \cdot 6} = \frac{23}{21} > 1$, чего не может быть. Следовательно, задача не имеет решения.

Ответ. б) Задача не имеет решения.

358. а) Может ли ортогональной проекцией параллелограмма, диагонали которого равны 18 см и 15 см, на плоскость быть параллелограмм, площадь которого равна 135 см^2?

б) При каком условии ортогональной проекцией трапеции, диагонали которой равны 14 см и 15 см, на плоскость может быть трапеция, площадь которой равна 100 см^2?

Решение. а) Площадь параллелограмма $S_ф = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 15 \cdot \sin a = 135\sin \alpha \leq 135$ (см^2), где α – угол между диагоналями параллелограмма. Площадь ортогональной проекции этого параллелограмма $S_{ф_1}$ не может быть равна 135 см^2, так как не выполняется свойство: $S_{ф_1} \leq S_ф$.

б) По условию $S_{ф_1} = 100$ см^2, $S_ф = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 \cdot \sin \alpha = 105 \sin \alpha$, где α – угол между диагоналями трапеции. По свойству $S_{ф_1} \leq S_ф$ имеем: $100 \leq 105 \sin \alpha$, откуда $\sin a \geq 0{,}952$. Учитывая, что угол между прямыми, содержащими диагонали трапеции, не тупой, получим $72° < \alpha \leq 90°$.

Ответ. а) Может; б) если α – угол между диагоналями трапеции и $72° < \alpha < 90°$.

361. Даны правильный ΔABC со стороной a и точка K вне его плоскости, равноудаленная от всех сторон треугольника. Найдите площадь треугольника KAC, если известно, что угол между плоскостями треугольников KAB и ABC равен φ.

Решение. Так как точка K равноудалена от сторон правильного треугольника ABC, то её ортогональной проекцией на плоскость этого треугольника является точка O пересечения его медиан (рисунок 94). Кроме того, все грани пирамиды $KABC$ одинаково наклонены к плоскости основания, по условию этот угол равен φ.

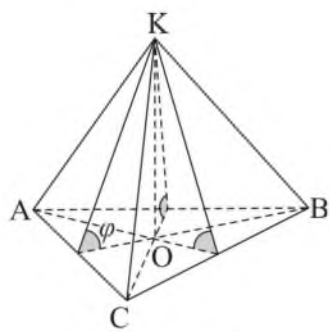


Рисунок 94

Ортогональной проекцией ΔKAC на плоскость основания пирамиды является ΔAOC.

$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{3}\, S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. $S_{\Delta AKC} = \frac{S_{\Delta AOC}}{\cos\varphi} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\varphi}$

О т в е т. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\varphi}$.

362. Дан ромб, диагонали которого равны 8 см и 6 см. Через прямую, содержащую одну из его сторон, проведена плоскость так, что угол между другой стороной ромба и этой плоскостью равен 30°. Найдите, с точностью до 0,1 см^2, площадь ортогональной проекции ромба на эту плоскость.

Р е ш е н и е. Ортогональной проекцией ромба $ABCD$ на плоскость является параллелограмм ABC_1D_1 (рисунок 95).

$S_{ABC_1D_1} = S_{ABCD} \cdot \cos\varphi$, где φ – величина двугранного угла с ребром AB.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ (см^2). Сторона ромба равна $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (см), тогда его высота CH равна $\frac{24}{5}$ =4,8 (см). В ΔADD_1 $\angle DAD_1 = 30°$, гипотенуза AD = = 5 см, тогда катет DD_1 = 2,5 см.

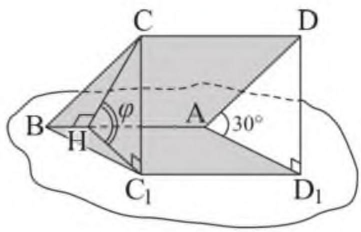


Рисунок 95

Угол CHC_1 является линейным углом двугранного угла с ребром AB. Из ΔCHC_1, в котором $CC_1 = DD_1$ = 2,5 см, найдем

$HC_1 = \sqrt{4{,}8^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{16{,}79} \approx 4{,}098$,

$\cos\varphi \approx \frac{4{,}098}{4{,}8} \approx 0{,}854$.

Тогда $S_{ABC_1D_1} \approx 24 \cdot 0{,}854 \approx 20{,}5$ (см^2).

О т в е т. ≈ 20,5 см^2.

363. Медиана CM ΔABC лежит в плоскости α, а его вершины A и B расположены по разные стороны от неё. Расстояние от точки A до плоскости α равно 1 дм. Найдите площадь ортогональной проекции ΔABC на плоскость α, если AB = 4 дм, AC = 2 дм, BC = 3 дм.

Р е ш е н и е. $S_{\Delta A_1B_1C} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi$, где φ – величина угла между плоскостями ABC и α (рисунок 96).

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$ (дм^2).

Так как ΔMAC – равнобедренный, то его медиана $AN \perp CM$ и $\angle ANA_1 = \varphi$. Найдем медиану CM, используя свойство сторон и диагоналей параллелограмма: $(2 \cdot CM)^2 + 4^2 = 2(2^2 + 3^2)$, откуда $CM = \frac{\sqrt{10}}{2}$ дм. Тогда AN = $= \sqrt{4 - \frac{10}{16}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$ (дм).

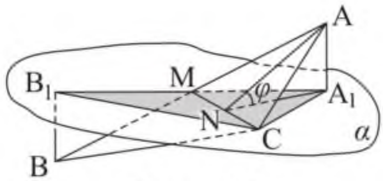


Рисунок 96

Из ΔANA_1 найдем $\sin\varphi = \frac{AA_1}{AN} = \frac{4}{3\sqrt{6}}$. $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{\frac{38}{54}} = \frac{\sqrt{57}}{9}$

Тогда $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{\sqrt{57}}{9} = \frac{\sqrt{95}}{4}$ (см^2).

Ответ. $0{,}25\sqrt{95}$ (дм^2).

364. Острый угол ромба $ABCD$ равен α. Точка K, не принадлежащая плоскости ромба, удалена от всех его сторон на одинаковое расстояние. Найдите площадь ромба, если известно, что высота ΔKAB, проведенная из точки K, равна h, а угол между плоскостями ΔKAB и ромба равен β.

Решение. Так как точка K одинаково удалена от сторон ромба, то её ортогональной проекцией на плоскость ромба является точка O пересечения его диагоналей (рисунок 97).

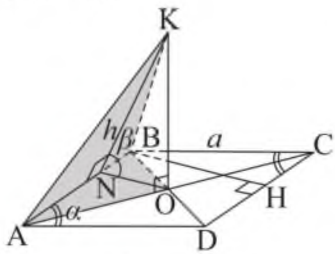


Рисунок 97

Пусть сторона ромба равна a. Из ΔBCH $a = \frac{BH}{\sin\alpha}$, где BH – высота ромба, $BH = 2 \cdot ON = 2h \cdot \cos\beta$. Следовательно, $a = \frac{2h\cdot\cos\beta}{\sin\alpha}$ и $S_{ABCD} = a \cdot BH = \frac{4h^2\cos^2\beta}{\sin a}$.

Ответ. $\frac{4h^2\cos^2\beta}{\sin a}$.

365. Над ямой для компоста, имеющей форму куба, нужно сделать переносную крышу в виде четырехугольной пирамиды, боковые ребра которой равны, а сторона квадратного основания равна 3 м. Какую крышу экономически выгоднее делать: с меньшим углом α или большим углом β наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания? Сравните расходы брезента на покрытие крыш, если $\alpha = 15°$, $\beta = 45°$, с учетом того, что на изгибы и выступы нужно добавить 10 % материала.

Р е ш е н и е. При решении задачи № 352 была получена формула $S_{осн.} = S_{бок.пов.} \cdot \cos\varphi$, где φ – угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания. Откуда площадь поверхности крыши $S_{бок.пов.} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi}$. Так как $S_{осн.} = 9$ м^2, а $\cos 15° > \cos 45°$, то $\frac{9}{\cos 15°} < \frac{9}{\cos 45°}$. Поэтому экономически выгоднее делать крышу с меньшим углом наклона.

$\frac{9}{\cos 15°} \approx \frac{9}{0,966} \approx 9,32$, $\frac{9}{\cos 45°} \approx \frac{9}{0,707} \approx 12,7$.

$S_1 = 9,32 + 0,932 \approx 10,25$ (м^2), $S_2 = 12,7 + 1,27 \approx 14,0$ (м^2).

О т в е т. На крышу с углом наклона 45° понадобится материала на $\approx 3,75$ м^2 больше, чем на крышу с углом наклона 15°.

17. Упражнения на повторение раздела «Перпендикулярность прямых и плоскостей. Углы и расстояния в пространстве»

368. Из вершины B правильного ΔABC восстановлен перпендикуляр BH к его плоскости. Найдите, с точностью до $1°$, угол между прямыми AH и BC, если $BH = AB$.

Р е ш е н и е. Пусть сторона ΔABC равна a (рисунок 98). Тогда в ΔABH катеты $AB = BH = a$, гипотенуза $AH = a\sqrt{2}$. Проведем $AD \parallel BC$ и $BD \parallel AC$, тогда $ADBC$ – ромб.

Прямые AH и BC скрещивающиеся, поэтому $\angle(AH;BC) = \angle(AH;AD) = \angle HAD$. Этот угол найдем из ΔADH, в котором $AD = a$, $DH = AH = a\sqrt{2}$, тогда $\cos\angle HAD = \frac{a^2 + 2a^2 - 2a^2}{2a^2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}354.$

Следовательно, $\angle HAD \approx 69°$.

О т в е т. $\approx 69°$.

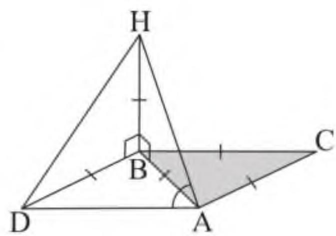


Рисунок 98

370. В ΔABC $AB = 1{,}4$ дм, $AC = 2$ дм, $CB = 2{,}2$ дм. Через сторону AB проходит плоскость α, которая образует с плоскостью треугольника двугранный угол в $60°$. Найдите проекции сторон AC и CB на плоскость α.

Р е ш е н и е. $CC_1 \perp \alpha$, $CD \perp AB$, тогда $\angle CDC_1$ – линейный угол двугранного угла между плоскостями ΔABC и α (рисунок 99). Отрезки AC_1 и BC_1 проекции сторон AC и CB на плоскость α.

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{2{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}4} = \frac{14\sqrt{6}}{25}$ (дм^2). Высоту CD ΔABC найдем из равенства $\frac{14\sqrt{6}}{25} = 0{,}7 \cdot CD$, $CD = \frac{4\sqrt{6}}{5}$ дм.

В ΔCDC_1 сторона $CC_1 = \frac{4\sqrt{6}}{5} \cdot \sin 60° = \frac{6\sqrt{2}}{5}$ (дм). Далее из треугольников CAC_1 и CBC_1 найдем $AC_1 = \sqrt{4 - \frac{72}{25}} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$ (дм), $BC_1 = \sqrt{4{,}84 - \frac{72}{25}} = \frac{7}{5}$ (дм).

О т в е т. $0{,}4\sqrt{7}$ дм; $1{,}4$ дм.

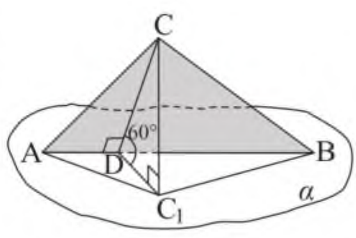


Рисунок 99

371. Из точки A к плоскости проведены перпендикуляр AM и две наклонные AB и AC, причем $AB = 10$ см, $AC = 26$ см, $BC = 24$ см, $BM = 8$ см. Найдите угол между: а) прямыми MB и BC; б) плоскостями ABC и ABM.

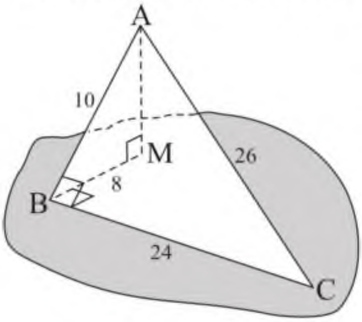


Рисунок 100

Р е ш е н и е. а) Так как $26^2 = 24^2 + 10^2$, то по теореме обратной теореме Пифагора ΔABC – прямоугольный. Следовательно, наклонная AB перпендикулярна прямой BC, поэтому и её проекция BM перпендикулярна на прямой BC.

б) Так как плоскость ABC проходит через прямую BC, перпендикулярную плоскости ABM, то $(ABC) \perp (ABM)$.

О т в е т. а) 90°; б) 90°.

372. Основание пирамиды $DABC$ – равнобедренный прямоугольный ΔABC ($\angle C = 90°$), а боковое ребро AD перпендикулярно основанию. Найдите угол между плоскостями DBC и ADB, если $AD = AC = CB = a$.

Р е ш е н и е. Построим линейный угол двугранного угла с ребром BD (рисунок 101). Проведем высоты CM и CN треугольников CDB и ABC. Так как CN перпендикуляр к плоскости ADB, CM – наклонная, MN – её проекция на эту плоскость, то $MN \perp DB$, $\angle CMN$ – искомый.

Так как $AC \perp CB$, то и $DC \perp CB$. В ΔDCB катет $DC = a\sqrt{2}$, гипотенуза $DB = a\sqrt{3}$. Его высоту найдем из равенства $a\sqrt{2} \cdot a = a\sqrt{3} \cdot CM$, откуда $CM = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Высота и медиана ΔABC $CN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

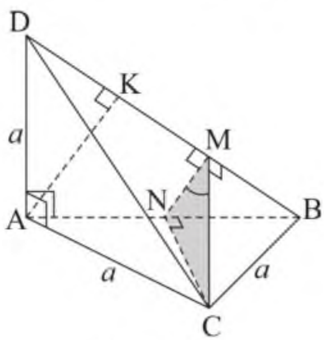


Рисунок 101

Так как N – середина AB и отрезок NM параллелен высоте AK, то NM – средняя линия ΔAKB и $NM = \frac{1}{2}AK$. Из равенства прямоугольных треугольников ADB и CBD следует равенство их высот, проведенных к гипотенузе, $AK = CM = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, следовательно, $NM = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

В ΔCMN $\cos\angle CMN = \left(\frac{6a^2}{9} + \frac{6a^2}{36} - \frac{2a^2}{4}\right) : \left(2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $\angle CMN =$ $= 60°$.

О т в е т. 60°.

373. Дан квадрат $ABCD$, в котором точка K – середина стороны DC. Прямая KM перпендикулярна плоскости ABC, $AB = KM = a$. Найдите расстояние: а) от точки M до прямой AC; б) от точки A до прямой MK; в) от точки D до плоскости ABM; г) между прямой DC и плоскостью ABM; д) между прямыми AC и MK.

Р е ш е н и е. а) Диагонали квадрата пересекаются в точке O и перпендикулярны. Проведем отрезок $KN \parallel DO$ (рисунок 102, *а*), тогда из того, что $KN \perp AC$ следует, что $MN \perp AC$, следовательно MN – расстояние от точки M до прямой AC. В ΔMKN катет $KN = \frac{1}{2}\ DO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, гипотенуза $MN =$ $= \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{16}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

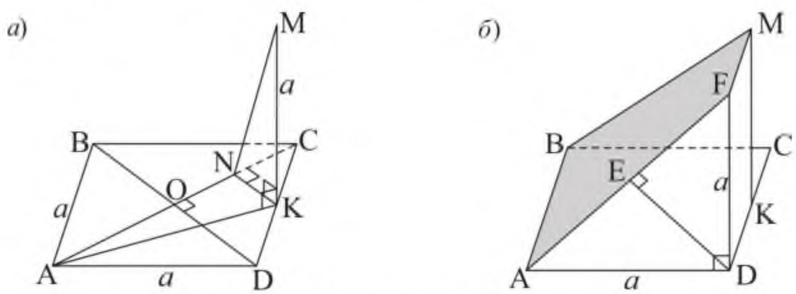


Рисунок 102

б) Так как $KM \perp (ABC)$, то $KM \perp AK$(рисунок 102, *а*). Следовательно, длина отрезка AK равна расстоянию от точки A до прямой MK.

В ΔAKN катеты $KN = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $AN = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$, гипотенуза $AK =$ $= \sqrt{\frac{18a^2}{16} + \frac{2a^2}{16}} = \frac{2a\sqrt{5}}{4} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

в) Расстоянием от точки D до плоскости ABM является перпендикуляр, проведенный из точки D к этой плоскости (рисунок 102, *б*). Проведем отрезок $DF \parallel KM$, где $DF = KM$, тогда высотаΔADF $DE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ является искомым перпендикуляром, так как DE перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и AF этой плоскости ($AB \perp (ADF)$, следовательно, $AB \perp DE$).

г) Прямая $DC \parallel (ABM)$, поэтому перпендикуляр, проведенный из любой точки этой прямой к плоскости является искомым расстоянием (рисунок 102, *б*). $DE \perp (ABM)$, $DE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

д) Прямые AC и MK скрещивающиеся, отрезок KN их общий перпендикуляр (рисунок 102, а), следовательно, расстояние между ними равно $KN = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

О т в е т. а) $\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$; б) $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; в) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; д) $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

III. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

18. Прямоугольная система координат в пространстве

409. Постройте прямую, которая параллельна:

а) оси Oy и пересекает плоскость xOz в точке M (3; 0; 4);

б) оси Ox и пересекает плоскость yOz в точке N (0; 4; 6).

Решение. а) Точки, лежащие на прямой, параллельной оси Oy и проходящие через точку M, имеют координаты (3; y; 4). Отметим в прямоугольной системе координат точки M (3; 0; 4) и A (3; 2; 4). Тогда прямая AM ‖ Oy (рисунок 103).

б) Точки, лежащие на прямой, параллельной оси Ox и проходящие через точку N, имеют координаты (x; 4; 6). Отметим в прямоугольной системе координат точки N(0; 4; 6) и B(3; 4; 6). Тогда прямая $BN \parallel Ox$ (рисунок 103).

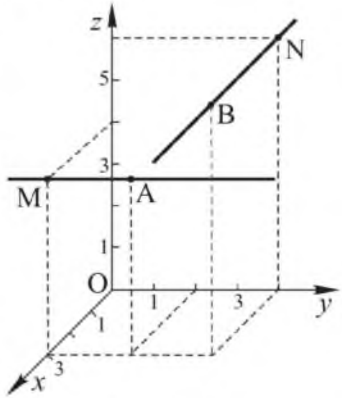


Рисунок 103

410. Дан треугольник с вершинами в точках A (3; 0; 3), B (0; 0; 3), C(0; 4; 3). Постройте треугольник, симметричный данному относительно плоскости xOy, и найдите его периметр и площадь.

Решение. Для построения $\Delta A_1B_1C_1$, симметричного ΔABC относительно плоскости xOy, на прямых AM, BO, CN, перпендикулярных плоскости xOy, отложим отрезки $MA_1 = AM$, $OB_1 = BO$, $NC_1 = CN$ (рисунок 104). Тогда координаты точек A_1(3; 0; –3), B_1(0; 0; –3), C_1(0; 4; –3). При этом $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ их периметры и площади равны.

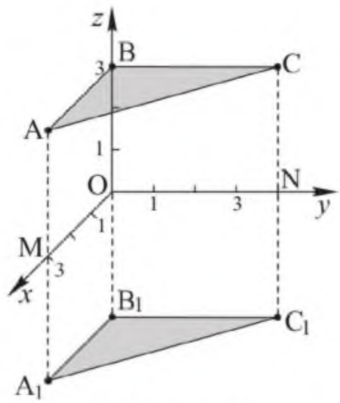


Рисунок 104

Так как $AB \parallel Ox$ и $BC \parallel Oy$, то ΔABC – прямоугольный, $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$. Следовательно, $P_{\Delta A_1B_1C_1} = 12$, $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.

Ответ. $P = 12$ ед., $S = 6$ кв.ед.

417. Дан треугольник с вершинами в точках A (0; 0; 5), B (5; 0; 0), C (0; 5; 0), точка O – начало системы координат. Найдите сумму площадей ортогональных проекций треугольников AOB, BOC, AOC на плоскость треугольника ABC.

Р е ш е н и е. Рассмотрим тетраэдр $OABC$ (рисунок 105). Так как точка O – начало системы координат и его боковые ребра OA, OB, OC лежат на координатных лучах Oz, Ox, Oy соответственно, то плоские углы при вершине O тетраэдра прямые.

По условию $OA = OB = OC = 5$, следовательно, основание тетраэдра – равносторонний ΔABC, сторона которого равна $5\sqrt{2}$.

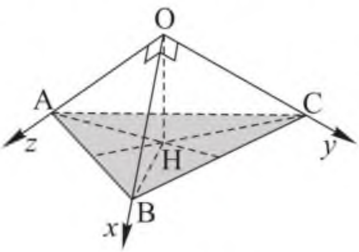


Рисунок 105

Ортогональной проекцией его вершины O на плоскость основания является точка H пересечения медиан треугольника, а сумма площадей ортогональных проекций треугольников AOB, BOC, AOC на плоскость ABC равна площади ΔABC,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(5\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

О т в е т. $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ кв. ед.

418. Каковы координаты точки M, если она находится: а) на одинаковом расстоянии от координатных плоскостей и на расстоянии, равном $4\sqrt{3}$, от начала координат; б) на одинаковом расстоянии от координатных осей и на расстоянии, равном 6, от начала координат? Исследуйте, сколько решений имеет задача.

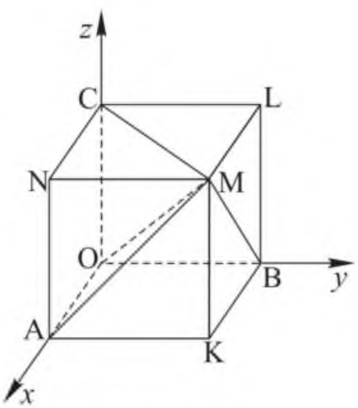


Рисунок 106

Р е ш е н и е. а) Расстояния от точки M до координатных плоскостей – это длины перпендикуляров, проведенных из точки M к координатным плоскостям. Так как эти расстояния равны, то эти отрезки являются ребрами куба. Например, на рисунке 106 отрезки $MK = MN = ML$. Зная расстояние от начала координат до точки M, длину диагонали куба $OM = 4\sqrt{3}$, установим, что ребро куба равно 4.

Следовательно, искомая точка может иметь координаты: $M_1(4; 4; 4)$, $M_2(-4; 4; 4)$, $M_3(4; -4; 4)$, M_4 $(4; 4; -4)$, M_5 $(-4; -4; 4)$, $M_6(4; -4; -4)$, $M_7(-4; 4; -4)$, $M_8(-4; -4; -4)$.

б) Расстояния от точки M до координатных осей – это длины перпендикуляров, проведенных из точки M к координатным осям. Так как эти расстояния равны, то указанные отрезки являются диагоналями граней куба. Например, на рисунке 106 это отрезки $MA = MC = MB$. Зная расстояние от начала координат до точки M, длину диагонали куба $OM = 6$, найдем его ребро: $\frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Следовательно, искомая точка может иметь координаты: $M_1(2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3})$, $M_2(-2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3})$, $M_3(2\sqrt{3};\ -2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3})$, $M_4(2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3};\ -2\sqrt{3})$, $M_5(-2\sqrt{3};\ -2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3})$, $M_6(2\sqrt{3};\ -2\sqrt{3};\ -2\sqrt{3})$, $M_7(-2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3};\ -2\sqrt{3})$, $M_8(-2\sqrt{3};\ -2\sqrt{3};\ -2\sqrt{3})$.

19. Расстояние между двумя точками. Координаты середины отрезка

434. Подберите координаты точек A и B так, чтобы длина отрезка AB была равна: а) $\sqrt{14}$; б) 14.

Решение. Пусть координаты указанных точек $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. По формуле расстояния между двумя точками $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

а) Так как число 14 может быть представлено в виде суммы, например, $1^2+3^2+2^2$, то взяв произвольно координаты точки $A(7; -8; 1)$, найдем соответствующие координаты точки $B(6; -5; -1)$.

б) Число 196 может быть представлено, например, как сумма $13^2+5^2+(\sqrt{2})^2$. Тогда выбрав координаты точки $A(7; -8; 0)$, найдем соответствующие координаты точки $B(-6; -3; \sqrt{2})$.

436. Точки $N(2; 3; 4)$, M и $P(5; 6; 7)$ – середины соответственно отрезков AB, AN и NB. Найдите: а) длину отрезка AB; б) координаты точки M и длину отрезка MP.

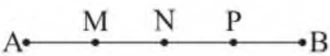


Рисунок 107

Решение. а) По условию точки M, N и P делят отрезок AB на четыре равные части. Следовательно, $NP = \frac{1}{4}AB$. Тогда $AB = 4\cdot\sqrt{(5-2)^2+(6-3)^2+(7-4)^2} = 12\sqrt{3}$

б) $MP = \frac{1}{2}AB = 6\sqrt{3}$. Пусть координаты точки $M(x; y; z)$. Найдем их, учитывая, что N – середина MP: $2 = \frac{x+5}{2}$, $3 = \frac{y+6}{2}$, $4 = \frac{z+7}{2}$. Откуда $x=-1$, $y=0$, $z=1$, $M(-1; 0; 1)$.

Ответ. а) $12\sqrt{3}$; б) $M(-1; 0; 1)$, $6\sqrt{3}$.

437. Исследуйте, каким является треугольник, остроугольным, прямоугольным или тупоугольным, если известны координаты его вершин: а) $A(3; 4; 1)$, $B(3; 1; 5)$, $C(0; 2; 7)$; б) $A(4; -5; 0)$, $B(-3: -1; -3)$, $C(-2; 3; 0)$; в) $A(6; -4; 10)$, $B(-4; 2; -6)$, $C(10; 2; -2)$.

Решение. а) $AB = \sqrt{0+9+16} = 5$; $AC = \sqrt{9+4+36} = 7$; $BC = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$.

В ΔABC больший угол B, найдем его косинус: $\cos\angle B = \frac{25+14-49}{2\cdot 5\sqrt{14}} < 0$.

Следовательно, ΔABC – тупоугольный.

б) $AB = \sqrt{49+16+9} = \sqrt{74}$; $AC = \sqrt{36+64} = 10$; $BC = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$. Так как выполняется равенство $AC^2 = AB^2 + BC^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, ΔABC – прямоугольный.

в) $AB = \sqrt{100+36+256} = \sqrt{392}$; $AC = \sqrt{16+36+144} = 14$; $BC = \sqrt{196+0+16} = \sqrt{212}$. В ΔABC больший угол C, найдем его косинус: $\cos \angle C = \dfrac{196+212-392}{2 \cdot 14\sqrt{212}} > 0$. Следовательно, ΔABC – остроугольный.

О т в е т. а) Тупоугольный; б) прямоугольный; в) остроугольный.

438. Дана прямоугольная система координат. На оси Oz найдите точку C такую, что ломаная ABC имеет наименьшую длину, если $A(3; 5; 10)$, $B(4; 3; 4)$.

Р е ш е н и е . Так как наименьшую длину будет иметь отрезок BC, перпендикулярный оси Oz, то это диагональ верхнего основания прямоугольного параллелепипеда с диагональю OB (рисунок 108). Следовательно, C (0; 0; 4).

О т в е т. C (0; 0; 4).

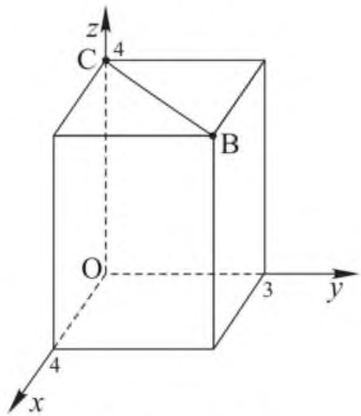


Рисунок 108

439. Найдите координаты точки, сумма расстояний от которой до точек $A(4; 3; 5)$, $B(0; 0; 5)$, $C(-4; 3; 5)$, $D(0; 6; 5)$ наименьшая. Чему равна сумма этих расстояний?

Р е ш е н и е. Так как точки A, B, C и D одинаково удалены от координатной плоскости xOy, то они лежат в одной плоскости, параллельной плоскости xOy (рисунок 109). Следовательно, искомой является точка M пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Докажем, что $ABCD$ – параллелограмм: $AB = CD = 5$, $BC = AD = 5$. Тогда точка M – середина диагонали BD, M (0; 3; 5).

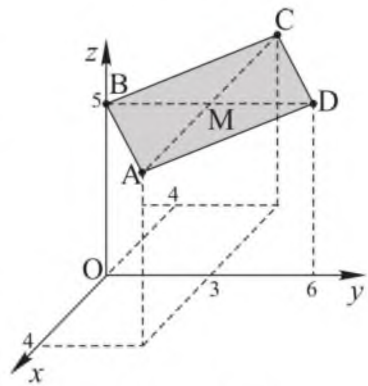


Рисунок 109

Так как $AC = 8$, $BD = 6$, то сумма расстояний от точки M до вершин четырехугольника $ABCD$ равна 14.

О т в е т. (0; 3; 5); 14.

440. Найдите координаты такой точки, чтобы была наименьшей сумма квадратов расстояний от неё до трех данных точек: а) $K(3; 0; 0)$, $P(0; 3; 0)$, $L(0; 0; 3)$; б) $O(0; 0; 0)$, $A(1; 0; 0)$, $B(-1; 1; 1)$. Чему равна эта сумма квадратов?

Р е ш е н и е. а) Пусть искомая точка $M(x; y; z)$. Найдем, при каком условии значение выражения $MK^2 + MP^2 + ML^2 = (x-3)^2 + y^2 + z^2 + x^2 + (y-3)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (z-3)^2$ будет наименьшим. Упростим выражение: $3(x^2 - 2x + 3) + 3(y^2 - 2y + 3) + 3(z^2 - 2z + 3) = 3(x-1)^2 + 6 + 3(y-1)^2 + 6 + 3(z-1)^2 + 6 = 3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 + 3(z-1)^2 + 18$.

Эта сумма будет наименьшей, равной 18, если координаты точки $M(1; 1; 1)$.

б) Пусть координаты точки $C(x; y; z)$. Выражение $CO^2 + CA^2 + CB^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (x-1)^2 + y^2 + z^2 + (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3x^2 + 3\left(y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}\right) + 3\left(z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}\right) = 3x^2 + 3\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(z - \frac{1}{3}\right) + \frac{10}{3}$ принимает наименьшее значение, равное $3\frac{1}{3}$, если координаты точки $C\left(0; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

О т в е т. а) $(1; 1; 1)$, 18; б) $\left(0; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $3\frac{1}{3}$.

20. Векторы в пространстве и действия над ними

445. Упростите выражения:

а) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{CB}$;

в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{KN} - \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{KF}$.

Решение. Используя правила сложения и вычитания векторов и свойства действий над ними, получим:

а) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KM}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{CD} = \vec{0} + \vec{0} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}$;

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MK}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{AN}$;

в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}) = \vec{0} + \overrightarrow{KF} = \overrightarrow{KF}$;

г) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{KN} - \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{KF} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EM} = \vec{0}$.

457. а) Точка C делит отрезок AB в отношении 3 : 4, считая от точки A, O – произвольная точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OC} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

Доказательство. Точки A, B, C, O лежат в одной плоскости. В этой плоскости проведем $CM \parallel OB$ и $CN \parallel OA$, $M \in OA$, $N \in OB$ (рисунок 110). Тогда по теореме Фалеса $OM : MA = 4 : 3$ и $ON : NB = 3 : 4$.

По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$, что и требовалось доказать.

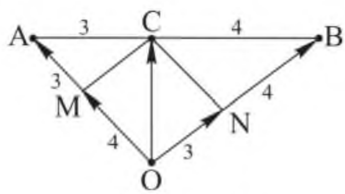


Рисунок 110

458. Даны точки A (2; 5; –8), B (7; –4; 0). Найдите координаты точки C делящей отрезок AB в отношении: а) 2 : 1; б) 3 : 5, считая от точки A.

Решение. Используем формулу $\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$, доказанную при решении задачи № 457, где O (0; 0; 0). Тогда векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ будут иметь такие же координаты как точки A, B, C. Пусть точка С имеет координаты (x; y; z).

а) Так как $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$, то $x = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 7}{3} = 5\frac{1}{3}$, $y = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot (-4)}{3} = -1$, $z = \frac{1 \cdot (-8) + 2 \cdot 0}{3} = -2\frac{2}{3}$.

б) Так как $\overrightarrow{OC} = \frac{5}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$, то $x = \frac{5\cdot 2 + 3\cdot 7}{8} = 3\frac{7}{8}$, $y = \frac{5\cdot 5 + 3(-4)}{8}$ $= 1\frac{5}{8}$, $z = \frac{5\cdot(-8) + 3\cdot 0}{8} = -5$.

Ответ. а) $C\left(5\frac{1}{3}; -1; -2\frac{2}{3}\right)$; б) $C\left(3\frac{7}{8}; 1\frac{5}{8}; -5\right)$.

469. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, точка K – середина её средней линии, O – произвольная точка пространства. Докажите, что $4\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Решение. Пусть MN – средняя линия данной трапеции, $M \in AB$, $N \in CD$. Так как K – середина MN, то $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$. Учитывая, что M и N – середины отрезков AB и CD, получим . $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, откуда следует равенство $4\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

470. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что:
$\overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{DB_1} = 2\overrightarrow{DC}$.

Решение. Так как диагонали A_1C и B_1D параллелепипеда пересекаются в одной точке, например O, и точкой пересечения делятся пополам, то $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DC}$, Следовательно, $2\cdot\overrightarrow{DO} + 2\cdot\overrightarrow{OC} = 2\cdot\overrightarrow{DC}$ или $\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{A_1C} =$ $= 2\overrightarrow{DC}$. Что и требовалось доказать.

471. Дан тетраэдр $DABC$. На медиане DD_1 его грани ADB отмечена точка F так, что $DF : FD_1 = 4 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{CF}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Решение. $\overrightarrow{CF} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CD_1} + \frac{3}{7}\overrightarrow{CD} = \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \frac{3}{7}\overrightarrow{CD} = \frac{2}{7}\overrightarrow{CA} +$ $+ \frac{2}{7}\overrightarrow{CB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{CD}$.

472. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, N – точка пересечения медиан ΔBA_1D. Докажите, что $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$.

Решение. В пункте 20 в решении задачи 2 доказана формула: $\overrightarrow{OM} =$ $= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, где M – точка пересечения медиан ΔABC, O – произвольная точка пространства. Используя её, запишем $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$. По правилу параллелепипеда $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$. Следовательно, верно $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$.

473. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором проведен перпендикуляр C_1M к его диагонали BD_1. Выразите вектор $\overrightarrow{MC_1}$ через векторы $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{BD_1}$.

Р е ш е н и е. $\overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{BC_1} - \overrightarrow{BM}$. Пусть ребро куба равно a, тогда в прямоугольном ΔBC_1D_1 катеты $D_1C_1 = a$, $BC_1 = a\sqrt{2}$, гипотенуза $BD_1 = a\sqrt{3}$ (рисунок 111). Используя то, что катет – есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу ($BC_1^2 = BD_1 \cdot BM$), найдем длину отрезка BM. Получим: $2a^2 = a\sqrt{3} \cdot BM$, $BM = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \times$ $\times\, a\sqrt{3} = \frac{2}{3} \cdot BD_1$.

Таким образом, $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{MC_1} =$ $= \overrightarrow{BC_1} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BD_1}$.

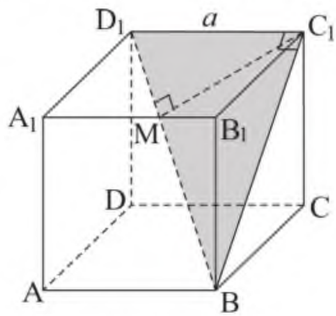


Рисунок 111

О т в е т. $\overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{BC_1} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BD_1}$.

476. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Известны координаты трех её вершин A (−1; −3; 1), B (−2; 1; 0), D (3; −3; −1). Найдите координаты точки C, если $AD = 2BC$.

Р е ш е н и е. Так как $AD \parallel BC$ и $AD = 2BC$, то $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$. Пусть координаты точки C $(x; y; z)$, тогда $\overrightarrow{AD}$ (4; 0; – 2), $\overrightarrow{BC}$ $(x + 2; y – 1; z)$. Учитывая векторное равенство, получим $2(x + 2) = 4$, $2(y – 1) = 0$, $2z = – 2$. Откуда $x = 0$, $y = 1$, $z = – 1$.

О т в е т. C (0; 1; −1).

477. Вершины правильного тетраэдра $DABC$ имеют координаты A (4; 0; 0), B (0; 4; 0), C (0; 0; 4), D (4; 4; 4). Найдите длину его высоты DH.

Р е ш е н и е. Так как тетраэдр правильный, то H – точка пересечения медиан ΔABC. Поэтому $DH = |\overrightarrow{DH}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, где $\overrightarrow{DH}$ $(a; b; c)$ и $\overrightarrow{DH} =$ $= \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$. Учитывая последнее равенство, найдем $a = -\frac{8}{3}$, $b = -\frac{8}{3}$, $c = -\frac{8}{3}$. Тогда $DH = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

О т в е т. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

478. В правильном тетраэдре $DABC$ отмечены точки K и H пересечения медиан граней DAC и ABC соответственно, $DH \cap BK = M$, $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Выразите через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор: а) $\overrightarrow{DH}$; б) $\overrightarrow{DM}$; в) $\overrightarrow{BK}$; г) $\overrightarrow{MK}$.

Р е ш е н и е. а) $\overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

б) В правильном тетраэдре все грани являются равными правиль-ными треугольниками, поэтому медианы DL и BL равны, и точки K и H делят их в отношении 1 : 2, считая от точки L.

Следовательно, $KH \parallel DB$ и $\Delta KLH \sim \Delta DLB$, причем $\frac{KH}{DB} = \frac{KL}{DL} = \frac{1}{3}$. Также $\Delta KMH \sim \Delta BMD$, при этом $\frac{KM}{BM} = \frac{HM}{DM} = \frac{KH}{DB} = \frac{1}{3}$. Поэтому $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DH} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

в) $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c})$.

г) $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BK} = \frac{1}{12}(\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c})$.

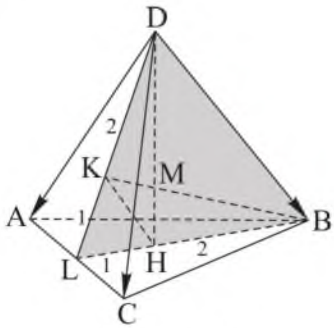


Рисунок 112

О т в е т. а) $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$; б) $\frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$; в) $\frac{1}{3}(\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c})$; г) $\frac{1}{12}(\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c})$.

479. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, O и O_1 – соответственно точки пересечения их медиан. Докажите, что $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1})$.

Р е ш е н и е. Для произвольной точки M пространства выполняются равенства: $\overrightarrow{MO_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1})$, $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$, $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{MO_1} - \overrightarrow{MO}$. Тогда $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1})$. Что и требовалось доказать.

480. Дан тетраэдр *PABC*. Докажите, что: а) отрезки, соединяющие вершины с точками пересече-ния медиан противоположных граней пересекаются в одной точке *M*; б) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP})$, где *O* – произвольная точка пространства.

Доказательство. а) Пусть медианы граней тетраэдра пересекаются в точках *K*, *L*, *N*, *H* (рисунок 113). При решении задачи № 472 было доказано, что отрезки *BK* и *PH* пересекаются в точке *M* и $\frac{KM}{BM} = \frac{HM}{PM} = \frac{1}{3}$.

Аналогично, из подобия треугольников *MNH* и A_1AP, *MLH* и C_1CP устанавливаем, что $\frac{MN}{AM} = \frac{HM}{PM} = \frac{1}{3}$ и $\frac{ML}{CM} = \frac{HM}{PM} = \frac{1}{3}$. Следовательно, отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней пересекаются в одной точке *M*.

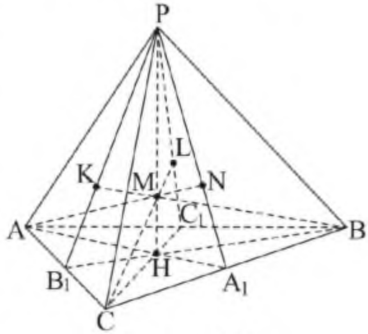


Рисунок 113

б) Для произвольной точки *O* пространства верны равенства $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OK} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC})$. Следовательно, $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP})$

481. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, *M* и *N* – точки пересечения медиан ΔACD_1 и ΔBA_1C_1 соответственно (рисунок 114). Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1})$.

Доказательство.

$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB_1}$.

$\overrightarrow{B_1N} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DB_1}$.

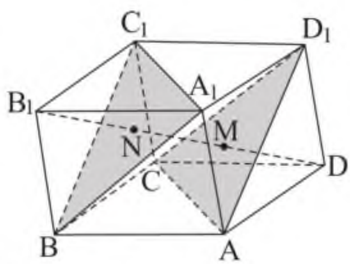


Рисунок 114

Следовательно, точки *M* и *N* лежат на диагонали DB_1 и делят её на три равные части. Поэтому $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1})$ что и требовалось доказать.

21. Коллинеарные и компланарные векторы. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

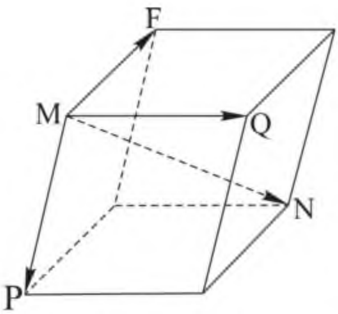


Рисунок 115

491. Три силы приложены к некоторой точке, как показано на рисунке 229 учебника. Начертите вектор, изображающий равнодействующую этих сил.

Р е ш е н и е. Пусть данные силы изображают векторы $\overrightarrow{MF} = \vec{f}$, $\overrightarrow{MQ} = \vec{q}$, $\overrightarrow{MP} = \vec{p}$ (рисунок 115). Тогда равнодействующей указанных сил является вектор $\overrightarrow{MN} = \vec{f} + \vec{q} + \vec{p}$, где MN – диагональ параллелепипеда с ребрами MF, MQ, MP.

493. Даны векторы $\overrightarrow{OA}$ (1; 1; 1), $\overrightarrow{OB}$ $\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{OC}$ (2; 3; 2), где точка O – начало координат. Установите, принадлежат ли точки A, B, C, O одной плоскости.

Р е ш е н и е. Так как выполняется равенство $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$, то векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ компланарны, то есть лежат в одной или параллельных плоскостях. Учитывая, что у них общее начало O, заключаем, что указанные векторы, а следовательно, и точки A, B, C, O принадлежат одной плоскости.

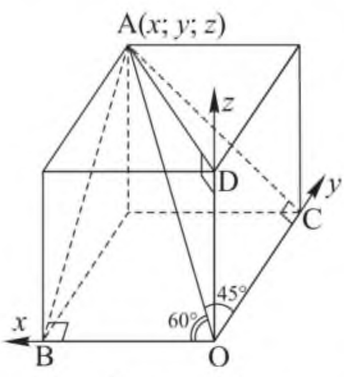


Рисунок 116

506. Известно, что длина вектора $\overrightarrow{OA}$, имеющего положительные координаты, равна 10, а сумма его ортогональных проекций на оси координат равна 20. Исследуйте, могут ли углы, образованные вектором $\overrightarrow{OA}$ с осями абсцисс и ординат быть соответственно равны 60° и 45°.

Р е ш е н и е. Пусть точка O – начало координат, лучи OB, OC, OD – координатные оси Ox, Oy, Oz соответственно (рисунок 116). Тогда отрезки OB, OC, OD – проекции вектора $\overrightarrow{OA}$ на оси координат. По условию задачи $x + y + z = 20$, $x^2 + y^2 + z^2 = 100$. Предположим, что вектор $\overrightarrow{OA}$ образует с осями абсцисс и ординат углы соответственно равные 60° и 45°.

Тогда в ΔAOB $\angle ABO = 90°$, $\angle AOB = 60°$, $OB = x$, $OA = 2x$. Так как по условию $OA = 10$, то $x = 5$.

В ΔAOC $\angle ACO = 90°$, $\angle AOC = 45°$, $OA = 10$, $OC = AC = 5\sqrt{2}$.

В ΔAOD $\angle ADO = 90°$, $OA = 10$, $AD = 5\sqrt{3}$, $OD = 5$.

Тогда $x + y + z = 10 + 5\sqrt{2} \neq 20$. Получили противоречие с условием задачи, следовательно, наше предположение неверно. Вектор $\overrightarrow{OA}$ не может образовывать с осями абсцисс и ординат углы соответственно равные 60° и 45°.

О т в е т. Не может.

507. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Установите, являются ли компланарными векторы, равные $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$.

Р е ш е н и е. Так как $\vec{c} - \vec{a} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a} - \vec{b} = \vec{b} + \vec{c} - (\vec{a} + \vec{b})$, то векторы, равные векторам $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$ компланарны.

О т в е т. Являются.

508. Докажите, что векторы $7\vec{a} + 5\vec{c}$, $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, $5\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ компланарны.

Р е ш е н и е. Указанные векторы будут компланарны, если найдутся такие числа x и y, чтобы было верно равенство $7\vec{a} + 5\vec{c} = x \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) + y \cdot (5\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c})$. Преобразуем данное равенство к виду $7\vec{a} + 5\vec{c} = (3x + 5y) \cdot \vec{a} + (-2x - y) \cdot \vec{b} + (x + 3y) \cdot \vec{c}$. Тогда получим: $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ -2x - y = 0 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ откуда $x = -1$, $y = 2$.

О т в е т. Векторы компланарны, так как выполняется равенство $7\vec{a} + 5\vec{c} = 2(5\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}) - (3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$.

509. Докажите, что точки A, B, C принадлежат одной прямой, если для произвольной точки X пространства верно равенство $\overrightarrow{XC} = k \cdot \overrightarrow{XA} + (1 - k) \times \overrightarrow{XB}$, где k – некоторое число.

Р е ш е н и е. Преобразуем данное равенство: $\overrightarrow{XC} = k \cdot \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} - k\overrightarrow{XB}$; $\overrightarrow{XC} - \overrightarrow{XB} = k(\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB})$; $\overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{BA}$. Из последнего равенства следует, что векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$ коллинеарны. Следовательно, точки A, B, C принадлежат одной прямой.

510. Даны четыре точки A, B, C, D, причем $A \notin BC$. Докажите, что эти точки принадлежат одной плоскости, если верно равенство $\overrightarrow{OD} = x \cdot \overrightarrow{OA} +$

$+ y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$, где O – произвольная точка пространства, x, y, z – некоторые числа, причем $x + y + z = 1$.

Решение. Учитывая, равенство $x + y + z = 1$, запишем $z = 1 - x - y$, и преобразуем данное векторное равенство: $\overrightarrow{OD} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB} + (1 - x - y) \times \times \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = x \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + y \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{CD} = x \cdot \overrightarrow{CA} + y \cdot \overrightarrow{CB}$.

Из последнего равенства следует, что векторы $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, компланарны. Следовательно, точки A, B, C, D принадлежат одной плоскости.

511. Даны векторы $\vec{a}$ $(1; 1; -1)$, $\vec{b}$ $(-2; -3; 3)$, $\vec{c}$ $(-2; 4; -4)$. Найдите координаты двух неравных векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, коллинеарных вектору $\vec{c}$, если $|\vec{p}| = |\vec{q}| = |\vec{a} + \vec{b}|$.

Решение. Так как векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны вектору $\vec{c}$, то они имеют координаты $\vec{p}\,(-2k_1; 4k_1; -4k_1)$, $\vec{q}\,(-2k_2; 4k_2; -4k_2)$. Вектор, равный $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $(-1; -2; 2)$, а его длина равна $\sqrt{1 + 4 + 4} = 3$. Тогда $4k^2 + 16k^2 + 16k^2 = 9$, $k^2 = \frac{1}{4}$, где k принимает значения k_1 или k_2. Пусть $k_1 = \frac{1}{2}$ тогда $k_2 = -\frac{1}{2}$. Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ имеют координаты $\vec{p}$ $(-1; 2; -2)$, $\vec{q}$ $(1; -2; 2)$.

Ответ. $\vec{p}$ $(-1; 2; -2)$, $\vec{q}$ $(1; -2; 2)$.

512. Точки A, B, C, D не принадлежат одной плоскости. На отрезке AB отмечена точка M так, что $AM : MB = 3 : 1$, а на отрезке CD точка N так, что $CN : ND = 3 : 1$. Установите, компланарны ли векторы $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{DB}$.

Решение. Пусть O – произвольная точка пространства, тогда верны равенства: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + \frac{3}{4}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DB}$.

Из последнего равенства следует, что векторы $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{DB}$. компланарны.

Ответ. Компланарны.

513. Треугольная пирамида задана координатами своих вершин $A(-3; 0; 1)$, B $(1; 4; 1)$, C $(-5; 2; 3)$, D $(1; 0; 2)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO}$, если O – точка пересечения медиан грани BCD.

Решение. $\overrightarrow{AO}\,\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{AB}$ $(4; 4; 0)$, $\overrightarrow{AC}$ $(-2; 2; 2)$, $\overrightarrow{AD}$ $(4; 0; 1)$. Вектор, равный сумме $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, имеет координаты $(6; 6; 3)$. Тогда $\overrightarrow{AO}$ $(2; 2; 1)$, $|\overrightarrow{AO}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$.

Ответ. 3.

514. Дан тетраэдр $OABC$, в котором $OA = OB = OC = 2$, $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 90°$. Постройте такую точку M, чтобы выполнялось равенство $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = -5\overrightarrow{OM}$.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат с началом в точке O и координатными осями Ox, Oy, Oz совпадающими соответственно с лучами OA, OB, OC. Тогда A (2; 0; 0), B (0; 2; 0), C (0; 0; 2).

Пусть точка M имеет координаты $(x; y; z)$, тогда $\overrightarrow{MA}$ $(2 - x; -y; -z)$, $2\overrightarrow{MB}$ $(-2x; 4 - 2y; -2z)$, $3\overrightarrow{MC}$ $(-3x; -3y; 6 - 3z)$, $-5\overrightarrow{OM}$ $(-5x; -5y; -5z)$. Вектор, равный сумме $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ имеет координаты $(2 - 6x; 4 - 6y; 6 - 6z)$.

Следовательно, $\begin{cases} 2 - 6x = -5x, \\ 4 - 6y = -5y, \\ 6 - 6z = -5z, \end{cases}$ откуда M (2; 4; 6).

22. Скалярное произведение двух векторов

531. Известно, что длины неколлинеарных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равны. Найдите скалярное произведение суммы и разности этих векторов.

Решение. $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2 = 0$, так как $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Ответ. 0.

532. Найдите произведение $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 4$ и $\operatorname{tg}\angle(\vec{b};\vec{c}) = \sqrt{3}$.

Решение. $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}) =$

$= \vec{a}^{\,2} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b} - b^2 - \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{c}^{\,2} =$

$= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 - 2|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\angle(\vec{b};\vec{c}) - |\vec{c}|^2 = -2\cdot 16\cos\angle(\vec{b};\vec{c}) - 16.$

Используя формулу $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, найдем $\cos\angle(\vec{b};\vec{c}) = \sqrt{\frac{1}{1+3}} = \frac{1}{2}$.

Тогда искомое произведение равно −32.

Ответ. −32.

533. Докажите признак перпендикулярности прямой и плоскости, используя скалярное произведение векторов.

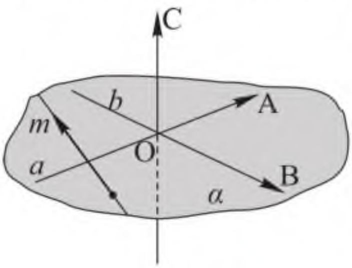


Рисунок 117

Доказательство. Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости. Пусть прямые a и b лежат в плоскости α и пересекаются в точке O, прямая c пересекает плоскость α, причем $c \perp a$ и $c \perp b$ (рисунок 117). Докажем, что $c \perp \alpha$, то есть прямая c перпендикулярна любой прямой этой плоскости.

На произвольной прямой m плоскости α отложим вектор $\vec{m}$, а на прямых a, b и c соответственно векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Так как векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ не коллинеарны, то $\vec{m} = x\cdot\overrightarrow{OA} + y\cdot\overrightarrow{OB}$, тогда $\vec{c}\cdot\vec{m} = x\cdot\vec{c}\cdot\overrightarrow{OA} + y\cdot\vec{c}\cdot\overrightarrow{OB}$. Так как $\vec{c}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$ и $\vec{c}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$, то $\vec{c}\cdot\vec{m} = 0$. Следовательно, прямая c перпендикулярна произвольной прямой m данной плоскости, а значит, $c \perp \alpha$. Что и требовалось доказать.

534. В тетраэдре $PABC$ $\angle APB = 95°$, $\angle APC = 85°$, $AP = 12$ дм, PL – биссектриса ΔBPC, $AL = 13$ дм. Найдите длину биссектрисы PL.

Решение. В пункте 22 учебника при решении задачи 3 доказано, что если в тетраэдре $\angle APB + \angle APC = 180°$, то $PA \perp PL$, где PL – биссектриса $\angle BPC$ (рисунок 118). Следовательно, ΔAPL – прямоугольный, в котором $PL = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (дм).

Ответ. 5 дм.

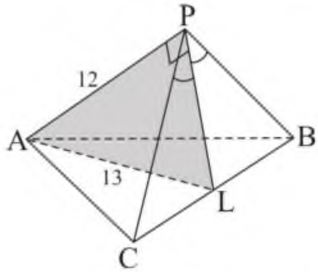


Рисунок 118

535. Найдите площадь ΔABC, если даны векторы $\overrightarrow{AB}(2; -4; 1)$, $\overrightarrow{AC}(1; 0; 5)$.

Решение. Площадь данного треугольника найдем по формуле $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle A$.

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$, $AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{26}$.

$$\cos\angle A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2+0+5}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{26}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3 \cdot 26}},$$

$$\sin\angle A = \sqrt{1 - \cos^2\angle A} = \sqrt{\frac{71}{3 \cdot 26}}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{71}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{26}} = \frac{\sqrt{497}}{2}.$$

Ответ. $0{,}5\sqrt{497}$.

536. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между: а) векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DB_1}$; б) векторами $\overrightarrow{D_1B_1}$ и $\overrightarrow{CA_1}$; в) векторами $\overrightarrow{D_1C}$ и $\overrightarrow{DA_1}$; г) прямыми D_1C и DA_1.

Решение. Выберем систему координат с началом в точке B и осями абсцисс, ординат и аппликат BA, BC, BB_1 соответственно (рисунок 119). Пусть ребро куба равно a. Тогда его вершины имеют координаты $A(a; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; a; 0)$, $D(a; a; 0)$, $A_1(a; 0; a)$, $B_1(0; 0; a)$, $C_1(0; a; a)$, $D_1(a; a; a)$.

а) $\overrightarrow{AD}(0; a; 0)$, $\overrightarrow{DB_1}(-a; -a; a)$, $|\overrightarrow{AD}| = a$, $|\overrightarrow{DB_1}| = a\sqrt{3}$,

$$\cos\angle(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{DB_1}) = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB_1}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{DB_1}|} = \frac{-a^2}{a^2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0{,}577.$$

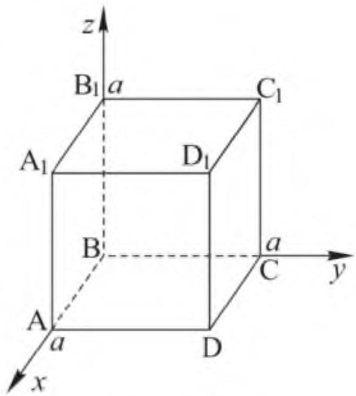


Рисунок 119

Следовательно, $\angle(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{DB_1}) \approx 125°$.

б) $\overrightarrow{D_1B_1}(-a; -a; 0)$, $\overrightarrow{CA_1}(a; -a; a)$. Так как $\overrightarrow{D_1B_1} \cdot \overrightarrow{CA_1} = 0$, то $\angle(\overrightarrow{D_1B_1}; \overrightarrow{CA_1}) = 90°$.

в) $\overrightarrow{D_1C}\,(-a;\ 0;\ -a)$, $\overrightarrow{DA_1}\,(0;\ -a;\ a)$, $|\overrightarrow{D_1C}| = a\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{DA_1}| = a\sqrt{2}$, $\cos\angle(\overrightarrow{D_1C}; \overrightarrow{DA_1}) = \dfrac{\overrightarrow{D_1C}\cdot\overrightarrow{DA_1}}{|\overrightarrow{D_1C}|\cdot|\overrightarrow{DA_1}|} = \dfrac{-a^2}{2a^2} = -\dfrac{1}{2}$. Следовательно, $\angle(\overrightarrow{D_1C}; \overrightarrow{DA_1}) = 120°$.

г) Угол между векторами, лежащими на прямых D_1C и DA_1 равен 120°, тогда угол между этими прямыми равен 60°.

О т в е т. а) ≈ 125°; б) 90°; в) 120°; г) 60°.

537. Дан правильный тетраэдр $DABC$, точки M и N – середины его ребер AC и DB соответственно. Найдите угол между: а) векторами $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$; б) прямыми MN и BC.

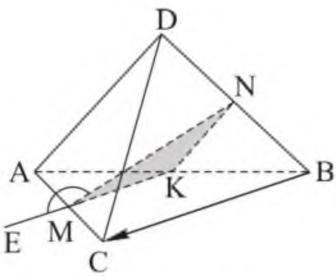


Рисунок 120

Р е ш е н и е. а) В плоскости ABC через точку M проведем прямую $KE \parallel BC$ (рисунок 120). Тогда K – середина AB и $NK \parallel DA$.

Угол между векторами $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ – это угол NME, смежный углу NMK. Так как в правильном тетраэдре $AD \perp BC$, то $KN \perp KM$. В ΔMNK $\angle K = 90°$, $MK = KN$ (как средние линии соответствующих треугольников). Следовательно, $\angle NMK = 45°$, $\angle NME = 135°$.

б) Угол между прямыми MN и BC равен 45°.

О т в е т. а) 135°; б) 45°.

538. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все ребра которого равны a и плоские углы при вершине C равны по 60°. 1) Докажите, что четырехугольник BB_1D_1D – квадрат. 2) Найдите площадь четырехугольника AA_1C_1C. 3) Найдите длину отрезка CF, где точка F – середина ребра AA_1.

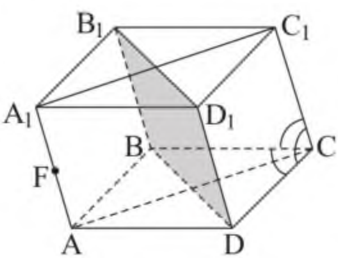


Рисунок 121

Р е ш е н и е. 1) Основание $ABCD$ параллелепипеда – ромб, в котором $\angle C = 60°$, поэтому $BD = a = BB_1$. Докажем, что $\angle B_1BD = 90°$. Для этого найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BB_1} = (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BB_1} = a^2\cdot\cos 60° - a^2\cdot\cos 60° = 0$. Следовательно, $\angle B_1BD = 90°$, а четырехугольник BB_1D_1D – квадрат.

$S_{AA_1C_1C} = AC\cdot CC_1\cdot\sin\angle ACC_1$.

$AC^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD})^2 = \overrightarrow{CB}^2 + CD^2 + 2\cdot\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} = a^2 + a^2 + 2\cdot a^2 \times \cos 60° = 3a^2$.

$AC = a\sqrt{3}$. $\cos\angle ACC_1 = \cos\angle(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CC_1}) = \dfrac{\overrightarrow{CC_1}\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})}{|\overrightarrow{CC_1}|\cdot|\overrightarrow{CA}|} = \dfrac{a^2}{a^2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$\sin\angle ACC_1 = \sqrt{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$S_{AA_1C_1C} = a^2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = a^2\sqrt{2}$.

3) $\overrightarrow{CF} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA_1}) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CC_1}) = \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}$.

$CF^2 = |\overrightarrow{CF}|^2 = \left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}\right)^2 = \overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{CD}^2+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CC_1}^2+2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}+$

$+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CC_1} = 2a^2+\dfrac{1}{4}a^2+a^2+\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{17a^2}{4}$.

$CF = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.

Ответ. 2) $a^2\sqrt{2}$; 3) $\dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.

539. Отрезки AB и CD лежат на скрещивающихся прямых. Точки M и N – их середины соответственно. Докажите, что $MN < \dfrac{AC+BD}{2}$.

Доказательство. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}$. Сложим левые и правые части этих равенст, получим $2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})+$ $+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN})$. Так как $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$, а также $\overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{DN}$ противоположные векторы, то их суммы равны $\vec{0}$. Следовательно, $\overrightarrow{MN} =$ $= \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$. Поскольку $MN = |\overrightarrow{MN}| = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}|$, а $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}| <$ $< |\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}| = AC+BD$, то $MN < \dfrac{1}{2}(AC+BD)$. Что и требовалось доказать.

541. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что отрезки AB и CD перпендикулярны, если верно равенство $AC^2+BD^2 = AD^2+BC^2$.

Доказательство. Так как $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$, то верно равенство $\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2 =$ $= \overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2$. Преобразуем это векторное равенство:

$\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{BD}^2$,

$(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD})(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})$,

$\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}) = 0$,

$\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}) = 0$,

$\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}) = 0$,

$\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}) = 0$,

$\overrightarrow{DC} \cdot 2\overrightarrow{AB} = 0,$

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$

Из последнего равенства следует, что $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AB}$, а поэтому и отрезки AB и CD перпендикулярны.

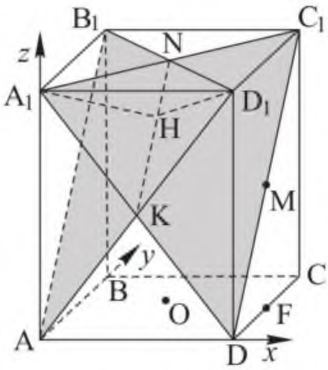


Рисунок 122

542. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 2$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$. Найдите угол между: а) прямыми B_1D и AM, где M – центр грани DD_1C_1C; б) прямой A_1O, где O – центр грани $ABCD$, и плоскостью DD_1C_1C; в) плоскостями AB_1D_1 и A_1C_1D.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат с началом в точке A и осями абсцисс, ординат и аппликат AD, AB, AA_1 соответственно (рисунок 122). Запишем координаты точек $B_1(0;\ 2;\ 4)$, $D(3;\ 0;\ 0)$, $M(3;\ 1;\ 2)$, $A_1(0;\ 0;\ 4)$, $O(1{,}5;\ 1;\ 0)$, $D_1(3;\ 0;\ 4)$.

а) Рассмотрим векторы $\overrightarrow{B_1D}\,(3;\ -2;\ -4)$ и $\overrightarrow{AM}\,(3;\ 1;\ 2)$, $\cos\angle(B1D;\ AM)$ $= |\cos\angle(\overrightarrow{B_1D};\ \overrightarrow{AM})| = \dfrac{|9-2-8|}{\sqrt{9+4+16}\cdot\sqrt{9+1+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{406}}$. Следовательно, $\angle(B_1D;\ AM) = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{406}}$.

б) Построим ортогональную проекцию прямой A_1O на плоскость грани DD_1C_1C. Это прямая D_1F, где $F(3;\ 1;\ 0)$ – середина DC. Тогда угол между прямой A_1O и плоскостью DD_1C_1 равен углу между прямыми A_1O и D_1F.

$\cos\angle(A_1O;\ D_1F) = |\cos\angle(\overrightarrow{A_1O};\ \overrightarrow{D_1F})|$, $\overrightarrow{A_1O}\left(\dfrac{3}{2}; 1 - 4\right)$, $\overrightarrow{D_1F}\,(0;\ 1;\ -4)$, $|\overrightarrow{A_1O}| =$ $= \sqrt{\dfrac{9}{4}+1+16} = \dfrac{\sqrt{77}}{2}$, $\overrightarrow{D_1F} = \sqrt{17}$, $\cos\angle(A_1O;\ D_1F) = \dfrac{|0+1+16|\cdot 2}{\sqrt{77}\cdot\sqrt{17}} = \dfrac{2\sqrt{17}}{\sqrt{77}}$.

Следовательно, $\angle(A_1O;\ (D_1CD)) = \arccos\dfrac{2\sqrt{17}}{\sqrt{77}}$.

в) Плоскости AB_1D_1 и A_1C_1D пересекаются по прямой KN, где $K(1{,}5;\ 0;\ 2)$ и $N(1{,}5;\ 1;\ 4)$ – центры граней AA_1D_1D и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно (рисунок 122).

$\cos\angle((AB_1D_1);\ (A_1C_1D)) = |\cos\angle A_1HD_1|$, где H – основание высот равных треугольников NA_1K и ND_1K.

$\overrightarrow{ND_1}\left(\dfrac{3}{2}; -1; 0\right)$, $\overrightarrow{NK}\,(0;\ -1;\ -2)$, $|\overrightarrow{ND_1}| = \sqrt{\dfrac{9}{4}+1} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $|\overrightarrow{NK}| = \sqrt{5}$.

$$\cos\angle D_1NK=\frac{\overrightarrow{ND_1}\cdot\overrightarrow{NK}}{|\overrightarrow{ND_1}|\cdot|\overrightarrow{NK}|}=\frac{1\cdot 2}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{65}},$$

$$\sin\angle D_1NK=\sqrt{1-\frac{4}{65}}=\frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}}.$$

$$S_{\Delta D_1NK}=\frac{1}{2}D_1N\cdot NK\cdot\sin\angle D_1NK=\frac{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{61}}{4\cdot\sqrt{65}}=\frac{\sqrt{61}}{4},$$

$$S_{\Delta D_1NK}=\frac{1}{2}NK\cdot D_1H,\ D_1H=\frac{\sqrt{61}}{2\sqrt{5}}.$$

В ΔA_1D_1H $A_1H=D_1H=\dfrac{\sqrt{61}}{2\sqrt{5}}$, $A_1D_1=3$,

$$\cos\angle A_1HD_1=\frac{\frac{61}{20}+\frac{61}{20}-9}{2\cdot\frac{61}{20}}=-\frac{29}{61}.$$

Следовательно, $\angle((AB_1D_1);(A_1C_1D))=\arccos\dfrac{29}{61}$.

О т в е т. а) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{406}}$; б) $\arccos\dfrac{2\sqrt{17}}{\sqrt{77}}$; в) $\arccos\dfrac{29}{61}$.

23. Уравнения сферы и плоскости

552. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку: а) $M(4; -2; 3)$ и содержащей ось аппликат; б) $N(2; 1; 5)$ и содержащую ось абсцисс.

Решение. а) Пусть вектор нормали $\vec{n}(a; b; c)$. Тогда должны выполняться условия: $\vec{n} \perp \overrightarrow{OZ}$, и $\vec{n} \perp \overrightarrow{OM}$, где $\overrightarrow{OZ}(0; 0; z)$, причем $z \neq 0$ и $\overrightarrow{OM}(4; -2; 3)$. Откуда получим $c = 0$, $4a - 2b = 0$. Пусть $a = 1$, тогда $b = 2$. Уравнение искомой плоскости имеет вид: $(x - 4) + 2(y + 2) = 0$, $x + 2y = 0$.

б) Если вектор нормали имеет координаты $\vec{n}(a; b; c)$, то из условий $\vec{n} \perp \overrightarrow{OX}$, и $\vec{n} \perp \overrightarrow{ON}$, где $\overrightarrow{OX}(x; 0; 0)$, причем $x \neq 0$ и $\overrightarrow{ON}(2; 1; 5)$, найдем $a = 0$, $b = -5c$. Тогда уравнение искомой плоскости имеет вид: $-5y + z = 0$.

Нужно отметить, что в уравнении $ax + by + cz + d = 0$ любой плоскости, содержащей какую-либо ось координат коэффициент $d = 0$.

Ответ. а) $x + 2y = 0$; б) $5y - z = 0$.

553. Составьте уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка, координаты концов которого равны $(3; -4; 7)$, $(1; 0; 1)$, перпендикулярной этому отрезку.

Решение. Обозначим концы данного отрезка $A(3; -4; 7)$ и $B(1; 0; 1)$. Так как искомая плоскость $\alpha \perp AB$, то $\overrightarrow{AB}(-2; 4; -6)$ является вектором нормали этой плоскости. Середина отрезка AB точка $C(2; -2; 4)$. Уравнение плоскости α имеет вид: $-2(x - 2) + 4(y + 2) - 6(z - 4) = 0$. Упростив его левую часть, получим $x - 2y + 3z - 18 = 0$.

Ответ. $x - 2y + 3z - 18 = 0$.

554. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки: а) $A(0; 1; 5)$, $B(3; 0; 0)$ и $C(-1; 1; 4)$; б) $O(0; 0; 0)$, $D(-2; 3; 0)$ и $E(3; 4; 5)$.

Решение. Подставим координаты данных точек в общее уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$, получим:

а) $\begin{cases} b + 5c + d = 0, \\ 3a + d = 0, \\ -a + b + 4c + d = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} d = 0, \\ -2a + 3b = 0, \\ 3a + 4b + 5c = 0. \end{cases}$

а) Из второго уравнения системы имеем: $a = -\frac{1}{3}d$. Положим $d = -3$, тогда $a = 1$ и система примет вид: $\begin{cases} a = 1, \\ b + 5c = 3, \\ b + 4c = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1, \\ c = -1, \\ b = 8. \end{cases}$ Искомое уравнение плоскости $x + 8y - z - 3 = 0$.

б) $\begin{cases} d = 0, \\ a = \frac{3}{2}b, \\ c = -\frac{17}{10}b. \end{cases}$ Пусть $b = 10$, тогда $a = 15$, $c = -17$, уравнение плоскости

$15x + 10y - 17z = 0$.

О т в е т. а) $x + 8y - z - 3 = 0$; б) $15x + 10y - 17z = 0$.

557. Запишите уравнение сферы, если: а) её радиус равен 7 и она проходит через точки $A(0; 0; 0)$, $B(4; 0; 0)$ и $C(0; 12; 0)$.

Р е ш е н и е. Подставим координаты указанных точек в уравнение сферы, получим:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 49, \\ (4 - a)^2 + b^2 + c^2 = 49, \\ a^2 + (12 - b)^2 + c^2 = 49. \end{cases}$$

Вычитая члены первого уравнения из второго и третьего найдем:

$(4 - a)^2 - a^2 = 0$, $(4 - a - a)(4 - a + a) = 0$, $2a = 4$, $a = 2$;

$(12 - b)^2 - b^2 = 0$, $(12 - b - b)(12 - b + b) = 0$, $2b = 12$, $b = 6$.

Из первого уравнения системы, найдем $c^2 = 49 - 4 - 36$, $c^2 = 9$, $c = \pm 3$.

Искомое уравнение сферы $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 + (z + 3)^2 = 49$ или $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 + (z - 3)^2 = 49$.

О т в е т. а) $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 + (z + 3)^2 = 49$ или $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 + (z - 3)^2 = 49$.

558. Составьте уравнение плоскости, относительно которой симметричны точки: а) $A(4; 2; -3)$ и $B(0; -4; -3)$.

Р е ш е н и е. Если точки симметричны относительно плоскости, то она перпендикулярна отрезку с концами в этих точках и проходит через его середину а) Середина отрезка AB точка $C(2; -1; -3)$, вектор $\overrightarrow{CA}$ $(2; 3; 0)$ является вектором нормали искомой плоскости, тогда уравнение плоскости имеет вид $2(x - 2) + 3(y + 1) = 0$, $2x + 3y - 1 = 0$.

О т в е т. $2x + 3y - 1 = 0$.

559. Прямоугольная система координат выбрана так, что координаты трех вершин Баянаульских гор равны $(0; 0; 0)$, $(x_1; 0; 0)$ и $(kx_1; y_1; z_1)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки, обозначающие эти вершины.

Р е ш е н и е. Подставим координаты указанных точек в общее уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$, получим:

$$\begin{cases} d = 0, \\ a = 0, \\ b = -\frac{z_1}{y_1}c. \end{cases}$$

Тогда уравнение искомой плоскости можно записать в виду $-\frac{z_1}{y_1}cy + cz =$ $= 0$, или разделив все члены уравнения на $-c$, имеем $\frac{z_1}{y_1}y - z = 0$ или $z_1y - y_1z = 0$.

О т в е т. $\frac{z_1}{y_1}y - z = 0$.

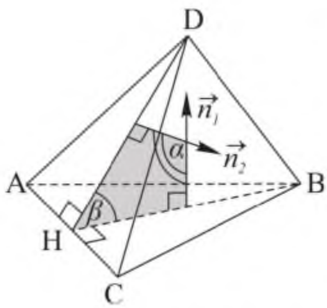


Рисунок 123

562. Дан тетраэдр $DABC$ с вершинами $D(1;\ 0;\ 0)$, $A(3;\ -2;\ 1)$, $B(3;\ 1;\ 5)$ и $C(4;\ 0;\ 3)$. Найдите угол между плоскостями ADC и ABC.

Р е ш е н и е. Пусть $\angle BHD = \beta$ – линейный угол между плоскостями ABC и ADC, а $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ – соответственно векторы нормали этих плоскостей (рисунок 124), $\angle(\vec{n_1}; \vec{n_2}) = a$. Так как $\vec{n_1} \perp BH$, и $\vec{n_2} \perp DH$, то $\alpha + \beta = 180°$, поэтому $\cos\beta = |\cos\alpha|$.

Найдем уравнения указанных плоскостей. Для плоскости ADC имеем:

$$\begin{cases} 3a - 2b + c + d = 0, \\ a + d = 0, \\ 4a + 3c + d = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} a = -d, \\ c = d, \\ b = -\frac{1}{2}d. \end{cases}.$$

Пусть $d = -2$, тогда уравнение плоскости ADC имеет вид $2x + y - 2z - 2 =$ $= 0$, $\vec{n_2}(2;\ 1;\ -2)$.

Для плоскости ABC имеем:

$$\begin{cases} 3a - 2b + c + d = 0, \\ 3a + b + 5c + d = 0, \\ 4a + 3c + d = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3a - 2b + c + d = 0, \\ 6a + 2b + 10c + 2d = 0, \\ 4a + 3c + d = 0. \end{cases}$$

Сложив члены первого и второго уравнений последней систему получим:

$$\begin{cases} 9a + 11c + 3d = 0, \\ 4a + 3c + d = 0, \\ b = -3a - 5c - d. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение полученной системы на 4, а второе – на -9 и сложим их, тогда найдем $c = -\frac{3}{17}d$, $a = -\frac{2}{17}d$, $b = \frac{4}{17}d$. Пусть $d = -17$, тогда уравнение плоскости ABC $2x - 4y + 3z - 17 = 0$, а ее вектор нормали $\vec{n_1}(2; -4; 3)$.

$$\cos\beta = |\cos\angle(\vec{n_1}; \vec{n_2})| = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{|4 - 4 - 6|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}, \beta = \arccos\frac{2}{\sqrt{29}}.$$

О т в е т. $\arccos\frac{2}{\sqrt{29}}$.

563. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки пересечения медиан треугольников ABC, ABK и ABN, если известны координаты точек $A(2; 3; -4)$, $B(0; -3; -2)$, $C(4; 0; 6)$, $K(1; 0; 0)$, $N(-2; 6; 3)$.

Р е ш е н и е. Координаты середины отрезка AB точки $D(1; 0; -3)$. Пусть P – точка пересечения медиан ΔABC. Используя формулы координат точки, делящей отрезок в заданном отношении, и учитывая, что $\frac{CP}{PD} = \frac{2}{1}$, найдем координаты точки $P\left(\frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 4}{2+1}; \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{2+1}; \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot 6}{2+1}\right)$, $P(2; 0; 0)$.

Пусть O – точка пересечения медиан ΔABK, тогда $O\left(\frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{3}; \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{3}; \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot 0}{2+1}\right)$, $O(1; 0; -2)$. Координаты точки F пересечения медиан ΔABN $(0; 2; -1)$.

Найдём уравнение плоскости POF:

$$\begin{cases} 2a + d = 0, \\ a - 2c + d = 0, \\ 2b - c + d = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2}d, \\ c = \frac{1}{4}d, \\ b = -\frac{3}{8}d. \end{cases}$$

Пусть $d = -8$, тогда уравнение плоскости POF имеет вид $4x + 3y - 2z - 8 = 0$.

О т в е т. $4x + 3y - 2z - 8 = 0$.

564. Установите, принадлежат ли одной плоскости точки $M(6; 1; -2)$, $N(4; 6; 6)$, $K(4; 2; 0)$ и $P(1; 2; 6)$. Составьте уравнение плоскости «в отрезках», проходящей через какие-либо три из данных точек.

Р е ш е н и е. Составим уравнение плоскости MNK:

$$\begin{cases} 6a + b - 2c + d = 0, \\ 4a + 6b + 6c + d = 0, \\ 4a + 2b + d = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4b + 6c = 0, \\ 12a + 2b - 4c + 2d = 0, \\ 4a + 2b + d = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -\frac{3}{2}c, \\ 8a = 4c - d, \\ 2c - \frac{1}{2}d - 3c + d = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2}c - \frac{1}{8}d, \\ b = -\frac{3}{2}c, \\ c = \frac{1}{2}d. \end{cases}$$

Пусть $d = 8$, тогда $c = 4$, $b = -6$, $a = 1$, уравнение плоскости MNK $x - 6y + 4z + 8 = 0$. Точка P не принадлежит этой плоскости, так как $1 - 12 + 24 + + 8 \neq 0$.

Разделив общее уравнение плоскости MNK на -8 получим, уравнение плоскости MNK «в отрезках» $\frac{x}{-8} + \frac{y}{\frac{4}{3}} + \frac{z}{-2} = 1$.

О т в е т. Не принадлежат. Уравнение плоскости MNK $\frac{x}{-8} + \frac{y}{\frac{4}{3}} + \frac{z}{-2} = 1$.

565. Прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен в системе координат так, что точки A и C лежат на координатных осях Ox и Oy, и известны координаты его вершин $D(0; 0; 0)$, $B_1(3; 4; 5)$, $D_1(0; 0; 5)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через: б) точку A_1 и центры симметрии граней BB_1C_1C и $A_1B_1C_1D_1$.

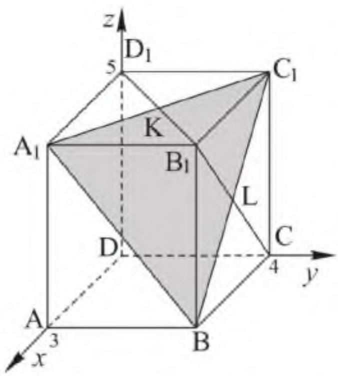


Рисунок 124

Р е ш е н и е. б) Разместим данный прямоугольный параллелепипед в системе координат, учитывая условие задачи (рисунок 124). Тогда координаты точек $A_1(3; 0; 5)$, $C_1(0; 4; 5)$, $B(3; 4; 0)$. Центры симмет-рии указанных граней – это точки L и K пересечения диагоналей этих граней. Плоскость A_1KL совпадает с плоскостью BA_1C_1. Составим уравнение этой плоскости:

$$\begin{cases} 3a + 4b + d = 0, \\ 3a + 5c + d = 0, \\ 4b + 5c + d = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{5}{4}c, \\ a = \frac{4}{3}b = \frac{5}{3}c \\ c = -\frac{1}{10}d. \end{cases}$$

Пусть $d = -120$, тогда $c = 12$, $b = 15$, $a = 20$. Уравнение плоскости, проходящей через точку A_1 и центры симметрии граней BB_1C_1C и $A_1B_1C_1D_1$ имеет вид $20x + 15y + 12z - 120 = 0$.

Ответ. б) $20x + 15y + 12z - 120 = 0$.

24. Уравнения прямой в пространстве

568. Установите пересекает ли плоскость xOz прямая, заданная уравнениями а) $\frac{x+6}{3} = \frac{y-6}{3} = z + 5$; б) $\frac{x+4}{4} = \frac{1-y}{3}$, $z + 2 = 0$. Если пересекает, то найдите координаты точки пересечения.

Р е ш е н и е. Плоскость xOz задается уравнением $y = 0$, ее вектор нормали $\vec{n}(0; 1; 0)$.

а) Направляющий вектор данной прямой $\vec{r}(3; 3; 1)$. Прямая не пересекает плоскость, если $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$. В данном случае $\vec{r} \cdot \vec{n} = 3 \neq 0$, следовательно, прямая пересекает плоскость xOz. При $y = 0$, $\frac{y-6}{3} = -2$, тогда $\frac{x+6}{3} = -2$, $x = -12$; $z + 5 = -2$, $z = -7$. То есть координаты точки пересечения данной прямой и плоскости xOz $(-12; 0; -7)$.

б) $\vec{r}(4; -3; 0)$, $\vec{r} \cdot \vec{n} = -3 \neq 0$, следовательно, прямая пересекает плоскость xOz. При $y = 0$, $x = -\frac{8}{3}$, $z = -2$.

О т в е т. а) Пересекает в точке $(-12; 0; -7)$; б) пересекает в точке $\left(-\frac{8}{3}; 0; -2\right)$.

570. Установите, проходит ли через начало координат прямая, содержащая точки: $A(-2; 4; 3)$ и $B(2; -4; -3)$; б) $C(0; -5; 3)$ и $D(5; 0; -3)$.

Р е ш е н и е. а) Уравнение прямой AB $\frac{x-2}{-4} = \frac{y+4}{8} = \frac{z+3}{6}$. Координаты точки $O(0; 0; 0)$ удовлетворяют этим уравнениям, так как $\frac{-2}{-4} = \frac{4}{8} = \frac{3}{6}$, следовательно, прямая AB проходит через начало координат.

б) Уравнения прямой CD $\frac{x-5}{-5} = \frac{y}{-5} = \frac{z+3}{6}$. Координаты точки $O(0; 0; 0)$ не удовлетворяют этим уравнениям, так как $\frac{-5}{-5} \neq \frac{0}{-5} \neq \frac{3}{6}$, следовательно, прямая CD не проходит через начало координат.

О т в е т. а) Проходит; б) не проходит.

572. Найдите координаты точки пересечения прямой, заданной уравнениями $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+4}{2}$ с плоскостью: а) $2x + 3y - 4z - 4 = 0$; б) $-x + 2y + z = 0$.

Р е ш е н и е. Запишем параметрические уравнения данной прямой $\begin{cases} x = 2t + 3, \\ y = 3t - 1, \\ z = 2t - 4 \end{cases}$ и подставим значения x, y и z в уравнение плоскости.

а) Получим $4t + 6 + 9t - 3 - 8t + 16 - 4 = 0$, откуда $t = -3$. Следовательно, точка пересечения данной прямой и указанной плоскости имеет координаты $(-3; -10; -10)$.

б) $-2t - 3 + 6t - 2 + 2t - 4 = 0$, $t = \frac{3}{2}$. Координаты искомой точки $(6; 3{,}5; -1)$.

О т в е т. а) $(-3; -10; -10)$; б) $(6; 3{,}5; -1)$.

573. Составьте канонические уравнения прямой, перпендикулярной плоскости $2x - 3y - z + 4 = 0$ и проходящей через точку: а) $C(4; -3; 2)$; б) $D(0; -5; 1)$.

Р е ш е н и е. Вектор нормали данной плоскости $\vec{n}\,(2; -3; -1)$. Так как искомая прямая перпендикулярна данной плоскости, то ее направляющий вектор $\vec{r}\,(m; n; p)$ параллелен вектору $\vec{n}\,(2; -3; -1)$. То есть выполняются равенства $\frac{m}{2} = \frac{n}{-3} = \frac{p}{-1} = k$, откуда $m = 2k$, $n = -3k$, $p = -k$.

Искомые уравнения прямой: а) $\frac{x-4}{2k} = \frac{y+3}{-3k} = \frac{z-2}{-k}$ или $\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{-1}$; б) $\frac{x}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z-1}{-1}$.

О т в е т. $\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{-1}$; б) $\frac{x}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z-1}{-1}$.

576. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $N(-2; 3; -1)$ и перпендикулярной прямой, заданной уравнениями: а) $\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$; б) $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{-3}$, $z - 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Направляющий вектор прямой, перпендикулярной искомой плоскости, является вектором её нормали. Поэтому:

а) $\vec{n}\,(4; 3; 2)$, $4(x + 2) + 3(y - 3) + 2(z + 1) = 0$,
$4x + 3y + 2z + 1 = 0$;
б) $\vec{n}\,(-4; -3; 0)$, $-4(x + 2) - 3(y - 3) = 0$,
$-4x - 3y + 1 = 0$ или $4x + 3y - 1 = 0$.
О т в е т. а) $4x + 3y + 2z + 1 = 0$; б) $4x + 3y - 1 = 0$.

577. Плоскость α задана уравнением $2x - 3y + z - 4 = 0$. Каково взаимное расположение плоскости α и прямой AB, если: а) $A(0; 1; -2)$, $B(3; 5; 4)$; б) $A(-1; 0; 6)$, $B(3; -6; 8)$; в) $A(-1; 0; 6)$, $B(-3; -1; 7)$?

Р е ш е н и е. Вектор нормали данной плоскости $\vec{n}(2; -3; 1)$. Направляющий вектор прямой AB: а) $\vec{r}(3; 4; 6)$; б) $\vec{r}(4; -6; 2)$; в) $\vec{r}(-2; -1; 1)$.

а) $\vec{r} \cdot \vec{n} = 6 - 12 + 6 = 0$ и $2 \cdot 3 + 4 - 4 \neq 0$, то $AB \parallel \alpha$;

б) $\frac{4}{2} = \frac{-6}{-3} = \frac{2}{1}$, то $AB \perp \alpha$;

в) $\vec{r} \cdot \vec{n} = -4 + 3 + 1 = 0$ и $2 \cdot (-3) - 3 \cdot (-1) + 7 - 4 = 0$, то $AB \subset \alpha$.

Ответ. а) $AB \parallel \alpha$, б) $AB \perp \alpha$; в) $AB \subset \alpha$.

578. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через центр сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 4y - 4z$ и точку а) $O(0; 0; 0)$; б) $A(1; 2; 2)$.

Р е ш е н и е. Преобразуем данное уравнение:

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 + 4z + 4) = 9$;

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 3^2$.

Центр сферы – точка C(1; 2; –2). Направляющий вектор искомой прямой: а) $\overrightarrow{OC}(1; 2; -2)$; б) $\overrightarrow{AC}(0; 0; -4)$. Уравнения прямой:

а) $\begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = -2t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z - 2 = -4t. \end{cases}$

О т в е т. а) $\begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = -2t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z - 2 = -4t. \end{cases}$

579. Запишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1; 1; -1)$ и параллельной прямой, заданной системой уравнений:

а) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 0, \\ 3x + y - z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x + y + z - 1 = 0, \\ x + y - z + 4 = 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Найдем координаты двух точек принадлежащих прямой, заданной системой уравнений: а) $C(0; 0; 0)$ и $B(5; -8; 7)$; б) $D(0; -1{,}5; 2{,}5)$, $E(-2{,}5; -1{,}5; 0)$. Направляющий вектор искомой прямой: а) $\overrightarrow{BC}(5; -8; 7)$; б) $\overrightarrow{ED}(2{,}5; 0; 2{,}5)$.

Уравнения искомой прямой: а) $\begin{cases} x - 1 = 5t, \\ y - 1 = -8t, \\ z + 1 = 7t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 1 = 2{,}5t, \\ y - 1 = 0, \\ z + 1 = 2{,}5t. \end{cases}$

О т в е т. а) $\begin{cases} x-1=5t, \\ y-1=-8t, \\ z+1=7t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-1=2{,}5t, \\ y-1=0, \\ z+1=2{,}5t. \end{cases}$

580. В пространстве даны точки $A(0;\ 5;\ -8)$, $B(-3;\ 7;\ 1)$, $C(5;\ 7;\ 8)$ и $D(6;\ 9;\ 0)$. Установите каково взаимное расположение прямых: а) AB и CD; б) AD и BC.

Р е ш е н и е. Уравнение прямых: а) AB $\frac{x}{-3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+8}{9}$, CD $\frac{x-5}{1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-8}{-8}$; б) AD $\frac{x}{6}=\frac{y-5}{4}=\frac{z+8}{8}$, BC $\frac{x+3}{8}=\frac{z-1}{7}$, $y=7$.

а) Учитывая, что направляющие векторы прямых $\overrightarrow{AB}(-3;2;9)$, $\overrightarrow{CD}(1;2;-8)$ и $\overrightarrow{AB}\neq k\overrightarrow{CD}$, то эти прямые не параллельны. Кроме того, они не пересекаются, так как нет такого значения t, чтобы имели общее решение системы $\begin{cases} x=-3t, \\ y=2t+5, \\ z=9t-8; \end{cases}$ и $\begin{cases} x=t+5, \\ y=2t+7, \\ z=-8t+8. \end{cases}$ Следовательно, прямые AB и CD не лежат в одной плоскости, то есть они скрещивающиеся.

б) Аналогично устанавливается, что прямые AD и BC тоже скрещивающиеся.

581. Исследуйте, уравнениями какого вида задаётся прямая, параллельная какой-либо одной координатной плоскости.

Р е ш е н и е. Координатные плоскости xOy, xOz, yOz задаются соответственно уравнениями $z=0$, $y=0$, $x=0$. Если прямая параллельна какой-либо одной координатной плоскости, то направляющий вектор $\vec{r}$ прямой и вектор нормали $\vec{n}$ плоскости перпендикулярны, то есть $\vec{r}\cdot\vec{n}=0$.

Например, для плоскости xOy вектор нормали $\vec{n}(0;\ 0;\ 1)$, тогда направляющий вектор прямой, параллельной только этой координатной плоскости $\vec{r}(m;\ n;\ 0)$, где $m\neq 0$, $n\neq 0$. Уравнения указанной прямой $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}$, $z=z_1$, где $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ – координаты любой точки этой прямой, причем $z_1\neq 0$.

Аналогично, прямые, параллельные только одной из координатных плоскостей xOz и yOz, задаются соответственно уравнениями $\frac{x-x_1}{m}=\frac{z-z_1}{p}$, $y=y_1$, где $y_1\neq 0$ и $\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$, $x=x_1$, где $x_1\neq 0$.

О т в е т. Прямые, параллельные плоскостям xOy, xOz и yOz, задаются соответственно уравнениями $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}$, $z=z_1$, где $z_1\neq 0$; $\frac{x-x_1}{m}=\frac{z-z_1}{p}$, $y=y_1$, где $y_1\neq 0$ и $\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$, $x=x_1$, где $x_1\neq 0$.

583. Точки $A(0;\,0;\,0)$, $B(2;\,2;\,1)$, $C(x;\,y;\,z)$ и $D(4;\,2;\,4)$ являются вершинами равнобедренной трапеции с основаниями AD и BC. Составьте уравнения прямой, проходящей через точки A и C.

Р е ш е н и е. Найдем координаты точки C, для чего используем условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{AD}\,(4;\,2;\,4)$, $\overrightarrow{BC}\,(x-2;\,y-2;\,z-1)$ и равенство $AB^2=CD^2=9$. Получим:

$$\begin{cases}\frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{4}=t\\(x-4)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=9;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=4t+2,\\y=2t+2,\\z=4t+1,\\(4t-2)^2+4t^2+(4t-3)^2=9.\end{cases}$$

Решая последнее уравнение системы, получим: $36t^2-40t+4=0$, $9t^2-10t+1=0$, $t=1$ или $t=\frac{1}{9}$.

При $t=1$ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, что не удовлетворяет условию задачи.

При $t=\frac{1}{9}$ точка $C\left(\frac{22}{9};\frac{20}{9};\frac{13}{9}\right)$, направляющий вектор искомой прямой $\overrightarrow{AC}\left(\frac{22}{9};\frac{20}{9};\frac{13}{9}\right)$, уравнения прямой AC $\frac{9x}{22}=\frac{9y}{20}=\frac{9z}{13}$, $\frac{x}{22}=\frac{y}{20}=\frac{z}{13}$.

О т в е т. $\frac{x}{22}=\frac{y}{20}=\frac{z}{13}$.

25. Упражнения на повторение раздела «Прямоугольная система координат и векторы в пространстве»

586. Точки $A(3; 1; 0)$, $B(2; -1; 0)$, $D(4; -1; 3)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите длину его диагонали AC.

Р е ш е н и е. Пусть координаты точки $C(x; y; z)$, O – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Середина отрезка BD точка $O\left(3; -1; \frac{3}{2}\right)$, тогда $3 = \frac{3+x}{2}$, $-1 = \frac{1+y}{2}$, $\frac{3}{2} = \frac{z}{2}$, откуда $x = 3$, $y = -3$, $z = 3$, то есть $C(3; -3; 3)$. $AC = \sqrt{16+9} = 5$.

О т в е т. 5.

589. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются точки $A(-1; 1; 0)$, $B(-5; 4; 0)$, $C(7; 2; 0)$.

Р е ш е н и е. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\angle A$.

Найдем $AB = 5$, $AC = \sqrt{65}$, $BC = \sqrt{148}$, $\cos\angle A = \frac{-29}{5\sqrt{65}}$, $\sin\angle A = $ $= \sqrt{1-\frac{841}{1625}} = \frac{28}{5\sqrt{65}}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{5 \cdot \sqrt{65} \cdot 28}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{65}} = 14$ (кв. ед)

О т в е т. 14 кв. ед.

592. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ длины которых соответственно равны 4 и 10, а угол между ними равен 120°. Найдите: а) $|\vec{a} + \vec{b}|$; б) $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Р е ш е н и е. Используем свойство: скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины. Получим:

а) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 4^2 + 10^2 + 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 76$, тогда $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$;

б) $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 4^2 + 10^2 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 156$, тогда $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}$.

О т в е т. а) $2\sqrt{19}$; б) $2\sqrt{39}$.

594. Дан ΔABC, O – точка, принадлежащая его медиане BD, M – точка, не принадлежащая его плоскости. Выразите вектор $\overrightarrow{MO}$ через веторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$, если: а) O – середина BD; б) $BO : OD = 1 : 2$.

Р е ш е н и е. а) $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right)$.

б) $\overrightarrow{MO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{MA} +$ $+ \frac{1}{6}\overrightarrow{MC}$.

О т в е т. а) $\frac{1}{4}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MC}$; б) $\frac{1}{6}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{MC}$.

595. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором точка M – центр грани BB_1C_1C. 1) Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BB_1}$. 2) Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Р е ш е н и е. 1) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} +$ $+ \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$.

2) Пусть ребро куба равно a. Найдем $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}\right) \times$ $\times (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}a^2$. Так как $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $|\overrightarrow{BD}| = a\sqrt{2}$, то $\cos\angle(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BD}) = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2\cdot a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

О т в е т. 1) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

600. Найдите координаты ветора $\vec{m}$, длина которого равна 14 и он перпендикулярен векторам $\vec{a}(3; 2; 2)$ и $\vec{b}(18; -22; -5)$, причем угол между вектором $\vec{m}$ и осью Oy – тупой.

Р е ш е н и е. Пусть $\vec{m}(x; y; z)$, тогда получим $\begin{cases} 3x + 12 + 2z = 0, \\ 18x - 22y - 5z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 196. \end{cases}$ Умножив первое уравнение системы на -6, и сложив его со вторым уравнением, выразим $z = -2y$. Умножив первое уравнение системы на 5, а второе на 2, и сложив их, получим $x = \frac{2}{3}y$. Подставим найденные выражения в третье уравнение, тогда $\frac{4}{9}y^2 + y^2 + 4y^2 = 196$. $\frac{49}{9}y^2 = 196$, $y = \pm 6$.

Выразим косинус угла между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}(0; 1; 0)$: $\cos\angle(\vec{m}; \vec{n}) = \frac{0 + y + 0}{14\cdot 1}$. Так как по условию $\angle(\vec{m}; \vec{n})$ – тупой, то $y < 0$. Следовательно, $y = -6$, $x = -4$, $z = 12$, то есть $\vec{m}(-4; -6; 12)$.

Ответ. $\vec{m}(-4; -6; 12)$.

601. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 4. На его ребре AA_1 отмечена точка M так, что $AM : MA_1 = 1 : 3$, а на ребре CC_1 – точка N так, что $CN : NC_1 = 3 : 1$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MN}$.

Решение. Выразим вектор $\overrightarrow{MN}$ через веторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$, получим:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} + \frac{1}{4}\overrightarrow{C_1C} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\ \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}.$$

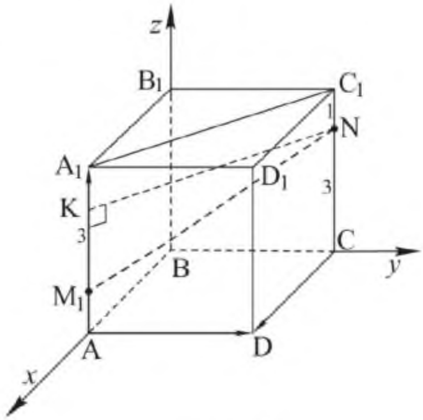


Рисунок 125

Найдем длину отрезка MN, для чего проведем $NK \parallel A_1C_1$ (рисунок 125). Точка $K \in AA_1$ и $MK = 2$, $NK = 4\sqrt{2}$, тогда из прямоугольного ΔMNK найдем $MN = \sqrt{4 + 32} = 6$.

$$\cos\angle(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{CD}) = \frac{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\cdot(\overrightarrow{AB})}{6\cdot 4} = \frac{0 - \overrightarrow{AB}^2 + 0}{24} = -\frac{2}{3}.$$

$$\angle(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{CD}) = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right).$$

Ответ. $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

604. Какую фигуру в пространстве задает уравнение: а) $x^2 + y^2 + x^2 = 4x + 4y + 4z + 13$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 4x + 4y + 4z - 12$; в) $x^2 + y^2 + z^2 = (4 - x)^2 + (4 - y)^2 + (4 - z)^2$?

Решение. Преобразуем данные уравнения:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 4x + 4y + 4z + 13$; $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z = 13 + 12$; $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 25$. Получили уравнение сферы с центром в точке (2; 2; 2) и радиусом, равным 5.

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 4x + 4y + 4z - 12$; $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 0$. Это уравнение определяет точку (2; 2; 2).

в) $x^2 + y^2 + z^2 = (4-x)^2 + (4-y)^2 + (4-z)^2$; $-8x - 8y - 8z + 48 = 0$; $x + y + z - 6 = 0$. Это уравнение плоскости.

Ответ. а) Сферу; б) точку; в) плоскость.

605. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основанием которого является ромб с углом 60°, а боковое ребро перпендикулярно основанию и равно его стороне. Найдите угол между прямыми A_1C и C_1B.

Решение. Пусть сторона ромба равна a, тогда боковые грани параллелепипеда – квадраты и $BC_1 = a\sqrt{2}$. Из ΔCAA_1, в котором $\angle A = 90°$, $AC = a\sqrt{3}$ найдем $CA_1 = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$ (рисунок 126).

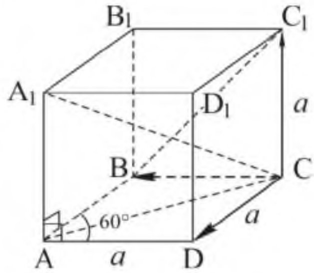


Рисунок 126

$\cos\angle(A_1C; C_1B) = |\cos\angle(\overrightarrow{CA_1}; \overrightarrow{C_1B})|$.

Выразим указанные векторы через $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$, получим:

$\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CC_1}$.

Найдём скалярное произведение:

$$\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CC_1}^2 =$$

$$= a \cdot a \cdot \cos 60° + a^2 - 0 - a^2 = \frac{a^2}{2}.$$

$\cos\angle(\overrightarrow{CA_1}; \overrightarrow{C_1B}) = \dfrac{a^2}{2 \cdot 2a \cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$. Следовательно, $\angle(A_1C; C_1B) =$

$= \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

Ответ. $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

606. Дан правильный тетраэдр $DABC$, ребро которого равно 1. Найдите: а) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BK}$, где K – центр грани ABC; б) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{MN}$, где M и N – середины ребер AC и DB соответсвенно.

Решение. а) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BK} = |\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{BK}| \cos\angle(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{BK}) = 1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times$ $\times \cos\angle BMF$ (рисунок 127, *а*). Угол между векторами $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BK}$ равен $\angle BMF$

ΔBMF, где $MF \parallel DA$, $MF = \frac{1}{2}$, $BM = BF = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Из ΔBMF по теореме косинусов $\cos\angle BMF = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right) : \left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, тогда $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BK} = \frac{1}{6}$.

б) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{MN} = |\overrightarrow{DA}|\cdot|\overrightarrow{MN}|\cdot\cos\angle(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{MN})$. Отрезок MN найдем из ΔDMN, в котором $\angle N = 90°$, $DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $MN = \sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (рисунок 127, *б*). Угол между векторами $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{MN}$ равен углу, смежному с углом MNH, где $NH \parallel DA$.

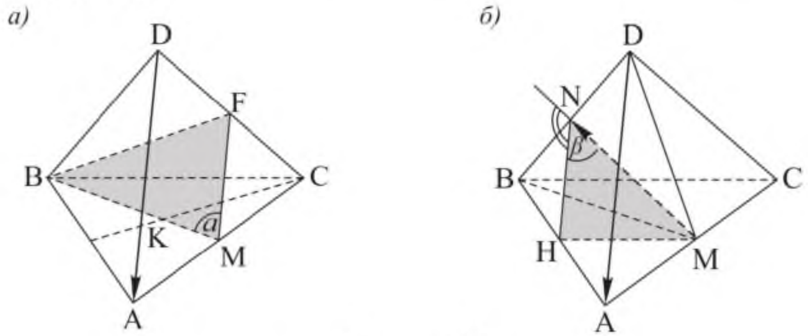


Рисунок 127

Из ΔMNH найдем $\cos\angle MNH = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда $\cos\angle(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{MN}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{MN} = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$.

Ответ. а) $\frac{1}{6}$; б) $-\frac{1}{2}$.

607. Дан тетраэдр $DABC$, в котором биссектрисы углов ADB и BDC перпендикулярны. Докажите, что биссектриса угла ADC перпендикулярна каждой из этих биссектрис.

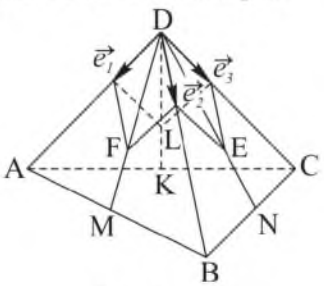


Рисунок 128

Доказательство. Пусть DM, DN, DK – биссектрисы соответсвенно углов ADB, BDC, ADC. Отложим на боковых ребрах DA, DB, DC тетраэдра единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ соответсвенно (рисунок 128). Тогда $\vec{e}_1+\vec{e}_2 = \overrightarrow{DF}$, $\vec{e}_2+\vec{e}_3 = \overrightarrow{DE}$, $\vec{e}_1+\vec{e}_3 = \overrightarrow{DL}$, причем векторы $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DL}$ лежат на указанных биссектрисах.

Так как по условию $DM \perp DN$, то $(\vec{e_1} + \vec{e_2}) \cdot (\vec{e_2} + \vec{e_3}) = 0$. Преобразовав это равенство, получим $\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + \vec{e_2}^{\,2} + \vec{e_1} \cdot \vec{e_3} + \vec{e_2} \cdot \vec{e_3} = 0$, то есть $\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + \vec{e_1} \cdot \vec{e_3} + \vec{e_2} \cdot \vec{e_3} + 1 = 0$.

Найдем скалярные произведения векторов $\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{DF}$ и $\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{DE}$:

$(\vec{e_1} + \vec{e_3}) \cdot (\vec{e_1} + \vec{e_2}) = 1 + \vec{e_1} \cdot \vec{e_3} + \vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + \vec{e_2} \cdot \vec{e_3} = 0;$

$(\vec{e_1} + \vec{e_3}) \cdot (\vec{e_2} + \vec{e_3}) = \vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + \vec{e_2} \cdot \vec{e_3} + \vec{e_1} \cdot \vec{e_3} + 1 = 0.$

Следовательно, $\overrightarrow{DL} \perp \overrightarrow{DF}$ и $\overrightarrow{DL} \perp \overrightarrow{DE}$, значит биссектриса угла ADC перпендикулярна каждой из биссектрис углов ADB и BDC. Что и требовалось доказать.

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 10 КЛАССА

643. Дан правильный тетраэдр $DABC$, ребро которго равно a, O, M, N – точки пересечения медиан треугольников ABC, ACD и ADB соответсвтенно. а) Докажите, что плоскости OMN и BCD параллельны. б) Постройте сечение тетраэдра плоскостью OMN и найдите его площадь.

Р е ш е н и е. а) Пусть H – середина ребра AC, тогда $M \in DH$ и $\frac{DM}{MH} = \frac{2}{1}$, $O \in BH$ и $\frac{BO}{OH} = \frac{2}{1}$. Следовательно, $MO \subset (DBH)$ и $MO \parallel BD$ (рисунок 129).

Если P – середина AB, то $N \in DP$ и $\frac{DN}{NP} = \frac{2}{1}$, $O \in CP$ и $\frac{CO}{OP} = \frac{2}{1}$. Следовательно, $NO \subset (CDP)$ и $NO \parallel CD$.

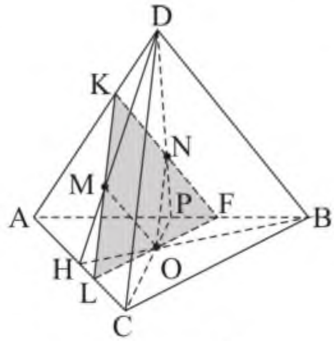


Рисунок 129

Так как две пересекающиеся прямые OM и ON плоскости OMN параллельны двум пересекающимся прямым DB и DC плоскости BCD, то плоскости OMN параллельны двум пересекающимся прямым DB и DC плоскости BCD, то плосксоти OMN и BCD параллельны.

б) Так как $(OMN) \parallel DC$, то $(OMN) \cap (ADC) = KL$ так, что $M \in KL$ и $KL \parallel DC$.

$(OMN) \cap (ABC) = LO$, $LO \cap AB = F$; $(OMN) \cap (ADB) = KF$, $N \in KF$. Треугольник KLF – искомое сечение.

Из подобия треугольников ADC и AKL, ADB и AKF, ABC и ALF следует, что $KL = KF = LF = \frac{2}{3}a$. Поэтому $S_{\Delta KLF} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{9 \cdot 4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}$.

О т в е т. б) Сечение – равносторонний треугольник, сторона которого равна $\frac{2}{3}a$; $S_{сеч.} = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}$.

644. В правильном тетраэдре $SABC$ точка F – середина ребра AB, а точка K – середина ребра AC. Найдите, с точностью до 1°, угол между прямыми SF и BK.

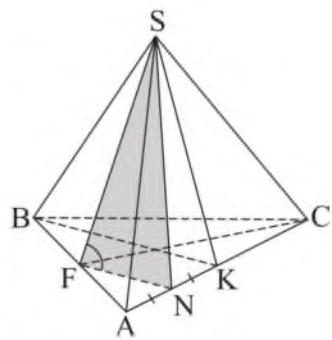


Рисунок 130

Р е ш е н и е. Проведем $FN \parallel BK$, тогда $\angle(SF; BK) = \angle SFN$.

Пусть ребро тетраэдра равно a, тогда стороны ΔSFN равны: $SF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $FN = \frac{1}{2}BK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ (как средняя линия ΔABK), $SN = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$ (из прямоугольного ΔSKN).

Из ΔSFN по теореме косинусов имеем:

$\cos\angle SFN = \left(\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{16} - \frac{13a^2}{16}\right) : \left(2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$, следовательно, $\angle SFN \approx 80°$.

О т в е т. $\approx 80°$.

646. Дан тетраэдр $DABC$, в котором $AB = BC = 4$, $BD = 7$, а все плоские углы при вершине B – прямые, M – точка пересечения медиан ΔADC. Найдите длину отрезка BM.

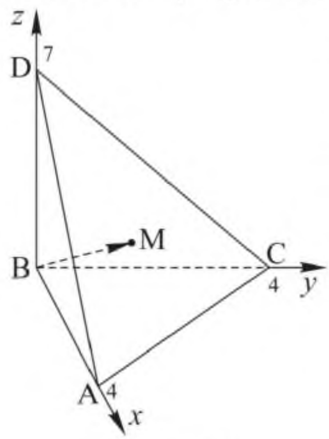


Рисунок 131

Р е ш е н и е. Учитывая, что все плоские углы при вершине B тетраэдра прямые, введем систему координат как показано на рисунке 131. Тогда координаты вершин тетраэдра $A(4; 0; 0)$, $B(0; 0; 0;)$, $C(0; 4; 0)$, $D(0; 0; 7)$. Пусть координаты точки $M(x; y; z)$.

Для нахождения длины отрезка BM используем векторное равенство $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$. Запишем координаты векторов $\overrightarrow{BA}(4; 0; 0)$, $\overrightarrow{BC}(0; 4; 0)$, $\overrightarrow{BD}(0; 0; 7)$, $\overrightarrow{BM}(x; y; z)$. Тогда $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $z = \frac{7}{3}$.

$$BM = |\overrightarrow{BM}| = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{49}{9}} = \sqrt{9} = 3.$$

О т в е т. 3.

647. Вектор $\overrightarrow{OA}$ составляет с осями Ox, Oy, Oz углы соответсвенно равные 60°, 60°, 45°. Найдите угол между вектором $\overrightarrow{OA}$ и плоскостью xOy.

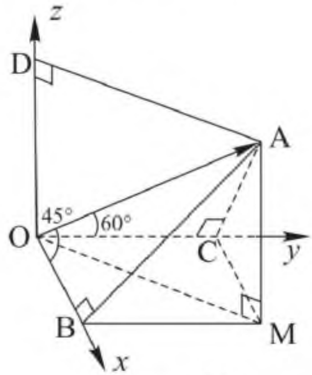


Рисунок 132

Р е ш е н и е. Так как вектор $\overrightarrow{OA}$ составляет с осями Ox, Oy равные углы, то ортогональной проекцией точки A на плоскость xOy является точка M, принадлежащая биссектрисе угла BOC (рисунок 132). Тогда угол между вектором $\overrightarrow{OA}$ и плоскостью xOy – это угол AOM.

Пусть сторона квадрата $BOCM$ равна a, тогда $OM = a\sqrt{2}$. В прямоугольном ΔAOB сторона $OA = 2a$, так как $\angle A = 30°$. Из ΔAOM найдем $\cos\angle AOM = $ $= \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $\angle AOM = 45°$.

Ответ. 45°.

648. Основание пирамиды $PABCD$ – квадрат и все её ребра равны a. В пирамиду помещен куб так, что четыре его вершины лежат на боковых ребрах пирамиды, а другие четыре – в плоскости её основания. Найдите длину ребра этого куба.

Решение. Пусть ребро куба равно x, тогда диагональ его основания равна $x\sqrt{2}$. Из подобия треугольников APO и M_1PO_1 имеем: $\frac{AO}{M_1O_1} = \frac{PO}{PO_1}$, где PO – высота пирамиды (рисунок 133).

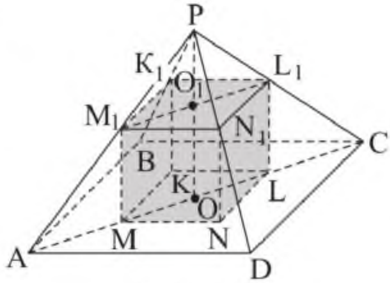


Рисунок 133

$$PO = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$PO_1 = PO - x = \frac{a\sqrt{2} - 2x}{2}.$$

$$\frac{a}{x} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}(a - x\sqrt{2})}, \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{a - x\sqrt{2}}, \quad x = a - x\sqrt{2}, \quad x(1+\sqrt{2}) = a,$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = a(\sqrt{2}-1).$$

Ответ. $a(\sqrt{2}-1)$.

649. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построены два сечения куба плоскостью. Первое проходит через середины ребер AA_1, BB_1 и центр грани $ABCD$, второе – через ребро DC и середину ребра A_1B_1. Докажите, что сечениями являются прямоугольники и найдите отношение площадей этих сечений.

Решение. Пусть середины ребер AA_1, BB_1 и центр грани $ABCD$ – это соответственно точки M, N и O (рисунок 134). Тогда $MN \parallel AB$ и $(MNO) \cap (ABC) = KL$, $KL \parallel AB$, $O \in KL$, $K \in BC$, $L \in AD$. Четырехугольник $MNKL$ – первое сечение.

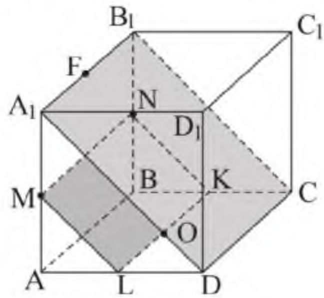


Рисунок 134

Второе сечение проходит через ребро DC и середину F ребра A_1B_1. Так как основания куба параллельны, то линии пересечения их плоскостью CDF должны быть параллельны. Через точку F проходит прямая $A_1B_1 \parallel DC$. Следовательно, второе сечение – четырехугольник A_1B_1CD.

Так как ребро куба CD перпендикулярно плоскости грани AA_1D_1D, то $CD \perp DA_1$ и $CD \perp LM$. Значит построенные сечения являются прямоугольниками.

$S_{MNKL} = MN \cdot ML$, $SA_1B_1CD = DC \cdot DA_1$. Так как $MN = DC$, а $ML = \frac{1}{2}DA_1$, то $\frac{S_{MNKL}}{S_{A_1B_1CD}} = \frac{1}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

650. Дан правильный тетраэдр $PABC$, ребро которого равна a. Через точку M ребра PA, делящую его в отношении $2:3$, считая от вершины P, проведена прямая MN, параллельная ребру AB тетраэдра. Найдите расстояние между прямыми AC и MN.

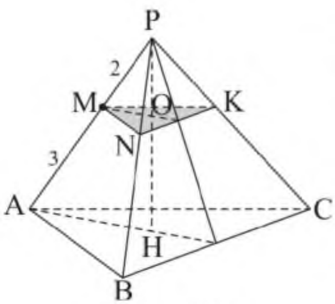


Рисунок 135

Р е ш е н и е. Проведем $MK \parallel AC$, тогда $(MNK) \parallel (ABC)$. Так как прямые MN и AC скрещивающиеся, то расстояние между ними равно расстоянию между параллельными плоскостями MNK и ABC, в которых они лежат (рисунок 135).

Пусть высота PH тетраэдра пересекает плоскость MNK в точке O, тогда искомое расстояние равно длине отрезка:

$$OH = \frac{3}{5} \cdot PH = \frac{3}{5}\sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{3a\sqrt{6}}{5 \cdot 3} = \frac{a\sqrt{6}}{5}.$$

О т в е т. $\frac{a\sqrt{6}}{5}$.

651. Даны куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно $\sqrt{2}$ дм и точка M – середина ребра BC. Найдите длину общего перпендикуляра к прямым A_1M и AB_1.

Р е ш е н и е. Прямая A_1M лежит в плоскости BA_1D_1C, а прямая AB_1 перпендикулярна этой плоскости, так как $AB_1 \perp A_1B$ и $AB_1 \perp A_1D_1$ (рисунок 136). Поэтому, если из точки O провести перпендикуляр ON к прямой A_1M, то он будет перпендикулярен и прямой AB_1.

В ΔBA_1M отрезок ON равен половине высоты BH, которую найдем, выразив площадь ΔBA_1M двумя способами.

ΔBA_1M – прямоугольный с катетами, равными $BM = \frac{\sqrt{2}}{2}$ дм, $BA_1 = 2$ дм и гипотенузой $A_1M = \sqrt{4 + \frac{2}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. $S_{\Delta BA_1M} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ дм^2 или $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot BH$, откуда $BH = \frac{2}{3}$ дм, следовательно, $ON = \frac{1}{3}$ дм.

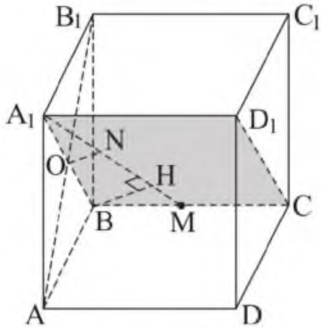


Рисунок 136

О т в е т. $\frac{1}{3}$ дм.

СОЛТАН Геннадий Николаевич
СОЛТАН Алла Евгеньевна
ЖУМАДИЛОВА Аманбала Жумадиловна
АЛИБЕКОВ Саят Шарипович

УЧИМСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

Пособие для учащихся 10 класса общеобразовательной школы

Редактор С. Ш. Алибеков
Художник Е. Е. Велькер
Технический редактор И. Н. Лебедев,
И. С. Миронова
Корректор

Подписано в печать 00.00.0000 г.
Формат 70×100 $^{1}/_{16}$. Объем 00,0 усл. печ. л.
Заказ № 000000. Тираж 0000 экз.

Код 000000

ТОО «Келешек-2030»
Республика Казахстан,
020000, г. Кокшетау.
Офис издательства: ул. Абая, 112а,
тел.: 8 (7162) 72-29-43 (приемная),
8 (7162) 44-18-64, +7 708 444 18 64,
моб. тел.: +7 702 781 06 78, +7 705 745 09 75.
http://www.keleshek-2030.kz, E-mail: torg@keleshek-2030.kz