Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10 (1-б.), 11 (2-б.) сыныптардың оқушыларына арналған

ОҚУЛЫҚ

Екі бөлімді
10-сынып (1-б.)

Қазақстан Республикасының
Білім және ғылым министрлігі ұсынған

KELESHEK 2030
КӨКШЕТАУ

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151я72
С64

Солтан Г. Н.
С64 Геометрия. Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10 (1-б.), 11 (2-б.) сыныптардың оқушыларына арналған оқулық. Екі бөлімді. 10-сынып (1-б.) / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Көкшетау: Келешек-2030 баспасы, 2020. – 208 б.

ISBN 978-601-317-522-5
ISBN 978-601-317-523-2

Оқулықтың электрондық нұсқасы: http://keleshek-2030.kz/books/geom_emn_10kz.php

Ұсынылып отырған оқулық Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилованың авторлығымен «Келешек-2030» баспасында білім берудің жаңартылған мазмұндағы оқу бағдарламасы бойынша әзірленген «Геометрия» оқулықтарының топтамасын жалғастыруда. Оқулық жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы сыныптардың оқушыларына арналған және екі бөлімнен тұрады: 10-сынып – 1-бөлім, 11-сынып – 2-бөлім.

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151я72

ISBN 978-601-317-523-2
ISBN 978-601-317-522-5

МАЗМҰНЫ

АЛҒЫ СӨЗ

Құрметті оқушылар! 7–9-сыныптарда сендер планиметрияны оқыдыңдар, енді кеңістіктік фигуралар мен олардың қасиеттеріне арналған стереометрияны оқуға кірісесіңдер. Бұл оқулықта жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныптағы геометрия курсының негізгі мазмұны баяндалған. Теориялық материал жете әрі бірізді баяндалған. Ұғымдардың анықтамалары, аксиомалар, теоремалар мен олардың салдарлары арнайы қаріппен ерекшеленген. Сендердің танымдық белсенділіктеріңді арттыру үшін кейбір күрделі емес теориялық сұрақтар өздігінен жұмыс істеуге ұсынылған. Түсіндірме мәтіннен кейін бақылау сұрақтары берілген. Олар теорияны қаншалықты меңгергендеріңді тексеруге арналған.

Әр тармақта теориялық білімдеріңді бекітуге және практикалық біліктілік пен дағдыларыңды қалыптастыруға арналған күрделілігі бойынша үш деңгейге бөлінген жаттығулар бар. А деңгейінің жаттығулары негізінен үйренуге берілген. В мен С деңгейінің жаттығулары күрделірек, оларды орындағанда геометриядан ғана емес, алгебра мен анализ бастамаларынан және жаратылыстану-математика циклінен бұрын алған білімдерің мен дағдыларыңды жан-жақты қолдану қажет болады. Оқулыққа пәнаралық сипаттағы, соның ішінде Қазақстанның көрікті жерлеріне байланысты есептер, Ғаламторды пайдаланып орындауға берілген тапсырмалар енгізілген. Сонымен бірге, оқулық электрондық қосымшамен қамтылған, онда әртүрлі қосымша материалдар бар.

Есептер шығару теориялық білімдерді бекітудің, практикалық біліктілік пен дағдыны берік қалыптастырудың негізгі құралы болып табылады. Осыны ескере отырып, оқулықтың тармақтарында шешуімен бірге типтік есептер ұсынылған, оларды талдау нәтижесінде жаттығуларды орындау жеңілірек болады. Есептерді шығару кезінде дайын сызбалардың, шешуін табуға бағыттайтын нұсқаулар мен жауаптардың да белгілі бір көмегі болады. Әр бөлімнің соңында оны қайталауға және жиынтық бағалауға дайындалуға арналған «Өзіңді тексер!» айдарымен тапсырмалар берілген.

Аталмыш оқулық геометрияны оқуда сендерге сенімді көмекші болады деп үміттенеміз.

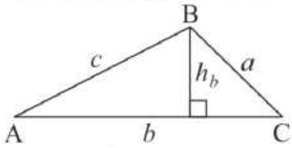
Сәттілік тілейміз!

Авторлар

ПЛАНИМЕТРИЯ КУРСЫНАН АНЫҚТАМАЛЫҚ МАТЕРИАЛ

Негізгі формулалар мен теоремалар

Кез келген үшбұрыш



1-сурет

a, b, c – қабырғалар;

$\angle A, \angle B, \angle C$ – оларға қарсы жатқан бұрыштар;

h_b – b қабырғасына жүргізілген биіктік;

S – аудан; p – жарты периметр;

R – сырттай сызылған шеңбердің радиусы;

r – іштей сызылған шеңбердің радиусы.

Үшбұрыштың MN орта сызығы (2-сурет):

$$MN \parallel AC,\ MN = \frac{1}{2}AC;$$

$$S = \frac{1}{2}b \cdot h_b;\ S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\angle A;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

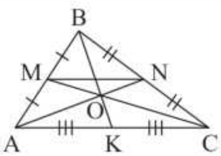
$$S = p \cdot r, \quad S = \frac{abc}{4R}.$$

Синустар теоремасы:

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

Косинустар теоремасы:

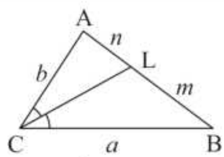
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\angle A.$$



2-сурет

Үшбұрыштың медианалары:

$$\frac{AO}{ON} = \frac{BO}{OK} = \frac{CO}{OM} = \frac{2}{1}.$$



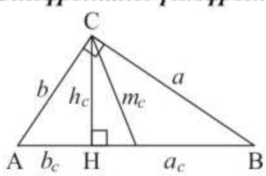
3-сурет

Үшбұрыштың биссектрисасы:

$$\frac{n}{m} = \frac{b}{a}.$$

$$CL = \sqrt{ab - mn}.$$

Тікбұрышты үшбұрыш



4-сурет

a, b – катеттер; c – гипотенуза;

a_c, b_c – катеттердің гипотенузадағы проекциялары;

m_c – гипотенузаға жүргізілген медиана;

h_c – гипотенузаға жүргізілген биіктік.

$$S = \frac{1}{2}ab; \qquad S = \frac{1}{2}c \cdot h_c;$$

$$m_c = \frac{1}{2}c = R; \qquad r = \frac{1}{2}(a + b - c);$$

$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}; \qquad a = \sqrt{c \cdot a_c}; \qquad b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

Пифагор теоремасы: $a^2 + b^2 = c^2$.

Тікбұрышты үшбұрышты шешу:

$$a = c \cdot \sin\angle A; \qquad b = c \cdot \cos\angle A;$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg}\angle A; \qquad b = a \cdot \operatorname{ctg}\angle A.$$

Тригонометриялық формулалар:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

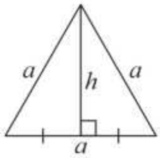
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$;

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Дұрыс үшбұрыш



5-сурет

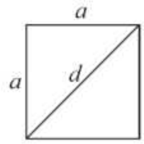
$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$r = \frac{1}{3}h$;

$R = 2r$.

Шаршы



6-сурет

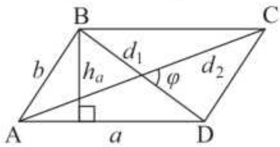
$d = a\sqrt{2}$;

$S = a^2$; $S = \frac{1}{2}d^2$;

$r = \frac{1}{2}a$;

$R = \frac{1}{2}d$.

Параллелограмм



7-сурет

a, b – сыбайлас қабырғалар;

d_1, d_2 – диагональдар;

φ – диагональдардың арасындағы бұрыш;

h_a – a қабырғасына жүргізілген биіктік;

S – аудан.

$S = a \cdot h_a$; $S = ab \cdot \sin\angle A$;

$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$;

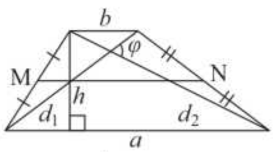
$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Егер $d_1 = d_2$ болса, онда $ABCD$ – тіктөртбұрыш (8, *а*-сурет).

8-сурет

Егер $d_1 \perp d_2$ болса, онда $ABCD$ – ромб (8, *ә*-сурет).

Трапеция



9-сурет

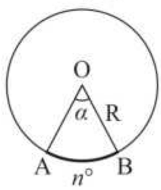
$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$;

MN – орта сызық (9-сурет);

MN табандарына параллель және

$MN = \frac{a+b}{2}$.

Шеңбер



10-сурет

C – шеңбердің ұзындығы;

S – дөңгелектің ауданы;

l – AB доғасының ұзындығы;

$S_{\text{сект.}}$ – сектордың ауданы;

$n°$ – AB доғасының (AOB центрлік бұрышының) градустық өлшемі;

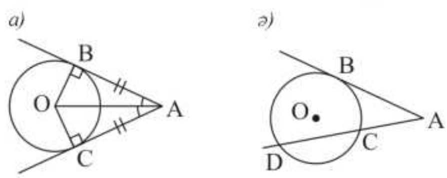
α – центрлік бұрыштың радиандық өлшемі.

$C = 2\pi R$; $S = \pi R^2$; $l = \frac{\pi R n°}{180°}$; $l = R\alpha$;

$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n°}{360°}$; $S_{\text{сект.}} = \frac{1}{2}R^2\alpha$;

а) Шеңберге жанамалардың;

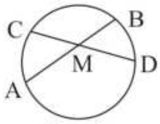
ә) жанама мен қиюшының қасиеттері.



11-сурет

$AB^2 = AD \cdot AC$ (11, *ә*-сурет)

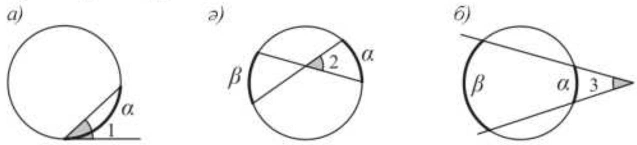
Хордалардың қасиеті



12-сурет

$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$

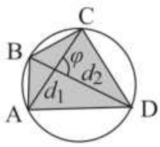
а) Жанама мен хорданың; ә) хордалардың; б) қиюшылардың арасындағы бұрыш.



13-сурет

а) $\angle 1 = \frac{1}{2}\alpha$; ә) $\angle 2 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; б) $\angle 3 = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

Іштей сызылған төртбұрыш



14-сурет

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D.$

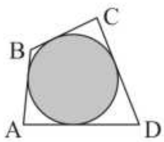
$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$,

мұндағы

d_1, d_2 – диагональдар;

φ – олардың арасындағы бұрыш.

Сырттай сызылған төртбұрыш



15-сурет

$AB + CD = AD + BC.$

$S = rp$,

мұндағы

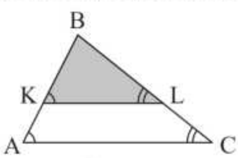
r – іштей сызылған шеңбердің радиусы;

p – төртбұрыштың жарты периметрі.

Ұқсас үшбұрыштар

1) бұрыштары тең;

2) қабырғалары пропорционал.



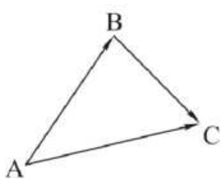
16-сурет

Үшбұрыштың қабырғасына параллель түзу одан берілген үшбұрышқа ұқсас үшбұрыш қияды (16-сурет).

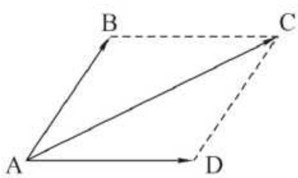
$$\Delta ABC \sim \Delta KBL \Rightarrow \frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KL} = \frac{BC}{BL} = k;$$

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta KBL}} = k; \ \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KBL}} = k^2.$$

Екі вектордың қосындысы



17-сурет

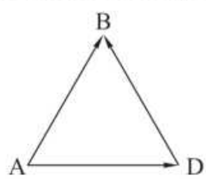


18-сурет

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ үшбұрыш ережесі бойынша;

ә) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ параллелограмм ережесі бойынша.

Екі вектордың айырымы



19-сурет

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

Векторды санға көбейту

$\vec{a}$ векторының k санына көбейтіндісі деп мына шарттарды қанағаттандыратын $k\vec{a}$ векторын атайды:

1) $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$;

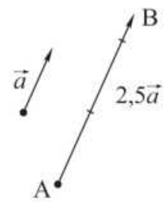
2) $k\vec{a} \parallel \vec{a}$;

3) егер $k > 0$ болса, онда $k\vec{a}$ мен $\vec{a}$ векторлары бағыттас (20-сурет);

егер $k < 0$ болса, онда $k\vec{a}$ мен $\vec{a}$ векторлары қарама-қарсы бағытталған (21-сурет);

4) егер $\vec{a} = \vec{0}$ немесе $k = 0$ болса, онда $k\vec{a} = \vec{0}$.

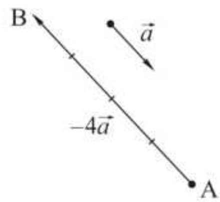
$k > 0$



20-сурет

$\overrightarrow{AB} = 2{,}5\vec{a}$

$k < 0$



21-сурет

$\overrightarrow{AB} = -4\vec{a}$

Бір түзуде немесе параллель түзулерде жататын нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар векторлар деп аталады.

Кез келген $\vec{c}$ векторын коллинеар емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларына тек бір жолмен, $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ түрінде жіктеуге болады, мұндағы x және y – қайсыбір сандар. $\vec{c}$ векторының $\vec{i}$ мен $\vec{j}$ координаталық векторларына $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$ жіктелуіндегі x пен y сандары $\vec{c}$ векторының *координаталары* болады.

СТЕРЕОМЕТРИЯҒА КІРІСПЕ. ПЛАНИМЕТРИЯНЫ ҚАЙТАЛАУ

Ғарышты игерушілерге арналған ескерткіш, Қарағанды қ.

Мектептегі геометрия курсы планиметрия мен стереометриядан тұрады. «Стереометрия» сөзі гректің «стереос» – кеңістіктік, көлемдік және «метрео» – өлшеу сөздерінен шыққан. Планиметрияда барлық нүктелері бір жазықтықта жататын фигуралар оқытылады. Ондай фигураларды *жазық* фигуралар деп атайды. Мысалы, кесінді, бұрыш, үшбұрыш, дөңгелек жазық фигуралар болады.

Стереометрияда арасында жазық фигуралар мен жазық емес фигуралары бар, яғни барлық нүктелері бірдей бір жазықтықта жатпайтын кеңістіктегі фигуралар оқытылады. Мысалы, сынық сызық жазық та, жазық емес те фигура болуы мүмкін. Егер фигураның әрбір екі нүктесінің арақашықтығы қайсыбір кесіндінің ұзындығынан артық болмаса, онда оны *шектеулі* фигура деп атайды. Жазық емес шектеулі фигуралардың мысалына куб, пирамида, цилиндр, шар жатады.

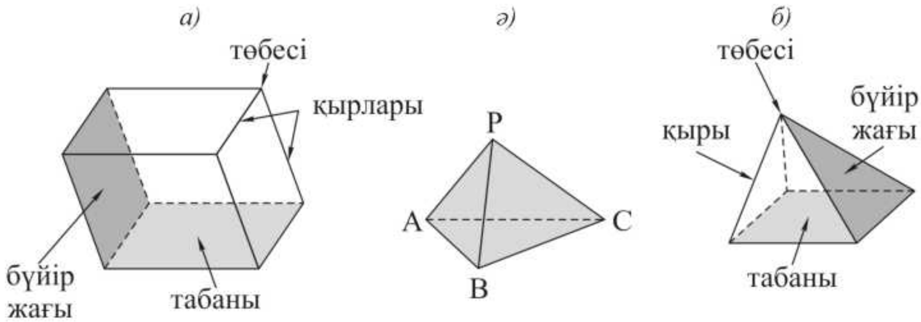
Кеңістікте әртүрлі *сызықтар, геометриялық денелер* мен олардың қасиеттері қарастырылады. Геометриялық дене туралы түсінікті физикалық денелер береді, мысалы, кірпіш тікбұрышты параллелепипедті, апельсин шарды, Ежелгі Мысырдың пирамидалары пирамида деп аталатын геометриялық денені елестетеді.

Гиза пирамидалары, Мысыр

Геометриялық денелердің (немесе қысқаша айтқанда – денелердің) заттардан айырмашылығы олардың қиялдағы объектілер болуында.

Геометриялық денені кеңістіктің қалған бөлігінен осы дененің бетімен – шекарасымен бөлінген кеңістіктің шектеулі бөлігі ретінде елестетуге болады. Мысалы, шардың шекарасы – сфера. Дененің оның шекарасыз барлық бөлігін дененің ішкі облысы деп атайды. Дененің ішкі облысының кез келген нүктесі оның ішкі нүктесі деп аталады. Дененің ішкі облысының кез келген екі нүктесін барлық нүктелері денеге тиісті болатын сынық сызықпен қосуға болады. Егер фигура дененің ішкі нүктелерінен тұрса, онда ол дененің ішінде орналасқан деп айтады. Егер F_1 фигурасы тек F_2 фигурасының нүктелерінен тұрса, онда оны F_2 фигурасының ішінде орналасқан немесе F_2 фигурасы F_1 фигурасын қамтиды, немесе F_1 фигурасы F_2 фигурасының бір бөлігі деп айтады. Белгілеуі: $F_1 \subset F_2$. Кеңістіктегі фигуралардың бірігуінен немесе қиылысуынан әртүрлі фигуралар алынады. Фигуралардың бірігуі – олардың барлық нүктелерінен тұратын фигура, ал фигуралардың қиылысуы – олардың барлық ортақ нүктелерінен тұратын фигура. Фигуралардың бірігуін $\cup$ белгісімен, ал қиылысуын $\cap$ белгісімен белгілейді.

Кеңістіктегі фигураларды оқығанда олардың суреттегі кескіндері пайдаланылады. Мысалы, 22, *а*-суретте параллелепипед, 22, *ә*, *б*-суреттерде үшбұрышты және төртбұрышты пирамидалар кескінделеді (фигураның көрінбейтін бөліктері штрих сызықтармен белгіленеді). Осы денелердің барлығы *көпжақтар* деп аталатын фигуралар класының бір бөлігі ғана. Көпжақ – беті оның *жақтары* деп аталатын санаулы көпбұрыштардан тұратын дене. Көпбұрыштардың қабырғалары көпжақтың *қырлары*, ал төбелері көпжақтың *төбелері* деп аталады.



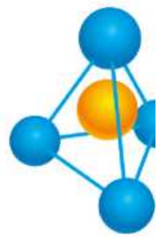
22-сурет

Параллелепипед – 6 жағы бар (22, *а*-сурет), барлық жақтары параллелограмм болатын көпжақ. *Тікбұрышты параллелепипед* – барлық жақтары тіктөртбұрыш болатын параллелепипед. *Куб* – 6 жағы да шаршы болатын тікбұрышты параллелепипед.

Пирамида – бір жағы *n*-бұрыш, ал қалған *n* жағы төбес рыштар болатын көпжак (22, *ә*, *б*-суреттер). Үшбұрышт ны *тетраэдр* деп те атайды (грек тілінен аударғанда төртж *Дұрыс тетраэдр* – барлық жақтары дұрыс үшбұрыш болаты

Параллелепипедтер мен пирамидалардың көптеген мод шаған ортадан көруге болады. Мысалы, тас тұзының криста минералдар тікбұрышты параллелепипед пішінді болады, а куласы тетраэдрді еске салады.

Жасыл кальцит



Метан молекуласын

Үшбұрыштардың теңдіктері мен ұқсастық белгілері бір жататын үшбұрыштар үшін ғана емес, әртүрлі жазықтықт үшбұрыштар үшін де орындалатынын айта кетелік. Шыны лы, *APB* мен *APC* үшбұрыштарында (22, *ә*-сурет) *PB* = *PC*, ал *CPA* бұрышына (*AP* – ортақ қабырға) тең. Сонда *BPA* мен *CPA* рына қолданылған косинустар теоремасы бойынша *BA* = *AC* б реміз. Әрі қарай, осы теореманы пайдаланып, *PBA* мен *PCA*, бұрыштарының теңдігін анықтаймыз. Сонымен *APB* мен *APC* ры тең. Дәл осылай, әртүрлі жазықтықтарда орналасқан үш ұқсастық белгілерін де негіздеуге болады.

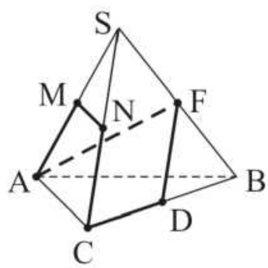
СҰРАҚТАР

1. Стереометрия дегеніміз не?
2. Кеңістіктегі жазық және жазық емес фигуралардың келтіріңдер.

а) Егер бір үшбұрыштың үш бұрышы, сәйкесінше, екінші үшбұрыштың үш бұрышына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады;
ә) егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы мен бұрышы, сәйкесінше, екінші үшбұрыштың екі қабырғасы мен бұрышына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады;
б) егер бір үшбұрыштың қабырғасы мен екі бұрышы, сәйкесінше, екінші үшбұрыштың қабырғасы мен екі бұрышына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады;
в) егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы, сәйкесінше, екінші үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады.

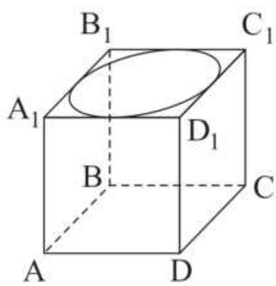
2. $PABC$ тетраэдр болсын. Егер: а) $PA = PB = PC$, $AB = BC = CA$; ә) $PA = BC$, $PB = AC$, $PC = AB$ болса, оның жақтарының арасында тең үшбұрыштардың қанша жұбы бар? (Кез келген пирамиданың белгілеуінде бірінші әріп оның төбесі болады.)

3. $SABC$ – қыры 8 см-ге тең дұрыс тетраэдр. M, N, D, F нүктелері, сәйкесінше, SA, SC, CB, SB қырларының орталары. Кеңістіктегі $AMNCDFA$ сынық сызығының ұзындығын есептеңдер (23-сурет).



23-сурет

4. Кубтың бір жағына іштей сызылған шеңбердің радиусы 2 см-ге тең (24-сурет). Куб бетінің ауданын (барлық жақтарының аудандарының қосындысын) есептеңдер.



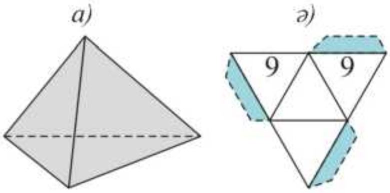
24-сурет

5. Дұрыс тетраэдрдің барлық жақтарының аудандарының қосындысы $49\sqrt{3}$ см^2. Осы тетраэдр қырының ұзындығын табыңдар.

6. а) $PABC$ – барлық бүйір қырлары өзара тең, ал ABC табаны дұрыс үшбұрыш болатын үшбұрышты пирамида, O нүктесі – табанының центрі. O нүктесін P, A, B, C нүктелерімен қосып, шыққан суреттен барлық өзара тең үшбұрыштарды табыңдар.
ә) Бірдей 6 таяқша берілген. Кеңістікте олардан әр қабырғасы осы таяқшаға тең болатын 4 дұрыс үшбұрыш құрастырса, онда қандай фигура шығады?

7. *SABCD* – әрбір қыры 1 дм-ге тең төртбұрышты пирамида, *O* – шаршы болатын *ABCD* табаны диагональдарының қиылысу нүктесі. *SO* қашықтығын табыңдар.

В деңгейі



25-сурет

8. Қалың қағаздан қыры 9 см-ге тең дұрыс тетраэдрдің (25, *а*-сурет) моделін жасаңдар. 25, *ә*-суретте тетраэдрдің жазбасы көрсетілген, ондағы боялған бөліктер желімдеуге арналған.

9. Тікбұрышты параллелепипедтің табаны – диагоналі 4 см-ге тең шаршы. Параллелепипедтің бүйір жағының ауданы $8\sqrt{3}$ см^2-ге тең болса, оның бүйір жағының диагоналін табыңдар.

10. Қыры 10 см-ге тең ағаш кубтың бүйір жақтарын бояп, оны қыры 2 см болатын кішірек кубтарға бөлді. а) Бір жағы боялған; ә) екі жағы боялған; б) боялған жағы жоқ неше куб шықты?

11. Тікбұрышты парақ қағаздан қыры 7 см-ге тең кубтың жазбасын қиып алу үшін парақтың өлшемдері қандай болу керек?

С деңгейі

12. Үшбұрышты *PABC* пирамидасының барлық бүйір қырлары өзара тең, ал *ABC* табаны – дұрыс үшбұрыш. Осы пирамиданың бүйір бетінің ауданы $96\sqrt{3}$ см^2-ге, ал толық бетінің ауданы $112\sqrt{3}$ см^2-ге тең. Пирамиданың табан қабырғасын табыңдар. (Пирамиданың бүйір бетінің ауданы – оның барлық бүйір жақтары аудандарының қосындысы, ал толық бетінің ауданы – оның барлық жақтары аудандарының қосындысы.)

13. *SABCD* пирамидасының *ABCD* табаны – шаршы, оның әрбір бүйір қыры 10 см-ге тең. Егер пирамиданың *SDC* бүйір жағының *DO* медианасы $\sqrt{97}$ см-ге тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

I. СТЕРЕОМЕТРИЯ АКСИОМАЛАРЫ. ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ПАРАЛЛЕЛЬДІГІ

Бөлімді оқу нәтижесінде

- стереометрия аксиомалары мен олардың салдарларын;
- параллелепипед пен тетраэдр анықтамаларын және олардың түрлерін;
- параллель және айқас түзулердің, түзу мен жазықтықтың қиылысуы мен параллельдігінің, қиылысатын және параллель жазықтықтардың анықтамаларын;
- айқас түзулердің, түзу мен жазықтықтың параллельдігінің, параллель жазықтықтардың белгілерін;
- түзулердің, түзу мен жазықтықтың, жазықтықтардың параллельдік қасиетін;
- параллель проекциялаудың қасиеттерін **білу керек.**

- аксиомалар мен олардың салдарларын кескіндеп, математикалық символдар арқылы жазып көрсете алу;
- параллелепипед пен тетраэдрді сызбада кескіндей алу;
- қиылысатын, параллель және айқас түзулерді, қиылысатын түзу мен жазықтықты, параллель болатын түзу мен жазықтықты, параллель жазықтықтарды модельдерден табу және сызбаларда кескіндей алу;
- айқас түзулердің, түзу мен жазықтықтың параллельдігінің, параллель жазықтықтардың белгілері мен қасиеттерін дәлелдей алу;
- стереометрия аксиомаларын, олардың салдарларын, айқас түзулердің белгілері мен қасиеттерін, түзу мен жазықтықтың, параллель жазықтықтардың параллельдігін есептер шығаруда қолдана **алу керек.**

1. Стереометрия аксиомалары және олардың салдарлары

Тақырыпты оқу барысында:

• стереометрияның негізгі ұғымдарын, аксиомаларын және олардың салдарларын білесіңдер;

• аксиомалар мен олардың салдарларын математикалық символдар арқылы жазып көрсете аласыңдар;

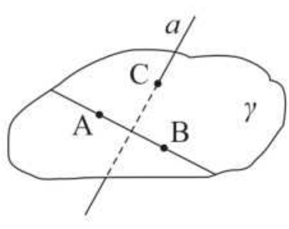
• стереометрия аксиомаларының салдарларын дәлелдейсіңдер;

• аксиомалар мен олардың салдарларын есептер шығаруда қолданасыңдар.

Стереометрияның негізгі ұғымдарына нүкте, түзу және жазықтық жатады. Суретте жазықтықты параллелограмм немесе басқа да жазық фигура түрінде бейнелейді (26-сурет). Әдетте жазықтықты грек әліпбиінің α, β, γ т. с. с. әріптерімен белгілейді. Нүктелер мен түзулер үшін планиметрияда қабылданған белгілеулер қолданылады: нүктелер $A, B, C\dots$, түзулер $a, b, c\dots$ немесе $AB, AC\dots$ деп белгіленеді. Егер C нүктесі α жазықтығына тиісті болса, онда «α жазықтығы C нүктесі арқылы өтеді» деп те айтады ($C \in \alpha$ деп жазылады).

26-сурет

Әр жазықтыққа кеңістіктің қандай да бір нүктелері тиісті және оған тиісті емес те нүктелер болады. 26, ә-суретте A және B нүктелері β жазықтығына тиісті, ал N және E нүктелері оған тиісті емес. Оны былай жазады: $A \in \beta$, $N \notin \beta$.



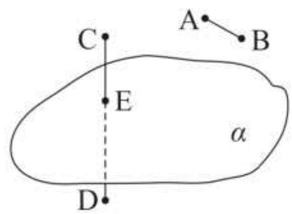
27-сурет

Егер AB түзуі γ жазықтығында жатса (27-сурет), онда жазықтық AB түзуі арқылы өтеді деп те айтады. Оны былай жазады: $AB \subset \gamma$.

Бір ғана ортақ нүктесі бар болатын түзу мен жазықтық қиылысатын түзу мен жазықтық деп аталады. Мысалы, 27-суретте a түзуі γ жазықтығын қияды, себебі түзудің осы жазықтықпен бір ғана ортақ C нүктесі бар, $a \cap \gamma = C$ деп белгіленеді.

Планиметриядағы сияқты стереометрияда AB кесіндісі деп AB түзуінің әртүрлі A және B нүктелерінен – кесіндінің ұштарынан және олардың арасында жататын барлық нүктелерден – кесіндінің ішкі нүктелерінен тұратын нүктелер жиыны аталады. Сәуле ұғымы да планиметриядағыға ұқсас анықталады. A мен B нүктелерінің арақашықтығы AB кесіндісінің ұзындығы деп алынады.

Кесінді мен жазықтықтың тек бір ортақ нүктесі бар болса және ол нүкте кесіндінің ұштары болмаса, онда олар қиылысатын кесінді мен жазықтық деп аталады. Мысалы, 28-суретте CD кесіндісі α жазықтығын қияды, ал AB кесіндісі жазықтықты қимайды.



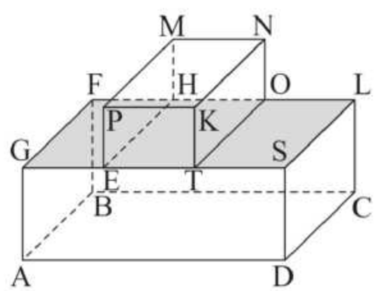
28-сурет

Сәуле мен жазықтықтың сәуленің басы болмайтын тек бір ортақ нүктесі бар болса, онда олар қиылысатын сәуле мен жазықтық деп аталады. Қиылысатын сәуле мен жазықтықты кескіндеңдер.

Стереометрияда: а) екі түзудің; ә) екі кесіндінің; б) кесінді мен түзудің; в) кесінді мен сәуленің; г) сәулелердің қиылысуы ұғымдары планиметриядағыға ұқсас анықталады. Оларды кескіндеңдер.

Әр жазықтық кеңістікті екі нүктелер жиынына бөледі. Егер екі нүкте әртүрлі жиындарда жатса, онда осы нүктелер ұштары болатын кесінді сол жазықтықты қияды (нүктелер жазықтықтың әртүрлі жағында жатыр деп те айтады, 28-суретте олар C мен D нүктелері). Егер екі нүкте бір жиынға тиісті болса, онда осы нүктелер ұштары болатын кесінді сол жазықтықты қимайды (немесе нүктелер жазықтықтың бір жағында жатыр деп айтады, 28-суретте олар A мен B нүктелері). Осы жиындардың бірінің оларды бөлетін жазықтықпен бірігуін **жарты кеңістік** деп, ал жазықтықты осы жарты кеңістіктердің **шекарасы** деп атайды.

Сондай-ақ, жазықтықтың бір жағында жататын немесе әртүрлі жағында жататын фигуралар туралы да айтуға болады. Мысалы, 22-суретте пирамидалар мен параллелепипедтің барлық нүктелері осы көпжақтың кез келген жағын қамтитын жазықтықтың бір жағында орналасқан, ал 29-суретте, мысалы, $GFHE$ жағын қамтитын жазықтықтың әртүрлі жағында орналасқан нүктелері бар көпжақ бейнеленген.



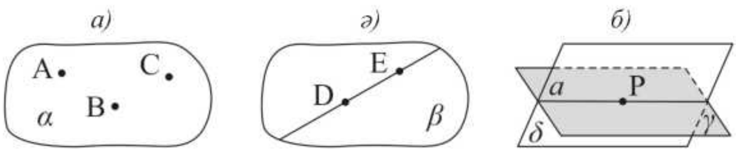
29-сурет

Мектеп стереометриясының аксиомалар жиынтығына планиметрия аксиомалары мен кеңістіктегі нүктелердің, түзулердің және жазықтықтардың өзара орналасуы туралы аксиомалар кіреді.

1 - а к с и о м а. **Бір түзуде жатпайтын үш нүкте арқылы бір ғана жазықтық өтеді** (30, *а*-сурет). Бір түзуде жатпайтын үш A, B, C нүктелері арқылы өтетін жазықтықты ABC жазықтығы немесе (ABC) деп белгілейді. Мұндай нүктелер туралы олар (ABC) жазықтығын береді деп айтады.

2 - а к с и о м а. **Жазықтықтың әртүрлі екі нүктесінен өтетін түзу осы жазықтықта жатады.** Мысалы, 30, *ә*-суретте DE түзуі β жазықтығында жатыр ($DE \subset \beta$).

3 - а к с и о м а. **Егер екі жазықтықтың ортақ нүктесі бар болса, онда олардың осы нүктеден өтетін ортақ түзуі бар болады.** Бұл жағдайда екі жазықтық түзу бойымен қиылысады дейді; оларды қиылысатын жазықтықтар деп атайды. Мысалы, 30, *б*-суретте γ мен δ жазықтықтары a түзуі бойымен қиылысады, $\gamma \cap \delta = a$ деп белгілейді.



30-сурет

Көптеген құрылғылар, мысалы, фотоаппаратқа арналған штатив құрылымы 1-аксиомаға негізделген. Штативтің үш аяғының сүйір ұштары бір жазықтыққа тиісті болғандықтан, фотоаппарат нық тұрады. 1-аксиомадан мынадай тұжырым жасалады: егер екі жазықтықтың бір түзуде жатпайтын үш ортақ нүктесі бар болса, онда олар беттеседі.

Қазақтың ұлттық үстелі

Төрт нүкте бір жазықтықта жатпауы мүмкін. Осы жағдайдың көрнекі растауы: егер үстелдің төрт аяғының ұзындығы бірдей болмаса, онда ол үш аяғына тіреліп тұрады да, ал төртінші аяғының ұшы еден жазықтығында жатпағандықтан, үстел орнықсыз болады.

2-аксиоманы бақылау сызғышы арқылы берілген бет жазық фигура бола ма екенін тексеру үшін пайдаланады. Сызғышты тексерілетін бетке қырымен әртүрлі бағытта орнатады да, арасында саңылау жарық бар ма екенін қарайды.

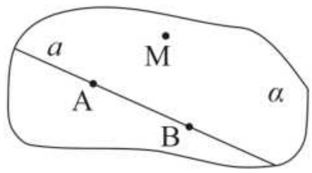
3-аксиоманың қолданылуына өздігінен мысал келтіріңдер.

Мектеп стереометриясында планиметрияның барлық аксиомалары кеңістіктің кез келген жазықтығы үшін орындалады, ал кесіндінің ұзындығы, бұрыштың шамасы және жазық фигураның ауданы олардың қандай жазықтықта жатқанына тәуелді емес деп саналады. Сондықтан кеңістіктің кез келген жазықтығына планиметрияда дәлелденген барлық теоремаларды қолдануға болады, сондай-ақ, әртүрлі жазықтықтарда жататын кесінділерді және бұрыштарды салыстыруға болады. Қайсыбір жазық фигураны қамтитын жазықтықты кейде қысқаша сол фигураның жазықтығы деп атайды, мысалы, үшбұрыштың жазықтығы, тетраэдр жағының жазықтығы.

1–3-аксиомалардың кейбір салдарларын қарастырайық.

1-салдар. **Түзу мен онда жатпайтын нүкте арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады.**

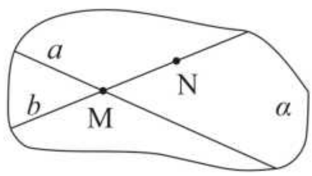
Дәлелдеуі. a түзуі мен онда жатпайтын M нүктесі берілген болсын (31-сурет). Түзуден A және B нүктелерін алайық. 1-аксиома бойынша бір түзуде жатпайтын үш A, B, M нүктелері арқылы жазықтық өтеді және a түзуі осы жазықтықта жатады (2-аксиома). Бұл жалғыз жазықтық, себебі a түзуі мен M нүктесін қамтитын кез келген жазықтық A, B, M нүктелері арқылы өтеді. 1-аксиома бойынша бұл нүктелер арқылы әртүрлі екі жазықтық жүргізуге болмайды.



31-сурет

2-салдар. **Қиылысатын екі түзу арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады.**

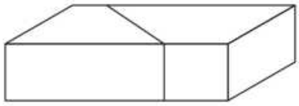
Дәлелдеуі. M нүктесінде қиылысатын a және b түзулерін қарастырайық (32-сурет). b түзуінен M нүктесінен басқа қандай да бір N нүктесін алайық. N нүктесі мен a түзуі арқылы өтетін α жазықтығын қарастырайық. b түзуінің екі нүктесі α жазықтығында жатқандықтан, 2-аксиома бойынша бұл жазықтық b түзуі арқылы өтеді. Сонымен, қиылысатын екі түзу арқылы жазықтық жүргізуге болатыны дәлелденді. Мұндай жазықтық біреу ғана, себебі a мен b түзулері арқылы өтетін кез келген жазықтық N нүктесі арқылы да өтеді. Демек, ол α жазықтығымен беттеседі, себебі N нүктесі мен a түзуі арқылы тек бір жазықтық өтеді. Салдар дәлелденді.



32-сурет

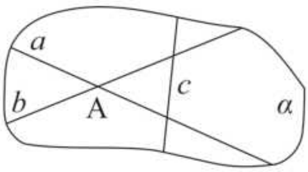
3-салдар. **Кеңістіктің әртүрлі екі нүктесі арқылы бір ғана түзу жүргізуге болады.** (Бұл салдарды өздігінен дәлелдеңдер.)

Іс жүзінде, 2-салдарды, мысалы, ағаш ұстасы қырлы бөренені арамен кесерде пайдаланады. Ол бөрененің сыбайлас екі жағына қиылысатын түзулер сызып, кесу жазықтығын белгілеп алады да, ара осы түзулер арқылы өтетіндей етіп кеседі (33-сурет).



33-сурет

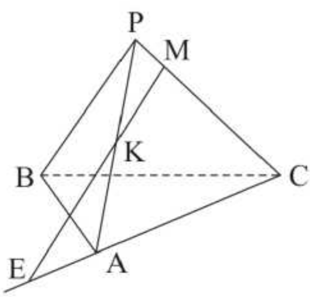
1 - е с е п. A нүктесінде қиылысатын екі түзу берілген. Осы екі түзуді қиятын және A нүктесінен өтпейтін барлық түзулер бір жазықтықта жататынын дәлелдеу керек.



34-сурет

Д ә л е л д е у і. Берілген a және b түзулері арқылы α жазықтығын жүргіземіз (34-сурет), мұндай жазықтық біреу ғана болады. Берілген түзулерді қиятын, A нүктесінен өтпейтін кез келген c түзуінің α жазықтығымен екі ортақ нүктесі бар болады (берілген түзулермен қиылысу нүктелері). 2-аксиома бойынша бұл түзу α жазықтығында жатады. Сонымен, берілген екі түзуді қиятын және олардың қиылысу нүктесінен өтпейтін барлық түзулер бір жазықтықта жатады.

2 - е с е п. $PABC$ тетраэдрі мен оның, сәйкесінше, PA мен PC қырларында жататын және $KM \nparallel AC$ болатындай K мен M нүктелері берілген. KM түзуінің ABC жазықтығымен қиылысу нүктесін салу керек.



35-сурет

Ш е ш у і. K мен M нүктелері бір APC жағына тиісті болғандықтан, 2-аксиома бойынша KM түзуі APC жазықтығында жатады. Осы жазықтықта KM түзуі AC түзуін E нүктесінде қияды (35-сурет), себебі $KM \nparallel AC$.

E нүктесі ABC жазықтығына тиісті, себебі ол барлық нүктелері осы жазықтыққа тиісті AC түзуінде жатыр. Сонымен, E – ізделінді нүкте, өйткені ол KM түзуі мен ABC жазықтығының ортақ нүктесі.

СҰРАҚТАР

1. Стереометрияның негізгі ұғымдары қандай?
2. Стереометрияның аксиомаларын тұжырымдап, оларды суретте салып көрсетіңдер.
3. Стереометрия аксиомаларының салдарларын тұжырымдаңдар және оларды дәлелдеңдер.

4. Бір түзуде жататын үш нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

14. а) Екі нүкте; ә) үш нүкте; б) кез келген үш нүктесі бір түзуде жатпайтын төрт нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

15. Түзу мен жазықтықтың: а) бір ғана ортақ нүктесі; ә) тек екі ортақ нүктесі болуы мүмкін бе?

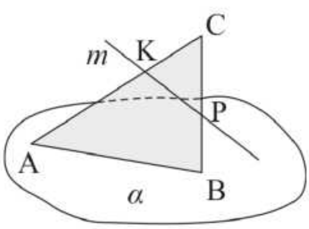
16. а) Күннің, Жердің және Марстың центрлері бір түзуде жатуы мүмкін бе?
ә) Жер мен Марстың орбиталары бір жазықтықта жата ма? (а) мен ә) сұрақтарына жауапты Ғаламтордан іздеңдер.)
б) MN және KL кесінділері O нүктесінде қиылысады. KN, KM, LM және NL түзулері бір жазықтықта жататынын дәлелдеңдер.

Күн жүйесіндегі планеталар

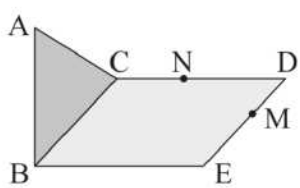
17. α мен β жазықтықтары AD түзуі бойымен қиылысады ($\alpha \cap \beta = AD$), ал α мен γ жазықтықтары BD түзуі бойымен қиылысады ($\alpha \cap \gamma = BD$). β мен γ жазықтықтары қиылыса ма? Жауабын түсіндіріңдер.

18. а) Екі жазықтықтың; ә) үш жазықтықтың бір ғана ортақ нүктесі болуы мүмкін бе?

19. а) ABC үшбұрышының A мен B төбелері α жазықтығында жатыр, ал C төбесі бұл жазықтыққа тиісті емес (36-сурет). m түзуі үшбұрыштың AC мен CB қабырғаларын, сәйкесінше, K мен P нүктелерінде, ал α жазықтығын D нүктесінде қияды. D нүктесі AB түзуінде жата ма? Жауабын түсіндіріңдер.

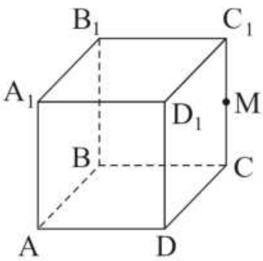


36-сурет



37-сурет

ә) $BCDE$ параллелограмы мен ABC үшбұрышы әртүрлі жазықтықтарда жатыр. M мен N нүктелері, сәйкесінше, параллелограмның DE мен DC қабырғаларына белгіленген (37-сурет). 1) MN түзуі мен ABC жазықтығының қиылысу нүктесін салыңдар. 2) DMN мен ABC жазықтықтары қай түзудің бойымен қиылысады?

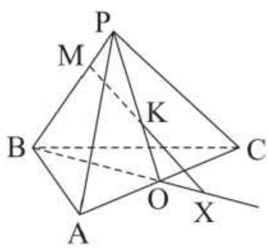


38-сурет

20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының CC_1 қырына M нүктесі белгіленген (38-сурет). Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесі: а) $B_1M \cap (ABC)$; ә) $DM \cap (A_1B_1C_1)$ жататын түзуді көрсетіңдер.

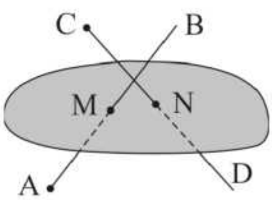
21. M нүктесі – $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AA_1 қырының ортасы. D_1M түзуінің $ABCD$ табан жазықтығымен қиылысу нүктесі E-ні салыңдар. Егер кубтың қыры 4 см-ге тең болса, D_1E кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

22. $PABC$ тетраэдрі берілген, оның PB қырына M нүктесі, ал APC жағына K нүктесі белгіленген. MK түзуінің ABC жазықтығымен қиылысу нүктесін салуды түсіндіріңдер (39-сурет).

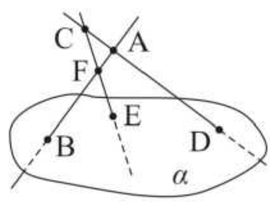


39-сурет

23. AB және CD сәулелері жазықтықты, сәйкесінше, M және N нүктелерінде қияды. Сәулелердің бастары жазықтықтың әртүрлі жағында, ал өздері қиылысатын түзулерде жатыр (40-сурет). AC кесіндісінің осы жазықтықпен қиылысу нүктесі бар болса, сол нүктені салыңдар.



40-сурет



41-сурет

24. Оқушы «Әрқайсысы α жазықтығын қиятын және өзара қос-қостан қиылысатын үш түзуді кескінде» деген тапсырманы орындады (41-сурет). Суретте қате бар ма? Жауабын түсіндіріңдер.

25. Қыры 4 дм-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. A_1C_1D мен ACD_1 жазықтықтары қай түзудің бойымен қиылысады? A_1C_1D және ACD_1 үшбұрыштарының ортақ кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

В деңгейі

26. Егер екі жазықтықтың әртүрлі екі ортақ нүктесі бар болса, онда олардың осы нүктелерден өтетін тек бір ортақ түзуі бар болатынын дәлелдеңдер.

27. а) Ұштары жазықтықтың әртүрлі жағында жататын сынық сызықтың осы жазықтықпен кемінде бір ортақ нүктесі бар болатынын дәлелдеңдер.
ә) Үшбұрыштың төбелері қайсыбір жазықтықтың бір жағында жатыр. Оның толығымен осы жазықтықтың бір жағында жататынын дәлелдеңдер. Егер төртбұрыштың төбелерін алсақ, бұл тұжырым ақиқат бола ма?

28. а) Кез келген A, B және C нүктелері үшін кеңістікте $AB + BC \geq AC$, $AB + AC \geq BC$, $AC + BC \geq AB$ теңсіздіктері орындалатынын дәлелдеңдер.
ә) Кеңістікте арақашықтықтары белгілі үш нүкте берілген. Осы нүктелер бір түзуге тиісті бола ма екенін қалай тексеруге болады?
б) Кеңістікте бір түзуде жатпайтын және арақашықтықтары белгілі A, B, C нүктелері берілген. ABC үшбұрышының түрін қалай анықтауға болады?

29. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді мен оның B_1C_1 қырына тиісті M нүктесі берілген. AB мен CC_1 түзулерін қиятын және M нүктесі арқылы өтетін түзуді салыңдар.

30. A, B, C, D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. а) BC, BD және AC, BC; ә) BC, BD және AC, AD түзулері арқылы өтетін жазықтықтар өзара қалай орналасқан?

31. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы, AA_1 қырында M нүктесі және DD_1 қырында H нүктесі берілген, әрі MH түзуі AD түзуіне параллель емес. MHC мен ACD жазықтықтарының қиылысу сызығын салыңдар.

С деңгейі

32. ABC үшбұрышының AM медианасы α жазықтығында жатыр. а) ABC үшбұрышы α жазықтығында жатыр деп тұжырым жасауға бола ма? ә) Егер осы үшбұрыштың B төбесі α жазықтығында жатпаса, онда оның BN медианасы мен α жазықтығының қиылысу нүктесі қай жерде жатады? б) ABC жазықтығында B нүктесі арқылы AC түзуіне параллель BK түзуі жүргізілген. BK түзуі мен α жазықтығының қиылысу нүктесі қай жерде жатыр?

33. Үшбұрышты $DABC$ пирамидасы берілген, оның табаны – қабырғасы a-ға тең дұрыс ΔABC. M және N нүктелері, сәйкесінше, ADC және BDC жақтары медианаларының қиылысу нүктелері. а) MN кесіндісінің ұзындығын табыңдар. ә) Егер O нүктесі MN кесіндісінің ортасы болса, CO түзуі мен ABD жазықтығының қиылысу нүктесін салыңдар.

34. а) ABC үшбұрышының A және B төбелерінен жүргізілген медианалары O нүктесінде қиылысады. M нүктесі BC қабырғасында жатыр, ал N нүктесі ABC жазықтығына тиісті емес. Қандай жағдайда A, O, M, N нүктелері арқылы жазықтық жүргізуге болатынын зерттеңдер.
ә) ABC үшбұрышында $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, A және C төбелерінен жүргізілген биссектрисалары M нүктесінде қиылысады. D нүктесі AC қабырғасына тиісті, ал P нүктесі ABC үшбұрышының жазықтығында жатпайды. B, D, M, P нүктелері арқылы жазықтық жүргізуге болатыны белгілі. D нүктесі AC қабырғасын қандай қатынаста бөледі?

35. Қыры $6\sqrt{3}$ см-ге тең $DABC$ дұрыс тетраэдрі берілген. Оның AB, AC және DA қырларының орталары арқылы өтетін шеңбердің радиусын табыңдар.

2. Кеңістіктегі параллель түзулер және олардың қасиеттері

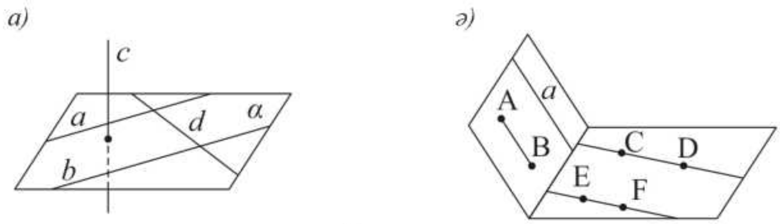
Тақырыпты оқу барысында:

• кеңістіктегі параллель түзулердің анықтамасын және олардың қасиеттерін білесіңдер;

• суреттен параллель түзулерді анықтайсыңдар, оларды кескіндейсіңдер және қасиеттерін есептер шығаруда қолданасыңдар.

Кеңістіктегі бір жазықтықта жататын және ортақ нүктесі болмайтын екі түзу параллель түзулер деп аталады. Түзулердің параллельдігі планиметриядағы сияқты белгіленеді. Мысалы, 42, *а*-суреттегі түзулер: $a \parallel b$, $a \nparallel c$, $b \nparallel d$.

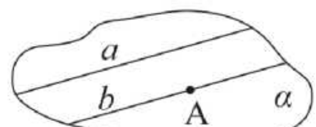
Параллель түзулерде жататын екі кесінді (немесе кесінді мен сәуле, немесе екі сәуле) параллель деп аталады. Кесінді (немесе сәуле) бір түзуге параллель түзуде жатса, онда ол сол түзуге параллель деп аталады. Мысалы, 42, *ә*-суретте CD мен EF кесінділері параллель, ал AB мен CD кесінділері параллель емес, AB кесіндісі a түзуіне параллель, DC сәулесі AB кесіндісіне параллель емес.



42-сурет

1 - е с е п. a түзуі мен онда жатпайтын A нүктесі берілген. A нүктесінен өтіп, a түзуіне параллель болатын b түзуін салу керек.

Ш е ш у і. a түзуі мен A нүктесі арқылы α жазықтығын жүргіземіз (43-сурет). α жазықтығында A нүктесі арқылы a түзуіне параллель b түзуін жүргіземіз. b түзуі жалғыз, себебі a түзуі мен онда жатпайтын A нүктесі арқылы бір ғана жазықтық өтеді (1-аксиоманың салдары), ал параллель түзулердің аксиомасы бойынша α жазықтығында a түзуінде жатпайтын A нүктесі арқылы a түзуіне параллель бір ғана түзу жүргізуге болады.



43-сурет

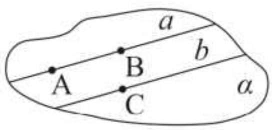
Осы есепті шешу арқылы **кеңістікте түзуде жатпайтын нүкте арқылы берілген түзуге параллель бір ғана түзу жүргізуге болатын** теореманы дәлелдедік.

Бұл есептің шешуі стереометрияның негізгі салуларына жатады. Кеңістіктегі негізгі салуларға мыналар да жатады: екі нүкте арқылы түзу жүргізу; жазықтық салу; кез келген екі жазықтықтың қиылысу түзуін салу. Кеңістіктегі салу есебін шығару – нәтижесінде есептің шартын қанағаттандыратын фигура алынатын негізгі салулардың ретін көрсету.

Салу есебінің шешімін зерттегенде, яғни, есептің қанша шешімі бар және шешімінің саны нақты берілгендерді таңдауға байланысты ма деген сұрақтарды анықтауда бір логикалық қатеден аулақ болу керек. Яғни, салудың әрбір қадамын зерттей отырып, әр қадам жалғыз нәтижеге алып келетініне көз жеткізгенде ғана есептің жалғыз шешімі бар деген қорытынды жасаймыз. Бұдан тек есептің шешімі салудың осы тәсілінде жалғыз болатыны шығады, бірақ салудың басқа да тәсілдері бар болуы мүмкін. Зерттеу салудың тәсіліне байланысты еместігіне, мысалы, кері жорып дәлелдеу тәсіліне сүйене отырып көз жеткізу керек. Табылған шешімнен басқа шешімдердің жоқ екенін дәлелдеу үшін, кемінде тағы бір шешімі бар деп болжам жасап, осыған байланысты қайшылық алу керек.

Теорема. **Екі параллель түзу арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады.**

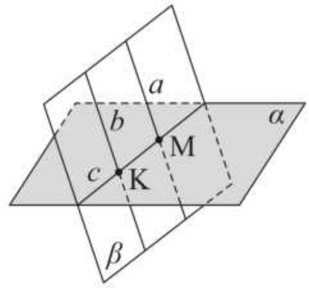
Дәлелдеуі. Осындай бір жазықтықтың бар болуы параллель түзулердің анықтамасынан шығады. Берілген екі түзу жататын басқа да жазықтық бар болады деп жорамалдайық. Түзулердің біріне A және B нүктелерін, ал екіншісіне C нүктесін белгілейік (44-сурет), сонда бір түзуде жатпайтын A, B, C нүктелері арқылы екі жазықтық жүргізілген болып шығады, бұл 1-аксиомаға қайшы келеді. Демек, біздің жорамалымыз дұрыс емес, ондай жазықтық жалғыз.



44-сурет

Теорема. **Егер екі параллель түзудің бірі жазықтықты қиса, онда екіншісі де осы жазықтықты қияды.**

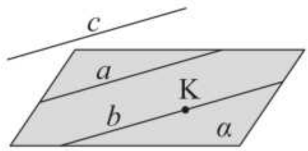
Дәлелдеуі. Параллель a және b түзулерін қарастырайық, a түзуі α жазықтығын M нүктесінде қиятын болсын (45-сурет). a мен b параллель түзулері жататын β жазықтығын қарастырайық. Әртүрлі α және β жазықтықтарының ортақ M нүктесі бар болғандықтан, 3-аксиома бойынша олар қайсыбір c түзуі бойымен қиылысады. Ол түзу β жазықтығында жатыр және a түзуін M нүктесінде қияды, сондықтан оған параллель b түзуін қайсыбір K нүктесінде қияды. Сонымен қатар, c түзуі α жазықтығында жатыр, сондықтан K нүктесі де осы жазықтыққа тиісті, демек, ол нүкте b түзуі мен α жазықтығының ортақ нүктесі болады. b түзуінің α жазықтығымен K нүктесінен басқа ортақ нүктесі жоқ. Шынымен де, егер b түзуінің α жазықтығымен тағы бір ортақ нүктесі бар болса, онда ол түзу осы жазықтықта жатар еді де, α мен β жазықтықтарының ортақ түзуі болар еді, яғни, c түзуімен беттескен болар еді. Бірақ олай болуы мүмкін емес, себебі шарт бойынша a мен b түзулері параллель, ал a мен c түзулері қиылысады. Теорема дәлелденді.



45-сурет

Т е о р е м а (*кеңістіктегі екі түзудің параллельдік белгісі*). **Егер екі түзудің әрқайсысы үшінші түзуге параллель болса, онда ол екі түзу параллель болады.**

Д ә л е л д е у і. $a \parallel c$ және $b \parallel c$ болсын. $a \parallel b$ болатынын дәлелдейік. Ол үшін a мен b түзулері бір жазықтықта жататынын және қиылыспайтынын дәлелдеу керек. b түзуінен қайсыбір K нүктесін алайық және a түзуі мен K нүктесі арқылы өтетін жазықтықты α деп белгілейік (46-сурет).



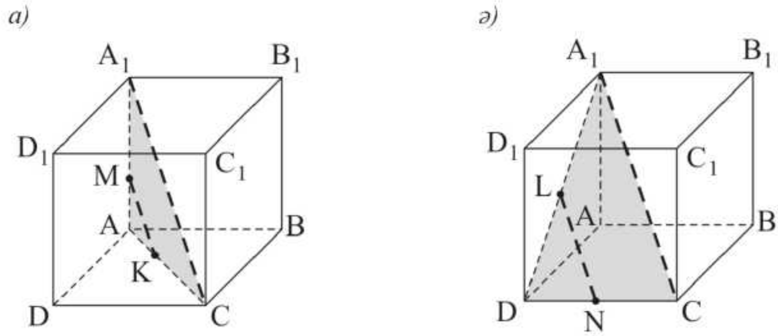
46-сурет

b түзуі осы жазықтықта жататынын дәлелдейік. Егер b түзуі α жазықтығын қиятын болса, онда c түзуі де осы жазықтықты қияды (жазықтықты параллель түзулермен қию туралы теорема бойынша). c түзуі a түзуіне параллель болғандықтан, a түзуі де α жазықтығын қиюы керек, бұл мүмкін емес, себебі a түзуі α жазықтығында жатыр. Демек, a мен b түзулері бір жазықтықта жатыр және олар қиылыспайды. Егер кері жорып, a мен b түзулері қиылысады десек, онда олардың қиылысу нүктесі арқылы c түзуіне параллель a және b түзулері өтетін еді, олай болуы мүмкін емес. Демек, $a \parallel b$. Теорема дәлелденді.

2 - е с е п. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы мен оның AA_1 және DC қырларында сәйкесінше жататын M және N нүктелері берілген. $MK \parallel A_1C$ және $NL \parallel A_1C$ түзулерін салу керек, мұндағы K мен L – осы түзулердің кубтың жақтарымен қиылысу нүктелері. MK мен NL түзулері бір жазықтықта жата ма?

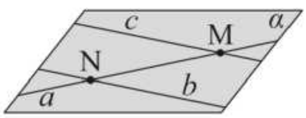
Ш е ш у і. Алдымен MK мен A_1C параллель түзулері жататын жазықтықты саламыз. $M \in AA_1$ болады, ал қиылысатын AA_1 және A_1C түзулері арқылы AA_1C жазықтығы өтеді. Осы жазықтыққа $MK \parallel A_1C$ түзуін саламыз, мұндағы $K \in AC$ (47, a-сурет).

Дәл осылай, NL түзуін салу үшін, A_1CD жазықтығын және осы жазықтыққа $NL \parallel A_1C$ түзуін саламыз, мұндағы $L \in A_1D$ (47, ә-сурет). $MK \parallel A_1C$ және $NL \parallel A_1C$ болғандықтан, $MK \parallel NL$. Демек, MK мен NL түзулері бір жазықтықта жатады.



47-сурет

3 - е с е п. a мен b түзулері қиылысады. b түзуіне параллель және a түзуін қиятын кез келген c түзуі олармен бір жазықтықта жататынын дәлелдеу керек.

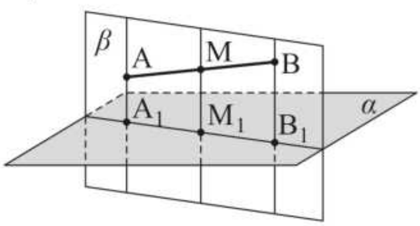


48-сурет

Ш е ш у і. c және b параллель түзулері арқылы α жазықтығын жүргіземіз, ол жалғыз жазықтық болады (48-сурет). α жазықтығына a түзуінің әртүрлі екі нүктесі – оның b және c түзулерімен қиылысатын нүктелері тиісті.

Ендеше, a түзуі де α жазықтығында жатыр. Демек, a, b, c түзулері бір жазықтықта жатады.

4 - е с е п. AB кесіндісінің ұштарынан және қақ ортасындағы M нүктесінен қайсыбір жазықтықты A_1, B_1 және M_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. Егер AB кесіндісі осы жазықтықты қимаса және $AA_1 = 5$ см, ал $BB_1 = 11$ см болса, MM_1 кесіндісінің ұзындығын табу керек.



49-сурет

Ш е ш у і. AA_1, BB_1 және MM_1 түзулері бір β жазықтығында жатыр, сондықтан A_1, B_1 және M_1 нүктелері β жазықтығы мен берілген α жазықтығының қиылысуынан шыққан A_1B_1 түзуінде жатады (49-сурет). Фалес теоремасы бойынша M_1 нүктесі – A_1B_1

кесіндісінің ортасы. MM_1 кесіндісі AA_1B_1B трапециясының орта сызығы болатындықтан, $MM_1 = 0,5 \cdot (5 + 11) = 8$ (см).

Ж а у а б ы. 8 см.

СҰРАҚТАР

1. Кеңістікте қандай екі түзу параллель түзулер деп аталады?
2. Берілген түзуде жатпайтын нүкте арқылы сол түзуге параллель бір ғана түзу жүргізуге болатынын дәлелдеңдер.
3. Егер екі түзудің ортақ нүктелері болмаса, онда олар параллель болады деген ақиқат па?
4. Екі параллель түзу арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?
5. Кеңістіктегі екі түзудің параллельдік белгісін тұжырымдаңдар.

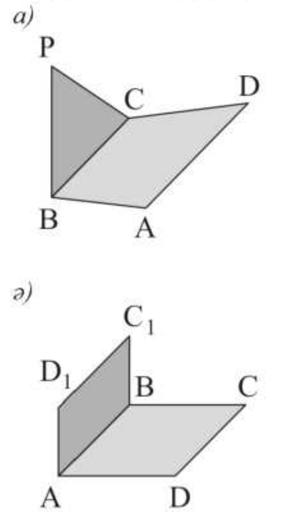
ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

36. а) E, K, M, P нүктелері бір жазықтықта жатпайды. KM мен PE түзулері параллель болуы мүмкін бе? ә) c түзуі a мен b параллель түзулерін қияды. a, b және c түзулері бір жазықтықта жататынын дәлелдеңдер.

37. а) P нүктесі AD мен BC табандары болатын $ABCD$ трапециясының жазықтығында жатпайды (50, *а*-сурет). PB мен PC кесінділерінің орталары арқылы өтетін түзу трапецияның орта сызығына параллель болатынын дәлелдеңдер.

ә) $ABCD$ мен ABC_1D_1 параллелограмдары әртүрлі жазықтықтарда жатыр (50, *ә*-сурет). C_1CDD_1 төртбұрышы параллелограмм екенін дәлелдеңдер.



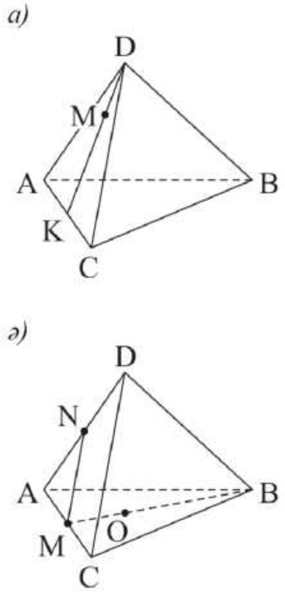
50-сурет

38. a, b, c, d түзулерінің жазылу реті бойынша әрбір көршілес екеуі параллель. Осы түзулердің кез келген екеуінің параллель болатынын дәлелдеңдер.

39. а) A – AB кесіндісінің α жазықтығымен ортақ нүктесі. B нүктесі мен AB кесіндісінің ортасы болатын C нүктесі арқылы α жазықтығын, сәйкесінше, B_1 мен C_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. Егер $CC_1 = 8$ см болса, BB_1 кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

ә) AB кесіндісінің A ұшы α жазықтығында жатыр, ал B ұшы мен кесіндіге тиісті C нүктесі арқылы α жазықтығын, сәйкесінше, B_1 мен C_1

нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. Егер $AC = 9{,}2$ дм, $AB : BB_1 = 5 : 3$ болса, CC_1 кесіндісінің ұзындығын табыңдар.



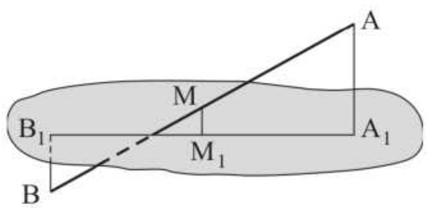
51-сурет

40. а) $DABC$ дұрыс тетраэдрі мен оның ADC жағының DK медианасында жататын және $DM : MK = 2 : 3$ болатындай M нүктесі берілген (51, *а*-сурет). DB қырына параллель MN түзуін салыңдар және осы түзу мен ABC жағының N қиылысу нүктесінің орнын көрсетіңдер.

ә) $DABC$ дұрыс тетраэдрінің ABC табанының O центрі арқылы MN кесіндісіне параллель түзу жүргізіңдер, мұндағы M, N, сәйкесінше, AC мен AD қырларының орталары (51, *ә*-сурет). Егер тетраэдрдің қыры 12 см-ге тең болса, осы түзудің тетраэдр жақтарының арасындағы кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

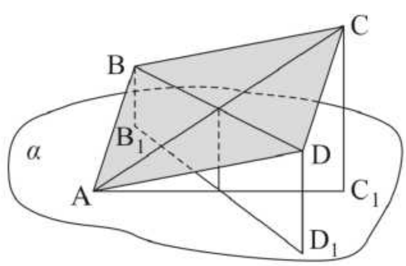
41. $SABC$ пирамидасы берілген. M, N, P, K нүктелері, сәйкесінше, оның SA, SC, BC мен AB қырларының орталары. Егер $SB = 18$ см, $AC = 14$ см болса, $MNPK$ төртбұрышының түрін анықтап, оның периметрін табыңдар.

42. AB кесіндісінің A, B нүктелері мен ортасының M нүктесі арқылы қайсыбір жазықтықты, сәйкесінше, A_1, B_1, M_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. Егер $AA_1 = 13$ дм, $BB_1 = 7$ дм және AB кесіндісі осы жазықтықты қиятын болса (52-сурет), MM_1 кесіндісінің ұзындығын табыңдар.



52-сурет

43. $ABCD$ параллелограмының A төбесі α жазықтығында жатыр, ал оның B, C және D нүктелері арқылы α жазықтығын, сәйкесінше, B_1, C_1, D_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген (53-сурет). Егер $CC_1 = 14$ см, $DD_1 = 11$ см болса, BB_1 кесіндісінің ұзындығын табыңдар.



53-сурет

44. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. K нүктесі AB_1 диагоналінде жатыр және $AK:KB_1 = 2:3$. а) K нүктесінен өтетін және AC түзуіне параллель түзу салыңдар. ә) Егер кубтың қыры 5 см-ге тең болса, осы түзудің кубтың жақтарымен қиылысу нүктелері арасындағы кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

B деңгейі

45. a және b түзулері α жазықтығында жатыр. M нүктесі α жазықтығында жатыр деу үшін MN түзуі a және b түзулеріне қатысты қалай орналасуы керек екенін зерттеңдер.

46. $ABCD$ параллелограмының A, B, C төбелері α жазықтығының бір жағында, ал D төбесі екінші жағында жатыр. AB және BC түзулері α жазықтығын қиятынын дәлелдеңдер. AB мен BC түзулерінің α жазықтығымен қиылысу нүктелері жататын түзуді көрсетіңдер.

47. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы мен оның CC_1 қырында жататын M нүктесі берілген. M нүктесінен өтіп, AB_1 түзуіне параллель болатын түзуді салыңдар. Осы түзу мен AA_1D_1 жазықтығының қиылысу нүктесін табыңдар.

48. $DABC$ дұрыс тетраэдрі берілген, O – ABC үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесі, P – DO кесіндісінің ортасы. P нүктесінен өтетін және CB қырына параллель MN түзуін салыңдар (M, N – осы түзудің тетраэдр жақтарымен қиылысу нүктелері). Егер $MN = 2$ см болса, тетраэдр бетінің ауданын табыңдар.

C деңгейі

49. AO медианасы ортақ болатын ABC мен ADE үшбұрыштары әртүрлі жазықтықтарда жатыр. K, L, M, N нүктелері, сәйкесінше, AB, AD, AE, AC кесінділерінің орталары. KL мен MN түзулері параллель болатынын дәлелдеңдер.

50. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген, O – $ABCD$ жағы диагональдарының қиылысу нүктесі, K – B_1O кесіндісінің ортасы. K нүктесінен өтетін және AO кесіндісіне параллель MN түзуін салыңдар. (M, N – осы түзудің кубтың жақтарымен қиылысу нүктелері). Егер $MN = \sqrt{3}$ дм болса, куб бетінің ауданын табыңдар.

51. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде табан диагоналі $BD = 12$ см, $\angle DBC = 60°$. BD_1 диагоналінің ортасы – O нүктесі арқылы BCD үшбұрышының BK биссектрисасына параллель түзу жүргізіңдер. Осы түзудің CC_1D_1D жағымен қиылысу нүктесі – P-ны көрсетіңдер және OP кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

3. Айқас түзулер

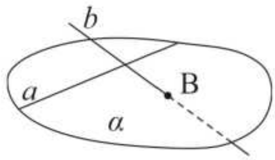
Тақырыпты оқу барысында:

• айқас түзулердің анықтамасын және олардың белгісін білесіңдер;

• суреттен айқас түзулерді анықтайсыңдар, кескіндейсіңдер және олардың белгісін есептер шығаруда қолданасыңдар.

Егер екі түзу қиылысса немесе параллель болса, онда олар бір жазықтықта жатады. Кеңістікте екі түзу бір жазықтықта жатпауы да мүмкін.

Т е о р е м а. **Кеңістікте екеуі арқылы жазықтық жүргізуге болмайтын екі түзу бар болады.**



54-сурет

Д ә л е л д е у і. a түзуі α жазықтығында жатсын, ал b түзуі осы жазықтықты a түзуінде жатпайтын B нүктесінде қиып өтсін (54-сурет). a мен b түзулері арқылы β жазықтығын жүргізуге болады делік. Сонда b түзуінің B нүктесі де β жазықтығына тиісті. Демек, α және β жазықтықтарының ортақ a түзуі мен оған тиісті емес B нүктесі бар болады. Сондықтан α мен β жазықтықтары беттеседі. Бұдан b түзуінің де α жазықтығында жататыны шығады, бұл шартқа қайшы келеді. Демек, a мен b түзулері арқылы жазықтық жүргізуге болмайды. Теорема дәлелденді.

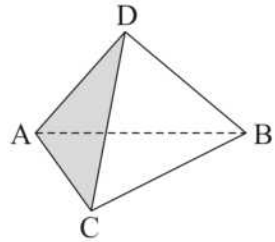
Алматы қаласының әл-Фараби көшесіндегі көлік айрығы

Бір жазықтықта жатпайтын екі түзу айқас түзулер деп аталады.

Айқас түзулердің мысалын бөлме қабырғаларының, еден мен төбенің қиылысу сызықтарынан, әртүрлі деңгейдегі тас жол айрықтарынан көруге болады.

Т е о р е м а (*айқас түзулердің белгісі*). **Егер бір түзу жазықтықта жатса, ал екінші түзу осы жазықтықты бірінші түзуде жатпайтын нүктеде қиып өтсе, онда мұндай түзулер айқас болады.** (Осы теореманы өздігінен дәлелдеңдер.)

Айқас түзулердің белгісін пайдаланып, суретте кескінделген түзулердің айқас болатынын немесе қиылысатынын анықтауға болады. Мысалы, $ABCD$ тетраэдрін қарастырайық (55-сурет). AD түзуі ADC жазықтығында жатыр, ал BC түзуі осы жазықтықты AD түзуінде жатпайтын C нүктесінде қияды, сондықтан AD мен BC қырлары айқас түзулерде жатады.

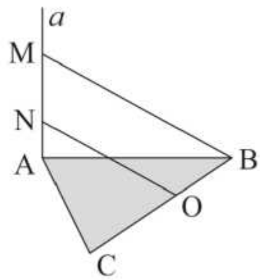


55-сурет

1 - е с е п. Айқас екі түзудің әрқайсысына параллель түзудің болмайтынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. a және b айқас түзулері берілген. $c \parallel b$ және $c \parallel a$ болатындай c түзуі бар болсын. Сонда $a \parallel b$ болады, бұл шартқа қайшы келеді. Демек, айқас екі түзудің әрқайсысына параллель түзу болмайды.

2 - е с е п. Берілгені: $a \cap (ABC) = A$, $N \in a$, $M \in a$, $O \in BC$ (56-сурет). а) ON мен BM түзулері қалай орналасқан? ә) ON мен AB түзулері қиылыса ма?



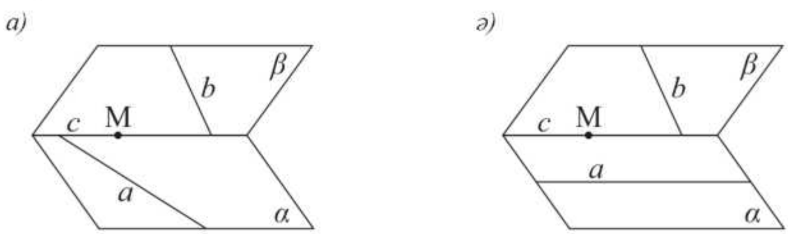
56-сурет

Ш е ш у і. а) ON және BM түзулері айқас, себебі BM түзуі ABM жазықтығында, ал ON түзуі осы жазықтықты BM түзуінде жатпайтын N нүктесінде қияды.

ә) ON мен AB түзулері қиылыспайды, себебі олар – айқас түзулер. (Мұны өздігінен негіздеңдер.)

3 - е с е п. Берілген нүктеден екі айқас түзудің әрқайсысын қиятын түзу жүргізу керек.

Ш е ш у і. Айқас a және b түзулері мен ол түзулерде жатпайтын M нүктесі берілген болсын. c ізделінді түзу болсын (57, a-сурет). Сонда қиылысатын a мен c түзулері олар арқылы өтетін α жазықтығын, ал b мен c түзулері β жазықтығын береді. c түзуі α мен β жазықтықтарының қиылысу сызығы болады. Бұл ретте M нүктесі осы жазықтықтарға және c түзуіне тиісті. Сонымен, егер есептің шешімі бар болса, онда ізделінді түзу a түзуі мен M нүктесі және b түзуі мен M нүктесі арқылы берілген жазықтықтардың қиылысу сызығы болады.



57-сурет

Есептің шешімі бірден артық болмайды, себебі α және β жазықтықтарының қиылысу сызығынан өзге кез келген түзу есептің шешімі бола алмайды. $a \parallel c$ (57, ә-сурет) немесе $b \parallel c$ болса, есептің шешімі болмайды.

СҰРАҚТАР

1. Кеңістікте қандай екі түзу айқас түзулер деп аталады?
2. Айқас түзулердің белгісін тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

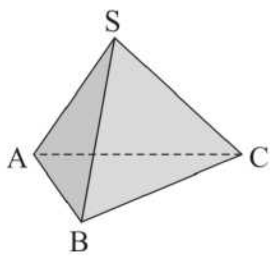
А деңгейі

52. а) Параллель және айқас түзулердің ұқсастығы мен айырмашылығы неде?

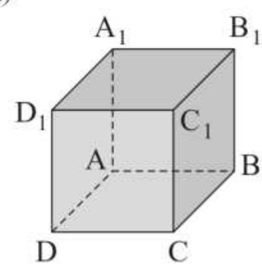
ә) Бір түзу басқа екі түзуді қияды. Осы үш түзудің бір жазықтықта жататыны ақиқат па?

53. M нүктесі $SABC$ тетраэдрінің SB қырына тиісті (58, *а*-сурет). SA мен BC түзулері айқас болатынын дәлелдеңдер. M нүктесі арқылы өтіп, SA мен BC түзулерін қиятын түзуді атаңдар.

а)



ә)

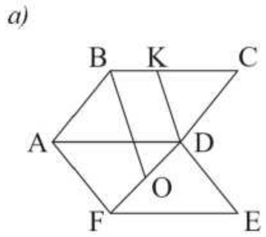


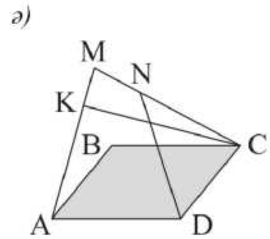
58-сурет

54. Кубтың кескінін пайдаланып (58, ә-сурет), кубтың диагоналін және жақтарының диагональдарын қамтитын айқас түзулерді көрсетіңдер.

55. $ABCD$ және $ADEF$ параллелограмдары әртүрлі жазықтықтарда орналасқан. BC кесіндісіне K нүктесі, ал DF диагоналіне O нүктесі белгіленген (59, *а*-сурет). OB мен DK түзулері параллель деген ақиқат па? Жауабын түсіндіріңдер.

56. $ABCD$ параллелограмы мен оның жазықтығында жатпайтын M нүктесі берілген. AM мен CM кесінділеріне, сәйкесінше, K мен N нүктелері белгіленген (59, ә-сурет). CK мен DN түзулері қиылыса ма? Жауабын түсіндіріңдер.





59-сурет

57. *PABCD* пирамидасы берілген, *M* және *N* нүктелері, сәйкесінше, *PB* және *PD* қырларының орталары. а) *AN* және *DM*; ә) *DM* және *BC*; б) *MN* және *BC* түзулерінің өзара орналасуын анықтаңдар. Жауабын негіздеңдер.

58. Тоқтап тұрған пойыз вагонының бойлық осі: а) рельстерге; ә) жарықтандыру діңгегіне қатысты қалай орналасқан?

59. Параллель *a* және *b* түзулері мен үшінші *c* түзуі берілген. Егер: а) *a* мен *c* қиылысса; ә) *a* мен *c* айқас болса, онда *c* түзуі *b* түзуіне қатысты қалай орналасқанын анықтаңдар.

60. *a* және *b* екі айқас түзуі және: а) *a* түзуімен қиылысатын; ә) *a* түзуіне айқас үшінші *c* түзуі берілген. *c* түзуі *b* түзуіне қатысты қалай орналасқанын зерттеңдер.

B деңгейі

61. *SABCD* пирамидасы мен *AD* қырында жататын *M* нүктесі берілген. *SB* мен *CD* түзулерінің өзара орналасуын зерттеңдер. *M* нүктесі арқылы *SB* мен *CD* түзулерін қиятын түзу жүргізіңдер.

62. Екі айқас түзу берілген. Біреуінің әрбір нүктесінен екіншісіне параллель түзулер жүргізілген. Осындай барлық түзулердің жазықтық құрайтынын дәлелдеңдер.

C деңгейі

63. *a* және *b* айқас түзулері мен олардың әрқайсысын қиятын *c* түзуі берілген. *c* түзуіне параллель кез келген түзу *a* және *b* түзулерінің әрқайсысымен немесе екеуінің біреуімен айқас болатынын дәлелдеңдер.

64. Дұрыс *DABC* тетраэдрі берілген, оның қыры *a*-ға тең. *K* нүктесі – *BD* қырының ортасы. *ABC* үшбұрышының *BM* медианасына *BN* : *BM* = 1 : 3 болатындай *N* нүктесі белгіленген. *CK* мен *DN* кесінділері айқас түзулерде жататынын және тең болатынын дәлелдеңдер.

4. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы

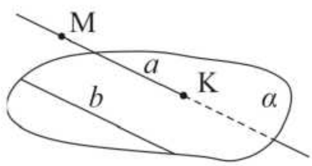
Тақырыпты оқу барысында:

• жазықтыққа параллель түзудің, түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісін, параллель түзу мен жазықтықтың қасиеттерін білесіңдер;

• түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісін дәлелдейсіңдер, оны және параллель түзу мен жазықтықтың қасиеттерін есептер шығаруда қолданасыңдар.

Кеңістіктегі түзу мен жазықтықтың өзара орналасуының екі жағдайы бар: 1) егер түзудің әртүрлі екі нүктесі жазықтыққа тиісті болса, *түзу жазықтықта жатады*; 2) егер түзу мен жазықтықтың бір ғана ортақ нүктесі бар болса, *түзу мен жазықтық қиылысады*. Кеңістіктегі түзу мен жазықтықтың өзара орналасуының үшінші жағдайы да болуы мүмкін.

Теорема. **Кеңістікте ортақ нүктесі болмайтын түзу мен жазықтық бар болады.**



60-сурет

Дәлелдеуі. α жазықтығы берілген болсын. Онда жатпайтын M нүктесін белгілейік.

α жазықтығында кез келген b түзуін жүргізейік. M нүктесі арқылы b түзуіне параллель a түзуін жүргіземіз. a түзуі мен α жазықтығының b түзуінде жатпайтын ортақ K нүктесі бар деп болжайық (60-сурет).

Сонда a мен b айқас түзулер болады (айқас түзулердің белгісі бойынша). Сонда a мен b түзулері бір уақытта параллель және айқас деген қайшылық пайда болды. Демек, a түзуі мен α жазықтығының ортақ нүктесі жоқ, яғни қиылыспайды. Теорема дәлелденді.

Түзу мен жазықтықтың ортақ нүктесі болмаса, олар параллель деп аталады. Параллель a түзуі мен α жазықтығы былай белгіленеді: $a \parallel \alpha$ (немесе $\alpha \parallel a$).

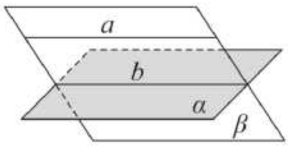
Теорема (*түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі*). **Егер жазықтықта жатпайтын түзу онда жататын қайсыбір түзуге параллель болса, онда ол түзу осы жазықтыққа параллель болады.**

Дәлелдеуі. α жазықтығы мен онда жататын b түзуі және b түзуіне параллель, α жазықтығында жатпайтын a түзуі берілген болсын. a түзуі α жазықтығын K нүктесінде қияды деп жорық (60-сурет). a мен b түзулері параллель болғандықтан, b түзуі K нүктесінен өте алмайды. Сонда айқас түзулердің белгісі бойынша a мен b – айқас түзулер. Бірақ теореманың шарты бойынша олар – параллель түзулер. Шыққан қайшылық жоруымыздың дұрыс еместігін көрсетеді. Демек, a түзуі мен α жазықтығы қиылыс пайды, яғни олар параллель.

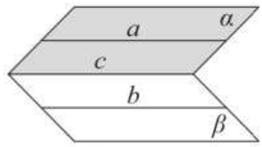
Салдары. **Жазықтықта жатпайтын нүкте арқылы жазықтықк параллель шексіз көп түзу жүргізуге болады.** Өздігінен дәлелдеңдер.

Теорема. **Егер жазықтық басқа жазықтыққа параллель түзу ар қылы өтсе және сол жазықтықты қиса, онда жазықтықтардың қиь лысу сызығы берілген түзуге параллель болады.**

Дәлелдеуі. β жазықтығы α жазықтығына параллель a түзуі арқыл өтіп, α жазықтығын b түзуі бойымен қиятын болсын (61-сурет). a мен b тү зулері бір β жазықтығында жатады және қиылыспайды (a түзуі b түзуіме қиылыспайды, егер олар өзара қиылысса, онда α жазықтығын да қиып өте еді), демек, $b \parallel a$.



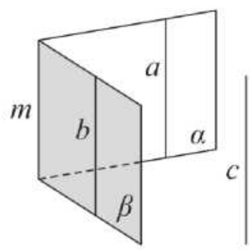
61-сурет



62-сурет

Салдары. **Егер екі түзу параллель болса және олардың әрқайсы сы арқылы жазықтық өтіп, олар қиылысса, онда жазықтықтарды қиылысу сызығы осы түзулердің әрқайсысына параллель болады** 62-суретте берілгені: $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ және $\alpha \cap \beta = c$, демек, $c \parallel a$ және $c \parallel$

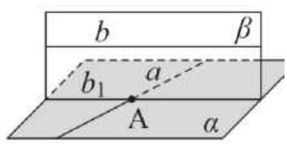
Теорема. **Егер түзу қиылысатын екі жазықтықтың әрқайсысына параллель болса, онда ол жазықтықтардың қиылысу сызығына да параллель болады.**



63-сурет

Дәлелдеуі. $c \parallel \alpha$, $c \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = m$ болсын (63-сурет). $c \parallel m$ болатынын дәлелдейік. α мен β жазықтықтарында сәйкесінше жатқан a мен b түзулерінің әрқайсысы c түзуіне параллель. Сонда $a \parallel b$ және $m \parallel a$, $m \parallel b$, демек, $m \parallel c$.

Теорема. **Айқас екі түзудің біреуі арқылы екінші түзуге параллель бір ғана жазықтық жүргізуге болады.**

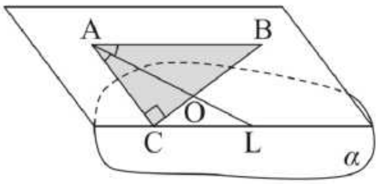


64-сурет

Дәлелдеуі. a мен b айқас түзулері берілген болсын. a түзуінен кез келген A нүктесін алып, ол арқылы b түзуіне параллель b_1 түзуін жүргізейік (64-сурет). a және b түзулері арқылы α жазықтығын жүргізейік. Түзу мен жазықтықтың парал

a және b_1 түзулері арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады. Теорема дәлелденді.

1 - е с е п. Тікбұрышты ABC үшбұрышы берілген, оның BC катеті 8 см-ге, ал AB гипотенузасы 10 см-ге тең. C нүктесі арқылы AB түзуіне параллель α жазықтығы жүргізілген. A бұрышының биссектрисасы осы жазықтықты L нүктесінде қияды. CL қашықтығын табыңдар.

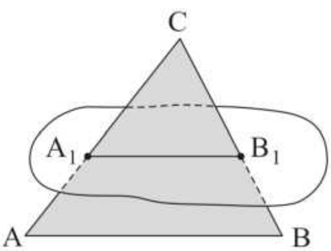


65-сурет

Ш е ш у і. ABC жазықтығы α жазықтығына параллель AB түзуі арқылы өтіп, α жазықтығын қиятын болғандықтан, жазықтықтардың CL қиылысу сызығы AB түзуіне параллель болады, яғни $AB \parallel CL$. Сонда AOB мен LOC үшбұрыштары ұқсас (65-сурет) және $\frac{AB}{BO} = \frac{CL}{CO}$ болады, бұдан $CL = \frac{AB \cdot CO}{BO}$. Пифагор теоремасы бойынша $AC = 6$ см. Үшбұрыш биссектрисасының қасиеті бойынша: $\frac{AB}{AC} = \frac{BO}{CO}$, $\frac{10}{6} = \frac{BO}{8 - BO}$. Бұдан $BO = 5$ см, $CO = 3$ см, сонда $CL = \frac{10 \cdot 3}{5} = 6$ (см).

Ж а у а б ы. 6 см.

2 - е с е п. ΔABC берілген. AB түзуіне параллель жазықтық осы үшбұрыштың AC қабырғасын A_1, BC қабырғасын B_1 нүктесінде қиып өтеді. Егер $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$ болса, A_1B_1 кесіндісінің ұзындығын табу керек.



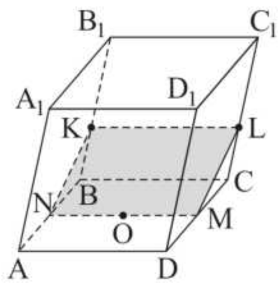
66-сурет

Ш е ш у і. A_1B_1 түзуі AB түзуіне параллель (66-сурет). ABC жазықтығында ABC мен A_1B_1C үшбұрыштары ұқсас. Сонда $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C}{AC}$, бұдан $\frac{A_1B_1}{b} = \frac{c}{a+c}$, $A_1B_1 = \frac{bc}{a+c}$.

Дененің (мысалы, параллелепипедтің немесе пирамиданың) *қиюшы жазықтығы* деп екі жағында осы дененің нүктелері бар жазықтық аталады. Дене мен қиюшы жазықтықтың барлық ортақ нүктелері дененің осы жазықтықпен *қимасы* деп аталады. Қиюшы жазықтық параллелепипедтің немесе пирамиданың жақтарында іздер – кесінділер қалдырады. Сондықтан бұл көпжақтардың қималары – қабырғалары осы кесінділер болатын көпбұрыштар.

3 - е с е п. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің BB_1, CC_1 қырларында, сәйкесінше, K, L нүктелері белгіленген, әрі KL мен BC кесінділері параллель, O – $ABCD$ жағы диагональдарының қиылысу нүктесі. Параллелепипедтің KOL жазықтығымен қимасын салыңдар және бұл қиманың параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

Ш е ш у і. Есептің шарты бойынша $KL \parallel BC$, демек, $KL \parallel (ABC)$. Сонда KOL жазықтығы $ABCD$ жағы жазықтығын KL-ге параллель түзу бойымен қияды. Осы жағының жазықтығына O нүктесі арқылы BC-ға параллель NM түзуін жүргіземіз, мұндағы N және M – осы түзудің, сәйкесінше, AB және CD қырларымен қиылысу нүктелері (67-сурет). KN және LM – KOL жазықтығының AA_1B_1B және DD_1C_1C жақтарымен қиылысу сызықтары. Сонда $NKLM$ төртбұрышы – ізделінді қима. $KL \parallel NM$ және $KL = NM$ болғандықтан (неге екенін түсіндіріңдер), $NKLM$ параллелограмм болады.



67-сурет

СҰРАҚТАР

1. Жазықтыққа параллель түзудің анықтамасын тұжырымдаңдар.
2. Түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісін тұжырымдаңдар және дәлелдеңдер.
3. Параллель түзу мен жазықтық туралы қандай қасиеттерді білесіңдер? Оларды тұжырымдап, сызбада кескіндеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

65. а) Егер түзу жазықтыққа параллель болса, онда ол жазықтықта жатқан кез келген түзуге параллель болады деген тұжырым дұрыс па?

ә) Жазықтыққа параллель түзу мен жазықтықта жататын түзулер өзара қалай орналасуы мүмкін екенін зерттеңдер.

66. а) Параллелограмның тек бір қабырғасы жазықтықта жататыны белгілі болса, қалған қабырғалары осы жазықтыққа қатысты қалай орналасқанын зерттеңдер.

ә) ΔABC мен α жазықтығы берілген, $AC \subset \alpha$, $B \notin \alpha$. AB мен BC қабырғаларының орталары арқылы өтетін түзу α жазықтығына қатысты қалай орналасқан?

б) Түзу үшбұрыш медианаларының біріне параллель. Бұл түзу үшбұрыш жатқан жазықтыққа қатысты қалай орналасқан?

67. ABC үшбұрышының AB қабырғасына параллель жазықтық оның AC мен BC қабырғаларын, сәйкесінше, M және K нүктелерінде қияды. Егер: а) $MK = 5$ см, $MC = MA$; ә) $MK = a$, $CK : KB = 1 : 3$ болса, AB кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

68. ABC үшбұрышының AB қабырғасының ортасы арқылы AC түзуіне параллель болатын және одан ауданы 7 м^2-ге тең үшбұрыш қиятын жазықтық жүргізілген. ABC үшбұрышының ауданын табыңдар.

69. Қиылысатын α, β жазықтықтары мен оларға тиісті емес A нүктесі берілген. A нүктесінен өтіп: а) берілген жазықтықтарға параллель; ә) α жазықтығына параллель, ал β жазықтығын қиятын түзу жүргізіңдер.

70. Егер: а) түзу жазықтыққа параллель болса, онда сол жазықтықта берілген түзуге параллель түзу табылатынын; ә) параллель түзулердің бірі жазықтықты қиса, онда екіншісі де оны қиятынын дәлелдеңдер.

71. a түзуі мен α жазықтығы параллель. a түзуінің A мен B нүктелері арқылы α жазықтығын, сәйкесінше, A_1 мен B_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. Егер: а) $AA_1 = 13$ см, $AB = 14$ см, $AB_1 = 15$ см; ә) $AB_1 = A_1B = 10$ см, $AA_1 = 6$ см; б) $\angle BA_1B_1 = \angle AA_1B = 30°$, $AA_1 = 12$ см болса, A_1ABB_1 төртбұрышының ауданын табыңдар.

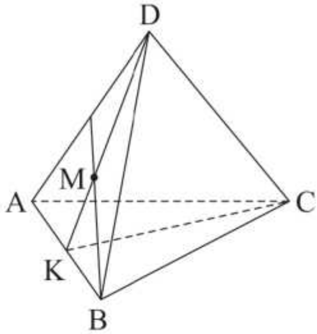
72. $ABCD$ трапециясының AD үлкен табаны α жазықтығында жатыр, ал оның B төбесі бұл жазықтыққа тиісті емес. B төбесінен CD қабырғасын $CM : MD = 3 : 2$ болатындай M нүктесінде, ал α жазықтығын K нүктесінде қиятын сәуле жүргізілген. Егер трапецияның кіші табаны b-ға тең болса, DK қашықтығын табыңдар.

73. а) $ABCD$ трапециясының AB мен CD бүйір қабырғаларын олардың ортасынан қиятын жазықтық трапецияның табандарына параллель болатынын дәлелдеңдер.

ә) $ABCD$ трапециясының бүйір қабырғасының ортасындағы M нүктесінен трапецияның AD табанына параллель жазықтық жүргізілген. Егер $BC : AD = 9 : 5$ қатынасындай болса, сол жазықтықтың трапецияны бөлетін бөліктері аудандарының қатынасын табыңдар.

74. $DABC$ тетраэдрі берілген, оның табаны – қабырғасы a-ға тең дұрыс ΔABC (68-сурет). ABD үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесі арқылы ABC жазықтығына параллель өтіп, DC қабырғасын қиятын

m түзуін жүргізіңдер. Осы m түзуінің тетраэдрмен қиылысуынан шыққан кесіндінің ұзындығын табыңдар.



68-сурет

75. $SABCD$ пирамидасы және оның SB қырында F нүктесі берілген. а) CDF жазықтығы SAB жағы жазықтығын қай түзудің бойымен қияды? ә) Пирамиданың CDF жазықтығымен қимасын салыңдар. б) Алынған қиманың трапеция болатынын дәлелдеңдер.

76. Қос-қостан қиылысатын α, β, γ жазықтықтары берілген: $\alpha \cap \beta = c$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$, әрі $a \parallel b$. $c \parallel \gamma$ болатынын дәлелдеңдер.

77. $DABC$ дұрыс тетраэдрінің ABD үшбұрышының AB-ға параллель орта сызығы мен BC қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Ол қиманың ромб болатынын дәлелдеңдер.

78. $DABC$ пирамидасының табаны – қабырғасы 10 см-ге тең дұрыс ΔABC, ал бүйір қырлары 13 см-ден. M, N, K нүктелері, сәйкесінше, AB, BD, DC қырларының орталары. Пирамиданың MNK жазықтығымен қимасын салып, оның периметрін табыңдар.

B деңгейі

79. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Егер $K \in AA_1$ және $AK = KA_1$, $P \in DD_1$ болса және DP DD_1-дің 25 %-ын құраса, $M \in CC_1$ және $CM = 0{,}25 \cdot CC_1$ болса, кубтың K, P, M нүктелерінен өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар.

80. $DABC$ тетраэдрі берілген. K және L нүктелері, сәйкесінше, DB және DA қырларына тиісті, M – ABC жағының ішкі нүктесі. Егер: а) $KL \parallel AB$; ә) $KL \nparallel AB$ болса, тетраэдрдің KLM жазықтығымен қимасын салыңдар.

81. Қыры a-ға тең $PABC$ дұрыс тетраэдрі берілген. а) Тетраэдрдің PA бүйір қырының ортасы арқылы өтіп, ABC үшбұрышының AH биіктігіне және BC қабырғасына параллель жазықтықпен қимасын салыңдар. ә) Сол қиманың ауданын табыңдар.

C деңгейі

82. A, B, C, D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. K нүктесі – DA кесіндісінің ортасы, ал F нүктесі DB кесіндісінде жатыр және $BF : FD = 3 : 2$. K нүктесінен өтіп, AF және AC түзулеріне параллель жазықтық салыңдар.

83. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген, M нүктесі BC қырында жатыр және $BM : MC = 1 : 2$. Кубтың M нүктесінен өтіп, BD мен BC_1 түзулеріне параллель қимасын салыңдар. Егер $AB = 6$ дм болса, осы қиманың ауданын табыңдар.

84. Барлық қырлары a-ға тең төртбұрышты $SABCD$ пирамидасы берілген. M және N нүктелері, сәйкесінше, SA және SB қырларының орталары, O нүктесі – SDC үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесі. Пирамиданың MNO жазықтығымен қимасын салып, оның периметрін табыңдар.

5. Жазықтықтардың параллельдігі

Тақырыпты оқу барысында:

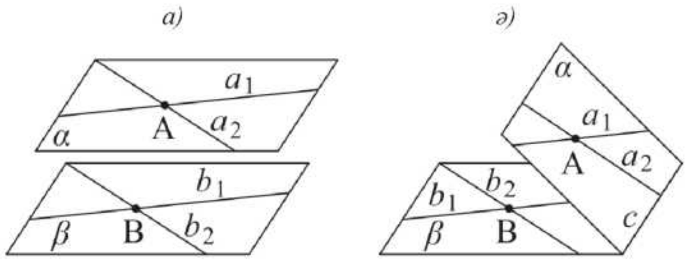
• параллель жазықтықтардың анықтамасын, жазықтықтардың параллельдік белгісін, параллель жазықтықтардың қасиеттерін білесіңдер;

• жазықтықтардың параллельдік белгісін дәлелдейсіңдер, оны және параллель жазықтықтардың қасиеттерін есептер шығаруда қолданасыңдар.

Ортақ нүктелері болмайтын екі жазықтық параллель жазықтықтар деп аталады.

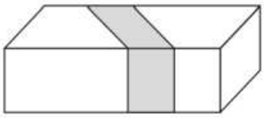
Теорема (*екі жазықтықтың параллельдігінің белгісі*). **Егер бір жазықтықтың қиылысатын екі түзуі екінші жазықтықтың екі түзуіне параллель болса, онда бұл жазықтықтар параллель болады.**

Дәлелдеуі. Қиылысатын a_1, a_2 түзулері α жазықтығында жатсын, $a_1 \cap a_2 = A$, ал b_1, b_2 түзулері β жазықтығында жатсын, $b_1 \cap b_2 = B$ және $a_1 \parallel b_1$, $a_2 \parallel b_2$ (69, *а*-сурет). $\alpha \parallel \beta$ болатынын дәлелдейік.



69-сурет

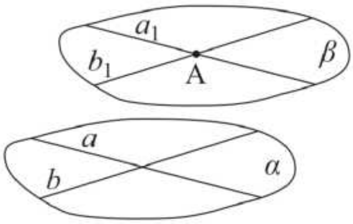
α мен β жазықтықтарының ортақ нүктесі бар делік, сонда олар c түзуі бойымен қиылысатын болады (69, *ә*-сурет). Шарт бойынша α мен β жазықтықтары a_1 және b_1 параллель түзулері арқылы өтеді, демек, $c \parallel a_1$. Одан басқа, α мен β жазықтықтары a_2 мен b_2 параллель түзулері арқылы өтеді, демек, $c \parallel a_2$. α мен β жазықтықтарының ортақ нүктесі бар деп жоруымыздан A нүктесі арқылы c түзуіне параллель a_1 мен a_2 түзулері өтетін болып шықты, бұл мүмкін емес, себебі түзуде жатпайтын нүкте арқылы оған параллель бір ғана түзу жүргізуге болады. Демек, α мен β жазықтықтарының ортақ нүктесі жоқ, яғни олар параллель. Теорема дәлелденді.



70-сурет

Жазықтықтардың параллельдік белгісін өмірде де пайдаланады, мысалы, ағаш кесегін кескенде кесу жазықтықтары параллель болуы үшін, оның сыбайлас жақтарына параллель кесінділер сызып алады (70-сурет).

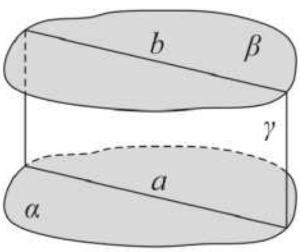
Теорема. **Жазықтықта жатпайтын нүкте арқылы оған параллель бір ғана жазықтық жүргізуге болады.**



71-сурет

Дәлелдеуі. α жазықтығы мен онда жатпайтын A нүктесі берілген болсын. α жазықтығында қиылысатын a және b түзулерін жүргіземіз, ал A нүктесі арқылы a және b түзулеріне сәйкесінше параллель a_1 және b_1 түзулерін жүргіземіз (71-сурет). a_1 және b_1 түзулері арқылы өтетін β жазықтығын саламыз. β жазықтығы A нүктесі арқылы өтеді және екі жазықтықтың параллельдік белгісі бойынша α жазықтығына параллель болады.

β жазықтығының жалғыз болатынын дәлелдейік. A нүктесі арқылы α жазықтығына параллель басқа γ жазықтығы өтеді делік. Сонда a түзуі мен A нүктесі арқылы өтетін жазықтық β мен γ жазықтықтарын A нүктесінен өтіп, a түзуіне параллель a_1 және a_2 түзулері бойымен қияды. A нүктесі арқылы a түзуіне параллель тек бір түзу жүргізуге болатындықтан, a_1 мен a_2 түзулері беттеседі. A нүктесі мен b түзуі арқылы өтетін жазықтық β мен γ жазықтықтарын A нүктесі арқылы өтіп, b түзуіне параллель b_1 мен b_2 түзулері бойымен қияды. Демек, b_1 мен b_2 беттеседі. Сонда қиылысатын a_1 және b_1 түзулері арқылы β және γ жазықтықтары өтеді, бұлай болуы мүмкін емес. Демек, β және γ жазықтықтары беттеседі, яғни A нүктесінен өтіп, α жазықтығына параллель жазықтық жалғыз болады.



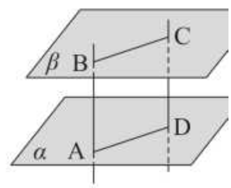
72-сурет

Теорема. **Егер екі параллель жазықтықты үшінші жазықтық қиса, онда олардың қиылысу сызықтары параллель болады.**

Дәлелдеуі. $\alpha \parallel \beta, \gamma \cap \alpha = a, \gamma \cap \beta = b$ болсын (72-сурет). $a \parallel b$ болатынын дәлелдейік. a мен b түзулері параллель болмайды деп жорикық. a мен b түзулері бір γ жазықтығында жатқандықтан, олар қайсыбір нүктеде қиылысады. a түзуі

α жазықтығында, ал b түзуі β жазықтығында жатқандықтан, a мен b т
лерінің қиылысуынан α мен β жазықтықтарының қиылысатыны шыға
бұл шартқа қайшы келеді. Демек, жоруымыз дұрыс емес, яғни $a \parallel b$.

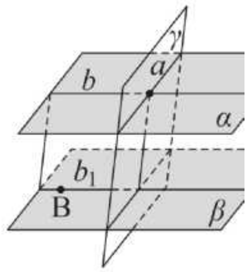
Салдары. **Екі параллель жазықтықтың арасындағы параллель кесінділер тең болады** (73-сурет).



73-сурет

Теорема. **Егер жазықтық екі параллель жазықтықтың бірін қиса, онда ол екіншісін де қияды.**

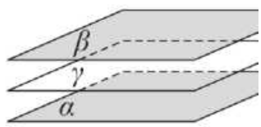
Дәлелдеуі. γ жазықтығы α жазықтығын қайсыбір a түзуі бойымен қиятын болсын (74-сурет). γ жазықтығы β жазықтығын да қиятынын дәлелдейік. α жазықтығында a түзуін қиятын b түзуін жүргіземіз. β жазықтығына қайсыбір B нүктесін белгілейік. b түзуі мен онда жатпайтын B нүктесі арқылы өтетін жазықтық β жазықтығын b түзуіне параллель b_1 түзуі бойымен қияды. b түзуі γ жазықтығын қиятындықтан, оған параллель b_1 түзуі де γ жазықтығын қияды. Демек, b_1 түзуі жататын β жазықтығы γ жазықтығын қияды. Теор
дәлелденді.



74-сурет

Теорема. **Егер екі жазықтықтың әрқайсысы үшінші жазықты
параллель болса, онда екі жазықтық параллель болады.**

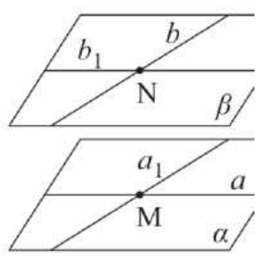
Дәлелдеуі. γ жазықтығына параллель α мен β жазықтықтары берілген болсын (75-сурет). $\alpha \parallel \beta$ болатынын дәлелдейік. β жазықтығы α жазықтығын қияды делік, сонда β жазықтығы γ жазықтығын да қияды. Олай болуы мүмкін емес, себебі $\beta \parallel \gamma$. Демек, α мен β жазықтықтары параллель. Теорема дәлелденді.



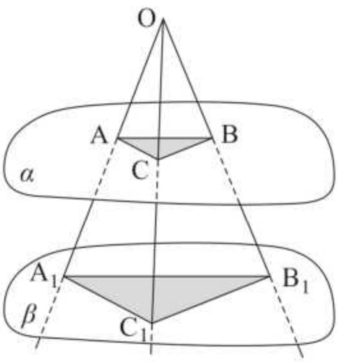
75-сурет

1-есеп. Екі айқас түзудің әрқайсысы арқылы өзара параллель жазықтықтар жүргізу керек.

Шешуі. a түзуінің қандай да бір M нүктесі арқылы (76-сурет) b түзуіне параллель a_1 түзуін жүргіземіз. a және a_1 түзулері арқылы α жазық-



жүргіземіз. Жазықтықтардың параллельдік белгісі бойынша α мен β жазықтықтары параллель. Ондай жазықтықтар жұбы жалғыз.

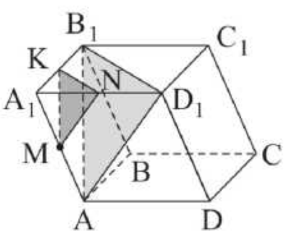


77-сурет

2 - е с е п. O нүктесінен шығатын үш сәуле α жазықтығын A, B, C нүктелерінде, ал оған параллель β жазықтығын, сәйкесінше, A_1, B_1, C_1 нүктелерінде қияды (77-сурет). ABC мен $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының ұқсас екенін дәлелдеу керек.

Ш е ш у і. Параллель α және β жазықтықтарының берілген сәулелердің жұптары арқылы өтетін үшінші жазықтықпен қиылысу сызықтары параллель болатындықтан, $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$. Демек, $\Delta OAB \sim \Delta OA_1B_1$, $\Delta OBC \sim \Delta OB_1C_1$, $\Delta OCA \sim \Delta OC_1A_1$ (қай белгі бойынша екенін түсіндіріңдер). Үшбұрыштардың ұқсастығынан $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}$, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{OC}{OC_1}$, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{OC}{OC_1} = \frac{OA}{OA_1}$ шығады. Осы пропорциялардан $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ аламыз, демек, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

3 - е с е п. M нүктесі – $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің AA_1 қырының ортасы. Егер AB_1D_1 үшбұрышының ауданы 0,5 м^2 болса, параллелепипедтің M нүктесінен өтетін және AB_1D_1 жазықтығына параллель жазықтықпен қимасының ауданын табу керек.



78-сурет

Ш е ш у і. Параллелепипедтің M нүктесінен өтетін және AB_1D_1 жазықтығына параллель жазықтықпен қимасын салайық. Сол жазықтықтардың параллелепипедтің жақтарымен қиылысу сызықтары параллель болады, сондықтан $MN \parallel AD_1$ және $MK \parallel AB_1$ түзулерін саламыз (78-сурет). Жазықтықтардың параллельдік белгісі бойынша $(MNK) \parallel (AB_1D_1)$. MNK үшбұрышы – ізделінді қима. $\frac{MN}{AD_1} = \frac{MK}{AB_1} = \frac{KN}{B_1D_1} = \frac{1}{2}$ болғандықтан (неге екенін түсіндіріңдер), $\Delta MKN \sim \Delta AB_1D_1$, ұқсастық коэффициенті $k = \frac{1}{2}$. Ұқсас үшбұрыштардың аудандарының қатынасы ұқсастық коэффициентінің квадратына тең. Демек, $\frac{S_{\Delta MKN}}{S_{\Delta AB_1D_1}} = \frac{1}{4}$, бұдан $S_{\Delta MKN} = \frac{1}{4} \cdot 0,5 = 0,125$ (м^2).

Ж а у а б ы. 0,125 м^2.

СҰРАҚТАР

1. Параллель жазықтықтардың анықтамасын тұжырымдаңдар.
2. Екі жазықтықтың параллельдік белгісін тұжырымдаңдар және дәлелдеңдер.
3. Параллель жазықтықтардың қандай қасиеттерін білесіңдер?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

85. Егер қиылысатын a мен b түзулері α жазықтығында жатса және $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$ болса, α мен β жазықтықтары өзара қалай орналасқан?

86. а) Қабырға сағатының сағаттық және минуттық тілдері неліктен параллель жазықтықтарда қозғалатынын түсіндіріңдер.

ә) Екі бөрене көлденең орналастырылған. Олардың үстіне төселген жазық жабынды көлденең орналасқан ба? Жауабын түсіндіріңдер.

87. Параллель жазықтықтардың бірінде жүргізілген кез келген түзу екінші жазықтыққа параллель болатынын дәлелдеңдер.

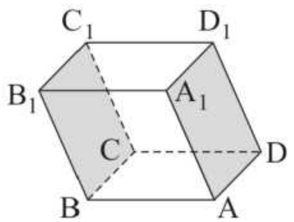
88. Үшбұрыштың екі қабырғасы α жазықтығына параллель. Үшбұрыштың үшінші қабырғасы осы жазықтыққа параллель бола ма?

89. Егер бір жазықтықта жататын екі түзу екінші жазықтықта жататын екі түзуге параллель болса, онда бұл жазықтықтар параллель болады деген тұжырым дұрыс па?

90. а) $DABC$ пирамидасы мен оның DA, DB және DC қырларына сәйкесінше тиісті K, P және M нүктелері берілген және KP түзуі AB түзуіне, ал PM түзуі BC түзуіне параллель. ABC мен KPM жазықтықтарының ортақ нүктесі болмайтынын дәлелдеңдер.

ә) $DABC$ тетраэдрінің AB, AC және AD қырларының орталары арқылы жазықтық жүргізілген. Осы жазықтық BCD жазықтығына параллель болатынын дәлелдеңдер.

91. Параллелепипедтің әрбір қарама-қарсы екі жағының параллель болатынын дәлелдеңдер (79-сурет).



79-сурет

92. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің A төбесінен шығатын үш қырының орталары арқылы жазықтық жүргізілген (79-сурет). Осы жазықтық BDA_1 жазықтығына параллель болатынын дәлелдеңдер.

93. а) Екі параллель жазықтық берілген. Олардың біреуінің A мен B нүктелері арқылы екінші жазықтықты C мен D нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. Егер $AB = \sqrt{2}$ см болса, CD кесіндісінің ұзындығын табыңдар.
ә) α жазықтығының M нүктесінен оған параллель β жазықтығына $MN = 13$ см және $MK = 10$ см болатын кесінділер жүргізілген. N нүктесінен MK кесіндісіне параллель болатын және α жазықтығын E нүктесінде қиятын түзу жүргізілген. Егер $ME = 5$ см болса, KE кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

94. Үшбұрыштың бір қабырғасы α жазықтығында жатыр, ал оған параллель β жазықтығы үшбұрыштың басқа екі қабырғасын қияды. β жазықтығы берілген үшбұрыштан оған ұқсас үшбұрыш қиятынын дәлелдеңдер.

95. α, β параллель жазықтықтары мен олардың ешқайсысында жатпайтын O нүктесі берілген. AO түзуі α жазықтығын A нүктесінде, ал β жазықтығын C нүктесінде қияды. BO түзуі α жазықтығын B нүктесінде, ал β жазықтығын D нүктесінде қияды. $AO = 5$ см, $CO = 6$ см, $AB = 17$ см болса, DC қашықтығын табыңдар.

96. Параллель α мен β жазықтықтары α жазықтығын A және B нүктелерінде, ал β жазықтығын, сәйкесінше, A_1 және B_1 нүктелерінде қиятын екі параллель түзумен қиылған. O – A_1ABB_1 төртбұрышы диагональдарының қиылысу нүктесі. Егер: а) $AB_1 = A_1B = 16$ см, $\angle A_1OB_1 = 30°$; ә) $AB_1 = 16$ см, $A_1B = 12$ см, $\angle A_1OB_1 = 90°$ болса, A_1ABB_1 төртбұрышының түрін анықтап, ауданын табыңдар.

97. Параллель жазықтықтарда жататын екі ұқсас көпбұрыштың аудандарының қатынасы 100 : 81. Осы көпбұрыштардың периметрлерінің қатынасын табыңдар.

98. а) $DABC$ дұрыс тетраэдрінде M нүктесі BD қырында жатыр және $DM:MB = 3:2$. M нүктесінен өтіп, тетраэдрдің DAC жағына параллель жазықтықпен қимасының ауданы 8 см^2 болса, DAC жағының ауданын табыңдар.

ә) P мен K нүктелері $DABC$ тетраэдрінің DB қырын тең үш бөлікке бөледі. Тетраэдрдің P және K нүктелерінен өтетін, ABC жағына параллель қималарын салыңдар. Егер ABC үшбұрышының ауданы S-ке тең болса, салынған қималардың аудандарын табыңдар.

B деңгейі

99. α және β жазықтықтары параллель. Осы жазықтықтарда жатпайтын O нүктесі арқылы α жазықтығын A, B, C нүктелерінде, ал β жазықтығын, сәйкесінше, A_1, B_1, C_1 нүктелерінде қиятын, әрі $OA < OA_1$ болатын үш сәуле жүргізілген. Егер $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $OA = m$, $AA_1 = n$ болса, $A_1B_1C_1$ үшбұрышының периметрін табыңдар.

100. $PABC$ пирамидасының табаны болатын ΔABC-ның қабырғалары a, $0{,}5a$, $0{,}9a$. Пирамиданың табанына параллель болатын және оның PB бүйір қырын P төбесінен бастап есептегенде $2:3$ қатынасына бөлетін қимасын салыңдар. Сол қиманың ауданын табыңдар.

101. A, B, C, D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. K нүктесі AD кесіндісінде жатыр, $AK:KD = 3:2$, ал P нүктесі – BD кесіндісінің ортасы. P нүктесінен өтетін және BCK жазықтығына параллель жазықтық салыңдар.

102. M нүктесі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің DC қырында жатыр. Параллелепипедтің M нүктесінен өтіп, BA_1D_1 жазықтығына параллель жазықтықпен қимасын салыңдар.

C деңгейі

103. Табаны шаршы болатын $SABCD$ пирамидасының барлық қырлары a-ға тең. M және N нүктелері, сәйкесінше, оның AB және SC қырларының орталары. а) Пирамиданың N нүктесінен өтіп, SDM жазықтығына параллель жазықтықпен қимасын салыңдар. ә) Егер $\angle SDM = 45°$ болса, шыққан қиманың ауданын табыңдар.

104. $DABC$ тетраэдрінде M нүктесі – AD қырының ортасы. DD_1 кесіндісі – ABD жағының медианасы, E және P нүктелері, сәйкесінше, BC және DD_1 кесінділерінің орталары. K нүктесі DC қырына тиісті, әрі $DK : KC = 4 : 1$. Тетраэдрдің E нүктесінен өтіп, MPK жазықтығына параллель жазықтықпен қимасын салыңдар. Салынған қиманың – көпбұрыштың түрін анықтаңдар.

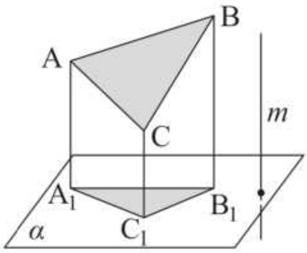
6. Фигураларды кескіндеу. Параллель проекциялау және оның қасиеттері

Тақырыпты оқу барысында:

• параллель проекциялау ұғымын және оның қасиеттерін білесіңдер;

• параллель проекциялаудың қасиеттерін жазық және кеңістіктік фигураларды кескіндегенде қолданасыңдар.

Кеңістіктегі фигураларды жазықтықта кескіндеу, әдетте, параллель проекциялау арқылы іске асырылады. Фигураларды кескіндеудің бұл тәсілі келесідей орындалады. α жазықтығын қиятын кез келген m түзуін алып, фигураның қайсыбір A нүктесінен m түзуіне параллель түзу жүргіземіз. Осы түзудің α жазықтығымен қиылысатын A_1 нүктесі A нүктесінің кескіні деп аталады және m түзуі проекциялау бағытын көрсетеді дейді. m түзуіне параллель түзулердің әрқайсысы бірдей проекциялау бағытын көрсетеді. Осы түзулер m түзуімен бірге *проекциялаушы түзулер* деп аталады. Фигураның әрбір нүктесінің кескінін салып, оның өзінің кескінін аламыз (80-сурет). Параллель проекциялаудың негізгі қасиеттерін қарастырайық.



80-сурет

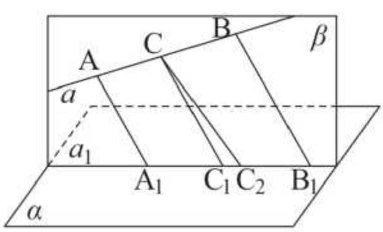
Т е о р е м а. **Параллель проекциялағанда проекциялау бағытын беретін түзуге параллель емес түзулер және онда жататын кесінділер үшін мына қасиеттер орындалады:**

1) түзудің проекциясы – түзу, ал кесіндінің проекциясы – кесінді;

2) параллель түзулердің проекциялары параллель болады немесе беттеседі;

3) бір түзуде немесе параллель түзулерде жататын кесінділердің проекция ұзындықтарының қатынасы сол кесінділердің өздерінің ұзындықтарының қатынасына тең.

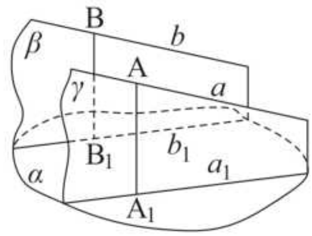
Д ә л е л д е у і. 1) A_1 және B_1 нүктелері a түзуіне тиісті A және B нүктелерінің α жазықтығындағы проекциялары болсын (81-сурет). AA_1 және BB_1 параллель түзулері арқылы α жазықтығын a_1 түзуі бойымен қиятын β жазықтығын жүргіземіз. a түзуінен кез келген C нүктесін алып, оны α жазықтығына проекциялаймыз.



81-сурет

Оның проекциясы болатын C_1 нүктесі a_1 түзуіне тиісті емес делік, сонда CC_1 түзуі β жазықтығында жатпайды. β жазықтығында C нүктесі арқылы AA_1 түзуіне параллель CC_2 түзуін жүргіземіз. Бұл түзу a_1 түзуін C_2 нүктесінде қияды. CC_1 және CC_2 түзулері AA_1 түзуіне параллель болғандықтан, параллель түзулер туралы аксиомаға қайшы тұжырым алдық: C нүктесі арқылы бір түзуге параллель екі түзу жүргізілген. Ендеше біздің жорамалымыз дұрыс емес, сондықтан a түзуі нүктелерінің проекциялары a_1 түзуінің нүктелері болады, яғни a_1 түзуі a түзуінің α жазықтығындағы проекциясы болады.

2) a_1 және b_1 түзулері a және b параллель түзулерінің α жазықтығына түскен проекциялары болсын; β мен γ – түзулердің проекциялары жатқан жазықтықтар. Бұл жазықтықтар жазықтықтардың параллельдік белгісі бойынша ($a \parallel b$ және $AA_1 \parallel BB_1$) параллель болады (82-сурет). Демек, a_1 мен b_1 түзулері де параллель, себебі егер екі параллель жазықтықты үшінші жазықтық қиса, онда олардың қиылысу сызықтары параллель болады.

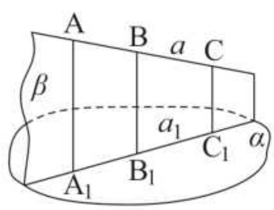


82-сурет

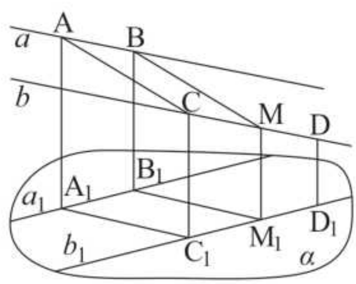
Параллель түзулердің проекциялары беттесетін жағдайды өздігінен қарастырыңдар.

2-қасиетке кері тұжырымның ақиқат болмайтынын айта кетелік (айқас түзулер де параллель түзулер жұбына проекциялануы мүмкін).

3) a мен a_1 түзулері бір β жазықтығында жатыр (83-сурет) және қиылысуы немесе параллель болуы мүмкін. Проекциялаушы түзуге параллель AA_1, BB_1, CC_1 түзулері өзара параллель және a_1 түзуінен пропорционал кесінділер қияды (Фалес теоремасы бойынша), яғни $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$.



83-сурет



84-сурет

Енді кесінділер a және b параллель түзулерінде жатсын (84-сурет). Ол түзулер бір жазықтықта жатады. AC түзуін және оған параллель BM түзуін жүргізейік, сонда $ABMC$ параллелограмы шығады. Осы параллелограмның α жазықтығындағы проекциясы $A_1B_1M_1C_1$ параллелограмы болады (параллель түзулердің проекциялары беттеспеген жағдайда). Сонда шығатыны: $AB = CM$, $A_1B_1 = C_1M_1$ және $CM : CD = C_1M_1 : C_1D_1$. Демек, $AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1$. Теорема дәлелденді.

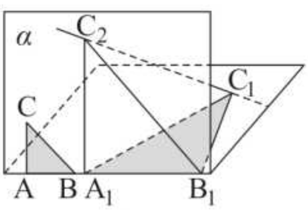
Параллель проекциялаудың қасиеттерінен шығатыны:

- кесіндінің ортасы оның проекциясының ортасына кескінделеді;
- үшбұрыш медианаларының проекциялары оны проекциялағанда шыққан үшбұрыштың медианалары болады;
- центрлік-симметриялы фигураның параллель проекциясы да центрлік-симметриялы фигура болады.

«Жазық фигураның кескіні», «тетраэдрдің кескіні», «кубтың кескіні» т.с.с. ұғымдарды біз бірнеше рет қолданған болатынбыз. Енді стереометриядағы фигураның кескіні ұғымының анықтамасын нақтылайық. Фигураның кескіні деп оның қайсыбір жазықтыққа түскен параллель проекциясын ғана атау жөнсіз болар еді. Бұл жағдайда, мысалы, дәптерге немесе тақтаға өлшемдері 10 м, 10 м, 20 м болатын тікбұрышты параллелепипедті кескіндей алмас едік.

Стереометрияда берілген фигураның (түпнұсқасының) **кескіні деп берілген фигураның қайсыбір жазықтыққа түскен параллель проекциясына ұқсас кез келген фигураны атайды.** Фигураның кескіні көрнекі болуы және кескінделетін фигура туралы дұрыс көрініс беруі керек. Кейбір фигураларды кескіндеу тәсілдерін қарастырайық.

Үшбұрыш. Әрбір үшбұрышты проекциясында кез келген түрдегі үшбұрыш шығатындай етіп параллель проекциялауға болады. Шынымен де, әртүрлі ABC мен $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары берілген болсын. $\Delta A_1B_1C_1$ ΔABC-ның проекциясы болуы мүмкін екенін көрсетейік.

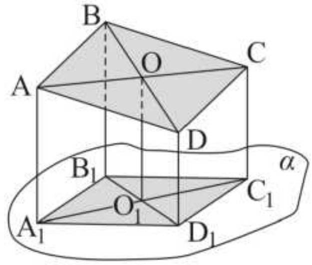


85-сурет

A_1B_1 түзуі арқылы $\Delta A_1B_1C_1$-дің жазықтығын қиятын α жазықтығын жүргізейік. Осы жазықтыққа ΔABC-ға ұқсас $\Delta A_1B_1C_2$-ні саламыз (85-сурет). Сонда $\Delta A_1B_1C_1$-ді C_1C_2 түзуі бағытымен α жазықтығына проекциялағанда ΔABC-ға ұқсас $\Delta A_1B_1C_2$ шығады. Сондықтан берілген ΔABC-ның кескіні $\Delta A_1B_1C_1$ болуы да мүмкін.

Сондай-ақ, кез келген үшбұрышты теңқабырғалы үшбұрыш шығатындай етіп проекциялауға немесе керісінше, теңқабырғалы үшбұрыштың кескіні кез келген үшбұрыш болатындай етіп проекциялауға болады.

Параллелограмм. Параллелограмның кескіні **кез келген параллелограмм** болуы мүмкін, себебі параллель проекциялауда параллель түзулердің кескіні параллель түзулер болады (86-сурет).

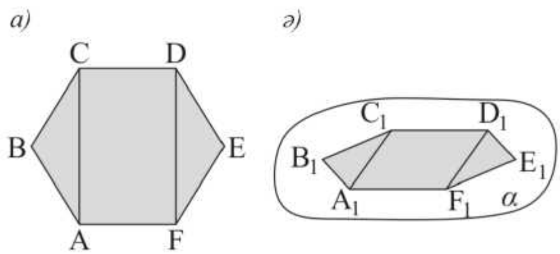


86-сурет

Кейбір жағдайда шаршы мен ромбының кескіндері де кез келген түрдегі параллелограмм болуы мүмкін.

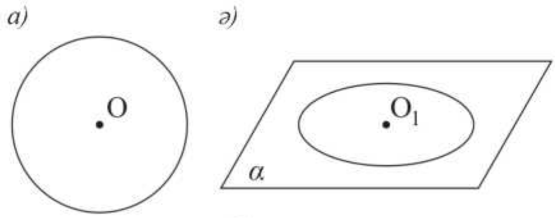
Трапеция. Трапецияның кескіні – табан ұзындықтарының қатынасы түпнұсқа трапецияның табан ұзындықтарының қатынасына тең трапеция, себебі параллель проекциялау кезінде параллель түзулердің кескіні параллель түзулер болады және оларда жататын кесінділердің ұзындықтарының қатынасы сақталады.

Дұрыс алтыбұрыш. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышы берілген болсын (87, *а*-сурет). Оның AC мен DF диагональдарын жүргізіп, $ACDF$ тіктөртбұрышы мен екі тең үшбұрыш аламыз және $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ болады. Сонда 87, *ә*-суретте көрсетілген кескін шығады. $ACDF$ тіктөртбұрышының кескіні болатын қайсыбір $A_1C_1D_1F_1$ параллелограмын және ΔABC-ның кескіні болатын қайсыбір $\Delta A_1B_1C_1$-ді саламыз. Содан кейін $D_1E_1 \parallel A_1B_1$, $F_1E_1 \parallel B_1C_1$ кесінділерін саламыз. Сонда шыққан $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыбұрышы дұрыс $ABCDEF$ алтыбұрышының кескіні болады.



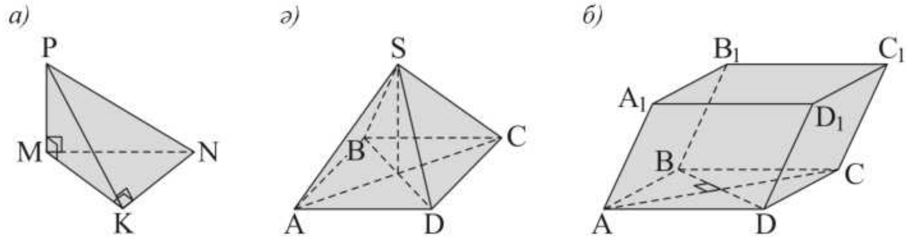
87-сурет

Шеңбер. Шеңбердің параллель проекциясы **эллипс** болады (88-сурет). Параллель проекциялаудың қасиеттерінен берілген шеңбердің O центрінің проекциясы эллипстің симметрия центрі болатыны шығады (88, *ә*-суреттегі O_1 нүктесі). Ол нүктені эллипстің центрі деп атайды. Эллипс деп жазықтықтың берілген екі нүктесінен қашықтықтарының қосындысы бірдей болатын нүктелер жиынынан тұратын фигура аталады.



88-сурет

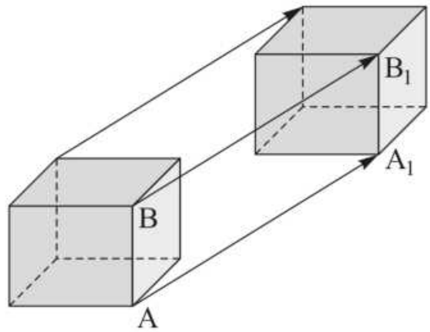
П и р а м и д а. Пирамида табанының кескіні параллель проекциялаудың қасиеттеріне сүйеніп салынады, ал төбесінің кескіні ретінде оның табанының кескініне тиісті емес кез келген нүкте алынады. Мысалы, 89, *а*-суретте барлық жақтары тікбұрышты үшбұрыш болатын тетраэдрдің кескіні, ал 89, *ә*-суретте табаны шаршы және барлық қырлары тең болатын төртбұрышты пирамиданың кескіні берілген.



89-сурет

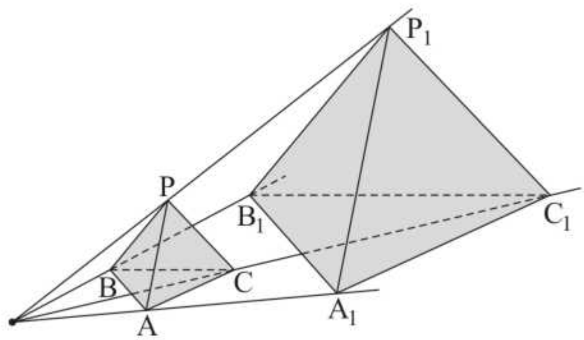
П а р а л л е л е п и п е д. Призманың бір табанының кескіні параллель проекциялаудың қасиеттеріне сүйене отырып салынады. Бүйір қырларын бірдей етіп салады, өйткені олар параллель және тең. Екінші табанын салып, параллелепипедтің кескінін аламыз. Мысалы, 89, *б*-суретте табаны ромб болатын параллелепипедтің кескіні берілген.

Кеңістіктегі фигуралардың теңдігі, ұқсастығы және фигураларды түрлендіру ұғымдары планиметрияда сияқты анықталатынын айта кетелік. *F фигурасының әрбір A және B нүктелерінің және F_1 фигурасының оларға сәйкестендірілген A_1 мен B_1 нүктелерінің арақашықтықтары өзгермей сақталатын түрлендіру қозғалыс (немесе орын ауыстыру) деп аталады.* **Қозғалыс арқылы беттестіруге болатын екі фигура тең фигуралар деп аталады**. Мысалы, белгілі бір бағытта берілген қашықтыққа көшіретін орын ауыстыруда, яғни параллель көшіру деп аталатын түрлендіруде куб оған тең кубқа бейнеленеді (90-сурет).



90-сурет

F фигурасының әрбір A және B нүктелері мен F_1 фигурасының оларға сәйкес A_1 және B_1 нүктелері үшін $A_1B_1 = k \cdot AB$, мұндағы $k > 0$, теңдігі орындалатын түрлендіруді ұқсастық түрлендіру деп атайды. Мұндағы *k оң саны ұқсастық коэффициенті* деп аталады. **Біреуін екіншісінен ұқсастық түрлендіру арқылы алуға болатын екі фигураны ұқсас фигуралар деп атайды**. Мысалы, 91-суретте $PABC$ және $P_1A_1B_1C_1$ ұқсас тетраэдрлері бейнеленген.



91-сурет

СҰРАҚТАР

1. Параллель проекциялау мен фигураның параллель проекциясы ұғымдарын түсіндіріңдер.
2. Параллель проекциялаудың негізгі қасиеттерін тұжырымдаңдар.
3. Стереометрияда фигураның кескіні не болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

105. Теңбүйірлі үшбұрыштың параллель проекциясы берілген. а) Үшбұрыштың медианаларының қиылысу нүктесінің; ә) үшбұрыштың орта сызығының; б) оның төбесіндегі сыртқы бұрышы биссектрисасының проекциясын салыңдар.

106. а) Тіктөртбұрыштың және оның екі симметрия осінің; ә) бір табаны екіншісінен екі есе үлкен теңбүйірлі трапецияның және оның симметрия осінің параллель проекциясын салыңдар.

107. а) Ромбының; ә) тіктөртбұрыштың кескіні үшін оның қандай қасиеттері сақталады?

108. Шаршының көршілес екі төбесінің және диагональдарының қиылысу нүктесінің проекциялары болатын, бір түзуде жатпайтын үш нүкте берілген. Осы шаршының проекциясын салыңдар.

109. Шеңбер мен оның AB диаметрінің параллель проекциясы берілген. AB-ға перпендикуляр CD диаметрінің проекциясын салыңдар.

110. Жазықтықта теңқабырғалы үшбұрыштың проекциясының кескіні қандай да бір үшбұрыш түрінде берілген. а) Осы үшбұрышқа сырттай сызылған; ә) осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер проекциясының кескінін салыңдар.

111. Диагональдары қиылысу нүктесімен 2 : 3 қатынасына бөлінетін трапеция берілген. Осы трапецияның қайсыбір жазықтыққа түскен параллель проекциясы $ABCD$ трапециясын береді, оның орта сызығы 9 см-ге тең. Осы трапецияның BC мен AD табандарын табыңдар.

112. $AB = 18$ см кесіндісінің оған параллель α жазықтығындағы проекциясы DC кесіндісін береді. M және N нүктелері BC кесіндісін тең үш бөлікке бөледі. AM және AN түзулері α жазықтығын, сәйкесінше, K және L нүктелерінде қияды. KL кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

113. Қыры a-ға тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. P және K нүктелері – AB және AA_1 қырларының орталары. PK кесіндісінің $A_1B_1C_1D_1$ жағының жазықтығына AD_1 бағытымен түсірілген P_1K_1 проекциясын салыңдар. PK және P_1K_1 түзулерінің E қиылысу нүктесі A_1B_1 түзуіне тиісті болатынын дәлелдеп, A_1E кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

B деңгейі

114. ABC_1D_1 трапециясы – $ABCD$ трапециясының AB түзуі арқылы өтетін жазықтықтағы проекциясы. Егер: а) $AB \parallel C_1D_1$; ә) $BC_1 \parallel AD_1$ болса, осы трапециялардың орта сызықтары тең бола ма?

115. Параллель проекциялағанда: а) үшбұрыштың; ә) трапецияның; б) тетраэдрдің; в) параллелепипедтің кескіні қандай фигура болуы мүмкін? Проекциялаушы түзулердің берілген фигура жақтарының біріне немесе жазық фигура жататын жазықтыққа параллель болатын және оларға параллель болмайтын екі жағдайды зерттеңдер.

116. Бір жазықтықта жатпайтын $ABCD$ шаршысы мен $AMKD$ ромбысы берілген. B нүктесі – M нүктесінің ABC жазықтығына түскен проекциясы. Егер $AB = 5$ см, $\angle MAB = 120°$ болса, $BMKC$ төртбұрышының периметрін табыңдар.

C деңгейі

117. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің BB_1 қыры арқылы оның $ABCD$ табанын үш тең шамалы бөлікке бөлетін екі жазықтық жүргізіңдер.

118. Төртбұрышты пирамиданың бүйір қыры тең төрт бөлікке бөлінген. Бөлу нүктелері арқылы табан жазықтығына параллель үш жазықтық жүргізілген. Сонда пайда болған қималардың ортаңғысының ауданы 1 м^2-ге тең. Қалған қималардың және пирамида табанының ауданын табыңдар.

7. «Стереометрия аксиомалары. Түзулер мен жазықтықтардың параллельдігі» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

119. Берілгені: $\alpha \cap \beta = b$, $A \in \alpha$, $B \in b$, $A \neq B$. AB түзуі α мен β жазықтықтарына қатысты қалай орналасқан?

120. а) Екі буынды сынық сызықты; ә) шеңберді қамтитын тек бір жазықтық жүргізуге болатынын дәлелдеңдер.

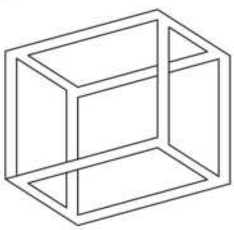
121. Параллель a және b түзулері мен оларда жатпайтын C нүктесі берілген. Егер C нүктесі арқылы: а) берілген түзулердің тек біреуін; ә) берілген түзулердің екеуін де қиятын түзу жүргізуге болатыны белгілі болса, C нүктесі a және b түзулерімен бір жазықтықта жата ма екенін зерттеңдер.

122. а) Бір жазықтықта жататын; ә) бір жазықтықта жатпайтын қос-қостан қиылысатын төрт түзуді бейнелеңдер.

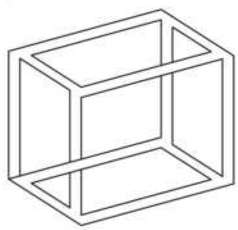
123. $ABCD$ параллелограмы – ромбының параллель проекциясы. а) Ромб қабырғасының ортасынан оның диагоналіне жүргізілген перпендикулярдың; ә) егер сүйір бұрышы 60°-қа тең болса, оның доғал бұрышының төбесінен жүргізілген биіктігінің проекциясын салыңдар.

124. 92, *а*, *ә*-суреттердің қайсысында параллелепипедтің қаңқасы бейнеленген? Екінші суретте көрсетілген фигураның моделін жасауға бола ма?

а)



ә)



92-сурет

125. а) O нүктесі – $ABCD$ тіктөртбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі, M нүктесі ΔABC-ның жазықтығында жатпайды. DM түзуі мен B және O нүктелері арқылы жазықтық жүргізуге бола ма екенін зерттеңдер.

ә) O нүктесі – теңбүйірлі ΔABC-ға іштей сызылған шеңбердің центрі, P нүктесі – AC табанының ортасы, E нүктесі ABC жазықтығына тиіс-

ті емес. BE түзуі мен P және O нүктелері арқылы жазықтық ж
бола ма екенін зерттеңдер.

126. $ABCD$ мен $ADEF$ параллелограмдары бір жазықтықта жа
M және N нүктелері, сәйкесінше, AB мен AF кесінділерінің о
а) MN түзуі ABF жазықтығында жататынын дәлелдеңдер. ә) (
мен DEF жазықтығының; б) EN түзуі мен BCD жазықтығының
су нүктесін салыңдар.

127. $SABCD$ пирамидасының AB мен AD қырларында, сәйкесінше,
N нүктелері белгіленген. MN түзуі мен: а) SBC; ә) SDC жазықт
қиылысу нүктесін салыңдар. б) SMN және SBC; в) SMN және
зықтықтары қай түзу бойымен қиылысады?

128. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген. а) AA
DA_1B_1; ә) AA_1C_1 және B_1C_1D; б) AA_1C_1 және BB_1D_1 жазықтықт
түзу бойымен қиылысады?

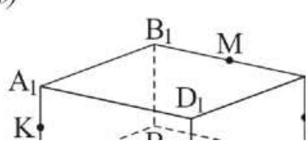
129. Тетраэдр табанының екі қырының орталары мен табанына ти
төбесі арқылы өтетін жазықтық табанының үшінші қырына па
болатынын дәлелдеңдер. Егер тетраэдрдің әрбір қырының ұз
10 см-ге тең болса, тетраэдрдің осы жазықтықпен қимасының
табыңдар.

130. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді және AB, AA_1 ж
қырларының сәйкесінше орталары болатын M, K және P н
берілген. Параллелепипедтің M, K, P нүктелері арқыль
жазықтықпен қимасын салыңдар. Егер $AB = 8$ см, $BC = 7$ см, A
болса, қиманың периметрін есептеңдер.

131. Пекиндегі Су спорты түрлерінің ұлттық орталығы ғимаратын
қырының орталарында құстар отырды (93, *а*-сурет). Олар M
нүктелерінің (93, *ә*-сурет) кез келген үшеуі арқылы өтетін жаз
отыр ма екенін зерттеңдер.

а)

ә)



132. Барлық қырлары a-ға тең $SABCD$ пирамидасы берілген. Пирамиданың табанының центрінен, PD қырының ортасынан өтетін және PAB жағының жазықтығына параллель қимасын салыңдар. Осы қиманың периметрін табыңдар.

133. $DABC$ тетраэдрінің DA, DB және DC қырларынан $DM : MA = DK : KB = DP : PC = 3 : 2$ болатындай, сәйкесінше, M, K және P нүктелері алынған. MKP және ABC жазықтықтары параллель болатынын дәлелдеңдер. Егер ABC үшбұрышының ауданы 9 см^2-ге тең болса, ΔMKP-ның ауданын табыңдар.

В деңгейі

134. Кеңістікте әрбір екеуінің арақашықтығы 1 м-ге тең A, B, C нүктелері берілген. Кеңістіктегі K нүктесі A мен B нүктелерінен 0,5 м қашықтықта орналасқан. K мен C нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

135. Сымнан төрт буыны бар тұйық сынық сызық жасалды. Оның жазық фигура болатынын не болмайтынын жіп орамы арқылы қалай тексеруге болады?

136. BC мен AD табандары болатын теңбүйірлі $ABCD$ трапециясының параллель проекциясы – теңбүйірлі емес трапеция. Осы трапецияның: а) симметрия осінің; ә) BH биіктігінің проекциясын салыңдар.

137. AA_1B_1B шаршысы мен ABC дұрыс үшбұрышы бір жазықтықта жатпайды. Шаршының AB_1 диагоналіне $AD : DB_1 = 4 : 3$ болатындай D нүктесі белгіленген. A_1D түзуі ABC жазықтығын O нүктесінде қияды. Егер $AB = 12$ см болса, AO қашықтығын табыңдар.

138. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген және B_1D мен DC_1 кесіндісіне $B_1M : MD = 3 : 1$, $C_1N = ND$ болатындай M, N нүктелері белгіленген. а) MN түзуі мен $A_1B_1C_1$ жазықтығының; ә) B_1N түзуі мен ADC жазықтығының қиылысу нүктелерін салыңдар.

139. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы мен оның AA_1 қырында M нүктесі берілген. а) MBC және B_1C_1C; ә) MBC және AA_1C жазықтықтары қай түзу бойымен қиылысады?

140. $DABC$ дұрыс үшбұрышты пирамидасының табан қабырғасы 20 см-ге тең. Пирамиданың барлық бүйір қырлары тең. M нүктесі – DC қырының ортасы және $AM = 13$ см. DB қырының ортасынан AM кесіндісіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

141. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген, M, N, K нүктелері, сәйкесінше, A_1D, DC_1, A_1C_1 кесінділерінің орталары. а) $MN \parallel (ABC)$; ә) $KM \parallel (AA_1B_1)$ болатынын дәлелдеңдер. Кубтың KMN жазықтығымен қимасын салыңдар.

С деңгейі

142. Теңбүйірлі ΔABC-ның AB қабырғасына параллель жазықтықтағы параллель проекциясы – теңқабырғалы $\Delta A_1B_1C_1$. ΔABC-ның AE биссектрисасының A_1E_1 проекциясын салыңдар. Егер $AB = 8$ см, $AC = CB = 13\frac{1}{3}$ см болса, A_1E_1 кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

143. $DABC$ дұрыс тетраэдрі берілген. M, N, K, L нүктелері, сәйкесінше, AD, CD, AC және BD қырларының орталары. а) KL түзуі мен BMN жазықтығының қиылысу нүктесі – O-ны салыңдар. ә) $KO : OL$ қатынасын табыңдар.

144. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB_1C жазықтығымен қимасын салыңдар. Кубтың қыры 30 см-ге тең болса, осы қиманы тең шамалы екі бөлікке бөлетін ең қысқа кесіндінің ұзындығын табыңдар.

145. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген және A_1B_1 қырының ортасына M нүктесі, ал DD_1 қырына $DN : ND_1 = 1 : 5$ қатынасындай болатын N нүктесі белгіленген. а) Әрқайсысы B_1D диагоналіне параллель болатын MP және NK түзулерін салыңдар, мұндағы P мен K – осы түзулердің параллелепипед жақтарымен қиылысу нүктелері. ә) $B_1D = 30$ см болса, MP мен NK кесінділерінің ұзындықтарын табыңдар. б) MP мен NK түзулері бір жазықтықта жата ма? Егер жатса, онда берілген параллелепипедтің осы жазықтықпен қимасын салыңдар.

146. $DABC$ тетраэдрі мен оның BD мен DC қырларының ортасында, сәйкесінше, M және N нүктелері берілген. а) Тетраэдрдің AML және BNK жазықтықтарымен өзара параллель екі қимасын салыңдар. ә) L және K нүктелері тетраэдрдің қырын қандай қатынаста бөледі? Шыққан қималар аудандарының қатынасын табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

Дұрыс жауабын таңдаңдар

147. Екі қыры параллель кесінділермен бейнеленген тетраэдр берілген. Шындығында осы қырлары параллель бола ма?

1) Иә;
2) жоқ;
3) иә, егер сол қырлары тең болса;
4) иә, егер дұрыс тетраэдр болса;
5) тетраэдрдің түріне байланысты.

148. Бір жазықтықта жатпайтын A, B, C, D нүктелері берілген. M, N, P, K нүктелері, сәйкесінше, AB, BC, CD, AD кесінділерінің орталары. Дұрыс тұжырымды көрсетіңдер: а) $MN \parallel KP$; ә) $KM \parallel PN$; б) KN мен PM түзулері қиылысады; в) KN мен PM – айқас түзулер.

1) а, ә;
2) б;
3) в;
4) а, ә, в;
5) а, ә, б.

149. Бір жазықтықта жатпайтын екі түзудің әрқайсысы қайсыбір жазықтыққа параллель болса, онда олар:

1) қиылысатын;
2) айқас;
3) параллель;
4) қиылысатын немесе айқас;
5) параллель немесе айқас түзулер болады.

150. Егер a, b, c түзулері α жазықтығында жатса, әрі олардың әрқайсысы β жазықтығына параллель болса, онда α мен β жазықтықтары:

1) параллель;
2) параллель емес;
3) қиылысады;
4) қиылысады немесе параллель болады;
5) беттеседі.

151. Қыры 2 см-ге тең куб берілген. Кубтың оның бір төбесінен шығатын қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданы:

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см^2;
2) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ см^2;
3) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ см^2;
4) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ см^2;
5) $\sqrt{3}$ см^2.

152. Теңбүйірлі трапецияның параллель проекциясы: а) теңбүйірлі трапеция; ә) кесінді; б) параллелограмм; в) тікбұрышты трапеция; г) теңбүйірлі емес трапеция болады. Дұрыс тұжырымды көрсетіңдер:

1) а;
2) а, ә;
3) а, ә, б;
4) г;
5) а, ә, в, г.

Жаттығуларды орындаңдар

153. Төрт нүкте бір жазықтыққа тиісті емес. Олардың үшеуі бір түзуде жатуы мүмкін бе?

154. D нүктесі ABC жазықтығында жатпайды, ал C нүктесі AB түзуінде жатпайды. Суретін салыңдар. AB мен DC түзулері қиылыса ма? Жауабын түсіндіріңдер.

155. BC мен AD табандары болатын $ABCD$ трапециясының C мен D төбелері α жазықтығында жатыр. AB түзуі α жазықтығын E нүктесінде қияды. Егер $AD = 18$ см, $BC = 6$ см, $DC = 8$ см болса, DE кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

156. $DABC$ пирамидасы мен оның AD қырында M нүктесі және DC қырында K нүктесі берілген (MK түзуі AC-ға параллель емес). а) MK түзуі мен ABC жазықтығының қиылысу нүктесін; ә) MKB мен ABC жазықтықтарының қиылысу сызығын салыңдар.

157. α жазықтығын қимайтын AB кесіндісі берілген. A, B нүктелері мен AB кесіндісінің M ортасы арқылы α жазықтығын, сәйкесінше, A_1, B_1, M_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. $AA_1 = 11{,}3$ дм, $BB_1 = 4{,}7$ дм болса, MM_1 кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

158. α мен β жазықтықтары параллель. α жазықтығында жататын ΔABC-ның төбелері арқылы β жазықтығын, сәйкесінше, A_1, B_1 және C_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. Егер $AB = 12$ см, $AC = BC = 10$ см болса, $A_1B_1C_1$ үшбұрышының C_1H биіктігін табыңдар.

159. $ABCD$ тетраэдрінің BCD жағы медианаларының қиылысу нүктесі арқылы ABC жағына параллель жазықтық жүргізілген. Тетраэдрдің осы жазықтықпен қимасы ΔABC-ға ұқсас үшбұрыш болатынын дәлелдеңдер. Қима мен ΔABC аудандарының қатынасын табыңдар.

160. Қыры a-ға тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. M, N, K, L, сәйкесінше, AA_1B_1B, BB_1C_1C, $ABCD$, DD_1C_1C жақтары диагональдарының қиылысу нүктелері. MN және KL кесінділері тең бе? Жауабын негіздеңдер.

161. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AA_1, BC, CC_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Егер кубтың қыры a-ға тең болса, қиманың периметрін табыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Геометрияның дамуына осыдан 2300 жыл бұрын өмір сүрген ежелгі гректің атақты математигі Евклидтің «Негіздер» деген атаумен біріктірілген 13 кітабы үлкен әсер етті. Евклидтік геометрияда стереометрия элементтері бірінші кітабында кездескенмен, соңғы үш кітабында кеңінен баяндалған. Мысалы, бесінші сөйлем (анықтама) былай тұжырымдалған: «Бет дегеннің тек ұзындығы мен ені бар».

Евклид

әл-Фараби

Д. Гильберт

Геометрияның дамуы ғасырлар бойы жалғасты. Мысалы, көрнекті ғалым әл-Фараби (872–950) Евклидтің «Негіздеріне» түсініктемені және «Геометриялық салулар бойынша нұсқаулық» атты еңбегін жазды.

Геометрияның ғылым ретінде дамуы тек XIX ғасырдың соңында кемеліне жетті және неміс математигі Д. Гильберттің (1862–1943) 1899 жылы жарияланған «Геометрия негіздері» атты ғылыми еңбегінде көрініс тапты. Ол геометрия мен басқа да ғылымдарды логикалық түрде негіздеу үшін қолдануға болатын алты негізгі ұғым мен аксиомалардың бес тобын (барлығы 20 аксиома) енгізді. Қазіргі кезде мектеп геометриясында қолданылып жүрген аксиомалар Гильберттің аксиомалар жүйесінде бар.

Бельведер

Ғаламторды пайдаланып:

1) Евклидтің өмірбаяны туралы мағлұматтар мен оның бесінші постулат деп атаған, параллель түзулер теориясының негізі болған аксиомасының тұжырымын;

2) Д. Гильберттің өмірбаяны туралы мағлұматтар мен оның үшөлшемді евклид кеңістігінің анықтамасын;

3) әл-Фарабидің өмірбаяны мен ғылыми мұрасы туралы ақпаратты;

4) голланд суретшісі М. Эшердің (1898–1972) «Бельведер» суретіндегі мүмкін емес нысандардың сипаттамасын табыңдар.

II. ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫҒЫ. КЕҢІСТІКТЕГІ БҰРЫШТАР МЕН АРАҚАШЫҚТЫҚТАР

Бөлімді оқу нәтижесінде

- кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрыш анықтамасын;
- жазықтыққа жүргізілген перпендикуляр мен көлбеудің, оның проекциясының анықтамаларын және олардың қасиеттерін;
- түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық анықтамасын, белгісін және қасиеттерін;
- үш перпендикуляр туралы теореманы;
- түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыштың, екіжақты бұрыштың, екі жазықтықтың арасындағы бұрыштың, перпендикуляр жазықтықтардың анықтамаларын;
- екі жазықтықтың перпендикулярлық белгісін;
- нүктеден жазықтыққа дейінгі, параллель жазықтықтардың, айқас түзулердің арақашықтықтарының анықтамаларын;
- тікбұрышты параллелепипедтің анықтамасын және қасиеттерін;
- жазық фигураның жазықтықтағы ортогональ проекциясы ұғымын және оның ауданының формуласын **білу керек.**

- кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрышты таба алу;
- перпендикулярды, көлбеуді және оның проекциясын, айқас түзулердің ортақ перпендикулярын кескіндей алу;
- түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі мен қасиеттерін есеп шығаруда қолдана алу;
- үш перпендикуляр туралы теореманы есеп шығаруда қолдана алу;
- екі түзудің арасындағы бұрышты, түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты, екіжақты бұрышты, екі жазықтық арасындағы бұрышты кескіндей алу және оның шамасын таба алу;
- жазықтықтардың перпендикулярлық белгісін есеп шығаруда қолдана алу;
- нүктеден жазықтыққа дейінгі, параллель жазықтықтар, айқас түзулер арасындағы арақашықтықтарды таба алу;
- тікбұрышты параллелепипедтің қасиеттерін дәлелдей алу және оларды есептер шығаруда қолдана алу;
- жазық фигураның жазықтықтағы ортогональ проекциясы ауданының формуласын қорытып шығару және оны есептер шығаруда қолдана **алу керек.**

8. Кеңістіктегі түзулердің арасындағы бұрыш. Екі түзудің перпендикулярлығы

Тақырыпты оқу барысында:

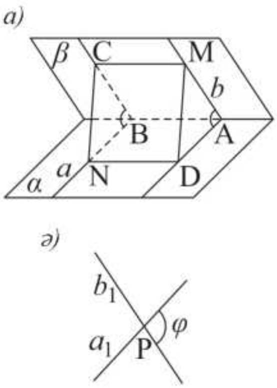
• кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрыштың анықтамасын білесіңдер;

• перпендикуляр түзулердің анықтамасы мен қасиеттерін білесіңдер және оларды есептер шығаруда қолданасыңдар;

• айқас түзулердің арасындағы бұрышты кескіндейсіңдер және табасыңдар.

Кез келген қиылысатын екі түзу бір жазықтықта жатады және төрт жазыңқы емес бұрыш құрайды. Егер олардың біреуі белгілі болса, онда қалған үшеуін де табуға болады. Осы бұрыштардың ішіндегі шамасы қалған үшеуінің кез келгенінің шамасынан аспайтын біреуі қиылысатын түзулердің арасындағы бұрыш деп аталады. Параллель немесе беттесетін түзулердің арасындағы бұрыш $0°$-қа тең деп алынады.

1 - е с е п. Б е р і л г е н і. a және b – екі айқас түзу, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $b \cap \alpha = A$, $a \cap \beta = B$. α жазықтығына $AD \parallel a$ түзуі, β жазықтығына $BC \parallel b$ түзуі салынған (94, *а*-сурет). Қиылысатын CB мен a түзулерінің арасындағы бұрыш, сәйкесінше, оларға параллель қиылысатын b мен AD түзулерінің арасындағы бұрышқа тең болатынын дәлелдеу керек.



94-сурет

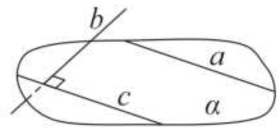
Ш е ш у і. b түзуіне BC кесіндісіне тең AM кесіндісін, ал a түзуіне AD кесіндісіне тең BN кесіндісін салайық. Сонда $ABCM$ және $ABND$ төртбұрыштары параллелограмдар болады (параллелограмның белгісі бойынша). Параллелограмның қасиеті бойынша CM мен ND кесінділері тең және қос-қостан параллель. Демек, $NCMD$ төртбұрышы – CN және MD кесінділері тең болатын параллелограмм. Сонда NCB мен DMA үшбұрыштары тең болады (үшбұрыштар теңдігінің үшінші белгісі бойынша). Демек, CBN мен MAD бұрыштары тең.

Айқас түзулердің арасындағы бұрыш деп оларға сәйкесінше параллель болатын кез келген қиылысатын екі түзудің арасындағы бұрышты атайды. a мен b түзулерінің арасындағы бұрышты $\angle(a; b)$ деп, ал AB мен CD түзулерінің арасындағы бұрышты $\angle(AB; CD)$

деп белгілейді. Айқас түзулердің арасындағы бұрыштың шамасы кеңістіктегі қиылысатын түзулер жүргізілетін нүктені таңдап алуға байланысты болмайды (бұл 1-есептің шешуінен шығады). Кеңістікте кез келген P нүктесін алып, a және b түзулеріне сәйкесінше параллель болатын a_1 және b_1 түзулерін жүргізуге болады (94-сурет). Егер $0° < \varphi \leq 90°$ болса, онда $\angle(a; b) = \angle(a; CB) = \angle(AD; b) = \angle(a_1; b_1) = \varphi$ немесе $90° < \varphi < 180°$ болса, $\angle(a; b) = 180° - \varphi$ болады. Есеп шығарғанда осы кез келген нүктені көбіне айқас түзулердің бірінен алады.

Егер кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрыш 90°-қа тең болса, олар перпендикуляр түзулер деп аталады.

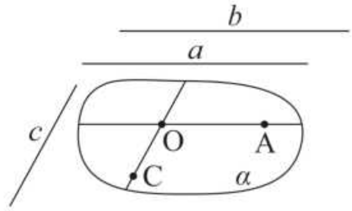
Перпендикуляр түзулер қиылысуы немесе айқас болуы мүмкін (95-сурет).



95-сурет

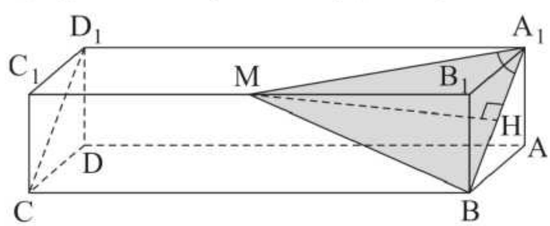
Т е о р е м а. **Егер екі параллель түзудің бірі қайсыбір түзуге перпендикуляр болса, онда екінші түзу де осы түзуге перпендикуляр болады.**

Д ә л е л д е у і. Түзулер $a \parallel b$ және $a \perp c$ болсын. $b \perp c$ болатынын дәлелдейік. Ол үшін кеңістіктен еркімізше алынған және берілген түзулерде жатпайтын O нүктесін алып, a және c түзулеріне сәйкесінше параллель болатын OA және OC түзулерін жүргіземіз (96-сурет). $a \perp c$ болғандықтан, $\angle(a; c) = \angle(OA; OC) = 90°$ болады. Теореманың шарты бойынша $b \parallel a$, ал салуымыз бойынша $a \parallel OA$, сондықтан $b \parallel OA$. Бұдан: $\angle(b; c) = \angle(OA; OC) = 90°$. Демек, b түзуі c түзуіне перпендикуляр. Теорема дәлелденді.



96-сурет

2 - е с е п. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AD = 4$ дм, $DC = DD_1 = 1$ дм. A_1M және D_1C түзулерінің арасындағы бұрыштың тангенсін табу керек, мұндағы M нүктесі – B_1C_1-дің ортасы.



97-сурет

Ш е ш у і. A_1M және D_1C – айқас түзулер (айқас түзулердің белгісі бойынша). Сонда $\angle(A_1M; D_1C) = \angle(A_1M; A_1B) = \angle MA_1B$, себебі CD_1A_1B параллелограмының қарама-қарсы қабырғалары болғандықтан, $A_1B \parallel D_1C$ (97-сурет) және MA_1B – сүйір бұрыш.

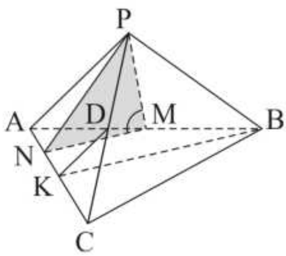
Пифагор теоремасы бойынша: $A_1B^2 = AB^2 + AA_1^2 = 2$, $A_1B = \sqrt{2}$ дм;

$A_1M^2 = A_1B_1^2 + B_1M^2 = 5$, $A_1M = \sqrt{5}$ дм.

ΔA_1MB теңбүйірлі, себебі $A_1M = MB$ (тең тікбұрышты A_1B_1M және BB_1M үшбұрыштарының гипотенузалары). Оның MH биіктігін жүргіземіз, сонда $MH^2 = A_1M^2 - A_1H^2 = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$, $MH = \frac{3}{\sqrt{2}}$, ал $\operatorname{tg}\angle MA_1B = \frac{MH}{A_1H} =$

$= \frac{3}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 3.$

Ж а у а б ы. 3.



98-сурет

3 - е с е п. $PABC$ пирамидасы берілген, оның барлық бүйір қырлары 18 см-ге тең, ал табаны – қабырғасы 12 см-ге тең дұрыс ΔABC. M, D, K нүктелері, сәйкесінше, AB, PC, AC қырларының орталары. MP мен BK түзулерінің арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табу керек.

Ш е ш у і. MP мен BK – айқас түзулер (айқас түзулердің белгісі бойынша). ABC жазықтығына $MN \parallel BK$ саламыз (98-сурет). Сонда $\angle(MP; BK) = \angle(MP; MN)$, мұндағы N нүктесі – AK кесіндісінің ортасы. ΔPMN-нен косинустар теоремасы бойынша мынаны аламыз: $\cos\angle PMN = \frac{MN^2 + MP^2 - PN^2}{2 \cdot MN \cdot MP}$.

$MN = 0{,}5 \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (см), $MP = \sqrt{18^2 - 6^2} = \sqrt{12 \cdot 24} = 12\sqrt{2}$ (см).

PN кесіндісі ΔPKN-нің гипотенузасы болғандықтан, оның катеттері $PK = MP = 12\sqrt{2}$ см және $KN = \frac{1}{4}AC = 3$ см, бұдан $PN = \sqrt{9 + 288} = \sqrt{297}$ (см).

Сонда $\cos\angle PMN = \frac{27 + 288 - 297}{72\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{24} \approx 0{,}102$, ал $\angle PMN \approx 84°$.

Ж а у а б ы. $\approx 84°$.

СҰРАҚТАР

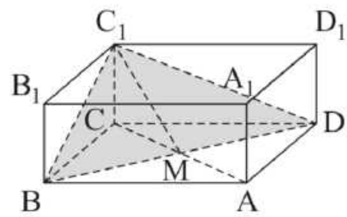
1. Кеңістіктегі: а) қиылысатын; ә) параллель; б) айқас екі түзудің арасындағы бұрыш қалай анықталады?

2. Кеңістіктегі қандай екі түзу перпендикуляр деп аталады?
3. Айқас түзулер перпендикуляр болуы мүмкін бе?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

162. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипеді берілген (99-сурет), оның табаны – $ABCD$ шаршысы, M – табан диагональдарының қиылысу нүктесі. BD мен C_1M түзулерінің перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

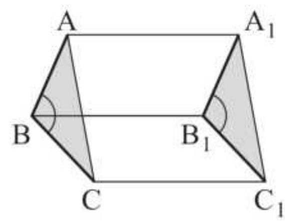


99-сурет

163. Кеңістікте берілген нүктеден өтіп, берілген түзуге перпендикуляр болатын неше түзу жүргізуге болатынын зерттеңдер.

164. Екі сыбайлас бұрыштың айырымы 70°-қа тең. Осындай бұрыштардың қабырғаларын қамтитын түзулердің арасындағы бұрыш неге тең?

165. 100-суретті пайдаланып, кеңістікте сәйкес қабырғалары параллель кез келген екі сүйір немесе доғал бұрыш тең болатынын дәлелдеңдер.



100-сурет

166. а) $DABC$ дұрыс тетраэдрі берілген, оның DAB үшбұрышының DL биссектрисасы жүргізілген. AB түзуіне параллель кез келген түзу DL түзуіне перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

ә) Барлық бүйір қырлары тең $PABCD$ пирамидасының табаны – $ABCD$ тіктөртбұрышы. P нүктесі мен тіктөртбұрыштың симметрия центрі болатын O нүктесі арқылы түзу жүргізілген. Сол түзуге параллель кез келген түзу BD түзуіне перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

167. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің табаны – $ABCD$ ромбысы. AD мен A_1B_1 түзулерінің арасындағы бұрыш 30°-қа тең болатыны белгілі. $A_1B_1C_1$ үшбұрышының бұрыштарын табыңдар.

168. Егер екі айқас түзудің біреуі берілген жазықтықта жатса, ал екіншісі оны қиып өтсе, олардың арасындағы бұрышты салыңдар.

169. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының көршілес жақтарының A_1C_1 мен D_1C диагональдарының арасындағы бұрышты табыңдар.

170. $ABCD$ параллелограмының жазықтығында жатпайтын MN түзуі оның DC қабырғасына параллель. Егер $\angle ABC = 115°$ болса: а) MN және BC; ә) MN және AB түзулерінің өзара орналасуын анықтаңдар.

171. $PABC$ пирамидасы берілген, оның табаны – қабырғасы 12 см-ге тең дұрыс ΔABC, ал барлық бүйір қырлары 18 см-ге тең. M, D, K нүктелері, сәйкесінше, AB, PC, AC қырларының орталары. MP мен KD түзулерінің арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

172. Қыры a-ға тең дұрыс $DABC$ тетраэдрі берілген. M нүктесі – AC қырының ортасы. DM және BC түзулерінің арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

В деңгейі

173. Әрбір қыры 14 см-ге тең $PABCD$ пирамидасы берілген, оның табаны – $ABCD$ шаршысы. M нүктесі – PC кесіндісінің ортасы, ал N нүктесі AC кесіндісін $AN : AC = 0{,}25$ қатынасына бөледі. MN кесіндісінің ұзындығын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

174. Әрқайсысы берілген жазықтықты қиятын екі айқас түзудің арасындағы бұрышты салыңдар.

175. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің табаны – қабырғасы 6 см-ге, ауданы 18 см^2-ге тең ромб. AC мен A_1B_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

С деңгейі

176. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, ондағы $AB = 6$ см, $AD = 8$ см, $BD = 12$ см. а) A_1B_1 және AD; ә) AD және B_1D_1 түзулерінің; б) ΔABD-ның AL биссектрисасы мен $\Delta A_1B_1C_1$-дің A_1M_1 медианасын қамтитын түзулердің арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

177. Қыры a-ға тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген, M нүктесі – C_1D_1 қырының ортасы, N нүктесі DD_1 қырына тиісті және $D_1N : ND = 1 : 3$. A_1M мен AN түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

9. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы

Тақырыпты оқу барысында:

- түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының анықтамасын, олардың қасиеттерін, түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісін білесіңдер;
- оларды есептер шығаруда қолданасыңдар;
- түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісін дәлелдей аласыңдар.

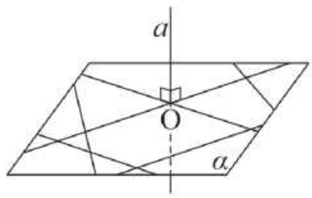
Жазықтықтағы кез келген түзуге перпендикуляр түзу жазықтыққа перпендикуляр түзу деп аталады.

a түзуі мен α жазықтығының перпендикулярлығы былай белгіленеді: $a \perp \alpha$. α жазықтығы a түзуіне перпендикуляр деп те айтылады. Қоршаған әлемнен түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының көптеген үлгілерін көруге болады. Мысалы, ғимарат бағандары фундамент жазықтығына, үстелдің аяқтары еденге перпендикуляр. Жазықтыққа перпендикуляр түзуде жататын кесінділер мен сәулелер де осы жазықтыққа перпендикуляр деп аталады.

Көне Парфенон ғибадатханасының бағаналары

Т е о р е м а. **Егер түзу жазықтыққа перпендикуляр болса, онда ол осы жазықтықты қияды.**

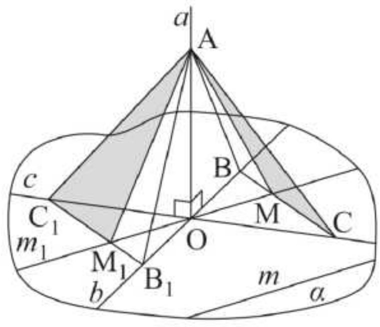
Д ә л е л д е у і. Шынымен де, егер бұл түзу жазықтықты қимаса, онда ол жазықтықта жатар еді немесе оған параллель болар еді. Сонда бұл жазықтықта берілген түзуге перпендикуляр емес түзулер де бар болар еді, мысалы, оған параллель түзулер, бірақ бұл түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының анықтамасына қайшы келеді. Демек, бұл түзу жазықтықты қияды (101-сурет).



101-сурет

Т е о р е м а (*түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі*). **Егер түзу жазықтықта жатқан қиылысатын екі түзудің әрқайсысына перпендикуляр болса, онда ол түзу жазықтыққа перпендикуляр болады.**

Д ә л е л д е у і. a түзуі α жазықтығын O нүктесінде қисын және осы жазықтықта жататын, O нүктесінен өтіп, қиылысатын b мен c түзулеріне

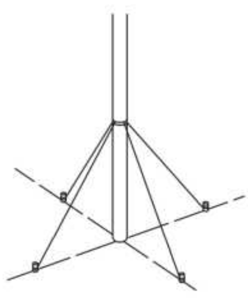


102-сурет

перпендикуляр болсын (102-сурет). Егер қиылысатын b мен c түзулері O нүктесінен өтпесе, онда әрдайым α жазықтығындағы осы нүкте арқылы b мен c түзулеріне сәйкесінше параллель түзулер жүргізуге болады. $a \perp \alpha$ болатынын дәлелдейік.

Ол үшін a түзуі α жазықтығындағы қандай да бір m түзуіне перпендикуляр болатынын дәлелдейміз. O нүктесі арқылы m түзуіне параллель m_1 түзуін жүргіземіз. b мен c түзулерінен BC кесіндісі m_1 түзуін қандай да бір M нүктесінде қиятындай B мен C нүктелерін алайық. α жазықтығына O нүктесіне қатысты B, C, M нүктелеріне симметриялы B_1, C_1, M_1 нүктелерін саламыз. Сонда $BO = OB_1$, $CO = OC_1$, $MO = OM_1$, $BC = B_1C_1$ және M_1 нүктесі B_1C_1 кесіндісіне тиісті, $BM = B_1M_1$ болады (центрлік симметрияның қасиеті бойынша). a түзуінен кез келген A нүктесін алып, AB, AM, AC, AC_1, AM_1, AB_1 кесінділерін жүргіземіз. Сонда BAB_1 мен CAC_1 үшбұрыштары теңбүйірлі, өйткені олардың әрқайсысының AO медианасы биіктік те болады, сондықтан $AB = AB_1$, $AC = AC_1$. ABC мен AB_1C_1 үшбұрыштары тең (үш қабырғасы бойынша), демек, $\angle ABC = \angle AB_1C_1$. Сонда $\Delta ABM = \Delta AB_1M_1$ (екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша), сондықтан $AM = AM_1$. Яғни ΔAMM_1 теңбүйірлі, ендеше оның AO медианасы биіктік болады. Демек, a түзуі m_1 түзуіне және оған параллель m түзуіне перпендикуляр. Теорема дәлелденді.

Салдары. **Параллель жазықтықтардың біріне перпендикуляр түзу екіншісіне де перпендикуляр болады.** Бұл салдарды өздігінен дәлелдеңдер.

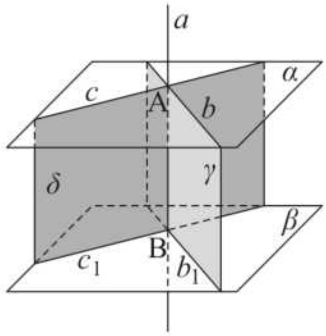

103-сурет

Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісін практикалық есептер шығарғанда пайдаланады.

Мысалы, бағанды тігінен орнату үшін, ол табаны арқылы жүргізілген қиылысатын екі түзуге перпендикуляр болса жеткілікті. Оны жасау үшін бағанның бір нүктесінен ұзындықтары бірдей екі жұп кергіні баған табанынан бірдей қашықтықта бекіту керек. 103-суретті пайдаланып, баған неліктен табан жазықтығына перпендикуляр болатынын түсіндіріңдер.

Теорема (*екі жазықтықтың параллельдік белгісі*). **Егер екі жазықтықтың әрқайсысы бір түзуге перпендикуляр болса, онда ол жазықтықтар параллель болады.**

Дәлелдеуі. α және β жазықтықтары мен a түзуі берілген, әрі $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$ болсын. $\alpha \parallel \beta$ болатынын дәлелдейік.

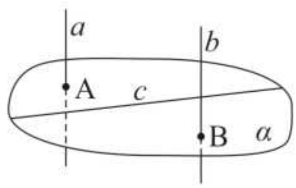


104-сурет

a түзуі мен α жазықтығының қиылысу нүктесі A арқылы b және c түзулерін жүргіземіз (104-сурет). a және b түзулері арқылы өтетін γ жазықтығы β жазықтығын b_1 түзуі бойымен қияды, әрі $b \perp a$ және $b_1 \perp a$ болады. Демек, $b \parallel b_1$. a мен c түзулері арқылы өтетін δ жазықтығы β жазықтығын c_1 түзуі бойымен қияды, әрі $c \perp a$ және $c_1 \perp a$. Демек, $c \parallel c_1$. α жазықтығының қиылысатын b және c түзулері, сәйкесінше, β жазықтығының b_1 және c_1 түзулеріне параллель болғандықтан, $\alpha \parallel \beta$ болады. Теорема дәлелденді.

Теорема. **Егер екі параллель түзудің бірі жазықтыққа перпендикуляр болса, онда екінші түзу де осы жазықтыққа перпендикуляр болады.**

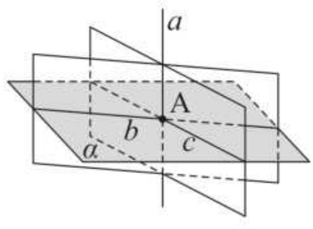
Дәлелдеуі. a және b параллель түзулері берілген және a түзуі α жазықтығына перпендикуляр болсын, яғни ол осы жазықтықта жататын кез келген түзуге, мысалы, c түзуіне перпендикуляр (105-сурет). Сонда b түзуі де c түзуіне перпендикуляр болады, себебі, егер екі параллель түзудің бірі қайсыбір түзуге перпендикуляр болса, онда екінші түзу де ол түзуге перпендикуляр болады. Демек, b түзуі α жазықтығының кез келген түзуіне перпендикуляр, яғни b α жазықтығына перпендикуляр. Теорема дәлелденді.



105-сурет

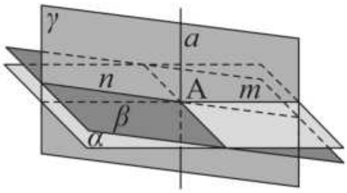
Теорема. **Кеңістіктің әрбір нүктесі арқылы берілген түзуге перпендикуляр жалғыз жазықтық өтеді.**

Дәлелдеуі. 1. a түзуі және онда жататын A нүктесі берілген болсын. a түзуі арқылы әртүрлі екі жазықтық жүргіземіз және әр жазықтыққа A нүктесі арқылы өтетін, a түзуіне перпендикуляр b мен c түзулерін жүргіземіз (106-сурет). Сонда b және c түзулерін қамтитын α жазықтығы A нүктесін де қамтиды.



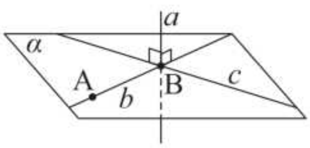
106-сурет

Бұл жазықтық түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі бойынша a түзуіне перпендикуляр. Ізделінді жазықтық салынды. Оның жалғыз екенін дәлелдейік.



107-сурет

Шынымен де, A нүктесі арқылы α жазықтығынан басқа a түзуіне перпендикуляр қайсыбір β жазықтығы өтеді делік. β жазықтығынан A нүктесінен өтетін, α жазықтығында жатпайтын кез келген n түзуін алайық. Қиылысатын a және n түзулері арқылы α жазықтығын m түзуі бойымен қиятын γ жазықтығын алайық (107-сурет). m түзуі n түзуімен беттеспейді, себебі m түзуі α жазықтығында жатыр, ал n түзуі ол жазықтықта жатпайды. Сонда n және m түзулерінің γ жазықтығында жататыны, A нүктесінен өтіп, a түзуіне перпендикуляр болатыны шығады. Бірақ бұл планиметрияның «жазықтықтың әрбір нүктесі арқылы берілген түзуге перпендикуляр бір ғана түзу өтеді» деген теоремасына қайшы келеді. Ендеше біздің жорамалымыз дұрыс емес, демек, α – жалғыз жазықтық.



108-сурет

2. a түзуі мен онда жатпайтын A нүктесі берілген болсын. A нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр b түзуін жүргізейік. a және b түзулерінің қиылысу нүктесі B арқылы a түзуіне перпендикуляр тағы бір c түзуін жүргізейік (108-сурет).

b және c түзулері арқылы өтетін α жазықтығы түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі бойынша a түзуіне перпендикуляр. Бұл жазықтық жалғыз.

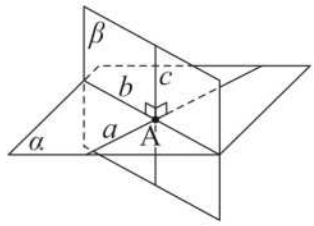
Шынымен де, A нүктесінен өтіп, a түзуіне перпендикуляр тағы бір жазықтық бар деп жорииық. Бұл жазықтық A нүктесінен өтетін және a түзуіне перпендикуляр түзуді қамтиды. Бірақ ондай түзу жалғыз, ол – B нүктесінен өтетін b түзуі. Демек, A нүктесінен өтетін және a түзуіне перпендикуляр жазықтық B нүктесін де қамтуы керек, ал B нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр тек бір жазықтық өтеді. Теорема дәлелденді.

Салдары. **Берілген түзуге перпендикуляр болатын және оның бір нүктесінен өтетін түзулер бір жазықтықта жатады.** Өздігінен дәлелдеңдер.

Теорема (*жазықтыққа перпендикуляр түзу туралы*). **Кеңістіктің әрбір нүктесі арқылы берілген жазықтыққа перпендикуляр болатын жалғыз түзу жүргізуге болады.**

Дәлелдеуі. α жазықтығы мен A нүктесі берілген болсын. Екі жағдайды қарастырайық: 1) A нүктесі α жазықтығына тиісті; 2) A нүктесі α жазықтығына тиісті емес.

1. α жазықтығының A нүктесі арқылы қайсыбір a түзуін жүргіземіз және A нүктесінен өтіп, a түзуіне перпендикуляр болатын β жазықтығын саламыз (109-сурет). α және β жазықтықтары қандай да бір b түзуі бойымен қиылысады. β жазықтығының A нүктесі арқылы b түзуіне перпендикуляр c түзуін жүргіземіз. c түзуі a түзуіне де перпендикуляр. Сонда c түзуі α жазықтығына перпендикуляр болады.

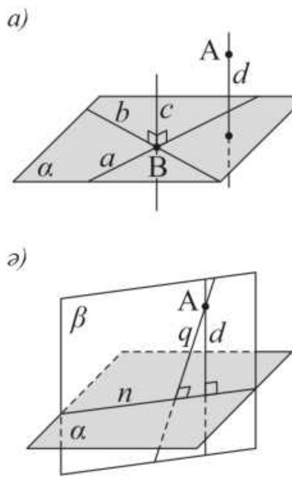


109-сурет

2. α жазықтығының қайсыбір нүктесінен осы жазықтыққа перпендикуляр c түзуін жүргіземіз (110, a-сурет). Егер c түзуі A нүктесі арқылы өтсе, онда ол ізделінді түзу болады.

Егер олай болмаса, онда A нүктесі арқылы c түзуіне параллель d түзуін жүргіземіз. Сонда d ізделінді түзу болады. Оның жалғыз болатынын дәлелдейік.

Шынымен де, қандай да бір A нүктесі арқылы α жазықтығына перпендикуляр d және q түзулері өтеді делік. Осы түзулер арқылы β жазықтығын жүргіземіз (110, ә-сурет). β жазықтығы α жазықтығын қайсыбір n түзуі бойымен қияды. d мен q түзулері α жазықтығына перпендикуляр болғандықтан, олар n түзуіне де перпендикуляр болады. Планиметриядан бұлай болуы мүмкін емес екені белгілі. Демек, A нүктесі арқылы α жазықтығына перпендикуляр бірден артық түзу өтпейді.

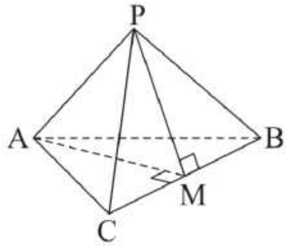


110-сурет

Салдары (*кеңістіктегі түзулердің параллельдік белгісі*). **Егер екі түзудің әрқайсысы бір жазықтыққа перпендикуляр болса, онда олар параллель болады.** (Өздігінен дәлелдеңдер.)

1-есеп. Барлық қырлары тең $PABC$ тетраэдрі берілген. BC мен PA түзулерінің арасындағы бұрышты табу керек.

Шешуі. ABC мен PBC үшбұрыштарының, сәйкесінше, AM және PM медианаларын жүргіземіз (111-сурет). Сонда теңқабырғалы үшбұрыштардың

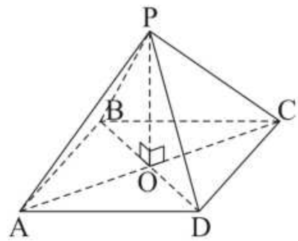


111-сурет

медианаларының қасиеті бойынша $AM \perp BC$ және $PM \perp BC$. Демек, түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі бойынша $BC \perp (APM)$. Сонда $BC \perp AP$ (түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының анықтамасы бойынша), ендеше $\angle(BC; PA) = 90°$.

Жауабы. $90°$.

2-есеп. Төртбұрышты $PABCD$ пирамидасының табаны – тіктөртбұрыш, оның қабырғалары $8a$ дм және $15a$ дм. Пирамиданың әрбір бүйір қыры 1 дм-ге тең. Табан диагональдарының O қиылысу нүктесі мен P төбесі арқылы өтетін түзу ABC жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдеу керек. PO қашықтығын тауып, a-ның барлық мүмкін болатын мәндерін көрсету керек.



112-сурет

Шешуі. Тіктөртбұрыштың диагональдары O қиылысу нүктесімен қақ бөлінетіндіктен, ал есептің шарты бойынша $PA = PB = PC = PD$ болғандықтан, APC мен BPD үшбұрыштары теңбүйірлі және PO кесіндісі олардың әрқайсысының медианасы және биіктігі болады (112-сурет).

Демек, түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі бойынша $PO \perp (ABC)$ болады. Пифагор теоремасы бойынша ADC мен POC үшбұрыштарынан мынаны табамыз: $AC = \sqrt{(8a)^2 + (15a)^2} = 17a$ (дм); $PO = \sqrt{1-(8,5a)^2}$ дм, мұндағы $(1 - 8,5a) > 0$, $a < \frac{2}{17}$ дм.

Жауабы. $\sqrt{1-(8,5a)^2}$ дм, мұндағы $a < \frac{2}{17}$ дм.

СҰРАҚТАР

1. Жазықтыққа перпендикуляр түзудің анықтамасын тұжырымдаңдар.
2. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісін тұжырымдаңдар және дәлелдеңдер.
3. Перпендикуляр түзу мен жазықтықтың қандай қасиеттерін білесіңдер? Оларды тұжырымдап, сызбаларын салып көрсетіңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

178. Бір жазықтықта жатпайтын OA, OB және OC сәулелері қос-қостан перпендикуляр. Осы сәулелердің әрқайсысы басқа екі сәулемен берілген жазықтыққа қатысты қалай орналасқан? Жауабын негіздеңдер.

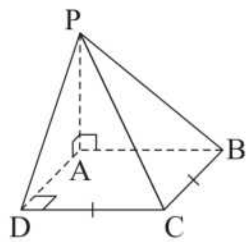
179. Ағаш арқалық тікбұрышты параллелепипед тәріздес. Арқалықты қырына перпендикуляр етіп кесу үшін оның бетіне белгіні қалай қою керек?

180. b түзуі ABC үшбұрышының A төбесі арқылы өтеді және оның AB мен AC қабырғаларына перпендикуляр. Осы түзу үшбұрыштың BC қабырғасына қатысты қалай орналасқан?

181. MN кесіндісі α жазықтығына перпендикуляр және оны O нүктесінде қияды да, сол нүктеде қақ бөлінеді. α жазықтығында өзара тең OK мен OP кесінділері жүргізілген. $MK = NP$ болатынын дәлелдеңдер.

182. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында: а) $A_1B_1 \perp B_1C$; ә) $A_1C \perp BD$ болатынын дәлелдеңдер.

183. $ABCD$ шаршысы – $PABCD$ пирамидасының табаны. PA түзуі табан жазықтығына перпендикуляр (113-сурет). а) $CD \perp PD$; ә) $BC \perp PB$; б) $\Delta PAD = \Delta PAB$; в) $\Delta PBC = \Delta PDC$ болатынын дәлелдеңдер.



113-сурет

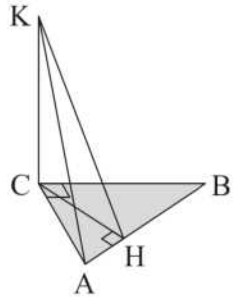
184. $ABCD$ тіктөртбұрышы – диагоналі 10 см-ге тең $SABCD$ пирамидасының табаны. $SB \perp (ABC)$, $SA = 10$ см, $SC = 8\sqrt{2}$ см екені белгілі болса, пирамиданың SD қырын және табанының AD мен DC қабырғаларын табыңдар.

185. $DABC$ дұрыс тетраэдрі берілген, O – оның ABC табаны медианаларының қиылысу нүктесі, M – DC кесіндісіне тиісті нүкте. AB мен OM түзулерінің арасындағы бұрыш 90°-қа тең болатынын дәлелдеңдер.

186. O нүктесі центрі болатын шеңбер α жазықтығында жатыр. OM түзуі α жазықтығына перпендикуляр. M нүктесі шеңбердің A нүктесімен кесінді арқылы қосылған. а) Егер $OM = 1{,}5$ дм, $MA = 1{,}7$ дм болса, шеңбердің радиусын табыңдар. ә) MA түзуі A нүктесінен шеңберге жүргізілген жанамаға перпендикуляр деген ақиқат па? Жауабын түсіндіріңдер.

187. Жерді қазып, тігінен екі баған орнатылған, олардың жерден биіктіктері a м және b м, ал аралары c м-ге тең. Осы бағандардың төбелері арқылы сым тартылған. Сол сымның ұзындығын табыңдар (сым салбыраусыз қатты тартылған жағдайда).

188. Тікбұрышты ΔABC-ның C төбесінен оның жазықтығына перпендикуляр CK түзуі мен CH биіктігі жүргізілген (114-сурет). Егер $AC = 12$ см,

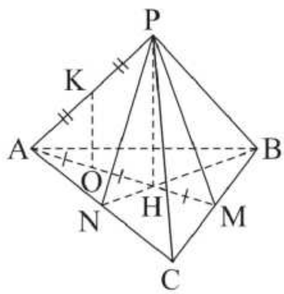


114-сурет

$BC = 16$ см, $AK = 20$ см болса, KH қашықтығын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

B деңгейі

189. ΔABC-ның периметрі 82 см-ге тең. AB қабырғасының ортасындағы M нүктесіне үшбұрыш жазықтығына перпендикуляр болатын, ұзындығы 12 см-ге тең MK кесіндісі тұрғызылған. E мен F нүктелері, сәйкесінше, AC мен BC қабырғаларының орталары. Егер $KF = 15$ см, $KE = 20$ см болса, AK кесіндісінің ұзындығын табыңдар.



115-сурет

190. Максат «$PABC$ дұрыс тетраэдрінің AP бүйір қырының ортасы болатын K нүктесі арқылы оның ABC табанының жазықтығына перпендикуляр түзу жүргізу керек» деген есепті шығару үшін оның сызбасын салды (115-сурет). Соны пайдаланып, осы есептің шешуін түсіндіріңдер.

191. α жазықтығында a мен b параллель түзулері берілген. α жазықтығында жатпайтын O нүктесінен a мен b түзулеріне, сәйкесінше, OA мен OB перпендикулярлары жүргізілген. AB түзуі a мен b түзулеріне перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

192. Қыры b-ға тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Осы кубтың AB қырының ортасы арқылы AC түзуіне перпендикуляр өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Осы қиманың ауданын табыңдар.

C деңгейі

193. α жазықтығына перпендикуляр $AB = a$ және $CD = b$ кесінділері берілген, әрі A мен D нүктелері осы жазықтыққа тиісті, ал AC мен BD кесінділері O нүктесінде қиылысады. O нүктесінен AD кесіндісіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

194. Қыры a-ға тең $KCDM$ дұрыс тетраэдрі берілген. Осы тетраэдрдің DM қырының ортасынан өтетін және CM қырына перпендикуляр жазықтықпен қимасын салыңдар. Осы қиманың ауданын табыңдар.

195. Табан қабырғасы 3 дм-ге тең дұрыс $PABC$ пирамидасы берілген, оның әрбір бүйір қыры 2 дм-ге тең. Оның табанының BC қабырғасынан өтіп, PA бүйір қырына перпендикуляр жазықтықпен қимасы қандай фигура болады?

10. Перпендикуляр және көлбеу. Үш перпендикуляр туралы теорема

Тақырыпты оқу барысында:

• нүктеден жазықтыққа жүргізілген перпендикуляр мен көлбеудің, көлбеудің жазықтыққа проекциясының анықтамаларын және олардың қасиеттерін білесіңдер;

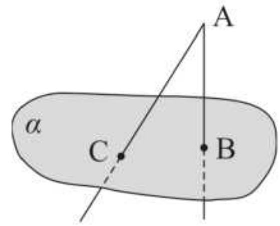
• үш перпендикуляр туралы теореманы білесіңдер;

• перпендикулярдың, көлбеудің және оның проекциясының қасиеттерін есептер шығаруда қолданасыңдар;

• үш перпендикуляр туралы теореманы дәлелдей аласыңдар және оны есептер шығаруда қолданасыңдар.

Берілген нүктеден жазықтыққа жүргізілген перпендикуляр деп бір ұшы осы жазықтықта жататын оған перпендикуляр кесінді аталады.

Мысалы, α жазықтығына перпендикуляр болатын және оны B нүктесінде қиятын AB сәулесін жүргізейік (116-сурет). Сонда AB кесіндісі – A нүктесінен α жазықтығына жүргізілген перпендикуляр, ал B нүктесі осы перпендикулярдың *табаны* деп аталады.



116-сурет

Берілген нүктеден жазықтыққа бір ғана перпендикуляр жүргізуге болатынын айта кетелік, себебі осы нүкте арқылы жазықтыққа перпендикуляр бір ғана түзу жүргізуге болады. Нүктеден жазықтыққа жүргізілген **перпендикулярдың ұзындығы** сол нүктеден осы жазықтыққа дейінгі **арақашықтық** деп аталады.

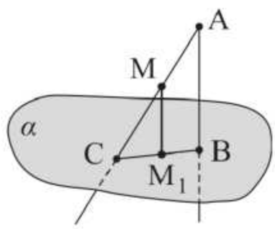
Берілген нүктеден жазықтыққа жүргізілген көлбеу деп бір ұшы осы жазықтықта жататын оған перпендикуляр емес кесінді аталады.

Мысалы, 116-суреттегі AC кесіндісі – A нүктесінен α жазықтығына жүргізілген көлбеу, ал C нүктесі осы көлбеудің *табаны* деп аталады.

Нүктенің жазықтықтағы ортогональ проекциясы деп сол нүктеден осы жазықтыққа жүргізілген перпендикулярдың табаны аталады. («Ортогональ» сөзі тікбұрышты дегенді білдіреді.)

Мысалы, 116-суреттегі B нүктесі – A нүктесінің α жазықтығындағы проекциясы.

Фигураның жазықтықтағы ортогональ проекциясы деп оның барлық нүктелерінің осы жазықтықтағы ортогональ проекцияларының жиыны аталады.



117-сурет

Мысалы, 117-суреттегі BC кесіндісі – AC көлбеуінің α жазықтығындағы ортогональ проекциясы. Егер AC кесіндісінен M нүктесін алып, оның α жазықтығындағы ортогональ проекциясы болатын M_1 нүктесін салсақ, онда BM_1 кесіндісі AM кесіндісінің α жазықтығындағы ортогональ проекциясы болады (117-сурет).

Ортогональ проекциялау параллель проекциялаудың түрі болады (неге екенін түсіндіріңдер).

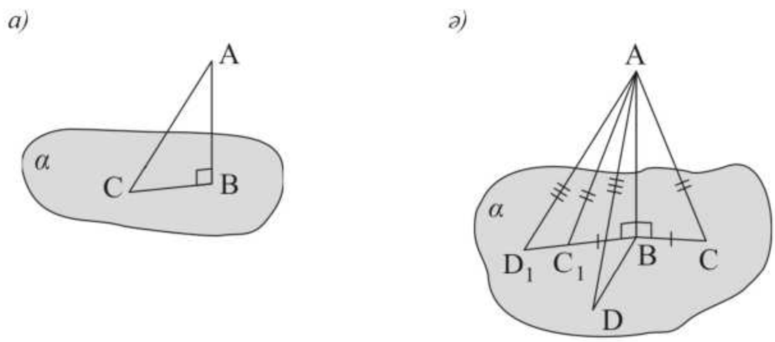
Ортогональ проекциялау практикада жиі қолданылады. Қайсыбір беттің жазықтығына перпендикуляр түзуді *вертикаль* деп атайды, ұшына жүк бекітілген түзудің кесіндісін *тіктегіш* деп, жазықтықтың өзін *көлденең жазықтық* деп атайды.

Мыналарды атап өтейік: жазықтықтан тыс жатқан бір нүктеден оған перпендикуляр және көлбеу жүргізілген болса, онда *перпендикуляр көлбеуден қысқа* болады; ә) жазықтықтан тыс жатқан бір нүктеден оған екі көлбеу жүргізілген болса, онда:

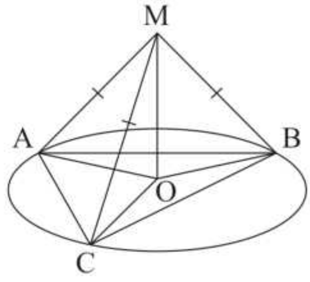
1) *проекциялары тең көлбеулердің өздері де тең және керісінше, тең көлбеулердің проекциялары да тең;*

2) *проекциялары тең емес екі көлбеудің қайсысының проекциясы үлкен болса, сол көлбеу үлкен, керісінше, үлкен көлбеудің проекциясы да үлкен болады.* Осы қасиеттерді 118-суретті пайдаланып, өздігінен дәлелдеңдер.

1 - е с е п. Егер кеңістіктегі нүкте үшбұрыштың барлық төбелерінен бірдей қашықтықта болса, онда ол нүктенің үшбұрыш жазықтығындағы ортогональ проекциясы осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі болатынын дәлелдеу керек.



118-сурет

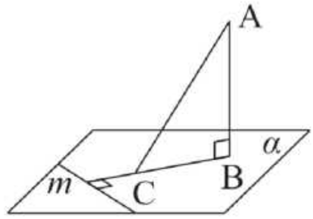


119-сурет

Дәлелдеуі. ΔABC мен оның жазықтығында жатпайтын M нүктесі берілсін. M нүктесінен осы жазықтыққа бір ғана перпендикуляр жүргізуге болады. O нүктесі ABC жазықтығына жүргізілген MO перпендикулярының табаны болсын және ол нүкте есептің шартында айтылғандай ABC үшбұрышының ешбір төбесімен беттеспесін (119-сурет). Сонда MA, MB, MC тең көлбеулерінің, сәйкесінше, OA, OB, OC ортогональ проекциялары да тең болады. Демек, O нүктесі – ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі.

Пирамиданың төбесінен оның табан жазықтығына жүргізілген перпендикуляр пирамиданың *биіктігі* деп аталатынын айта кетелік.

Теорема (*үш перпендикуляр туралы*). **Егер жазықтықтағы түзу көлбеудің осы жазықтықтағы ортогональ проекциясына перпендикуляр болса, онда ол көлбеудің өзіне де перпендикуляр болады.**



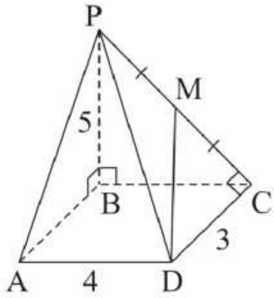
120-сурет

Дәлелдеуі. AB – α жазықтығына перпендикуляр, AC – көлбеу, BC – осы көлбеудің α жазықтығындағы ортогональ проекциясы, ал осы жазықтықтағы m түзуі BC-ға перпендикуляр (120-сурет). $m \perp AC$ екенін дәлелдейік. m түзуі ABC жазықтығындағы қиылысатын BC мен AB түзулеріне перпендикуляр (себебі шарт бойынша $AB \perp \alpha$, $m \subset \alpha$ және $BC \perp m$). Сондықтан m түзуі ABC жазықтығына перпендикуляр, демек, AC түзуіне де перпендикуляр.

Теорема (*үш перпендикуляр туралы теоремаға кері теорема*). **Егер жазықтықтағы түзу осы жазықтыққа жүргізілген көлбеуге перпендикуляр болса, онда ол көлбеудің осы жазықтықтағы ортогональ проекциясына да перпендикуляр болады.**

Дәлелдеуі. α жазықтығының m түзуі осы жазықтыққа жүргізілген AC көлбеуіне перпендикуляр болсын (120-сурет). Сонда m түзуі ABC жазықтығының қиылысатын AC мен AB түзулеріне перпендикуляр болады, сондықтан ол осы жазықтықтағы BC түзуіне де перпендикуляр.

2-есеп. Пирамиданың 5 дм-ге тең PB бүйір қыры оның тіктөртбұрыш болатын $ABCD$ табанына перпендикуляр және $AB = 3$ дм, $BC = 4$ дм. PDC үшбұрышының DM медианасын 0,1 дм-ге дейінгі дәлдікпен табу керек.

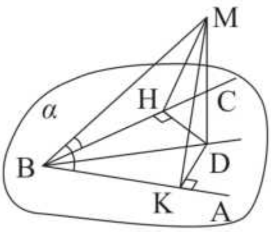


121-сурет

Ш е ш у і. PC – көлбеу, BC – оның ABC жазықтығындағы ортогональ проекциясы және $BC \perp DC$ болғандықтан, $PC \perp DC$ (үш перпендикуляр туралы теорема бойынша). Демек, ΔDMC тікбұрышты (121-сурет). $DM = \sqrt{DC^2 + MC^2}$, $MC = 0{,}5PC = 0{,}5 \cdot \sqrt{5^2 + 4^2} = 0{,}5 \cdot \sqrt{41}$ (дм). Сонда $DM = \sqrt{3^2 + \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{77}}{2} \approx 4{,}4$ (дм).

Ж а у а б ы. $\approx 4{,}4$ дм.

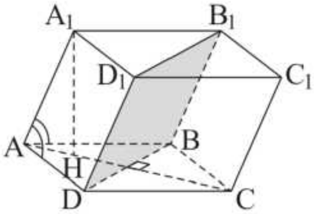
3 - е с е п. α жазықтығында жататын жазыңқы емес ABC бұрышының B төбесі – осы жазықтыққа жүргізілген MB көлбеуінің табаны және көлбеу берілген бұрыштың қабырғаларымен тең сүйір бұрыштар құрайды. Осы көлбеудің α жазықтығындағы BD ортогональ проекциясы берілген бұрыштың биссектрисасында жататынын дәлелдеу керек.



122-сурет

Д ә л е л д е у і. ABC бұрышының AB мен BC қабырғаларына, сәйкесінше, DK мен DH перпендикулярларын және оның жазықтығына MK мен MH көлбеулерін жүргіземіз (122-сурет). Сонда $MK \perp AB$ және $MH \perp BC$ болады (үш перпендикуляр туралы теорема бойынша). Бұдан, $\Delta MKB = \Delta MHB$ (гипотенузасы мен сүйір бұрышы бойынша). Осы үшбұрыштардың теңдігінен $MK = MH$ аламыз. Бұдан $DK = DH$ болатыны шығады (бір нүктеден жүргізілген тең көлбеулердің проекциялары да тең болады). D нүктесі ABC бұрышының қабырғаларынан бірдей қашықтықта екенін алдық, демек, BD кесіндісі осы бұрыштың биссектрисасында жатыр.

4 - е с е п. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің табаны – қабырғасы a-ға, ал A сүйір бұрышы $60°$-қа тең ромб. AA_1 бүйір қыры AB және AD табан қабырғаларымен тең сүйір бұрыштар құрайды. Егер $AA_1 = b$ болса, DD_1B_1B төртбұрышының ауданын табыңдар.



123-сурет

Ш е ш у і. $\angle A_1AD = \angle A_1AB$ болғандықтан, AA_1 қырының ABC жазықтығына түскен ортогональ проекциясы BAD бұрышының AC биссектрисасында жататын AH кесіндісі болады (123-сурет). $BD \perp AH$ болғандықтан, үш перпендикуляр туралы теорема бойынша $BD \perp AA_1$. $BD \perp AA_1$, ал $AA_1 \parallel BB_1$ болғандықтан, $BD \perp BB_1$

болады. Демек, DD_1B_1B төртбұрышы – тіктөртбұрыш, оның ауданы $S = BB_1 \cdot BD = ab$ (неге екенін түсіндіріңдер).

Жауабы. ab.

СҰРАҚТАР

1. Берілген нүктеден жазықтыққа жүргізілген перпендикулярдың, көлбеудің анықтамаларын тұжырымдаңдар.

2. Берілген нүктеден жазықтыққа жүргізілген перпендикуляр мен көлбеудің қасиеттерін тұжырымдаңдар.

3. Фигураның жазықтықтағы ортогональ проекциясы дегеніміз не?

4. Үш перпендикуляр туралы теореманы тұжырымдаңдар және дәлелдеңдер.

5. Үш перпендикуляр туралы теоремаға кері теореманы тұжырымдаңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

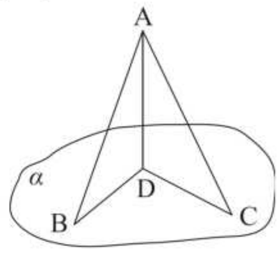
А деңгейі

196. 124-суретте AD түзуі α жазықтығына перпендикуляр.

1) Көлбеулер мен олардың ортогональ проекцияларын көрсетіңдер;

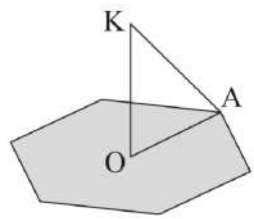
2) егер: а) $AB < AC$; ә) $AB = AC$ болса, BD мен CD кесінділерін салыстырыңдар;

3) егер: а) $AB : AC = 10 : 17$, ал осы көлбеулердің α жазықтығындағы ортогональ проекциялары 12 см және 30 см-ге тең болса; ә) көлбеулердің ұзындықтары 17 см және 25 см, ал олардың ортогональ проекцияларының айырымы 12 см болса, AD кесіндісінің ұзындығын табыңдар.



124-сурет

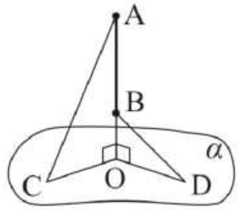
197. Дұрыс алтыбұрыштың O центрі арқылы оның жазықтығына перпендикуляр OK түзуі жүргізілген (125-сурет). Егер осы алтыбұрыштың қабырғасы 12 см-ге, ал оның төбесінен K нүктесіне дейінгі қашықтық 15 см-ге тең болса, OK қашықтығын табыңдар.



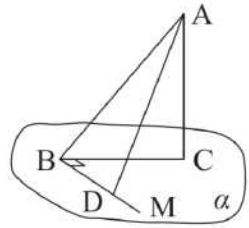
125-сурет

198. α жазықтығына перпендикуляр және онымен ортақ нүктесі жоқ AB кесіндісінің ұштарынан α жазықтығына $AC = 40$ см және $BD = 25$ см болатын көлбеулер жүргізілген. O нүктесі осы кесіндінің

α жазықтығындағы ортогональ проекциясы және $CO = OD = 24$ см (126-сурет). AB кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

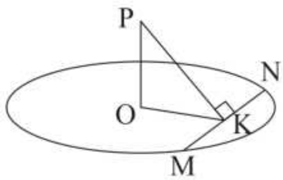


126-сурет



127-сурет

199. 127-суретте $AC \perp \alpha$, $BM \perp BC$. а) $BM \perp BA$ болатынын дәлелдеңдер және егер $BD = 5$ см, $AB = 12$ см болса, AD-ны табыңдар.

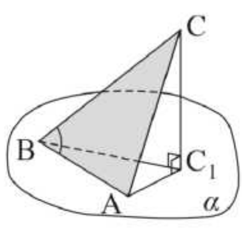


128-сурет

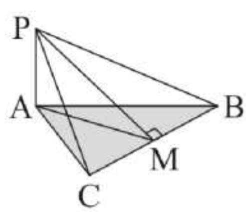
200. Радиусы 6 см-ге тең дөңгелектің O центрінен оның жазықтығына перпендикуляр түзу жүргізілген, оған P нүктесі белгіленген және $OP = 1$ см (128-сурет). P нүктесінен осы дөңгелектің 2 см-ге тең MN хордасына дейінгі қашықтықты табыңдар.

201. ABC үшбұрышының 16 см-ге тең AB қабырғасы α жазықтығында жатыр, C_1 нүктесі C нүктесінің осы жазықтықтағы ортогональ проекциясы және $CC_1 = 24$ см (129-сурет). Егер BC қабырғасының ортогональ проекциясы 18 см-ге тең, ал $\angle ABC = 60°$ болса, AC қабырғасының α жазықтығындағы ортогональ проекциясын табыңдар.

202. Қабырғасы 8 см-ге тең теңқабырғалы ΔABC берілген. A нүктесі арқылы оның жазықтығына 6 см-ге тең AP перпендикуляры жүргізілген (130-сурет). P нүктесінен: а) үшбұрыштың B және C төбелеріне дейінгі; ә) BC қабырғасына дейінгі қашықтықты табыңдар.



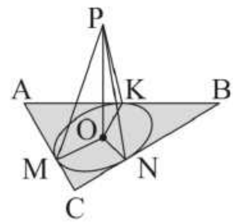
129-сурет



130-сурет

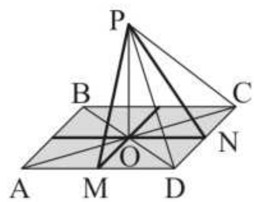
203. Күзет иттерінің үш үйшігі қабырғалары 40 м, 40 м және 50 м-ге тең үшбұрышты аланның төбелерінде орналасқан. Егер тік баған осы алаңға сырттай сызылған шеңбердің центріне орнатылса, онда осы үйшіктер бағанның төбесіне бекітілген шамдар арқылы түн мезгілінде бірдей жарықтанады деген дұрыс па? Егер дұрыс болса, онда биіктігі 15 м бағанның төбесінен үйшіктерге дейінгі жарық сәулесінің ұзындығын 0,1 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

204. а) Егер кеңістіктегі нүкте үшбұрыштың барлық қабырғаларынан бірдей қашықтықта болса, онда оның үшбұрыш жазықтығындағы ортогональ проекциясы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі болатынын дәлелдеңдер (131-сурет).
ә) Қабырғалары 13 см, 13 см және 10 см болатын үшбұрыш берілген. P нүктесі үшбұрыштың әр қабырғасын қамтитын түзулерден 5 см қашықтықта орналасқан. P нүктесінен үшбұрыш жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.



131-сурет

205. 132-суретті пайдаланып: а) шаршының қабырғаларынан бірдей қашықтықта жататын нүкте оның төбелерінен де бірдей қашықтықта жататынын; ә) шаршы болмайтын тіктөртбұрыштың төбелерінен бірдей қашықтықта жатқан нүкте оның қабырғаларынан бірдей қашықтықта жатпайтынын дәлелдеңдер.

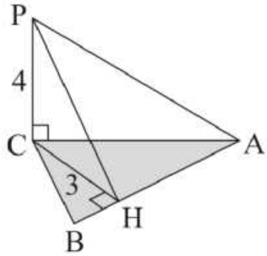


132-сурет

206. $ABCD$ шаршысы берілген. Оның диагональдарының O қиылысу нүктесінен шаршы жазықтығына OP перпендикуляры жүргізілген. $AB = OP = \sqrt{2}$ дм болса, P нүктесінен: а) шаршының төбелеріне; ә) шаршының қабырғаларына дейінгі қашықтықты табыңдар.

207. а) Берілген M нүктесінен α жазықтығына жүргізілген барлық көлбеулердің орталарындағы нүктелер жиыны қандай фигураны құрайды?
ә) Берілген M нүктесінен α жазықтығына жүргізілген барлық тең көлбеулердің орталарындағы нүктелер жиыны қандай фигураны құрайды?

208. M нүктесінің $ABCD$ ромбысының жазықтығына түскен ортогональ проекциясы оның диагональдарының O қиылысу нүктесі болады. Егер $MC = 17$ см, $MD = 3\sqrt{29}$ см, ал ромбының ауданы 96 см^2 болса, MC мен MD кесінділерінің осы жазықтықтағы проекцияларының ұзындықтарын табыңдар.



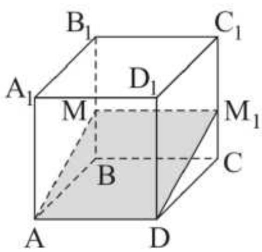
133-сурет

209. ΔABC берілген және оның CH биіктігі жүргізілген. P нүктесінен ABC жазықтығына PC перпендикуляры жүргізілген (133-сурет). 1) Ұзындығы P нүктесінен AB түзуіне дейінгі қашықтыққа тең кесіндіні көрсетіңдер. Жауабын түсіндіріңдер. 2) Егер $PC = 4$ см, $CH = 3$ см болса, P нүктесінен AB қабырғасына дейінгі қашықтықты табыңдар.

210. $\angle C = 90°$, $AC = 7\sqrt{2}$ см болатын теңбүйірлі ABC үшбұрышы берілген. P нүктесінен ABC жазықтығына ұзындығы 24 см-ге тең PC перпендикуляры жүргізілген. P нүктесінен AB қабырғасына дейінгі қашықтықты табыңдар.

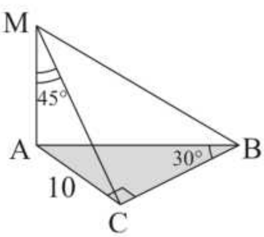
211. $\angle C = 90°$, $BC = 12$ см болатын ΔABC берілген. Гипотенузаның ортасындағы K нүктесінен үшбұрыш жазықтығына ұзындығы 8 см-ге тең KH перпендикуляры жүргізілген. H нүктесінен AC қабырғасына дейінгі қашықтықты табыңдар.

212. $ABCD$ параллелограмының B төбесінен оның жазықтығына ұзындығы $\sqrt{37}$ см-ге тең BM перпендикуляры жүргізілген. $AB = 4$ см, $AD = 6$ см, $\angle C = 60°$ болса, M нүктесінен параллелограмның AD мен DC қабырғаларына дейінгі қашықтықтарды табыңдар.



134-сурет

213. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $MM_1 \parallel AD$ (134-сурет). 1) AMM_1D төртбұрышының түрін анықтаңдар: а) шаршы; ә) сүйір бұрышы A болатын ромб; б) трапеция; в) $AD \neq DM_1$ болатын тіктөртбұрыш. Жауабын түсіндіріңдер. 2) Қай кесіндінің ұзындығы M нүктесінен AD түзуіне дейінгі арақашықтық болады?



135-сурет

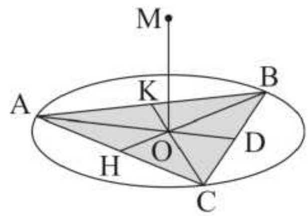
214. $ABCD$ ромбысының AC диагоналі 16 см-ге тең. M нүктесінен оның жазықтығына 6 см-ге тең MB перпендикуляры және MA мен MC көлбеулері жүргізілген. 1) AMC үшбұрышының MO биіктігін жүргізіңдер. 2) Егер $\angle BMO = 45°$ болса, ΔAMC-ның ауданын табыңдар.

215. $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$, $AC = 10$ см болатын ΔABC берілген. M нүктесінен үшбұрыш жазықтығына

MA перпендикуляры және MC мен MB көлбеулері жүргізілген (135-сурет). Егер $\angle AMC = 45°$ болса, ΔMCB-ның тікбұрышты болатынын дәлелдеп, оның ауданын табыңдар.

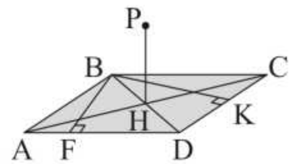
216. а) Ромбының жазықтығында жатпайтын нүкте оның төбелерінен бірдей қашықтықта орналасқан. Ромбының бұрыштарын табыңдар.
ә) M нүктесі шаршы жазықтығынан 1,4 дм, ал оның әр қабырғасынан 5 дм қашықтықта орналасқан. Шаршының ауданын табыңдар.

217. Қабырғасы 3 дм-ге тең дұрыс ΔABC берілген және оған O нүктесі центрі болатын шеңбер сырттай сызылған (136-сурет). Үшбұрыш жазықтығына ұзындығы 1,5 дм-ге тең OM перпендикуляры жүргізілген. M нүктесінен үшбұрыштың қабырғаларына дейінгі қашықтықтарды табыңдар.



136-сурет

218. $ABCD$ параллелограмының жазықтығына жүргізілген PH перпендикулярының табаны оның диагональдарының H қиылысу нүктесі болады, $PH = 0{,}8$ дм (137-сурет). Егер параллелограмның биіктіктері $BK = 3$ дм және $BF = 1{,}2$ дм болса, P нүктесінен оның қабырғаларына дейінгі қашықтықтарды табыңдар.



137-сурет

219. $\angle C = 90°$, $AC = 9$ см, $BC = 6$ см болатын ABC үшбұрышы берілген. M нүктесінен үшбұрыш жазықтығына MH перпендикуляры, мұндағы $H \in (ABC)$ және оның катеттерімен тең бұрыштар құрайтын MC көлбеуі жүргізілген. A нүктесінен бастап санағанда CH сәулесі үшбұрыштың гипотенузасын қандай қатынаста бөледі?

220. $\angle C = 90°$ болатын ΔABC берілген. M нүктесінен үшбұрыш жазықтығына MC перпендикуляры және MA мен MB көлбеулері жүргізілген. $MC = 2$ дм, $\angle MBC = 30°$, $\angle MAC = 45°$ болса, M нүктесінен AB қабырғасына дейінгі қашықтықты табыңдар.

221. $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см болатын ΔABC берілген. M нүктесінен үшбұрыш жазықтығына $MO = 4$ см перпендикуляры және MA, MB, MC тең көлбеулері жүргізілген. M нүктесінен үшбұрыштың қабырғаларына дейінгі қашықтықтарды табыңдар.

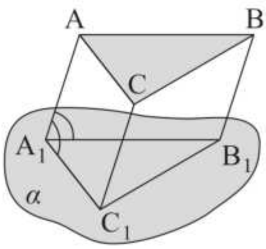
В деңгейі

222. Қабырғасы 9 см-ге тең дұрыс ΔABC-ның O центрі арқылы $PO \perp (ABC)$ түзуі жүргізілген, $PO = 12$ см. C нүктесі арқылы $CK \parallel PO$ түзуі жүргізілген және $CK = 0{,}8 \cdot PO$. Егер K мен P нүктелері: а) ABC жазықтығының бір жағында; ә) ABC жазықтығының әртүрлі жағында жататын болса, PK кесіндісінің ұзындығын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

223. а) P мен M нүктелері бір түзуде жатпайтын A, B, C нүктелерінен бірдей қашықтықта жатыр. PM түзуі ABC жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

ә) Үшбұрыштың қабырғалары 7 см, 15 см және 20 см. Үшбұрыштың әрбір төбесінен 32,5 см қашықтықтағы нүкте оның жазықтығынан қандай қашықтықта болады?

224. Кеңістікте: а) берілген екі нүктеден; ә) үшбұрыштың төбелерінен; б) тіктөртбұрыштың төбелерінен бірдей қашықтықта жататын барлық нүктелер жиыны қандай фигураны құрайды?



138-сурет

225. Теңқабырғалы ABC үшбұрышын қамтитын жазықтық α жазықтығына параллель. Үшбұрыштың төбелерінен α жазықтығын A_1, B_1, C_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген (138-сурет). $\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1$ екені белгілі болса, CBB_1C_1 тіктөртбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

226. ABC үшбұрышына ABX, ACX, BCX үшбұрыштары тең шамалы болатындай X нүктесі белгіленген. Үшбұрыш жазықтығына ұзындығы $5\frac{7}{9}$ дм-ге тең HX перпендикуляры жүргізілген. Егер $AB = 13$ дм, $BC = 5$ дм, $AC = 12$ дм болса, ABC жазықтығына жүргізілген HA, HB, HC көлбеулерінің ең кішісінің ұзындығын табыңдар.

С деңгейі

227. Үстірт қыратында орналасқан бірдей үш құрылғы бір мезгілде аспанда болған дене жарқылын анықтап белгіледі. Әр құрылғы денеге дейінгі қашықтықтың d-ға тең екенін анықтады. Егер құрылғылардың арақашықтықтары a, b, c болса, денеден қыратқа дейінгі қашықтықты қалай есептеуге болады?

Үстірт қыраты, Маңғыстау облысы

228. ΔABC-да $AB = 20$ см, $AC = 12$ см, AM – биссектриса. Осы үшбұрыш жазықтығына $MK = AM$ перпендикуляры жүргізілген. AK көлбеуінің ұзындығы 22 см-ден кем болатынын дәлелдеңдер.

229. O нүктесі центрі болатын шеңбер α жазықтығында орналасқан. Осы жазықтықтың H нүктесі арқылы шеңберге HM жанамасы мен (M – жанасу нүктесі) шеңберді N және K нүктелерінде қиятын HN қиюшысы жүргізілген, әрі $HK = 4$ см, $KN = 5$ см. PH кесіндісі α жазықтығына перпендикуляр. Егер $PO = 25$ см, $HO = \sqrt{85}$ см болса, PMO бұрышын, шеңбердің радиусын және PM кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

230. Теңбүйірлі ΔABC-да $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. K нүктесінің үшбұрыш жазықтығындағы ортогональ проекциясы – үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің O центрі. KH және OK түзулерінің арасындағы бұрыш 30°-қа тең болса, ABK үшбұрышының KH биіктігін табыңдар.

231. $PABC$ пирамидасының PA бүйір қыры оның биіктігі болады, ал табаны тікбұрышты ΔABC, оның $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, $AC = 5$ см. $AP = 5\sqrt{2}$ см болса, PO қашықтығын табыңдар, мұндағы O нүктесі – ΔABC-ға іштей сызылған шеңбердің центрі.

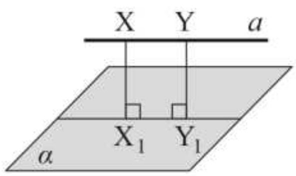
11. Түзулер мен жазықтықтардың арақашықтығы

Тақырыпты оқу барысында:

• екі айқас түзуге ортақ перпендикулярдың анықтамасын білесіңдер;

• айқас түзулердің, түзу мен жазықтықтың параллельдігінің, параллель жазықтықтардың арақашықтықтарының анықтамасын білесіңдер;

• осы арақашықтықтарды есептер шығаруда қолданасыңдар.



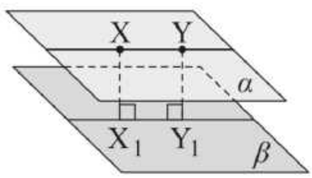
139-сурет

Егер түзу жазықтыққа параллель болса, онда оның барлық нүктелері осы жазықтықтан бірдей қашықтықта болады. 139-суретті пайдаланып, осы қасиетті түсіндіріңдер.

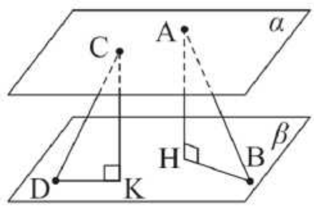
Түзу мен оған параллель жазықтықтың арақашықтығы деп түзудің кез келген нүктесінен осы жазықтыққа дейінгі қашықтық аталады.

Сол сияқты, жазықтықтың кез келген нүктесінен оған параллель жазықтыққа дейінгі қашықтықтың бірдей болатынын анықтауға болады (140-сурет).

Параллель жазықтықтардың арақашықтығы деп олардың біреуінің кез келген нүктесінен екінші жазықтыққа дейінгі қашықтықты айтады.



140-сурет



141-сурет

1 - е с е п. α және β параллель жазықтықтарының арасына AB мен CD кесінділері орналастырылған (141-сурет), олардың ұзындықтарының қосындысы 342 см, ал жазықтықтардың біріне түскен ортогональ проекцияларының ұзындықтары 78 см және 36 см. Жазықтықтардың арақашықтығын табу керек.

Ш е ш у і. Берілген кесінділердің проекция жазықтығына AH пен CK перпендикулярларын жүргіземіз, сонда $AH = CK$ болады. $AB = x$ см болсын, сонда $CD = (342 - x)$ см болады. Тікбұрышты AHB мен CKD үшбұрыштарынан мынаны аламыз:

$(342 - x)^2 - 78^2 = x^2 - 36^2$; $(342 - x)^2 - x^2 = 78^2 - 36^2$;

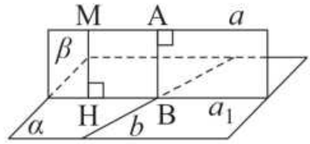
$342 \cdot (342 - 2x) = 114 \cdot 42$; $342 - 2x = 14$; $x = 164$.

Сонда $AH = \sqrt{164^2 - 36^2} = \sqrt{200 \cdot 128} = 160$ (см).

Ж а у а б ы. 160 см.

Т е о р е м а. **Екі айқас түзудің әрқайсысын қиятын және оларға перпендикуляр болатын бір ғана түзу бар болады.**

Д ә л е л д е у і. Айқас a мен b түзулері берілген болсын. a түзуіне параллель және b түзуін қамтитын α жазықтығын саламыз. a түзуінен M нүктесін алып, одан α жазықтығына MH перпендикулярын жүргіземіз (142-сурет). Қиылысатын a мен MH түзулері арқылы өтетін β жазықтығын саламыз. α мен β жазықтықтарының қиылысу түзуін a_1 деп, ал b мен a_1 түзулерінің қиылысу нүктесін B деп белгілейік. β жазықтығында a түзуіне BA перпендикулярын жүргіземіз, сонда MH пен AB түзулері параллель және AB түзуі α жазықтығына перпендикуляр. Демек, бұл түзу a және b түзулерінің әрқайсысына перпендикуляр.



142-сурет

AB түзуі жалғыз екенін дәлелдейік. a мен b түзулерінің әрқайсысына перпендикуляр болатын және оларды қиятын тағы бір A_1B_1 түзуі бар болады деп жорық. Сонда AB мен A_1B_1 түзулері параллель болып, A, B, A_1, B_1 нүктелері бір жазықтықта жатуы керек, бұл айқас түзулердің анықтамасына қайшы келеді. Ендеше біздің жоруымыз қате, демек, AB түзуі жалғыз. Теорема дәлелденді.

AB кесіндісін a мен b айқас түзулерінің ортақ перпендикуляры деп атайды.

*Екі айқас түзудің **ортақ перпендикуляры** деп ұштары осы түзулерде жататын, олардың әрқайсысына перпендикуляр кесіндіні атайды.* **Айқас түзулердің арақашықтығы деп олардың ортақ перпендикулярының ұзындығын атайды.**

Келесі қасиеттерді атап өтейік:

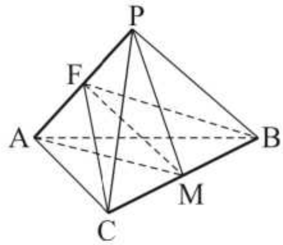
1) *екі айқас түзудің ортақ перпендикулярының ұзындығы ұштары осы түзулерде жататын басқа кесінділердің кез келгенінің ұзындығынан қысқа;*

2) *айқас түзулердің бірінен оған параллель және екінші түзуді қамтитын жазықтыққа дейінгі қашықтық осы айқас түзулердің арақашықтығына тең;*

3) *екі айқас түзудің арақашықтығы осы айқас түзулерді қамтитын екі параллель жазықтықтың арақашықтығына тең.*

Осы қасиеттерді өздігінен дәлелдеңдер.

2 - е с е п. Қыры a-ға тең дұрыс $PABC$ тетраэдрі берілген. AP мен BC түзулерінің арақашықтығын табу керек.



143-сурет

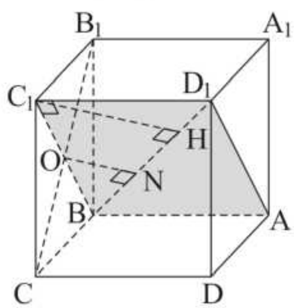
Ш е ш у і. AP мен BC кесінділерінің сәйкесінше орталары болатын F және M нүктелерін белгілейміз (143-сурет). Сонда FM кесіндісі – AP мен BC айқас түзулерінің ортақ перпендикуляры, өйткені $FM \perp BC$ және $MF \perp AP$, сәйкесінше, теңбүйірлі BFC мен APM үшбұрыштарының табандарына жүргізілген медианалары ретінде. Пифагор теоремасы бойынша ΔAMF-тен мынаны аламыз:

$$MF^2 = AM^2 - AF^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4}; MF = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ж а у а б ы. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

3 - е с е п. Қыры a-ға тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. BD_1 мен B_1C түзулерінің ортақ перпендикулярын салып, оның ұзындығын табу керек.

Ш е ш у і. Кубтың BD_1 диагоналін қамтитын ABC_1D_1 қимасын саламыз (144-сурет). $B_1C \perp BC_1$ және $B_1C \perp C_1D_1$ болғандықтан, $B_1C \perp (BC_1D_1)$ болады (түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі бойынша). Сонда, егер B_1C кесіндісінің ортасындағы O нүктесінен BD_1 диагоналіне ON перпендикулярын жүргізсек, онда ON екі айқас BD_1 мен B_1C түзулерінің ортақ перпендикуляры болады.



144-сурет

Кесінділердің $BN : BD_1$ қатынасын табайық. Ол үшін $BC_1 = a\sqrt{2}$, $BD_1 = a\sqrt{3}$ болатын тікбұрышты ΔBC_1D_1-ді пайдаланамыз. C_1H осы үшбұрыштың биіктігі болсын, сонда $D_1C_1^2 = D_1B \cdot D_1H$, яғни $a^2 = a\sqrt{3} \cdot D_1H$. Бұдан $D_1H = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \cdot BD_1$, ал $BH = \frac{2}{3} \cdot BD_1$ болады.

ON кесіндісі ΔBC_1H-тың орта сызығы болатынын ескере отырып, N нүктесі BH кесіндісінің ортасы болатынын аламыз, демек, $BN = \frac{1}{3} \cdot BD_1$. Фалес теоремасын пайдаланып, N нүктесін саламыз. BON үшбұрышынан Пифагор теоремасы бойынша: $ON^2 = OB^2 - BN^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{6}$, $ON = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

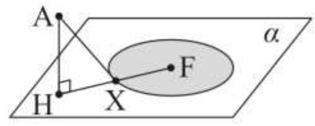
Ж а у а б ы. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Нүктеден фигураға дейінгі қашықтық ең қысқа жолмен өлшенеді.

Бір жазықтықта жатпайтын нүктеден фигураға дейінгі қашықтық деп осы нүктеден берілген фигураның ең жақын нүктесіне дейінгі қашықтық аталады.

Т е о р е м а. ***α* жазықтығында жатқан *F* фигурасының *X* нүктесі *A* нүктесінің осы жазықтықтағы ортогональ проекциясына ең жақын нүкте болса, онда ол *A* нүктесіне ең жақын нүкте болады.**

Д ә л е л д е у і. H нүктесі A нүктесінің α жазықтығындағы ортогональ проекциясы болсын, $H \notin F$ (145-сурет). $X \in F$ нүктесін алайық, сонда Пифагор теоремасы бойынша $AX^2 = AH^2 + HX^2$. AH қашықтығы тұрақты болатындықтан, бұл теңдіктен, егер HX қашықтығы ең аз болса, AX қашықтығының да ең аз болатыны шығады. Демек, F фигурасының X нүктесі A нүктесіне ең жақын нүкте болады.



145-сурет

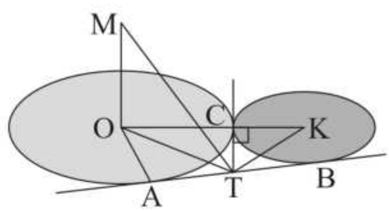
Бұл теоремадан шығатыны, берілген A нүктесіне F фигурасының ең жақын X нүктесін былай табуға болады: алдымен A нүктесіне фигура жатқан жазықтыққа тиісті ең жақын H нүктесін, содан кейін H нүктесіне ең жақын болатын F фигурасының ізделінді X нүктесін табамыз.

Әртүрлі жазықтықтарда орналасқан екі фигураның арақашықтығы деп осы фигуралардың ең жақын екі нүктесінің, егер ондай нүктелер бар болса, арақашықтығы аталады.

F_1 және F_2 фигураларының, сәйкесінше, ең жақын A және B нүктелері – ол кез келген $M \in F_1$, $N \in F_2$ нүктелері үшін $AB \leq MN$ теңсіздігі ақиқат болатын нүктелер.

4 - е с е п. Центрлері O және K нүктелерінде, радиустары, сәйкесінше, 16 см және 9 см болатын, бір жазықтықта жататын екі дөңгелектің тек бір ортақ C нүктесі бар. Осы дөңгелектерге ортақ AB жанамасы, мұндағы A мен B, сәйкесінше, дөңгелектермен жанасу нүктелері, және CT жанамасы жүргізілген, мұндағы T – осы жанамалардың қиылысу нүктесі. Ұзындығы 48 см-ге тең OM кесіндісі – дөңгелектер жазықтығына перпендикуляр. M нүктесінен: а) AB түзуіне; ә) TB кесіндісіне дейінгі қашықтықты табу керек.

Ш е ш у і. а) Үш перпендикуляр туралы теорема бойынша $MA \perp AB$, өйткені MA көлбеуінің OA ортогональ проекциясы жанасу нүктесіне жүргізілген радиустың қасиеті бойынша AB-ға перпендикуляр (146-сурет). Пифагор теоремасы бойынша $MA = \sqrt{48^2 + 16^2} = 16\sqrt{10}$ (см).



146-сурет

ә) M нүктесінен TB кесіндісіне дейінгі қашықтық MT кесіндісінің ұзындығы болады, себебі MT кесіндісі – барлық MX көлбеулерінің ішіндегі ең кішісі, мұндағы X нүктесі TB кесіндісіне тиісті. TO және TK кесінділерін жүргіземіз, сонда бір нүктеден шеңберге жүргізілген жанамалардың қасиеті бойынша TO және TK, сәйкесінше, ATC және BTC бұрыштарының биссектрисалары. Демек, OTK бұрышы тік, себебі ол ATB жазыңқы бұрышының жартысына тең.

Тікбұрышты ΔOTK-да CT кесіндісі – биіктік, $CT = \sqrt{OC \cdot CK} = \sqrt{16 \cdot 9} = 12$ (см). Пифагор теоремасы бойынша $OT = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$ (см), $MT = \sqrt{OM^2 + OT^2} = \sqrt{48^2 + 20^2} = 52$ (см).

Ж а у а б ы. а) $16\sqrt{10}$ см; ә) 52 см.

СҰРАҚТАР

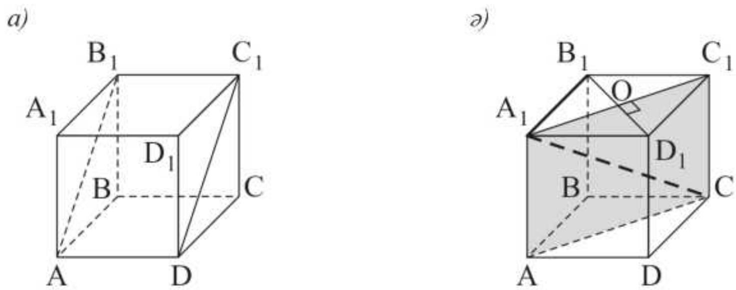
1. а) Нүктеден жазықтыққа дейінгі арақашықтық; ә) түзуден оған параллель жазықтыққа дейінгі арақашықтық; б) параллель түзулердің арақашықтығы; в) айқас түзулердің арақашықтығы деп нені атайды?

2. Әртүрлі жазықтықтарда жататын екі фигураның арақашықтығы ретінде не алынады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

232. Қыры 1 дм-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген (147-сурет). 1) A_1 нүктесінен: а) BCC_1B_1 жағының жазықтығына; ә) BCD; б) B_1C_1D жазықтығына; 2) DD_1 түзуінен: в) A_1B_1; г) A_1C түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.



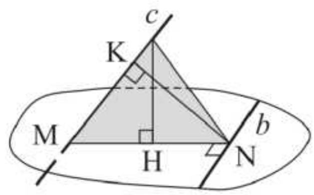
147-сурет

233. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде $AB = 1$ дм, $AD = 2$ дм, $AA_1 = 3$ дм. а) A_1 нүктесінен DC түзуіне дейінгі қашықтықты; ә) A_1C_1 және DC түзулерінің арақашықтығын; б) $A_1B_1C_1$ және MKD жазықтықтарының арақашықтығын табыңдар, мұндағы M және K нүктелері, сәйкесінше, AD мен CD кесінділерінің орталары.

234. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде $AB = 3$ см, $AD = 4$ см. а) A_1D мен BC_1; ә) DD_1 мен A_1C_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

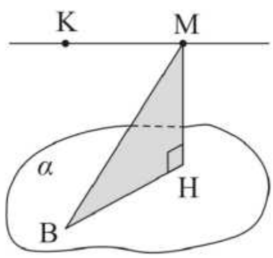
235. a түзуі жазықтыққа перпендикуляр және оны A нүктесінде қияды. b түзуі осы жазықтықта жатыр және A нүктесі арқылы өтпейді. AH кесіндісі b түзуіне перпендикуляр. AH кесіндісінің ұзындығы a мен b түзулерінің арақашықтығына тең екенін дәлелдеңдер.

236. c түзуі жазықтыққа перпендикуляр емес және оны M нүктесінде қияды. b түзуі осы жазықтықта жатыр және M нүктесі арқылы өтпейді. b түзуі c түзуінің осы жазықтықтағы ортогональ проекциясына перпендикуляр және оны N нүктесінде қияды (148-сурет). N нүктесі мен c түзуі арқылы жазықтық жүргізілген және c түзуіне NK перпендикуляры тұрғызылған. NK кесіндісінің ұзындығы c мен b түзулерінің арақашықтығына тең болатынын дәлелдеңдер.



148-сурет

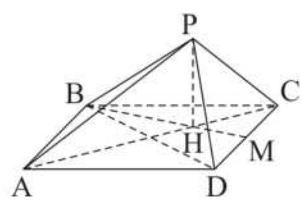
237. M нүктесінен α жазықтығына MH перпендикуляры мен MB көлбеуі жүргізілген. MK түзуі α жазықтығына параллель және MBH жазықтығында жатпайды (149-сурет). Егер MB көлбеуі мен оның α жазықтығындағы ортогональ проекциясы ұзындықтарының қосындысы 10 см-ге тең, ал олардың қатынасы $5 : 3$ болса, MK мен BH түзулерінің арақашықтығын табыңдар.



149-сурет

238. Қыры a-ға тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. BD мен CC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

239. $PABCD$ пирамидасының табаны – B бұрышы 120°-қа тең $ABCD$ ромбысы. PB, PC, PD қырларының әрқайсысы табан қабырғасына тең (150-сурет). PH кесіндісі неліктен пирамиданың биіктігі болатынын түсіндіріңдер, мұндағы H – BCD үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесі. Егер ромбының қабырғасы $\sqrt{2}$ дм-ге тең болса, PB мен CD түзулерінің арақашықтығын табыңдар.



150-сурет

240. Көлденең жазықтықта тігінен AB және CD бағандары орнатылған, олардың ұзындықтары, сәйкесінше, 2,5 м және 2 м. Бағанның табандарының BD қашықтығы 4 м-ге тең. а) A нүктесінен CD бағанына дейінгі қашықтықты; ә) AB мен CD бағандарының арақашықтығын табыңдар.

241. Радиусы 5 дм-ге тең шеңбердің A нүктесінен $AB = 6$ дм және $AC = 8$ дм болатын екі хорда жүргізілген. O центрінен шеңбер жазықтығына ұзындығы 4 дм-ге тең OM перпендикуляры тұрғызылған. M нүктесінен осы хордалардың әрқайсысына дейінгі қашықтықты табыңдар.

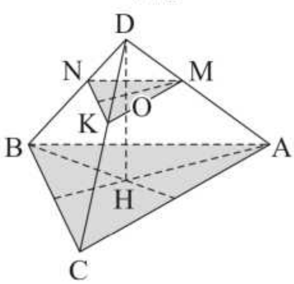
242. K нүктесінен тік бұрыштың қабырғаларына және төбесіне дейінгі қашықтық, сәйкесінше, $5\sqrt{7}$ см, $3\sqrt{41}$ см, 20 см. K нүктесінен тік бұрыштың жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

243. Ромбының бір қабырғасы α жазықтығында жатыр, ал басқасы осы жазықтықтан 8 см-ге тең қашықтықта орналасқан. Ромб диагональдарының α жазықтығындағы ортогональ проекциялары 16 см және 4 см. Ромб қабырғаларының осы жазықтықтағы ортогональ проекцияларын табыңдар.

B деңгейі

244. a, b, c түзулері α жазықтығында жатыр және қос-қостан параллель. α жазықтығында жатпайтын M нүктесінен осы түзулерге дейінгі қашықтықтар, сәйкесінше, $MA = 12{,}5$ см, $MB = 13$ см, $MC = 20$ см. A, B және C нүктелері бір түзуде жата ма? Егер M нүктесінен α жазықтығына дейінгі қашықтық 12 см-ге тең болса, a мен c түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

245. Ұзындығы a-ға тең AB кесіндісі α жазықтығына параллель және одан қашықтығы h-қа тең. α жазықтығына түсірілген AM және BN көлбеулері AB түзуіне перпендикуляр және ұзындықтары c-ға тең. AN көлбеуінің α жазықтығындағы ортогональ проекциясының ұзындығын табыңдар.



151-сурет

246. $DABC$ пирамидасының табаны – дұрыс үшбұрыш және пирамиданың барлық бүйір қырлары тең. AD қырының M нүктесі арқылы табанына параллель және пирамиданың биіктігін D нүктесінен бастап есептегенде $2:3$ қатынасына бөлетін MNK қимасы жүргізілген ($N \in DB$, $K \in DC$) (151-сурет). Егер $AB = 4{,}5$ дм, $AD = 3$ дм болса, BC және MN түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

247. *PABC* дұрыс тетраэдрінің *PC* бүйір қырының ортасындағы *M* нүктесі арқылы *AP* қырына параллель түзу жүргізілген. Егер тетраэдрдің қыры *a*-ға тең болса, сол түзуден *AB* түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

248. *DABC* тетраэдрінде $AB = CD = 3\sqrt{2}$ см, ал қалған әрбір қыры 5 см-ге тең. *AB* мен *CD* түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

C деңгейі

249. *AC* жарты шеңбері ұзындықтарының қатынасы 1 : 2 болатын *AB* және *BC* доғаларына бөлінген және *AB* мен *BC* хордалары жүргізілген. *ABC* жазықтығының бір жағында орналасқан және оған перпендикуляр болатын *AM* және *NC* кесінділері жүргізілген. Егер $AM - NC = BC - AB = 10$ см болса, *MN* қашықтығын табыңдар.

250. Шерқала жартасының төбесіндегі *A* нүктесі оның етегіндегі *B* нүктесінен көлденең жазықтыққа 50° бұрышпен көрінеді, ал осы жазықтықтың *C* нүктесі *B* нүктесінен 400 м қашықтықта орналасқан. Егер $\angle CBH = 60°$, $\angle BCH = 40°$ болса, осы жартастың *AH* биіктігін метрмен табыңдар.

Ақмыш шатқалындағы Шерқала жартасы, Маңғыстау облысы

251. *SABC* дұрыс тетраэдрінің *ABC* табаны медианаларының қиылысу нүктесінен *AC* және *BS* түзулеріне параллель қима жүргізілген. Тетраэдрдің қырлары 24 см-ге тең болса, қиманың ауданын және *AC* түзуінен қима жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

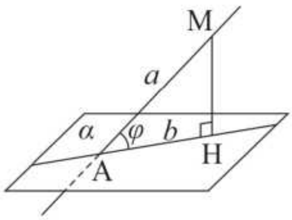
252. *DABC* пирамидасының табаны – дұрыс үшбұрыш, оның барлық бүйір қырлары 13 см-ден, ал пирамиданың биіктігі 11 см. *DC* қырына $DM : MC = 2 : 1$ қатынасындай болатын *M* нүктесі белгіленген және *DB* қырына параллель *MN* түзуі жүргізілген. *ADC* үшбұрышының *DH* медианасынан *MN* түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

12. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

Тақырыпты оқу барысында:

• түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыштың анықтамасын білесіңдер;

• түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрышты кескіндейсіңдер және оның шамасын табасыңдар.

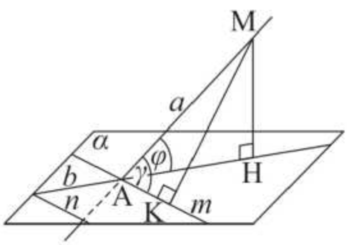


152-сурет

Түзу мен оған перпендикуляр жазықтық арасындағы бұрыш 90°-қа, ал түзу мен оған параллель жазықтық арасындағы бұрыш 0°-қа тең деп алынады.

Түзу мен оған перпендикуляр болмайтын жазықтық арасындағы бұрыш деп осы түзу мен оның жазықтықтағы ортогональ проекциясының арасындағы бұрыш аталады. 152-суретте a түзуі мен α жазықтығы арасындағы $\angle MAH = \varphi$, $\mathbf{0° \le \varphi < 90°}$.

Т е о р е м а. **Жазықтыққа перпендикуляр емес түзу мен оның осы жазықтықтағы ортогональ проекциясының арасындағы бұрыш берілген түзудің осы жазықтықта жататын түзулермен құрайтын барлық бұрыштарының ең кішісі болады.**



153-сурет

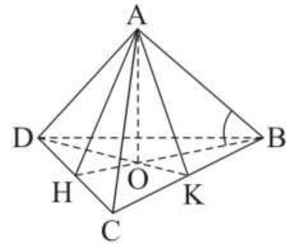
Д ә л е л д е у і. α жазықтығында жататын, A нүктесінен өтетін және AM түзуінің осы жазықтықтағы ортогональ проекциясы болатын AH түзуінен өзге m түзуін қарастырайық (153-сурет). AM және m түзулерінің арасындағы бұрышты γ деп белгілейік және $\gamma > \varphi$ болатынын дәлелдейік. M нүктесінен m түзуіне MK перпендикулярын жүргізейік. Егер K нүктесі A нүктесімен беттессе, онда $\gamma = 90°$ және $\gamma > \varphi$ болады.

K мен A нүктелері беттеспейтін жағдайды қарастырайық. Сонда тікбұрышты AMK және AMH үшбұрыштарында $MK > MH$ (бір нүктеден α жазықтығына жүргізілген MK көлбеуінің ұзындығы MH перпендикулярының ұзындығынан артық болады), ал $\sin\gamma > \sin\varphi$. γ мен φ сүйір бұрыштар болғандықтан, $\gamma > \varphi$.

A нүктесінен өтпейтін және α жазықтығында жататын кез келген n түзуі мен MA түзуінің арасындағы бұрыш үшін дәлелдеуді екі айқас түзудің арасындағы бұрыш ұғымын пайдаланып, өздігінен орындаңдар.

1 - е с е п. Қыры a-ға тең $DABC$ дұрыс тетраэдрі берілген. AB түзуі мен BCD жазықтығы арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табу керек.

Ш е ш у і. Берілген тетраэдрдің барлық жақтары тең болғандықтан, BCD жағын оның табаны деп алайық. AB түзуі мен BCD жазықтығы арасындағы бұрыш – осы түзу мен оның берілген жазықтықтағы ортогональ проекциясының арасындағы бұрыш. Сол проекцияны салу үшін A нүктесінен BCD жазықтығына перпендикуляр жүргізу керек. AB, AC және AD көлбеулері тең болғандықтан, AO перпендикулярының BCD жазықтығындағы табаны – ΔBCD-ға сырттай сызылған шеңбердің центрі. ΔBCD теңқабырғалы болғандықтан, ол BH пен DK медианаларының қиылысу нүктесі болады (154-сурет). Сонда AB түзуінің BCD жазықтығындағы проекциясы – BO түзуі, демек, ABO – ізделінді бұрыш. ΔABO-дан мынаны табамыз:



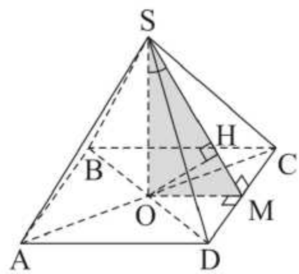
154-сурет

$\cos\angle ABO = \dfrac{BO}{AB} = \left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right) : a = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$, бұдан $\angle ABO \approx 55°$.

Ж а у а б ы. $\approx 55°$.

2 - е с е п. $SABCD$ пирамидасының $ABCD$ табаны – шаршы, ал бүйір қырлары тең. Табанына жүргізілген SO перпендикуляры мен SDC жазықтығының арасындағы бұрышты салу керек.

Ш е ш у і. O – табан диагональдарының қиылысу нүктесі, $SO \perp AC$ және $SO \perp BD$ (себебін түсіндіріңдер), яғни $SO \perp (ABC)$. SO түзуі SDC жазықтығына көлбеу, оның ортогональ проекциясын салайық. Ол үшін SOM үшбұрышының OH биіктігін жүргіземіз, мұндағы M нүктесі DC қабырғасының ортасы (155-сурет) және OH кесіндісі SDC жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдейік.

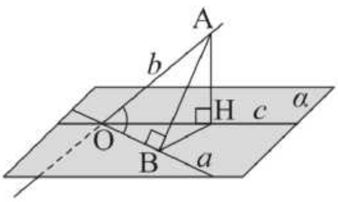


155-сурет

Салуымыз бойынша $OH \perp SM$ және $OH \perp DC$, себебі $DC \perp (SOM)$, бұдан $OH \perp (SDC)$ екені шығады. Демек, SH кесіндісі – SO көлбеуінің SDC жазықтығындағы ортогональ проекциясы және OSM – ізделінді бұрыш.

3 - е с е п. a түзуі α жазықтығында жатыр, ал b түзуі осы жазықтықты a түзуіне тиісті қайсыбір нүктеде қиып өтеді. c түзуі – b түзуінің α жазықтығындағы ортогональ проекциясы. $\cos\angle(b;\ a) = \cos\angle(b;\ c)\cdot\cos\angle(c;\ a)$ болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. Берілген түзулер α жазықтығының O нүктесі арқылы өтетін болсын (156-сурет). Көрсетілген бұрыштары бойынша тікбұрышты



156-сурет

үшбұрыштар саламыз. Ол үшін b түзуінде жататын кез келген A нүктесін α жазықтығына проекциялаймыз, содан кейін алынған H нүктесінен a түзуіне HB перпендикулярын жүргіземіз. Сонда AB көлбеуі a түзуіне перпендикуляр болады (үш перпендикуляр туралы теорема бойынша). ΔAOH-тан мынаны аламыз: $\cos\angle AOH=\frac{OH}{OA}$, ΔHOB-дан: $\cos\angle HOB=\frac{OB}{OH}$, ΔAOB-дан: $\cos\angle AOB=$ $=\frac{OB}{OA}$. Сонда $\cos\angle AOH\cdot\cos\angle HOB=\frac{OH}{OA}\cdot\frac{OB}{OH}=\frac{OB}{OA}=\cos\angle AOB$, дәлелдеу керегі де осы еді.

СҰРАҚТАР

1. Егер түзу мен жазықтық: а) параллель; ә) перпендикуляр болса, олардың арасындағы бұрыш неге тең?

2. Түзу мен оған перпендикуляр емес жазықтықтың арасындағы бұрыш деп нені атайды?

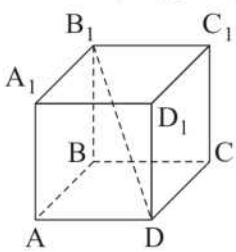
ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

253. а) Бақылау пунктінен ұшып бара жатқан құсқа дейінгі арақашықтық ұзармайтыны, ал көкжиектің үстінен құс көрінетін бұрыш азаятыны байқалды. Бұл құс көтеріліп бара ма, әлде төмендеп бара ма?

ә) Шуақты күнде ағаш көлеңкесіне екі бақылау: біреуі түске дейін, ал екіншісі тал түсте жүргізілді. Қай кезде көлеңке ұзын болды?

б) Жердегі қайсыбір нүктеден баған α бұрышымен көрінеді. Осы бағанның α бұрышымен көрінетін барлық нүктелер жиыны жерде қандай фигура құрайды?



157-сурет

254. Ұзындығы 18 см-ге тең AB кесіндісі α жазықтығын қияды, ал оның ұштары жазықтықтан 4 см және 5 см қашықтықта жатыр. AB түзуі мен α жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

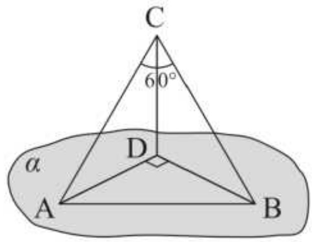
255. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген (157-сурет). 1) B_1D кесіндісінің: а) $ABCD$; ә) DD_1C_1C; б) BB_1C_1C жағының жазықтығына түскен ортогональ проекциясы болатын кесіндіні көрсетіңдер. 2) B_1D түзуінің DD_1C_1 жазықтығына көлбеулік бұрышының тангенсін табыңдар.

256. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің табаны – шаршы. Параллелепипедтің B_1D диагоналі мен оның DD_1C_1C бүйір жағының арасындағы бұрыш 30°-қа тең. Осы диагональ мен табан жазықтығы арасындағы бұрышты табыңдар.

257. $ABCD$ шаршысының B төбесінен оның жазықтығына перпендикуляр BH кесіндісі жүргізілген, $BH = 10$ см. HA түзуі шаршы жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. HD түзуінің шаршы жазықтығына көлбеулік бұрышын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

258. Тікбұрышты ABC үшбұрышының ($\angle C = 90°$) жазықтығына ұзындығы 24 см-ге тең DC перпендикуляры тұрғызылған. $AC = 12$ см, $BC = 16$ см, O нүктесі – ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі. DA, DB және DO түзулерінің ABC жазықтығына көлбеулік бұрыштарын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

259. а) C нүктесінен α жазықтығына өзара тең CA және CB көлбеулері жүргізілген. Олардың арасындағы бұрыш 60°-қа, ал олардың α жазықтығындағы ортогональ проекцияларының арасындағы бұрыш 90°-қа тең (158-сурет). AC түзуі мен α жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

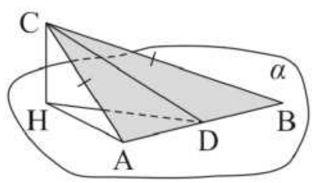


158-сурет

ә) C нүктесінен α жазықтығына өзара тең CA және CB көлбеулері жүргізілген. Көлбеулердің әрқайсысы α жазықтығымен 30° бұрыш жасайды, ал олардың α жазықтығындағы ортогональ проекцияларының арасындағы бұрыш 120°-қа тең. Егер $AB = 15$ см болса, C нүктесінен α жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

260. $SABCD$ пирамидасының табаны – $ABCD$ тіктөртбұрышы. SB бүйір қыры оның табан жазықтығына перпендикуляр, ал SA мен SC бүйір қырлары табан жазықтығымен, сәйкесінше, 45° және 30° бұрыш жасайды және $SC = 8$ см. SD қырының ұзындығын және SD түзуі мен табан жазықтығының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

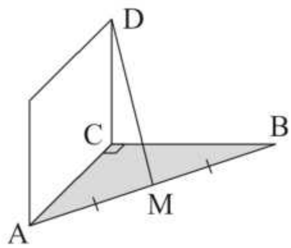
261. Теңбүйірлі ABC үшбұрышының AB табаны α жазықтығында жатыр (159-сурет). Егер $AB = 20$ см, $AC = 22$ см, ал AC кесіндісінің α жазықтығындағы ортогональ проекциясы 14 см-ге тең болса, осы үшбұрыштың CD биіктігі мен α жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.



159-сурет

262. *SABCD* пирамидасы берілген, оның бүйір қырлары тең, ал *ABCD* табаны – шаршы. Пирамиданың *SO* биіктігі h-қа тең, ал *SDC* бүйір жағының *SH* биіктігі табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. Пирамиданың бүйір қыры мен табан жазықтығының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

263. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы α жазықтығында жатыр, ал оның катеттері осы жазықтықпен 30° және 45° бұрыш құрайды. Үшбұрыштың гипотенузаға жүргізілген биіктігі мен α жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.



160-сурет

264. *DC* кесіндісі теңбүйірлі тікбұрышты *ABC* үшбұрышының жазықтығына перпендикуляр ($\angle C = 90°$). *M* нүктесі – *AB* гипотенузасының ортасы (160-сурет). $DC = AC$ болса, *DM* түзуі мен *ACD* жазықтығының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

265. Алаңға тігінен орнатылған *CA* және *DB* бағандарының биіктіктері, сәйкесінше, 6 м және 9 м, ал олардың табандарының *AB* қашықтығы $5\sqrt{3}$ м-ге тең. *AB* кесіндісінің *M* нүктесіне қадау қағылған, ол бағандардың төбелерімен алаңға бірдей көлбей қатты тартылған *MC* және *MD* арқандарымен біріктірілген. *MC* және *MD* арқандарының алаңға көлбеулік бұрышын табыңдар.

266. *SABCD* пирамидасының табаны – шаршы, оның *SB* бүйір қыры табан жазықтығына перпендикуляр, ал *SD* қыры *ABC* жазықтығымен α бұрышын құрайды. *SD* қыры мен *SBC* жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

267. Теңбүйірлі ΔABC-ға іштей сызылған шеңбердің *O* центрінен оның жазықтығына 5 см-ге тең *OD* перпендикуляры тұрғызылған. $AB = 16$ см, $BC = AC = 10$ см болса, *DC* түзуі мен *ABC* жазықтығының арасындағы бұрышты (1°-қа дейінгі дәлдікпен) және *D* нүктесінен ΔABC-ның қабырғаларына дейінгі қашықтықтарды табыңдар.

B деңгейі

268. Тікбұрышты *ABC* ($\angle C = 90°$) үшбұрышының жазықтығына ұзындығы a-ға тең *DC* перпендикуляры тұрғызылған. *DA* және *DB* түзулері *ABC* жазықтығымен, сәйкесінше, 45° және 30° бұрыш құрайды. *D* нүктесінен *AB* түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

269. $\angle A = 60°$, $AB = a$ болатын $ABCD$ ромбысының жазықтығына MD перпендикуляры жүргізілген. MB түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыш 60°-қа тең. MB түзуі мен CDM жазықтығының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

270. ΔABC-ның C тік бұрышының төбесі арқылы AB гипотенузасына параллель α жазықтығы жүргізілген. BC мен AC түзулерінің α жазықтығымен, сәйкесінше, 45° және 30° бұрыш құрайтыны белгілі, ал BC катетінің осы жазықтықтағы ортогональ проекциясы 3 м-ге тең. Гипотенузаның α жазықтығындағы ортогональ проекциясын табыңдар.

271. Пирамиданың табаны – қабырғалары 13 см, 14 см, 15 см-ге тең үшбұрыш, ал бүйір қырлары табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

272. Үшбұрышты пирамиданың табаны – дұрыс үшбұрыш, ал бүйір қырлары 16 см-ге тең. Пирамиданың биіктігін оның төбесінен бастап есептегенде 1 : 3 қатынасына бөлетін нүкте арқылы табанына параллель қима жүргізілген. Егер пирамиданың бүйір қырлары табан жазықтығына 60° бұрышпен көлбеген болса, осы қиманың ауданын табыңдар.

С деңгейі

273. $DABC$ пирамидасының табаны – теңбүйірлі үшбұрыш, оның қабырғалары $AC = BC$ және $AB = 12$ см. DC бүйір қыры табан жазықтығына перпендикуляр және ұзындығы $8\sqrt{3}$ см-ге тең. Егер ABD үшбұрышының DH биіктігі ABC жазықтығымен 60° бұрыш құрайтын болса, ΔABC-ға іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

274. M нүктесінен α жазықтығына MA және MB көлбеулері жүргізілген, олардың ұзындықтары, сәйкесінше, $14\sqrt{3}$ см және 14 см. Осы көлбеулердің α жазықтығымен жасайтын бұрыштарының айырымы 30°-қа тең болса, олардың осы жазықтықтағы ортогональ проекцияларының ұзындықтарын табыңдар.

275. AB түзуі α жазықтығын B нүктесінде қияды, ал BM түзуі осы жазықтықта жатыр, BC түзуі – AB түзуінің α жазықтығындағы ортогональ проекциясы. $\angle CBM = 25°$, $\angle ABM = 75°$ екені белгілі болса, AB түзуі мен α жазықтығының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

276. $PABC$ пирамидасының әрбір бүйір қыры табан жазықтығына φ бұрышымен көлбеген. Егер $BC = a$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ болса, осы пирамиданың биіктігін табыңдар.

13. Екіжақты бұрыш.
Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

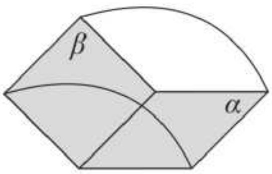
Тақырыпты оқу барысында:

• екіжақты бұрыштың, оның сызықтық бұрышының, екі жазықтықтың арасындағы бұрыштың анықтамаларын білесіңдер;

• көрсетілген бұрыштарды кескіндейсіңдер және олардың шамаларын табасыңдар.

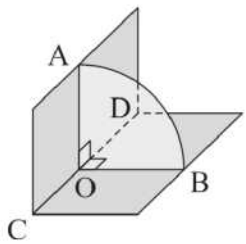
Шекарасы ортақ екі жарты жазықтық кеңістікті екі бөлікке бөледі. **Шекарасы ортақ екі жарты жазықтықтан және кеңістіктің олармен бөлінетін екі бөлігінің бірінен тұратын фигура екіжақты бұрыш деп аталады** (161-сурет).

Екіжақты бұрышты құрайтын жарты жазықтықтар оның *жақтары* деп аталады. Екіжақты бұрыштың екі жағы бар, оның атауы да осыған байланысты. Жарты жазықтықтардың ортақ шекарасы екіжақты бұрыштың *қыры* деп аталады. Біздің айналамызда екіжақты бұрыштың мысалы болатындай көптеген заттар бар, мысалы, үйдің шатыры, жартылай ашық бума, бөлменің екі іргелес қабырғасы.



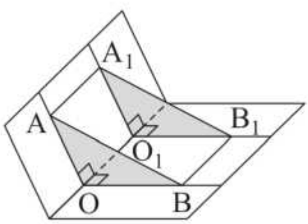
161-сурет

Екіжақты бұрыш былай өлшенеді: екіжақты бұрыштың қырына қандай да бір нүкте белгілеп, осы нүктеден әрбір жағына қырына перпендикуляр болатындай сәулелер жүргізеді. Осы сәулелерден құралған бұрыш *екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы* деп аталады.



162-сурет

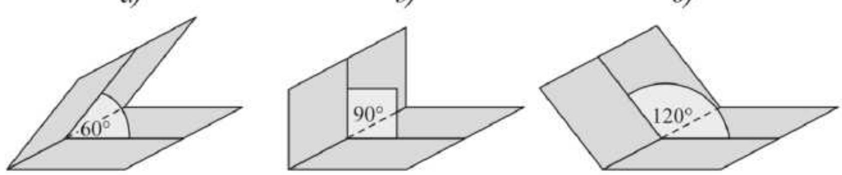
Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы деп төбесі оның қырында, ал қабырғалары оның жақтарында жататын және осы қырына перпендикуляр болатын бұрыш аталады. 162-суретте AOB бұрышы – қыры CD болатын екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы.



163-сурет

AOB сызықтық бұрышының жазықтығы екіжақты бұрыштың қырына перпендикуляр (неге екенін түсіндіріңдер). Екіжақты бұрыштың шексіз көп сызықтық бұрыштары бар. *Екіжақты* *бұрыштың барлық сызықтық бұрыштары тең.* Осы қасиетін 163-суретті пайдаланып түсіндіріңдер.

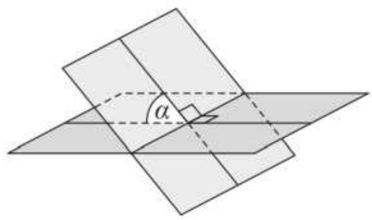
Екіжақты бұрыштың градустық өлшемі деп оның сызықтық бұрышының градустық өлшемі аталады. Мысалы, 164, *а*-суретте градустық өлшемі 60°-қа тең екіжақты бұрыш кескінделген (қысқаша екіжақты бұрыш 60°-қа тең деп айтады).



164-сурет

Егер екіжақты бұрыш 90°-қа тең болса, оны *тік* бұрыш деп, 90°-тан кем болса, *сүйір* бұрыш деп, ал егер 90°-тан артық, бірақ 180°-тан кем болса, *доғал* бұрыш деп атайды. 164, *а*-суреттегі екіжақты бұрыш сүйір, 164, *ә*-суретте тік, ал 164, *б*-суретте доғал.

Екі қиылысатын жазықтық қыры ортақ төрт екіжақты бұрышты құрайды (165-сурет). Егер осы екіжақты бұрыштардың бірі α-ға тең болса, онда басқа бұрыштар $180° - \alpha$, α, $180° - \alpha$ болады. Егер екіжақты бұрыштардың біреуі тік болса, онда басқалары да тік болады.



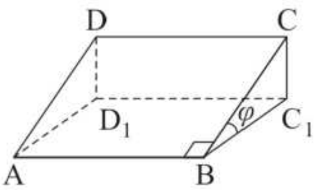
165-сурет

Қиылысатын екі жазықтықтың арасындағы бұрыштың градустық өлшемі деп олардың қиылысуынан пайда болған екіжақты бұрыштардың басқаларының әрқайсысынан үлкен болмайтын біреуінің градустық өлшемі аталады.

Қиылысатын жазықтықтардың арасындағы бұрыштың градустық өлшемі 90°-тан артық емес. Ол осы жазықтықтарда жатқан және қиылысу сызықтарына перпендикуляр түзулердің арасындағы бұрыштың шамасына тең. Беттесетін немесе параллель жазықтықтардың арасындағы бұрыш 0°-қа тең.

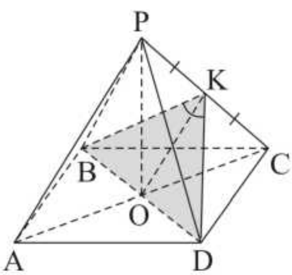
Егер екіжақты бұрыш көпжақтың қыры ортақ болатын іргелес екі жағын қамтитын жарты жазықтықтар арқылы жасалса, онда оны қысқаша көпжақтың осы қырындағы екіжақты бұрышы деп атайды, мысалы, пирамиданың бүйір қырындағы екіжақты бұрыш.

Іс жүзінде, көлденең жазықтықпен сүйір бұрыш құрайтын жазықтықты беткей деп атайды. Беткей мен оның проекциясы болатын жазықтық суретте екі тіктөртбұрыш түрінде кескінделеді, мысалы, $ABCD$ және ABC_1D_1 (166-сурет). CDD_1C_1 жазықтығы ABC_1D_1 көлденең жазықтығымен тік екіжақты бұрыш құрайды, ал CBC_1 бұрышы қыры AB болатын екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы болады. CB кесіндісі және ұштары AB мен CD кесінділерінде жататын оған параллель кез келген кесінді ең үлкен беткейдің сызығы деп, ал CBC_1 бұрышы беткейдің көлбеулігі деп аталады. Мысалы, ең үлкен беткейдің сызығы бойымен төбеден су ағады, егер жолдың көлбеулік беткейі 15°-тан кем болса, оның бойымен жаяу жүргіншілер мен көліктерге еркін қозғалуға рұқсат етіледі, ал егер 15°-тан артық болса, онда жолдың бөлігі қауіпті екенін ескертетін белгі орнатылады.



166-сурет

1 - е с е п. Әрбір қыры b-ға тең, табаны шаршы болатын төртбұрышты пирамиданың көршілес екі бүйір жағының арасындағы екіжақты бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табу керек.



167-сурет

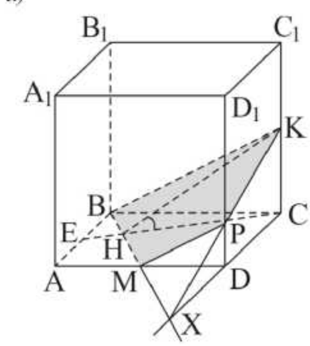
Ш е ш у і. $PABCD$ берілген төртбұрышты пирамида болсын (167-сурет). Оның бүйір жақтары – өзара тең дұрыс үшбұрыштар. PBC мен PCD жақтарынан құралған екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышын салайық. Ол үшін PC қырына DK мен BK перпендикулярларын жүргіземіз, K нүктесі – PC қырының ортасы (неге екенін түсіндіріңдер). BKD – ізделінді бұрыш. Тікбұрышты OKD үшбұрышынан мынаны аламыз: $\angle OKD = \frac{1}{2}\angle BKD$ (неге екенін түсіндіріңдер). $OD = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ (шаршы диагоналінің жартысы), $KD = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ (ΔPCD-ның медианасы). Сонда $\sin\angle OKD = \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 0{,}816$. Демек, $\angle OKD \approx 55°$, бұдан $\angle BKD \approx 110°$.

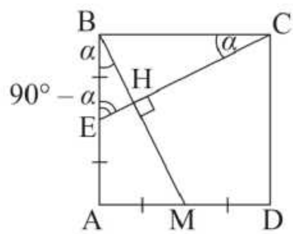
Ж а у а б ы. ≈ 110°.

2 - е с е п. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Кубтың BMK жазықтығымен қимасын, мұндағы M, K нүктелері, сәйкесінше, AD, CC_1 қырларының орталары, және қима жазықтығы мен $ABCD$ жағының жазықтығынан құралған екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышын салу керек.

Ш е ш у і. Ізделінді қима $BMPK$ төртбұрышы (168, *а*-сурет, мұндағы X – BM және CD түзулерінің қиылысу нүктесі).

Қима жазықтығы мен $ABCD$ жағының жазықтығынан құралған екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышын салу үшін осы жазықтықтарда берілген екіжақты бұрыштың BM қырына перпендикулярлар жүргізу керек. $ABCD$ шаршы болғандықтан, AB қабырғасының E ортасын алып, EC мен BM кесінділері перпендикуляр екенін білеміз (168, *ә*-сурет). Осы кесінділердің қиылысу нүктесін H деп белгілейміз, сонда үш перпендикуляр туралы теорема бойынша $KH \perp BM$. Демек, $\angle KHC$ – ізделінді бұрыш.



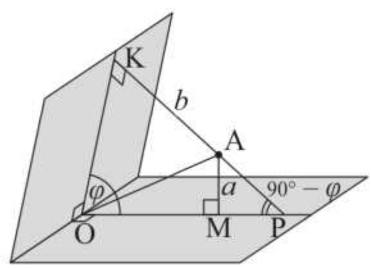


168-сурет

3 - е с е п. Екіжақты сүйір бұрыштың ішінен алынған A нүктесінен оның жақтарының біріне дейінгі қашықтық a дм-ге, ал екіншісіне дейін b дм-ге тең. Екіжақты бұрыштың шамасы φ-ге тең болса, A нүктесінен оның қырына дейінгі қашықтықты табу керек.

Ш е ш у і. $AM = a$, $AK = b$ және AO ізделінді қашықтық болсын (169-сурет).

Есептің шартынан $\angle MOK$ – екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы, ал AM және AK кесінділері MOK бұрышының қабырғаларына перпендикуляр болатыны шығады. KA сәулесін жүргізіп, оның OM сәулесімен қиылысу нүктесін P деп белгілейміз. Сонда



169-сурет

$AP = \dfrac{a}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \dfrac{a}{\cos\varphi}$, $PK = b + \dfrac{a}{\cos\varphi} = \dfrac{b \cdot \cos\varphi + a}{\cos\varphi}$, $OK = \dfrac{PK}{\operatorname{tg}\varphi} = \dfrac{b \cdot \cos\varphi + a}{\sin\varphi}$ болады.

Пифагор теоремасы бойынша:

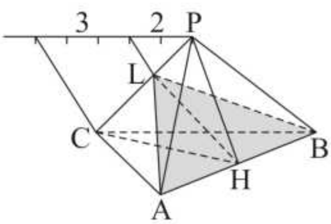
$$AO=\sqrt{b^2+\left(\frac{b\cos\varphi+a}{\sin\varphi}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi+a^2+2ab\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}=$$

$$=\frac{\sqrt{b^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+a^2+2ab\cos\varphi}}{\sin\varphi}=\frac{\sqrt{b^2+a^2+2ab\cos\varphi}}{\sin\varphi}.$$

Жауабы. $\dfrac{\sqrt{b^2+a^2+2ab\cos\varphi}}{\sin\varphi}$.

4 - есеп. Бүйір қырлары тең $PABC$ пирамидасы берілген, оның табаны – қабырғасы 3 дм-ге тең дұрыс ΔABC. APB бүйір жағының PH биіктігі $\sqrt{3}$ дм-ге тең. Пирамиданың AB қыры арқылы өтіп, осы қырындағы екіжақты бұрышты қақ бөлетін жазықтықпен қимасын салу керек.

Шешуі. PHC көрсетілген екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы болады, себебі шарт бойынша $PH \perp AB$, теңқабырғалы үшбұрыштың биіктігі $CH \perp AB$.



170-сурет

Ізделінді жазықтықты салу үшін PHC бұрышы биссектрисасының PC қырымен қиылысу L нүктесін табамыз (170-сурет). Үшбұрыш биссектрисасының қасиеті бойынша $CL : LP = CH : PH$. Сонда $CH = 1{,}5\sqrt{3}$ дм, демек, $CL : LP = 3 : 2$. Әрі қарай Фалес теоремасын қолданамыз, PC қырына C нүктесінен бастап санап, $3 : 2$ қатынасына бөліп, L нүктесінің орнын табамыз. Сонда ΔALB ізделінді қима болады.

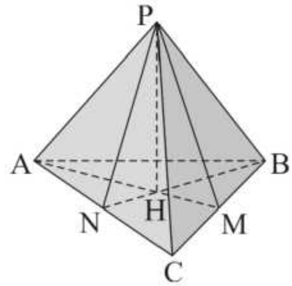
СҰРАҚТАР

1. Қандай фигура екіжақты бұрыш деп аталады?
2. Қандай бұрыш екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы деп аталады?
3. Екіжақты бұрыштың градустық өлшемі дегеніміз не?
4. Қандай екіжақты бұрыш: а) тік; ә) сүйір; б) доғал деп аталады?
5. Қиылысатын екі жазықтықтың арасындағы бұрыш дегеніміз не? Оның шамасы қандай болуы мүмкін?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

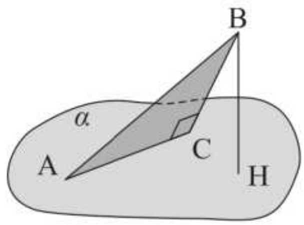
277. 171-суреттегі пирамиданың табаны – дұрыс үшбұрыш және оның барлық бүйір қырлары тең. Бүйір жағы табан жазықтығына 50° бұрышпен көлбеген. Ақиқат болатын теңдікті көрсетіңдер: а) $\angle PAH = 50°$; ә) $\angle MPH = 50°$; б) $\angle PBH = 50°$; в) $\angle PNH = 50°$.



171-сурет

278. а) $PABC$ пирамидасы берілген, оның PB қыры ABC жазықтығына перпендикуляр, ал ACB бұрышы тік. PCB бұрышы AC қыры болатын екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы болатынын дәлелдеп, егер $PB = 4$ см, $PC = 8$ см болса, оның шамасын табыңдар.
ә) $ABCD$ шаршысының B төбесінен оның жазықтығына BM перпендикуляры тұрғызылған. Егер $AB = 5$ см, $DM = 5\sqrt{3}$ см болса, MDC үшбұрышының жазықтығы мен $ABCD$ шаршысының жазықтығынан құралған екіжақты бұрыштың шамасын табыңдар.

279. ABC үшбұрышының ($\angle C = 90°$) AC катеті α жазықтығында жатыр (172-сурет). Егер ABC жазықтығы мен α жазықтығының арасындағы бұрыш 45°, $AC = 4$ дм, $AB : BC = 3 : 1$ болса, B нүктесінен осы жазықтыққа дейінгі BH қашықтығын табыңдар.

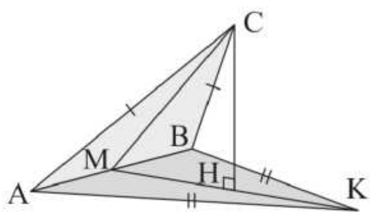


172-сурет

280. $PABC$ пирамидасының AB мен BC қырлары тең, ал PB қыры ABC жазықтығына перпендикуляр. а) PCB бұрышы AC қыры болатын екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы бола ма? ә) Егер $BC = 20$ см, $AC = 32$ см, $PB = 4\sqrt{3}$ см болса, AC қыры болатын екіжақты бұрыштың шамасын табыңдар.

281. BD диагоналі 4 см-ге тең $ABCD$ ромбысы берілген. Ромб жазықтығына оның C төбесінен ұзындығы 8 см-ге тең CM перпендикуляры тұрғызылған. BMD мен ABC жазықтықтарының арасындағы бұрыш 45°. Ромбының ауданын табыңдар.

282. AB табаны ортақ теңбүйірлі ABC мен ABK үшбұрыштары әртүрлі жазықтықтарда жатыр және KM медианасының ортасы – C төбесінің ABK үшбұрышы жазықтығындағы проекциясы (173-сурет). Егер $AB = 24$ м, $CB = 4\sqrt{17}$ м, $BK = 20$ м болса, осы үшбұрыштардың жазықтықтарынан құралған екіжақты бұрыштың шамасын табыңдар.

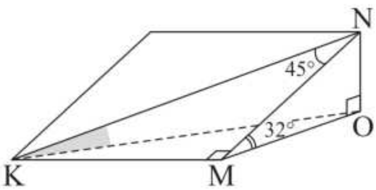


173-сурет

283. BC табаны ортақ ABC мен BDC үшбұрыштары әртүрлі жазықтықтарда жатыр. Олардың табандарына жүргізілген биіктіктері 5 см және 8 см-ге, ал AD қашықтығы 7 см-ге тең. ABC мен BDC жазықтықтарының арасындағы бұрыштың шамасын табыңдар.

284. а) Дұрыс тетраэдрдің қырындағы екіжақты бұрыштың шамасын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

ә) $SABCD$ пирамидасының әрбір қыры a-ға тең, ал табаны – $ABCD$ шаршысы. Пирамиданың CD қырындағы екіжақты бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.



174-сурет

285. Еңістігі 32°-қа тең тау беткейі арқылы ең үлкен көлбеу сызығымен 45° бұрыш құрайтын тура жол өтеді (174-сурет). Жолдың көлбеулігін (жол мен оның көлденең жазықтықтағы ортогональ проекциясының арасындағы бұрышты) 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

286. а) Көлбеулік бұрышы 30°-қа тең шатырда ең үлкен көлбеу сызығына 25° бұрышпен кесінді жүргізілген. Осы кесінді көкжиекке қандай бұрышпен көлбеген?

ә) Еңістің көлбеулік бұрышы 70°-қа тең құм үйіндісінің беткейімен көкжиекке 45° бұрышпен көлбеген соқпақ жол өтеді. Осы жол мен ең үлкен көлбеу сызығының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

287. $PABC$ пирамидасының барлық бүйір қырлары 13 см-ге тең, ал табаны – $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см болатын тікбұрышты үшбұрыш.

1) Табан жазықтығына перпендикуляр болатын PH-ты және APC мен ABC жазықтықтарының арасындағы сызықтық бұрышты кескіндеңдер.

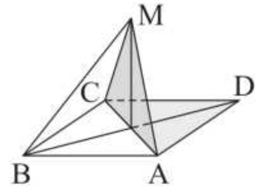
2) Пирамиданың AC қырындағы екіжақты бұрыштың шамасын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

288. Тікбұрышты ABC үшбұрышының AB гипотенузасы α жазықтығында жатыр және одан C төбесіне дейінгі қашықтық $3{,}6\sqrt{3}$ дм-ге тең. AC мен CB катеттері, сәйкесінше, 12 дм-ге және 9 дм-ге тең. α мен ABC жазықтықтарының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

289. а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. D_1CD бұрышы ABC мен BD_1C жазықтықтарының арасындағы сызықтық бұрыш екенін дәлелдеп, оның шамасын табыңдар.

ә) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген. Оның барлық қырлары тең, ал бүйір қыры табан жазықтығына перпендикуляр. Параллелепипедтің табаны – сүйір бұрышы 60°-қа тең ромб. $ABCD$ мен DA_1B_1C жазықтықтарының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

290. а) $ABCD$ ромбысын AC диагоналі бойымен B нүктесі M нүктесінде, ал AMC мен ADC жазықтықтары арасындағы бұрыш тік болатындай етіп бүктеді (175-сурет). Егер $BD = 4$ дм болса, BM түзуі мен ADC жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.



175-сурет

ә) Қабырғасы 17 см-ге, ал BD диагоналі 16 см-ге тең $ABCD$ ромбысын осы диагональ бойымен A нүктесі A_1 нүктесінде болатындай және 30°-қа тең екіжақты бұрыш құрайтындай етіп бүктеді. A_1C қашықтығын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

291. $ABCD$ параллелограмында $\angle ADC = 120°$, $AD = 8$ см, $DC = 6$ см. Параллелограмның C төбесінен оның жазықтығына 9 см-ге тең CP перпендикуляры жүргізілген. APD мен ABC жазықтықтарының арасындағы екіжақты бұрыштың шамасын табыңдар.

292. AC гипотенузасы ортақ тікбұрышты ABC мен ADC үшбұрыштары тең және әртүрлі жазықтықтарда орналасқан. Олардың B және D төбелерінің арақашықтығы 9 дм-ге тең, $AB = AD = 8$ дм, $BC = DC =$ $= 6$ дм. Қыры AC болатын екіжақты бұрыштың шамасын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

B деңгейі

293. Екіжақты бұрыштың ішінен алынған K нүктесінен оның қырына осы бұрыштың жақтарымен 30° және 60° бұрыш құрайтын перпендикуляр жүргізілген. Егер K нүктесі екіжақты бұрыштың қырынан 10 см қашықтықта болса, осы нүктеден оның жақтарына дейінгі қашықтықты табыңдар.

294. Ұзындығы 1,5 м-ге тең шатыр үйдің қабырғасынан көкжиекке 30° бұрышпен көлбеген. Үйдің қабырғасына тақалып тұрған дөңгелек үстел бетінің ауданы 1 м^2-ге тең. Шатырдан аққан су осы үстелге тиетін бола ма?

295. $ABCD$ параллелограмының кіші AD қабырғасы α жазықтығында жатыр, ал B төбесі одан осы параллелограмның кіші биіктігіне тең қашықтықта орналасқан. Егер параллелограмм қабырғаларының қатынасы

0,99-ға тең болса, параллелограмм жазықтығы мен α жазықтығыны арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

296. ΔABC берілген, оның $AB = BC = 18$ см, $AC = 24$ см. Үшбұрышты AB қабырғасы α жазықтығында жатыр, ал басқа екі қабырғасының ос жазықтықтағы проекцияларының қатынасы 1 : 2. ABC мен α жазықтыі тарының арасындағы екіжақты бұрыштың шамасын табыңдар.

297. $DABC$ пирамидасының табаны – теңқабырғалы ΔABC. $AD = DB$ бола тын ADB бүйір жағы табан жазықтығымен тік бұрыш құрайды, ал баск екеуі оған 40° бұрышпен көлбеген. Осы пирамида бүйір қырларыны табан жазықтығымен жасайтын бұрыштарын 1°-қа дейінгі дәлдікпе табыңдар.


Мадридтегі «Еуропаға қақпа» мұнаралары

298. Мадридтегі «Еуропаға қақпа» мұ наралары көлбеулік бұрыш $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha = 0{,}25$ теңдігі ақи қат болатын α бұрышынан 2,5 ес үлкен екені белгілі болса, сол бұ рышты табыңдар. Егер әр мұнар қырының табан жазықтығына ортогс наль проекциясы 30,5 м-ге тең болс олардың биіктіктері қандай болғаны

С деңгейі

299. Екіжақты сүйір бұрыштың ішінен алынған A нүктесінен оның жак тарының біріне дейін 2 дм, ал екіншісіне дейін 1 дм. Егер екіжақт бұрыштың шамасы: а) 60°; ә) 30° болса, A нүктесінен оның қырын дейінгі қашықтықты 0,1 дм-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

300. а) Кесіндінің ұштары екіжақты тік бұрыштың жақтарына тиісті жән оның қырынан 5 см және 12 см қашықтықта орналасқан. Кесінді ме екіжақты бұрыш қырының арақашықтығын табыңдар.

ә) 26 см-ге тең AC кесіндісінің ұштары екіжақты бұрыштың әртүрл жақтарында жатыр. Оның ұштарынан бұрыштың қырына дейін AB және CD қашықтықтары, сәйкесінше, 7 см-ге және 9 см-ге тен Егер $BD = 24$ см болса, екіжақты бұрыштың шамасын 1°-қа дейін дәлдікпен табыңдар.

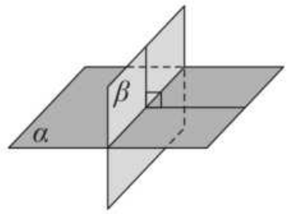
301. Үшбұрышты пирамида төбесінің ортогональ проекциясы – қабырғас 6 дм-ге тең табанындағы дұрыс үшбұрыштың центрі. Пирамиданы биіктігі 3 дм-ге тең. Пирамиданың табанындағы екіжақты бұрышт қақ бөлетін жазықтықпен қимасын салыңдар және сол қиманың таба

14. Жазықтықтардың перпендикулярлығы

Тақырыпты оқу барысында:

- перпендикуляр жазықтықтардың анықтамасын, жазықтықтардың перпендикулярлық белгісі мен қасиеттерін білесіңдер;
- оларды есептер шығаруда қолданасыңдар;
- жазықтықтардың перпендикулярлық белгісін дәлелдейсіңдер.

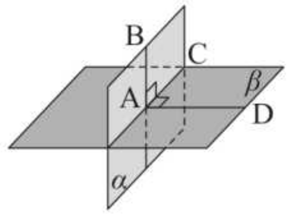
Қиылысушы екі жазықтықтың арасындағы бұрыш 90°-қа тең болса, бұл жазықтықтар перпендикуляр деп аталады. 176-суретте өзара перпендикуляр α және β жазықтықтары кескінделген.



176-сурет

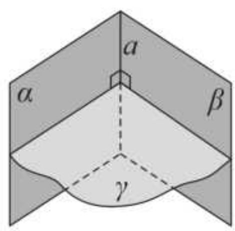
Теорема (*жазықтықтардың перпендикулярлық белгісі*). **Егер екі жазықтықтың бірі екінші жазықтыққа перпендикуляр түзу арқылы өтсе, онда ол жазықтықтар перпендикуляр болады.**

Дәлелдеуі. α және β жазықтықтары берілген, α жазықтығы β жазықтығына перпендикуляр және оны A нүктесінде қиятын AB түзуі арқылы өтетін болсын (177-сурет). α және β жазықтықтары қайсыбір AC түзуі бойымен қиылысады. AB түзуі β жазықтығына перпендикуляр болғандықтан, ол β жазықтығында жататын кез келген түзуге перпендикуляр болады, яғни AB түзуі AC түзуіне де перпендикуляр.



177-сурет

β жазықтығында AC түзуіне перпендикуляр AD түзуін жүргіземіз. Сонда BAD – α мен β жазықтықтарының қиылысуынан пайда болған екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы. Бұл бұрыш 90°-қа тең, себебі AB түзуі β жазықтығына перпендикуляр. Демек, α мен β жазықтықтарының арасындағы бұрыш 90°-қа тең, яғни бұл жазықтықтар перпендикуляр. Теорема дәлелденді.

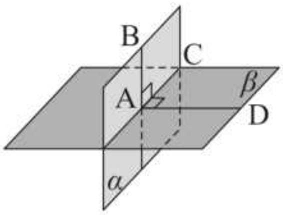


178-сурет

Салдары. **Екі жазықтықтың қиылысу түзуіне перпендикуляр жазықтық осы жазықтықтардың әрқайсысына перпендикуляр болады.** 178-суретті пайдаланып, осы салдарды өздігінен дәлелдеңдер.

Екі жазықтықтың перпендикулярлық белгісін, мысалы, үйдің қабырғасын қалағанда қолданады. Ол үшін тіктеуішті пайдаланады: егер тіктеуіш толығымен қабырғамен жанасса, онда қабырға жазықтығы тік болғаны.

Т е о р е м а (*жазықтықтардың перпендикулярлық белгісіне кері теорема*). **Егер екі жазықтық перпендикуляр болса және олардың бірінде жазықтықтардың қиылысу сызығына перпендикуляр түзу жүргізілген болса, онда ол түзу екінші жазықтыққа да перпендикуляр болады.**

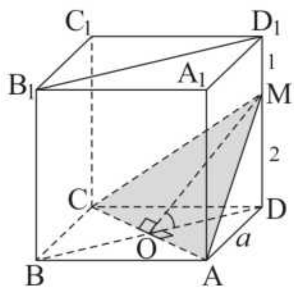


179-сурет

Д ә л е л д е у і. α және β перпендикуляр жазықтықтары берілген болсын және β жазықтығында жазықтықтардың AC қиылысу сызығына перпендикуляр DA түзуі жүргізілген (179-сурет). α жазықтығында AC түзуіне перпендикуляр AB түзуін жүргіземіз. Сонда BAD бұрышы α және β жазықтықтарынан құралған екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы болады, шарт бойынша ол тік бұрыш. Демек, AD түзуі α жазықтығында жатын, қиылысатын AB және AC түзулеріне перпендикуляр, сондықтан $AD \perp \alpha$. Теорема дәлелденді.

Мынаны атап өтелік: 1) *егер екі жазықтық перпендикуляр болса және олардың біреуіне жүргізілген перпендикулярдың екінші жазықтықпен ортақ нүктесі бар болса, онда ол екінші жазықтықта жатады;*

2) *егер қиылысатын екі жазықтықтың әрқайсысы үшінші жазықтыққа перпендикуляр болса, онда олардың қиылысу сызығы да үшінші жазықтыққа перпендикуляр.* Осы қасиеттерді өздігінен дәлелдеңдер.



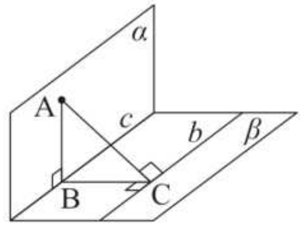
180-сурет

1 - е с е п. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Оның табанының AC диагоналі мен DD_1 қырын D нүктесінен бастап есептегенде 2 : 1 қатынасына бөлетін M нүктесі арқылы β жазықтығы жүргізілген. $\beta \perp (BB_1D_1)$ болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. AMC жазықтығында BB_1D жазықтығына перпендикуляр AC түзуі бар (180-сурет), себебі $AC \perp BD$ және $AC \perp BB_1$ (неге екенін түсіндіріңдер). Демек, $(AMC) \perp (BB_1D_1)$ (екі жазықтықтың перпендикулярлық белгісі бойынша).

2 - е с е п. α және β перпендикуляр жазықтықтары берілген. α жазықтығынан A нүктесі алынған және ол нүктеден осы жазықтықтардың c қиылысу түзуіне дейінгі қашықтық 0,5 дм-ге тең (181-сурет). β жазықтығында c түзуіне параллель және одан 1,2 дм қашықтықта болатын b түзуі жүргізілген. A нүктесінен b түзуіне дейінгі қашықтықты табу керек.

Шешуі. A нүктесінен c түзуіне дейінгі қашықтық AB перпендикулярының ұзындығына тең. $AB \perp c$ және $\alpha \perp \beta$ болғандықтан, $AB \perp \beta$ болады. c мен b параллель түзулерінің арақашықтығы – BC перпендикулярының ұзындығы. $AB \perp \beta$ және $BC \perp b$ болғандықтан, $AC \perp b$ болады (үш перпендикуляр туралы теорема бойынша). Демек, AC – ізделінді қашықтық. Тікбұрышты ΔABC-дан: $AC = \sqrt{0{,}5^2 + 1{,}2^2} = 1{,}3$ (дм) аламыз.

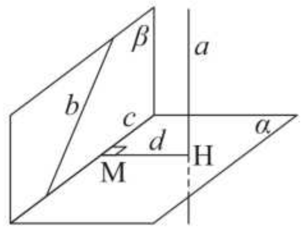


181-сурет

Жауабы. 1,3 дм.

3-есеп. a және b айқас түзулерінің d арақашықтығы a түзуінің оған перпендикуляр жазықтықпен қиылысу нүктесінен b түзуінің осы жазықтықтағы ортогональ проекциясына дейінгі қашықтыққа тең болатынын дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. H – a түзуінің α жазықтығымен қиылысу нүктесі, ал c түзуі b түзуінің осы жазықтықтағы ортогональ проекциясы болсын (182-сурет). b және c түзулері арқылы өтетін β жазықтығы α жазықтығына перпендикуляр, демек, a түзуіне параллель. Сонда айқас түзулердің арақашықтығының анықтамасы бойынша $d = MH$ болады.



182-сурет

СҰРАҚТАР

1. Перпендикуляр жазықтықтардың анықтамасын тұжырымдаңдар.
2. Екі жазықтықтың перпендикулярлық белгісін тұжырымдап, дәлелдеңдер.
3. Перпендикуляр жазықтықтардың қандай қасиеттерін білесіңдер? Оларды сызбаларда кескіндеп көрсетіңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

302. Өлшеуіш рулетка мен Пифагор теоремасына кері теореманы пайдаланып, бөлменің іргелес қабырғаларын еденге перпендикуляр деп есептей отырып, олардың өзара перпендикуляр ма екенін қалай тексеруге болады?

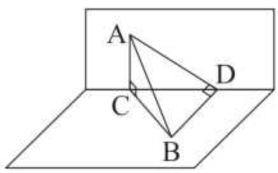
303. Төртбұрышты пирамиданың табаны – кез келген төртбұрыш, ал екі бүйір жағы табанына перпендикуляр. Пирамиданың биіктігін көрсетіңдер.

304. Дұрыс тетраэдрдің табан жазықтығы оның бүйір қыры мен оған қарсы жатқан табан қырының ортасы арқылы өтетін жазықтыққа перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

305. Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышын қамтитын жазықтық оның әрбір жағына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

306. Екі жазықтық үшінші жазықтыққа перпендикуляр, ал олардың үшінші жазықтықпен қиылысу түзулері параллель болса, онда жазықтықтар да параллель болатынын дәлелдеңдер.

307. α мен β жазықтықтары γ жазықтығына перпендикуляр. α мен β жазықтықтарының арасындағы бұрыш осы жазықтықтардың γ жазықтығын қиғанда шығатын түзулердің арасындағы бұрышқа тең болатынын дәлелдеңдер.



183-сурет

308. Екі перпендикуляр жазықтықта жататын A және B нүктелерінен осы жазықтықтардың қиылысатын CD түзуіне AC және BD перпендикулярлары жүргізілген (183-сурет). Егер $AC = CD = 6$ м, $BD = 7$ м болса, AB кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

309. Тік екіжақты бұрыштың қырына M және K нүктелері белгіленіп, оның әртүрлі жақтарына осы қырына MN және KL перпендикулярлары жүргізілген. Егер $MN = 18$ см, $KL = 24$ см, $MK = 16$ см болса, N және L нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

310. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының A төбесі мен BB_1 қырының ортасы арқылы оның DD_1C_1C жағына перпендикуляр жазықтықпен қимасын салыңдар. Егер кубтың қыры a-ға тең болса, осы қиманың ауданын табыңдар.

311. $SABC$ пирамидасының табаны – тікбұрышты ΔABC, оның $\angle C = 90°$. ASC мен BSC бүйір жақтары табан жазықтығына перпендикуляр. Егер $AC = BC = SC$ болса, ASB жағының табан жазықтығына көлбеулік бұрышын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

312. A және B нүктелері екіжақты тік бұрыштың әртүрлі жақтарына тиісті және оның қырынан тең AA_1 және BB_1 қашықтықта жатыр. $AB : AA_1 = 2$ екені белгілі болса: а) AB түзуі мен екіжақты бұрыштың әрбір жағының арасындағы бұрышты; ә) AB түзуі мен екіжақты бұрыш қырының арасындағы бұрышты табыңдар.

В деңгейі

313. Екі тең ABC және ABM үшбұрыштары жататын жазықтықтар өзара перпендикуляр. $AB = AC = 13$ см, $BC = BM = 10$ см болса: а) C және M нүктелерінің; ә) осы үшбұрыштар медианаларының қиылысу нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

314. $ABCD$ параллелограмы мен BC гипотенузасы болатын тікбұрышты ΔBCM-нің жазықтықтары екіжақты тік бұрыш құрайды. $AB = 1{,}8$ дм, $BM = 4$ дм, $CM = 3$ дм, $\angle BCD = 60°$ болса, M нүктесінен параллелограмның A және D нүктелеріне дейінгі қашықтықты табыңдар.

315. $PABCD$ пирамидасының табаны – қабырғасы 6 см болатын шаршы. Пирамиданың бүйір қыры $PB = 8$ см және табанына перпендикуляр. Пирамиданың PC бүйір қырының ортасынан өтетін, табан жазықтығына перпендикуляр және CD түзуіне параллель қимасын салыңдар. Осы қиманың ауданын табыңдар.

316. $DABC$ тетраэдрінің табаны – қабырғасы 10 дм-ге тең дұрыс ΔABC. ABD жағы – AB гипотенузасы болатын теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыш және ол табанымен екіжақты тік бұрыш құрайды. Тетраэдрдің DH биіктігінің ортасы арқылы AB мен CD қырларына параллель өтетін қимасы шаршы болатынын дәлелдеңдер және оның ауданын табыңдар.

С деңгейі

317. Екіжақты тік бұрыш берілген, оның жақтарының біріне тікбұрышты ΔABC ($\angle C = 90°$) орналасқан, әрі C төбесі екіжақты бұрыштың қырына тиісті. Осы үшбұрыш катеттерінің екіжақты бұрыштың басқа жағының жазықтығына түскен проекциялары өзара тең, ал A және B нүктелері осы жазықтықтан, сәйкесінше, 1,8 дм және 3,2 дм қашықтықта жатыр. ΔABC-ның қабырғаларын табыңдар.

318. Екі дұрыс ABC мен ABM үшбұрыштары өзара перпендикуляр жазықтықтарда жатыр. AC түзуі мен AM және BM түзулерінің арасындағы бұрыштар тең екенін дәлелдеңдер.

319. $PABCD$ пирамидасының әр қыры a-ға тең, ал оның табаны – шаршы. α жазықтығы: а) табанының BD диагоналі арқылы өтіп, PCD жағына перпендикуляр болса; ә) пирамида биіктігінің ортасы арқылы өтіп, PC бүйір қырына және APC жазықтығына перпендикуляр болса, пирамиданың α жазықтығымен қимасын салып, оның ауданын табыңдар.

15. Тікбұрышты параллелепипед және оның қасиеттері

Тақырыпты оқу барысында:

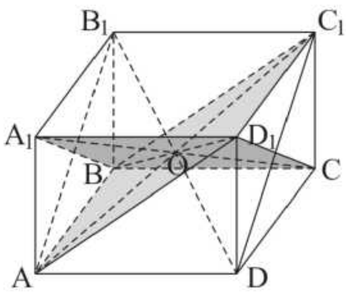
• тікбұрышты параллелепипедтің анықтамасы мен қасиеттерін білесіңдер;

• тікбұрышты параллелепипедтің қасиеттерін дәлелдейсіңдер және оларды есептер шығаруда қолданасыңдар.

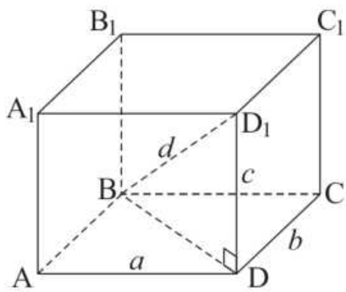
184-сурет

Тікбұрышты параллелепипед деп барлық жақтары тіктөртбұрыш болатын параллелепипедті атайтынын еске салайық. Тікбұрышты параллелепипед пішінді көптеген ғимараттар бар (184-сурет).

Оның анықтамасынан, параллель және перпендикуляр түзулер мен жазықтықтардың қасиеттерінен шығатыны: тікбұрышты параллелепипедтің қарама-қарсы жақтары тең және параллель жазықтықтарда жатады; бүйір қырлары тең және оның табанына перпендикуляр; оның қырларындағы екіжақты бұрыштары тік; тікбұрышты параллелепипедтің диагональдары тең және бір нүктеде қиылысып, қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді (185-суретті пайдаланып, осы қасиетті дәлелдеңдер).



185-сурет



186-сурет

Теорема. **Тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі ұзындығының квадраты оның үш өлшемі квадраттарының қосындысына тең.**

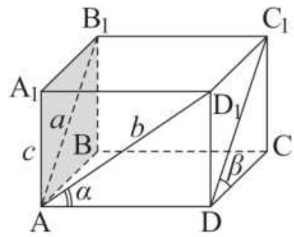
Дәлелдеуі. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипеді берілген болсын, оның $AD = a$, $DC = b$, $DD_1 = c$ (186-сурет). Параллелепипедтің барлық жақтары тіктөртбұрыш болатындықтан, $DD_1 \perp DC$ және $DD_1 \perp AD$, ендеше, $DD_1 \perp (ABC)$. Демек, $DD_1 \perp BD$. Пифагор теоремасы бойынша:

$BD_1^2 = BD^2 + DD_1^2$. Бұдан $BD_1^2 = AB^2 + AD^2 + DD_1^2$ немесе $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Теорема дәлелденді.

Осы теоремадан қыры a-ға тең кубтың диагоналі $a\sqrt{3}$-ке тең болатыны шығады.

1 - е с е п. Тікбұрышты параллелепипедтің ортақ нүктесі жоқ екі сыбайлас жақтарының диагональдары оның төменгі табанына α және β бұрышпен көлбеген. Осы диагональдардың арасындағы бұрышты табу керек.

Ш е ш у і. $\angle D_1AD = \alpha$, $\angle C_1DC = \beta$ болатын тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген болсын (187-сурет). AD_1 мен DC_1 диагональдары айқас түзулерде жатыр, ал $DC_1 \parallel AB_1$ болғандықтан, $\angle(AD_1;\ DC_1) = \angle(AD_1;\ AB_1) = \angle B_1AD_1$ болады.



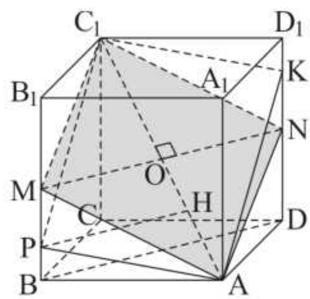
187-сурет

AB_1 түзуі AA_1B_1 жазықтығында жатқандықтан, AD_1 түзуі осы жазықтықты A нүктесінде қиятындықтан, ал AA_1 кесіндісі AD_1 көлбеуінің AA_1B_1 жазықтығындағы ортогональ проекциясы болғандықтан, $\cos\angle B_1AD_1 = \cos\angle A_1AD_1 \cdot \cos\angle A_1AB_1 = \cos(90° - \alpha) \cdot \cos(90° - \beta) = \sin\alpha \cdot \sin\beta$ болады.

Ж а у а б ы . $\arccos(\sin\alpha \cdot \sin\beta)$.

2 - е с е п. Қыры 1 дм-ге тең кубтың оның диагоналі арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ең аз ауданын табу керек.

Ш е ш у і. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының оның AC_1 диагоналі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы параллелограмм болады, себебі кубтың параллель жақтарының осы жазықтықпен қиылысу сызықтары параллель. Осы жазықтықтың BB_1 және DD_1 қырларымен қиылысуы мүмкін нүктелерін, сәйкесінше, P және K деп белгілейік (188-сурет).

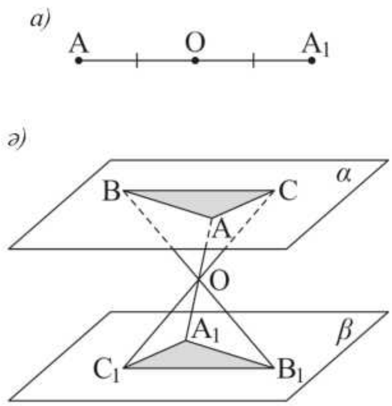


188-сурет

APC_1K параллелограмының ауданы $(AC_1 \cdot PH)$-қа тең, мұндағы PH – ΔAPC_1-дің биіктігі. Бұл аудан ең аз болуы үшін, PH ең кіші болуы керек, себебі AC_1 қашықтығы кез келген осындай қима үшін тұрақты және $\sqrt{3}$ дм-ге тең. BB_1 мен AC_1 айқас түзулерінің ең қысқа қашықтығы – олардың ортақ перпендикулярының ұзындығы. Ондай перпендикуляр MO кесіндісі болады, мұндағы M және O, сәйкесінше, BB_1 және AC_1 кесінділерінің орталары, себебі AMC_1 және BOB_1 теңбүйірлі үшбұрыштарының MO және OM медианалары олардың биіктіктері де болады. Сонда ізделінді қима – AMC_1N шаршысы, мұндағы N нүктесі – кубтың DD_1 қырының ортасы. Осы шаршының ауданы $0,5AC_1 \cdot MN = 0,5\sqrt{6}$ дм^2, себебі $MN = BD = \sqrt{2}$ дм.

Ж а у а б ы. $0,5\sqrt{6}$ дм^2.

Тікбұрышты параллелепипедтің маңызды қасиеттерінің бірі – оның симметриялығы. «Симметрия» сөзін грек тілінен «шамалас», «келісімділік» деп аударуға болады. Центрлік және осьтік симметриялар, центрлік-симметриялы және осьтік симметриялы жазық фигуралар ұғымдары планиметрияда қарастырылған болатын. Осы ұғымдардың анықтамасы стереометрияда да сақталады. *Егер қайсыбір O нүктесі* (симметрия центрі) *AA_1 кесіндісін қақ бөлсе, онда A және A_1 нүктелері O нүктесіне қатысты симметриялы нүктелер деп аталады* (189, *а*-сурет).

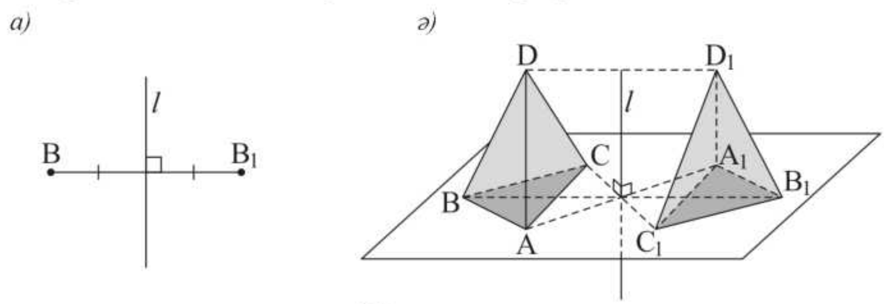


189-сурет

Егер F фигурасының әрбір нүктесіне F_1 фигурасының O нүктесіне қатысты симметриялы нүктесі бар болса, және керісінше болса, онда F және F_1 фигуралары O нүктесіне қатысты симметриялы фигуралар деп аталады, бұл ретте O нүктесі өзіне-өзі симметриялы деп есептеледі (189, *ә*-сурет).

Мысалы, екі параллель жазықтық ұштары осы жазықтықтарға тиісті кез келген кесіндінің ортасына қатысты симметриялы, ал тікбұрышты параллелепипедтің қарама-қарсы екі жағы оның диагональдарының қиылысу нүктесіне қатысты симметриялы.

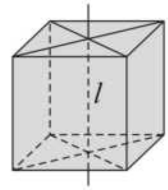
Фигура өзінің қайсыбір O нүктесіне қатысты өзіне-өзі симметриялы болуы мүмкін. Ол нүкте осы фигураның симметрия центрі деп, ал фигураның өзі *центрлік-симметриялы* фигура деп аталады. Мысалы, кубтың симметрия центрі оның диагональдарының қиылысу нүктесі болады.



190-сурет

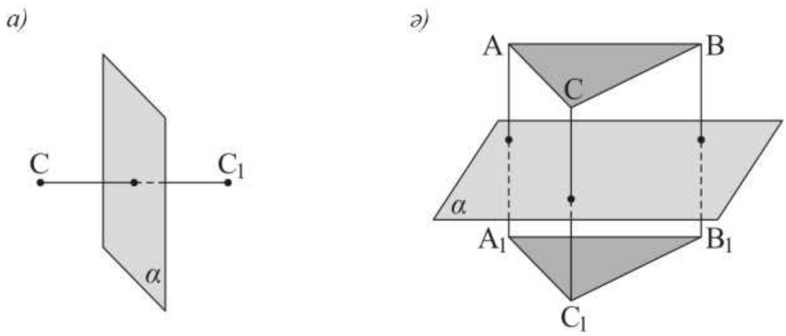
BB_1 кесіндісі l түзуіне (симметрия осіне) *перпендикуляр болса және онымен қақ бөлінсе, онда B мен B_1 нүктелері l түзуіне қатысты симметриялы нүктелер деп аталады* (190, *а*-сурет).

Центрлік симметриядағы сияқты түзуге қатысты симметриялы фигуралар (190, *ә*-сурет), осьтік симметриялы фигуралар, яғни симметрия осі бар фигуралар ұғымдары анықталады. Мысалы, тікбұрышты параллелепипед табандары диагональдарының қиылысу нүктелері арқылы өтетін l түзуі оның симметрия осі болады (191-сурет).



191-сурет

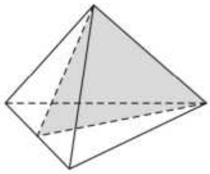
Кеңістікте симметрияның осы түрлерінен өзге жазықтыққа қатысты симметрия қарастырылады. *CC_1 кесіндісі α жазықтығына* (симметрия жазықтығына) *перпендикуляр болса және онымен қақ бөлінсе, онда C және C_1 нүктелері осы жазықтыққа қатысты симметриялы нүктелер деп аталады* (192, *а*-сурет).



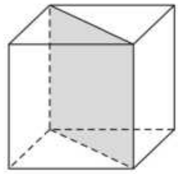
192-сурет

F фигурасының әрбір нүктесіне F_1 фигурасының α жазықтығына қатысты симметриялы нүктесі бар болса және керісінше болса, онда F және F_1 фигуралары α жазықтығына қатысты симметриялы фигуралар деп аталады, бұл ретте α жазықтығының әрбір нүктесі осы жазықтыққа қатысты өзіне-өзі симметриялы деп есептеледі (192, *ә*-сурет). Жазықтыққа қатысты симметрияны айналық симметрия деп те атайды.

Фигура қайсыбір жазықтыққа қатысты өзіне-өзі симметриялы болуы мүмкін. Ол жазықтық осы фигураның симметрия жазықтығы деп аталады, ал фигураның өзі *осы жазықтыққа қатысты симметриялы* фигура деп аталады. Мысалы, дұрыс тетраэдрдің төбесі мен табанының медианасы арқылы өтетін жазықтық осы тетраэдрдің симметрия жазықтығы болады (193-сурет). Фигураның симметрия жазықтығы оны екі тең фигураға бөледі. Мысалы, кубтың диагональдық қимасы болатын жазықтық оны екі тең көпжаққа бөледі (194-сурет).



193-сурет



194-сурет

Симметрияны табиғаттан да байқауға болады, ол практикада кеңінен қолданылады.

СҰРАҚТАР

1. Тікбұрышты параллелепипедтің анықтамасын тұжырымдаңдар.
2. Тікбұрышты параллелепипед диагональдарының қасиеттерін тұжырымдап, оларды дәлелдеңдер.
3. Тікбұрышты параллелепипедтің қырлары мен жақтарының қандай қасиеттерін білесіңдер? Оларды сызбаларға салып көрсетіңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

320. Тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі оның бір төбеден шығатын үш қыры ұзындықтарының қосындысынан кем болатынын дәлелдеңдер.

321. Тікбұрышты параллелепипедтің табандары диагональдарының қиылысу нүктелерін қосатын кесінді параллелепипед диагональдарының қиылысу нүктесі арқылы өтетінін дәлелдеңдер.

322. Үш жағының диагональдары 3 см, 4 см және 5 см-ге тең тікбұрышты параллелепипед бола ма? Жауабын негіздеңдер.

323. Тікбұрышты параллелепипед табанының диагоналі $2\sqrt{10}$ м-ге тең, ал бүйір жақтарының диагональдары табанына $30°$ және $60°$ бұрышпен көлбеген. Параллелепипедтің биіктігін табыңдар.

324. Тікбұрышты параллелепипедтің биіктігі h-қа тең, ал оның бүйір жақтарының диагональдары табанына α және β бұрыштармен көлбеген. Параллелепипедтің табанының диагоналін табыңдар.

325. Тікбұрышты параллелепипедтің 2 м-ге тең диагоналі оның екі сыбайлас бүйір жақтарымен $45°$ және $30°$ бұрыш жасайды. Параллелепипедтің бүйір қырының ұзындығын табыңдар.

326. а) Тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі оның екі сыбайлас бүйір жақтарына α және β бұрыштармен көлбеген, ал табанымен γ бұрышын жасайды. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$ болатынын дәлелдеңдер. ә) Тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі онымен бір төбеден шығатын үш қырымен α, β және γ бұрыштарын құрайды. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ болатынын дәлелдеңдер.

327. Тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі оның екі сыбайлас бүйір жақтарының жазықтықтарымен 45° және 60° бұрыштар құра ала ма екенін зерттеңдер.

328. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің B_1D диагоналі оның AD және DC қырларымен, сәйкесінше, 55° және 40° бұрыш құрайды. Осы диагональ мен DD_1 қырының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

329. Кубтың диагоналі мен оның жағының арасындағы бұрыш оларды таңдап алуға байланысты болмайтынын дәлелдеңдер. Сол бұрыштың шамасын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

330. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің табаны – шаршы. $(BDC_1) \perp (AA_1C_1)$ болатынын дәлелдеңдер.

331. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, оның табаны – қабырғасы 6 дм-ге тең шаршы, ал бүйір қыры 8 дм-ге тең. а) BC_1D және BB_1D_1; ә) BA_1D және BC_1D жазықтықтарының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

332. Тікбұрышты параллелепипед диагональдарының қиылысу нүктесі оның симметрия центрі болады деген ақиқат па? Жауабын түсіндіріңдер.

333. а) Дұрыс үшбұрыштың; ә) сыбайлас қабырғалары тең емес тіктөртбұрыштың қанша симметрия жазықтықтары бар?

334. α жазықтығы мен оны O нүктесінде қиятын AB кесіндісі берілген. Осы жазықтыққа қатысты A_1 нүктесі A нүктесіне, ал B_1 нүктесі B нүктесіне симметриялы. $AA_1 = m$, $BB_1 = n$, ал O нүктесінен AA_1 және BB_1 түзулеріне дейінгі қашықтық, сәйкесінше, p және q-ға тең. AA_1BB_1 төртбұрышының ауданын табыңдар.

335. а) P нүктесі – α және β жазықтықтарының арасындағы 50°-қа тең екіжақты бұрыштың ішкі нүктесі. P нүктесі M нүктесіне α жазықтығына және K нүктесіне β жазықтығына қатысты симметриялы. Теңбүйірлі ΔMPK-ның бұрыштарын табыңдар. ә) B нүктесі – α мен β жазықтықтарының арасындағы 60°-қа тең екіжақты бұрыштың ішкі нүктесі. B нүктесі A нүктесіне α жазықтығына қатысты және C нүктесіне β жазықтығына қатысты симметриялы. B нүктесінен α жазықтығына дейінгі қашықтық 1 м-ге, ал β жазықтығына дейінгі қашықтық 3 м-ге тең болса, AC кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

B деңгейі

336. а) Тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі мен бүйір қыры арқылы өтетін жазықтық оның симметрия жазықтығы болады деген ақиқат па? Жауабын түсіндіріңдер.

ә) Тікбұрышты параллелепипедтің қанша симметрия жазықтығы бар?

337. Параллелепипедтің диагональдары тең болса, онда ол тікбұрышты болатынын дәлелдеңдер.

338. Егер: а) $B_1D^2 = a^2 + b^2 + c^2$; ә) $AB_1{}^2 = a^2 + c^2$, $CB_1{}^2 = b^2 + c^2$, $AC^2 = a^2 + b^2$ болса, $AB = a$, $BC = b$, $BB_1 = c$ болатын $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді тікбұрышты болады деп ұйғаруға бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

339. Тікбұрышты параллелепипедтің қай нүктесінен оның төбелеріне дейінгі қашықтықтардың қосындысы ең аз болатынын анықтаңдар. Параллелепипедтің өлшемдері a, b, c болса, осы қосындыны табыңдар.

340. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, ондағы $AB = 6$ см, $AD = 10$ см, $AA_1 = 8$ см. Параллелепипедтің A төбесінен өтетін және A_1B диагоналіне перпендикуляр жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

341. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді табанының периметрі 28 см-ге, ал оның диагональдарының қиылысу нүктесінен табан қабырғаларына дейінгі қашықтық 5 см-ге және $4\sqrt{2}$ см-ге тең. Параллелепипедтің диагональ қимасының AA_1C_1C жазықтығы оның табанына перпендикуляр екенін дәлелдеңдер және сол қиманың ауданын табыңдар.

C деңгейі

342. а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Кубтың B_1D диагоналі AD_1C жазықтығына перпендикуляр екенін дәлелдеңдер.

ә) Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген. AD_1C жазықтығы B_1D диагоналін қандай қатынаста бөлетінін табыңдар.

343. Қыры a-ға тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. A_1B мен B_1D_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

344. Қыры $\sqrt{6}$ см-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген және M, N нүктелері, сәйкесінше, CC_1 және AA_1 қырларының орталары. B_1N және BD түзулерінің арақашықтығы B_1ND_1 және BDM жазықтықтарының арақашықтығына тең болатынын дәлелдеңдер және соны табыңдар.

16. Жазық фигураның жазықтыққа ортогональ проекциясы және оның ауданы

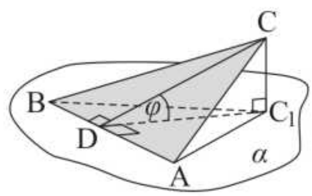
Тақырыпты оқу барысында:

• жазық фигура мен оның жазықтықтағы ортогональ проекциясы аудандарының байланысын өрнектейтін формуланы білесіңдер;

• сол формуланы есептер шығаруда қолданасыңдар.

Теорема. **Жазық фигураның жазықтықтағы ортогональ проекциясының ауданы проекцияланушы фигураның ауданын осы фигура мен оның проекциясы жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусына көбейткенге тең.**

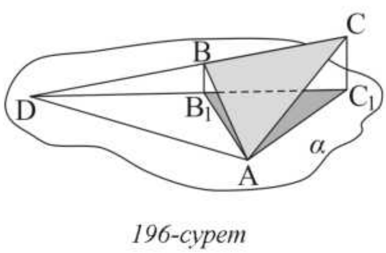
Дәлелдеуі. Алдымен ΔABC-ны қарастырайық, оның бір қабырғасы үшбұрыштың ортогональ проекциясы болатын α жазықтығында жатыр (195-сурет). ΔABC-ның α жазықтығындағы проекциясы ΔABC_1. ΔABC-ның CD биіктігін жүргіземіз. Сонда үш перпендикуляр туралы теорема бойынша C_1D кесіндісі – ΔABC_1-дің биіктігі. CDC_1 бұрышы – ΔABC мен оның ортогональ проекциясының арасындағы бұрыш.



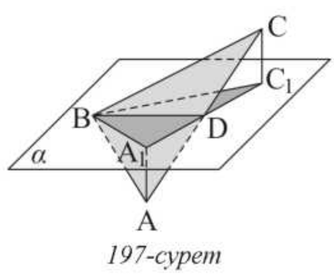
195-сурет

$\angle CDC_1 = \varphi$ болсын. Тікбұрышты ΔCC_1D-дан $C_1D = CD \cdot \cos\angle CDC_1$ аламыз. Сонда $S_{\Delta ABC} = 0{,}5AB \cdot CD$, ал $S_{\Delta ABC_1} = 0{,}5AB \cdot C_1D = 0{,}5AB \cdot CD \cdot \cos\angle CDC_1$. Бұдан $\boldsymbol{S_{\Delta ABC_1} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi}$ болады.

Егер ABC үшбұрышының α жазықтығымен тек бір ортақ нүктесі бар болса (196-сурет), онда BC түзуін жүргізіп және ол түзудің α жазықтығымен қиылысу D нүктесін белгілеп, мынаны аламыз: $S_{\Delta AB_1C_1} = S_{\Delta ADC_1} - S_{\Delta ADB_1} = S_{\Delta ADC} \cdot \cos\varphi - S_{\Delta ADB} \cdot \cos\varphi = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi$.

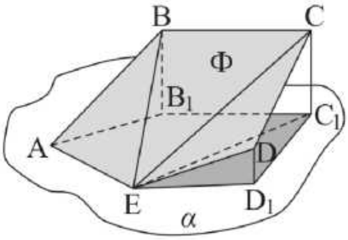


196-сурет



197-сурет

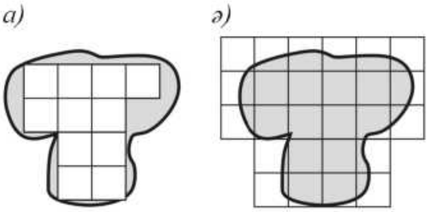
ΔABC-ның екі төбесі α жазықтығының әртүрлі жағында жатса да осы теорема осыған ұқсас дәлелденеді (197-суретті пайдаланып, өздігінен дәлелдеңдер).



198-сурет

Енді β жазықтығында жататын Φ көпбұрышын қарастырайық. Осы көпбұрыштың α жазықтығындағы проекциясын Φ_1 деп және α мен β жазықтықтарының арасындағы бұрышты φ деп белгілейік. Φ көпбұрышын, мысалы, 198-суретте *ABCDE* бесбұрышы үшін көрсетілгендей үшбұрыштарға бөлеміз. Сонда әрбір үшбұрыш пен оның проекциясы үшін көрсетілген қатынас орындалады. Φ көпбұрышын бөлгенде шыққан барлық үшбұрыштардың аудандарын және олардың барлық проекцияларының аудандарын қосып, көпбұрыштың жазықтықтағы ортогональ проекциясының ауданы көпбұрыштың ауданын көпбұрыш пен оның проекциясы жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусына көбейткенге тең болатынын аламыз: $S_{\Phi_1} = S_{\Phi} \cdot \cos\varphi$.

Бұл формула α жазықтығының орнына оған параллель жазықтық алған жағдайда да ақиқат болады.



199-сурет

Кез келген *F* жазық фигурасын қабырғасы $\frac{1}{10^n}$ болатын шаршылардан құралған көпбұрышпен жабуға болады, мұндағы $n \in N$ (199, *ә*-сурет). Сондай-ақ осындай шаршылардан сол фигураның ішінде жататын көпбұрыш құрастыруға болады (199, *а*-сурет).

Егер *n* шектеусіз өсетін болса, онда осы көпбұрыштардың аудандары жазық фигураның ауданы деп қабылданатын қайсыбір шамаға ұмтылады. Сонда *F* фигурасы мен оның ортогональ проекциясы болатын F_1 фигурасы аудандарының арасындағы тәуелділік те $S_{F_1} = S_F \cdot \cos\varphi$ формуласымен өрнектеледі. Теорема дәлелденді.

Осы теоремадан шығатыны: *жазық фигураның ауданы оның жазықтықтағы ортогональ проекциясының ауданынан кем болмайды.*

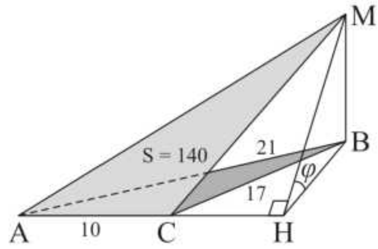
1-есеп. Ауданы 140 см^2-ге тең ΔAMC-ның ортогональ проекциясы – ΔABC, оның қабырғалары $AC = 10$ см, $AB = 21$ см, $BC = 17$ см. *AMC* және *ABC* үшбұрыштары жазықтықтарының арасындағы екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышын салып, оның шамасын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табу керек.

Шешуі. $21^2 > 17^2 + 10^2$ болғандықтан, *ACB* бұрышы доғал. *AC*-ға *BH* перпендикулярын, бұл ретте *C* нүктесі *A* мен *H* нүктелерінің арасында жатыр (200-сурет) және AC-ға MH перпендикулярын жүргіземіз. Сонда BHM ізделінді бұрыш болады.

Көпбұрыш пен оның жазықтықтағы ортогональ проекциясы аудандарының қасиеті бойынша $\cos\angle MHP = S_{ACB} : S_{ACM}$ аламыз.

Герон формуласы бойынша:

$S_{ACB} = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} = 84$ (см^2). Сонда $\cos\angle MHP = 84 : 140 = 0{,}6$, $\angle MHP \approx 53°$.

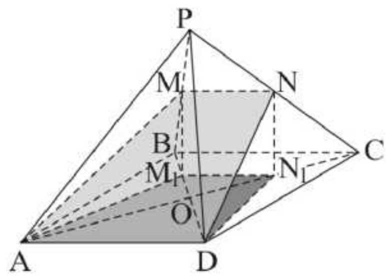


200-сурет

Жауабы. $\approx 53°$.

2-есеп. $PABCD$ пирамидасының барлық бүйір қырлары тең, ал табаны – қабырғасы a-ға тең шаршы. Пирамиданың жазықтықпен қимасы табанының AD қабырғасы мен оған қарсы жатқан бүйір жағының MN орта сызығын қамтиды. Қиманың ауданы $\frac{9a^2}{16}$-дан артық болатынын дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. $AMND$ төртбұрышы – пирамиданың қимасы (201-сурет). Бұл төртбұрыш теңбүйірлі трапеция болады, себебі $MN \parallel BC$, $BC \parallel AD$ және өзара тең ABM және DCN үшбұрыштарының сәйкес қабырғалары ретінде $MA = ND$. Осы қиманың пирамида табан жазықтығындағы ортогональ проекциясы теңбүйірлі AM_1N_1D трапециясы болады, себебі $M_1N_1 \parallel MN$, $MN \parallel AD$ және AM және DN тең көлбеулерінің ортогональ проекциялары ретінде $AM_1 = DN_1$.



201-сурет

AM_1N_1D трапециясының диагональдары перпендикуляр болғандықтан, оның ауданын мына формуламен табуға болады: $S_{AM_1N_1D} = \frac{1}{2} \cdot AN_1 \cdot DM_1$, мұндағы $AN_1 = DM_1 = \frac{3}{4} \cdot AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. $S_{AM_1N_1D} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{9a^2}{16}$ аламыз. Көпбұрыштың жазықтықтағы ортогональ проекциясының қасиеті бойынша $S_{AMND} > S_{AM_1N_1D}$. Демек, $S_{AMND} > \frac{9a^2}{16}$, дәлелдеу керегі де осы еді.

СҰРАҚТАР

1. Жазық фигура мен оның жазықтықтағы ортогональ проекциясы аудандарының арасындағы тәуелділікті тұжырымдаңдар және сызбаларға салып көрсетіңдер.
2. Кез келген жазық фигураның ауданы ретінде не алынады?

ЖАТТЫҒУЛАР

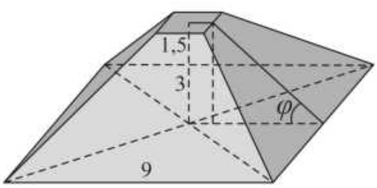
А деңгейі

345. а) ΔABC-ның ортогональ проекциясы – ауданы ΔABC-ның ауданынан екі есе кем ΔABM. ABC мен ABM үшбұрыштары жазықтықтарының арасындағы бұрышты есептеңдер. ә) Ауданы 360 см^2-ге тең үшбұрыштың жазықтықтағы ортогональ проекциясы болатын үшбұрыштың қабырғалары 13 см, 30 см және 37 см. Осы үшбұрыштар жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

346. Қыры a-ға тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. AD қыры арқылы $ABCD$ жағының жазықтығына φ бұрышпен көлбейтін жазықтық өтеді. Кубтың осы жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

347. $ABCD$ трапециясының c-ға тең MN орта сызығы α жазықтығында жатыр, ал оның AB және CD табандары α жазықтығының әртүрлі жағында жатыр. Трапецияның биіктігі h-қа тең, трапеция жазықтығы мен α жазықтығының арасындағы бұрыш φ-ге тең. Осы трапецияның α жазықтығындағы ортогональ проекциясының ауданын табыңдар.

348. Ромбының бір диагоналі α жазықтығында жатыр, ал екіншісі осы жазықтықпен φ бұрышын құрайды. Егер ромбының диагональдары m және n-ге тең болса, оның α жазықтығындағы ортогональ проекциясының ауданын табыңдар.



202-сурет

349. Ғимарат шатырының табаны – шаршы (202-сурет). Шатырдың жоғарғы жағындағы шаршы пішінді алаңы 1,5 м-ге тең және ол ғимарат төбесінің жазықтығынан 3 м қашықтықта жатыр. Шатырдың төрт жағы төбеге бірдей бұрышпен көлбеген. Егер шатырдың төменгі жағындағы шаршы пішінді алаңы 9 м-ге тең болса, көлбеулік бұрышын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

350. Үшбұрыштың екі қабырғасы a және b-ға тең, ал олардың арасындағы бұрыш 30°-тан артық емес. Осы үшбұрыштың жазықтықтағы ортогональ проекциясының ауданы: а) $0{,}2ab$; ә) $0{,}25ab$; б) $0{,}3ab$-ға тең болуы мүмкін бе?

351. а) Қабырғалары 8 см, 9 см, 10 см-ге тең үшбұрыш берілген. Оның қайсыбір жазықтықтағы ортогональ проекциясының ауданы 36 см^2-ге тең болуы мүмкін бе? ә) Қабырғалары 9,8 см, 10 см, 10,2 см болатын үшбұрыш берілген. Ол ауданы 45 см^2-ге тең үшбұрыштың қайсыбір жазықтықтағы ортогональ проекциясы болуы мүмкін бе?

352. Табаны дұрыс n-бұрыш, ал бүйір қырлары өзара тең болатын пирамида берілген. Осы пирамиданың бүйір жақтары аудандарының қосындысы оның табан ауданының табан қырындағы екіжақты бұрыштың косинусына қатынасына тең болатынын дәлелдеңдер. ә) Оқушы мынадай есеп құрды: «Алтыбұрышты пирамиданың табаны – дұрыс алтыбұрыш, оның ауданы 23 см^2. Пирамиданың барлық бүйір жақтары – аудандары 3,5 см^2-ге тең теңбүйірлі үшбұрыштар. Пирамида бүйір жағының табан жазықтығына көлбеулік бұрышын табу керек». Осы есептің шешімі бола ма?

353. а) Төрт жағына сырғымалы шатыр (203-сурет) ауданы 28 м^2-ге тең алаңды жабады. Егер шатырдың әр жағы төбе жазықтығына 60° бұрышпен көлбеген болса, осы шатырдың ауданын табыңдар.

203-сурет

ә) Төрт жағына сырғымалы шатырдың әрбір жағы төбе жазықтығына 30° бұрышпен көлбеген, ал шатырдың ауданы 30 м^2-ге тең. Шатырмен жабылған төбе жазықтығының ауданын 0,1 м^2-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

354. $ABCD$ шаршысының қабырғасы a-ға тең. Оның жазықтығынан тыс H нүктесі берілген. AHD, AHB, BHC, DHC үшбұрыштарының жазықтықтары шаршы жазықтығымен: а) 30°; ә) 45°; б) 60°; в) φ-ге тең бұрыштар құрайтын болса, осы үшбұрыштар аудандарының қосындысын табыңдар.

355. ΔABC-да $\angle B = 90°$, $AB = 8$ см, $AC = 10$ см. Оның A төбесінен үшбұрыш жазықтығына AK перпендикуляры тұрғызылған. KBC және ABC үшбұрыштарының жазықтықтары α бұрыш құрайтын болса, KAC, KAB, KBC үшбұрыштарының аудандарының қосындысын табыңдар.

356. ΔABC-да $\angle B = 90°$, $AB = 15$ дм, $BC = 20$ дм. Оның K төбесінен үшбұрыш жазықтығына KB перпендикуляры тұрғызылған. AKC мен ABC үшбұрыштары жазықтықтарының арасындағы бұрыш: а) 30°; ә) 45°; б) 60°; в) φ-ге тең болса, AKC, AKB және CKB үшбұрыштары аудандарының қосындысын табыңдар.

В деңгейі

357. Теңбүйірлі сүйірбұрышты ΔABC-ның ортогональ проекциясы – ΔABH (AB – олардың ортақ табаны). ACB бұрышы AHB бұрышынан кем болатынын дәлелдеңдер.

358. а) Диагональдары 18 см және 15 см-ге тең параллелограмның жазықтығы ортогональ проекциясы ауданы 135 см^2-ге тең параллелограмм болуы мүмкін бе? ә) Қандай жағдайда диагональдары 14 см және 15 см-ге тең трапецияның жазықтықтағы ортогональ проекция-сы ауданы 100 см^2-ге тең трапеция болады?

359. 120°-қа тең екіжақты бұрыш берілген. ΔABC-ның AC қабырғасы екіжақты бұрыштың қырында, ал B төбесі жақтарының бірінде жатыр. $AC = 7$ см, $BC = 10$ см, $AB = 11$ см болса, ΔABC-ның екіжақты бұрыштың екінші жағы жазықтығына түскен ортогональ проекциясының ауданын табыңдар.

360. Түтін мұржасы тікбұрышты параллелепипед пішінді, оның табаны – қабырғасы 16 дм-ге тең шаршы. Шатырдың көлбеулік бұрышы 30°-қа тең. Түтін мұржасы шығатын шатырдағы тесіктің ауданы қандай?

361. Қабырғасы a-ға тең дұрыс ΔABC мен оның жазықтығынан тысқары және үшбұрыштың барлық қабырғаларынан бірдей қашықтықта K нүктесі берілген. ΔKAB мен ΔABC жазықтықтарының арасындағы бұрыш φ-ге тең болса, ΔKAC-ның ауданын табыңдар.

362. Диагональдары 8 см және 6 см-ге тең ромб берілген. Оның бір қабырғасын қамтитын түзу арқылы ромбының басқа қабырғасымен 30°-қа тең бұрыш жасайтын жазықтық жүргізілген. Ромбының осы жазықтықтағы ортогональ проекциясының ауданын 0,1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

C деңгейі

363. ΔABC-ның CM медианасы α жазықтығында жатыр, ал оның A мен B төбелері α-ның әртүрлі жағында орналасқан. A нүктесінен α жазықтығына дейінгі қашықтық 1 дм-ге тең. $AB = 4$ дм, $AC = 2$ дм, $BC = 3$ дм болса, ΔABC-ның α жазықтығындағы ортогональ проекциясының ауданын табыңдар.

364. $ABCD$ ромбысының сүйір бұрышы α-ға тең. Ромбының жазықтығына тиісті емес K нүктесі оның барлық қабырғаларынан бірдей қашықтықта орналасқан. KAB үшбұрышының K нүктесінен жүргізілген биіктігі h-қа, ал KAB үшбұрышы мен ромб жазықтықтарының арасындағы бұрыш β-ға тең болса, ромбының ауданын табыңдар.

365. Қорда үшін қазылған куб пішінді шұңқырдың үстіне төртбұрышты пирамида тәрізді қозғалмалы шатыр жасау керек. Оның бүйір қырлары тең, ал табанындағы шаршының қабырғасы 3 м-ге тең. Шатырдың – пирамида бүйір жағының табан жазықтығына көлбеулік бұрышын кіші α бұрышпен жасаған тиімді ме, әлде үлкен β бұрышпен бе? $\alpha = 15°$, $\beta = 45°$ болса, шатырды жабуға жұмсалатын брезентті оны бүгуге және шатырдан шығыңқы жерлеріне материалдың 10%-ы кететінін ескере отырып салыстырыңдар.

17. «Түзулер мен жазықтықтардың перпендикулярлығы. Кеңістіктегі бұрыштар мен арақашықтықтар» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

366. A нүктесінен жазықтыққа AH перпендикуляры мен өзара тең AB мен AC көлбеулері жүргізілген, әрі $AH = 6$ дм, $AB = 10$ дм. а) BC кесіндісінің ең үлкен ұзындығын; ә) $BC = 12$ дм болса, ABH және ACH жазықтықтарының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

367. Төртбұрышты пирамиданың табаны – қабырғасы $4\sqrt{3}$ дм-ге тең шаршы, ал әрбір бүйір қыры 6 дм-ге тең. Пирамиданың сыбайлас екі бүйір жағынан құралған екіжақты бұрыштың шамасын табыңдар.

368. Дұрыс ΔABC-ның B төбесінен оның жазықтығына BH перпендикуляры тұрғызылған. $BH = AB$ болса, AH және BC түзулерінің арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

369. Қыры 6 см-ге тең дұрыс тетраэдр берілген. Тетраэдрдің оның табанындағы екіжақты бұрышын қақ бөлетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

370. ΔABC-да $AB = 1{,}4$ дм, $AC = 2$ дм, $CB = 2{,}2$ дм. Үшбұрыштың AB қабырғасы арқылы оның жазықтығымен 60°-қа тең екіжақты бұрыш құрайтын α жазықтығы өтеді. AC мен CB қабырғаларының α жазықтығындағы проекцияларын табыңдар.

В деңгейі

371. A нүктесінен жазықтыққа AM перпендикуляры мен AB және AC көлбеулері жүргізілген, әрі $AB = 10$ см, $AC = 26$ см, $BC = 24$ см, $BM = 8$ см. а) MB және BC түзулерінің; ә) ABC және ABM жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

372. $DABC$ пирамидасының табаны – теңбүйірлі тікбұрышты ΔABC ($\angle C = 90°$), ал AD бүйір қыры табанына перпендикуляр. $AD = AC = CB = a$ болса, DBC мен ADB жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

С деңгейі

373. $ABCD$ шаршысы берілген, K нүктесі – DC қабырғасының ортасы. KM түзуі ABC жазықтығына перпендикуляр, $AB = KM = a$. а) M нүктесінен AC түзуіне дейінгі; ә) A нүктесінен MK түзуіне дейінгі; б) D нүктесінен ABM жазықтығына дейінгі; в) DC түзуінен ABM жазықтығына дейінгі; г) AC түзуінен MK түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

Дұрыс жауабын таңдаңдар

374. A және B нүктелерінен жазықтыққа дейінгі қашықтық, сәйкесінше, a және b-ға тең, ал AB кесіндісі осы жазықтықты қияды. Сонда осы кесіндінің ортасынан жазықтыққа дейінгі қашықтық неге тең?

1) $0,5a - b$; 2) $0,5|a - b|$; 3) $0,5(a - b)$; 4) $0,5(a + b)$; 5) $|a - b|$.

375. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB қыры мен A_1D_1 қырының M нүктесі арқылы қима жүргізілген. Сонда ол қима не болады?

1) ромб;
2) бесбұрыш;
3) параллелограмм;
4) тіктөртбұрыш;
5) үшбұрыш.

376. Төртбұрышты пирамида төбесінің ортогональ проекциясы – оның шаршы табанының центрі. Пирамиданың бұл төбесі табанының әрбір қабырғасынан a қашықтықта жатыр, ал табан диагоналі b-ға тең. Сонда пирамиданың биіктігі неге тең?

1) $\sqrt{a^2 - 0,125b^2}$;
2) $\sqrt{a^2 - 0,1b^2}$;
3) $\sqrt{2a^2 - b^2}$;
4) $\sqrt{a^2 - 0,25b^2}$;
5) $\sqrt{a^2 - b^2}$.

377. $PABC$ пирамидасының табаны дұрыс ΔABC, оның қабырғасы 6 дм-ге, ал пирамиданың әрбір бүйір қыры 5 дм-ге тең. B нүктесінен APC жағына дейінгі қашықтық 0,01 дм-ге дейінгі дәлдікпен есептегенде неге тең?

1) $\approx 5,02$ дм; 2) $\approx 4,68$ дм; 3) $\approx 4,58$ дм; 4) $\approx 4,27$ дм; 5) $\approx 3,97$ дм.

378. $SABCD$ пирамидасының табаны – тіктөртбұрыш, оның қабырғалары $AB = 21$ см, $AD = 16$ см, ал пирамиданың SB бүйір қыры табан жазықтығына перпендикуляр. ΔSCD-ның ауданы 210 см^2-ге тең болса, B нүктесінен SCD жазықтығына дейінгі қашықтық неге тең?

1) 9,6 см; 2) 12 см; 3) $\approx 10,9$ см; 4) 16 см; 5) 4,8 см.

379. Өзара тең екі шаршы перпендикуляр жазықтықтарда жатыр және бір қабырғасы ортақ. Осы шаршылардың ортақ төбесінен жүргізілген диагональдарының арасындағы бұрыш неге тең?

1) 90°; 2) 45°; 3) 30°; 4) 60°; 5) 120°.

380. Тікбұрышты параллелепипед берілген, оның табаны – қабырғалары 3 см және 4 см-ге тең тіктөртбұрыш, параллелепипедтің биіктігі $\sqrt{3}$ см-ге тең. Табанының үлкен қабырғасы арқылы онымен 60° бұрыш жасайтын параллелепипедтің қимасы салынған. Сонда қиманың ауданы неге тең?

1) 12 см^2; 2) 24 см^2; 3) $6\sqrt{3}$ см^2; 4) $4\sqrt{3}$ см^2; 5) 8 см^2.

381. Екі перпендикуляр жазықтықта жататын A және B нүктелерінен осы жазықтықтардың қиылысу түзуіне AC және BD перпендикулярлары жүргізілген. $AD = 4$ дм, $BC = 7$ дм, $CD = 1$ дм болса, AB кесіндісінің ұзындығы неге тең?

1) $\sqrt{66}$ дм; 2) $4\sqrt{2}$ дм; 3) 8 дм; 4) 7,5 дм; 5) 8,5 дм.

382. A нүктесі екі перпендикуляр жазықтықтан 0,5 м және 1,2 м қашықтықта жатыр. Осы нүктеден жазықтықтардың қиылысу түзуіне дейінгі қашықтық неге тең?

1) 0,85 м; 2) 1,2 м; 3) 1,7 м; 4) 0,7 м; 5) 1,3 м.

383. Трапецияның табандары ұзындықтарының қатынасы 0,6-ға тең. Трапецияның үлкен табаны қайсыбір жазықтықта жатыр, ал басқа табаны ол жазықтықтан 2 м қашықтықта орналасқан. Сонда трапеция диагональдарының қиылысу нүктесінен осы жазықтыққа дейінгі қашықтық неге тең?

1) 1 м; 2) 1,2 м; 3) 1,5 м; 4) 1,25 м; 5) 1,6 м.

384. ΔABC-да $\angle C = 90°$, $AC = 10$ см, $CB = 24$ см, $\Delta A_1B_1C_1$ – оның α жазықтығындағы ортогональ проекциясы, әрі $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = CC_1 = 12$ см. CM медианасын қамтитын CN сәулесі α жазықтығын N нүктесінде қияды, сонда MN кесіндісінің ұзындығы неге тең болады?

1) 52 см; 2) 39 см; 3) 13 см; 4) 9,75 см; 5) 6,5 см.

385. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің табаны – $ABCD$ параллелограмы, оның қабырғалары $AB = 16$ см, $AD = 12$ см, ал параллелепипедтің бүйір қыры табан жазықтығына перпендикуляр. Параллелепипедтің A_1C және B_1D диагональдары оның табан жазықтығымен, сәйкесінше, 30° және 45° бұрыш құрайды. Сонда параллелепипедтің бүйір қыры неге тең болады?

1) 20 см; 2) $16\sqrt{2}$ см; 3) $10\sqrt{2}$ см; 4) $10\sqrt{3}$ см; 5) $\frac{20}{\sqrt{3}}$ см.

386. $DABC$ тетраэдрінің AB қырынан басқа қырларының ұзындықтары өзара тең, $\angle ACB = 90°$. Сонда BC қырының екіжақты бұрышының косинусы неге тең?

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; 5) $\frac{1}{2}$.

387. Екіжақты бұрыштың бір жағы жазықтығының A және B нүктелерінен екінші жағының жазықтығына AC және BD перпендикулярлары және қырына AN және BM перпендикулярлары жүргізілген. $AN = 12$ см, $AC = 5$ см, $BD = 9$ см болса, BM кесіндісінің ұзындығы неге тең?

1) 21,6 см; 2) 23,4 см; 3) 25,4 см; 4) $6\frac{6}{9}$ см; 5) $7\frac{2}{9}$ см.

388. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. AB_1 мен A_1C түзулерінің арасындағы бұрыштың шамасы неге тең?

1) 45°; 2) ≈ 55°; 3) 60°; 4) ≈ 72°; 5) 90°.

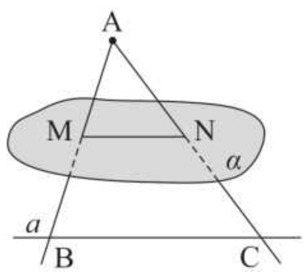
389. M және N нүктелері дұрыс $DABC$ тетраэдрінің DC және AC қырларының орталары болса, ABM және BDN жазықтықтарының арасындағы бұрыш неге тең?

1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°; 5) 120°.

390. $ABCD$ ромбысының қабырғасы a-ға тең, оның сүйір бұрышы 30°, ал теңқабырғалы ΔBCK-ның K төбесі AD түзуінен $\frac{a}{2}$-ге тең қашықтықта болса, ромб пен үшбұрыш жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусы неге тең?

1) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$.

Жаттығуларды орындаңдар



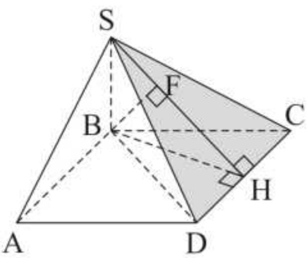
204-сурет

391. α жазықтығына параллель a түзуі мен A нүктесі осы жазықтықтың әртүрлі жағында орналасқан. a түзуіне B, C нүктелері белгіленіп, α жазықтығын, сәйкесінше, M және N нүктелерінде қиятын AB, AC түзулері жүргізілген (204-сурет). A нүктесінен a түзуіне дейінгі қашықтық m-ге, ал MN түзуіне дейінгі қашықтық p-ға тең және $BC = n$ болса, MN кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

392. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде $AD = 2\sqrt{3}$ см, $DC = 2$ см, DC_1 диагоналі табан жазықтығына, сәйкесінше, 60° бұрышпен көлбеген. AD_1 мен DC_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

393. 205-суретте кескінделген $SABCD$ пирамидасының табаны – B бұрышы 120°-қа тең ромб. Пирамиданың SB бүйір қыры табан жазықтығына перпендикуляр. B нүктесінен SDC жазықтығына дейінгі қашықтық BF кесіндісінің ұзындығына тең екенін дәлелдеңдер.

394. $\angle BAD = 60°$, $AB = a$ болатын $ABCD$ ромбысы берілген (205-сурет). Ромбының B төбесінен оның жазықтығына BS перпендикуляры жүргізілген. SDC үшбұрышының жазықтығы ромбының жазықтығымен 45°-қа тең бұрыш жасайды. а) S нүктесінен ромбының қабырғаларына дейінгі қашықтықтарды; ә) SA, SD және SC түзулерінің ромб жазықтығына көлбеулік бұрыштарын табыңдар.



205-сурет

395. Барлық бүйір қырлары 10 см-ге тең $PABCD$ пирамидасының табаны – қабырғасы $6\sqrt{2}$ см-ге тең $ABCD$ шаршысы. Пирамиданың табанына параллель және бүйір қырларын қақ бөлетін $MNKL$ қимасы жүргізілген. MNK мен ABC жазықтықтарының арақашықтығын табыңдар.

396. Қыры 8 см-ге тең $PABC$ дұрыс тетраэдрі берілген. AC мен PB түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

397. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің бүйір қыры $a\sqrt{3}$-ке тең, $ABCD$ табаны – қабырғасы a-ға тең шаршы. AB_1C_1D жазықтығы мен табан жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

398. $CABD$ үшбұрышты пирамидасының ABD табаны мен ABC бүйір жағы – табаны қабырғасы AB болатын теңбүйірлі үшбұрыштар. $AB = 24$ см, $AC = 13$ см, $AD = 37$ см, $CD = 35$ см екені белгілі болса, ABD мен ABC жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

399. M және N нүктелері тік екіжақты бұрыштың әртүрлі жақтарында, әрі бүйір қырынан бірдей $MM_1 = NN_1$ қашықтықта орналасқан және $\frac{MN}{MM_1} = 2$. MN түзуі мен екіжақты бұрыш қырының арасындағы бұрышты табыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Евклид «Негіздерінің» XI кітабында стереометрия негіздері, соның ішінде кеңістіктегі бұрыштар, арақашықтықтар мен перпендикулярлықтар туралы ілімдер баяндалған. Ондағы көп ұғымдар қазіргімен салыстырғанда жалпылама берілмеген. Сондай-ақ стереометрияның үш перпендикуляр туралы маңызды теоремасы да болған жоқ. Алғаш рет бұл теорема мен оның дәлелдеуі белгісіз ирандық автордың «Исфахандық белгісіз» (XI ғ.) еңбегінде пайда болған. XIII ғасырда бұл теорема мен оның дәлелдеуі атақты ирандық оқымысты Насыр ад-Дин ат-Тусидің (1201–1274) «Толық

төртқабырға туралы трактатасында» баяндалған. Еу
ның дәлелдеуі алғаш рет 1794 жылы француз матема
(1752–1833) «Геометрия элементтері» кітабында келтір

Насир ад-Дин ат-Туси

Г. Монж

Екіжақты бұрыш ұғымы ертедегі құрылыс нысан
рибесінен және әртүрлі кристалдардың геометриялық
теуден бастау алады.

Флюорит

К

Кеңістіктегі фигураларды кескіндеу ережелері мен
сырлар бойы қалыптасқан. Олар құрылыста, сәулетте
Мысалы, біздің дәуірімізге дейінгі I ғасырдың өзінд
мы Витрувий (б.з.д. 80–15 жж.) «Сәулет туралы 10 кі
онда үш проекцияны: жоспарын, қасбетін, қырын қар
өнеркәсіптің, кескіндеменің, әскери техниканың да

III. КЕҢІСТІКТЕГІ ТІКБҰРЫШТЫ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕСІ ЖӘНЕ ВЕКТОРЛАР

Бөлімді оқу нәтижесінде

- кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі ұғымын;
- екі нүктенің арақашықтығы, кесінді ортасының координаталары формуласын;
- кеңістіктегі вектор, вектордың ұзындығы, тең векторлар анықтамаларын;
- кеңістіктегі вектордың координаталары ұғымын;
- векторларды қосу, азайту, векторды санға көбейту ережелерін;
- кеңістіктегі коллинеар және компланар векторлардың анықтамаларын, векторлардың коллинеарлық және компланарлық шарттарын;
- векторды үш компланар емес вектор бойынша жіктеу формуласын;
- кесіндіні берілген қатынаста бөлетін нүкте координаталарының формулаларын;
- векторлардың скаляр көбейтіндісінің анықтамасы мен қасиеттерін, векторлардың скаляр көбейтіндісі формулаларын;
- кеңістіктегі сфераның, жазықтық пен түзудің теңдеулерін **білу керек.**

- тікбұрышты координаталар жүйесін кескіндеу, нүктенің координаталарын табу, кеңістіктегі нүктені оның координаталары бойынша кескіндей алу;
- екі нүктенің арақашықтығын, кесінді ортасының координаталарын таба алу;
- кеңістіктегі вектордың координаталарын және ұзындығын таба алу;
- векторларды қосу, азайту, векторды санға көбейте алу;
- коллинеар және компланар векторларды кескіндеу, векторлардың коллинеарлық және компланарлық шарттарын қолдана алу;
- векторды үш компланар емес вектор бойынша жіктеу формуласын қорытып шығара алу және оларды есептер шығаруда қолдана алу;
- кесіндіні берілген қатынаста бөлетін нүкте координаталарының формулаларын қорытып шығара алу және оларды есептер шығаруда қолдана алу;
- векторлардың скаляр көбейтіндісі формулаларын есептер шығаруда қолдана алу;
- кеңістіктегі сфераның, жазықтық пен түзудің теңдеулерін қорытып шығара алу және оларды есептер шығаруда қолдана **алу керек.**

18. Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі

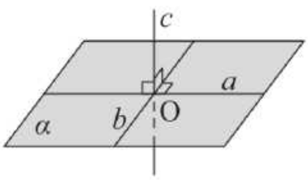
Тақырыпты оқу барысында:

• кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі ұғымын білесіңдер;

• тікбұрышты координаталар жүйесін кескіндеп, нүктенің координаталарын табасыңдар; координаталары бойынша кеңістіктегі нүктені кескіндейсіңдер.

Координаталар деп нүктенің орнын анықтайтын сандарды айтады. Жазықтықтағы нүкте екі координатамен анықталады, кеңістіктегі нүктенің орнын анықтау үшін үш сан қажет. Мысалы, Жер бетіндегі нүктенің орны үш санмен: ендігімен, бойлығымен және теңіз деңгейінен биіктігімен анықталады.

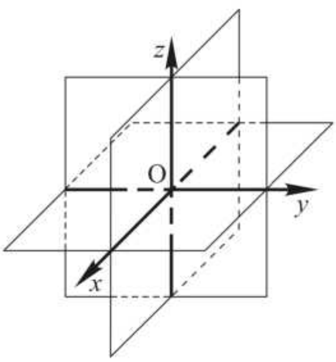
1 - е с е п. Кеңістіктің қандай да бір нүктесінен қос-қостан перпендикуляр үш түзу жүргізу керек.



206-сурет

Ш е ш у і. Кеңістіктен кез келген O нүктесін алып, сол нүкте арқылы қандай да бір α жазықтығы мен онда жататын a түзуін жүргіземіз (206-сурет). Содан кейін осы жазықтықта O нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр b түзуін жүргіземіз. Енді O нүктесі арқылы өтетін және α жазықтығына перпендикуляр c түзуін жүргіземіз. $c \perp \alpha$ болғандықтан, $c \perp a$ және $c \perp b$ болады. Салынған a, b және c түзулері өзара перпендикуляр.

Бұл есептің шешуінен кеңістіктің әрбір нүктесі арқылы өзара перпендикуляр үштен артық емес түзу жүргізуге болатыны шығады.

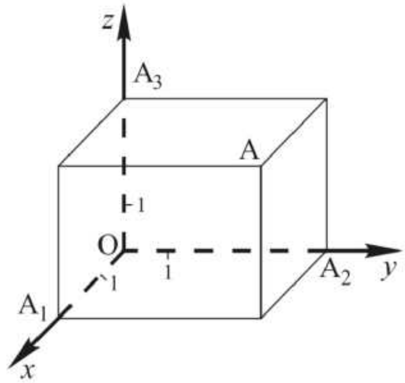


207-сурет

Енді кеңістіктегі **тікбұрышты координаталарды** анықтайық. O нүктесінде қиылысатын қос-қостан перпендикуляр Ox, Oy және Oz түзулерін (207-сурет) салайық. O нүктесін *координаталар басы*, Ox, Oy және Oz түзулерін координаталық түзулер (немесе координаталар осьтері) деп атайтын боламыз. *Ox – абсцисса осі, Oy – ордината осі, Oz – аппликата осі.*

xOy, xOz және yOz жазықтықтары *координаталық жазықтықтар* деп аталады. O нүктесі координаталар осьтерінің әрқайсысын екі сәулеге бөледі. Олардың біреуін (Ox, Oy, Oz) оң деп атайық, яғни ол оң бағытты береді, ал екіншісін теріс деп атайық. Координаталар осьтерінің әрқайсысына координаталар басынан бастап бірлік ұзындықтағы кесінділер өлшеп саламыз және кеңістіктегі нүктенің координаталары ұғымын анықтаймыз.

A кеңістіктің кез келген нүктесі болсын. Осы нүкте арқылы координаталар осьтеріне перпендикуляр жазықтықтар жүргіземіз (208-сурет). Осы жазықтықтардың абсцисса, ордината және аппликата осьтерімен қиылысу нүктелерін, сәйкесінше, A_1, A_2 және A_3 деп белгілейік.



208-сурет

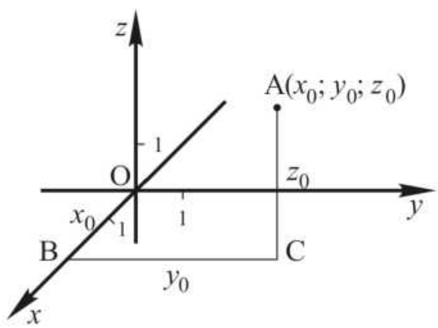
***A* нүктесінің абсциссасы** деп:

- A_1 нүктесі OX сәулесіне тиісті болса, OA_1 қашықтығына тең ***x*** саны;
- A_1 нүктесі OX сәулесіне қарама-қарсы сәулеге тиісті болса, ***–x*** саны;
- A_1 нүктесі координаталар басымен беттессе, **0** саны аталады.

A нүктесінің ***y* ординатасы** мен ***z* аппликатасы** да дәл осылай анықталады. Координаталары x, y, z болатын A нүктесі $A(x; y; z)$ деп белгіленеді. A_1, A_2, A_3 нүктелері – A нүктесінің координаталар осьтеріндегі ортогональ проекциялары. Сонымен, *кеңістіктегі нүктенің координаталары деп оның координаталар осьтеріндегі ортогональ проекцияларының координаталары аталады.*

$A(x; y; z)$ нүктесін салу үшін алдымен координаталар осьтерінен x, y, z сандарына сәйкес келетін нүктелерді тауып, содан кейін сол нүктелер арқылы координаталар осьтеріне перпендикуляр үш жазықтық жүргізу керек. Осы жазықтықтардың қиылысу нүктесі ізделінді нүкте болады (208-сурет).

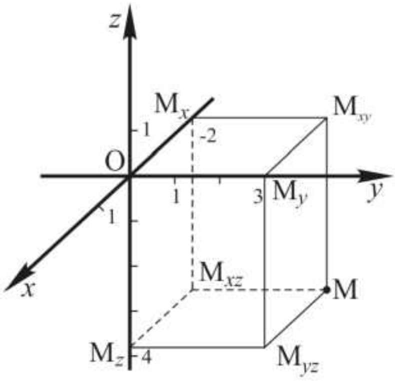
Берілген координаталары бойынша нүктені салудың басқа да тәсілі бар. $A(x_0; y_0; z_0)$ нүктесін салу керек болсын. Ox осіне координаталар басынан бастап $|x_0|$-ге тең кесінді салып (x_0 санының таңбасына қарай оң немесе теріс жарты оське), $B(x_0; 0; 0)$ нүктесін аламыз (209-сурет). Әрі қарай Oy осіне параллель түзуге B нүктесінен бастап $|y_0|$-ге тең кесінді салып,



209-сурет

$C(x_0; y_0; 0)$ нүктесін аламыз. Соңында Oz осіне параллель түзуге C нүктесінен бастап $|z_0|$-ге тең кесінді салып, ізделінді нүктені аламыз. Сонымен, $A(x_0; y_0; z_0)$ нүктесін салу үшін үшбуынды $OBCA$ сынық сызығын салу жеткілікті болады.

2 - е с е п. $M(-2; 3; -4)$ нүктесі берілген. Осы нүктеден: а) координаталар осьтеріне; ә) координаталық жазықтықтарға жүргізілген перпендикулярлар табандарының координаталарын табу керек.



210-сурет

Ш е ш у і. M нүктесін салып, одан координаталар осьтеріне жүргізілген перпендикулярлардың табандарын M_x, M_y, M_z, ал координаталық жазықтықтардағысын – M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} арқылы белгілейік (210-сурет). Сонда: а) $M_x(-2; 0; 0)$, $M_y(0; 3; 0)$, $M_z(0; 0; -4)$; ә) $M_{xy}(-2; 3; 0)$, $M_{yz}(0; 3; -4)$, $M_{xz}(-2; 0; -4)$.

Ж а у а б ы. а) $(-2; 0; 0)$, $(0; 3; 0)$, $(0; 0; -4)$; ә) $(-2; 3; 0)$, $(0; 3; -4)$, $(-2; 0; -4)$.

СҰРАҚТАР

1. Кеңістіктегі нүктенің координаталары қалай аталады және қалай табылады? Мысал келтіріңдер.

2. Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі ұғымын түсіндіріңдер және сызбаға салып көрсетіңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

400. а) xOy және xOz; ә) yOz және xOy; б) xOy, xOz және yOz жазықтықтарына тиісті нүктенің координаталары қандай болады?

401. $A(-2; -3; 5)$, $B(0; -2; 7)$, $C(4; 0; -5)$, $D(-1; 9; 0)$, $E(0; 0; 6)$, $K(-8; 0; 0)$, $N(0; 1; 0)$ нүктелері берілген. Осы нүктелердің қайсылары: а) xOy жазықтығында; ә) Oz осінде; б) yOz жазықтығында жатыр?

402. $A(12; 0; -\sqrt{5})$ және $B\left(\frac{1}{2}; 1; 16\right)$ нүктелерінің координаталар осьтеріндегі ортогональ проекцияларының координаталарын табыңдар.

403. $A(4; -2; -6)$ нүктесі берілген. Оған ең жақын орналасқан және: а) координаталар осьтерінің әрқайсысында; ә) координаталық жазықтықтардың әрқайсысында жататын нүктелердің координаталарын табыңдар.

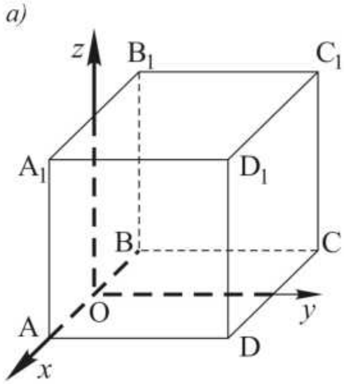
404. Координаталар жүйесін салып, оған $A(-3; 5; 2)$, $B(3; -2; 4)$, $C(2; 6; -1)$, $D(-2; 0; 3)$, $E(0; 3; 0)$ нүктелерін белгілеңдер.

405. M нүктесі yOz бұрышының биссектрисасында жатыр. $OM = 4\sqrt{2}$ болса, M нүктесінің координаталарын табыңдар.

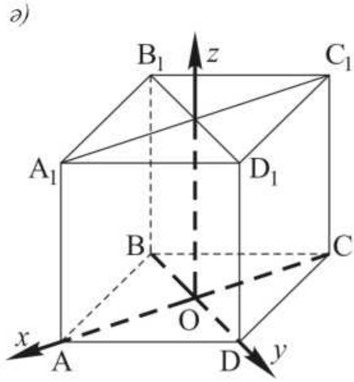
406. Координаталары оң сан болатын M нүктесі координаталық жазықтықтардан бірдей қашықтықта орналасқан. $OM = 5\sqrt{3}$ болса, M нүктесінің координаталарын табыңдар.

407. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген және: а) AB қырының (211, *а*-сурет); ә) $ABCD$ жағы диагоналінің (211, *ә*-сурет) ортасы арқылы өтетін координаталар осьтері жүргізілген. Кубтың қыры 4-ке тең болса, оның төбелерінің координаталарын табыңдар.

а)



ә)



211-сурет

408. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қыры 2-ге тең. B нүктесі координаталар басы, ал кубтың үш қырын қамтитын түзулер осьтері болатын координаталар жүйесінде куб төбелерінің координаталарын табыңдар.

409. а) Oy осіне параллель және xOz жазықтығын $M(3; 0; 4)$ нүктесінде қиятын; ә) Ox осіне параллель және yOz жазықтығын $N(0; 4; 6)$ нүктесінде қиятын түзуді салыңдар.

410. Төбелері $A(3; 0; 3)$, $B(0; 0; 3)$, $C(0; 4; 3)$ нүктелерінде болатын үшбұрыш берілген. Осы үшбұрышқа xOy жазықтығына қатысты симметриялы үшбұрыш салып, оның периметрі мен ауданын табыңдар.

411. а) x пен y координаталары тең; ә) y пен z координаталарының көбейтіндісі 0-ге тең кеңістіктегі нүктелер қайда орналасқан?

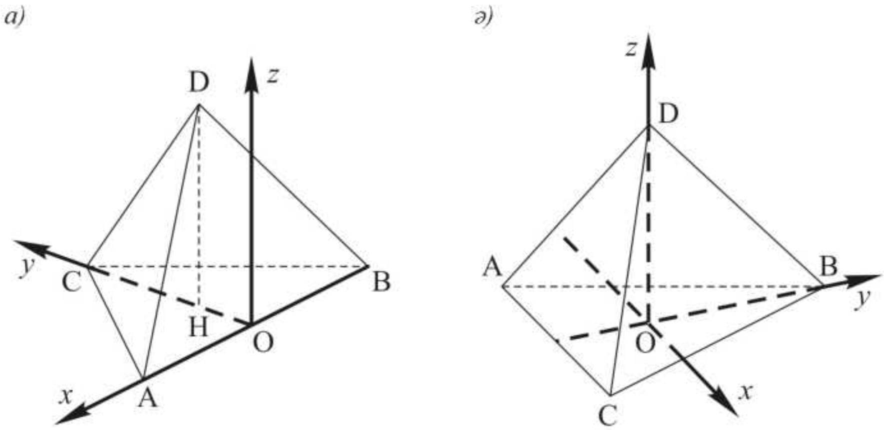
B деңгейі

412. $M(3; 4; 0)$ нүктесі арқылы Oz осіне параллель a түзуі жүргізілген. 1) OM қашықтығын табыңдар. 2) a түзуінде жататын, координаталар басынан $5\sqrt{2}$-ге тең қашықтықтағы нүктені көрсетіңдер. Бұл есептің неше шешімі бар?

413. $A(5;\ 0;\ -2)$ нүктесіне: а) координаталар басына; ә) аппликата осіне қатысты симметриялы нүктелердің координаталарын табыңдар.

414. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген, оның жағының диагоналі $\sqrt{2}$ см-ге тең. D нүктесін координаталар басы ретінде алып, координаталар жүйесін салыңдар және куб төбелерінің координаталарын табыңдар.

415. $A(3;\ 0;\ 0)$ және $B(-3;\ 0;\ 0)$ нүктелері – табаны xOy жазықтығында жататын $DABC$ дұрыс тетраэдрінің төбелері (212, *а*-сурет). Оның басқа төбелерінің координаталары қандай?



212-сурет

416. Қыры $2\sqrt{3}$ дм-ге тең $DABC$ дұрыс тетраэдрі берілген. $Oxyz$ координаталар жүйесі салынған (212, *ә*-сурет), мұндағы O – ABC жағының центрі, $Ox \parallel AC$, $B \in Oy$, $D \in Oz$. Тетраэдрдің барлық төбелерінің координаталарын табыңдар.

C деңгейі

417. Төбелері $A(0;\ 0;\ 5)$, $B(5;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 5;\ 0)$ нүктелерінде болатын үшбұрыш берілген, O нүктесі – координаталар жүйесінің басы. AOB, BOC, AOC үшбұрыштарының ABC үшбұрышы жазықтығындағы ортогональ проекциялары аудандарының қосындысын табыңдар.

418. Егер M нүктесі: а) координаталық жазықтықтардан бірдей қашықтықта және координаталар басынан $4\sqrt{3}$-ке тең қашықтықта; ә) координаталық осьтерден бірдей қашықтықта және координаталар басынан 6-ға тең қашықтықта болса, M нүктесінің координаталары қандай болғаны? Есептің қанша шешімі бар болатынын зерттеңдер.

19. Екі нүктенің арақашықтығы. Кесінді ортасының координаталары

Тақырыпты оқу барысында:

• кеңістіктегі екі нүктенің арақашықтығы мен кесінді ортасының координаталары формулаларын білесіңдер;
• оларды есептер шығаруда қолданасыңдар.

Теорема. **Егер кеңістікте $A(x_1, y_1, z_1)$ және $B(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері берілген болса, онда олардың арақашықтығы:**

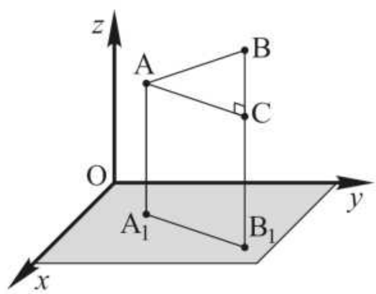
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (1)$$

Дәлелдеуі. Алдымен AB кесіндісі Oz осіне параллель болмайтын жағдайды қарастырайық (213-сурет). A және B нүктелерінен Oz осіне параллель түзулер жүргіземіз. Ол түзулер xOy жазықтығына перпендикуляр болады және оны $A_1(x_1, y_1, 0)$ және $B_1(x_2, y_2, 0)$ нүктелерінде қияды.

A_1ABB_1 жазықтығында $AC \parallel A_1B_1$ жүргіземіз, мұндағы $C \in BB_1$. Сонда $\angle ACB = 90°$, ал C нүктесінің координаталары (x_2, y_2, z_1) болады.

Пифагор теоремасы бойынша $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$.

$AC = A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ және $BC = |z_2 - z_1|$ болғандықтан, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.



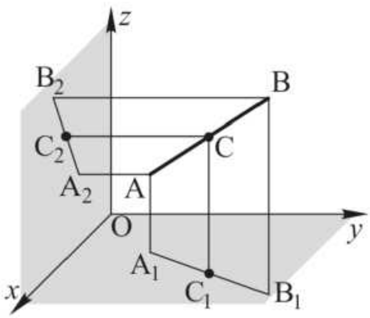
213-сурет

Егер $AB \parallel Oz$ болса, онда $AB = |z_2 - z_1|$. (1) формуладан да осындай нәтиже аламыз, өйткені бұл жағдайда $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ болады.

Егер $z_1 = z_2$ болса, онда AB мен A_1B_1 кесінділері тіктөртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары болады (немесе A мен B нүктелері xOy жазықтығында жатса беттеседі). Бұл жағдайда $z_1 - z_2 = 0$ болады және (1) формула орындалады. Теорема дәлелденді.

Теорема. **Егер кез келген $A(x_1, y_1, z_1)$ және $B(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері берілген болса, онда AB кесіндісінің ортасы болатын $C(x, y, z)$ нүктесінің координаталары мына формулалармен беріледі:**

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

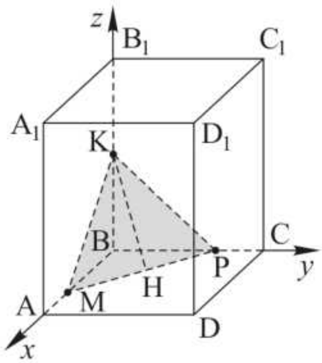


214-сурет

Д ә л е л д е у і. A, B және C нүктелері арқылы Oz осіне параллель түзулер жүргіземіз (214-сурет). Олар xOy жазықтығын $A_1(x_1, y_1, 0)$, $B_1(x_2, y_2, 0)$ және $C_1(x, y, 0)$ нүктелерінде қияды. Фалес теоремасы бойынша C_1 нүктесі A_1B_1 кесіндісінің ортасы болады. xOy жазықтығында кесінді ортасының координаталары оның ұштарының координаталары арқылы мына формулалармен өрнектеледі: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

z координатасы үшін өрнекті xOy жазықтығының орнына xOz (немесе yOz) жазықтығын алу арқылы табуға болады. Яғни *AB кесіндісін, мысалы, xOz жазықтығына Oy осіне параллель проекциялау керек*. Осы дәлелдеуді 214-суретті пайдаланып, әрі қарай жалғастырыңдар.

1 - е с е п. Қыры 30-ға тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Оның BB_1 қырының ортасына K нүктесі, AB қырына $MB = 2AM$ болатындай M нүктесі, ал BC қырына $BP = 4PC$ болатындай P нүктесі белгіленген. ΔMKP-ның KH медианасының ұзындығын табу керек.



215-сурет

Ш е ш у і. 215-суретте көрсетілгендей координаталар жүйесін енгіземіз. Сонда $K(0, 0, 15)$, $M(20, 0, 0)$, $P(0, 24, 0)$ болады. H нүктесі – MP кесіндісінің ортасы, $H(10, 12, 0)$. Екі нүктенің арақашықтығының формуласы бойынша $KH = \sqrt{(10-0)^2 + (12-0)^2 + (0-15)^2} = \sqrt{469}$ аламыз.

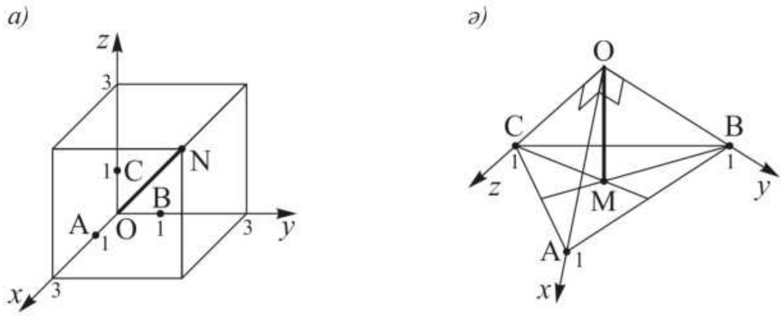
Ж а у а б ы. $\sqrt{469}$.

2 - е с е п. $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ және $C(0; 0; 1)$ нүктелерінен бірдей қашықтықтағы нүктелер жиынынан тұратын фигураны салу керек.

Ш е ш у і. Осы фигураның $M(x; y; z)$ нүктесі берілген нүктелерден бірдей қашықтықта болсын. Сонда екі нүктенің арақашықтығы формуласынан мынаны аламыз:

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2.$$

Бұл теңдіктен $x = y = z$ болатыны шығады. Демек, ізделінді фигура координаталар басынан және, мысалы, $N(3; 3; 3)$ нүктесінен (216, *а*-сурет) өтетін түзу болады. Осы есепті шешудің басқа тәсілін ұсыныңдар (216, *ә*-сурет).



216-сурет

СҰРАҚТАР

1. Кеңістіктегі екі нүктенің арақашықтығын қандай формуламен табуға болады?
2. Егер кесінді ұштарының координаталары белгілі болса, оның ортасының координаталары неге тең?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

419. $A(0;\ 4;\ 3)$ нүктесінен: а) координаталар басына; ә) аппликата осіне; б) xOy координаталық жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

420. а) $M(9;\ 10;\ 8)$ нүктесінен координаталар басына дейінгі қашықтықты табыңдар. ә) Егер координаталар басынан $A(2;\ -3;\ z)$ нүктесіне дейінгі қашықтық $\sqrt{17}$-ге тең болса, z координатасын табыңдар.

421. Ұштары $M(4;\ 0;\ -2)$ және $N(6;\ -4;\ 2)$ нүктелерінде болатын кесіндінің ұзындығын табыңдар.

422. Егер $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(3;\ -3;\ 1)$, $M(3;\ 4;\ 5)$, $N(-3;\ -4;\ 5)$ нүктелері берілген болса, AB мен MN кесінділері орталарының арақашықтығын 0,1-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

423. Кесіндінің бір ұшының координаталары $(2;\ 3;\ 4)$ және ортасынікі $(0;\ -4;\ 5)$. Кесіндінің басқа ұшының координаталарын табыңдар.

424. а) Ұштары $A\left(100000; 2\frac{1}{3}; \frac{1}{17}\right)$ және $B\left(-100000; \sqrt{5}; -\frac{1}{17}\right)$ нүктелерінде болатын кесіндінің ортасы абсцисса осіне тиісті; ә) ұштары $M\left(0{,}0001; \sqrt{2}; 3\frac{11}{50}\right)$ және $N\left(2020; -\sqrt{15}; -3\frac{11}{50}\right)$ нүктелерінде болатын кесіндінің ортасы xOy жазықтығына тиісті деген ақиқат па?

425. $A(0; 5; -2)$, $B(4; 4; -5)$, $C(-8; 3; 0)$ төбелері болатын ABC үшбұрышы берілген. Координаталар басынан оның BM медианасының ортасына дейінгі қашықтықты табыңдар.

426. Үшбұрышты пирамиданың төбелері – $P(0; -5; 4)$, $A(3; 0; 1)$, $B(-1; 4; 1)$, $C(5; 2; 3)$. O нүктесі BCP үшбұрышының PM медианасының ортасы болса, AO қашықтығын табыңдар.

427. а) $A(7; 0; 14)$, $B(14; 7; 0)$, $C(7; 14; 0)$ нүктелері – $ABCD$ параллелограмының тізбектес үш төбесі. Оның төртінші D төбесінің координатасын табыңдар.

ә) $OBCD$ параллелограмының төбелері $O(0; 0; 0)$, $B(1; 2; 0)$, $C(2; 0; 3)$. Оның BD диагоналінің ұзындығын табыңдар.

428. а) $A(2; 6; 4)$, $B(0; 4; 8)$, $C(2; 2; 8)$, $D(4; 4; 4)$ нүктелері $ABCD$ параллелограмының; ә) $M(6; 7; 8)$, $N(8; 2; 6)$, $K(4; 3; 2)$, $L(2; 8; 4)$ нүктелері $MNKL$ ромбысының төбелері бола ма?

429. а) Ox осінде жататын және $A(1; 2; 3)$ мен $B(-3; 3; 2)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта болатын M нүктесінің координаталарын табыңдар.

ә) xOy жазықтығында жататын және $A(0; 4; -4)$, $B(-4; 0; 4)$, $C(0; -4; 0)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта болатын D нүктесін табыңдар.

430. Ұштары: а) $M(a; b; c)$ және $N(m; n; -c)$ нүктелерінде болатын кесіндінің ортасы xOy жазықтығында; ә) $C(a; -b; c)$ және $D(-a; b; d)$ нүктелерінде болатын кесіндінің ортасы Oz осінде жататынын дәлелдеңдер.

431. Төбелері $A(7; 1; -5)$, $B(4; -3; -4)$, $C(1; 3; -2)$ нүктелерінде болатын үшбұрыш теңбүйірлі болатынын дәлелдеп, оның кіші медианасының ұзындығын табыңдар.

B деңгейі

432. Куб төбелерінің берілген $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $B_1(0; 0; 1)$, $D(1; 1; 0)$ координаталары бойынша координаталар жүйесіне $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубын салыңдар және A нүктесінен DD_1C_1C жағы диагональдарының қиылысу нүктесіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

433. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің қырлары $AB = 4$ м, $BB_1 = 4$ м және $BC = 3$ м. Оның AB мен BB_1 қырларының орталарына, сәйкесінше, M және K нүктелері белгіленген, ал BC қырына $BP = 2PC$ болатындай P нүктесі белгіленген. MKP үшбұрышы медианаларының ұзындықтарын табыңдар.

434. A және B нүктелерінің координаталарын AB кесіндісінің ұзындығы: а) $\sqrt{14}$; ә) 14 болатындай етіп таңдап алыңдар.

435. $A(3; 0; 0)$, $B(0; 0; 5)$, $C(0; 4; 0)$, $D(3; 4; 5)$ нүктелері берілген. а) AB және DC; ә) AC және BD түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

436. $N(2; 3; 4)$, M және $P(5; 6; 7)$ нүктелері, сәйкесінше, AB, AN және NB кесінділерінің орталары. а) AB кесіндісінің ұзындығын; ә) M нүктесінің координаталарын және MP кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

437. Егер ABC үшбұрышы төбелерінің координаталары: а) $A(3; 4; 1)$, $B(3; 1; 5)$, $C(0; 2; 7)$; ә) $A(4; -5; 0)$, $B(-3; -1; -3)$, $C(-2; 3; 0)$; б) $A(6; -4; 10)$, $B(-4; 2; -6)$, $C(10; 2; -2)$ болса, онда ол үшбұрыштың сүйірбұрышты, тікбұрышты немесе доғалбұрышты болатынын зерттеңдер.

С деңгейі

438. Тікбұрышты координаталар жүйесі берілген. Егер $A(3; 5; 10)$, $B(4; 3; 4)$ болса, Oz осінен ABC сынық сызығының ұзындығы ең қысқа болатындай C нүктесін табыңдар.

439. $A(4; 3; 5)$, $B(0; 0; 5)$, $C(-4; 3; 5)$, $D(0; 6; 5)$ нүктелерінен арақашықтықтарының қосындысы ең кіші болатын нүктенің координаталарын табыңдар. Осы қашықтықтардың қосындысы неге тең?

440. а) $K(3; 0; 0)$, $P(0; 3; 0)$, $L(0; 0; 3)$; ә) $O(0; 0; 0)$, $A(1; 0; 0)$, $B(-1; 1; 1)$ нүктелерінен қашықтықтары квадраттарының қосындысы ең кіші болатын нүктенің координаталарын табыңдар. Осы квадраттардың қосындысы неге тең?

20. Кеңістіктегі векторлар және оларға амалдар қолдану

Тақырыпты оқу барысында:

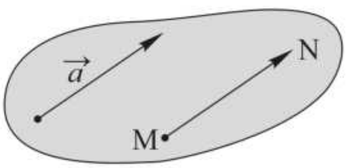
• кеңістіктегі вектордың, вектор ұзындығының, тең векторлардың, вектордың координаталарының анықтамаларын, векторларды қосу мен азайту, векторды санға көбейту ережелерін білетін боласыңдар;

• оларды есептер шығаруда қолданасыңдар;

• кесіндіні берілген қатынаста бөлетін нүктенің координаталарын табасыңдар.

9-сыныптың геометрия курсындағы сияқты кеңістіктегі бір ұшы A, екінші ұшы B болатын AB кесіндісі бағытталған кесінді немесе *вектор* деп аталады. A нүктесі вектордың басы, ал B нүктесі оның ұшы деп аталады. $\overrightarrow{AB}$ *векторының ұзындығы* деп AB кесіндісінің ұзындығы аталады, $|\overrightarrow{AB}|$ деп белгіленеді. Егер вектордың басы оның ұшымен беттесетін болса, онда оны *нөлдік* вектор деп атайды, $\vec{0}$ немесе $\overrightarrow{AA}$ деп белгіленеді. Оның ұзындығы 0-ге тең деп есептеледі. Ұзындықтары тең және бағыттас векторлар *тең* векторлар деп аталады.

Кеңістікте кез келген нүктеден берілген векторға тең бір ғана вектор салуға болады.



217-сурет

Шынымен де, $\vec{a}$ берілген вектор, M кеңістіктің кез келген нүктесі болсын. $\vec{a}$ векторын қамтитын түзу мен M нүктесі арқылы жазықтық жүргіземіз (217-сурет). Бұл жалғыз жазықтық (неге екенін түсіндіріңдер). Осы жазықтықта M нүктесінен $\vec{a}$ векторына тең бір ғана вектор салуға болады: $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$.

9-сыныптың геометрия курсында оқылған векторлардың барлық негізгі қасиеттері мен оларға амалдар қолдану ережелері кеңістіктегі векторлар үшін де орындалады.

Егер $\vec{a}$ векторы координаталар жүйесінде салынған болса және $A(x_1; y_1; z_1)$ нүктесі оның басы, ал $B(x_2; y_2; z_2)$ нүктесі ұшы болса, онда $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ сандарын $\vec{a}$ **векторының координаталары** деп атайды. $\vec{a}\,(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ немесе $\overrightarrow{AB}\,(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ деп белгілейді. Нөлдік вектордың координаталары (0; 0; 0) болады. Егер $\vec{a}$ векторы координаталар басынан бастап салынған және $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ болса, онда оның координаталары M нүктесінің координаталарына тең болады.

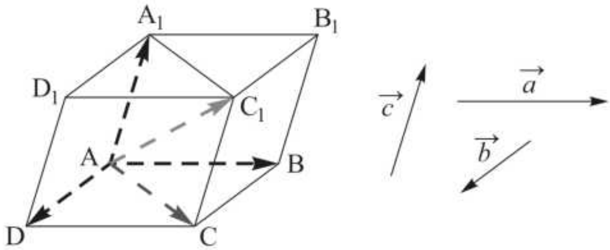
Тең векторлардың аттас координаталары тең болады және керісінше, *егер векторлардың аттас координаталары тең болса, онда векторлар да тең болатынын* ескерте кетелік.

$\overrightarrow{AB}$ векторының ұзындығы AB кесіндісінің ұзындығына тең, яғни:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Егер $\overrightarrow{AB}(a; b; c)$ болса, онда $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ болады.

Бір жазықтықта жатпайтын кез келген үш векторды қосу үшін *параллелепипед ережесі* қолданылады. Оның мәні мынада. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ көрсетілген векторлар болсын. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ болатын $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедін саламыз, сонда оның AC_1 диагоналі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының қосындысын кескіндейтін вектор болады (218-сурет).



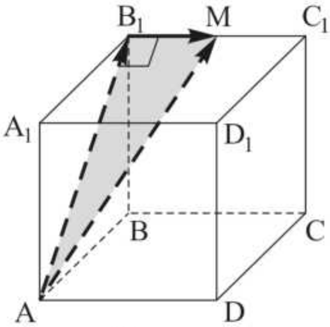
218-сурет

Шынымен де, $ABCD$ мен AA_1C_1C төртбұрыштары – параллелограмдар. Екі векторды қосудың параллелограмм ережесін екі рет қолданып, мынаны аламыз:

$$\overrightarrow{AC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AA_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Векторлардың координаталарын пайдаланып, олардың қосындысына, айырымына және вектордың санға көбейтіндісіне тең векторлардың координаталарын келесі ережелер бойынша табуға болады:

- *екі немесе одан да көп векторлар қосындысының әрбір координатасы осы векторлардың сәйкес координаталарының қосындысына тең;*
- *екі вектордың айырымының әрбір координатасы осы векторлардың сәйкес координаталарының айырымына тең;*
- *вектордың санға көбейтіндісінің әрбір координатасы вектордың сәйкес координаталарының сол санға көбейтіндісіне тең.*

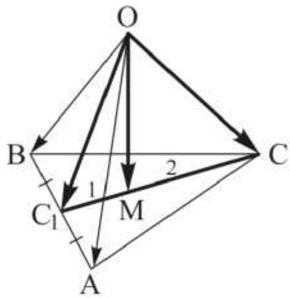


219-сурет

1 - е с е п. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген, M нүктесі – оның 16 см-ге тең B_1C_1 қырының ортасы (219-сурет). $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1M}$ қосындысына тең вектордың ұзындығын табу керек.

Ш е ш у і. Векторларды қосудың үшбұрыш ережесі бойынша $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{AM}$. $\overrightarrow{AM}$ векторының ұзындығы AM кесіндісінің ұзындығына тең. ΔAB_1M тікбұрышты, өйткені түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі бойынша $C_1B_1 \perp (AA_1B_1)$, демек, $C_1B_1 \perp AB_1$. Пифагор теоремасы бойынша $AM = \sqrt{AB_1^2 + B_1M^2} = \sqrt{(16\sqrt{2})^2 + 8^2} = 24$ (см).

Ж а у а б ы. 24 см.



220-сурет

2 - е с е п. O кеңістіктегі кез келген нүкте және M нүктесі ΔABC-ның медианаларының қиылысу нүктесі болса, онда $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. ABC үшбұрышының CC_1 медианасын жүргізейік (220-сурет). Планиметриядан белгілі болғандай, OCC_1 жазықтығында $CM : MC_1 = 2 : 1$ болғандықтан, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC_1}$ болады. $\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ болатындықтан, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, дәлелдеу керегі де осы еді.

3 - е с е п. $C(x; y; z)$ нүктесі ұштары $A(x_1; y_1; z_1)$ және $B(x_2; y_2; z_2)$ нүктесінде болатын кесіндіні $\frac{AC}{CB} = k$ қатынасында бөлсе, C нүктесінің координаталары $\boldsymbol{x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}, y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}, z = \frac{z_1 + kz_2}{1+k}}$ болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і . $AC = k \cdot CB$ болғандықтан, $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{CB}$ (1) болады.

Мына векторлардың координаталарын жазайық: $\overrightarrow{AC}(x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overrightarrow{CB}(x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z)$, $k\overrightarrow{CB}(kx_2 - kx; ky_2 - ky; kz_2 - kz)$. (1) теңдікті ескере отырып, мынаны аламыз: $x - x_1 = kx_2 - kx$, $y - y_1 = ky_2 - ky$, $z - z_1 = kz_2 - kz$. Бұдан $x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}$, $y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}$, $z = \frac{z_1 + kz_2}{1+k}$, дәлелдеу керегі де осы еді.

Егер $k = \frac{m}{n}$ болса, онда C нүктесінің координаталары $x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$, $y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$, $z = \frac{nz_1 + mz_2}{m+n}$ болатынын өздігінен дәлелдеңдер.

4 - е с е п. $\vec{a}(2; m; m)$ мен $\vec{b}(1; m\sqrt{2}; m)$ векторларының ұзындықтары тең болатындай m-нің барлық мәндерін табу керек.

Ш е ш у і. $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + m^2 + m^2} = \sqrt{4 + 2m^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (m\sqrt{2})^2 + m^2} = \sqrt{1 + 3m^2}$. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ болғандықтан, $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$ болады. Теңдеу құрып, оны шешейік: $4 + 2m^2 = 1 + 3m^2$, $m^2 = 3$, $m = \pm\sqrt{3}$.

Ж а у а б ы. $\pm\sqrt{3}$.

СҰРАҚТАР

1. а) Кеңістіктегі вектордың; ә) вектор ұзындығының; б) тең векторлардың анықтамасын беріңдер.
2. Векторларға қолданылатын амалдардың қандай ережелерін білесіңдер?
3. Бір жазықтықта жатпайтын үш векторды қосудың «параллелепипед ережесін» түсіндіріңдер.
4. Кеңістіктегі вектордың координаталары деп нені атайды?
5. Вектордың координаталары белгілі болса, оның ұзындығын қандай формуламен табуға болады?
6. Векторлар қосындысының, айырымының және вектордың санға көбейтіндісінің координаталарын қалай табуға болады?
7. Кесіндіні берілген қатынаста бөлетін нүктенің координаталарын қандай формулалармен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

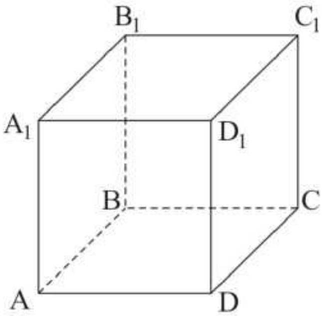
А деңгейі

441. $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$ екені белгілі болса, $\vec{a} = \vec{b}$ депұйғаруға бола ма?

442. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген (221-сурет). а) $\overrightarrow{A_1D}$ және $\overrightarrow{D_1C}$; ә) $\overrightarrow{A_1D_1}$ және $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$ және $\overrightarrow{BD_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}$ және $\overrightarrow{DC_1}$ векторлары тең бе?

443. 221-суретті пайдаланып: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$; ә) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DC}$ векторына тең векторды көрсетіңдер.

444. $ABCD$ параллелограмы мен кеңістіктің кез келген X нүктесі берілген. $\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XD} - \overrightarrow{XC}$ болатынын дәлелдеңдер.

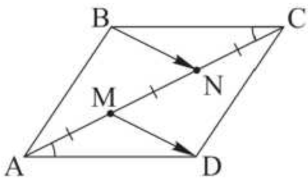


221-сурет

445. Өрнекті ықшамдаңдар:

а) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{BA}$;
ә) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{CB}$;
б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CA}$;
в) $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{KN}-\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{KF}$.

446. $ABCD$ параллелограмының AC диагоналіне $AM = MN = NC$ болатындай M және N нүктелері белгіленген (222-сурет). а) $\overrightarrow{AN}$ және $\overrightarrow{MC}$; ә) $\overrightarrow{MD}$ және $\overrightarrow{BN}$ векторларының теңдігін дәлелдеңдер.



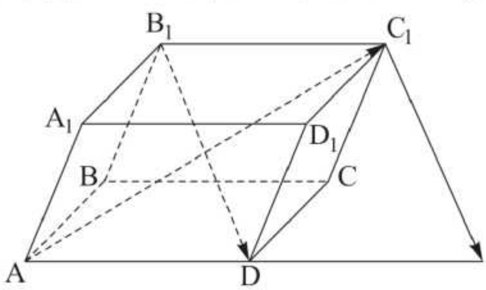
222-сурет

447. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген. Мына векторлардың қосындысын табыңдар: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1A}$; ә) $\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{A_1D_1}$; б) $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1D}$; в) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1D}$.

448. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген. а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{BA_1}+\vec{a}+\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{AC}$; ә) $\overrightarrow{CB}+\vec{a}+\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AD}$ теңдігі ақиқат болса, $\vec{a}$ векторын табыңдар.

449. M және N нүктелері – $OABC$ тетраэдрінің, сәйкесінше, OB және OC қырларының орталары. а) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$; ә) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})$ болатыны ақиқат па?

450. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген. Төмендегі теңдіктер ақиқат па? а) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC_1}-\overrightarrow{DA_1}$; ә) $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{B_1D}=2\overrightarrow{BC}$ (223-сурет); б) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OC_1}$, мұндағы O – кеңістіктің кез келген нүктесі.



223-сурет

451. а) AB кесіндісі және оның ортасы болатын M нүктесі берілген. O – кеңістіктегі кез келген нүкте. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ болатынын дәлелдеңдер.

ә) $ABCD$ параллелограмы берілген, O – оның диаг
лысу нүктесі, M – кеңістіктегі кез келген нүкте. $\overline{M}$
$+ \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$) болатынын дәлелдеңдер.

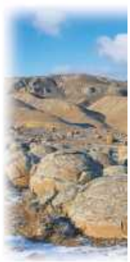
452. $ABCD$ тіктөртбұрышы берілген, O – кеңістіктегі к
а) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AC}$; ә) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$; б) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - ($
в) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})$ қосындысына тең

453. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген. Мына
торды табыңдар: а) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD_1}$; ә) $\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A}$
$+ \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CC_1}$; в) $\overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{A_1A}$.

454. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, O_1 – A_1
нальдарының қиылысу нүктесі, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} =$
ә) $\overrightarrow{C_1A}$; б) $\overrightarrow{AO_1}$; в) $\overrightarrow{DO_1}$ векторын $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор
теңдер.

455. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, M және
сінше, DC мен B_1C_1 қырларының орталары, $\overrightarrow{AB} =$
а) $\overrightarrow{NM}$; ә) $\overrightarrow{B_1M}$; б) $\overrightarrow{AN}$; в) $\overrightarrow{A_1C}$; г) $\overrightarrow{DB_1}$ векторын
арқылы өрнектеңдер.

456. Маңғыстау түбегінің шарлар алқабындағы төрт шар $ABCD$ параллелограмының төбелерінде орналасқан. Кеңістікте $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ теңдігі орындалатындай O нүктесі бар бола ма?



Торы

457. а) C нүктесі AB кесіндісін A нүктесінен бастап есептегенде 3 : 4 қатынасы-

459. Координаталар жүйесіне: а) $\overrightarrow{OA}(2; -3; 4)$; ә) $\overrightarrow{OB}(-4; 4; -4)$ векторын салыңдар.

460. $A(0; 10; -14)$, $B(7; -8; 0)$ нүктелері берілген. а) $\overrightarrow{AB}$; ә) $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{BB}$ векторының координаталарын табыңдар.

461. $\overrightarrow{CD}(2; 4; -3)$ векторының D нүктесінің координаталары: а) $(2; 15; -18)$; ә) $(0{,}5; -1{,}25; 4)$ болса, оның C нүктесінің координаталарын табыңдар.

462. $A(0; 1; 1)$, $B(1; -3; -2)$, $C(-2; 0; 2)$ және $D(-3; 4; 5)$ нүктелері берілген. а) $\overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{BC}$; ә) $\overrightarrow{DA}$ және $\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{BD}$ векторлары тең бе?

463. Егер: а) $\overrightarrow{MN}$ және $\overrightarrow{NK}$; ә) $\overrightarrow{MP}$ және $\overrightarrow{NK}$ векторлары тең болса, $M(x; 2; -8)$, $N(-4; y; 0)$, $K(3; -2; z)$, $P(0; 5; 0)$ нүктелерінің белгісіз координаталарын табыңдар.

464. а) $\vec{b}(-5; 4; 3)$; ә) $\vec{c}(\sqrt{2}; \sqrt{3}; 2)$ векторының ұзындығын табыңдар.

465. Ұзындығы: а) 13-ке; ә) 10-ға тең $\vec{a}(4; -3; z)$ векторының белгісіз координатасын табыңдар.

466. $\vec{a}(3; -1; 2)$ және $\vec{b}(0; 4; -5)$ векторлары берілген. Егер: а) $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$; ә) $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$; б) $\vec{c} = \vec{a} - 4\vec{b}$; в) $\vec{c} = -2\vec{a} - \vec{b}$ болса, $\vec{c}$ векторының координаталарын табыңдар.

467. $\vec{a}(1; -2; 0)$ және $\vec{b}(2; 2; -4)$ векторлары берілген. а) $\vec{a} + \vec{b}$; ә) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; б) $2\vec{a} + \vec{b}$; в) $-2\vec{b} - 4\vec{a}$ векторына тең вектордың ұзындығын табыңдар.

468. $\vec{a}(-2; 4{,}5; 1)$ және $\vec{b}(4; 0; -5)$ векторлары берілген. а) 0,1-ге; ә) 0,01-ге дейінгі дәлдікпен $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ векторының ұзындығын табыңдар.

B деңгейі

469. $ABCD$ трапециясы берілген, AD және BC – табандары, K – оның орта сызығының ортасы, O – кеңістіктегі кез келген нүкте. $4\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ болатынын дәлелдеңдер.

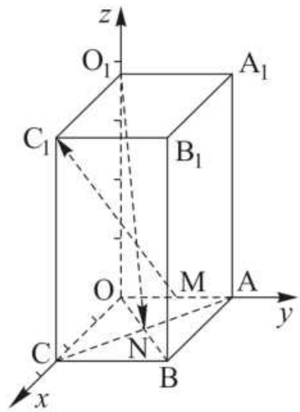
470. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген. $\overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{DB_1} = 2\overrightarrow{DC}$ болатынын дәлелдеңдер.

471. $DABC$ тетраэдрі берілген. Оның ADB жағының DD_1 медианасына $DF : FD_1 = 4 : 3$ болатындай F нүктесі белгіленген. $\overrightarrow{CF}$ векторын $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

472. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, N – ΔBA_1D медианаларының қиылысу нүктесі. $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$ болатынын дәлелдеңдер.

473. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген, оның BD_1 диагоналіне C_1M перпендикулярлары жүргізілген. $\overrightarrow{MC_1}$ векторын $\overrightarrow{BC_1}$ және $\overrightarrow{BD_1}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

474. Тікбұрышты $OABCO_1A_1B_1C_1$ параллелепипеді координаталар жүйесіне 224-суретте көрсетілгендей орналастырылған. $OA = 2$, $OB = 3$, $OO_1 = 4$ болса: а) $\overrightarrow{MC_1}$, мұндағы M – AO-ның ортасы; ә) $\overrightarrow{O_1N}$, мұндағы N – $OABC$ жағының центрі, векторының ұзындығын табыңдар.



224-сурет

475. $A(6; -3; 3)$ және $B(-3; 3; -6)$ векторлары берілген. $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{CB}$ болса, C нүктесінің координаталарын табыңдар.

476. AD мен BC табандары болатын $ABCD$ трапециясы берілген. Оның үш төбесінің координаталары: $A(-1; -3; 1)$, $B(-2; 1; 0)$, $D(3; -3; -1)$. $AD = 2BC$ болса, C төбесінің координаталарын табыңдар.

477. $DABC$ дұрыс тетраэдрінің төбелері: $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 4)$, $D(4; 4; 4)$. Оның DH биіктігінің ұзындығын табыңдар.

C деңгейі

478. $DABC$ дұрыс тетраэдрінің DAC және ABC жақтары медианаларының қиылысу нүктелері, сәйкесінше, K және H деп белгіленген, $DH \cap BK = M$, $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. а) $\overrightarrow{DH}$; ә) $\overrightarrow{DM}$; б) $\overrightarrow{BK}$; в) $\overrightarrow{MK}$ векторын $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

479. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары берілген, O және O_1 нүктелері, сәйкесінше, олардың медианаларының қиылысу нүктелері. $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1})$ болатынын дәлелдеңдер.

480. $PABC$ тетраэдрі берілген. а) Оның төбелерін оған қарсы жатқан жақтары медианаларының қиылысу нүктелерімен қосатын кесінділердің бір M нүктесінде қиылысатынын; ә) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP})$ болатынын дәлелдеңдер, мұндағы O – кеңістіктегі кез келген нүкте.

481. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, M және N нүктелері, сәйкесінше, ΔACD_1 және ΔBA_1C_1 медианаларының қиылысу нүктелері. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1})$ болатынын дәлелдеңдер.

21. Коллинеар және компланар векторлар. Векторды компланар емес үш вектор бойынша жіктеу

Тақырыпты оқу барысында:

• кеңістіктегі коллинеар, компланар, компланар емес, координаталық векторлардың анықтамаларын білетін боласыңдар;

• векторлардың коллинеарлық және компланарлық шарттарын білесіңдер;

• векторды компланар емес үш векторға, үш координаталық векторларға жіктейсіңдер;

• векторлардың коллинеарлық және компланарлық шарттарын, векторды компланар емес үш векторға жіктеу формулаларын есептер шығаруда қолданасыңдар.

Кеңістіктегі нөлдік емес екі вектор бір түзудің бойында немесе параллель түзулерде жатса, олар *коллинеар* векторлар деп аталады. Бір нүктеден салынған барлық коллинеар векторлар бір түзудің бойында жатады. «Коллинеар» сөзі латын тілінде *linea* – сызық (түзу) және *cum* – бірге, яғни түзуде жататындар дегенді білдіреді.

Кеңістікте, жазықтықтағы сияқты, $\vec{b}$ **векторы** $\vec{a}$ **векторына коллинеар болуы үшін** $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ **болатындай** k **саны бар болуы керек**. Осы шарттан *коллинеар векторлардың аттас координаталары пропорционал* болатыны шығады.

Кеңістіктегі нөлдік емес үш вектор бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда жатса, олар **компланар** векторлар деп аталады. Бір нүктеден салынған барлық компланар векторлар бір жазықтықта жатады. Кез келген екі вектор компланар. «Компланар» сөзі латын тілінде *planum* – жазықтық және *cum*, яғни бір жазықтықта жататын дегенді білдіреді.

Егер векторлар компланар болса, онда кез келген нөлдік емес $\vec{c}$ *векторын коллинеар емес* $\vec{a}$ *мен* $\vec{b}$ *векторларына бір ғана жолмен былай жіктеуге болады:* $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, *мұндағы x пен y – қайсыбір сандар.*

Егер $\vec{c}$ **векторын** $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ **түрінде, мұндағы** x **пен** y **– қайсыбір сандар, жіктеуге болса, онда** $\vec{a}$, $\vec{b}$ **және** $\vec{c}$ **векторлары компланар.**

Егер векторларды бір нүктеден бастап салғанда олар бір жазықтықта жатпаса, ондай векторлар **компланар емес** векторлар деп аталады.

1-есеп. $\vec{a}(1;\ 1;\ -0{,}5)$ векторына коллинеар және ұзындығы 3-ке тең $\vec{b}$ векторының координаталарын табу керек.

Шешуі. Екі вектордың коллинеарлық шарты бойынша $\vec{b} = k\vec{a}$, мұндағы k – қайсыбір сан және $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$. $\vec{a}$ векторының ұзындығы: $|\vec{a}| =$

$= \sqrt{1^2 + 1^2 + (-0{,}5)^2} = 1{,}5$. Сонда $3 = 1{,}5|k|$, бұдан $|k| = 2$, $k = 2$ немесе $k = -2$. $\vec{b}$ векторының координаталарын табамыз: (2; 2; –1) немесе (–2; –2; 1).

Жауабы. (2; 2; –1) немесе (–2; –2; 1).

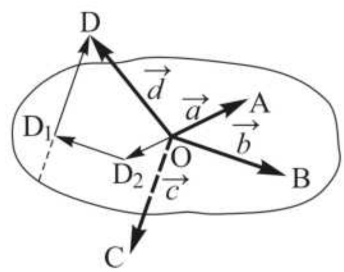
2-есеп. $\vec{a}(6; -3; 0)$, $\vec{b}(1; 0; -2)$, $\vec{c}(5; -1; -4)$, $\vec{d}(4; -1; -4)$ болса, онда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ және $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ векторларының қайсысы компланар болатынын анықтау керек.

Шешуі. Компланарлық шартын пайдаланып, $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ немесе $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b}$ теңдігінің орындалатынын тексерейік. Ол үшін мына теңдеулер жүйесінің қайсысының шешімі бар болатынын тексерейік: $\begin{cases} 5 = 6x + y, \\ -1 = -3x, \\ -4 = -2y \end{cases}$ немесе $\begin{cases} 4 = 6x + y, \\ -1 = -3x, \\ -4 = -2y. \end{cases}$ Бірінші жүйені шешіп, $x = \frac{1}{3}$, $y = 2$ аламыз, бірақ $5 \neq 6 \cdot \frac{1}{3} + 2$. Демек, бірінші жүйенің шешімі жоқ, сондықтан $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары компланар емес. Екінші жүйенің шешімі $x = \frac{1}{3}$, $y = 2$, сондықтан $\vec{d} = \frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$ теңдігі ақиқат болады. Демек, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ – компланар векторлар.

Жауабы. Компланар векторлар: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$.

Теорема. **Кез келген $\vec{d}$ векторын тек бір жолмен $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ түрінде көрсетуге болады, мұндағы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – берілген компланар емес векторлар, x, y, z – қайсыбір сандар.** (Бұлай көрсету *$\vec{d}$ векторын берілген компланар емес $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларына жіктеу деп аталатынын айта кетелік.*)

Дәлелдеуі. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторларын кез келген O нүктесінен бастап салып, олардың ұштарын, сәйкесінше, A, B, C, D деп белгілейік (225-сурет). D нүктесінен OC-ға параллель түзу жүргіземіз. Осы түзудің AOB жазықтығымен қиылысу нүктесін D_1 деп белгілейміз. Әрі қарай, OB түзуіне параллель D_1D_2 түзуін жүргіземіз. Ол AO түзуін D_2 нүктесінде қияды. Сонда $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_2} + \overrightarrow{D_2D_1} + \overrightarrow{D_1D}$ болады.

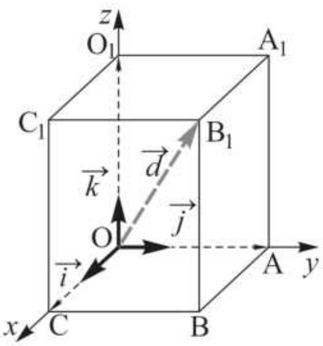


225-сурет

$\overrightarrow{OD_2}$ және $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{D_2D_1}$ және $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{D_1D}$ және $\overrightarrow{OC}$ векторлары коллинеар болғандықтан, $\overrightarrow{OD_2} = x \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{D_2D_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{D_1D} = z \cdot \overrightarrow{OC}$ болатын x, y, z сандары бар болады. Сонда $\overrightarrow{OD} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$, яғни $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Бұл жіктеу жалғыз. Шынымен де, басқа да жіктеуі бар болады делік: $\vec{d} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$. Сонда $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$, $(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c} = \vec{0}$.

Бұл теңдік тек $x - x_1 = y - y_1 = z - z_1 = 0$ болғанда ғана орындалады. $x \neq x_1$ деп жориық, сонда соңғы теңдіктен мынаны аламыз: $\vec{a} = \frac{y_1 - y}{x - x_1}\vec{b} + \frac{z_1 - z}{x - x_1}\vec{c}$, бұдан $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының компланар екені шығады. Бұл шартқа қайшы.



226-сурет

Ендеше $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, яғни $\vec{d}$ векторының компланар емес $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларына жіктелуінің тек бір жолы бар екен. Теорема дәлелденді.

Тікбұрышты координаталар жүйесінің басынан бастап Ox, Oy және Oz осьтеріне әрқайсысының ұзындығы 1-ге тең векторлар *координаталық векторлар* деп аталады және $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ деп белгіленеді (226-сурет). Кез келген $\vec{d}\,(x, y, z)$ векторын $\boldsymbol{\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$ түрінде тек бір жолмен көрсетуге болады, мұндағы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – координаталық векторлар.

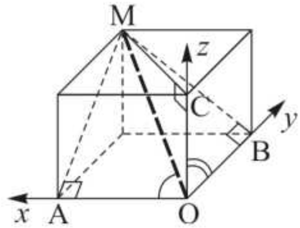
Шынымен де, координаталар жүйесіне $\overrightarrow{OB_1} = \vec{d}$ векторын және тікбұрышты $ABCOA_1B_1C_1O_1$ параллелепипедін салсақ (226-сурет), векторларды қосудың параллелепипед ережесі бойынша $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OO_1}$ болады. $\overrightarrow{OC} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OO_1} = z\vec{k}$ болғандықтан, $\overrightarrow{OB_1} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$\vec{b} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ болса, m, n, p сандары $\vec{b}$ векторының координаталары болатынын айта кетелік.

3 - е с е п. Координаталары оң сан болатын $\overrightarrow{OM}$ векторының ұзындығы $10\sqrt{2}$-ге тең, ал оның координаталар осьтеріндегі ортогональ проекциялары ұзындықтарының қосындысы 24-ке тең. Егер $\overrightarrow{OM}$ векторының абсцисса және ордината осьтерімен жасайтын бұрыштарының косинустары, сәйкесінше, $0{,}4\sqrt{2}$ және $0{,}3\sqrt{2}$-ге тең болса, $\overrightarrow{OM}$ векторының аппликата осімен құрайтын бұрышын табу керек.

Ш е ш у і. $\overrightarrow{OM}$ векторының Ox, Oy, Oz осьтеріндегі ортогональ проекцияларының ұзындықтары, сәйкесінше, OA, OB, OC болсын (227-сурет). Сонда $OA = 10\sqrt{2} \cdot 0{,}4\sqrt{2} = 8$, $OB = 10\sqrt{2} \cdot 0{,}3\sqrt{2} = 6$, $OC = 24 - (6 + 8) = 10$

болады. Ізделінді бұрыш – $\angle MOC$, $\cos\angle MOC = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Демек, $\angle MOC = 45°$.



227-сурет

Ж а у а б ы . 45°.

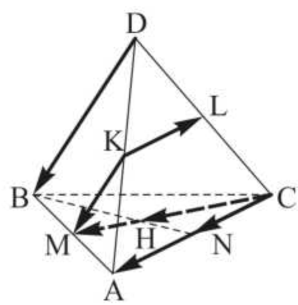
СҰРАҚТАР

1. Қандай векторлар: а) коллинеар; ә) компланар векторлар деп аталады?
2. а) Екі вектордың коллинеарлық; ә) үш вектордың компланарлық шартын тұжырымдаңдар.
3. а) Екі коллинеар вектор; ә) үш компланар вектор арқылы қанша жазықтық жүргізуге болады?
4. Векторды компланар емес үш векторға жіктеу деп нені атайды? Мысал келтіріңдер.
5. Координаталық векторлар дегеніміз не?
6. Вектордың координаталарын біле отырып, оны координаталық векторларға қалай жіктеуге болады? Мысал келтіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

482. 228-суретте $DABC$ тетраэдрі кескінделген, M, N, K, L нүктелері, сәйкесінше, AB, AC, DA және DC қырларының орталары. а) Коллинеар векторлар жұптарын; ә) үш компланар векторды көрсетіңдер.



228-сурет

483. Егер $\vec{a} + \vec{b}$ мен $\vec{a} - \vec{b}$ векторлары коллинеар болса, онда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары: а) коллинеар; ә) компланар болады деген ақиқат па?

484. $\vec{a}(2; 3; -1)$, $\vec{b}(-4; -6; 2)$ және $\vec{c}(-2; -3; 1)$ векторлары коллинеар ма?

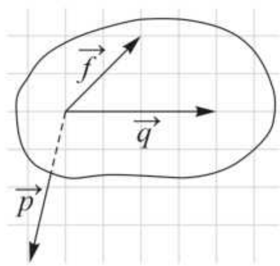
485. а) $\vec{b}(3;\ 0;\ 0)$; ә) $\vec{c}(0;\ -1;\ 0)$; б) $\vec{d}(0;\ 15;\ 0)$; в) $\vec{a}(5;\ 0;\ 6)$ векторларының қайсысы $\vec{j}(0;\ 1;\ 0)$ векторына коллинеар?

486. $\vec{b}(1;\ -2;\ 0)$ векторына коллинеар қанша $\vec{a}$ векторы бар болады? $\vec{a}$ векторының координаталарын атаңдар.

487. x-тің қандай мәнінде: а) $\vec{a}(2;\ 3;\ -4)$ мен $\vec{b}(x;\ -6;\ 8)$; ә) $\vec{c}(x;\ -6;\ 5)$ мен $\vec{d}(2;\ -3;\ 4)$ векторлары параллель болады?

488. Басы $A(1;\ 1;\ 1)$ нүктесінде болатын және: а) $\vec{c}(3;\ 4;\ 5)$; ә) $\vec{d}(0;\ -2;\ 4)$ векторына коллинеар $\overrightarrow{AB}$ векторы ұшының координаталарын табыңдар.

489. $\vec{a}(-2;\ 6;\ 3)$ векторына коллинеар және: а) онымен бағыттас; ә) оған қарама-қарсы бағытталған, ұзындығы 1-ге тең вектордың координаталарын табыңдар.



229-сурет

490. Егер: а) $|\vec{a}| = 5$; ә) $|\vec{a}| = 50$ болса, $\vec{b}(6;\ -8;\ 7{,}5)$ векторына коллинеар $\vec{a}$ векторының координаталарын табыңдар.

491. Қайсыбір нүктеге 229-суретте көрсетілгендей үш күш түсірілген. Осы күштердің теңәсерлі күшін бейнелейтін векторды салыңдар.

492. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген. Көрсетілген үш вектордың қайсылары компланар:

а) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$; ә) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$; б) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB_1}$, $\overrightarrow{B_1B}$?

493. $\overrightarrow{OA}(1;\ 1;\ 1)$, $\overrightarrow{OB}\left(\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{OC}(2;\ 3;\ 2)$ векторлары берілген, мұндағы O нүктесі – координаталар басы. A, B, C және O нүктелері бір жазықтыққа тиісті ме екенін анықтаңдар.

494. а) $\vec{a}(0;\ 0;\ -2)$; ә) $\vec{b}(0;\ -4;\ 5)$; б) $\vec{c}(-3;\ 1;\ 0)$; в) $\vec{d}(16;\ 0;\ 16)$ векторының қайсысы $\vec{i}$ мен $\vec{k}$ векторларымен компланар?

495. $PABC$ тетраэдрінің PAB жағының медианалары M нүктесінде, ал PAC жағынікі N нүктесінде қиылысады. Неліктен: а) $\overrightarrow{MN}$ мен $\overrightarrow{BC}$ векторлары коллинеар; ә) $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{AB}$ векторлары компланар болатынын түсіндіріңдер.

496. Бір жазықтықта жатпайтын $ABCD$ мен $ABMK$ параллелограмдары берілген. $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CM}$ және $\overrightarrow{DK}$ векторлары компланар екенін дәлелдеңдер.

497. а) $\vec{a}(7; 3; -6)$; ә) $\vec{b}(0; -1; 4)$; б) $\vec{c}(17; -16; 0)$; в) $\vec{d}(-0{,}5; 1; -12)$ векторыны координаталық векторларға жіктелуін жазыңдар.

498. а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$; б) $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$;
ә) $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$; в) $\vec{d} = -\vec{i} - 0{,}3\vec{j} + 2\vec{k}$
векторының координаталары неге тең?

499. m мен n-нің қандай мәндерінде: а) $\vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + m\vec{k}$ және $\vec{d} = n\vec{i}$ + $+ \vec{j} - 2\vec{k}$; ә) $\vec{a} = 5\vec{i} - 4m\vec{k}$ және $\vec{b} = n\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ векторлары коллинеар болады?

500. $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ және $\overrightarrow{AC} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ векторлары берілген а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; ә) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; б) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$; в) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ векторын тең вектордың ұзындығын табыңдар.

501. $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ және $\overrightarrow{AC} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ векторларының ұзындык тары ABC үшбұрышының қабырғаларына тең. Осы үшбұрышты AM медианасының ұзындығын табыңдар.

502. A, B, C, D нысандары Сұлу үңгірінде орналасқан. $\overrightarrow{AB}$ векторын $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{CD} + z\overrightarrow{DB}$ түрінде көрсетіңдер. Қай жағдайда $\overrightarrow{AB}$ векторы компланар емес $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$ және $\overrightarrow{DB}$ үш векторына жіктелген болып есептеледі?

Сұлу үңгірі, Түркістан облысы

503. $PABC$ дұрыс тетраэдрі берілген, M – BC қырының ортасы, O – ΔABC-ның центрі. а) $\overrightarrow{AC}$; ә) $\overrightarrow{PM}$; б) $\overrightarrow{AM}$; в) $\overrightarrow{PO}$ векторын $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ векторлары бойынша жіктеңдер.

504. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. а) $\overrightarrow{AO}$ векторын, мұндағы O – AC_1 қырының ортасы; ә) $\overrightarrow{AM}$ векторын, мұндағы $M \in AC_1$ және $AM : MC_1 = 1 : 2$; б) $\overrightarrow{AN}$ векторын, $N \in CC_1$ және $CN : NC_1 = 2 : 3$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA}$ векторлары бойынша жіктеңдер.

505. Тікбұрышты $AOCDA_1O_1C_1D_1$ параллелепипедінің DD_1 қырын $DM : MD_1 = 2 : 1$ болатындай M нүктесі белгіленген. $\overrightarrow{OM}$ векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OO_1}$ векторлары бойынша жіктеңдер, егер $OA = 3$, $OC = 6$ $OO_1 = 9$ болса, $\overrightarrow{OM}$ векторының ұзындығын табыңдар.

В деңгейі

506. Координаталары оң сандар болатын $\overrightarrow{OA}$ векторының ұзындығы 10-ға, ал оның координаталар осьтеріндегі ортогональ проекцияларының қосындысы 20-ға тең. $\overrightarrow{OA}$ векторының абсцисса және ордината осьтерімен құрайтын бұрыштары, сәйкесінше, 60° және 45° болуы мүмкін бе?

507. Компланар емес $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары берілген. $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$ векторлары компланар бола ма екенін анықтаңдар.

508. $7\vec{a}+5\vec{c}$, $3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$, $5\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ векторлары компланар болатынын дәлелдеңдер.

509. Кеңістіктегі кез келген X нүктесі үшін $\overrightarrow{XC}=k\cdot\overrightarrow{XA}+(1-k)\cdot\overrightarrow{XB}$ теңдігі ақиқат болса, мұндағы k – қайсыбір сан, онда A, B, C нүктелері бір түзуге тиісті болатынын дәлелдеңдер.

510. A, B, C, D нүктелері берілген, әрі $A\notin BC$. $\overrightarrow{OD}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}+z\cdot\overrightarrow{OC}$ теңдігі ақиқат болса, мұндағы O – кеңістіктегі кез келген нүкте, x, y, z – қайсыбір сандар, әрі $x+y+z=1$, онда ол нүктелер бір жазықтыққа тиісті болатынын дәлелдеңдер.

С деңгейі

511. $\vec{a}(1;\ 1;\ -1)$, $\vec{b}(-2;\ -3;\ 3)$, $\vec{c}(-2;\ 4;\ -4)$ векторлары берілген. $|\vec{p}|=|\vec{q}|=|\vec{a}+\vec{b}|$ болса, $\vec{c}$ векторына коллинеар, өзара тең емес $\vec{p}$ және $\vec{q}$ векторларының координаталарын табыңдар.

512. A, B, C, D нүктелері бір жазықтыққа тиісті емес. AB кесіндісіне $AM:MB=3:1$ болатындай M нүктесі, ал CD кесіндісіне $CN:ND=3:1$ болатындай N нүктесі белгіленген. $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{CA}$ және $\overrightarrow{DB}$ векторлары компланар ма?

513. Үшбұрышты пирамида өзінің төбелерінің координаталарымен берілген: $A(-3;\ 0;\ 1)$, $B(1;\ 4;\ 1)$, $C(-5;\ 2;\ 3)$, $D(1;\ 0;\ 2)$. O нүктесі BCD жағының медианаларының қиылысу нүктесі болса, $\overrightarrow{AO}$ векторының ұзындығын табыңдар.

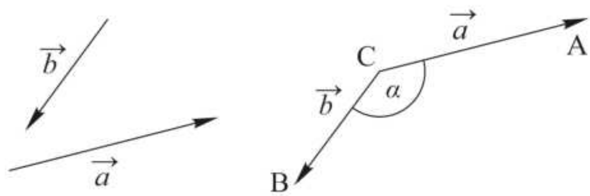
514. $OABC$ тетраэдрі берілген, онда $OA=OB=OC=2$, $\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC=90°$. $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=-5\overrightarrow{OM}$ теңдігі орындалатындай M нүктесін салыңдар.

22. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі

Тақырыпты оқу барысында:

- кеңістіктегі екі вектордың скаляр көбейтіндісінің анықтамасын және оның қасиеттерін білетін боласыңдар;
- екі вектордың перпендикулярлық шартын білесіңдер;
- координаталарымен берілген векторлардың скаляр көбейтіндісінің формуласын білесіңдер;
- екі вектордың скаляр көбейтіндісін есептер шығаруда, сонымен қатар екі вектордың арасындағы бұрышты табуда қолданасыңдар.

Кеңістікте, жазықтықтағы сияқты, *нөлдік емес* $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ *векторларының арасындағы бұрыш* деп оларға тең, басы ортақ екі вектордың арасындағы бұрыш аталады. $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ деп белгіленеді. Мысалы, 230-суреттегі $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \angle ACB$.



230-сурет

Бағыттас векторлардың арасындағы бұрыш 0°, ал қарама-қарсы бағытталған векторлардың арасындағы бұрыш 180° деп алынады.

Планиметриядағы сияқты, стереометрияда *екі вектордың скаляр көбейтіндісі деп олардың ұзындықтары мен арасындағы бұрыштың косинусына көбейтіндісін атайды:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Осы формуладан $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ болатыны шығады.

Егер екі вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, онда олар перпендикуляр және керісінше, егер векторлар перпендикуляр болса, онда олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең.

Екі вектордың скаляр көбейтіндісінің анықтамасынан шығатыны: егер $\vec{a} \parallel \vec{b}$ болса, онда $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ болады. Дербес жағдайда, $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$. $\vec{a} \cdot \vec{a}$ скаляр көбейтіндісі $\vec{a}$ векторының *скаляр квадраты* деп аталады және $\vec{a}^2$ деп белгіленеді. *Вектордың скаляр квадраты оның ұзындығының квадратына тең:* $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Векторлардың скаляр көбейтіндісінің мынадай қасиеттері бар:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$; 3) $\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\vec{b})$.

Теорема. **$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ векторларының скаляр көбейтіндісі $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$ формуласымен өрнектеледі.**

Дәлелдеуі. Коллинеар емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары координаталар басынан салынған болсын. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ деп белгілейік (суретін өздігінен салыңдар). Косинустар теоремасы бойынша

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB.$$

Осы теңдіктен $(\vec{a}\cdot\vec{b})$-ға тең $OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB$ көбейтіндісін табайық:

$$OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB=\frac{1}{2}(OA^2+OB^2-AB^2).$$

Мұндағы $OA^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2,\quad OB^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2,$

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=$$

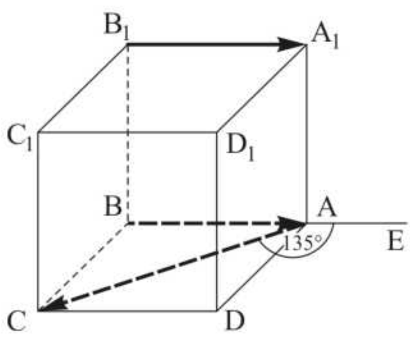
$=x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)$ болғандықтан, алдыңғы теңдіктен мынаны аламыз:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Бұл формула коллинеар векторлар үшін де ақиқат.

Скаляр көбейтіндінің анықтамасы мен қарастырылған теоремадан координаталарымен берілген екі вектордың арасындағы бұрыштың косинусын табу формуласы шығады:

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{z_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$



231-сурет

1-есеп. Қыры 2-ге тең болатын $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{B_1A_1}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табу керек.

Шешуі. $\overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{BA}$ болғандықтан, $\angle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{B_1A_1})=\angle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA})=\angle CAE=$ $=135°$ (231-сурет). Сонда $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}=$ $=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{B_1A_1}|\cdot\cos 135°=2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$ $=-4$.

Жауабы. -4.

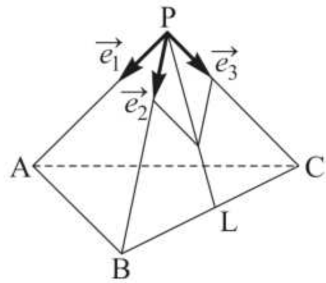
2-есеп. $\vec{a}(2; 2; -1)$ және $\vec{b}(-3; -2; 2)$ векторларының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табу керек.

Ш е ш у і. Векторлардың арасындағы бұрыштың косинусы формуласы бойынша: $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\cdot(-3)+2\cdot(-2)+(-1)\cdot 2}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{9+4+4}}=-\dfrac{12}{3\sqrt{17}}=-\dfrac{4\sqrt{17}}{17}\approx-0{,}970.$ Бұрыштардың тригонометриялық функциялары мәндерінің кестесі мен келтіру формуласын пайдаланып, $\angle(\vec{a},\vec{b})\approx 166^\circ$ аламыз.

Ж а у а б ы. $\approx 166^\circ$.

3 - е с е п. $PABC$ тетраэдрі берілген, оның $\angle APB+\angle APC=180^\circ$. $PA\perp PL$ болатынын дәлелдеу керек, мұндағы PL – $\angle BPC$-ның биссектрисасы.

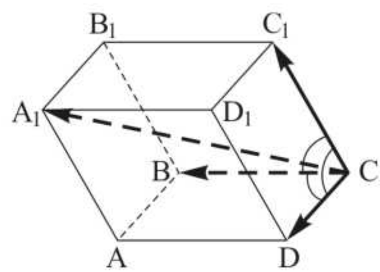
Д ә л е л д е у і. Осы тетраэдрдің PA, PB, PC қырларына, сәйкесінше, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ бірлік векторларын салайық (232-сурет). Сонда $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=\cos\alpha$, мұндағы $\alpha=\angle(\vec{e_1};\vec{e_2})$; $\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}=$ $=\cos\beta$, мұндағы $\beta=\angle(\vec{e_1};\vec{e_3})$.



232-сурет

Есептің шарты бойынша $\alpha+\beta=180^\circ$, демек, $\cos\alpha=-\cos\beta$, $\cos\alpha+\cos\beta=0$. Сонда $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}=0$, $\vec{e_1}\cdot(\vec{e_2}+\vec{e_3})=0$. $\vec{e_2}+\vec{e_3}$ векторына тең вектор PL биссектрисасында жататындықтан, $\vec{e_1}\perp PL$ болады. Демек, $PA\perp PL$, дәлелдеу керегі де осы еді.

4 - е с е п. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, оның жақтары – қабырғасы b-ға, сүйір бұрышы 60°-қа тең ромбылар (233-сурет). CA_1 диагоналін табу керек.



233-сурет

Ш е ш у і. Параллелепипед ережесі бойынша $\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$. Вектордың скаляр квадраты оның ұзындығының квадратына тең болатындықтан:

$$CA_1^2=\overrightarrow{CA_1}^2=(\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})^2=$$
$$=\overrightarrow{CC_1}^2+\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{CD}^2+2\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=$$
$$=3b^2+6b^2\cdot\cos 60^\circ=6b^2.\text{ Демек, } CA_1=b\sqrt{6}.$$

Ж а у а б ы. $b\sqrt{6}$.

СҰРАҚТАР

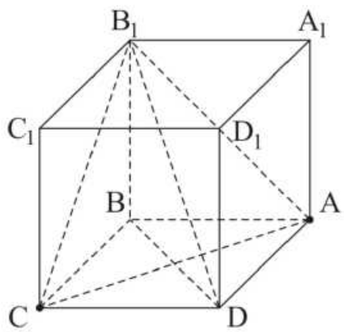
1. Екі вектордың скаляр көбейтіндісінің анықтамасын тұжырымдаңдар.
2. Координаталарымен берілген екі вектордың скаляр көбейтіндісін қандай формуламен табуға болады?

3. Координаталарымен берілген екі вектордың перпендикулярлық шартын тұжырымдаңдар.

4. Координаталарымен берілген екі вектордың арасындағы бұрыштың косинусын қандай формуламен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

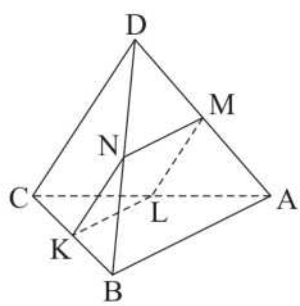
А деңгейі



234-сурет

515. Қыры 1-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген (234-сурет). а) $\overrightarrow{CA}$ және $\overrightarrow{CB_1}$; ә) $\overrightarrow{CA}$ және $\overrightarrow{AB_1}$; б) $\overrightarrow{A_1A}$ және $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{B_1D}$ және $\overrightarrow{B_1B}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

516. Қыры 1-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген (234-сурет). а) $\overrightarrow{B_1A_1}$ және $\overrightarrow{CA}$; ә) $\overrightarrow{CA}$ және $\overrightarrow{DC_1}$; б) $\overrightarrow{CA}$ және $\overrightarrow{B_1D_1}$; в) $\overrightarrow{DB_1}$ және $\overrightarrow{AB}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.



235-сурет

517. Қыры 4-ке тең $DABC$ дұрыс тетраэдрі берілген. M, N, K, L нүктелері, сәйкесінше, AD, BD, BC, AC қырларының орталары (235-сурет). а) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AM}$; ә) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AN}$; б) $\overrightarrow{MN}$ және $\overrightarrow{LK}$; в) $\overrightarrow{ML}$ және $\overrightarrow{KN}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

518. а) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ және $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$; ә) $\vec{c} = 13\vec{i} + \vec{k}$ және $\vec{d} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

519. z-тің қандай мәнінде: а) $\vec{a}(6;\ 0;\ 12)$ және $\vec{b}(-8;\ 13;\ z)$; ә) $\vec{c}(0;\ -1;\ z)$ және $\vec{d}(20;\ 50;\ 2z)$ векторлары перпендикуляр болады?

520. $A(0;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 4)$, $C(-2;\ 0;\ 1)$ және $D(-3;\ 4;\ 5)$ нүктелері берілген. а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; ә) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$ көбейтіндісін табыңдар.

521. $\vec{a}(1;\ 5;\ 1)$, $\vec{b}(1;\ -5;\ 2)$ және $\vec{c}(2;\ 1;\ 1{,}5)$ векторлары берілген. а) $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$; ә) $\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c}$ табыңдар.

522. а) $\vec{c}(-1;\ 2;\ -2)$ және $\vec{b}(6;\ 3;\ -6)$; ә) $\vec{a}(0;\ -3;\ 4)$ және $\vec{d}(16;\ 0;\ 12)$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

523. $\vec{a}(1;\ 1;\ 1)$ векторы мен координаталық: а) $\vec{i}$; ә) $\vec{j}$; б) $\vec{k}$ векторының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

524. ΔABC-ның төбелері: $A(1;\ 3;\ 0)$, $B(1;\ 0;\ 4)$, $C(-2;\ 1;\ 6)$. Осы үшбұрыштың A төбесінің сыртқы бұрышының косинусын табыңдар.

525. $\angle ABC = 60°$, $BC = 4$ см болатын ΔABC ($\angle C = 90°$) берілген. DA кесіндісі үшбұрыш жазықтығына перпендикуляр, $\angle DBA = 45°$. $\overrightarrow{BC}$ мен $\overrightarrow{BD}$ векторларының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

526. $\vec{a}(4;\ -1;\ 0)$ және $\vec{b}(2;\ 3;\ -1)$ векторлары берілген. m-нің қандай мәнінде $\vec{c} = 2\vec{a} + m\vec{b}$ векторы $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$ векторына перпендикуляр?

527. m-нің қандай мәнінде $\vec{a}(0;\ m;\ -2)$ мен $\vec{b}(-1;\ 0;\ -1)$ векторларының арасындағы бұрыш: а) 60°-қа; ә) 120°-қа тең болады?

528. ΔABC-ның төбелері: $A(3;\ -5;\ 1)$, $B(-4;\ -1;\ -2)$, $C(-3;\ 3;\ 1)$. $\overrightarrow{AC}$ мен $\overrightarrow{BK}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар, мұндағы K – AC қабырғасының ортасы.

529. Үшбұрыштың екі қабырғасының ұзындығы $\vec{a}(3;\ 4;\ 5)$ мен $\vec{b}(-5;\ -4;\ 3)$ векторларының ұзындықтарына, ал осы қабырғалардың арасындағы бұрышы 150°-қа тең болса, үшбұрыштың ауданын табыңдар.

530. Екі ұшақтың бірі Нұр-Сұлтаннан Алматыға, екіншісі Мәскеуге ұшып шықты. Нұр-Сұлтан мен Алматы әуежайларының арақашықтығы 973 км, Нұр-Сұлтан мен Мәскеудікі 2273 км, Алматы мен Мәскеудікі 3105 км болса, ұшақтар қозғалысын кескіндейтін векторлардың арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

Нұрсұлтан Назарбаев халықаралық әуежайы

531. Коллинеар емес $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{AC}$ векторлары тең. Осы векторлардың қосындысы мен айырымының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

532. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 4$ және $\operatorname{tg}\angle(\vec{b};\vec{c}) = \sqrt{3}$ болса, $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$ көбейтіндісін табыңдар.

В деңгейі

533. Векторлардың скаляр көбейтіндісін пайдаланып, түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісін дәлелдеңдер.

534. $PABC$ тетраэдрінде $\angle APB = 95°$, $\angle APC = 85°$, $AP = 12$ дм, PL – ΔBPC-ның биссектрисасы, $AL = 13$ дм. PL биссектрисасының ұзындығын табыңдар.

535. Егер $\overrightarrow{AB}(2; -4; 1)$, $\overrightarrow{AC}(1; 0; 5)$ векторлары берілген болса, ΔABC-ның ауданын табыңдар.

536. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. а) $\overrightarrow{AD}$ мен $\overrightarrow{DB_1}$ векторларының; ә) $\overrightarrow{D_1B_1}$ мен $\overrightarrow{CA_1}$ векторларының; б) $\overrightarrow{D_1C}$ мен $\overrightarrow{DA_1}$ векторларының; в) D_1C мен DA_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

537. $DABC$ дұрыс тетраэдрі берілген, M және N нүктелері, сәйкесінше, AC және DB қырларының орталары. а) $\overrightarrow{MN}$ және $\overrightarrow{BC}$ векторларының; ә) MN мен BC түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

538. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, оның барлық қырлары a-ға тең, ал C төбесіндегі жазық бұрыштары 60°-тан. 1) BB_1D_1D төртбұрышы шаршы болатынын дәлелдеңдер. 2) AA_1C_1C төртбұрышының ауданын табыңдар. 3) CF кесіндісінің ұзындығын табыңдар, мұндағы F нүктесі – AA_1 қырының ортасы.

С деңгейі

539. AB мен CD кесінділері айқас түзулерде жатыр. M мен N нүктелері, сәйкесінше, олардың орталары. $MN < \dfrac{AC + BD}{2}$ болатынын дәлелдеңдер.

540. Кез келген $DABC$ тетраэдрі үшін $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ теңдігі ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

541. A, B, C және D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. Егер $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ теңдігі ақиқат болса, онда AB мен CD кесінділері перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

542. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, онда $AB = 2$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$. а) B_1D мен AM түзулерінің, мұндағы M нүктесі – DD_1C_1C жағының центрі; ә) A_1O түзуі, мұндағы O – $ABCD$ жағының центрі, мен DD_1C_1C жазықтығының; б) AB_1D_1 және A_1C_1D жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

23. Сфера мен жазықтықтың теңдеуі

Тақырыпты оқу барысында:

• кеңістіктегі фигураның теңдеуі ұғымын білетін боласыңдар;

• сфераның және жазықтықтың теңдеулерін білесіңдер;

• сфераның теңдеуі мен жазықтықтың жалпы теңдеуін қорытып шығарасыңдар;

• сфера мен жазықтықтың теңдеулерін есептер шығаруда қолданасыңдар.

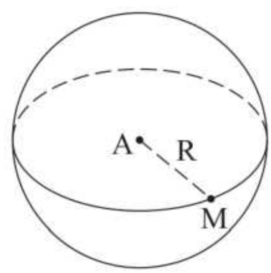
Oxyz координаталар жүйесіндегі *фигураның теңдеуі* деп тек осы фигураның барлық нүктелерінің координаталары қанағаттандыратын үш x, y, z айнымалысы бар теңдеу аталады.

Сфераның теңдеуін қорытып шығарайық. **Кеңістікте берілген нүктеден бірдей қашықтықта жататын барлық нүктелер жиынынан тұратын фигура сфера деп аталады.** Берілген нүктені *сфераның центрі* деп, ал сол қашықтықты *сфераның радиусы* деп атайды.

Теорема. **Тікбұрышты *Oxyz* координаталар жүйесінде радиусы R, центрі $A(a; b; c)$ нүктесі болатын сфера $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ теңдеуімен берілетінін дәлелдеу керек.**

Дәлелдеуі. Сфераға тиісті кез келген $M(x; y; z)$ нүктесінен (236-сурет), $A(a; b; c)$ нүктесіне дейінгі қашықтық $MA=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ формуласымен табылады.

$MA = R$ болғандықтан, M нүктесінің координаталары көрсетілген теңдеуді қанағаттандырады. Егер M нүктесі берілген сферада жатпаса, онда $MA^2 \neq R^2$, яғни M нүктесінің координаталары бұл теңдеуді қанағаттандырмайды. Демек, тікбұрышты координаталар жүйесінде радиусы R, центрі $A(a; b; c)$ болатын сфераның теңдеуі мына түрде болады: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.



236-сурет

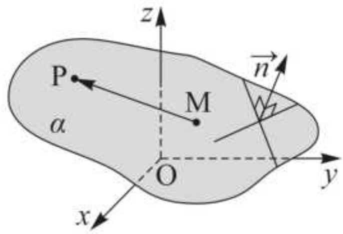
Дербес жағдайда, радиусы R, центрі координаталар басында болатын сфераның теңдеуі:

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \text{ болады.}$$

Жазықтықтың теңдеуін қорытып шығарайық.

Теорема. **$M(x_1; y_1; z_1)$ нүктесінен өтетін және $\vec{n}(a; b; c)$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуі:**

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0. \qquad (1)$$



237-сурет

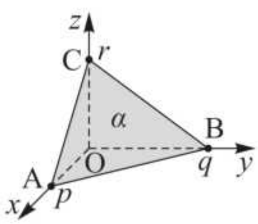
Д ә л е л д е у і. Осы α жазықтығынан (237-сурет) кез келген $P(x;\ y;\ z)$ нүктесін алайық, сонда $\overrightarrow{MP}\ (x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1)$ болады. $\vec{n} \perp \alpha$ болғандықтан, $\vec{n} \perp \overrightarrow{MP}$ болады, демек, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$, яғни $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$.

Сонымен α жазықтығының кез келген P нүктесінің координаталары 1-теңдеуді қанағаттандырады. Егер N нүктесі α жазықтығында жатпаса, онда $\overrightarrow{MN}$ векторы $\vec{n}$ векторына перпендикуляр болмайды. Демек, N нүктесінің координаталары 1-теңдеуді қанағаттандырмайды. Сонымен, 1-теңдеуді тек α жазықтығына тиісті нүктелердің координаталары ғана қанағаттандырады екен. Демек, ол осы жазықтықтың теңдеуі болады.

$\vec{n} \perp \alpha$ векторын қысқаша *нормаль вектор* деп атайды, ол α жазықтығына перпендикуляр вектор дегенді білдіреді. 1-теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ мұндағы } d = -(ax_1 + by_1 + cz_1).$$

$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$ түріндегі теңдеу *жазықтықтың жалпы теңдеуі* деп аталады.



238-сурет

Бұл теңдеуді былай көрсетуге болады: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$, мұндағы $p = -\frac{d}{a}$, $q = -\frac{d}{b}$, $r = -\frac{d}{c}$. Мұндай теңдеу α жазықтығының Ox, Oy, Oz осьтерімен сәйкесінше қиылысу нүктелерін – $A(p;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ q;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ r)$ табуға мүмкіндік береді (238-сурет). Сондықтан кейде $\boldsymbol{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1}$ түріндегі теңдеуді жазықтықтың «кесінділермен» берілген теңдеуі деп атайды.

Егер жазықтық координаталар басы арқылы өтсе, онда оның теңдеуі $ax + by + cz = 0$ болатынын атап өтейік.

Сондай-ақ, $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ және $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ теңдеулерімен сәйкесінше берілген α және β жазықтықтары $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$ шарты орындалса, **параллель**, ал $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 = 0$ шарты орындалса, **перпендикуляр** болатынын айта кетелік. Осы қасиеттерді өздігінен түсіндіріңдер.

1 - е с е п. $M(2; 1; -3)$, $N(4; 2; -1)$ және $K(-1; 3; 2)$ нүктелерінен өтетін жазықтықтың теңдеуін құрастыру керек.

Ш е ш у і. Жазықтықтың жалпы теңдеуі $ax + by + cz + d = 0$. Берілген нүктелер осы жазықтыққа тиісті болғандықтан, олардың координаталарын осы теңдеуге қойып, теңдеулер жүйесін аламыз: $\begin{cases} 2a + b - 3c + d = 0, \\ 4a + 2b - c + d = 0, \\ -a + 3b + 2c + d = 0. \end{cases}$

Бірінші теңдеуді –2-ге көбейтіп және екінші теңдеуге қосып, $5c - d = 0$ аламыз, бұдан $c = \frac{d}{5}$ шығады.

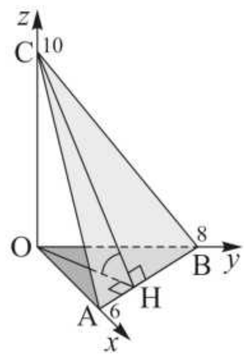
Үшінші теңдеуді 2-ге көбейтіп және бірінші теңдеуге қосып, $7b + c + 3d = 0$ аламыз. Демек, $7b + \frac{d}{5} + 3d = 0$, бұдан $b = -\frac{16d}{35}$.

Үшінші теңдеуден $a = -\frac{3 \cdot 16d}{35} + \frac{2d}{5} + d = \frac{d}{35}$ аламыз.

Сонда $\frac{d}{35}x - \frac{16d}{35}y + \frac{d}{5}z + d = 0$, $x - 16y + 7z + 35 = 0$.

Ж а у а б ы. $x - 16y + 7z + 35 = 0$.

2 - е с е п. $20x + 15y + 12z - 120 = 0$ теңдеуімен берілген жазықтық Ox, Oy, Oz координаталар осьтерінен, сәйкесінше, OA, OB, OC кесінділерін қияды. ΔABC-ның ауданын табу керек.



239-сурет

Ш е ш у і. Осы жазықтықтың теңдеуін «кесінділермен» жазайық: $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} + \frac{z}{10} = 1$. Демек, $OA = 6$, $OB = 8$, $OC = 10$. Жазық фигураның ауданы мен оның жазықтықтағы ортогональ проекциясының арасындағы тәуелділікті пайдаланып, мынаны аламыз:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOB} : \cos\angle CHO \text{ (239-сурет).}$$

$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$, $OH = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{6 \cdot 8}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{24}{5}$;

$\operatorname{tg}\angle CHO = \frac{OC}{OH} = \frac{25}{12}$. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ формуласын пайдаланып, мынаны табамыз: $\cos\angle CHO = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{25}{12}\right)^2}} = \frac{12}{\sqrt{769}}$. Сонда $S_{\Delta ABC} = \frac{24 \cdot \sqrt{769}}{12} = 2\sqrt{769}$.

Ж а у а б ы. $2\sqrt{769}$ кв. бірлік.

СҰРАҚТАР

1. $A(a; b; c)$ нүктесі центрі болатын және радиусы R-ге тең сфераның теңдеуін қорытып шығарыңдар.

2. $M(x_1; y_1; z_1)$ нүктесінен өтетін және $\vec{n}(a; b; c)$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін қорытып шығарыңдар.

3. Жазықтықтың жалпы теңдеуін жазыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

543. Сфера центрінің координаталары мен радиусын табыңдар:
а) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; б) $x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 25$;
ә) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$; в) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 7$.

544. Центрі координаталар басында болатын, радиусы: а) 6; ә) 7; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{5}$-ке тең сфераның теңдеуін жазыңдар.

545. Радиусы 4-ке тең, центрі: а) $A(1; 2; 3)$; ә) $B(-2; 0; 1)$; б) $C(0; -3; 4)$; в) $D(-10; -0,5; -300)$ нүктесінде болатын сфераның теңдеуін жазыңдар.

546. Мына теңдеулердің қайсысы сфераның теңдеуі болады:
а) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; б) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (-z + 3)^2 = 1$;
ә) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$; в) $(x - y)^2 + (x + y)^2 + 2z^2 = 8$?

547. а) Центрі координаталар басында болатын және $M(3; 2; \sqrt{3})$ нүктесі арқылы өтетін; ә) центрі $A(-1; 0; 2)$ нүктесінде болатын және $B(0; \sqrt{6}; -1)$ нүктесі арқылы өтетін сфераның теңдеуін жазыңдар.

548. Радиусы 3-ке тең және координаталар басы мен $B(0; 4; 0)$ және $C(4; 0; 0)$ нүктелері арқылы өтетін сфера центрінің координаталарын табыңдар.

549. Координаталар басынан өтетін және: а) $\vec{n}(-2; -3; 1)$; ә) $\vec{n}(0; 4; -5)$; б) $\vec{n}(0; 1; 0)$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

550. а) $x + y + z = 0$; ә) $-x - y - z = 0$; б) $2x - 3y + z = 0$; в) $2x - 3y + z + 4 = 0$ теңдеуімен берілген жазықтыққа перпендикуляр $\vec{n}$ векторының координаталарын табыңдар.

551. 550-тапсырмадағы: 1) а мен ә; 2) б мен в жазықтықтары өзара қалай орналасқан?

552. а) $M(4; -2; 3)$ нүктесінен өтіп, аппликата осін қамтитын; ә) $N(2; 1; 5)$ нүктесінен өтіп, абсцисса осін қамтитын жазықтықтың теңдеуін құрыңдар.

553. Ұштарының координаталары (3; –4; 7), (1; 0; 1) болатын кес
тасы арқылы өтетін және осы кесіндіге перпендикуляр жаз
теңдеуін құрыңдар.

554. а) $A(0; 1; 5)$, $B(3; 0; 0)$ және $C(-1; 1; 4)$; ә) $O(0; 0; 0)$, $D(-2;$
$E(3; 4; 5)$ нүктелерінен өтетін жазықтықтың теңдеуін жазың

555. а) $7x + 3y - 5z = 0$ және Oyz, аппликатасы 3-ке тең; ә) $2x + 5y$ -
және Oxy, ординатасы 2-ге тең жазықтықтарына тиісті нүкт
динаталарын табыңдар.

В деңгейі

556. Мына теңдеулердің қайсысы сфераның теңдеуі болады:
а) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$;
ә) $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$; в) $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 2z$?

557. Егер: а) сфераның радиусы 7-ге тең және ол $A(0; 0; 0)$, $B(4;$
$C(0; 12; 0)$ нүктелерінен өтсе; ә) $O(0; 0; 0)$, $M(2; 0; 0)$, $N(0;$
$K(0; 0; 2)$ нүктелері сфераға тиісті болса, сфераның теңдеуін

558. Жазықтыққа қатысты: а) $A(4; 2; -3)$ және $B(0; -4; -3)$; ә) $C(1;$ -
$D(5; -1; 0)$ нүктелері симметриялы болса, сол жазықтықты
құрыңдар.

559. Тікбұрышты координаталар жүйесі Баянауыл тауының үш төбесінің координаталары $(0; 0; 0)$, $(x_1; 0; 0)$ және $(kx_1; y_1; z_1)$ болатындай етіп таңдап алынған. Осы нүктелерді белгілейтін үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

Баянауыл тау
Павлодар обл

560. а) $3x - 6y - 7z = 0$ және $5x + 10y + 1 = 0$;
ә) $-x + 5y + 4 = 0$ және $5x - 25y - 1 = 0$
жазықтықтары қиылыса ма екенін зерттеңдер. Егер қиыл
қандай да бір ортақ екі нүктенің координаталарын табыңда

561. $x + y + z - 2 = 0$, $2x + y + z - 3 = 0$, $3x - y + z = 0$ жазықть
барлық қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар.

563. Егер $A(2; 3; -4)$, $B(0; -3; -2)$, $C(4; 0; 6)$, $K(1; 0; 0)$, $N(-2; 6; 3)$ нүктелерінің координаталары берілген болса, онда ABC, ABK және ABN үшбұрыштары медианаларының қиылысу нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

564. $M(6; 1; -2)$, $N(4; 6; 6)$, $K(4; 2; 0)$ және $P(1; 2; 6)$ нүктелері бір жазықтыққа тиісті ме? Берілген нүктелердің қандай да бір үшеуінен өтетін жазықтықтың «кесінділермен» берілген теңдеуін құрыңдар.

565. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді координаталар жүйесіне A мен C нүктелері Ox және Oy координаталар осьтерінде жататындай етіп орналастырылған және оның $D(0; 0; 0)$, $B_1(3; 4; 5)$, $D_1(0; 0; 5)$ төбелерінің координаталары белгілі. а) A, B_1 және C_1 нүктелері арқылы; ә) A_1 нүктесі мен BB_1C_1C және $A_1B_1C_1D_1$ жақтарының симметрия центрлері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін құрыңдар.

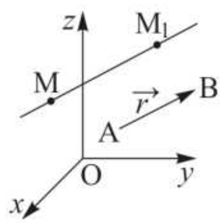
24. Кеңістіктегі түзудің теңдеуі

Тақырыпты оқу барысында:

• кеңістіктегі түзудің параметрлік және канондық теңдеулерін; берілген екі нүктеден өтетін түзудің және түзудің жалпы теңдеуін білесіңдер;

• оларды құрасыңдар және есептер шығаруда қолданасыңдар.

Oxy координаталар жүйесінде $M_1(x_1; y_1; z_1)$ нүктесінен өтетін және осы түзудің *бағыттаушы векторы* деп аталатын $\overrightarrow{AB}(m; n; p)$ векторына параллель түзу берілген болсын. Осы түзуге кез келген $M(x; y; z)$ нүктесін белгілейік, сонда $\overrightarrow{MM_1}(x - x_1; y - y_1; z - z_1)$ және $\overrightarrow{AB}$ векторлары коллинеар болады (240-сурет). Демек, $\overrightarrow{MM_1} = t \cdot \overrightarrow{AB}$ теңдігі орындалатындай нақты t саны бар



240-сурет

болады. Бұл теңдікті теңдеулер түрінде былай жазуға болады: $\begin{cases} x - x_1 = tm, \\ y - y_1 = tn, \\ z - z_1 = tp, \end{cases}$

мұны түзудің параметрлік теңдеулері деп, ал t санын оның **параметрі** деп атайды.

Бұл теңдеулерді былай көрсетуге болады: $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$, мұны түзудің **канондық** теңдеуі немесе берілген нүктеден өтетін, бағыттаушы $\vec{r}(m; n; p)$ векторымен берілген түзудің теңдеуі деп атайды.

Егер түзу $M_1(x_1; y_1; z_1)$ және $M_2(x_2; y_2; z_2)$ екі нүктесі арқылы берілген болса, онда оның бағыттаушы векторы ретінде $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ векторын алуға болады. Сонда түзудің канондық теңдеуін былай көрсетуге болады: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$. Бұл **теңдеулер берілген екі нүктеден өтетін түзудің теңдеулері** деп аталады.

Түзудің теңдеуін, берілген екі жазықтықтың қиылысу сызығы ретінде, теңдеулер жүйесі түрінде жазуға болады: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$ мұны **түзудің жалпы теңдеуі** деп атайды.

1 - е с е п. Түзу $\dfrac{x - 1}{2,5} = \dfrac{y - 3}{3,5} = \dfrac{z + 1}{1,5}$ теңдеуімен берілген. 1) y_1 мен z_1-дің қандай мәндерінде $A(6; y_1; z_1)$ нүктесі осы түзуге тиісті болатынын

анықтаңдар. 2) Осы түзуге тиісті қайсыбір $B(x; y; z)$ нүктесінің координаталарын табу керек.

Ш е ш у і. 1) Есептің шарты бойынша $\frac{6-1}{2,5} = \frac{y_1-3}{3,5} = \frac{z_1+1}{1,5} = t$, бұдан $t = 2$, сонда $y_1 = 10$, $z_1 = 2$.

2) Есептің шарты бойынша $\frac{x-1}{2,5} = \frac{y-3}{3,5} = \frac{z+1}{1,5} = t$. Мысалы, $t = 10$ болсын. Сонда $x = 26$, $y = 38$, $z = 14$.

Ж а у а б ы. 1) $y_1 = 10$, $z_1 = 2$; 2) $B(26; 38; 14)$.

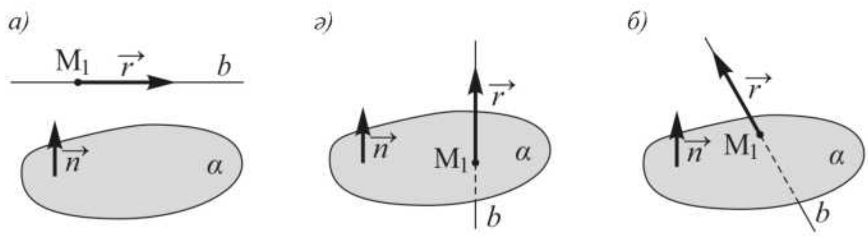
2 - е с е п. $3x + 2y + z - 2 = 0$ және $2x + y + z - 4 = 0$ жазықтықтарының қиылысу түзуіне тиісті барлық нүктелерді табуға болатын формулаларды құру керек.

Ш е ш у і. Көрсетілген түзу $\begin{cases} 3x+2y+z=2, \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ теңдеулер жүйесімен беріледі. $z = k$ деп санайық, мұндағы k – қайсыбір нақты сан. Сонда мына жүйе шығады: $\begin{cases} 3x+2y=2-k, \\ 2x+y=4-k. \end{cases}$ Жүйенің екінші теңдеуін –2-ге көбейтіп, біріншi теңдеуге қосып, $x = 6 - k$ аламыз. Сонда $3(6 - k) + 2y = 2 - k$, бұдан $y = -8 + k$. Сонымен, берілген жазықтықтардың қиылысуынан шығатын түзуге тиісті кез келген нүктенің координаталарын мына формулалармен табуға болады: $x = 6 - k$, $y = -8 + k$, $z = k$, мұндағы $k \in R$.

Ж а у а б ы. $x = 6 - k$, $y = -8 + k$, $z = k$, мұндағы $k \in R$.

241-суретті пайдаланып, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ нүктесінен өтетін, $\vec{r}(m; n; p)$ бағыттаушы векторымен берілген b түзуі мен $\vec{n}(a; b; c)$ нормаль векторы болатын α жазықтығының өзара орналасуын түсіндіріңдер.

- Егер $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ және $ax_1 + by_1 + cz_1 + d \neq 0$ болса, $b \parallel \alpha$;
- егер $\vec{r} = k\vec{n}$, яғни $\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \frac{p}{c} = k$ болса, $b \perp \alpha$;
- егер $\vec{r} \neq k\vec{n}$ және $\vec{r} \cdot \vec{n} \neq 0$ болса, $b \cap \alpha = A$ болады.



241-сурет

3 - е с е п. $M(1;\ -1;\ 2)$ нүктесінен өтетін $\begin{cases} 3x - y - z - 1 = 0, \\ x - y = 0 \end{cases}$ теңдеулер жүйесімен берілген түзуге перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін құру керек.

Ш е ш у і. Жүйенің теңдеулерін $\begin{cases} z = 3x - y - 1, \\ x = y \end{cases}$ түрінде жазып, түзудің қандай да бір екі нүктесін табайық. Егер $x = y = 0$ болса, онда $z = -1$; егер $x = y = 1$ болса, онда $z = 1$ болады. $A(0;\ 0;\ -1)$ және $B(1;\ 1;\ 1)$ нүктелерін алдық. AB түзуі ізделінді жазықтыққа перпендикуляр болғандықтан, оның нормаль векторы ретінде $\overrightarrow{AB}(1;\ 1;\ 2)$ векторын алуға болады. Сонда жазықтықтың теңдеуі $x + y + 2z + d = 0$ түріне келеді. $M(1;\ -1;\ 2)$ нүктесі осы жазықтыққа тиісті болғандықтан, $d = -4$ болады. Демек, $x + y + 2z - 4 = 0$ – ізделінді теңдеу.

Ж а у а б ы. $x + y + 2z - 4 = 0$.

СҰРАҚТАР

1. а) Түзудің параметрлік және канондық теңдеулерін; ә) берілген екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуін жазыңдар.

2. Түзудің жалпы теңдеуін жазыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

566. а) $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{5}$; ә) $\frac{x+4}{5} = \frac{1-y}{2} = \frac{-z-2}{4}$;

б) $x - 3 = 0,\ \frac{y-1}{2} = \frac{5-z}{2}$ теңдеулерімен берілген түзудің бағыттаушы векторының координаталарын жазыңдар.

567. а) $O(0;\ 0;\ 0)$ және $B(-1;\ 2;\ 4)$; ә) $C(1;\ 0;\ 2)$ және $D(5;\ -1;\ 0)$; б) $M(2;\ 3;\ 4)$ және $N(-2;\ -3;\ -4)$ нүктелерінен өтетін түзудің канондық теңдеуін құрыңдар.

568. а) $\frac{x+6}{3} = \frac{y-6}{3} = z + 5$; ә) $\frac{x+4}{4} = \frac{1-y}{3},\ z + 2 = 0$ теңдеулерімен берілген түзу xOz жазықтығын қия ма? Егер қиса, қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

569. а) $O(0;\ 0;\ 0)$ және $A(-1;\ 2;\ -3)$; ә) $B(4;\ 0;\ 1)$ және $C(0;\ 5;\ 3)$ нүктелерінен өтетін түзуді салыңдар және оның теңдеулерін жазыңдар.

570. а) $A(-2;\ 4;\ 3)$ және $B(2;\ -4;\ -3)$; ә) $C(0;\ -5;\ 3)$ және $D(5;\ 0;\ -3)$ нүктелерін қамтитын түзу координаталар басынан өте ме?

571. а) $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{4}$; ә) $\frac{x-3}{4}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-6}{5}$ теңдеулерімен берілген түздің координаталық жазықтықтармен қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

572. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+4}{2}$ теңдеуімен берілген түзудің: а) $2x+3y-4z-4=0$; ә) $-x+2y+z=0$ жазықтығымен қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

573. $2x-3y-z+4=0$ жазықтығына перпендикуляр және: а) $C(4; -3; 2)$; ә) $D(0; -5; 1)$ нүктесінен өтетін түзудің канондық теңдеуін құрыңдар.

574. $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(1; 2; 0)$ және D нүктелері – $ABCD$ параллелограмының төбелері. AD түзуінің параметрлік теңдеулерін құрыңдар.

575. $A(2; 4; -4)$, $B(1; 1; -3)$, $C(-2; 0; 5)$ және $D(-1; 3; 4)$ нүктелері берілген. $ABCD$ төртбұрышы параллелограмм болатынын дәлелдеңдер. Оның диагональдарын қамтитын түзулердің арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

576. $N(-2; 3; -1)$ нүктесі арқылы өтетін және: а) $\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$; ә) $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{-3}$, $z-1=0$ теңдеулерімен берілген түзуге перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін құрыңдар.

577. α жазықтығы $2x-3y+z-4=0$ теңдеуімен берілген. Егер: а) $A(0; 1; -2)$, $B(3; 5; 4)$; ә) $A(-1; 0; 6)$, $B(3; -6; 8)$; б) $A(-1; 0; 6)$, $B(-3; -1; 7)$ болса, AB түзуі мен α жазықтығы өзара қалай орналасқан?

B деңгейі

578. $x^2+y^2+z^2=2x+4y-4z$ теңдеуімен берілген сфера центрінен және: а) $O(0; 0; 0)$; ә) $A(1; 2; 2)$ нүктесінен өтетін түзудің параметрлік теңдеулерін құрыңдар.

579. $A(1; 1; -1)$ нүктесінен өтетін және: а) $\begin{cases} x-2y-3z=0, \\ 3x+y-z=0; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} -x+y+z-1=0, \\ x+y-z+4=0 \end{cases}$ теңдеулер жүйесімен берілген түзуге параллель түзудің параметрлік теңдеулерін жазыңдар.

580. Кеңістікте $A(0; 5; -8)$, $B(-3; 7; 1)$, $C(5; 7; 8)$ және $D(6; 9; 0)$ нүктелері берілген. а) AB және CD; ә) AD және BC түзулерінің өзара қалай орналасқанын анықтаңдар.

581. Қандай да бір координаталық жазықтыққа параллель түзу теңдеулердің қай түрімен берілетінін зерттеңдер.

582. $x - 3y + 2z + 11 = 0$, $2x - y + 3z + 5 = 0$, $3x + 2y - 4z - 20 = 0$ жазықтықтарының барлық қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар.

С деңгейі

583. $A(0; 0; 0)$, $B(2; 2; 1)$, $C(x; y; z)$ және $D(4; 2; 4)$ нүктелері – AD мен BC табандары болатын теңбүйірлі трапецияның төбелері. A мен C нүктелерінен өтетін түзудің теңдеуін құрыңдар.

584. $3x + 2y + z - 1 = 0$ және $x + 3y + 2z - 2 = 0$ жазықтықтарының қиылысу түзуіне тиісті барлық нүктелерді табуға болатын формулаларды құрыңдар және осы түзудің канондық теңдеуін жазыңдар.

585. Бағасы x, y, z шартты ақша бірлігі (ш.а.б.) тұратын заттар бар, мұндағы x, y, z бүтін сандармен өрнектеледі. Бірінші рет x бағамен үш затты, ал y және z бағалармен екі заттан сатып алды, барлығына 2020 ш.а.б. төледі. Екінші рет x бағамен екі затты, y және z бағамен үш заттан сатып алды, барлығы 2030 ш.а.б. төледі. 1) z-тің ең төмен бағасы, y-тің ең жоғарғы бағасы және x-тің мүмкін болатын бағасы қандай болуы мүмкін? 2) Осы есептің стереометриялық моделін сипаттаңдар.

25. «Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі және векторлар» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

586. $A(3; 1; 0)$, $B(2; -1; 0)$, $D(4; -1; 3)$ нүктелері – $ABCD$ параллелограмының төбелері. Оның AC диагоналінің ұзындығын табыңдар.

587. $A(1; 2; 3)$, $B(3; 4; 5)$ нүктелері берілген. AB кесіндісіне $MA : MB = 2 : 1$ болатындай M нүктесі белгіленген. M нүктесінің координаталарын табыңдар.

588. $A(3; -1; 3)$, $B(-1; 2; 3)$, $C(m; 0; n)$ нүктелері берілген. m мен n-нің қандай мәндерінде осы нүктелер дұрыс үшбұрыштың төбелері болады?

589. $A(-1; 1; 0)$, $B(-5; 4; 0)$, $C(7; 2; 0)$ нүктелері төбелері болатын үшбұрыштың ауданын табыңдар.

590. $\vec{a}(2; 1; -1)$ векторы берілген. $\vec{a}$ векторына коллинеар және $\vec{c} \cdot \vec{a} = 3$ болатындай $\vec{c}$ векторын табыңдар.

591. $\vec{a}(0; -1; 2)$ және $\vec{b}(2; 1; 2)$ векторлары берілген. $\vec{a} + \vec{b}$ мен $\vec{a} - \vec{b}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

592. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының ұзындықтары, сәйкесінше, 4 және 10-ға, ал олардың арасындағы бұрышы 120°-қа тең. а) $|\vec{a} + \vec{b}|$; ә) $|\vec{a} - \vec{b}|$ табыңдар.

593. Төбелері $A(3; -2; 1)$, $B(3; 0; 2)$, $C(1; 2; 5)$ нүктелерінде болатын үшбұрыш берілген. Оның BD медианасы мен AC қабырғасын қамтитын түзулердің арасындағы бұрышты табыңдар.

594. ΔABC берілген, O нүктесі оның BD медианасына тиісті, M нүктесі оның жазықтығына тиісті емес. а) O – BD-ның ортасы; ә) $BO : OD = 1 : 2$ қатынасындай болса, $\overrightarrow{MO}$ векторын $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ және $\overrightarrow{MC}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

595. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген, M нүктесі – BB_1C_1C жағының центрі. 1) $\overrightarrow{AM}$ векторын $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{BB_1}$ векторлары бойынша жіктеңдер. 2) $\overrightarrow{AM}$ мен $\overrightarrow{BD}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

596. $A(-1; 2; 3)$, $B(-1; 3; 1)$, $C(-1; 7; 3)$ нүктелері – $ABCD$ тіктөртбұрышының төбелері. BD түзуінің теңдеуін құрыңдар.

597. $A(-2; 3; 4)$ нүктесінен өтетін және: а) $\vec{a}(3; 1; 4)$; ә) $\vec{b}(-3; -1; 4)$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін құрыңдар. Осы жазықтықтардың өзара орналасуын көрсетіңдер.

598. $A(12; 0; 0)$, $B(0; -12; 0)$, $C(0; 0; 5)$ нүктелерінен өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

В деңгейі

599. $\vec{a}(3; 4; 2)$, $\vec{b}(1; 5; 2)$, $\vec{c}(2; 3; 4)$ векторлары берілген. $\vec{m} \cdot \vec{a} = 8$, $\vec{m} \cdot \vec{b} = 5$, $\vec{m} \cdot \vec{c} = 3$ теңдіктері ақиқат болатындай $\vec{m}$ векторын табыңдар.

600. Ұзындығы 14-ке тең және $\vec{a}(3; 2; 2)$ мен $\vec{b}(18; -22; -5)$ векторларына перпендикуляр, әрі $\vec{m}$ векторы мен Oy осінің арасындағы бұрыш доғал болатын $\vec{m}$ векторының координаталарын табыңдар.

601. Қыры 4-ке тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Оның AA_1 қырына $AM : MA_1 = 1 : 3$ болатындай M нүктесі, ал CC_1 қырына $CN : NC_1 = 3 : 1$ болатындай N нүктесі белгіленген. $\overrightarrow{CD}$ мен $\overrightarrow{MN}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

602. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының төбелері – $A(4; 0; 0)$, $B_1(0; 0; 4)$, $D_1(4; 4; 4)$ нүктелері. Кубтың координаталары белгісіз қайсыбір екі төбесінен өтетін түзудің теңдеуін құрыңдар.

603. $A(1; -1; 0)$, $B(2; 1; 2)$, $C(-3; 1; 1)$, $D(-2; 3; 3)$ нүктелері бір жазықтыққа тиісті деген ақиқат па?

604. Мына теңдеу кеңістіктегі қандай фигураны береді:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 4x + 4y + 4z + 13$;

ә) $x^2 + y^2 + z^2 = 4x + 4y + 4z - 12$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = (4 - x)^2 + (4 - y)^2 + (4 - z)^2$?

С деңгейі

605. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, оның табаны – бұрышы 60°-қа тең ромб, ал бүйір қыры табанына перпендикуляр және оның қабырғасына тең. A_1C мен C_1B түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

606. Қыры 1-ге тең дұрыс $DABC$ тетраэдрі берілген. Мынаны табыңдар: а) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BK}$, мұндағы K – ABC жағының центрі; ә) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{MN}$, мұндағы M мен N – сәйкесінше AC және DB қырларының орталары.

607. $DABC$ тетраэдрі берілген, оның ADB мен BDC бұрыштарының биссектрисалары перпендикуляр. ADC бұрышының биссектрисасы осы биссектрисалардың әрқайсысына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

Дұрыс жауабын таңдаңдар

608. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, онда $A(5; 0; 0)$, $C(0; 5; 0)$, $B_1(0; 0; 3)$. Сонда оның BB_1C_1C жақтары диагональдарының қиылысу нүктесінің координаталары неге тең?

1) (2,5; 2,5; 2,5);
2) (0; 2,5; 1,5);
3) (2; 2; 0);
4) (0; 2; 2);
5) (0; 2,5; 0).

609. $A(3; 4; 5)$ және $B(-2; 1; 6)$ нүктелері берілген. Сонда xOz жазықтығына тиісті және $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{AC}$ коллинеар болатындай C нүктесінің координаталары неге тең?

1) $\left(-\frac{11}{3}; 0; \frac{19}{3}\right)$;
2) (28; 19; 0);
3) $\left(\frac{29}{3}; 0; \frac{11}{3}\right)$;
4) $\left(0; \frac{29}{5}; \frac{22}{5}\right)$;
5) $\left(0; \frac{11}{5}; \frac{28}{5}\right)$.

610. Қыры 1-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Сонда $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{B_1C}$ неге тең?

1) 1;
2) 0;
3) –1;
4) 2;
5) $\sqrt{2}$.

611. $A(3; 8; 1)$, $B(-1; 6; -3)$ нүктелерінен өтетін түзу мен xOy жазықтығының арасындағы бұрыш неге тең?

1) 90°;
2) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$;
3) $\arccos\frac{1}{3}$;
4) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$;
5) $\arcsin\frac{2}{3}$.

612. $\vec{a}(1; -\sqrt{3}; 0)$ векторы мен Oy осінің арасындағы бұрыш неге тең?

1) 60°;
2) 60° немесе –60°;
3) 120°;
4) 150°;
5) 30°.

613. Егер t: 1) ±9; 2) 9; 3) –9; 4) 0; 5) ±3-ке тең болса, $\vec{a}(-6; 0; 2t)$ мен $\vec{b}(3; 0; t)$ векторлары перпендикуляр болады.

Жаттығуларды орындаңдар

614. $\vec{a}(2; -1; 4)$ және $\vec{b}(3; 0; -2)$ векторлары берілген. а) $5\vec{a}$; ә) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ векторларының координаталарын табыңдар.

615. $\vec{c}(17; 4; -5)$ векторының $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координаталық векторлары бойынша жіктелуін жазыңдар.

616. Ұзындығы 13-ке тең $\vec{b}(4; -12; z)$ векторының белгісіз координатасын табыңдар.

617. m мен n-нің қандай мәндерінде $\vec{c}(-1; 4; -2)$ мен $\vec{d}(-3; m; n)$ векторлары: а) коллинеар; ә) компланар болады?

618. n-нің қандай мәнінде $\vec{a}(n; -2; 1)$ және $\vec{b}(n; 1; -n)$ векторлары перпендикуляр болады?

619. Қыры 4-ке тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. $\overrightarrow{AC}$ мен $\overrightarrow{B_1C_1}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

620. $2x - 3y + z - 5 = 0$ және $3x + y - 3z + 4 = 0$ теңдеулерімен берілген жазықтықтар перпендикуляр бола ма?

621. $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = \frac{1}{8}$ теңдеуі сфераның теңдеуі бола ма?

622. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының төбелері болатын $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $C_1(0; 1; 1)$ нүктелерінен өтетін сфераның теңдеуін құрыңдар.

623. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{4}$ теңдеуімен берілген түзудің xOy координаталық жазықтығымен қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Тікбұрышты координаталар жүйесін оларды алғаш рет жазықтықта енгізген француз математигі Рене Декарттың (1596–1650) атымен декарттық координаталар жүйесі деп те атайды. Географиялық координаталарды (бойлық пен ендікті) Жердегі тұрған орынды анықтау үшін біздің дәуіріміздің I ғасырынан бастап пайдалана бастаған.

Кеңістіктегі координаталарды алғаш рет XVIII ғасырда швейцар математигі Иоганн Бернулли (1667–1748) қолдана бастаған. Кеңістіктегі координаталар туралы ілім алғаш рет француз математигі Алекси Клод Клероның (1713–1765) еңбектерінде баяндалған болатын, кейіннен ол «Аналитикалық геометрия» деп аталған.

Тарих бойынша векторлар теориясы үш: физикалық, геометриялық және алгебралық жолмен жүзеге асырылған. Мысалы, жылдамдықтарды параллелограмм ережесімен қосу ежелгі грек ғалымы Аристотель (б. д. д. 384–322 жж.) мектебі оқушыларының «Механикалық мәселелер» еңбегінде сипатталған. Планиметрия мен стереометриядағы геометриялық бағыт алғаш рет толығымен 1799 жылы норвегиялық ғалым Каспар Вессельдің (1745–1818) «Бағыттың аналитикалық көрінісі туралы тәжірибе және оның қолданылуы» атты кітабында көрсетілген. «Вектор» сөзін алғаш рет ирландық математик Уильям Роуэн Гамильтон (1805–1865) енгізген.

А. Клеро

К. Вессель

Ғаламторды пайдаланып:

1) И. Бернулли кеңістіктегі координаталарды қалай анықтағанын;

2) К. Вессель векторлар қосындысын қалай тапқанын;

3) өздерің тұратын жердің географиялық координаталарын (бойлығы мен ендігін) біліңдер.

10-СЫНЫПТАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

А деңгейі

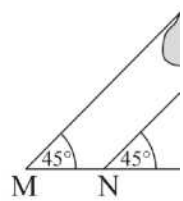
624. а) Егер AB мен CD түзулері бір жазықтықта жатпаса, онда A
түзулері де бір жазықтықта жатпайды; ә) кеңістіктегі берілген
өтіп, берілген түзуді қиятын барлық түзулер бір жазықтықт
б) қиылысатын екі түзудің біріне параллель және екіншісі
барлық түзулер бір жазықтықта жатады деген ақиқат па?

625. Қандай жағдайда кеңістікте берілген нүктеден қиылысатын е
әрқайсысына параллель жазықтықты жүргізуге болады?

626. Кеңістіктегі түзуде жатқан кез келген нүктеден оған перпе
2020 түзу жүргізуге бола ма?

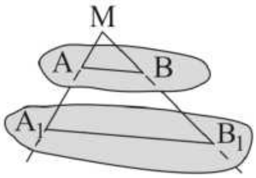
627. Ұлытау тауларына туристік жорыққа оқушылар өздерімен б
шеуіш пен өлшеуіш таспаны ала шықты. Демалу кезінде Б
жартастың шетінде өсіп тұрған ағаштың биіктігін білме
ды. Ол үшін $\angle AMC = 45°$ болатындай M нүктесін, сод
$\angle BNC = 45°$ болатындай N нүктесін белгілеп, ағаштың A
MN кесіндісінің ұзындығына тең деген қорытынды жасады (2
Бексұлтанның қорытындысы неге негізделген?

Ұлытау таулары, Қарағанды облысы



242-сурет

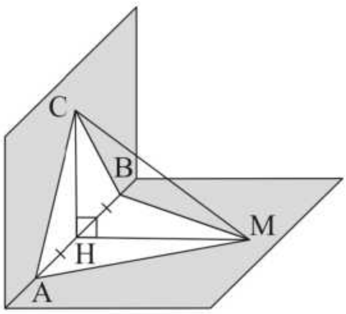
628. Кесіндінің ұштары оның ортасы арқылы өтетін жазықтық



243-сурет

630. Екі параллель жазықтық берілген. M нүктесінен осы жазықтықтарды, сәйкесінше, A және A_1, B және B_1 нүктелерінде қиятын екі сәуле жүргізілген (243-сурет). $MA = 4$ см, $BB_1 = 9$ см, $AA_1 = MB$ болса, MA_1 мен MB_1-ді табыңдар.

631. $ABCD$ тіктөртбұрышы берілген, $CD = 8$ см, OC – тіктөртбұрыш жазықтығына жүргізілген перпендикуляр, ұзындығы 6 см-ге тең. O нүктесінен AD түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.



244-сурет

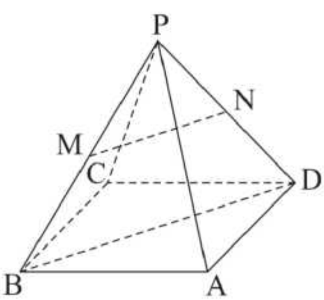
632. ABC мен ABM дұрыс үшбұрыштары перпендикуляр жазықтықтарда орналасқан (244-сурет). $AB = 14$ см болса, CM қашықтығын табыңдар.

633. Координаталар жүйесіне $O(0; 0; 0)$, $A(1; 1; 1)$, $B(0; 1; 1)$ және $C(1; 0; 1)$ нүктелерін салыңдар. Олар бір жазықтықта жата ма?

634. Төбелері $A(3; –2; 1)$, $B(–2; 1; 3)$, $C(1; 3; –2)$ нүктелері болатын үшбұрыш теңқабырғалы деген ақиқат па?

635. m-нің қандай мәнінде $\vec{a}(m; 4; 4)$ және $\vec{b}(m; 1; m)$ векторлары перпендикуляр болады? Осы векторлар: а) коллинеар; ә) компланар бола ма?

636. $\vec{c}$ (0; –4; 3) және $\vec{d}$ (0,5; –0,5; 1) векторлары берілген. а) $\vec{c} + 2\vec{d}$; ә) $4\vec{d} - \vec{c}$ векторына тең вектордың ұзындығын табыңдар.



245-сурет

637. Бір нүкте арқылы өтетін, бірақ бір түзу арқылы өтпейтін үш жазықтық кеңістікті неше бөлікке бөледі?

638. $PABCD$ пирамидасының табаны – қабырғасы 10 см-ге тең шаршы, ал бүйір қырлары 13 см-ден. M және N нүктелері, сәйкесінше, PB мен PD қырларының орталары (245-сурет). а) MN және BC; ә) DN және BC түзулерінің өзара орналасуын анықтап, олардың арасындағы бұрышты табыңдар.

639. Медианалары O нүктесінде қиылысатын ABC дұрыс үшбұрышы берілген. DO кесіндісі осы үшбұрыштың жазықтығына перпендикуляр. $AB = BD$ болса, ABC мен ABD жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

640. α және β жазықтықтарының арасындағы екіжақты бұрыш тік. α жазықтығындағы A нүктесінен осы бұрыштың қырына ұзындығы 5 см-ге тең AD перпендикуляры, β жазықтығындағы B нүктесінен ұзындығы 4 см-ге тең BK перпендикуляры жүргізілген. $DK = 3$ см болса, AB-ны табыңдар.

641. Төбелері $A(1; 4; 2)$, $B(2; -1; 5)$, $C(0; -2; 4)$ нүктелерінде болатын үшбұрыш тікбұрышты деген ақиқат па?

642. ABC үшбұрышының төбелері: $A(-4; 0; 2)$, $B(6; 5; -2)$, $C(-2; 5; 4)$. Оның медианаларының қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

B деңгейі

643. Қыры a-ға тең $DABC$ дұрыс тетраэдрі берілген. O, M, N нүктелері, сәйкесінше, ABC, ACD және ADB үшбұрыштары медианаларының қиылысу нүктелері. а) OMN және BCD жазықтықтары параллель болатынын дәлелдеңдер. ә) Тетраэдрдің OMN жазықтығымен қимасын салыңдар және оның ауданын табыңдар.

644. $SABC$ дұрыс тетраэдрінде F нүктесі – AB қырының, ал K нүктесі – AC қырының ортасы. SF және BK түзулерінің арасындағы бұрышты $1°$-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

645. $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$ және $C(-4; 1; 1)$ нүктелері төбелері болатын үшбұрыш берілген. Осы үшбұрыштың BH биіктігін табыңдар.

646. $DABC$ тетраэдрі берілген, онда $AB = BC = 4$, $BD = 7$, ал B төбесіндегі барлық жазық бұрыштары тік, M – ΔADC медианаларының қиылысу нүктесі. BM кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

647. $\overrightarrow{OA}$ векторы Ox, Oy, Oz осьтерімен, сәйкесінше, $60°$, $60°$, $45°$ бұрыштар құрайды. $\overrightarrow{OA}$ векторы мен xOy жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

C деңгейі

648. $PABCD$ пирамидасының табаны – шаршы және оның барлық қырлары a-ға тең. Пирамидаға іштей төрт төбесі оның бүйір қырларында, ал басқа төртеуі оның табан жазықтығында жататындай етіп куб орналастырылған. Осы куб қырының ұзындығын табыңдар.

649. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Кубтың жазықтықпен екі қимасы тұрғызылған. Біріншісі AA_1 мен BB_1 қырларының ортасынан және $ABCD$ жағының центрінен, екіншісі DC қырынан және A_1B_1 қырының ортасынан өтеді. Қималарының тіктөртбұрыштар болатынын дәлелдеңдер және осы қималардың аудандарының қатынасын табыңдар.

650. Қыры a-ға тең дұрыс $PABC$ тетраэдрі берілген. PA қырына оны P нүктесінен бастап есептегенде 2 : 3 қатынасына бөлетін M нүктесі белгіленген және AB қырына параллель MN түзуі жүргізілген. AC мен MN түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

651. Қыры $\sqrt{2}$ дм-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген, M нүктесі – BC қырының ортасы. A_1M мен AB_1 түзулерінің ортақ перпендикулярының ұзындығын табыңдар.

ӨЗІНДІ ТЕКСЕР!

Дұрыс жауабын таңдаңдар

652. α, β, γ – әртүрлі жазықтықтар, a, b, c – бұл жазықтықтарда жатпайтын әртүрлі түзулер болсын. Келесі тұжырымдардың қайсысы дұрыс:

а) $a \parallel c$ және $b \parallel c$ болса, онда $a \parallel b$;

ә) $a \parallel \gamma$ және $b \parallel \gamma$ болса, онда $a \parallel b$;

б) $a \parallel c$ және $c \parallel \beta$ болса, онда $a \parallel \beta$;

в) $\alpha \cap \beta = p$ және $p \parallel c$ болса, онда $c \parallel \alpha$ және $c \parallel \beta$?

1) а, в; 2) а, ә; 3) а, б; 4) барлығы дұрыс; 5) а, б, в.

653. Қыры 2 м-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Кубтың оның DD_1 қырының ортасынан өтетін және A_1C_1D жазықтығына параллель жазықтықпен қимасының ауданы неге тең?

1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ м^2; 2) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ м^2; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ м^2; 4) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ м^2; 5) $\sqrt{3}$ м^2.

654. $PABCD$ – дұрыс төртбұрышты пирамида, оның барлық қырлары a-ға тең, M – AP қырының ортасы. Сонда MD мен AC түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусы неге тең?

1) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; 2) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

655. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қыры a-ға тең. CC_1 мен BD_1 түзулерінің арақашықтығы неге тең?

1) a; 2) $a\sqrt{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 4) $0{,}5a$; 5) $0{,}8a$.

656. α жазықтығы $ABCD$ ромбысының жазықтығына перпендикуляр және BC қабырғасы арқылы өтеді. α жазықтығында $m \parallel BC$ түзуі жүргізілген. m және BC түзулерінің арақашықтығы 8 см-ге тең, $AB = 12$ см, $\angle BAD = 30°$ болса, онда m және AD түзулерінің арақашықтығы неге тең?

1) 8 см; 2) 10 см; 3) 12 см; 4) $12\sqrt{3}$ см; 5) $4\sqrt{13}$ см.

657. ΔABC-да $\angle B = 120°$, $AB = BC = 4$ см. DC кесіндісі ABC жазықтығына перпендикуляр. $DC = 2$ см болса, C нүктесінен ABD жазықтығына дейінгі қашықтық неге тең?

1) $0{,}8\sqrt{5}$ см; 2) $\frac{4\sqrt{39}}{13}$ см; 3) $2\sqrt{3}$ см; 4) $\sqrt{3}$ см; 5) 3 см.

658. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың бүйір қырларының арасындағы бұрыш α-ға тең. Сонда пирамиданың бүйір жағы мен табан жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусы неге тең?

1) $\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;
2) $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;
3) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;
4) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha$;
5) $0{,}6 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

659. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде $\angle ABD = 90°$, $CC_1 \perp (ABC)$, $CC_1 = DC = 4$ см, $AD = 5$ см. BD диагоналі арқылы 45° бұрыш жасайтын жазықтық жүргізілген. Сонда параллелепипедтің осы жазықтықпен қимасының ауданы неге тең?

1) $0{,}75\sqrt{105}$ см^2; 2) 12 см^2; 3) $12\sqrt{2}$ см^2; 4) $6\sqrt{2}$ см^2; 5) 6 см^2.

660. Екіжақты бұрыштың жақтарында жататын A мен B нүктелерінен оның қырына AA_1 және BB_1 перпендикулярлары жүргізілген. $AA_1 = 3$ дм, $BB_1 = 4$ дм, $A_1B_1 = 5$ дм, ал екіжақты бұрыш 60°-қа тең екені белгілі. Сонда AB кесіндісінің ұзындығы неге тең?

1) 5 дм; 2) 6 дм; 3) 7 дм; 4) $\sqrt{35}$ дм; 5) $\sqrt{38}$ дм.

661. ΔABC-ның AB қабырғасы арқылы осы үшбұрыштың жазықтығымен 75° бұрыш құрайтын α жазықтығы жүргізілген. C төбесінен α жазықтығына CC_1 перпендикуляры жүргізілген. ΔABC-ның ауданы 10 см^2-ге тең екені белгілі. Сонда ΔABC_1-дің ауданы неге тең?

1) $2{,}5(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ см^2;
2) $2{,}5(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ см^2;
3) $10(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ см^2;
4) $10(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ см^2;
5) $5\sqrt{2}$ см^2.

ҚОСЫМША

0°-ТАН 90°-ҚА ДЕЙІНГІ БҰРЫШТАРДЫҢ СИНУСТАРЫ МЕН КОСИНУСТАРЫНЫҢ ЖУЫҚ МӘНДЕРІНІҢ КЕСТЕСІ

A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B
0°	0,000	90°	30°	0,500	60°	60°	0,866	30°
1°	0,017	89°	31°	0,515	59°	61°	0,875	29°
2°	0,035	88°	32°	0,530	58°	62°	0,883	28°
3°	0,052	87°	33°	0,545	57°	63°	0,891	27°
4°	0,070	86°	34°	0,559	56°	64°	0,899	26°
5°	0,087	85°	35°	0,574	55°	65°	0,906	25°
6°	0,105	84°	36°	0,588	54°	66°	0,914	24°
7°	0,122	83°	37°	0,602	53°	67°	0,921	23°
8°	0,139	82°	38°	0,616	52°	68°	0,927	22°
9°	0,156	81°	39°	0,629	51°	69°	0,934	21°
10°	0,174	80°	40°	0,643	50°	70°	0,940	20°
11°	0,191	79°	41°	0,656	49°	71°	0,946	19°
12°	0,208	78°	42°	0,669	48°	72°	0,951	18°
13°	0,225	77°	43°	0,682	47°	73°	0,956	17°
14°	0,242	76°	44°	0,695	46°	74°	0,961	16°
15°	0,259	75°	45°	0,707	45°	75°	0,966	15°
16°	0,276	74°	46°	0,719	44°	76°	0,970	14°
17°	0,292	73°	47°	0,731	43°	77°	0,974	13°
18°	0,309	72°	48°	0,743	42°	78°	0,978	12°
19°	0,326	71°	49°	0,755	41°	79°	0,982	11°
20°	0,342	70°	50°	0,766	40°	80°	0,985	10°
21°	0,358	69°	51°	0,777	39°	81°	0,988	9°
22°	0,375	68°	52°	0,788	38°	82°	0,990	8°
23°	0,391	67°	53°	0,799	37°	83°	0,993	7°
24°	0,407	66°	54°	0,809	36°	84°	0,995	6°
25°	0,423	65°	55°	0,819	35°	85°	0,996	5°
26°	0,438	64°	56°	0,829	34°	86°	0,998	4°
27°	0,454	63°	57°	0,839	33°	87°	0,999	3°
28°	0,469	62°	58°	0,848	32°	88°	0,999	2°
29°	0,485	61°	59°	0,857	31°	89°	1,000	1°
30°	0,500	60°	60°	0,866	30°	90°	1,000	0°
A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B

0°-ТАН 89°-ҚА ДЕЙІНГІ БҰРЫШТАРДЫҢ ТАНГЕНСІНІҢ ЖУЫҚ МӘНДЕРІНІҢ КЕСТЕСІ

A	tg *A*	*A*	tg *A*	*A*	tg *A*
0°	0,000	30°	0,577	60°	1,73
1°	0,017	31°	0,601	61°	1,80
2°	0,035	32°	0,625	62°	1,88
3°	0,052	33°	0,649	63°	1,96
4°	0,070	34°	0,675	64°	2,05
5°	0,087	35°	0,700	65°	2,14
6°	0,105	36°	0,727	66°	2,25
7°	0,123	37°	0,754	67°	2,36
8°	0,141	38°	0,781	68°	2,48
9°	0,158	39°	0,810	69°	2,60
10°	0,176	40°	0,839	70°	2,75
11°	0,194	41°	0,869	71°	2,90
12°	0,213	42°	0,900	72°	3,08
13°	0,231	43°	0,933	73°	3,27
14°	0,249	44°	0,966	74°	3,49
15°	0,268	45°	1,000	75°	3,73
16°	0,287	46°	1,04	76°	4,01
17°	0,306	47°	1,07	77°	4,33
18°	0,325	48°	1,11	78°	4,70
19°	0,344	49°	1,15	79°	5,14
20°	0,364	50°	1,19	80°	5,67
21°	0,384	51°	1,23	81°	6,31
22°	0,404	52°	1,28	82°	7,12
23°	0,424	53°	1,33	83°	8,14
24°	0,445	54°	1,38	84°	9,51
25°	0,466	55°	1,43	85°	11,4
26°	0,488	56°	1,48	86°	14,3
27°	0,510	57°	1,54	87°	19,1
28°	0,532	58°	1,60	88°	28,6
29°	0,554	59°	1,66	89°	57,3

ЖАУАПТАР МЕН НҰСҚАУЛАР

1. в). **2.** а) 3 жұп; ә) 6 жұп. **3.** $(20+4\sqrt{3})$ см. **4.** 96 $см^2$. **5.** 7 см. **6.** а) $\Delta OPA = \Delta OPB = \Delta OPC$, $\Delta APC = \Delta APB = \Delta CPB$, $\Delta AOB = \Delta AOC = \Delta BOC$; ә) дұрыс тетраэдр. **7.** $0,5\sqrt{2}$ дм. **9.** $4\sqrt{2}$ см. **10.** а) 60; ә) 20; б) 45. **11.** 21 см × 28 см-ден кем емес. **12.** 8 см. **13.** 192 $см^2$. **14.** а) Шексіз көп; ә) бір немесе шексіз көп; б) бірде-бір емес немесе бір. **15.** а) Мүмкін; ә) мүмкін емес. **16.** а) Күннің, Жердің, Марстың центрлері бір түзуде жатпайды. **17.** Қиылысады. **18.** а) Мүмкін емес; ә) мүмкін. **19.** а) $D \in AB$; ә) 1) $MN \cap (ABC) = K$, $K \in BC$; 2) $(DMN) \cap (ABC) = BC$. **20.** а) BC; ә) D_1C_1. **21.** $4\sqrt{5}$ см. Үшбұрыштардың ұқсастығын пайдаланыңдар. **23.** Мұндай нүкте бар және ол MN түзуіне тиісті. **24.** Қате бар. B, D, E нүктелері бір түзудің бойында жатуы тиіс. **25.** $(A_1C_1D) \cap (ACD_1) = KN$, мұндағы $K = AD_1 \cap A_1D$, $N = DC_1 \cap CD_1$; $KN = 2\sqrt{2}$ дм. **26.** 2, 3-аксиомаларды қолданыңдар. **27.** ә) Ақиқат болады. **28.** а) Кеңістіктегі кез келген үш нүкте арқылы жазықтық өтеді, ал жазықтықта бұл теңсіздіктер орындалады; ә) A, B, C нүктелерін белгілеп, мына теңдіктердің бірі ақиқат бола ма екенін тексеру керек: $AB = AC + CB$, $AC = AB + BC$, $BC = AB + AC$; б) косинустар теоремасын қолданыңдар. **29.** BM түзуі. **30.** а) BC; ә) CD түзулері арқылы қиылысады. **31.** CK түзуі, мұндағы $K = MH \cap AD$. **32.** а) Болмайды; ә) $BN \cap \alpha = O$, $O \in AM$; б) $BK \cap \alpha = K$, $K \in AM$, $AM = MK$. **33.** а) $\frac{a}{3}$; ә) $CM \cap AD = K$, $CN \cap BD = L$, $CO \subset (CKL)$, $CO \cap (ABD) = X$, $X \in KL$. **34.** а) Егер M нүктесі BC-ның ортасы болса; ә) $AD : DC = 3 : 5$. **35.** 3 см. **36.** а) Мүмкін емес. **39.** а) 16 см; ә) 5,52 дм. **40.** а) BKD жазықтығында $MN \parallel BD$ салыңдар, $N \in BK$, $BN : NK = 2 : 3$; ә) BMN жазықтығында $OK \parallel MN$ жүргізіңдер, $K \in BN$, $OK = 4$ см. **41.** $MNPK$ – параллелограмм, $P = 32$ см. **42.** 3 дм. **43.** 3 см. **44.** AB_1C жазықтығында $KL \parallel AC$ жүргізіңдер, $L \in B_1C$, $KL = 3\sqrt{2}$ см. **45.** Егер MN түзуі a мен b түзулерін әртүрлі екі нүктеде қиятын болса. **46.** Жазықтықты екі параллель түзумен қию туралы теореманы қолданыңдар; $AD \cap \alpha = M$, $CD \cap \alpha = N$, AB мен BC түзулерінің α жазықтығымен қиылысу нүктелері MN түзуінде жатады. **47.** $MN \parallel DC_1$ және $MN \cap DD_1 = N$, $N \in (AA_1D_1)$. **48.** ABC жазықтығында O нүктесі арқылы $KL \parallel BC$ және KDL жазықтығында P нүктесі арқылы $MN \parallel KL$ жүргізіңдер. $S = 36\sqrt{3}$ $см^2$. **49.** $KL \parallel BD$, $MN \parallel EC$ болатынын анықтаңдар және $BDCE$ төртбұрышы параллелограмм болатынын дәлелдеңдер, әрі қарай кеңістіктегі түзулердің параллельдік белгісін пайдаланыңдар. **50.** 36 $дм^2$. **51.** $OP = 2\sqrt{3}$ см. **52.** ә) Ақиқат емес. **53.** SB түзуі. **54.** Мысалы, A_1C және DC_1 немесе A_1C және BD. Айқас түзулердің басқа жұбын көрсетіңдер. **55.** Ақиқат емес, $DK \subset (ABC)$, ал $OB \cap (ABC) = B$, $B \notin DK$. **56.** CK мен DN айқас түзулер екенін дәлелдеңдер. **57.** а) AN және DM – айқас түзулер, себебі $AN \subset (APD)$, $DM \cap (APD) = D$, $D \notin AN$; ә), б) – айқас түзулер. **58.** а) Параллель; ә) айқас. **59.** а), ә) c мен b түзулері қиылысуы немесе айқас болуы мүмкін. Сәйкес суреттерін салыңдар. **60.** а), ә) c мен b түзулері қиылысуы, параллель немесе айқас болуы мүмкін. Осыларды сызбада көрсетіңдер. **61.** BK, мұндағы $K = BM \cap CD$. **62.** a мен b айқас түзулер болсын. Қиылысатын a мен c түзулері жазықтықты береді. c түзуіне параллель, a түзуін қиятын барлық түзулер бір жазықтықта жататынын дәлелдеңдер. **63.** Егер $d \parallel c$ және d түзуі a немесе b түзулерінің бірімен бір жазықтықта жатса, онда d түзуі олардың біреуін қияды және екіншісіне айқас болады. Осыны негіздеңдер. Егер d және c параллель түзулері үшінші жазықтықта жатса, онда d түзуі a мен b түзулерінің әрқайсысына айқас болады. Неліктен екенін түсіндіріңдер. **64.** BDM және DNB үшбұрыштарына косинустар теоремасын қолданыңдар. **65.** а) Дұрыс емес; ә) параллель немесе айқас болуы мүмкін. **66.** б) Бұл түзу үшбұрыштың жазықтығында жатуы немесе оған параллель болуы мүмкін. **67.** а) 10 см; ә) $4a$. **68.** 28 $м^2$. **69.** а) $\alpha \cap \beta = b$ болсын. b түзуі мен A нүктесі арқылы γ жазықтығын және онда жататын $AB \parallel b$ түзуін салыңдар. $AB \parallel \alpha$, $AB \parallel \beta$ болатынын дәлелдеңдер. ә) α жазықтығында β жазықтығын қиятын c түзуін салыңдар. c түзуі мен A нүктесі арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады және онда $AC \parallel c$ болатын AC түзуін салу керек. $AC \parallel \alpha$ және $AC \cap \beta$ болатынын дәлелдеңдер. **70.** а) $a \parallel \alpha$ болсын. α жазықтығында кез келген B нүктесін белгілеңдер және a түзуі мен B нүктесі арқылы өтетін β жазықтығын жүргізіңдер. α мен β жазықтықтары a түзуіне параллель түзу арқылы қиылысады. Мұны негіздеңдер. **71.** а) 168 $см^2$; ә) 48 $см^2$; б) $72\sqrt{3}$ $см^2$. **72.** $\frac{2}{3}b$. **73.** ә) $\frac{4}{3}$. **74.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **75.** а) $FE \parallel AB$; ә) қима – $DCFE$. **78.** Қима – $KNML$ төртбұрышы, мұндағы L – AC-ның ортасы, $ML \parallel CB$; $P_{KNML} = 23$ см. **79.** Қима – $KPMN$ төртбұрышы, мұндағы $PM \parallel DC$, $KN \parallel AB$, $N \in BB_1$, $BN = B_1N$. **80.** а) Қима – $LKPT$ төртбұрышы, мұндағы $M \in PT$, $PT \parallel AB$; ә) қима – $LKFE$ төртбұрышы, мұндағы $LK \cap AB = X$, $XM \cap CB = F$, $XM \cap AC = E$. **81.** а) ΔMKL – ізделінді қима, мұндағы M, K, L нүктелері, сәйкесінше, AP, CP, BP қырларының орталары; ә) $S_{\Delta MKL} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. **82.** KMN жазықтығы, мұндағы N, M нүктелері, сәйкесінше, DC, DF қырларының орталары. $(KMN) \parallel AF$ және $(KMN) \parallel AC$ болатынын дәлелдеңдер. **83.** $8\sqrt{3}$ $дм^2$. **84.** Қима – $MNKL$ төртбұрышы, мұндағы $O \in KL$, $KL \parallel DC$, $K \in SC$, $L \in SD$; $P_{MNKL} = \frac{(7+2\sqrt{13})a}{6}$.

85. α мен β жазықтықтары параллель. **86.** а) Параллель жазықтықтарда орналасқан түзулер қиылыспайтындықтан; ә) жабынды көлденең болмауы мүмкін. **87.** Кері жору арқылы дәлелдеу тәсілін қолданыңдар. **88.** Үшінші қабырғасы α-ға параллель. **89.** Дұрыс емес. **90.** ә) Үшбұрыштың орта сызығының қасиеті мен жазықтықтардың параллельдік белгісін пайдаланыңдар. **91.** Параллелепипедтің барлық жақтары параллелограмдар екенін ескеріп, жазықтықтардың параллельдік белгісін пайдаланыңдар. **93.** а) $\sqrt{2}$ см; ә) 9 см. **95.** 20,4 см. **96.** а) Тіктөртбұрыш, 64 см^2; ә) ромб, 96 см^2. **97.** 10 : 9. **98.** а) 50 см^2; ә) қималар – PNT мен KLM үшбұрыштары, олардың аудандары $\frac{1}{9}S$ және $\frac{4}{9}S$ тең. **99.** $\dfrac{(a+b+c)(m+n)}{m}$. **100.** $\dfrac{6a^2\sqrt{14}}{625}$. ΔABC-ның ауданын табу үшін Герон формуласын пайдаланыңдар. **101.** Қима – ΔPMN, мұндағы $PM \parallel BC$, $PN \parallel BK$, M, N нүктелері – DC және KD кесінділерінің орталары. **102.** Қима – $MNKL$ төртбұрышы, мұндағы $MN \parallel CD_1$, $N \in DD_1$, $ML \parallel BC$, $L \in AB$, $NK \parallel A_1D_1$, $K \in AA_1$. **103.** а) Қима – ΔBNL, мұндағы $NL \parallel SD$, $BL \parallel DM$; ә) $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$. $S_{\Delta BNL} = 0{,}5 \cdot BL \cdot LN \cdot \sin L$ формуласын қолданыңдар. **104.** $(MPK) \cap BD = T$, T – BD-ның ортасы. Қима – $EFLN$ трапециясы, мұндағы N, L, F нүктелері, сәйкесінше, TB, AM, AC кесінділерінің орталары. **105.** б) Теңбүйірлі үшбұрыштың төбесіндегі бұрыштың сыртқы бұрышының биссектрисасы табанына параллель. **106.** а) Тіктөртбұрыштың проекциясы – параллелограмм, тіктөртбұрыштың симметрия осьтері оның қарама-қарсы қабырғаларын қақ бөледі; ә) кескіні теңбүйірлі емес трапеция болуы мүмкін, оның бір табаны екіншісінен екі есе үлкен; теңбүйірлі трапецияның симметрия осі табандарын қақ бөледі. **107.** а), ә) – ромбының да, тіктөртбұрыштың да кескіндерінде олардың қарама-қарсы қабырғаларының қасиеттері мен диагональдарының қиылысу нүктесінде қақ бөлінетін қасиеті ғана сақталады. **108.** Шаршының кескіні параллелограмм болады, параллелограмм диагональдарының қасиетін пайдаланыңдар. **109.** AB диаметрімен беттеспейтін кез келген диаметр AB диаметріне перпендикуляр CD диаметрінің проекциясы болуы мүмкін. **110.** ә) Үшбұрыштың қабырғаларының ортасымен жанасатын эллипс салыңдар. **111.** 7,2 см, 10,8 см. **112.** 27 см. **113.** $A_1E = 0{,}5a$. **114.** а) Тең; ә) тең емес. **115.** а) Үшбұрыш немесе кесінді; ә) трапеция немесе кесінді; б) диагональдармен бірге төртбұрыш немесе үшбұрыш; в) алтыбұрышпен бірге оның қабырғаларына параллель және тең кесінділер немесе параллелограмм. **116.** $10(1+\sqrt{3})$ см. **117.** Қималары – BB_1MN және BB_1KL параллелограмдары, мұндағы M, N, K, L нүктелері, сәйкесінше, A_1D_1, AD, C_1D_1, CD қырларына тиісті және оларды 2 : 1 қатынасында бөледі. Неге екенін түсіндіріңдер. **118.** 0,25 $м^2$, 2,25 $м^2$, 4 $м^2$. **119.** $AB \subset \alpha$, $AB \cap \beta = B$. **120.** 1-аксиоманы қолданыңдар. **121.** а) Жатпайды; ә) жатады. **123.** а) MN перпендикулярының BD диагоналіне проекциясы – AC-ға параллель кесінді; ә) BH биіктігінің проекциясы – ABD үшбұрышының BH медианасы (егер $\angle A = 60°$ болса). **125.** а) Болады; ә) болады. **126.** ә) $CM \cap (DEF) = K$, $K \in AD$; б) $EN \cap (BCD) = L$, $L \in AD$. **127.** а) $MN \cap (SBC) = K$, $K \in BC$; ә) $MN \cap (SDC) = L$, $L \in DC$; б) SK; в) SL. **128.** а) A_1C; ә) AC_1; б) OO_1, мұндағы $O = AC \cap BD$, $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$. **129.** $6{,}25\sqrt{11}$ $см^2$. **130.** Қимасы – $KMPL$ параллелограмы, мұндағы $KL \parallel AD$, $L \in DD_1$; оның периметрі 24 см. **132.** Қимасы $MNKL$ теңбүйірлі трапециясы, мұндағы M, N, K, L нүктелері, сәйкесінше, PD, AD, BC, PC қырларының орталары, оның периметрі $2{,}5a$. **133.** 3,24 $см^2$. **134.** $K \in AB$, $KC = 0{,}5\sqrt{3}$ м. **135.** Егер жазық төртбұрыштың диагональдары қиылысса. **137.** 16 см. **138.** а) $K \in B_1C_1$; ә) $L \in AD$. **139.** а) BC; ә) MC. **140.** $9\frac{3}{13}$ см. Ізделінді арақашықтық – AMN үшбұрышының (N – BD қырының ортасы) AM бүйір қабырғасына жүргізілген NH биіктігі. Пифагор теоремасы бойынша осы үшбұрыштың NM табанына жүргізілген биіктігін табыңдар және оның ауданын екі тәсілмен өрнектеңдер. **141.** Кубтың KMN жазықтығымен қимасы – DA_1C_1 үшбұрышы. Оны «Егер жазықтық басқа жазықтыққа параллель түзу арқылы өтсе және оны қиса, онда жазықтықтардың қиылысу сызығы берілген түзуге параллель болады» теоремасын пайдаланып, дәлелдеңдер. **142.** $A_1E_1 = 7$ см; $\frac{CE}{BE} = \frac{5}{3} = \frac{C_1E_1}{B_1E_1}$, $\Delta A_1B_1E_1$-ге косинустар теоремасын қолданыңдар, мұндағы $\angle B_1 = 60°$. **143.** O нүктесі BMN және BDK жазықтықтарының қиылысу түзуіне тиісті; $KO : OL = 2 : 1$. **144.** Кубтың AB_1C жазықтығымен қимасы – теңқабырғалы үшбұрыш. Ол медианамен (мысалы, B_1O) не табанына параллель кесіндімен (мысалы, KL) екі тең шамалы бөлікке бөлінеді. Осы кесінділердің ұзындықтарын салыстырыңдар. KL кесіндісінің ұзындығын есептеу үшін AB_1C мен KB_1L ұқсас үшбұрыштар аудандарының қатынасын пайдаланыңдар $\left(S_{KLB_1} : S_{\Delta ACB_1} = \frac{1}{2} = \left(\frac{KL}{AC}\right)^2\right)$. $KL = 30$ см, $B_1O = 15\sqrt{6}$ см. **145.** а) $MP \subset (B_1A_1D)$, $MP \parallel B_1D$, $MP \cap A_1D = P$; $NK \subset (B_1D_1D)$, $NK \parallel B_1D$, $NK \cap B_1D_1 = K$; ә) $MP = 15$ см, $NK = 25$ см; б) $MP \parallel NK$, қимасы – $MFSNE$ бесбұрышы, мұндағы $MK \cap D_1C_1 = X$, $MX \cap B_1C_1 = F$, $XN \cap CC_1 = S$, $NP \cap AA_1 = E$. **146.** а) $ML \parallel BN$, $L \in DC$, $NK \parallel AL$, $K \in AC$; ә) $DL : LC = 1 : 3$, $AK : KC = 1 : 2$; б) $S_{\Delta AML} : S_{\Delta BNK} = 3 : 4$. Үшбұрыш ауданының формуласын $S = 0{,}5 \cdot ab \cdot \sin\alpha$ және салынған қималардағы L мен N бұрыштарының теңдігін пайдаланыңдар. **147.** 2). **148.** 5). **150.** 4). **151.** 1). **152.** 5). **153.** Мүмкін емес. **154.** Қиылыспайды, айқас түзулердің белгісін пайдаланыңдар. **155.** 12 см. **156.** а) $MK \cap (ABC) = X$, мұндағы $X = MK \cap AC$; ә) BX түзуі. **157.** 8 дм. **158.** 8 см. **159.** $\frac{4}{9}$. **160.** $MN = 0{,}5AC$, $KL = 0{,}5BC_1$. **161.** Қимасы – дұрыс алтыбұрыш, оның периметрі $3a\sqrt{2}$-ге тең. **164.** 55°. **165.** Сәйкесінше ($BA \parallel B_1A_1$, $BC \parallel B_1C_1$) қабырғалары параллель болатын ABC мен $A_1B_1C_1$ бұрыштары параллель жазықтықтарда жатыр. Олардың қабырғаларында $AB = A_1B_1$ және $BC = B_1C_1$ болатындай өзара тең кесінділер салыңдар, сонда ABB_1A_1, BCC_1B_1 мен ACC_1A_1 төртбұрыштары параллелограмдар болады. Демек, $AC = A_1C_1$. Одан кейін ABC мен $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарын қарастырыңдар. **167.** 15°, 150°, 15°. **169.** 60°. **170.** а) $\angle(MN; BC) = 65°$; ә) $\angle(MN; AB) = 0°$. **171.** $\frac{1}{3}$. **172.** ≈ 73°. **173.** ≈ 11,1 см. O нүктесі $ABCD$ шаршысы диагональдарының қиылысу нүктесі болсын, MH-қа параллель PO түзуін жүргізіңдер, $H \in AC$; ΔNMH тікбұрышты болатынын дәлелдеңдер. **174.** a және b айқас түзулері α жазықтығын қиятын болсын, $a \cap \alpha = A$, $b \cap \alpha = B$. a түзуі мен B нүктесі арқылы β жазықтығын салыңдар және осы жазықтықта B нүктесі арқылы $c \parallel a$ түзуін жүргізіңдер, сонда $\angle(c; b) = \angle(a; b)$ болады. **175.** 15° немесе 75°. **176.** а) ≈ 63°; ә) ≈ 26°; б) ≈ 18°. **177.** ≈ 44°. **178.** Перпендикуляр. **181.** Үшбұрыштардың теңдігінің белгілерін пайдаланыңдар. **182.** ә) $BD \perp (AA_1C)$ болатынын дәлелдеңдер. **184.** 8 см, 6 см, $2\sqrt{41}$ см. **185.** O нүктесі арқылы AB-ға параллель KL түзуін жүргізіңдер, сонда $\angle(AB; OM) = \angle MOL$. Одан әрі KLM теңбүйірлі үшбұрышының қасиетін пайдаланыңдар. **186.** а) 0,8 дм; ә) ақиқат. **187.** $\sqrt{c^2 + (b-a)^2}$ м. **188.** ≈ 18,7 см. ΔAKH тікбұрышты екенін анықтаңдар, себебі $AB \perp (CKH)$. **189.** 20 см. **190.** Алдымен $PH \perp (ABC)$ болатынын дәлелдеңдер. **191.** $a \perp (AOB)$ болатынын дәлелдеңдер. **192.** Қима – $MNKL$ тіктөртбұрышы, мұндағы M, N, K, L, сәйкесінше, AB, AD, A_1D_1, A_1B_1 қырларының орталары. $S_{MNKL} = \frac{b^2\sqrt{2}}{2}$. **193.** $\frac{ab}{a+b}$. **194.** Қимасы – ΔABF, мұндағы A – MD-ның ортасы, $B \in CM$, $F \in KM$, AB мен BF кесінділері CDM және CKM үшбұрыштарының, сәйкесінше, DH пен KH биіктіктеріне параллель. $(ABF) \perp CM$ болатынын дәлелдеңдер. $S_{\Delta ABF} = \frac{a^2\sqrt{2}}{16}$. **195.** Пирамида мен көрсетілген жазықтықтың қиылысуы BC кесіндісі болады. Неге екенін түсіндіріңдер (бүйір жақтары доғалбұрышты үшбұрыштар болатынын анықтаңдар). **196.** 3) а) 16 см; ә) 15 см. **197.** 9 см. **198.** 25 см. **199.** 13 см. **200.** 6 см. ΔMPN теңбүйірлі екенін және ізделінді қашықтық осы үшбұрыштың PK биіктігінің ұзындығы болатынын анықтаңдар. **201.** 10 см. **202.** а) 10 см, 10 см; ә) $2\sqrt{21}$ см. **203.** Дұрыс; ≈ 29,7 м. **204.** ә) $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ см. **206.** а) $PA = PB = PC = PD = \sqrt{3}$ дм; ә) P нүктесі шаршының барлық қабырғаларынан $\frac{\sqrt{10}}{2}$ дм-ге тең қашықтықта орналасқан. **207.** а) Берілген жазықтыққа параллель және M нүктесінен осы жазықтыққа жүргізілген перпендикулярды қақ бөлетін жазықтықты; ә) берілген жазықтыққа параллель жазықтықта жататын, центрі M нүктесінен осы жазықтыққа жүргізілген перпендикулярдың ортасы болатын шеңберді. **208.** 8 см, 6 см. **209.** 2) 5 см. **210.** 25 см. **211.** 10 см. **212.** 7 см; 8 см. **213.** 2) MA. **214.** 2) $48\sqrt{2}$ см^2. **215.** $50\sqrt{6}$ см^2. **216.** а) Ромбының шаршы болатынын анықтаңдар. ә) 92,16 дм^2. **217.** $MK = MH = MD = \sqrt{3}$ дм. **218.** AB мен DC қабырғаларына дейінгі арақашықтық 1,7 дм-ден, ал AD мен BC қабырғаларына дейін 1 дм-ден. **219.** 3 : 2. **220.** $\sqrt{7}$ дм. **221.** O нүктесі AB гипотенузасының ортасы екенін анықтаңдар. AB, AC, BC қабырғаларына дейінгі арақашықтық, сәйкесінше, 4 см, $4\sqrt{2}$ см, 5 см-ге тең. **222.** а) ≈ 5,7 см; ә) ≈ 22,2 см. **223.** ә) 30 см. **224.** а) Берілген нүктелерді біріктіретін кесіндіге перпендикуляр және оның ортасы арқылы өтетін жазықтық; ә) берілген үшбұрыштың жазықтығына перпендикуляр және осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі арқылы өтетін түзу. **225.** Алдымен α жазықтығына түсірілген AH перпендикулярының табаны A_1 бұрышының биссектрисасына тиісті екенін анықтаңдар. Одан әрі $B_1C_1 \perp (AA_1H)$… болатынын дәлелдеңдер. **226.** $7\frac{2}{9}$ дм. X нүктесі ΔABC медианаларының қиылысу нүктесі болатынын анықтаңдар. **227.** Құрылғылар бір түзудің бойында жатпайтын A, B, C нүктелерінде орналассын, ал жарқылдайтын құрылғы S нүктесінде болсын, сонда ABC жазықтығына түсірілген SO перпендикулярының ұзындығы – ізделінді арақашықтық. O нүктесі – ΔABC-ға сырттай сызылған шеңбердің центрі. $SO = \sqrt{d^2 - R^2}$, мұндағы $R = \frac{abc}{4S}$, $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **228.** ΔABC-ның ауданын ΔCAM мен ΔBAM-нің аудандарының қосындысы түрінде жазып, $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin\alpha$ формуласын пайдаланып, AM биссектрисасын өрнектеңдер. $\sin\alpha = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$ болатынын ескере отырып, $AM = 15 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$ алыңдар. Әрі қарай AK-ны тауып, $\cos\frac{\alpha}{2} < 1$ екенін біле отырып, оның мәнін бағалаңдар. **229.** 90°, 7 см, 24 см. Жанасу нүктесіне жүргізілген радиус пен жанаманың қасиетін, үш перпендикуляр туралы теореманы және жанама мен қиюшының қасиетін пайдаланыңдар: $MH^2 = HN \cdot HK$. **230.** 7,5 см. H нүктесі – AB кесіндісінің ортасы, себебі үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі – ол үшбұрыш қабырғаларына жүргізілген орта перпендикулярлардың қиылысу нүктесі. OH-ты табу үшін ΔABC-ның ауданын екі тәсілмен өрнектеп, ABO бұрышының синусы мен ΔABC-ға сырттай сызылған шеңбердің BO радиусын табыңдар. **231.** $5\sqrt{6-2\sqrt{3}}$ см. Шеңбердің r радиусын есептеу үшін шеңберге бір нүктеден жүргізілген жанамалардың қасиетін пайдаланыңдар, бұдан тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы $c = (a - r + b - r)$, мұндағы a, b – катеттері. **232.** а) 1 дм; ә) 1 дм; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ дм. **233.** а) $\sqrt{13}$ дм; ә) 3 дм; б) 3 дм. **234.** а) 3 см; ә) 2,4 см. **237.** 5 см. **238.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **239.** 1 дм. **240.** а) $0{,}5\sqrt{65}$ м; ә) 4 м. **241.** $4\sqrt{2}$ дм, 5 дм. **242.** 12 см. **243.** 6 см, 10 см, 6 см. **244.** 12,5 см немесе 19,5 см. **245.** $\sqrt{c^2+a^2-h^2}$. **246.** 0,9 дм. **247.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. Берілген тетраэдрдің APB жағын табаны деп алып, ізделінді арақашықтық осы жағына түсірілген CO перпендикулярының жартысына тең болатынын анықтаңдар. **248.** 4 см. **249.** $10\sqrt{5+2\sqrt{3}}$ см. $\smile AB = 60°$, $\smile BC = 120°$ болатынын анықтаңдар. **250.** ≈ 311 м. **251.** 128 см^2, $4\sqrt{2}$ см. Қиманың төртбұрыш болатынын дәлелдеңдер және үшбұрыштардың ұқсастығын пайдаланып, оның қабырғаларын табыңдар. AC түзуінен қима жазықтыққа дейінгі қашықтық AC мен SB қырларының орталарын қосатын кесіндінің $\left(\frac{1}{3}\right)$-не тең болатынын дәлелдеңдер. **252.** 4 см. Пирамиданың MN түзуін қамтитын және DH-қа параллель жазықтықпен қимасын салыңдар. **253.** а) Төмендеп барады; ә) түске дейін; б) шеңбер. **254.** 30°. **255.** 1) а) BD; ә) DC_1; б) B_1C. 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **256.** 45°. **257.** $\approx 35°$. **258.** $\angle DAC \approx 63°$, $\angle DBC \approx 56°$, $\angle DOC \approx 67°$. **259.** а) 45°; ә) 5 см. **260.** $4\sqrt{5}$ см, $\approx 27°$. **261.** 60°. **262.** $\approx 35°$. **263.** 60°. **264.** $\approx 24°$. **265.** 60°. **266.** $0{,}5\sqrt{2} \cdot \cos\alpha$. **267.** $\approx 56°$, $5\frac{2}{3}$ см. **268.** $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. **269.** $\approx 26°$. **270.** $3\sqrt{6}$ м. **271.** 8,125 см^2. **272.** $3\sqrt{3}$ см^2. **273.** 3 см. **274.** 21 см, 7 см. MN берілген жазықтыққа перпендикуляр болсын, $\angle MAN = \alpha$, $\angle MBN = \beta$. NA кесіндісіне $NB_1 = NB$ кесіндісін саламыз, сонда $\angle MB_1N = \beta$ ΔAMB_1-дің сыртқы бұрышы. Сыртқы бұрыштың қасиеті бойынша $\angle MB_1N = \alpha + \angle AMB_1$, ал есептің шарты бойынша $\beta = \alpha + 30°$, демек, $\angle AMB_1 = 30°$. Әрі қарай ΔAMB_1-ге Пифагор теоремасы мен косинустар теоремасын қолданып, теңдеулер жүйесін құрыңдар. **275.** $\approx 73°$.

276. $\frac{a \cdot \operatorname{tg}\varphi}{2 \cdot \sin(\beta+\gamma)}$. Пирамиданың PO биіктігінің O табаны ΔABC-ға сырттай сызылған шеңбердің центрі болады, оның радиусын табу үшін $\frac{a}{\sin A} = 2R$ формуласын пайдаланыңдар. **277.** $\angle PNH = 50°$. **278.** а) 30°; ә) 60°. **279.** 1 дм. **280.** а) Болмайды; ә) 30°. **281.** 32 см^2. **282.** 45°. **283.** 60°. **284.** а) ≈ 71°; ә) ≈ 55°. **285.** ≈ 22°. **286.** а) ≈ 27°; ә) ≈ 41°. **287.** ≈ 71°. **288.** 60°. **289.** а) 45°; ә) ≈ 49°. **290.** а) 45°; ә) ≈ 7,8 см. **291.** 60°. **292.** ≈ 139°. **293.** 5 см, $5\sqrt{3}$ см. **294.** Болмайды. **295.** ≈ 82°.Параллелограмның ауданын екі тәсілмен өрнектеп, оның биіктіктерінің қатынасын табыңдар. **296.** 60°. **297.** ≈ 36°, ≈ 23°, ≈ 36°. **298.** 75°; ≈ 118 м. **299.** а) ≈ 3,1 дм; ә) ≈ 5,8 дм. **300.** а) $4\frac{8}{13}$ см; ә) ≈ 76°. **301.** $5{,}4\sqrt{3}$ дм^2. **308.** 11 м. **309.** 34 см. **310.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{2}$. **311.** ≈ 55°. **312.** а) 30°, 30°; ә) 45°. **313.** а) $\frac{120\sqrt{2}}{13}$ см; ә) $\frac{40\sqrt{2}}{13}$ см. **314.** 5 дм, 3 дм. **315.** Қимасы – тікбұрышты трапеция, ауданы 18 см^2. **316.** 25 дм^2. **317.** 3 дм, 4 дм, 5 дм. $\Delta AA_1C \sim \Delta CB_1B$ болатынын анықтаңдар, мұндағы A_1 мен B_1, сәйкесінше, A және B нүктелерінен екіжақты бұрыштың қырына түсірілген перпендикулярлардың табандары. **318.** $|\cos\angle(AC;\ BM)| = \cos\angle CAM$ болатынын анықтаңдар. **319.** а) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. Ізделінді қима – POK үшбұрышының OM биіктігін қамтитын теңбүйірлі үшбұрыш болатынын анықтаңдар, мұндағы O – табан диагональдарының қиылысу нүктесі, K – DC-ның ортасы. ә) $\frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$. Қимасы – бесбұрыш, ол пирамида биіктігінің ортасынан өтіп, AP-ға параллель, $N \in PC$, $T \in AC$ болатын $NT = \frac{3}{4}a$ кесіндісін және пирамида биіктігінің ортасынан өтіп, BD-ға параллель, $L \in PB$, $E \in PD$ болатын $LE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ кесіндісін қамтиды. **320.** Үшбұрыш теңсіздігін және $m < n < k$ болса, $m < k$ болады қасиетін пайдаланыңдар. **322.** Болмайды. **323.** $2\sqrt{3}$ м. **324.** $h\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta}$. **325.** 1 м. **327.** Жоқ. **328.** ≈ 73°. **329.** ≈ 35°. **331.** а) ≈ 28°. Параллелепипедтің BB_1D_1 жазықтығымен қимасы – BB_1D_1D тіктөртбұрышы, демек, BD – көрсетілген екіжақты бұрыштың қыры. $\angle O_1OC_1$ осы екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы болатынын анықтаңдар, мұндағы O_1 мен O, сәйкесінше, $A_1B_1C_1D_1$ мен $ABCD$ табандары диагональдарының қиылысу нүктелері. ә) ≈ 56°. **332.** Ақиқат. **333.** а) Үш; ә) екі. **334.** $0{,}5(m+n)(p+q)$. **335.** а) 25°, 130°, 25°; ә) $2\sqrt{13}$ м. **336.** а) Ақиқат емес; ә) үш. **337.** AA_1C_1C және

BB_1D_1D тіктөртбұрыш болатынын анықтаңдар, әрі қарай түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісін және тең көлбеулер мен олардың проекцияларының қасиетін пайдаланыңдар. **338.** а) Болмайды, мысалы $a = b = c = 1$ болатын параллелепипед, $\angle BAD = 60°$, $\angle B_1BD = 120°$ тікбұрышты емес; ә) болады. **339.** $4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **340.** 75 см^2. Көрсетілген қима қабырғалары AD және AM болатын тіктөртбұрыш екенін дәлелдеңдер, мұндағы $AM \perp A_1B$ және $M \in BB_1$. **341.** 80 см^2. **342.** а) ΔBDD_1-ді қарастырыңдар, оның DO мен D_1F медианалары M нүктесінде қиылысады. Пифагор теоремасына кері теорема бойынша ΔMDF тікбұрышты екенін анықтаңдар. ә) 1 : 2, D нүктесінен бастап есептегенде. **343.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Кубтың BA_1D жазықтығымен қимасын салыңдар, сонда B_1D_1 кесіндісінің ортасындағы O нүктесінен осы жазықтыққа жүргізілген перпендикулярдың ұзындығы ізделінді қашықтық болады. Соны дәлелдеңдер. **344.** 2 см. O мен O_1 нүктелері BD мен B_1D_1 диагональдарының орталары болсын. OO_1M үшбұрышының O_1H биіктігі O_1 нүктесінен BDM жазықтығына жүргізілген перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер. **345.** а) 60°; ә) 60°. **346.** $\frac{a^2}{\cos\varphi}$. **347.** $ch \cdot \cos\varphi$. **348.** $0{,}5mn \cdot \cos\varphi$. **349.** $\approx 39°$. **350.** а) Мүмкін; ә) мүмкін; б) мүмкін емес. **351.** а) Мүмкін емес; ә) мүмкін. **352.** ә) Есептің шешімі болмайды. **353.** а) 56 м^2; ә) $\approx$ 26 м^2. **354.** а) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$; ә) $a^2\sqrt{2}$; б) $2a^2$; в) $\frac{a^2}{\cos\varphi}$. **355.** $\frac{72\sin\alpha + 24}{\cos\alpha}$. **356.** а) $170\sqrt{3}$ дм^2; ә) $(150\sqrt{2} + 210)$ дм^2; б) $(300 + 210\sqrt{3})$ дм^2; в) $\frac{150 + 210\sin\varphi}{\cos\varphi}$ дм^2. **357.** $\frac{C}{2}$ және $\frac{H}{2}$ бұрыштарының синустарын салыстырыңдар. **358.** а) Мүмкін; ә) егер α трапеция диагональдарының арасындағы бұрыш болса және $72° < \alpha < 90°$. **359.** $7\sqrt{6}$ см^2. **360.** $\frac{512\sqrt{3}}{3}$ дм^2. **361.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\varphi}$. **362.** $\approx 20{,}5$ см^2. **363.** $0{,}25\sqrt{95}$ дм^2. **364.** $\frac{4h^2\cos^2\beta}{\sin\alpha}$. **365.** Кіші α бұрышымен тиімдірек. Көлбеулік бұрышы 45° болатын шатырға көлбеулік бұрышы 15° болатын шатырға қарағанда $\approx 3{,}75$ м^2 материал артық жұмсалады. **366.** а) 16 см; ә) $\approx 83°$. **367.** 120°. **368.** $\approx 69°$. **369.** $9\sqrt{2}$ см^2. **370.** $0{,}4\sqrt{7}$ дм; 1,4 дм. **371.** а) 90°, ΔABC тікбұрышты болатынын анықтап, үш перпендикуляр туралы теореманы пайдаланыңдар; ә) 90°, екі жазықтықтың перпендикулярлық белгісін қолданыңдар. **372.** 60°. **373.** а) $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$; ә) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **374.** 2). **375.** 4). **376.** 1). **377.** 2). **378.** 1). **379.** 4). **380.** 5). **381.** 3). **382.** 5). **383.** 4). **384.** 2). **385.** 3). **386.** 1).

387. 1). **388.** 5). **389.** 3). **390.** 4). **391.** $\frac{np}{m}$. **392.** $\approx 52°$. **394.** а) AB мен BC қабырғаларының арақашықтығы $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$-ге, AD мен DC қабырғаларының арақашықтығы $\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)$-ге тең; ә) $\approx 41°$, берілген түзулер ромбының жазықтығымен α-ға тең бұрыштар құрайтынын дәлелдеңдер, мұндағы $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **395.** 4 см. **396.** $4\sqrt{2}$ см. **397.** $60°$. **398.** $\frac{1}{14}$. **399.** $45°$. **400.** а) $(x; 0; 0)$; ә) $(0; y; 0)$; б) $(0; 0; 0)$. **401.** а) D, K, N; ә) E; б) B, E, N. **402.** $A_x(12; 0; 0)$, $A_y(0; 0; 0)$, $A_z(0; 0; -\sqrt{5})$. **403.** а) $A_x(4; 0; 0)$, $A_y(0; -2; 0)$, $A_z(0; 0; -6)$; ә) $A_{xy}(4; -2; 0)$, $A_{yz}(0; -2; -6)$, $A_{xz}(4; 0; -6)$. **405.** $M(0; 4; 4)$. **406.** $M(5; 5; 5)$. **407.** а) $A(2; 0; 0)$, $B(-2; 0; 0)$, $C(-2; 4; 0)$, $D(2; 4; 0)$, $A_1(2; 0; 4)$, $B_1(-2; 0; 4)$, $C_1(-2; 4; 4)$, $D_1(2; 4; 4)$; ә) $A(2\sqrt{2}; 0; 0)$, $B(0; -2\sqrt{2}; 0)$, $C(-2\sqrt{2}; 0; 0)$, $D(0; 2\sqrt{2}; 0)$, $A_1(2\sqrt{2}; 0; 4)$, $B_1(0; -2\sqrt{2}; 4)$, $C_1(-2\sqrt{2}; 0; 4)$, $D_1(0; 2\sqrt{2}; 4)$. **408.** Егер $BA\subset Ox$, $BC\subset Oy$, $BB_1\subset Oz$ болса, онда $A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $D(2; 2; 0)$, $A_1(2; 0; 2)$, $B_1(0; 0; 2)$, $C_1(0; 2; 2)$, $D_1(2; 2; 2)$ болады. **410.** $P = 12$ бірл., $S = 6$ кв. бірл. **411.** а) xOz және yOz жазықтықтарының арасындағы екіжақты бұрышты қақ бөлетін жазықтықта. **412.** 1) $OM = 5$; 2) $M_1(3; 4; 5)$, $M_2(3; 4; -5)$. **413.** а) $A_1(-5; 0; 2)$; ә) $A_2(-5; 0; -2)$. **414.** Егер $DA\subset Ox$, $DC\subset Oy$, $DD_1\subset Oz$ болса, онда $A(1; 0; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $A_1(1; 0; 1)$, $B_1(1; 1; 1)$, $C_1(0; 1; 1)$, $D_1(0; 0; 1)$. **415.** $C(0; 3\sqrt{3}; 0)$, $D(0; \sqrt{3}; 2\sqrt{6})$. **416.** $A(-\sqrt{3}; -1; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(\sqrt{3}; -1; 0)$, $D(0; 0; 2\sqrt{2})$. **417.** $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ кв. бірл. Табаны ABC және төбесі O нүктесінде болатын тетраэдрді қарастырыңдар. **418.** а) және ә) есептерінің 8-ден шешімі бар. Мысалы, а) $M(-4; 4; -4)$; ә) $M(2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$. Қалған шешімдерін көрсетіңдер. **419.** а) 5; ә) 4; б) 3. **420.** а) $7\sqrt{5}$; ә) $z = 2$. **421.** 6. **422.** $\approx 3{,}2$. **423.** $(-2; -11; 6)$. **424.** а) Ақиқат емес; ә) ақиқат. **425.** 5. **426.** 3. **427.** а) $D(0; 7; 14)$; ә) 5. **428.** а) және ә) болады. Мынаны дәлелдеу жеткілікті: а) AC мен BD диагональдарының орталары беттеседі; ә) MK мен NL диагональдарының орталары беттеседі және $MN = NK$. **429.** а) $M(-1; 0; 0)$; ә) $D(-1; 1; 0)$. **430.** а) $z = 0$; ә) $x = 0$ және $y = 0$ болатынын дәлелдеу жеткілікті. **431.** $AB = \sqrt{26}$, $BC = AC = 7$, $AM = \frac{\sqrt{101}}{2}$. **432.** $0{,}5\sqrt{6}$. **433.** Барлық медианалары $\sqrt{6}$-ға тең. ΔMKP-ның теңқабырғалы, қабырғасы $2\sqrt{2}$-ге тең болатынын анықтаңдар. **434.** а) Мысалы, $A(5; 3; 1)$, $B(2; 1; 0)$. Өз шешу нұсқасын ұсыныңдар. **435.** а) 4; ә) 5. Берілген нүктелер тікбұрышты параллелепипедтің төбелері болатынын анықтаңдар. **436.** а) $12\sqrt{3}$.

437. а) Доғалбұрышты; ә) тікбұрышты; б) сүйірбұрышты. **438.** $C(0;\ 0;\ 4)$. **439.** $(0;\ 3;\ 5)$, 14. Берілген нүктелер бір жазықтықта жататынын анықтаңдар. **440.** а) $(1;\ 1;\ 1)$, 18; ә) $\left(0;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$, $3\frac{1}{3}$. **441.** Болмайды, неге екенін түсіндіріңдер. **443.** а) $\overrightarrow{AB_1}$; ә) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{DB}$; в) $\overrightarrow{CD_1}$. **445.** а) $\overrightarrow{CD}$; ә) $\overrightarrow{AN}$; б) $\overrightarrow{KF}$; в) $\vec{0}$. **446.** ә) AMD мен BNC үшбұрыштарының теңдігін пайдаланыңдар. **447.** а) $\vec{0}$; в) $\overrightarrow{AC}$. **448.** а) $\overrightarrow{D_1C}$; ә) $\overrightarrow{AD}$. **452.** ә) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BC}$. **454.** ә) $-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$; в) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$. **455.** а) $\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$. **456.** Бар болады, ол берілген параллелограмм диагональдарының қиылысу нүктесі. **458.** а) $\left(5\frac{1}{3};\ -1;\ -2\frac{2}{3}\right)$; ә) $\left(3\frac{7}{8};\ 1\frac{5}{8};\ -5\right)$. **460.** а) $\overrightarrow{AB}(7;\ -18;\ 14)$. **461.** а) $(0;\ 11;\ -15)$; ә) $(-1{,}5;\ -5{,}25;\ 7)$. **462.** а) және ә) тең; б) тең емес. **463.** а) $x=-11,\ y=0,\ z=8$; ә) $x=-7,\ y=-5,\ z=8$. **464.** а) $5\sqrt{2}$; ә) 3. **465.** а) ±12; ә) $\pm5\sqrt{3}$. **466.** а) $(6;\ 2;\ -1)$; ә) $(3;\ 11;\ -13)$; б) $(3;\ -17;\ 22)$; в) $(-6;\ -2;\ 1)$. **467.** а) 5; ә) $\sqrt{13}$; б) 6; в) 12. **468.** а) $\approx 25{,}0$; ә) $\approx 25{,}02$. **471.** $\frac{2}{7}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{7}\overrightarrow{CB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{CD}$. **473.** $\overrightarrow{MC_1}=\overrightarrow{BC_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BD_1}$. **474.** а) $\overrightarrow{MC_1}(\sqrt{5};\ -1;\ 4)$; ә) $\overrightarrow{O_1N}\left(\frac{\sqrt{5}}{2};1;\ -4\right)$. **475.** $(-7{,}5;\ 6;\ -10{,}5)$. **476.** $(0;\ 1;\ -1)$. **477.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. **478.** ә) $\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$; б) $\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$; в) $\frac{1}{12}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$. **479.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ болатынын анықтаңдар. **483.** а) және ә) ақиқат. Бір нүктеден салынған $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бір түзудің бойында жататынын анықтаңдар. **484.** Коллинеар, себебі $\vec{a}=-\frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{b}=k\vec{c}$, $\vec{a}=p\vec{c}$. k мен p-ны табыңдар. **486.** Шексіз көп, мысалы, $\vec{a}(-5;\ 10;\ 0)$ немесе $\vec{a}\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};0\right)$. **487.** а) -4; ә) x-тің ондай мәндері жоқ. **488.** Мысалы, а) $(7;\ 9;\ 11)$; ә) $(1;\ 5;\ -7)$. **489.** а) $\vec{b}\left(-\frac{2}{7};\frac{6}{7};\frac{3}{7}\right)$. **490.** а) $\vec{a}(2{,}4;\ -3{,}2;\ 3)$ немесе $\vec{a}(-2{,}4;\ 3{,}2;\ -3)$. **492.** а) мен ә) жағдайында. **493.** Тиісті. **494.** $\vec{a}$ мен $\vec{d}$. **499.** а) $n=-\frac{3}{2}$, $m=4$; ә) берілген векторлар коллинеар бола алмайды (неге екенін түсіндіріңдер). **500.** а) $\sqrt{2}$; ә) $3\sqrt{6}$; б) $\sqrt{26}$; в) $\sqrt{6}$. **501.** 6. **502.** $x=y=z=1$. Егер A, B, C, D нүктелері бір жазықтықта жатпаса. **503.** ә) $\overrightarrow{PM}=0\cdot\overrightarrow{PA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$; б) $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{PA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$. **504.** б) $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AA_1}$. **505.** $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1}$, $|\overrightarrow{OM}|=9$. **506.** Болмайды. **507.** Болады.

508. $x = -1$, $y = 2$. **509.** $\overrightarrow{BC}$ мен $\overrightarrow{BA}$ векторлары коллинеар болатынын дәлелдеңдер. **510.** $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CA}$ және $\overrightarrow{CB}$ векторлары компланар болатынын дәлелдеңдер. **511.** $\vec{p}(-1; 2; -2)$, $\vec{q}(1; -2; 2)$. **512.** $\overrightarrow{OM}$ және $\overrightarrow{ON}$ векторларын, сәйкесінше, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ және $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ векторлары арқылы өрнектеңдер және олардың айырымын табыңдар. **513.** 3. **514.** $M(2; 4; 6)$ болатынын анықтаңдар. Ол үшін O нүктесі центрі болатын тікбұрышты координаталар жүйесін $OA \subset Ox$, $OB \subset Oy$, $OC \subset Oz$ болатындай етіп таңдап алыңдар және берілген теңдіктегі $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ векторларын O нүктесі басы болатын векторлардың айырымымен алмастырып, оны түрлендіріңдер. **515.** а) $\frac{1}{2}$; ә) $-\frac{1}{2}$; б) 0; в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **516.** а) 1; ә) -1; б) 0; в) 1. **517.** а) 4; ә) 12; б) 4; в) -4. **518.** а) -9; ә) 25. **519.** а) 4; ә) ± 5. **520.** а) 18; ә) 9. **521.** а) 8,5; ә) 8,5. **522.** а) $\frac{4}{9}$; ә) 0,48. **523.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **524.** $-\frac{6}{7}$. **525.** $\approx 69°$. **526.** $2\frac{2}{3}$. **527.** а) ± 2; ә) m-нің ондай мәндері жоқ. **528.** $-0,48$. **529.** 12,5. **530.** $\approx 143°$. **531.** 0. **532.** -32. **533.** Берілген жазықтықта кез келген $\vec{m}$ векторын осы жазықтықтың коллинеар емес екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары бойынша жіктеуін пайдаланыңдар. **534.** 5 дм. **535.** $0,5\sqrt{497}$. **536.** а) $\approx 125°$; ә) 90°; б) 120°; в) 60°. **537.** а) 135°; ә) 45°. **538.** 1) $\overrightarrow{BD}$ векторын $\overrightarrow{CD}$ мен $\overrightarrow{CB}$ векторлары бойынша жіктеңдер және $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BB_1}$ көбейтіндісін табыңдар; 2) $a^2\sqrt{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{17}}{2}$. **539.** $\overrightarrow{MN}$ векторын $\overrightarrow{AC}$ мен $\overrightarrow{BD}$ векторлары арқылы өрнектеңдер және $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| < |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}|$ қасиетін пайдаланыңдар. **540.** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ және $\overrightarrow{CA}$ векторларын $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ және $\overrightarrow{DC}$ векторларының екеуінің айырымымен алмастырыңдар. **542.** а) $\arccos\frac{1}{\sqrt{406}}$; ә) $\arccos\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{77}}$; б) $\arccos\frac{29}{61}$. **545.** б) $x^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 16$. **546.** Берілген барлық теңдеулер – сфераның теңдеуі. **547.** а) мен ә) тапсырмаларында $R = 4$ болатынын анықтаңдар. **548.** (2; 2; 1) немесе (2; 2; –1). **549.** ә) $4y - 5z = 0$; б) $y = 0$. **551.** а) Жазықтықтар беттеседі; ә) параллель. **552.** а) $x + 2y = 0$; ә) $5y - z = 0$. **553.** $x - 2y + 3z - 18 = 0$. **554.** а) $x + 8y - z - 3 = 0$; ә) $15x + 10y - 17z = 0$. **555.** а) (0; 5; 3); ә) (–7; 2; 0). **556.** ә) және в) теңдеулері. **557.** а) $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 + (z + 3)^2 = 49$ немесе $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 + (z - 3)^2 = 49$; ә) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$. **558.** а) $2x + 3y - 1 = 0$; ә) $2x + y - z - 3 = 0$. **559.** $\frac{z_1}{y_1}y - z = 0$. **560.** а) Қиылысады, мысалы, $\left(0; -\frac{1}{10}; \frac{3}{35}\right)$, $\left(1; -\frac{3}{5}; \frac{33}{35}\right)$; ә) жазықтықтар параллель. **561.** Жазықтықтардың бір ортақ нүктесі бар: (1; 2; –1). **562.** $\arccos\frac{2}{\sqrt{29}}$. Жазықтықтардың арасындағы бұрыштың косинусы олардың нормаль векторларының арасындағы бұрыш косинусының модуліне тең. **563.** $4x + 3y - 2z - 8 = 0$. ΔABC-ның медианаларының қиылысу M_1 нүктесінің координаталарын табу үшін $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ формуласын пайдаланыңдар, мұндағы $O(0; 0; 0)$. **564.** Тиісті емес. PKN жазықтығының теңдеуі, мысалы $x : \frac{5}{2} + y : \left(-\frac{10}{3}\right) + z : 5 = 1$. **565.** а) $5y - 4z = 0$; ә) $20x + 15y + 12z - 120 = 0$. **566.** ә) $\vec{r}\,(5; -2; -4)$; б) $\vec{r}\,(0; 2; -2)$. **567.** ә) $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{-2}$. **568.** а) (–12; 0; –7) нүктесінде қияды; ә) $\left(-\frac{8}{3}; 0; -2\right)$ нүктесінде қияды. **569.** ә) $\frac{x}{4} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-3}{-2}$. **570.** а) Өтеді; б) өтпейді. **571.** а) (0; 8,5; 5), $\left(-5\frac{2}{3}; 0; -6\frac{1}{3}\right)$, (–2,5; 4,75; 0); ә) (0; –5,5; 2,25), (11; 0; 16), (–1,8; –6,4; 0). **572.** а) (–3; –10; –10); ә) (6; 3,5; –1). **573.** а) $\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{-1}$; ә) $\frac{x}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z-1}{-1}$. **574.** $\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = t, \\ z = 2. \end{cases}$ **575.** $\approx 38°$. **576.** а) $4x + 3y + 2z + 1 = 0$; ә) $4x + 3y - 1 = 0$. **577.** а) $AB \parallel \alpha$; ә) $AB \perp \alpha$; б) $AB \subset \alpha$. **578.** а) $\begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = -2t. \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 4t - 2. \end{cases}$ **579.** а) $\begin{cases} x = 5t + 1, \\ y = -8t + 1, \\ z = 7t - 1. \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x = -2t + 1, \\ y = 1, \\ z = -2t - 1. \end{cases}$ **580.** а) AB мен CD айқас түзулер; ә) AD мен BC айқас түзулер. **581.** Мысалы, xOy жазықтығына параллель түзудің бағыттаушы векторының координаталары: $(m; n; 0)$. **582.** Жазықтықтардың жалғыз ортақ нүктесі бар, (2; 3; –2). **583.** $\frac{x}{22} = \frac{y}{20} = \frac{z}{13}$. **584.** $x \in R$, $y = -5x$, $z = 7x + 1$; $\frac{x}{-1} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{-7}$. **585.** 1) $z = 1$, $y = 409$, $x = 400$. 2) Есептің шарты бойынша құрылған екі теңдеулер жүйесі түзудің теңдеуін береді. Есептің шешуі – түзудің $x = 400$, $y + z = 410$ теңдігі орындалатын бүтін координаталы нүктелер. **586.** 5. **587.** $M\left(\frac{7}{3}; \frac{10}{3}; \frac{13}{3}\right)$. **588.** $m = \frac{5}{8}$, $n = \frac{24 \pm 5\sqrt{47}}{8}$. **589.** 14 кв. бірл. **590.** $\vec{c}\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. **591.** $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$. **592.** а) $2\sqrt{19}$; ә) $2\sqrt{39}$. **593.** 45°. **594.** а) $\frac{1}{4}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MC}$; ә) $\frac{1}{6}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{MC}$. **595.** 1) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$. **596.** $x = -1$,

$\frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{4}$. **597.** а) $3x + y + 4z - 13 = 0$; ә) $3x + y - 4z + 19 = 0$. Жазықтықтар қиылысады. **598.** $\frac{x}{12} + \frac{y}{-12} + \frac{z}{5} = 1$. **599.** $\vec{m}(2;\ 1;\ -1)$. **600.** $\vec{m}(-4;\ -6;\ 12)$. **601.** $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$. **602.** Мысалы, A_1C_1 түзуінің теңдеуі: $\frac{x-4}{-4} = \frac{y}{4}$, $z = 4$. **603.** Ақиқат. **604.** а) Центрі (2; 2; 2) нүктесінде және $R = 5$ болатын сфераны; ә) (2; 2; 2) нүктесін; б) жазықтықты. **605.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$. **606.** а) $\frac{1}{6}$; ә) $-\frac{1}{2}$. **607.** Тетраэдр қырларына D нүктесінен бастап салынған бірлік векторларды пайдаланыңдар. **608.** 2). **609.** 1). **610.** 3). **611.** 5). **612.** 4). **613.** 5). **614.** а) (10; –5; 20); ә) (–5; –2; 14). **615.** $17\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$. **616.** ± 3. **617.** а) $m = 12$, $n = -6$; ә) m мен n-нің кез келген мәндерінде. **618.** $n = -1$ немесе $n = 2$ болғанда. **619.** 16. **620.** Болады. **621.** Болады. **622.** $(x - 0{,}5)^2 + (y - 0{,}5)^2 + (z - 0{,}5)^2 = 0{,}75$. **623.** (0,5; 4,25; 0). **624.** а), ә) және б) ақиқат. **625.** Егер ол нүкте берілген түзулер жатқан жазықтыққа тиісті болмаса. **626.** Болады. **627.** MA мен BN түзулері бір жазықтықта жатыр және $MA \parallel BN$. Егер осы жазықтықта N нүктесі арқылы $NK \perp MN$ түзулерін жүргізсе, онда $KNBA$ параллелограмы мен теңбүйірлі ΔMKN шығады. **628.** Егер AB кесіндісі берілген жазықтыққа перпендикуляр болмаса және оны C нүктесінде қиса, онда BC мен AC көлбеулерінің теңдігінен олардың осы жазықтықтағы B_1C мен A_1C проекцияларының теңдігі шығады. **629.** $8\sqrt{2}$ см. **630.** 10 см, 15 см. **631.** 10 см. ADO бұрышы тік болатынын анықтаңдар. **632.** $7\sqrt{6}$ см. **634.** Ақиқат. **635.** $m = -2$ болғанда. а) Болмайды; ә) болады. **636.** а) $\sqrt{51}$; ә) 3. **637.** 8 бөлікке. **638.** а) 45°; ә) ≈ 68°. **639.** $\frac{1}{3}$. **640.** $5\sqrt{2}$ см. **641.** Ақиқат. $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{BC}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар. **642.** $\left(0; 3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$. AA_1 мен BB_1 медианалары M нүктесінде қиылысатын болсын. $\overrightarrow{AA_1}$ мен $\overrightarrow{AM}$ векторларының координаталарын табыңдар. **643.** а) Қима – қабырғасы $\frac{2}{3}a$ болатын теңқабырғалы үшбұрыш; ә) $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$. **644.** ≈ 80°. **645.** $\frac{10\sqrt{14}}{7}$. **646.** 3. **647.** 45°. **648.** $a(\sqrt{2} - 1)$. **649.** $\frac{1}{2}$. **650.** $\frac{a\sqrt{6}}{5}$. Бұл айқас түзулердің арақашықтығы MNK мен ABC параллель жазықтықтарының арақашықтығына тең. **651.** $\frac{1}{3}$ дм. $AB_1 \perp (BCD_1A_1)$ болатынын дәлелдеңдер, сонда AB_1 кесіндісінің ортасындағы O нүктесінен A_1M түзуіне жүргізілген перпендикуляр A_1M және AB_1 түзулерінің ортақ перпендикуляры болады. **652.** 5). **653.** 3). **654.** 1). **655.** 3). **656.** 2). **657.** 4). **658.** 2). **659.** 4). **660.** 5). **661.** 1).

ПӘНДІК КӨРСЕТКІШ

ҚОСЫМША ӘДЕБИЕТ

1. Бадаев С. А., Досанбай П. Т., Мажитова А. Д., Таласбаева Ж. Т. Аналитикалық геометрия. Есептер жинағы: оқу құралы. – Алматы: Қазақ университеті баспасы, 2016.

2. Глейзер Г. И. История математики в школе: 9–10 классы. – М.: Просвещение, 1981.

3. Гусев В., Қайдасов Ж., Есенғазин Е. Геометрия есептер жинағы. Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқу құралы. – Алматы: Мектеп, 2014.

4. Сергеев И. Н., Олехник С. Н., Гашков С. Б. Примени математику. – М.: Наука, 1990.

5. Солтан Г. Н., Солтан А. Е., Жумадилова А. Ж. Геометрия: жалпы білім беретін мектептің 9-сынып оқушыларына арналған оқулық + CD. – Көкшетау: Келешек-2030, 2019.

6. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.

Қосалқы беттердегі иллюстрацияларда пайдаланылған фотосуреттер тізімі

1. «Каскад» тұрғын үй кешені, Нұр-Сұлтан қ. – 15 б.
2. Батыс Қазақстан облыстық тарихи-өлкетану музейі, Орал қ. – 65 б.
3. Қожа Ахмет Ясауи кесенесі, Түркістан қ. – 137 б.

СОЛТАН Геннадий Николаевич
СОЛТАН Алла Евгеньевна
ЖУМАДИЛОВА Аманбала Жумадиловна

Геометрия

**Жалпы білім беретін мектептің
жаратылыстану-математика бағытындағы
10 (1-б.), 11 (2-б.) сыныптардың оқушыларына арналған**

ОҚУЛЫҚ

Екі бөлімді
10-сынып (1-б.)

Редакторы	С. Ш. Алибеков
Техникалық редакторы	Р. Н. Максутов
Суретшісі	А. Б. Жусупов
Мұқаба дизайнері	Е. Е. Велькер
Корректорлары	Р. С. Какаманова
	С. А. Абденова

Коды **5**13066

ИП Келешек-2030 баспасы
Қазақстан Республикасы,
020000, Көкшетау қ.
Баспа кеңсесі: Абай к-сі, 112а,
тел.: 8 (7162) 72-29-43 (қабылдау бөлімі),
8 (7162) 44-18-74, +7 708 444 18 74,
ұялы тел.: +7 702 781 06 78, +7 705 745 09 75.
http://www.keleshek-2030.kz, E-mail: torg@keleshek-2030.kz

Оглавление