Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

ГЕОМЕТРИЯ

*Жалпы білім беретін мектептің
қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы
10 (1-б.), 11 (2-б.) сыныптардың
оқушыларына арналған*

ОҚУЛЫҚ

*Екі бөлімді
10-сынып (1-б.)*

Қазақстан Республикасының
Білім және ғылым министрлігі ұсынған

KELESHEK
2030
КӨКШЕТАУ

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151я72
С64

Солтан Г. Н.
С64 **Геометрия.** Жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы 10 (1-б.), 11 (2-б.) сыныптардың оқушыларына арналған оқулық. Екі бөлімді. 10-сынып (1-б.) / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Көкшетау: Келешек-2030 баспасы, 2020. – 112 б.

ISBN 978-601-317-514-0
ISBN 978-601-317-515-7

Оқулықтың электрондық нұсқасы: http://keleshek-2030.kz/books/geom_ogn_10kz.php

Ұсынылып отырған оқулық Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилованың авторлығымен «Келешек-2030» баспасында білім берудің жаңартылған мазмұндағы оқу бағдарламасы бойынша әзірленген «Геометрия» оқулықтарының топтамасын жалғастыруда. Оқулық жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы сыныптардың оқушыларына арналған және екі бөлімнен тұрады: 10-сынып – 1-бөлім, 11-сынып – 2-бөлім.

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151я72

ISBN 978-601-317-515-7
ISBN 978-601-317-514-0

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз ... 4

Планиметрия курсынан анықтамалық материал ... 5

Стереометрияға кіріспе. 7–9-сыныптардағы геометрия курсын қайталау ... 9

I. Стереометрия аксиомалары. Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтардың өзара орналасуы ... 12
- 1. Стереометрия аксиомалары және олардың салдарлары ... 13
- 2. Кеңістіктегі екі түзудің өзара орналасуы ... 18
- 3. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы. ... 25
- 4. Екі жазықтықтың өзара орналасуы ... 29

II. Кеңістіктегі бұрыш пен арақашықтық ... 36
- 5. Кеңістіктегі түзулердің арасындағы бұрыш. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы ... 37
- 6. Перпендикуляр және көлбеу ... 44
- 7. Үш перпендикуляр туралы теорема ... 50
- 8. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш ... 55
- 9. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш ... 59
- 10. Кеңістіктегі арақашықтық ... 65

III. Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі және векторлар ... 72
- 11. Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі ... 73
- 12. Екі нүктенің арақашықтығы. Кесінді ортасының координаталары. Сфераның теңдеуі ... 78
- 13. Кеңістіктегі вектордың координаталары. Векторларды қосу және азайту, векторды санға көбейту ... 84
- 14. Коллинеар және компланар векторлар ... 90
- 15. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі ... 93

10-сыныптағы геометрия курсын қайталау ... 99

Қосымшалар ... 102
- 0°-тан 90°-қа дейінгі бұрыштардың синустары мен косинустарының жуық мәндерінің кестесі ... 102
- 0°-тан 89°-қа дейінгі бұрыштардың тангенсінің жуық мәндерінің кестесі ... 103

Жауаптар мен нұсқаулар ... 104

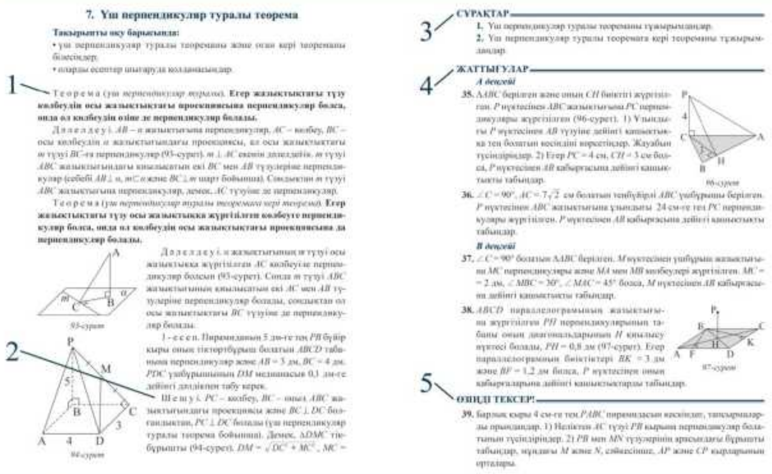
Пәндік көрсеткіш ... 110

Қосымша әдебиет ... 111

АЛҒЫ СӨЗ

Құрметті 10-сынып оқушылары! 7–9-сыныптарда сендер планиметрияны оқыдыңдар, енді стереометрияны оқуға кірісесіңдер. «Стереометрия» сөзі гректің «стереос» – кеңістіктік, көлемдік және «метрео» – өлшеу деген сөздерінен шыққан. Планиметрияда барлық нүктелері бір жазықтықта жататын фигуралар оқытылады. Мұндай фигуралар жазық фигуралар деп аталады. Мысалы, кесінді, бұрыш, үшбұрыш, дөңгелек. *Геометриялық фигура деп кез келген нүктелер жиынын айтады.* Стереометрияда қарастырылатын *барлық нүктелер* жиыны *кеңістік* деп аталады. 10-сыныптың геометрия курсында стереометрия аксиомаларын, түзулер мен жазықтықтардың өзара орналасуының қасиеттерін, кеңістіктегі бұрыштар мен арақашықтықтарды өлшеуді меңгересіңдер, сондай-ақ тікбұрышты координаталар жүйесі және векторлар туралы білімдеріңді кеңейтесіңдер.

Аталмыш оқулық оқу бағдарламасының әрбір тақырыбы бойынша сабақтарға арналған теориялық және практикалық материалдан тұрады. Ұғымдардың анықтамалары, аксиомалар, теоремалар мен олардың салдарлары арнайы қаріппен (1) ерекшеленген. Әр тақырыпта типтік есептердің шешімдері (2) мен теорияны меңгеру деңгейін тексеруге арналған бақылау сұрақтары (3) ұсынылған. Практикалық біліктілік пен дағдыларды қалыптастыруға арналған күрделілігі бойынша екі деңгейге (А және В) бөлінген жаттығулар (4) берілген. Әр бөлімнің соңында «Өзіңді тексер!» айдарында тапсырмалар (5) мен тарихи мағлұматтар ұсынылған. Жаттығуларға нұсқаулар мен жауаптар берілген.

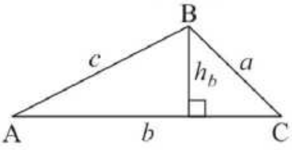


Сәттілік тілейміз! *Авторлар*

ПЛАНИМЕТРИЯ КУРСЫНАН АНЫҚТАМАЛЫҚ МАТЕРИАЛ

Негізгі формулалар мен теоремалар

Кез келген үшбұрыш



1-сурет

a, b, c – қабырғалар;

$\angle A, \angle B, \angle C$ – оларға қарсы жатқан бұрыштар;

h_b – b қабырғасына жүргізілген биіктік;

S – аудан; p – жарты периметр;

R – сырттай сызылған шеңбердің радиусы;

r – іштей сызылған шеңбердің радиусы.

Үшбұрыштың MN орта сызығы (2-сурет):

$$MN \parallel AC, MN = \frac{1}{2}AC;$$

$$S = \frac{1}{2}b \cdot h_b; S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\angle A;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

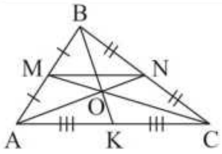
$$S = p \cdot r, \quad S = \frac{abc}{4R}.$$

Синустар теоремасы:

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

Косинустар теоремасы:

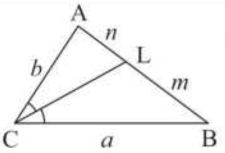
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\angle A.$$



2-сурет

Үшбұрыштың медианалары:

$$\frac{AO}{ON} = \frac{BO}{OK} = \frac{CO}{OM} = \frac{2}{1}.$$



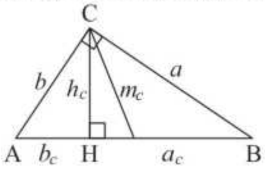
3-сурет

Үшбұрыштың биссектрисасы:

$$\frac{n}{m} = \frac{b}{a}.$$

$$CL = \sqrt{ab - mn}.$$

Тікбұрышты үшбұрыш



4-сурет

a, b – катеттер; c – гипотенуза;

a_c, b_c – катеттердің гипотенузадағы проекциялары;

m_c – гипотенузаға жүргізілген медиана;

h_c – гипотенузаға жүргізілген биіктік.

Тригонометриялық формулалар:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha;$ $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$

$$S = \frac{1}{2}ab; \qquad S = \frac{1}{2}c \cdot h_c;$$

$$m_c = \frac{1}{2}c = R; \qquad r = \frac{1}{2}(a + b - c);$$

$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}, \qquad a = \sqrt{c \cdot a_c}, \qquad b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

Пифагор теоремасы: $a^2 + b^2 = c^2$.

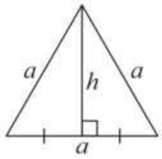
Тікбұрышты үшбұрышты шешу:

$$a = c \cdot \sin\angle A; \qquad b = c \cdot \cos\angle A;$$

$$a = b \cdot \mathrm{tg}\angle A; \qquad b = a \cdot \mathrm{ctg}\angle A.$$

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Дұрыс үшбұрыш



5-сурет

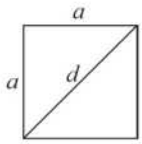
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

$$r = \frac{1}{3}h;$$

$$R = 2r.$$

Шаршы



6-сурет

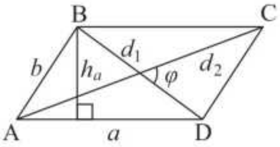
$$d = a\sqrt{2};$$

$$S = a^2; \quad S = \frac{1}{2}d^2;$$

$$r = \frac{1}{2}a;$$

$$R = \frac{1}{2}d.$$

Параллелограмм



7-сурет

a, b – сыбайлас қабырғалар;

d_1, d_2 – диагональдар;

φ – диагональдардың арасындағы бұрыш;

h_a – a қабырғасына жүргізілген биіктік;

S – аудан.

$$S = a \cdot h_a; \quad S = ab \cdot \sin\angle A;$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi;$$

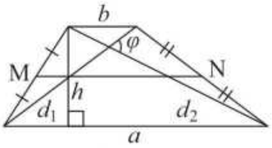
$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Егер $d_1 = d_2$ болса, онда $ABCD$ – тіктөртбұрыш (8, *а*-сурет).

8-сурет

Егер $d_1 \perp d_2$ болса, онда $ABCD$ – ромб (8, *ә*-сурет).

Трапеция



9-сурет

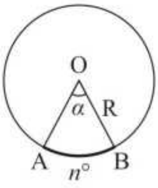
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h; \quad S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi;$$

MN – орта сызық (9-сурет);

MN табандарына параллель және

$$MN = \frac{a+b}{2}.$$

Шеңбер



10-сурет

C – шеңбердің ұзындығы;

S – дөңгелектің ауданы;

l – AB доғасының ұзындығы;

$S_{\text{сект.}}$ – сектордың ауданы;

$n°$ – AB доғасының (AOB центрлік бұрышының) градустық өлшемі;

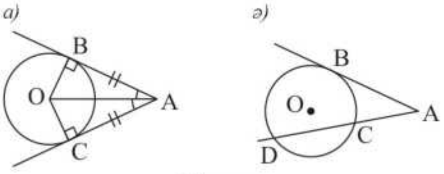
α – центрлік бұрыштың радиандық өлшемі.

$$C = 2\pi R; \quad S = \pi R^2; \quad l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}; \quad l = R\alpha.$$

$$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}; \quad S_{\text{сект.}} = \frac{1}{2}R^2\alpha.$$

а) Шеңберге жанамалардың;

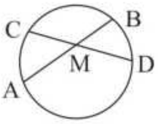
ә) жанама мен қиюшының қасиеттері.



11-сурет

$AB^2 = AD \cdot AC$ (11, *ә*-сурет)

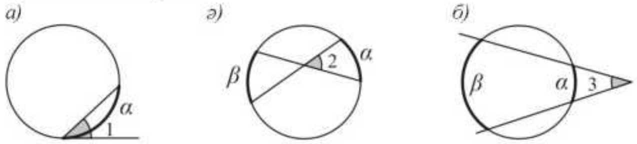
Хордалардың қасиеті



12-сурет

$AM \cdot MB = CM \cdot MD$

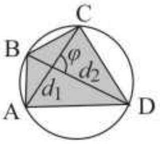
а) Жанама мен хорданың; ә) хордалардың; б) қиюшылардың арасындағы бұрыш.



13-сурет

а) $\angle 1 = \frac{1}{2}\alpha$; ә) $\angle 2 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; б) $\angle 3 = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

Іштей сызылған төртбұрыш



14-сурет

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

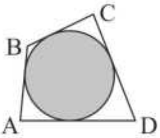
$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$,

мұндағы

d_1, d_2 – диагональдар;

φ – олардың арасындағы бұрыш.

Сырттай сызылған төртбұрыш



15-сурет

$AB + CD = AD + BC$.

$S = rp$,

мұндағы

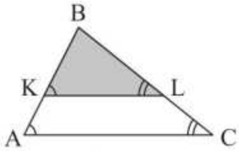
r – іштей сызылған шеңбердің радиусы;

p – төртбұрыштың жарты периметрі.

Ұқсас үшбұрыштар

1) бұрыштары тең;

2) қабырғалары пропорционал.



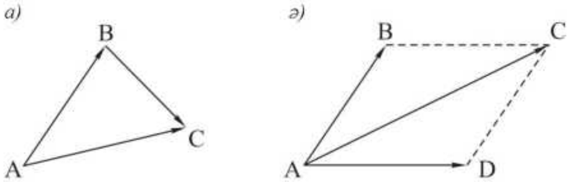
16-сурет

Үшбұрыштың қабырғасына параллель түзу одан берілген үшбұрышқа ұқсас үшбұрыш қияды (16-сурет).

$$\Delta ABC \sim \Delta KBL \Rightarrow \frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KL} = \frac{BC}{BL} = k,$$

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta KBL}} = k, \quad \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KBL}} = k^2.$$

Екі вектордың қосындысы

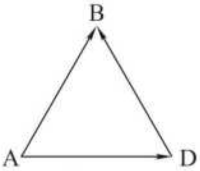


17-сурет

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ үшбұрыш ережесі бойынша;

ә) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ параллелограмм ережесі бойынша.

Екі вектордың айырымы



18-сурет

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

Векторды санға көбейту

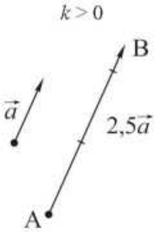
$\vec{a}$ векторының k санына көбейтіндісі деп мына шарттарды қанағаттандыратын $k\vec{a}$ векторын атайды:

1) $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$;

2) $k\vec{a} \parallel \vec{a}$;

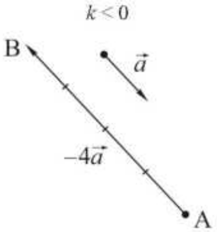
3) егер $k > 0$ болса, онда $k\vec{a}$ мен $\vec{a}$ векторлары бағыттас (19-сурет);
егер $k < 0$ болса, онда $k\vec{a}$ мен $\vec{a}$ векторлары қарама-қарсы бағытталған (20-сурет);

4) егер $\vec{a} = \vec{0}$ немесе $k = 0$ болса, онда $k\vec{a} = \vec{0}$.



19-сурет

$\overrightarrow{AB} = 2{,}5\vec{a}$



20-сурет

$\overrightarrow{AB} = -4\vec{a}$

Бір түзуде немесе параллель түзулерде жататын нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар векторлар деп аталады.

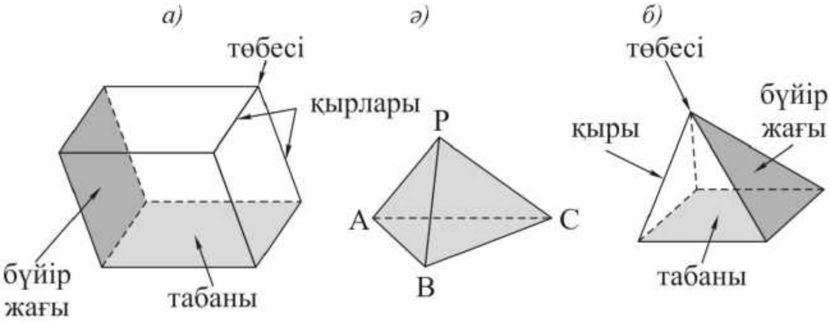
Кез келген $\vec{c}$ векторын коллинеар емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларына тек бір жолмен, $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ түрінде жіктеуге болады, мұндағы x және y – қайсыбір сандар. $\vec{c}$ векторының $\vec{i}$ мен $\vec{j}$ координаталық векторларына $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$ жіктелуіндегі x пен y сандары $\vec{c}$ векторының *координаталары* болады.

СТЕРЕОМЕТРИЯҒА КІРІСПЕ. 7–9-СЫНЫПТАРДАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Кеңістікте әртүрлі *сызықтар, геометриялық денелер* мен олардың қасиеттері қарастырылады. Геометриялық дене туралы түсінікті физикалық денелер береді, мысалы, кірпіш тікбұрышты параллелепипедті, апельсин шарды, Ежелгі Мысырдың пирамидалары пирамида деп аталатын геометриялық денені елестетеді (21-сурет).

21-сурет

Кеңістіктегі фигураларды оқығанда олардың суреттегі бейнелері пайдаланылады. Мысалы, 22, *а*-суретте параллелепипед, 22, *ә*, *б*-суреттерде үшбұрышты және төртбұрышты пирамидалар бейнеленген (фигураның көрінбейтін бөліктері штрих сызықтармен кескінделеді). Осы денелердің барлығы *көпжақтар* деп аталатын фигуралар класының бір бөлігі ғана. Көпжақ – беті оның *жақтары* деп аталатын санаулы көпбұрыштардан тұратын дене. Көпбұрыштардың қабырғалары көпжақтың *қырлары*, ал төбелері көпжақтың *төбелері* деп аталады.



22-сурет

Параллелепипед – 6 жағы бар (22, *а*-сурет), барлық жақтары параллелограмм болатын көпжақ (*тікбұрышты параллелепипедтің* барлық жақтары – тіктөртбұрыштар).

Куб – 6 жағы да шаршы болатын тікбұрышты параллелепипед.

Пирамида – бір жағы *n*-бұрыш, ал қалған *n* жағы төбесі ортақ үшбұрыштар болатын көпжақ (22, *ә*, *б*-суреттер). Үшбұрышты пирамиданы *тетраэдр* деп те атайды (грек тілінен аударғанда төртжақ деген сөз). *Дұрыс тетраэдр* – барлық жақтары дұрыс үшбұрыш болатын тетраэдр.

Үшбұрыштардың теңдіктері мен ұқсастық белгілері бір жазықтықта жататын үшбұрыштар үшін ғана емес, әртүрлі жазықтықтарда жататын үшбұрыштар үшін де орындалатынын айта кетелік.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

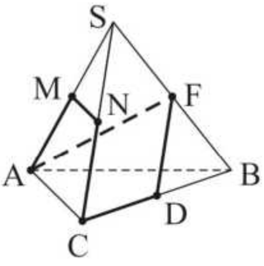
1. Сөйлемдердің қайсысы әртүрлі екі жазықтықта жататын екі үшбұрыш теңдігінің белгісі болады?

а) Егер бір үшбұрыштың үш бұрышы, сәйкесінше, екінші үшбұрыштың үш бұрышына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады;

ә) егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы мен бұрышы, сәйкесінше, екінші үшбұрыштың екі қабырғасы мен бұрышына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады;

б) егер бір үшбұрыштың қабырғасы мен екі бұрышы, сәйкесінше, екінші үшбұрыштың қабырғасы мен екі бұрышына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады;

в) егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы, сәйкесінше, екінші үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады.



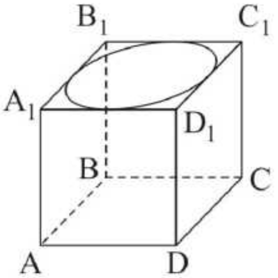
23-сурет

2. *PABC* тетраэдр болсын. Егер: а) $PA = PB = PC$, $AB = BC = CA$; ә) $PA = BC$, $PB = AC$, $PC = AB$ болса, оның жақтарының арасында тең үшбұрыштардың қанша жұбы бар? (Кез келген пирамиданың белгілеуінде бірінші әріп оның төбесі болады.)

3. *SABC* – қыры 8 см-ге тең дұрыс тетраэдр. *M*, *N*, *D*, *F* нүктелері, сәйкесінше, *SA*, *SC*, *CB*, *SB* қабырғаларының орталары. Кеңістіктегі *AMNCDFA* сынық сызығының ұзындығын есептеңдер (23-сурет).

4. Кубтың бір жағына іштей сызылған шеңбердің радиусы 2 см-ге тең (24-сурет). Куб бетінің ауданын (барлық жақтары аудандарының қосындысын) есептеңдер.

5. Дұрыс тетраэдрдің барлық жақтары аудандарының қосындысы $49\sqrt{3}$ см^2. Осы тетраэдр қырының ұзындығын табыңдар.



24-сурет

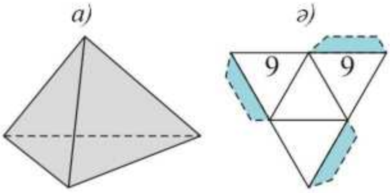
В деңгейі

6. а) $PABC$ – барлық бүйір қырлары өзара тең, ал ABC табаны дұрыс үшбұрыш болатын үшбұрышты пирамида, O нүктесі – табанының центрі. O нүктесін P, A, B, C нүктелерімен қосып, шыққан суреттен барлық өзара тең үшбұрыштарды табыңдар.

ә) Бірдей 6 таяқша берілген. Кеңістікте олардан әр қабырғасы осы таяқшаға тең болатын 4 дұрыс үшбұрыш құрастырса, онда қандай фигура шығады?

7. $SABCD$ – әрбір қыры 1 дм-ге тең төртбұрышты пирамида, O – шаршы болатын $ABCD$ табаны диагональдарының қиылысу нүктесі. SO қашықтығын табыңдар.

8. Қалың қағаздан қыры 9 см-ге тең дұрыс тетраэдрдің (25, *а*-сурет) моделін жасаңдар. 25, *ә*-суретте тетраэдрдің жазбасы көрсетілген, ондағы боялған бөліктер желімдеуге арналған.



25-сурет

9. Тікбұрышты параллелепипедтің табаны – диагоналі 4 см-ге тең шаршы. Параллелепипедтің бүйір жағының ауданы $8\sqrt{3}$ см^2-ге тең болса, оның бүйір жағының диагоналін табыңдар.

10. Қыры 10 см-ге тең ағаш кубтың бүйір жақтарын бояп, оны қыры 2 см болатын кішірек кубтарға бөлді. а) Бір жағы боялған; ә) екі жағы боялған; б) боялған жағы жоқ неше куб шықты?

I. СТЕРЕОМЕТРИЯ АКСИОМАЛАРЫ. КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

Бөлімді оқу нәтижесінде

- стереометрия аксиомалары мен олардың салдарларын;
- кеңістіктегі параллель және айқас түзулердің анықтамаларын;
- кеңістіктегі параллель түзулердің қасиеттерін;
- түзу мен жазықтықтың параллельдік белгілері мен қасиеттерін;
- жазықтықтардың параллельдік белгілерін **білу керек.**

- аксиомаларды, олардың салдарларын кескіндеу және оларды математикалық символдар арқылы жазып көрсете алу;
- параллель және айқас түзулерді анықтап, оларды кескіндей алу;
- кеңістіктегі параллель түзулердің қасиеттерін есептер шығаруда қолдана алу;
- түзу мен жазықтықтың параллельдік белгілері мен қасиеттерін есептер шығаруда қолдана алу;
- жазықтықтардың параллельдік белгілерін есептер шығаруда қолдана **алу керек.**

1. Стереометрия аксиомалары және олардың салдарлары

Тақырыпты оқу барысында:

- стереометрияның негізгі ұғымдарын, аксиомаларын және олардың салдарларын білесіңдер;
- оларды математикалық символдар арқылы жазып көрсете аласыңдар.

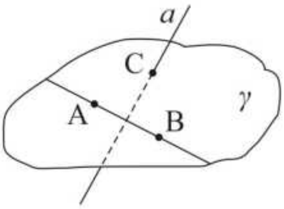
Стереометрияның негізгі ұғымдарына нүкте, түзу және жазықтық жатады. Суретте жазықтықты параллелограмм немесе басқа да жазық фигура түрінде бейнелейді (26-сурет). Әдетте жазықтықты грек әліпбиінің α, β, γ т. с. с. әріптерімен белгілейді. Нүктелер мен түзулер үшін планиметрияда қабылданған белгілеулер қолданылады: нүктелер $A, B, C \ldots$, түзулер $a, b, c \ldots$ немесе $AB, AC \ldots$ деп белгіленеді. Егер C нүктесі α жазықтығына тиісті болса, онда «α жазықтығы C нүктесі арқылы өтеді» деп те айтады ($C\in\alpha$ деп жазылады).

26-сурет

Әр жазықтыққа кеңістіктің қандай да бір нүктелері тиісті және оған тиісті емес те нүктелер болады. 26, ә-суретте A және B нүктелері β жазықтығына тиісті, ал N және E нүктелері оған тиісті емес. Оны былай жазады: $A\in\beta$, $N\notin\beta$.

Егер AB түзуі γ жазықтығында жатса (27-сурет), онда жазықтық AB түзуі арқылы өтеді деп те айтады. Оны былай жазады: $AB\subset\gamma$.

Бір ғана ортақ нүктесі бар болатын түзу мен жазықтық қиылысатын түзу мен жазықтық деп аталады. Мысалы, 27-суретте a түзуі γ жазықтығын қияды, себебі түзудің осы жазықтықпен бір ғана ортақ C нүктесі бар, $a\cap\gamma=C$ деп белгіленеді.



27-сурет

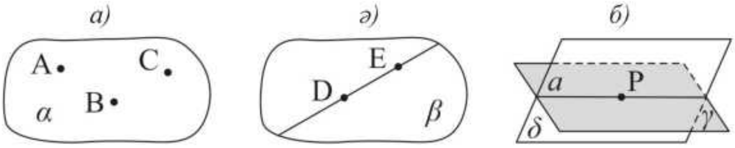
Мектеп стереометриясының аксиомалар жиынтығына планиметрия аксиомалары мен кеңістіктегі нүктелердің, түзулердің және жазықтықтардың өзара орналасуы туралы аксиомалар кіреді.

1-аксиома. **Бір түзуде жатпайтын үш нүкте арқылы бір ғана жазықтық өтеді** (28, *а*-сурет). Бір түзуде жатпайтын A, B, C нүктелері арқылы өтетін жазықтықты ABC жазықтығы немесе (ABC) деп белгілейді.

2-аксиома. **Жазықтықтың әртүрлі екі нүктесінен өтетін түзу осы жазықтықта жатады.** Мысалы, 28, *ә*-суретте DE түзуі β жазықтығында жатыр ($DE\subset\beta$).

Ортақ түзуі бар екі жазықтықты *қиылысатын жазықтықтар* деп атайды.

3-аксиома. **Егер екі жазықтықтың ортақ нүктесі бар болса, онда олардың осы нүктеден өтетін ортақ түзуі бар болады.** Мысалы, 28, *б*-суретте γ мен δ жазықтықтары a түзуі бойымен қиылысады, $\gamma \cap \delta = a$ деп белгілейді.



28-сурет

Көптеген құрылғылар, мысалы, фотоаппаратқа арналған штатив құрылымы 1-аксиомаға негізделген. Штативтің үш аяғының сүйір ұштары бір жазықтыққа тиісті болғандықтан, фотоаппарат нық тұрады. 1-аксиомадан мынадай тұжырым жасалады: егер екі жазықтықтың бір түзуде жатпайтын үш ортақ нүктесі бар болса, онда олар беттеседі.

Төрт нүкте бір жазықтықта жатпауы мүмкін. Осы жағдайдың көрнекі растауы: егер орындықтың төрт аяғының ұзындығы бірдей болмаса, онда ол үш аяғына тіреліп тұрады да, ал төртінші аяғының ұшы еден жазықтығында жатпағандықтан, орындық орнықсыз болады.

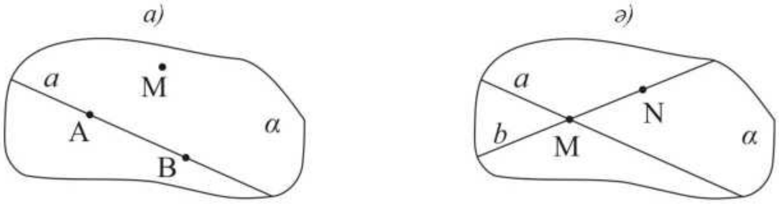
1–3-аксиомалардың кейбір салдарларын қарастырайық.

1-салдар. **Түзу мен онда жатпайтын нүкте арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады.**

2-салдар. **Қиылысатын екі түзу арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады.**

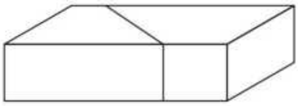
3-салдар. **Кеңістіктің әртүрлі екі нүктесі арқылы бір ғана түзу жүргізуге болады.**

Аксиомалар мен 29, *а*, *ә*-суреттерді пайдаланып, осы салдарларды өздігінен түсіндіріңдер.



29-сурет

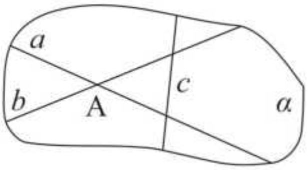
Іс жүзінде, 2-салдарды, мысалы, ағаш ұстасы қырлы бөренені арамен кесерде пайдаланады. Ол бөрененің сыбайлас екі жағына қиылысатын түзулер сызып, кесу жазықтығын белгілеп алады да, ара осы түзулер арқылы өтетіндей етіп кеседі (30-сурет).



30-сурет

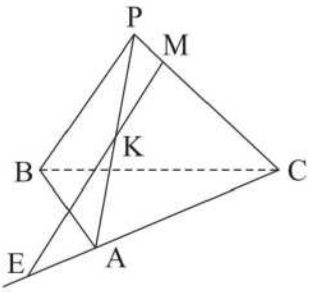
1-есеп. *A* нүктесінде қиылысатын екі түзу берілген. Осы екі түзуді қиятын және *A* нүктесінен өтпейтін барлық түзулер бір жазықтықта жататынын дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. Берілген *a* және *b* түзулері арқылы *α* жазықтығын жүргіземіз (31-сурет), мұндай жазықтық тек біреу ғана болады. Берілген түзулерді қиятын, *A* нүктесінен өтпейтін кез келген *c* түзуінің *α* жазықтығымен екі ортақ нүктесі бар болады (берілген түзулермен қиылысу нүктелері). 2-аксиома бойынша бұл түзу *α* жазықтығында жатады. Сонымен, берілген екі түзуді қиятын және олардың қиылысу нүктесінен өтпейтін барлық түзулер бір жазықтықта жатады.



31-сурет

2-есеп. *PABC* тетраэдрі мен оның, сәйкесінше, *PA* мен *PC* қырларында жататын және $KM \nparallel AC$ болатындай *K* мен *M* нүктелері берілген. *KM* түзуінің *ABC* жазықтығымен қиылысу нүктесін салу керек.



32-сурет

Шешуі. *K* мен *M* нүктелері бір *APC* жағына тиісті болғандықтан, 2-аксиома бойынша *KM* түзуі *APC* жазықтығында жатады. Осы жазықтықта *KM* түзуі *AC* түзуін *E* нүктесінде қияды (32-сурет), себебі $KM \nparallel AC$.

E нүктесі *ABC* жазықтығына тиісті, себебі ол барлық нүктелері осы жазықтыққа тиісті *AC* түзуінде жатыр. Сонымен, *E* – ізделінді нүкте, өйткені ол *KM* түзуі мен *ABC* жазықтығының ортақ нүктесі.

СҰРАҚТАР

1. Стереометрияның негізгі ұғымдары қандай?

2. Стереометрияның аксиомаларын тұжырымдап, оларды суретте салып көрсетіңдер.

3. Стереометрия аксиомаларының салдарларын тұжырымдаңдар және оларды суретте салып көрсетіңдер.

4. Бір түзуде жататын үш нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

11. а) Екі нүкте; ә) үш нүкте; б) кез келген үш нүктесі бір түзуде жатпайтын төрт нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

12. Түзу мен жазықтықтың: а) бір ғана ортақ нүктесі; ә) тек екі ортақ нүктесі болуы мүмкін бе?

Күн жүйесіндегі планеталар

13. Ғаламторды пайдаланып:

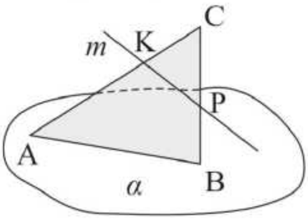
а) Күннің, Жердің және Марстың центрлері бір түзуде жатуы мүмкін бе екенін;

ә) Жер мен Марстың орбиталары бір жазықтықта жата ма екенін анықтаңдар.

б) MN және KL кесінділері O нүктесінде қиылысады. KN, KM, LM және NL түзулерінің бір жазықтықта жататынын дәлелдеңдер.

14. α мен β жазықтықтары AD түзуі бойымен қиылысады ($\alpha \cap \beta = AD$), ал α мен γ жазықтықтары BD түзуі бойымен қиылысады ($\alpha \cap \gamma = BD$). β мен γ жазықтықтары қиылыса ма? Жауабын түсіндіріңдер.

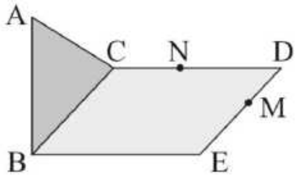
15. а) Екі жазықтықтың; ә) үш жазықтықтың тек бір ғана ортақ нүктесі болуы мүмкін бе?



33-сурет

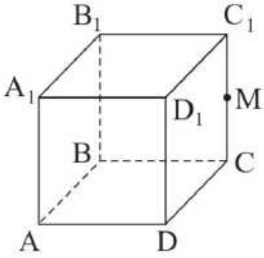
16. а) ABC үшбұрышының A мен B төбелері α жазықтығында жатыр, ал C төбесі бұл жазықтыққа тиісті емес (33-сурет). m түзуі үшбұрыштың AC мен CB қабырғаларын, сәйкесінше, K мен P нүктелерінде, ал α жазықтығын D нүктесінде қияды. D нүктесі AB түзуінде жата ма? Жауабын түсіндіріңдер.

ә) $BCDE$ параллелограмы мен ABC үшбұрышы әртүрлі жазықтықтарда жатыр. M мен N нүктелері, сәйкесінше, параллелограмның DE мен DC қабырғаларына белгіленген (34-сурет). 1) MN түзуі мен ABC жазықтығының қиылысу нүктесін салыңдар. 2) DMN мен ABC жазықтықтары қай түзудің бойымен қиылысады?



34-сурет

17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының CC_1 қырына M нүктесі белгіленген (35-сурет). Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесі: а) $B_1M \cap (ABC)$; ә) $DM \cap (A_1B_1C_1)$ жататын түзуді көрсетіңдер.

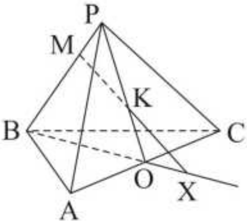


35-сурет

18. M нүктесі – $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AA_1 қырының ортасы. D_1M түзуінің $ABCD$ табан жазықтығымен қиылысу нүктесі E-ні салыңдар. Егер кубтың қыры 4 см-ге тең болса, D_1E кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

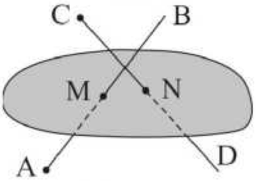
В деңгейі

19. $PABC$ тетраэдрі берілген, оның PB қырына M нүктесі, ал APC жағына K нүктесі белгіленген. MK түзуінің ABC жазықтығымен қиылысу нүктесін салуды түсіндіріңдер (36-сурет).



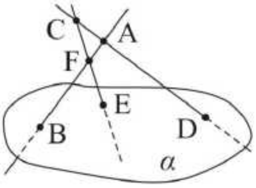
36-сурет

20. AB және CD сәулелері жазықтықты, сәйкесінше, M және N нүктелерінде қияды. Сәулелердің бастары жазықтықтың әртүрлі жағында, ал өздері қиылысатын түзулерде жатыр (37-сурет). AC кесіндісінің осы жазықтықпен қиылысу нүктесі бар болса, сол нүктені салыңдар.



37-сурет

21. Оқушы «Әрқайсысы α жазықтығын қиятын және өзара қос-қостан қиылысатын үш түзуді кескінде» деген тапсырманы орындады (38-сурет). Суретте қате бар ма? Жауабын түсіндіріңдер.



38-сурет

22. Қыры 4 дм-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. A_1C_1D мен ACD_1 жазықтықтары қай түзудің бойымен қиылысады? A_1C_1D және ACD_1 үшбұрыштарының ортақ кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

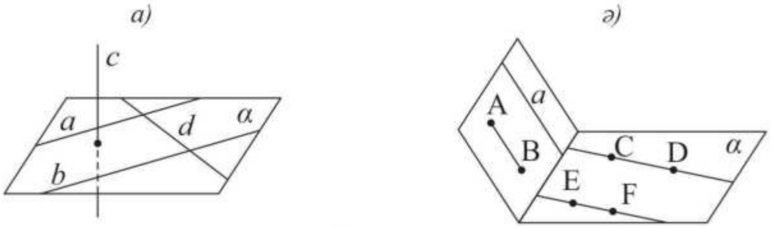
2. Кеңістіктегі екі түзудің өзара орналасуы

Тақырыпты оқу барысында:

- кеңістіктегі параллель және айқас түзулердің анықтамаларын білесіңдер, оларды кескіндейсіңдер;
- кеңістіктегі параллель түзулердің қасиеттерін білесіңдер және оларды есептер шығаруда қолданасыңдар.

Кеңістіктегі бір жазықтықта жататын және ортақ нүктесі болмайтын екі түзу параллель түзулер деп аталады. Түзулердің параллельдігі планиметрияда сияқты белгіленеді. Мысалы, 39, *а*-суреттегі түзулер: $a \parallel b$, $a \nparallel c$, $b \nparallel d$.

Параллель түзулерде жататын екі кесінді (немесе кесінді мен сәуле, немесе екі сәуле) параллель деп аталады. Кесінді (немесе сәуле) бір түзуге параллель болатын түзуде жатса, онда ол сол түзуге параллель деп аталады. Мысалы, 39, *ә*-суретте CD мен EF кесінділері параллель, ал AB мен CD кесінділері параллель емес, AB кесіндісі a түзуіне параллель, DC сәулесі AB кесіндісіне параллель емес.

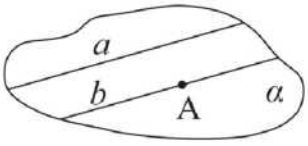


а) *ә)*

39-сурет

Планиметрияда сияқты, кеңістікте де, **егер екі түзудің әрқайсысы үшінші бір түзуге параллель болса, онда мұндай екі түзу параллель болады.**

1-есеп. a түзуі мен онда жатпайтын A нүктесі берілген. A нүктесінен өтіп, a түзуіне параллель болатын b түзуін салу керек.



40-сурет

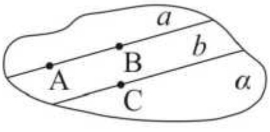
Шешуі. a түзуі мен A нүктесі арқылы α жазықтығын жүргіземіз (40-сурет). α жазықтығында A нүктесі арқылы a түзуіне параллель болатын b түзуін жүргіземіз. b түзуі жалғыз, себебі a түзуі мен онда жатпайтын A нүктесі арқылы бір ғана жазықтық өтеді (1-аксиоманың салдары), ал параллель түзулердің аксиомасы бойынша

α жазықтығында a түзуінде жатпайтын A нүктесі арқылы a түзуіне параллель болатын тек бір ғана түзу жүргізуге болады.

Осы есепті шешу арқылы **кеңістікте түзуде жатпайтын нүкте арқылы берілген түзуге параллель болатын тек бір ғана түзу жүргізуге болатынын** дәлелдедік.

Теорема. **Екі параллель түзу арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады.**

Дәлелдеуі. Осындай бір жазықтықтың бар болуы параллель түзулердің анықтамасынан шығады. Берілген екі түзу жататын басқа да жазықтық бар болады деп жорамалдайық. Түзулердің біріне A және B нүктелерін, ал екіншісіне C нүктесін белгілейік (41-сурет), сонда бір түзуде жатпайтын A, B, C нүктелері арқылы екі жазықтық жүргізілген болып шығады, бұл 1-аксиомаға қайшы келеді. Демек, біздің жорамалымыз дұрыс емес, ондай жазықтық жалғыз.

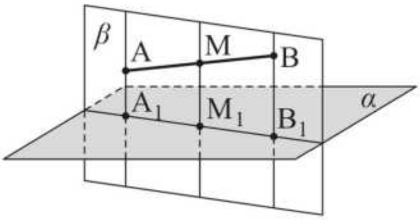


41-сурет

2 - есеп. AB кесіндісінің ұштарынан және қақ ортасындағы M нүктесінен қайсыбір жазықтықты A_1, B_1 және M_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. Егер AB кесіндісі осы жазықтықты қимайтын болса және $AA_1 = 5$ см, ал $BB_1 = 11$ см болса, MM_1 кесіндісінің ұзындығын табу керек.

Шешуі. AA_1, BB_1 және MM_1 түзулері бір β жазықтығында жатыр, сондықтан A_1, B_1 және M_1 нүктелері β жазықтығы мен берілген α жазықтығының қиылысуынан шыққан A_1B_1 түзуінде жатады (42-сурет). Фалес теоремасы бойынша M_1 нүктесі – A_1B_1 кесіндісінің ортасы. MM_1 кесіндісі AA_1B_1B трапециясының орта сызығы болатындықтан, $MM_1 = 0{,}5 \cdot (5 + 11) = 8$ (см).

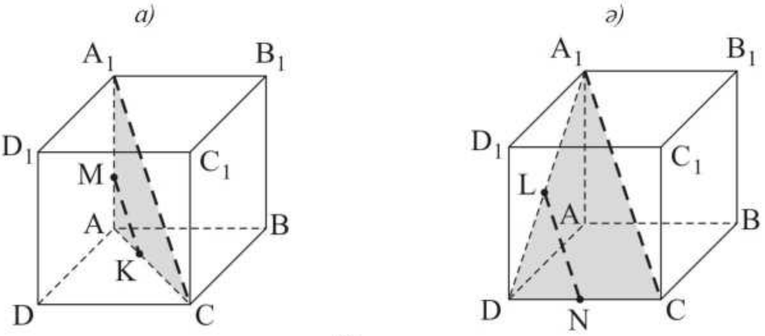
Жауабы. 8 см.



42-сурет

3 - есеп. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы мен оның AA_1 және DC қырларында сәйкесінше жататын M және N нүктелері берілген. $MK \parallel A_1C$ және $NL \parallel A_1C$ түзулерін салу керек, мұндағы K мен L – осы түзулердің кубтың жақтарымен қиылысу нүктелері. MK мен NL түзулері бір жазықтықта жата ма?

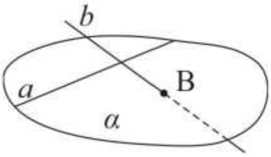
Шешуі. Алдымен MK мен A_1C параллель түзулері жататын жазықтықты саламыз. $M \in AA_1$ болады, ал қиылысатын AA_1 және A_1C түзулері арқылы AA_1C жазықтығы өтеді. Осы жазықтыққа $MK \parallel A_1C$ түзуін саламыз, мұндағы $K \in AC$ (43, *a*-сурет). Дәл осылай, NL түзуін салу үшін, A_1CD жазықтығын және осы жазықтыққа $NL \parallel A_1C$ түзуін саламыз, мұндағы $L \in A_1D$ (43, ә-сурет). $MK \parallel A_1C$ және $NL \parallel A_1C$ болғандықтан, $MK \parallel NL$ болады. Демек, MK мен NL түзулері бір жазықтықта жатады.



43-сурет

Егер екі түзу қиылысса немесе параллель болса, онда олар бір жазықтықта жатады. Кеңістікте екі түзу бір жазықтықта жатпауы да мүмкін. **Бір жазықтықта жатпайтын екі түзу айқас түзулер деп аталады.**

Теорема (*айқас түзулердің белгісі*). **Егер бір түзу жазықтықта жатса, ал екінші түзу осы жазықтықты бірінші түзуде жатпайтын нүктеде қиып өтсе, онда мұндай түзулер айқас болады.**

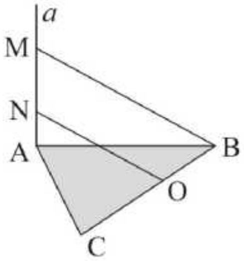


44-сурет

Дәлелдеуі. a түзуі α жазықтығында жатсын, ал b түзуі осы жазықтықты a түзуінде жатпайтын B нүктесінде қиып өтсін (44-сурет). a мен b түзулері арқылы β жазықтығын жүргізуге болады делік. Сонда b түзуінің B нүктесі де β жазықтығына тиісті. Демек, α және β жазықтықтарының ортақ a түзуі мен оған тиісті емес B нүктесі бар болады. Сондықтан α мен β жазықтықтары беттеседі. Бұдан b түзуінің де α жазықтығында жататыны шығады, бұл шартқа қайшы келеді. Демек, a мен b түзулері арқылы жазықтық жүргізуге болмайды, ендеше олар – айқас түзулер.

Айқас түзулердің мысалын бөлме қабырғаларының, еден мен төбенің қиылысу сызықтарынан (45-сурет), әртүрлі деңгейдегі түзу сызықты жол айрықтарынан көруге болады. Айқас түзулердің белгісін пайдаланып, суретте кескінделген түзулердің айқас болатынын немесе қиылысатынын анықтауға болады.

45-сурет



46-сурет

4-есеп. Берілгені: $a \cap (ABC) = A, N \in a, M \in a, O \in BC$ (46-сурет). а) ON мен BM түзулері қалай орналасқан? ә) ON мен AB түзулері қиылыса ма?

Шешуі. а) ON мен BM түзулері айқас, себебі BM түзуі ABM жазықтығында, ал ON түзуі осы жазықтықты BM түзуінде жатпайтын N нүктесінде қияды.

ә) ON мен AB түзулері қиылыспайды, себебі олар айқас. (Мұны өздігінен негіздеңдер.)

Енді кеңістіктегі екі түзудің өзара орналасуының барлық мүмкін жағдайларын атап өтейік:

1) екі түзу бір жазықтықта жатады және олардың бір ғана ортақ нүктесі болады (қиылысатын түзулер);

2) екі түзу бір жазықтықта жатады және олардың ортақ нүктелері болмайды (параллель түзулер);

3) екі түзу бір жазықтықта жатпайды (айқас түзулер).

Егер екі түзудің әртүрлі екі ортақ нүктесі бар болса, онда олардың беттесетінін айта кетелік.

СҰРАҚТАР

1. Кеңістіктегі екі түзудің өзара орналасуының барлық мүмкін жағдайларын атап өтіңдер.

2. Екі параллель түзу арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

3. Айқас түзулердің белгісін тұжырымдаңдар.

4. Егер екі түзудің ортақ нүктелері болмаса, онда олар параллель болады деген ақиқат па?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

23. а) E, K, M, P нүктелері бір жазықтықта жатпайды. KM мен PE түзулерінің параллель болуы мүмкін бе?

ә) c түзуі a мен b параллель түзулерін қияды. a, b және c түзулерінің бір жазықтықта жататынын дәлелдеңдер.

24. а) Параллель және айқас түзулердің ұқсастығы мен айырмашылығы неде?

ә) Бір түзу басқа екі түзуді қияды. Осы үш түзудің бір жазықтықта жататыны ақиқат па?

25. а) P нүктесі AD мен BC табандары болатын $ABCD$ трапециясының жазықтығында жатпайды (47, *а*-сурет). PB мен PC кесінділерінің орталары арқылы өтетін түзу трапецияның орта сызығына параллель болатынын дәлелдеңдер.

ә) $ABCD$ мен ABC_1D_1 параллелограмдары әртүрлі жазықтықтарда жатыр (47, *ә*-сурет). C_1CDD_1 төртбұрышының параллелограмм екенін дәлелдеңдер.

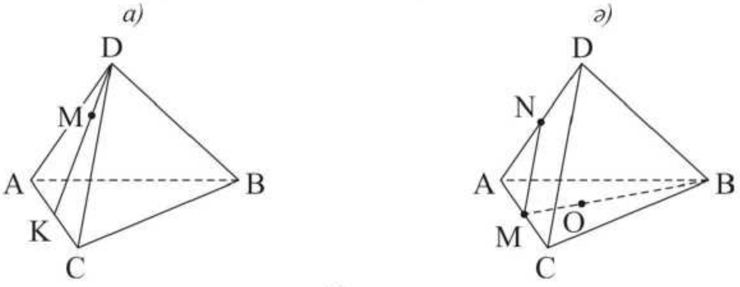
47-сурет

26. а) A – AB кесіндісінің α жазықтығымен ортақ нүктесі. B нүктесі мен AB кесіндісінің ортасы болатын C нүктесі арқылы α жазықтығын, сәйкесінше, B_1 мен C_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. Егер $CC_1 = 8$ см болса, BB_1 кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

ә) AB кесіндісінің A ұшы α жазықтығында жатыр, ал B ұшы мен кесіндіге тиісті C нүктесі арқылы α жазықтығын, сәйкесінше, B_1 мен C_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. Егер $AC = 9{,}2$ дм, $AB : BB_1 = 5 : 3$ болса, CC_1 кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

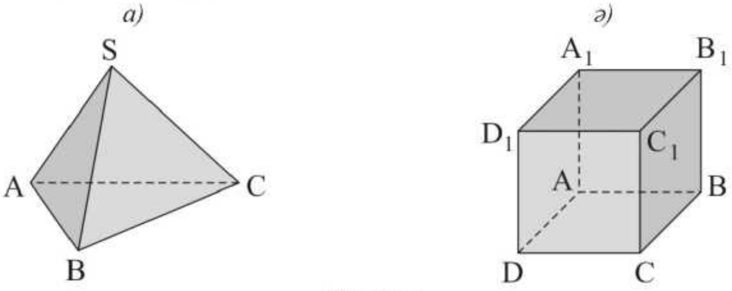
27. а) $DABC$ дұрыс тетраэдрі мен оның ADC жағының DK медианасында жататын және $DM : MK = 2 : 3$ болатындай M нүктесі берілген (48, *а*-сурет). DB қырына параллель MN түзуін салыңдар және осы түзу мен ABC жағының N қиылысу нүктесінің орнын көрсетіңдер.

ә) $DABC$ дұрыс тетраэдрінің ABC табанының O центрі арқылы MN кесіндісіне параллель түзу жүргізіңдер, мұндағы M, N, сәйкесінше, AC мен AD қырларының орталары (48, *ә*-сурет). Егер тетраэдрдің қыры 12 см-ге тең болса, осы түзудің тетраэдр жақтарының арасындағы кесіндісінің ұзындығын табыңдар.



48-сурет

28. *SABC* пирамидасы берілген (49, *а*-сурет). *M*, *N*, *P*, *K* нүктелері, сәйкесінше, оның *SA*, *SC*, *BC* мен *AB* қырларының орталары. Егер $SB = 18$ см, $AC = 14$ см болса, *MNPK* төртбұрышының түрін анықтап, оның периметрін табыңдар.



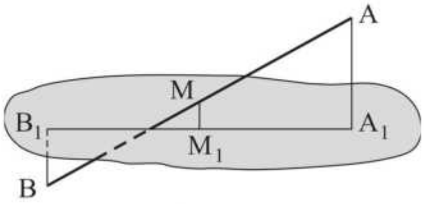
49-сурет

29. *M* нүктесі *SABC* тетраэдрінің *SB* қырына тиісті (49, *а*-сурет). *SA* мен *BC* түзулерінің айқас болатынын дәлелдеңдер. *M* нүктесі арқылы өтіп, *SA* мен *BC* түзулерін қиятын түзу жүргізіңдер.

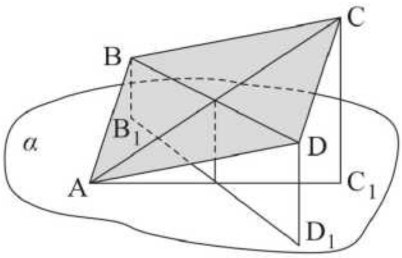
30. Кубтың кескінін пайдаланып (49, *ә*-сурет), кубтың диагоналін және жақтарының диагональдарын қамтитын айқас түзулерді көрсетіңдер.

B деңгейі

31. *AB* кесіндісінің *A*, *B* нүктелері мен ортасының *M* нүктесі арқылы қайсыбір жазықтықты, сәйкесінше, A_1, B_1, M_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. Егер $AA_1 = 13$ дм, $BB_1 = 7$ дм және *AB* кесіндісі осы жазықтықты қиятын болса (50-сурет), MM_1 кесіндісінің ұзындығын табыңдар.



50-сурет



51-сурет

32. *ABCD* параллелограмының *A* төбесі α жазықтығында жатыр, ал оның *B*, *C* және *D* нүктелері арқылы α жазықтығын, сәйкесінше, B_1, C_1, D_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген (51-сурет). Егер $CC_1 = 14$ см, $DD_1 = 11$ см болса, BB_1 кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

33. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. *K* нүктесі AB_1 диагоналінде жатыр және $AK:KB_1 = 2:3$. а) *K* нүктесінен өтіп, *AC* түзуіне параллель түзу салыңдар. ә) Егер кубтың қыры 5 см-ге тең болса, осы түзудің кубтың жақтарымен қиылысу нүктелері арасындағы кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

34. *DABC* дұрыс тетраэдрі берілген, *O* – *ABC* үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесі, *P* – *DO* кесіндісінің ортасы. *P* нүктесінен өтетін және *CB* қырына параллель болатын *MN* түзуін салыңдар (*M*, *N* – осы түзудің тетраэдр жақтарымен қиылысу нүктелері). Егер $MN = 2$ см болса, тетраэдр бетінің ауданын табыңдар.

35. *ABCD* және *ADEF* параллелограмдары әртүрлі жазықтықтарда орналасқан. *BC* кесіндісіне *K* нүктесі, ал *DF* диагоналіне *O* нүктесі белгіленген (52, *а*-сурет). *OB* мен *DK* түзулері параллель деген ақиқат па? Жауабын түсіндіріңдер.


а) *ә)*

52-сурет

36. *ABCD* параллелограмы мен оның жазықтығында жатпайтын *M* нүктесі берілген. *AM* мен *CM* кесінділеріне, сәйкесінше, *K* мен *N* нүктелері белгіленген (52, *ә*-сурет). *CK* мен *DN* түзулері қиылыса ма? Жауабын түсіндіріңдер.

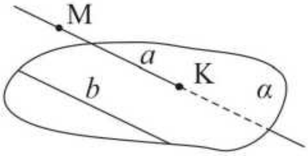
3. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы

Тақырыпты оқу барысында:

- түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі мен қасиеттерін білесіңдер;
- оларды есептер шығаруда қолданасыңдар.

Алдыңғы өткен тақырыптардан сендерге кеңістіктегі түзу мен жазықтықтың өзара орналасуының екі жағдайы белгілі: 1) егер түзудің әртүрлі екі нүктесі жазықтыққа тиісті болса, *түзу жазықтықта жатады*; 2) егер түзу мен жазықтықтың бір ғана ортақ нүктесі бар болса, *түзу мен жазықтық қиылысады*. Кеңістіктегі түзу мен жазықтықтың өзара орналасуының үшінші жағдайы да болуы мүмкін. **Түзу мен жазықтықтың ортақ нүктесі болмаса, олар параллель деп аталады.** Түзу мен жазықтықтың параллельдігі былай белгіленеді: $a \parallel \alpha$ (немесе $\alpha \parallel a$).

Теорема (*түзу мен жазықтықтың параллельдігінің белгісі*). **Егер жазықтыққа тиісті емес түзу осы жазықтықтағы қандай да бір түзуге параллель болса, онда ол осы жазықтыққа параллель болады.**

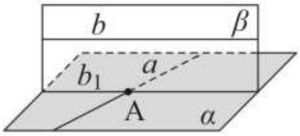


53-сурет

Дәлелдеуі. α жазықтығы мен онда жататын b түзуі және b түзуіне параллель, α жазықтығында жатпайтын a түзуі берілген болсын. a түзуі α жазықтығын K нүктесінде қияды деп жориық (53-сурет). a мен b түзулері параллель болғандықтан, b түзуі K нүктесінен өте алмайды, ендеше айқас түзулердің белгісі бойынша a мен b – айқас түзулер. Бірақ теореманың шарты бойынша олар параллель түзулер. Шыққан қайшылық жоруымыздың дұрыс еместігін көрсетеді. Демек, a түзуі мен α жазықтығы қиылыспайды, яғни олар параллель.

Салдары. **Жазықтықта жатпайтын нүкте арқылы жазықтыққа параллель шексіз көп түзу жүргізуге болады.**

Теорема. **Айқас екі түздің біреуі арқылы екінші түзуге параллель бір ғана жазықтық жүргізуге болады.**

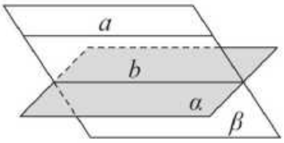


54-сурет

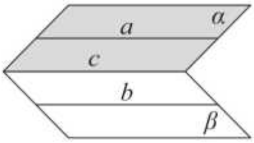
Дәлелдеуі. a мен b айқас түзулері берілген болсын. a түзуінен кез келген A нүктесін алып, ол арқылы b түзуіне параллель b_1 түзуін жүргізейік (54-сурет). a және b_1 түзулері арқылы α жазықтығын жүргізейік. Түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі бойынша $\alpha \parallel b$.

Бұл жазықтық жалғыз, өйткені қиылысатын a және b_1 түзулері арқыл бір ғана жазықтық жүргізуге болады.

Теорема. **Егер жазықтық басқа жазықтыққа параллель түзу а қылы өтсе және сол жазықтықты қиса, онда жазықтықтардың қи лысу сызығы берілген түзуге параллель болады.**



55-сурет

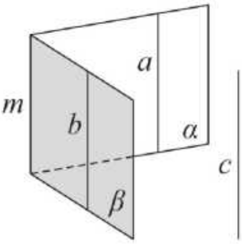


56-сурет

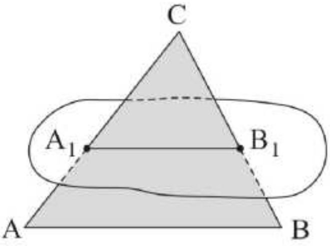
Дәлелдеуі. a түзуі α жазықтығына п раллель, ал β жазықтығы a түзуі арқылы өті α жазықтығын b түзуі бойымен қиятын болсы (55-сурет). a мен b түзулері β жазықтығында ж тыр және қиылыспайды, себебі егер олар өза қиылысса, онда α жазықтығымен де қиылысар е Демек, $b \| a$.

Салдары. **Егер екі түзу параллель бол және олардың әрқайсысы арқылы жазықты өтіп, олар қиылысса, онда жазықтықтардь қиылысу сызығы осы түзулердің әрқайсысына параллель болад** 56-суретте берілгені: $a \| b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ және $\alpha \cap \beta = c$, демек, $c \| a$ және $c \|$

Теорема. **Егер түзу қиылысатын екі жазықтықтың әрқайсысы параллель болса, онда ол жазықтықтардың қиылысу сызығына да п раллель болады.**



57-сурет



58-сурет

Дәлелдеуі. $c \| \alpha$, $c \| \beta$, $\alpha \cap \beta = m$ болсы (57-сурет). $c \| m$ болатынын дәлелдейік. α мен жазықтықтарында сәйкесінше жатқан a мен түзулерінің әрқайсысы c түзуіне паралле Сонда $a \| b$ және $m \| a$, $m \| b$, демек, $m \| c$.

Есеп. ΔABC берілген. AB түзуіне пара лель жазықтық осы үшбұрыштың AC қабы ғасын A_1, BC қабырғасын B_1 нүктесінде қи өтеді. Егер $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$ болса, A_1 кесіндісінің ұзындығын табу керек.

Шешуі. A_1B_1 түзуі AB түзуіне паралле (58-сурет). ABC жазықтығында ABC мен A_1B үшбұрыштары ұқсас. Сонда $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C}{AC}$, б дан $\frac{A_1B_1}{b} = \frac{c}{a+c}$, $A_1B_1 = \frac{bc}{a+c}$.

СҰРАҚТАР

1. Кеңістіктегі түзу мен жазықтықтың өзара орналасуының барлық мүмкін жағдайларын атап өтіңдер.

2. Түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісін тұжырымдаңдар.

3. Параллель түзулер мен жазықтық туралы қандай қасиеттерді (теоремаларды, олардың салдарларын) білесіңдер?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

37. а) Егер түзу жазықтыққа параллель болса, онда ол жазықтықта жатқан кез келген түзуге параллель болады деген тұжырым дұрыс па?

ә) Жазықтыққа параллель түзу мен жазықтықта жататын түзулер өзара қалай орналасуы мүмкін?

38. а) Параллелограмның тек бір қабырғасы жазықтықта жататыны белгілі болса, қалған қабырғалары осы жазықтыққа қатысты қалай орналасқан?

ә) ΔABC мен α жазықтығы берілген, $AC \subset \alpha$, $B \notin \alpha$. AB мен BC қабырғаларының орталары арқылы өтетін түзу α жазықтығына қатысты қалай орналасқан?

б) Түзу үшбұрыш медианаларының біріне параллель. Осы түзу үшбұрыш жатқан жазықтыққа қатысты қалай орналасуы мүмкін?

39. ABC үшбұрышының AB қабырғасына параллель жазықтық оның AC мен BC қабырғаларын, сәйкесінше, M және K нүктелерінде қияды. Егер: а) $MK = 5$ см, $MC = MA$; ә) $MK = a$, $CK : KB = 1 : 3$ болса, AB кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

40. ABC үшбұрышының AB қабырғасының ортасы арқылы AC түзуіне параллель болатын және одан ауданы 7 м^2-ге тең үшбұрыш қиятын жазықтық жүргізілген. ABC үшбұрышының ауданын табыңдар.

41. Қиылысатын α, β жазықтықтары мен оларға тиісті емес A нүктесі берілген. A нүктесінен өтіп: а) берілген жазықтықтарға параллель болатын; ә) α жазықтығына параллель, ал β жазықтығын қиятын түзу жүргізіңдер.

В деңгейі

42. а) Егер түзу жазықтыққа параллель болса, онда сол жазықтықта берілген түзуге параллель түзудің табылатынын; ә) егер параллель түзулердің бірі жазықтықты қиса, онда екіншісі де оны қиятынын дәлелдеңдер.

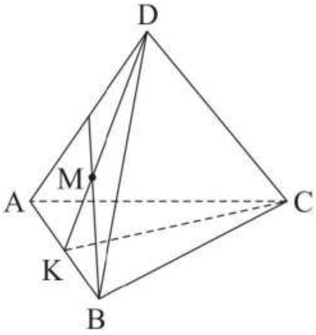
43. a түзуі мен α жазықтығы параллель. a түзуінің A мен B нүктелері арқылы α жазықтығын, сәйкесінше, A_1 мен B_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. Егер: а) $AA_1 = 13$ см, $AB = 14$ см, $AB_1 = 15$ см; ә) $AB_1 = A_1B = 10$ см, $AA_1 = 6$ см; б) $\angle BA_1B_1 = \angle AA_1B = 30°$, $AA_1 = 12$ см болса, A_1ABB_1 төртбұрышының ауданын табыңдар.

44. $ABCD$ трапециясының AD үлкен табаны α жазықтығында жатыр, ал оның B төбесі бұл жазықтыққа тиісті емес. B төбесінен CD қабырғасын $CM:MD = 3:2$ болатындай етіп M нүктесінде, ал α жазықтығын K нүктесінде қиятын сәуле жүргізілген. Егер трапецияның кіші табаны b-ға тең болса, DK қашықтығын табыңдар.

45. а) $ABCD$ трапециясының AB мен CD бүйір қабырғаларын олардың ортасынан қиятын жазықтық трапецияның табандарына параллель болатынын дәлелдеңдер.

ә) $ABCD$ трапециясының бүйір қабырғасының ортасындағы M нүктесінен трапецияның AD табанына параллель жазықтық жүргізілген. Егер $BC:AD = 9:5$ қатынасындай болса, сол жазықтықтың трапецияны бөлетін бөліктері аудандарының қатынасын табыңдар.

46. $DABC$ тетраэдрі берілген, оның табаны – қабырғасы a-ға тең дұрыс ΔABC (59-сурет). ABD үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесі арқылы ABC жазықтығына параллель өтіп, DC қабырғасын қиятын m түзуін жүргізіңдер. Осы m түзуінің тетраэдрмен қиылысуынан шыққан кесіндінің ұзындығын табыңдар.



59-сурет

4. Екі жазықтықтың өзара орналасуы

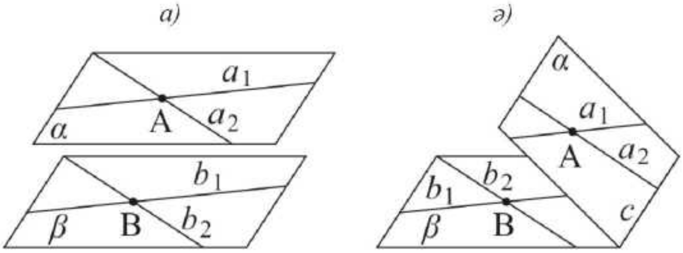
Тақырыпты оқу барысында:

- параллель жазықтықтардың белгісі мен қасиеттерін білесіңдер;
- оларды есептер шығаруда қолданасыңдар.

Егер екі жазықтықтың бір ортақ нүктесі бар болса, онда олар сол нүктеден өтетін түзу бойымен *қиылысатыны* сендерге бұрыннан белгілі. **Ортақ нүктесі болмайтын екі жазықтық параллель жазықтықтар деп аталады.**

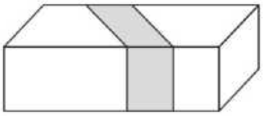
Теорема (*екі жазықтықтың параллельдігінің белгісі*). **Егер бір жазықтықтың қиылысатын екі түзуі, сәйкесінше, екінші жазықтықтың екі түзуіне параллель болса, онда бұл жазықтықтар параллель болады.**

Дәлелдеуі. Қиылысатын a_1, a_2 түзулері α жазықтығында жатсын, $a_1 \cap a_2 = A$, ал b_1, b_2 түзулері β жазықтығында жатсын, $b_1 \cap b_2 = B$ және $a_1 \parallel b_1$, $a_2 \parallel b_2$ (60, *а*-сурет). $\alpha \parallel \beta$ болатынын дәлелдейік.



60-сурет

α мен β жазықтықтарының ортақ нүктесі бар делік, сонда олар c түзуі бойымен қиылысатын болады (60, *ә*-сурет). Шарт бойынша α мен β жазықтықтары a_1 және b_1 параллель түзулері арқылы өтеді, демек, $c \parallel a_1$. Одан басқа, α мен β жазықтықтары a_2 мен b_2 параллель түзулері арқылы өтеді, демек, $c \parallel a_2$. α мен β жазықтықтарының ортақ нүктесі бар деп жоруымыздан A нүктесі арқылы c түзуіне параллель a_1 мен a_2 түзулері өтетін болып шықты, бұл мүмкін емес, себебі түзуде жатпайтын нүкте арқылы оған параллель бір ғана түзу жүргізуге болады. Демек, α мен β жазықтықтарының ортақ нүктесі жоқ, яғни олар параллель.



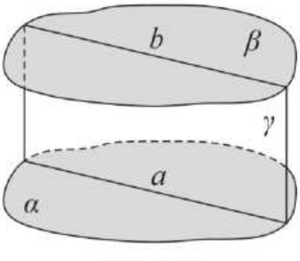
61-сурет

Жазықтықтардың параллельдік белгісін өм де пайдаланады, мысалы, ағаш кесегін кескенде су жазықтықтары параллель болуы үшін, оның байлас жақтарына параллель кесінділер сызып ал (61-сурет).

1) *Жазықтықта жатпайтын нүкте арқылы оған параллель бір жазықтық жүргізуге болатынын;*

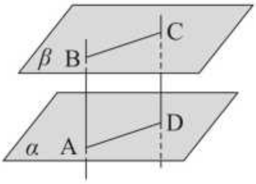
2) *егер екі жазықтықтың әрқайсысы үшінші жазықтыққа парал болса, онда бұл екі жазықтық параллель болатынын* айта кетелік.

Теорема. **Егер екі параллель жазықтықты үшінші жазықтык са, онда олардың қиылысу сызықтары параллель болады.**



62-сурет

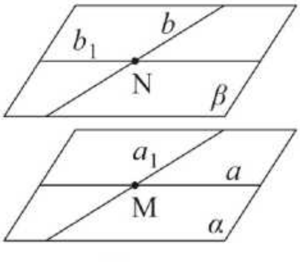
Дәлелдеуі. $\alpha \parallel \beta, \gamma \cap \alpha = a, \gamma \cap \beta = b$ бол (62-сурет). $a \parallel b$ болатынын дәлелдейік. a м түзулері параллель болмайды деп жориық. a b түзулері бір γ жазықтығында жатқандық олар қайсыбір нүктеде қиылысады. a түзуі α зықтығында, ал b түзуі β жазықтығында қандықтан, a мен b түзулерінің қиылысу α мен β жазықтықтарының қиылысатыны ш ды, бұл шартқа қайшы келеді. Демек, жоруымы рыс емес, яғни $a \parallel b$.



63-сурет

Салдары. **Екі параллель жазықтық арасындағы параллель кесінділер тең бол** (63-сурет).

1-есеп. Екі айқас түзудің әрқайсысы арқ өзара параллель жазықтықтар жүргізу керек.

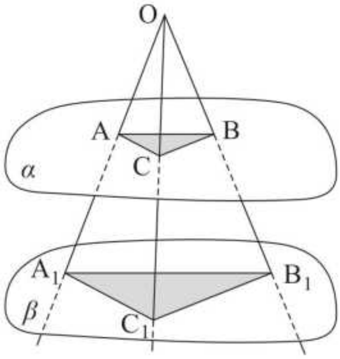


64-сурет

Шешуі. a түзуінің қандай да бір M нүк арқылы (64-сурет) b түзуіне параллель a_1 тү жүргіземіз. a және a_1 түзулері арқылы α зықтығын жүргіземіз. Дәл осылай β жазы ғын жүргіземіз. Жазықтықтардың параллел белгісі бойынша α мен β жазықтықтары па лель. Ондай жазықтықтар жұбы жалғыз.

2-есеп. O нүктесінен шығатын үш ле α жазықтығын A, B, C нүктелерінде, ал

Шешуі. Параллель α және β жазықтықтарының берілген сәулелердің жұптары арқылы өтетін үшінші жазықтықпен қиылысу сызықтары параллель болатындықтан, $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$. Демек, $\Delta OAB \sim \Delta OA_1B_1$, $\Delta OBC \sim \Delta OB_1C_1$, $\Delta OCA \sim \Delta OC_1A_1$ (қай белгі бойынша екенін түсіндіріңдер). Үшбұрыштардың ұқсастығынан $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}$, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{OC}{OC_1}$, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{OC}{OC_1} = \frac{OA}{OA_1}$ шығады. Осы пропорциялардан: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ аламыз, демек, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

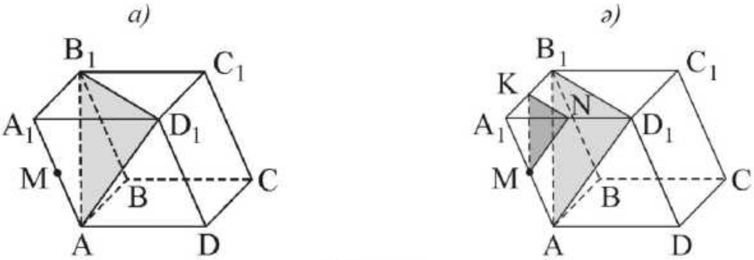


65-сурет

3 - есеп. M нүктесі – $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің AA_1 қырының ортасы. Егер AB_1D_1 үшбұрышының ауданы 0,5 м^2 болса, параллелепипедтің M нүктесінен өтетін және AB_1D_1 жазықтығына параллель жазықтықпен қимасының ауданын табу керек.

Көпжақтың *қиюшы жазықтығы* деп осы көпжақты екіге бөлетін жазықтықты айтады. Көпжақ пен қиюшы жазықтықтың ортақ нүктелерінің жиыны көпжақтың сол жазықтықпен *қимасы* деп аталады. Мысалы, ΔAB_1D_1 берілген параллелепипедтің AB_1D_1 жазықтығымен қимасы болады (66, *а*-сурет).

Шешуі. Параллелепипедтің M нүктесінен өтетін және AB_1D_1 жазықтығына параллель жазықтықпен қимасын салайық. Сол жазықтықтардың параллелепипедтің жақтарымен қиылысу сызықтары параллель болады, сондықтан $MN \parallel AD_1$ және $MK \parallel AB_1$ түзулерін саламыз (66, *ә*-сурет). Жазықтықтардың параллельдік белгісі бойынша $(MNK) \parallel (AB_1D_1)$. MNK үшбұрышы – ізделінді қима.



66-сурет

$\frac{MN}{AD_1} = \frac{MK}{AB_1} = \frac{KN}{B_1D_1} = \frac{1}{2}$ болғандықтан (неге екенін түсіндіріңдер), $\Delta MKN \sim \Delta AB_1D_1$, ұқсастық коэффициенті $k = \frac{1}{2}$. Ұқсас үшбұрыштардың аудандарының қатынасы ұқсастық коэффициентінің квадратына тең. Демек, $\frac{S_{\Delta MKN}}{S_{\Delta AB_1D_1}} = \frac{1}{4}$, бұдан $S_{\Delta MKN} = \frac{1}{4} \cdot 0,5 = 0,125$ (м^2).

Жауабы. 0,125 м^2.

СҰРАҚТАР

1. Қай жағдайда екі жазықтық: а) қиылысады; ә) параллель болады?
2. Екі жазықтықтың параллельдік белгісін тұжырымдаңдар.
3. Параллель жазықтықтардың қандай қасиеттерін білесіңдер?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

47. Егер қиылысатын a мен b түзулері α жазықтығында жатса және $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$ болса, α мен β жазықтықтары өзара қалай орналасқан?

48. а) Қабырға сағатының сағаттық және минуттық тілдері неліктен параллель жазықтықтарда қозғалатынын түсіндіріңдер.

ә) Екі бөрене көлденең орналастырылған. Олардың үстіне төселген жазық жабынды көлденең орналасқан ба? Жауабын түсіндіріңдер.

49. Параллель жазықтықтардың бірінде жүргізілген кез келген түзудің екінші жазықтыққа параллель болатынын дәлелдеңдер.

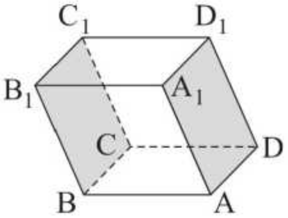
50. Үшбұрыштың екі қабырғасы α жазықтығына параллель. Үшбұрыштың үшінші қабырғасы осы жазықтыққа параллель бола ма?

51. Егер бір жазықтықта жататын екі түзу екінші жазықтықта жататын екі түзуге параллель болса, онда бұл жазықтықтар параллель болады деген тұжырым дұрыс па?

52. а) $DABC$ пирамидасы мен оның DA, DB және DC қырларына сәйкесінше тиісті K, P және M нүктелері берілген және KP түзуі AB түзуіне, ал PM түзуі BC түзуіне параллель. ABC мен KPM жазықтықтарының ортақ нүктесі болмайтынын дәлелдеңдер.

ә) $DABC$ тетраэдрінің AB, AC және AD қырларының орталары арқылы жазықтық жүргізілген. Осы жазықтықтың BCD жазықтығына параллель болатынын дәлелдеңдер.

53. Параллелепипедтің әрбір қарама-қарсы екі жағының параллель болатынын дәлелдеңдер (67-сурет).



67-сурет

54. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің A төбесінен шығатын үш қырының орталары арқылы жазықтық жүргізілген (67-сурет). Осы жазықтықтың BDA_1 жазықтығына параллель болатынын дәлелдеңдер.

55. а) Екі параллель жазықтық берілген. Олардың біреуінің A мен B нүктелері арқылы екінші жазықтықты C мен D нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. Егер $AB = \sqrt{2}$ см болса, CD кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

ә) α жазықтығының M нүктесінен оған параллель β жазықтығына $MN = 13$ см және $MK = 10$ см болатын кесінділер жүргізілген. N нүктесінен MK кесіндісіне параллель және α жазықтығын E нүктесінде қиятын түзу жүргізілген. Егер $ME = 5$ см болса, KE кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

56. Үшбұрыштың бір қабырғасы α жазықтығында жатыр, ал оған параллель β жазықтығы үшбұрыштың басқа екі қабырғасын қияды. β жазықтығы берілген үшбұрыштан оған ұқсас үшбұрыш қиятынын дәлелдеңдер.

57. α, β параллель жазықтықтары мен олардың ешқайсысында жатпайтын O нүктесі берілген. AO түзуі α жазықтығын A нүктесінде, ал β жазықтығын C нүктесінде қияды. BO түзуі α жазықтығын B нүктесінде, ал β жазықтығын D нүктесінде қияды. $AO = 5$ см, $CO = 6$ см, $AB = 17$ см болса, DC қашықтығын табыңдар.

В деңгейі

58. Параллель α мен β жазықтықтары α жазықтығын A және B нүктелерінде, ал β жазықтығын, сәйкесінше, A_1 және B_1 нүктелерінде қиятын екі параллель түзумен қиылған. O – A_1ABB_1 төртбұрышы диагональдарының қиылысу нүктесі. Егер: а) $AB_1 = A_1B = 16$ см, $\angle A_1OB_1 = 30°$; ә) $AB_1 = 16$ см, $A_1B = 12$ см, $\angle A_1OB_1 = 90°$ болса, A_1ABB_1 төртбұрышының түрін анықтап, ауданын табыңдар.

59. Параллель жазықтықтарда жататын екі ұқсас көпбұрыштың аудандарының қатынасы $100:81$. Осы көпбұрыштар периметрлерінің қатынасын табыңдар.

60. а) $DABC$ дұрыс тетраэдрінде M нүктесі BD қырында жатыр және $DM:MB = 3:2$. M нүктесінен өтіп, тетраэдрдің DAC жағына параллель жазықтықпен қимасының ауданы 8 см^2 болса, DAC жағының ауданын табыңдар.

ә) P мен K нүктелері $DABC$ тетраэдрінің DB қырын тең үш бөлікке бөледі. Тетраэдрдің P және K нүктелерінен өтетін, ABC жағына параллель қималарын салыңдар. Егер ABC үшбұрышының ауданы S-ке тең болса, салынған қималардың аудандарын табыңдар.

61. $PABC$ пирамидасының табаны болатын ΔABC-ның қабырғалары a, $0{,}5a$, $0{,}9a$. Пирамиданың табанына параллель болатын және оның PB бүйір қабырғасын P төбесінен бастап есептегенде $2:3$ қатынасына бөлетін қимасын салыңдар. Сол қиманың ауданын табыңдар.

62. A, B, C, D нүктелері бір жазықтықта жатпайды. K нүктесі AD кесіндісінде жатыр, $AK:KD = 3:2$, ал P нүктесі – BD кесіндісінің ортасы. P нүктесінен өтіп, BCK жазықтығына параллель болатын жазықтық салыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

63. Төрт нүкте бір жазықтыққа тиісті емес. Олардың үшеуі бір түзуде жатуы мүмкін бе? Жауабын түсіндіріңдер.

64. D нүктесі ABC жазықтығында жатпайды, ал C нүктесі AB түзуінде жатпайды. Суретін салыңдар. AB мен DC түзулері қиылыса ма? Жауабын түсіндіріңдер.

65. BC мен AD табандары болатын $ABCD$ трапециясының C мен D төбелері α жазықтығында жатыр. AB түзуі α жазықтығын E нүктесінде қияды. Егер $AD = 18$ см, $BC = 6$ см, $DC = 8$ см болса, DE кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

66. $DABC$ пирамидасы мен оның AD қырында M нүктесі және DC қырында K нүктесі берілген (MK түзуі AC-ға параллель емес). а) MK түзуі мен ABC жазықтығының қиылысу нүктесін; ә) MKB мен ABC жазықтықтарының қиылысу сызығын салыңдар.

67. $DABC$ тетраэдрінің AD, DB, AC, CB қырларының орталары бір жазықтықта жататынын дәлелдеңдер.

68. α жазықтығын қимайтын AB кесіндісі берілген. A, B нүктелері мен AB кесіндісінің M ортасы арқылы α жазықтығын, сәйкесінше, A_1, B_1, M_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. $AA_1 = 11{,}3$ дм, $BB_1 = 4{,}7$ дм болса, MM_1 кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

69. α мен β жазықтықтары параллель. α жазықтығында жататын ΔABC-ның төбелері арқылы β жазықтығын, сәйкесінше, A_1, B_1 және C_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген. Егер $AB = 12$ см, $AC = BC = 10$ см болса, $A_1B_1C_1$ үшбұрышының C_1H биіктігін табыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Евклид

әл-Фараби

Д

Геометрияның дамуына осыдан 2300 жыл бұрын өм
гректің атақты математигі Евклидтің «Негіздер» деген ата
13 кітабы үлкен әсер етті. Евклидтік геометрияда стереоме
бірінші кітабында кездескенмен, соңғы үш кітабында кен
Мысалы, бесінші сөйлем (анықтама) былай тұжырымдалғ
тек ұзындығы мен ені бар». Евклидтің «Негіздер» кітаб
көптеген анықтамалар мен аксиомалар қазіргі геомет
талаптарына сай келмейді.

Геометрияның дамуы көптеген ғасырлар бойы жалға
дың аяғында неміс математигі Давид Гильберттің (1862–
жарияланған «Геометрия негіздері» атты ғылыми еңбе
кемеліне жетті. Ол геометрия мен басқа да ғылымдарды
негіздеу үшін қолдануға болатын алты негізгі ұғым мен ак
тобын (барлығы 20 аксиома) енгізді. Қазіргі кезде мектеп
қолданылып жүрген аксиомалар Гильберттің аксиомалар

Ғаламторды пайдаланып:

II. КЕҢІСТІКТЕГІ БҰРЫШ ПЕН АРАҚАШЫҚТЫҚ

Бөлімді оқу нәтижесінде

- кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрыш анықтамасын;
- кеңістіктегі перпендикуляр, көлбеу және көлбеудің проекциясы анықтамаларын, олардың қасиеттерін;
- түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық анықтамасын, белгісін және қасиеттерін;
- үш перпендикуляр туралы теореманы;
- түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыштың, екіжақты бұрыштың, екі жазықтықтың арасындағы бұрыштың, перпендикуляр жазықтықтардың анықтамаларын;
- екі жазықтықтың перпендикулярлық белгісін;
- нүктеден жазықтыққа дейінгі; параллель жазықтықтардың, айқас түзулердің арақашықтарының анықтамаларын **білу керек.**

- кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрышты таба алу;
- перпендикулярды, көлбеуді және оның проекциясын кескіндей алу;
- түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі мен қасиеттерін есеп шығаруда қолдана алу;
- үш перпендикуляр туралы теореманы есеп шығаруда қолдана алу;
- түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты, екіжақты бұрышты, екі жазықтық арасындағы бұрышты кескіндей алу және олардың шамаларын таба алу;
- жазықтықтардың перпендикулярлық белгісін есеп шығаруда қолдана алу;
- нүктеден жазықтыққа дейінгі; параллель жазықтықтар, айқас түзулер арасындағы арақашықтықтарды таба **алу керек.**

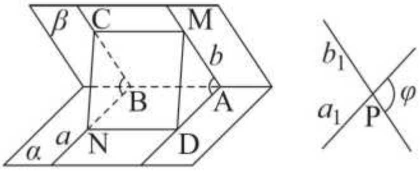
5. Кеңістіктегі түзулердің арасындағы бұрыш. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы

Тақырыпты оқу барысында:

- кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрыштың анықтамасын білесіңдер;
- түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісін, оның салдарын білесіңдер;
- оларды есептер шығаруда қолданасыңдар.

Кез келген қиылысатын екі түзу бір жазықтықта жатады және төрт жазыңқы емес бұрыш құрайды. Егер олардың біреуі белгілі болса, онда қалған үшеуін де табуға болады. Осы бұрыштардың ішіндегі шамасы қалған үшеуінің кез келгенінің шамасынан аспайтын біреуі қиылысатын түзулердің арасындағы бұрыш деп аталады. Параллель немесе беттесетін түзулердің арасындағы бұрыш 0°-қа тең деп алынады.

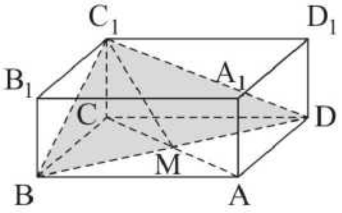
Айқас түзулердің арасындағы бұрыш деп оларға сәйкесінше параллель болатын кез келген қиылысатын екі түзудің арасындағы бұрышты атайды. a мен b түзулерінің арасындағы бұрышты $\angle(a; b)$ деп, ал AB мен CD түзулерінің арасындағы бұрышты $\angle(AB; CD)$ деп белгілейді. Айқас түзулердің арасындағы бұрыштың шамасы кеңістіктегі қиылысатын түзулер жүргізілетін нүктені таңдап алуға байланысты болмайды. Бұл қасиетті 68-суретті пайдаланып түсіндіріңдер.



68-сурет

Егер кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрыш 90°-қа тең болса, олар перпендикуляр түзулер деп аталады.

1 - есеп. Табаны $ABCD$ шаршысы, M табан диагональдарының қиылысу нүктесі болатын тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген (69-сурет). BD мен C_1M түзулерінің перпендикуляр болатынын дәлелдеу керек.

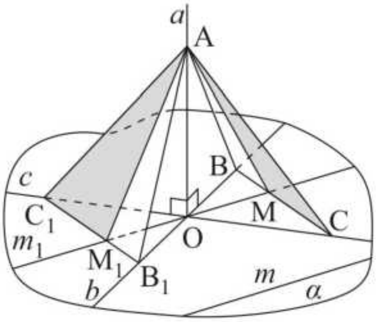


69-сурет

Дәлелдеуі. ΔBC_1D теңбүйірлі, себебі $BC_1 = C_1D$ тең тіктөртбұрыштардың диагональдары; $BM = MD$, себебі шаршының диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді. Теңбүйірлі BC_1D үшбұрышының C_1M медианасы оның биіктігі де болады. Демек, BD мен C_1M түзулері перпендикуляр. Дәлелдеу керегі де осы еді.

Жазықтықтағы кез келген түзуге перпендикуляр болатын түзу жазықтыққа перпендикуляр түзу деп аталады. a түзуі мен α жазықтығының перпендикулярлығы былай белгіленеді: $a \perp \alpha$. α жазықтығы a түзуіне перпендикуляр деп те айтылады. Қоршаған әлемнен түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының көптеген үлгілерін көруге болады. Мысалы, ғимарат бағандары фундамент жазықтығына, үстелдің аяқтары еденге перпендикуляр. Жазықтыққа перпендикуляр түзуде жататын кесінділер мен сәулелер де осы жазықтыққа перпендикуляр деп аталады.

Теорема (*түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі*). **Егер түзу жазықтықта жатқан қиылысатын екі түзудің әрқайсысына перпендикуляр болса, онда ол түзу жазықтыққа перпендикуляр болады.**



70-сурет

Дәлелдеуі. a түзуі α жазықтығын O нүктесінде қисын және осы жазықтықта жататын, O нүктесінен өтіп, қиылысатын b мен c түзулеріне перпендикуляр болсын (70-сурет). Егер қиылысатын b мен c түзулері O нүктесінен өтпесе, онда әрдайым α жазықтығындағы осы нүкте арқылы b мен c түзулеріне сәйкесінше параллель түзулер жүргізуге болады. $a \perp \alpha$ болатынын дәлелдейік.

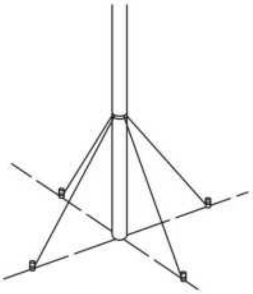
Ол үшін a түзуі α жазықтығындағы қандай да бір m түзуіне перпендикуляр болатынын дәлелдейміз. O нүктесі арқылы m түзуіне параллель m_1 түзуін жүргіземіз. b мен c түзулерінен BC кесіндісі m_1 түзуін қандай да бір M нүктесінде қиятындай B мен C нүктелерін алайық. α жазықтығына O нүктесіне қатысты B, C, M нүктелеріне симметриялы B_1, C_1, M_1 нүктелерін саламыз. Сонда $BO = OB_1$, $CO = OC_1$, $MO = OM_1$, $BC = B_1C_1$ және M_1 нүктесі B_1C_1 кесіндісіне тиісті, $BM = B_1M_1$ болады (центрлік симметрияның қасиеті бойынша). a түзуінен кез келген A нүктесін алып, AB, AM, AC, AC_1, AM_1, AB_1 кесінділерін жүргіземіз. Сонда BAB_1 мен CAC_1 үшбұрыштары теңбүйірлі, өйткені олардың әрқайсысының AO медианасы биіктік те болады, сондықтан $AB = AB_1$, $AC = AC_1$. ABC мен AB_1C_1 үшбұрыштары тең (үш қабырғасы бойынша), демек, $\angle ABC = \angle AB_1C_1$. Сонда $\Delta ABM = \Delta AB_1M_1$ (екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша), сондықтан $AM = AM_1$. Яғни ΔAMM_1 теңбүйірлі, ендеше оның AO медианасы биіктік болады. Демек, a түзуі m_1 түзуіне және оған параллель m түзуіне перпендикуляр. Теорема дәлелденді.

Салдары. **Параллель жазықтықтардың біріне перпендикуляр түзу екіншісіне де перпендикуляр болады.**

1) *Кеңістіктің әрбір нүктесінен берілген жазықтыққа перпендикуляр бір ғана түзу жүргізуге болатынын;* 2) *егер екі параллель түзудің бірі жазықтыққа перпендикуляр болса, онда екінші түзу де осы жазықтыққа перпендикуляр болатынын* айта кетелік.

Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісін практикалық есептер шығарғанда пайдаланады.

Мысалы, бағанды тігінен орнату үшін, ол табаны арқылы жүргізілген қиылысатын екі түзуге перпендикуляр болса жеткілікті. Оны жасау үшін бағанның бір нүктесінен ұзындықтары бірдей екі жұп кергіні баған табанынан бірдей қашықтықта бекіту керек. 71-суретті пайдаланып, баған неліктен табан жазықтығына перпендикуляр болатынын түсіндіріңдер.

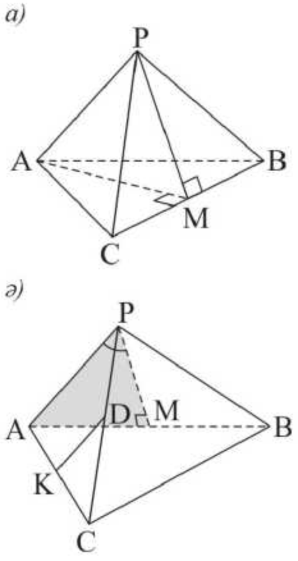

71-сурет

2 - есеп. Барлық қырлары тең $PABC$ тетраэдрі берілген. BC мен PA түзулерінің арасындағы бұрышты табу керек.

Шешуі. ABC мен PBC үшбұрыштарының, сәйкесінше, AM және PM медианаларын жүргіземіз (72, *а*-сурет). Сонда теңқабырғалы үшбұрыштардың медианаларының қасиеті бойынша $AM \perp BC$ және $PM \perp CB$. Демек, түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі бойынша $BC \perp (APM)$. Сонда $BC \perp AP$ (түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының анықтамасы бойынша), ендеше $\angle(BC; PA) = 90°$.

Жауабы. 90°.

3 - есеп. $PABC$ пирамидасы берілген, оның барлық бүйір қырлары 18 см-ге тең, ал табаны – қабырғасы 12 см-ге тең болатын дұрыс ΔABC. M, D, K нүктелері, сәйкесінше, AB, PC, AC қырларының орталары. MP мен KD түзулерінің арасындағы бұрыштың синусын табу керек.



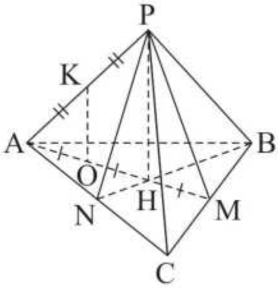
72-сурет

Шешуі. MP мен KD – айқас түзулер (айқас түзулердің белгісі бойынша). DK ΔACP-ның орта сызығы болғандықтан, $KD \parallel PA$. Сонда $\angle(MP; KD) = \angle(MP; PA) = \angle MPA$ (72, ә-сурет). Теңбүйірлі

ΔAPB-ның PM медианасының қасиеті бойынша ΔMPA тікбұрышты, бұдан $\sin \angle MPA = AM : AP = \frac{1}{3}$.

Жауабы. $\frac{1}{3}$.

4-есеп. Дұрыс $PABC$ тетраэдрінің AP бүйір қырының ортасы болатын K нүктесінен өтіп, ABC табан жазықтығына перпендикуляр түзуді салу керек.



73-сурет

Шешуі. 1) APM және BPN жазықтықтарын саламыз, мұндағы AM мен BN – ΔABC-ның медианалары. Осы жазықтықтардың қиылысатын PH түзуін белгілейміз (73-сурет).

2) Теңбүйірлі үшбұрыштың медианасының қасиеті бойынша $PM \perp BC$, $AM \perp BC$. Демек, түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі бойынша $BC \perp (APM)$, түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының анықтамасы бойынша $BC \perp PH$.

3) Сол сияқты $BN \perp AC$, $PN \perp AC$, демек, $AC \perp (BPN)$, $AC \perp PH$. Сонда түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі бойынша $PH \perp (ABC)$ болады.

4) APM жазықтығына $KO \parallel PH$ түзуін саламыз, мұндағы O – AH кесіндісінің ортасы. KO – ізделінді түзу, өйткені ABC жазықтығына перпендикуляр (егер екі параллель түзудің біреуі жазықтыққа перпендикуляр болса, онда екінші түзу де сол жазықтыққа перпендикуляр болады).

СҰРАҚТАР

1. Кеңістіктегі: а) қиылысатын; ә) параллель; б) айқас екі түзудің арасындағы бұрыш қалай анықталады?

2. Айқас түзулер перпендикуляр болуы мүмкін бе?

3. Жазықтыққа перпендикуляр түзудің анықтамасын беріңдер.

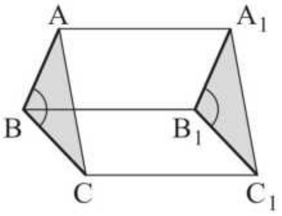
4. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісін тұжырымдаңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

70. Кеңістікте берілген түзудің берілген нүктесінен өтіп, оған перпендикуляр болатын неше түзу жүргізуге болады?

71. Екі сыбайлас бұрыштың айырымы 70°-қа тең. Осындай бұрыштардың қабырғаларын қамтитын түзулердің арасындағы бұрыш неге тең?



74-сурет

72. 74-суретті пайдаланып, кеңістікте сәйкес қабырғалары параллель болатын кез келген екі сүйір немесе доғал бұрыштың тең болатынын дәлелдеңдер.

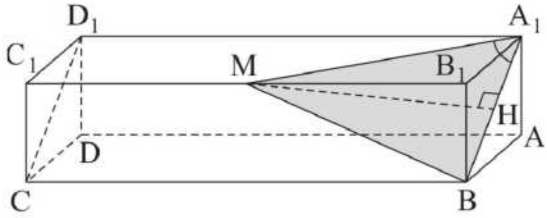
73. а) $DABC$ дұрыс тетраэдрі берілген, оның DAB үшбұрышының DL биссектрисасы жүргізілген. AB түзуіне параллель кез келген түзу DL түзуіне перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

ә) Барлық бүйір қырлары тең болатын $PABCD$ пирамидасының табаны – $ABCD$ тіктөртбұрышы. P нүктесі мен тіктөртбұрыштың симметрия центрі болатын O нүктесі арқылы түзу жүргізілген. Сол түзуге параллель кез келген түзу BD түзуіне перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

74. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының көршілес жақтарының A_1C_1 мен D_1C айқас диагональдарының арасындағы бұрышты табыңдар.

75. $ABCD$ параллелограмының жазықтығында жатпайтын MN түзуі оның DC қабырғасына параллель. Егер $\angle ABC = 115°$ болса: а) MN және BC; ә) MN және AB түзулерінің өзара орналасуын анықтаңдар.

76. 75-суреттегі тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде $DA = 4$ дм, $DC = DD_1 = 1$ дм. A_1M мен D_1C түзулерінің арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар, мұндағы M нүктесі – B_1C_1 қырының ортасы.



75-сурет

77. Ағаш арқалық тікбұрышты параллелепипед тәріздес. Арқалықты қырына перпендикуляр етіп кесу үшін оның бетіне белгіні қалай қою керек?

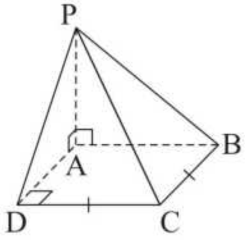
78. b түзуі ABC үшбұрышының A төбесі арқылы өтеді және оның AB мен AC қабырғаларына перпендикуляр. Осы түзу үшбұрыштың BC қабырғасына қатысты қалай орналасқан?

79. а) Ұзын бөлшектің түрі тікбұрышты параллелепипед тәріздес. Оның көлденең қимасы, яғни параллелепипедтің бүйір қырына перпендикуляр жазықтықпен қимасы – қабырғасы 1 дм-ге тең шаршы. Іс жүзінде осы параллелепипедтің диагоналінің ұзындығын қалай табуға болады? Жауабын түсіндіріңдер.

ә) Сіріңке қорапшасын тікелей өлшеместен қағаз бетіне оның диагоналіне тең кесінді салыңдар.

80. MN кесіндісі α жазықтығына перпендикуляр және оны O нүктесінде қияды да, сол нүктеде қақ бөлінеді. α жазықтығында өзара тең OK мен OP кесінділері жүргізілген. $MK = NP$ болатынын дәлелдеңдер.

81. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында: а) $A_1B_1 \perp B_1C$; ә) $A_1C \perp BD$ болатынын дәлелдеңдер.



76-сурет

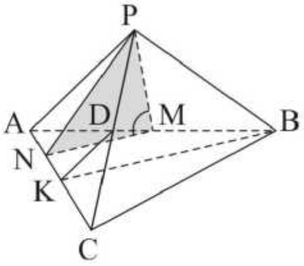
82. $ABCD$ шаршысы – $PABCD$ пирамидасының табаны. PA түзуі табан жазықтығына перпендикуляр (76-сурет). а) $CD \perp PD$; ә) $BC \perp PB$; б) $\Delta PAD = \Delta PAB$; в) $\Delta PBC = \Delta PDC$ болатынын дәлелдеңдер.

83. $ABCD$ тіктөртбұрышы – диагоналі 10 см-ге тең $SABCD$ пирамидасының табаны. $SB \perp (ABC)$, $SA = 10$ см, $SC = 8\sqrt{2}$ см екені белгілі болса, пирамиданың SD қырын және табанының AD мен DC қабырғаларын табыңдар.

B деңгейі

84. $DABC$ дұрыс тетраэдрі берілген, O – оның ABC табаны медианаларының қиылысу нүктесі, M – DC кесіндісіне тиісті нүкте. AB мен OM түзулерінің арасындағы бұрыш 90°-қа тең болатынын дәлелдеңдер.

85. Әрбір қыры 14 см-ге тең $PABCD$ пирамидасы берілген, оның табаны – $ABCD$ шаршысы. M нүктесі – PC кесіндісінің ортасы, ал N нүктесі AC кесіндісін $AN : AC = 0,25$ қатынасына бөледі. MN кесіндісінің ұзындығын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.



77-сурет

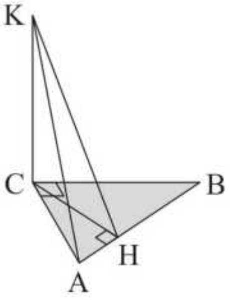
86. 77-суретте барлық қыры 12 см-ге тең $PABC$ тетраэдрі берілген. M, D, K нүктелері, сәйкесінше, AB, PC, AC қырларының орталары. PM мен BK түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

87. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің табаны – қабырғасы 6 см-ге, ауданы 18 см^2-ге тең ромб. AC мен A_1B_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

88. O нүктесі центрі болатын шеңбер α жазықтығында жатыр. OM түзуі α жазықтығына перпендикуляр. M нүктесі шеңбердің A нүктесімен кесінді арқылы қосылған. а) Егер OM = 1,5 дм, MA = 1,7 дм болса, шеңбердің радиусын табыңдар. ә) MA түзуі A нүктесінен шеңберге жүргізілген жанамаға перпендикуляр деген ақиқат па? Жауабын түсіндіріңдер.

89. Жерді қазып, тігінен екі баған орнатылған, олардың жерден биіктіктері a м және b м, ал аралары c м-ге тең. Осы бағандардың төбелері арқылы сым тартылған. Сол сымның ұзындығын табыңдар (сым салбыраусыз қатты тартылған жағдайда).

90. Тікбұрышты ΔABC-ның C төбесінен оның жазықтығына перпендикуляр CK түзуі мен CH биіктігі жүргізілген (78-сурет). Егер AC = 12 см, BC = 16 см, AK = 20 см болса, KH қашықтығын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.



78-сурет

91. ΔABC-ның периметрі 82 см-ге тең. AB қабырғасының ортасындағы M нүктесіне үшбұрыш жазықтығына перпендикуляр болатын, ұзындығы 12 см-ге тең MK кесіндісі тұрғызылған. E мен F нүктелері, сәйкесінше, AC мен BC қабырғаларының орталары. Егер KF = 15 см, KE = 20 см болса, AK кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

92. α жазықтығында a мен b параллель түзулері берілген. α жазықтығында жатпайтын O нүктесінен a мен b түзулеріне, сәйкесінше, OA мен OB перпендикулярлары жүргізілген. AB түзуінің a мен b түзулеріне перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

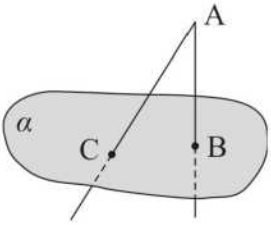
93. Қыры b-ға тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Осы кубтың AB қырының ортасы арқылы AC түзуіне перпендикуляр өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Осы қиманың ауданын табыңдар.

6. Перпендикуляр және көлбеу

Тақырыпты оқу барысында:

- кеңістіктегі перпендикулярдың, көлбеудің және көлбеудің проекциясының анықтамалары мен қасиеттерін білесіңдер;
- оларды есептер шығаруда қолданасыңдар.

Берілген нүктеден жазықтыққа жүргізілген перпендикуляр деп бір ұшы осы жазықтықта жататын оған перпендикуляр кесінді аталады.



79-сурет

Мысалы, α жазықтығына перпендикуляр болатын және оны B нүктесінде қиятын AB сәулесін жүргізейік (79-сурет). Сонда AB кесіндісі A нүктесінен α жазықтығына жүргізілген перпендикуляр, ал B нүктесі осы перпендикулярдың *табаны* деп аталады.

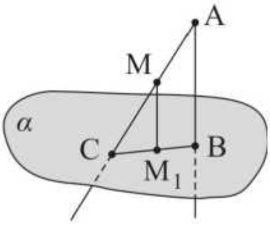
Берілген нүктеден жазықтыққа бір ғана перпендикуляр жүргізуге болатынын айта кетелік, себебі осы нүкте арқылы жазықтыққа перпендикуляр бір ғана түзу жүргізуге болады. Нүктеден жазықтыққа жүргізілген **перпендикулярдың ұзындығы** сол нүктеден осы жазықтыққа дейінгі **арақашықтық** деп аталады.

Берілген нүктеден жазықтыққа жүргізілген көлбеу деп бір ұшы осы жазықтықта жататын оған перпендикуляр емес кесінді аталады.

Мысалы, 79-суреттегі AC кесіндісі A нүктесінен α жазықтығына жүргізілген көлбеу, ал C нүктесі осы көлбеудің *табаны* деп аталады.

Нүктенің жазықтықтағы проекциясы деп сол нүктеден осы жазықтыққа жүргізілген перпендикулярдың табаны аталады.

Мысалы, 79-суреттегі B нүктесі – A нүктесінің α жазықтығындағы проекциясы.



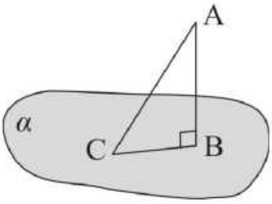
80-сурет

Фигураның жазықтықтағы проекциясы деп оның барлық нүктелерінің осы жазықтықтағы проекцияларының жиыны аталады.

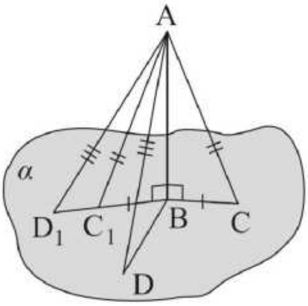
Мысалы, 80-суреттегі BC кесіндісі – AC көлбеуінің α жазықтығындағы проекциясы. Егер AC кесіндісінен M нүктесін алып, оның α жазықтығындағы проекциясы болатын M_1 нүктесін салсақ, онда BM_1 кесіндісі AM кесіндісінің α жазықтығындағы проекциясы болады (80-сурет).

Теорема. **Егер нүктеден жазықтыққа перпендикуляр мен көлбеу жүргізілсе, онда перпендикуляр көлбеуден қысқа болады.**

Дәлелдеуі. AB α жазықтығына перпендикуляр, ал AC көлбеу болсын (81-сурет). Сонда тікбұрышты ABC үшбұрышында AB катеті AC гипотенузасынан қысқа.



81-сурет



82-сурет

Бұл теоремадан AB қашықтығы A нүктесінен α жазықтығының кез келген нүктесіне дейінгі қашықтықтардың ең қысқасы екені шығады.

Егер бір нүктеден жазықтыққа екі көлбеу жүргізілген болса, онда:

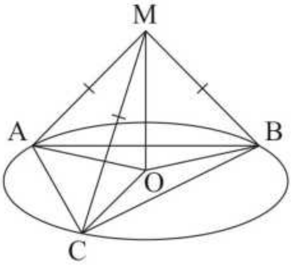
1) *проекциялары тең көлбеулердің өздері де тең болады және керісінше, тең көлбеулердің проекциялары да тең болады;*

2) *проекциялары тең емес екі көлбеудің қайсысының проекциясы үлкен болса, сол көлбеу үлкен, керісінше, үлкен көлбеудің проекциясы да үлкен болады.*

82-суретті пайдаланып, осы қасиеттерді өздігінен негіздеңдер.

Есеп. Егер кеңістіктегі нүкте үшбұрыштың барлық төбелерінен бірдей қашықтықта болса, онда ол нүктенің үшбұрыш жазықтығындағы проекциясы осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі болатынын дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. ΔABC мен оның жазықтығында жатпайтын M нүктесі берілсін. M нүктесінен осы жазықтыққа бір ғана перпендикуляр жүргізуге болады. O нүктесі ABC жазықтығына жүргізілген MO перпендикулярының табаны болсын және ол нүкте есептің шартында айтылғандай ABC үшбұрышының ешбір төбесімен беттеспесін (83-сурет). Сонда MA, MB, MC тең көлбеулерінің, сәйкесінше, OA, OB, OC проекциялары



83-сурет

да тең болады. Демек, O нүктесі – ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі.

Пирамиданың төбесінен оның табан жазықтығына жүргізілген перпендикуляр пирамиданың *биіктігі* деп аталатынын айта кетелік.

СҰРАҚТАР

1. Берілген нүктеден жазықтыққа жүргізілген перпендикулярдың, көлбеудің анықтамаларын беріңдер.

2. Берілген нүктеден жазықтыққа жүргізілген перпендикуляр мен көлбеудің қасиеттерін тұжырымдаңдар.

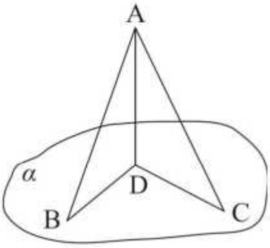
3. Фигураның жазықтықтағы проекциясы дегеніміз не?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

94. 84-суретте AD түзуі α жазықтығына перпендикуляр. 84-суретті пайдаланып, мына тапсырмаларды орындаңдар:

1) көлбеулер мен олардың проекцияларын көрсетіңдер;

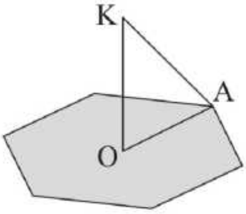


84-сурет

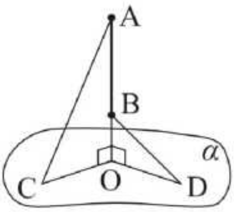
2) егер: а) $AB < AC$; ә) $AB = AC$ болса, BD мен CD кесінділерін салыстырыңдар;

3) егер: а) $AB : AC = 10 : 17$, ал осы көлбеулердің α жазықтығындағы проекциялары 12 см және 30 см-ге тең болса; ә) көлбеулердің ұзындықтары 17 см және 25 см, ал олардың проекцияларының айырымы 12 см болса, AD кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

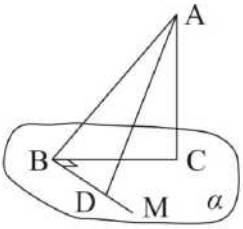
95. Дұрыс алтыбұрыштың O центрі арқылы оның жазықтығына перпендикуляр болатын OK түзуі жүргізілген (85-сурет). Егер осы алтыбұрыштың қабырғасы 12 см-ге, ал оның төбесінен K нүктесіне дейінгі қашықтық 15 см-ге тең болса, OK қашықтығын табыңдар.



85-сурет



86-сурет

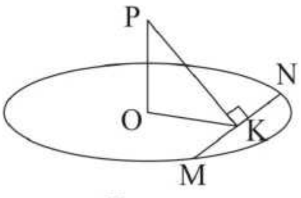


87-сурет

96. α жазықтығына перпендикуляр және онымен ортақ нүктесі жоқ AB кесіндісінің ұштарынан α жазықтығына $AC = 40$ см және $BD =$ $= 25$ см болатын көлбеулер жүргізілген. O нүктесі осы кесіндінің α жазықтығындағы проекциясы және $CO = OD = 24$ см (86-сурет). AB кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

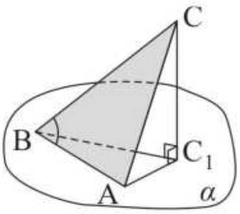
97. 87-суретте $AC \perp \alpha$, $BM \perp BC$. а) $BM \perp BA$ болатынын дәлелдеңдер және егер $BD = 5$ см, $AB = 12$ см болса, AD-ны табыңдар.

98. Радиусы 6 см-ге тең дөңгелектің O центрінен оның жазықтығына перпендикуляр түзу жүргізілген, оған P нүктесі белгіленген және $OP = 1$ см (88-сурет). P нүктесінен осы дөңгелектің 2 см-ге тең MN хордасына дейінгі қашықтықты табыңдар.



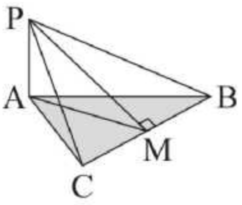
88-сурет

99. ABC үшбұрышының 16 см-ге тең AB қабырғасы α жазықтығында жатыр, C_1 нүктесі C нүктесінің осы жазықтықтағы проекциясы және $CC_1 = 24$ см (89-сурет). Егер BC қабырғасының проекциясы 18 см-ге, ал $\angle ABC = 60°$ болса, AC қабырғасының α жазықтығындағы проекциясын табыңдар.



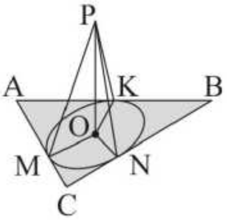
89-сурет

100. Қабырғасы 8 см-ге тең болатын теңқабырғалы ΔABC берілген. A нүктесі арқылы оның жазықтығына 6 см-ге тең AP перпендикуляры жүргізілген (90-сурет). P нүктесінен: а) үшбұрыштың B және C төбелеріне дейінгі; ә) BC қабырғасына дейінгі қашықтықты табыңдар.



90-сурет

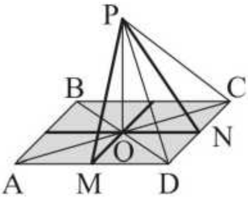
101. Күзет иттерінің үш үйшігі қабырғалары 40 м, 40 м және 50 м-ге тең үшбұрышты аланның төбелерінде орналасқан. Егер тік баған осы алаңға сырттай сызылған шеңбердің центріне орнатылса, онда осы үйшіктер бағанның төбесіне бекітілген шамдар арқылы түн мезгілінде бірдей жарықтанады деген дұрыс па? Егер дұрыс болса, онда биіктігі 15 м бағанның төбесінен үйшіктерге дейінгі жарық сәулесінің ұзындығын 0,1 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.



91-сурет

102. а) Егер кеңістіктегі нүкте үшбұрыштың барлық қабырғаларынан бірдей қашықтықта болса, онда оның үшбұрыш жазықтығындағы проекциясы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі болатынын дәлелдеңдер (91-сурет).

ә) Қабырғалары 13 см, 13 см және 10 см болатын үшбұрыш берілген. P нүктесі үшбұрыштың әрбір қабырғасын қамтитын түзулерден 5 см қашықтықта орналасқан. P нүктесінен үшбұрыш жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.



92-сурет

103. 92-суретті пайдаланып: а) шаршының қабырғаларынан бірдей қашықтықта жататын нүкте оның төбелерінен де бірдей қашықтықта жататынын; ә) шаршы болмайтын тіктөртбұрыштың төбелерінен бірдей қашықтықта жатқан нүкте оның қабырғаларынан бірдей қашықтықта жатпайтынын дәлелдеңдер.

104. $ABCD$ шаршысы берілген. Оның диагональдарының O қиылысу нүктесінен шаршы жазықтығына OP перпендикуляры жүргізілген. $AB = OP = \sqrt{2}$ дм болса, P нүктесінен: а) шаршының төбелеріне дейінгі; ә) шаршының қабырғаларына дейінгі қашықтықты табыңдар.

В деңгейі

105. а) Берілген M нүктесінен α жазықтығына жүргізілген барлық көлбеулердің орталарындағы нүктелер жиыны қандай фигураны құрайды?

ә) Берілген M нүктесінен α жазықтығына жүргізілген барлық тең көлбеулердің орталарындағы нүктелер жиыны қандай фигураны құрайды?

106. M нүктесінің $ABCD$ ромбысының жазықтығына түскен проекциясы – оның диагональдарының O қиылысу нүктесі. Егер $MC = 17$ см, $MD = 3\sqrt{29}$ см, ал ромбының ауданы 96 $см^2$ болса, MC мен MD кесінділерінің осы жазықтықтағы проекцияларының ұзындықтарын табыңдар.

107. Қабырғасы 9 см-ге тең дұрыс ΔABC-ның O центрі арқылы $PO \perp (ABC)$ түзуі жүргізілген, $PO = 12$ см. C нүктесі арқылы $CK \parallel PO$ түзуі жүргізілген және $CK = 0{,}8 \cdot PO$. Егер K мен P нүктелері: а) ABC жазықтығының бір жағында; ә) ABC жазықтығының әртүрлі жағында жататын болса, PK кесіндісінің ұзындығын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

108. а) P мен M нүктелері бір түзуде жатпайтын A, B, C нүктелерінен бірдей қашықтықта жатыр. PM түзуі ABC жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

ә) Үшбұрыштың қабырғалары 7 см, 15 см және 20 см. Үшбұрыштың әрбір төбесінен 32,5 см қашықтықтағы нүкте оның жазықтығынан қандай қашықтықта болады?

109. Үстірт қыратында орналасқан бірдей үш құрылғы бір мезгілде аспанда болған дене жарқылын анықтап белгіледі. Әр құрылғы денеге дейінгі қашықтықтың d-ға тең екенін анықтады. Егер құрылғылардың арақашықтықтары a, b, c болса, денеден қыратқа дейінгі қашықтықты қалай есептеуге болады?

Үстірт қыраты, Маңғыстау облысы

110. Кеңістікте: а) берілген екі нүктеден; ә) үшбұрыштың төбелерінен; б) тіктөртбұрыштың төбелерінен бірдей қашықтықта жататын барлық нүктелер жиыны қандай фигураны құрайды?

7. Үш перпендикуляр туралы теорема

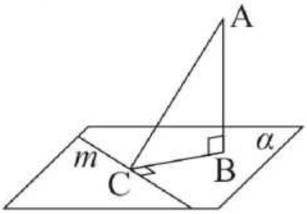
Тақырыпты оқу барысында:

- үш перпендикуляр туралы теореманы және оған кері теореманы білесіңдер;
- оларды есептер шығаруда қолданасыңдар.

Теорема (*үш перпендикуляр туралы*). **Егер жазықтықтағы түзу көлбеудің осы жазықтықтағы проекциясына перпендикуляр болса, онда ол көлбеудің өзіне де перпендикуляр болады.**

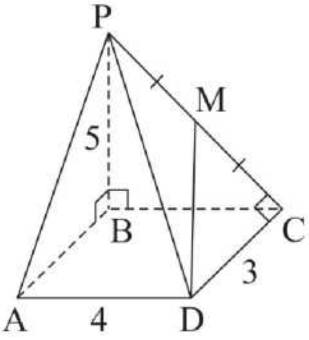
Дәлелдеуі. AB – α жазықтығына перпендикуляр, AC – көлбеу, BC – осы көлбеудің α жазықтығындағы проекциясы, ал осы жазықтықтағы m түзуі BC-ға перпендикуляр (93-сурет). $m \perp AC$ екенін дәлелдейік. m түзуі ABC жазықтығындағы қиылысатын екі BC мен AB түзулеріне перпендикуляр (себебі шарт бойынша $AB \perp \alpha$, $m \subset \alpha$ және $BC \perp m$). Сондықтан m түзуі ABC жазықтығына перпендикуляр, демек, AC түзуіне де перпендикуляр.

Теорема (*үш перпендикуляр туралы теоремаға кері теорема*). **Егер жазықтықтағы түзу осы жазықтыққа жүргізілген көлбеуге перпендикуляр болса, онда ол көлбеудің осы жазықтықтағы проекциясына да перпендикуляр болады.**



93-сурет

Дәлелдеуі. α жазықтығының m түзуі осы жазықтыққа жүргізілген AC көлбеуіне перпендикуляр болсын (93-сурет). Сонда m түзуі ABC жазықтығының қиылысатын AC мен AB түзулеріне перпендикуляр болады, сондықтан ол осы жазықтықтағы BC түзуіне де перпендикуляр болады.



94-сурет

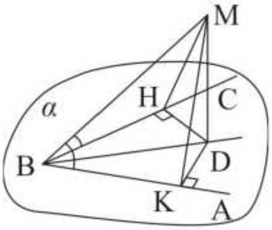
1-есеп. Пирамиданың 5 дм-ге тең PB бүйір қыры оның тіктөртбұрыш болатын $ABCD$ табанына перпендикуляр және $AB = 3$ дм, $BC = 4$ дм. PDC үшбұрышының DM медианасын 0,1 дм-ге дейінгі дәлдікпен табу керек.

Шешуі. PC – көлбеу, BC – оның ABC жазықтығындағы проекциясы және $BC \perp DC$ болғандықтан, $PC \perp DC$ (үш перпендикуляр туралы теорема бойынша). Демек, ΔDMC тікбұрышты (94-сурет). $DM = \sqrt{DC^2 + MC^2}$, $MC = 0,5PC =$

$= 0,5\sqrt{5^2+4^2} = 0,5 \cdot \sqrt{41}$ (дм). Сонда $DM = \sqrt{3^2 + \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{77}}{2} \approx 4,4$ (дм).

Жауабы. ≈ 4,4 дм.

2-есеп. α жазықтығында жататын жазыңқы емес *ABC* бұрышының *B* төбесі – осы жазықтыққа жүргізілген *MB* көлбеуінің табаны. Көлбеу берілген бұрыштың қабырғаларымен тең сүйір бұрыштар құрайды. Осы көлбеудің α жазықтығындағы *BD* проекциясы берілген бұрыштың биссектрисасында жататынын дәлелдеу керек.



95-сурет

Дәлелдеуі. *ABC* бұрышының *AB* мен *BC* қабырғаларына, сәйкесінше, *DK* мен *DH* перпендикулярларын және оның жазықтығына *MK* мен *MH* көлбеулерін жүргіземіз (95-сурет). Сонда $MK \perp AB$ және $MH \perp BC$ болады (үш перпендикуляр туралы теорема бойынша). Бұдан, $\Delta MKB = \Delta MHB$ (гипотенузасы мен сүйір бұрышы бойынша). Осы үшбұрыштардың теңдігінен $MK = MH$ аламыз. Бұдан $DK = DH$ болатыны шығады (бір нүктеден жүргізілген тең көлбеулердің проекциялары да тең болады). *D* нүктесі *ABC* бұрышының қабырғаларынан бірдей қашықтықта екенін алдық, демек, *BD* кесіндісі осы бұрыштың биссектрисасында жатыр.

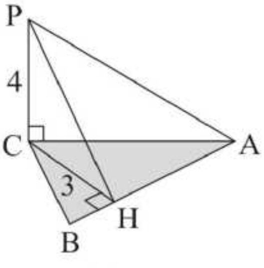
СҰРАҚТАР

1. Үш перпендикуляр туралы теореманы тұжырымдаңдар.

2. Үш перпендикуляр туралы теоремаға кері теореманы тұжырымдаңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі



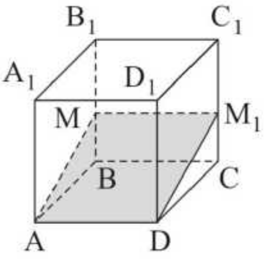
96-сурет

111. ΔABC берілген және оның *CH* биіктігі жүргізілген. *P* нүктесінен *ABC* жазықтығына *PC* перпендикуляры жүргізілген (96-сурет). 1) Ұзындығы *P* нүктесінен *AB* түзуіне дейінгі қашықтыққа тең болатын кесіндіні көрсетіңдер. Жауабын түсіндіріңдер. 2) Егер *PC* = 4 см, *CH* = 3 см болса, *P* нүктесінен *AB* қабырғасына дейінгі қашықтықты табыңдар.

112. $\angle C = 90°$, $AC = 7\sqrt{2}$ см болатын теңбүйірлі ABC үшбұрышы берілген. P нүктесінен ABC жазықтығына ұзындығы 24 см-ге тең PC перпендикуляры жүргізілген. P нүктесінен AB қабырғасына дейінгі қашықтықты табыңдар.

113. $\angle C = 90°$, $BC = 12$ см болатын ΔABC берілген. Гипотенузаның ортасындағы K нүктесінен үшбұрыш жазықтығына ұзындығы 8 см-ге тең KH перпендикуляры жүргізілген. H нүктесінен AC қабырғасына дейінгі қашықтықты табыңдар.

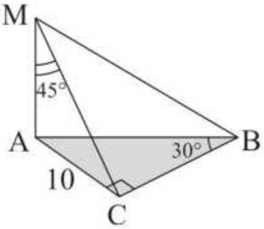
114. $ABCD$ параллелограмының B төбесінен оның жазықтығына ұзындығы $\sqrt{37}$ см-ге тең BM перпендикуляры жүргізілген. $AB = 4$ см, $AD = 6$ см, $\angle C = 60°$ болса, M нүктесінен параллелограмның AD мен DC қабырғаларына дейінгі қашықтықтарды табыңдар.



97-сурет

115. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $MM_1 \parallel AD$ (97-сурет). 1) AMM_1D төртбұрышының түрін анықтаңдар: а) шаршы; ә) сүйір бұрышы A болатын ромб; б) трапеция; в) $AD \neq DM_1$ болатын тіктөртбұрыш. Жауабын түсіндіріңдер. 2) Қай кесіндінің ұзындығы M нүктесінен AD түзуіне дейінгі арақашықтық болады?

116. $ABCD$ ромбысының AC диагоналі 16 см-ге тең. M нүктесінен оның жазықтығына 6 см-ге тең MB перпендикуляры және MA мен MC көлбеулері жүргізілген. 1) AMC үшбұрышының MO биіктігін жүргізіңдер. 2) Егер $\angle BMO = 45°$ болса, ΔAMC-ның ауданын табыңдар.

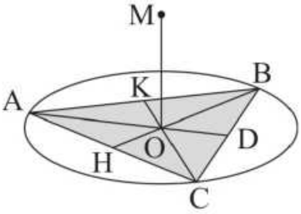


98-сурет

117. $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$, $AC = 10$ см болатын ΔABC берілген. M нүктесінен үшбұрыш жазықтығына MA перпендикуляры және MC мен MB көлбеулері жүргізілген (98-сурет). Егер $\angle AMC = 45°$ болса, ΔMCB-ның тікбұрышты болатынын дәлелдеп, оның ауданын табыңдар.

118. а) Ромбының жазықтығында жатпайтын нүкте оның төбелерінен бірдей қашықтықта орналасқан. Ромбының бұрыштарын табыңдар. ә) M нүктесі шаршы жазықтығынан 1,4 дм, ал оның әр қабырғасынан 5 дм қашықтықта орналасқан. Шаршының ауданын табыңдар.

119. Қабырғасы 3 дм-ге тең дұрыс ΔABC берілген және оған O нүктесі центрі болатын шеңбер сырттай сызылған (99-сурет). Үшбұрыш жазықтығына ұзындығы 1,5 дм-ге тең OM перпендикуляры жүргізілген. M нүктесінен үшбұрыштың қабырғаларына дейінгі қашықтықтарды табыңдар.



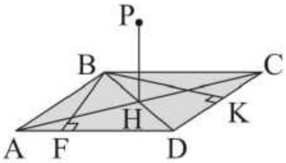
99-сурет

120. $\angle C = 90°$, $AC = 9$ см, $BC = 6$ см болатын ABC үшбұрышы берілген. M нүктесінен үшбұрыш жазықтығына MH перпендикуляры, мұндағы $H \in (ABC)$ және оның катеттерімен тең бұрыштар құрайтын MC көлбеуі жүргізілген. A нүктесінен бастап санағанда CH сәулесі үшбұрыштың гипотенузасын қандай қатынаста бөледі?

В деңгейі

121. $\angle C = 90°$ болатын ΔABC берілген. M нүктесінен үшбұрыш жазықтығына MC перпендикуляры және MA мен MB көлбеулері жүргізілген. $MC = 2$ дм, $\angle MBC = 30°$, $\angle MAC = 45°$ болса, M нүктесінен AB қабырғасына дейінгі қашықтықты табыңдар.

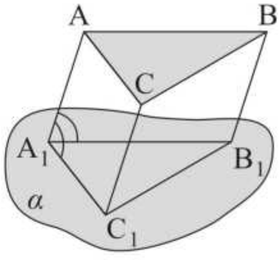
122. $ABCD$ параллелограмының жазықтығына жүргізілген PH перпендикулярының табаны оның диагональдарының H қиылысу нүктесі болады, $PH = 0,8$ дм (100-сурет). Егер параллелограмның биіктіктері $BK = 3$ дм және $BF = 1,2$ дм болса, P нүктесінен оның қабырғаларына дейінгі қашықтықтарды табыңдар.



100-сурет

123. $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см болатын ΔABC берілген. M нүктесінен үшбұрыш жазықтығына $MO = 4$ см перпендикуляры және MA, MB, MC тең көлбеулері жүргізілген. M нүктесінен үшбұрыштың қабырғаларына дейінгі қашықтықтарды табыңдар.

124. Теңқабырғалы ABC үшбұрышын қамтитын жазықтық α жазықтығына параллель. Үшбұрыштың төбелерінен α жазықтығын A_1, B_1, C_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген (101-сурет). $\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1$ екені белгілі болса, CBB_1C_1 тіктөртбұрыш болатынын дәлелдеңдер.



101-сурет

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

125. Барлық қырлары 4 см-ге тең $PABC$ пирамидасын кескіндеп, тапсырмаларды орындаңдар. 1) Неліктен AC түзуі PB қырына перпендикуляр болатынын түсіндіріңдер. 2) PB мен MN түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар, мұндағы M және N, сәйкесінше, AP және CP қырларының орталары.

126. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубын кескіндеп, тапсырмаларды орындаңдар. 1) а) ABC жазықтығына перпендикуляр түзулерді; ә) ABC жазықтығына жүргізілген қандай да бір көлбеу мен оның проекциясын атаңдар. 2) A_1C түзуі BD түзуіне перпендикуляр екенін дәлелдеңдер.

127. M нүктесінен α жазықтығына MH перпендикуляры және MA мен MB көлбеулері жүргізілген. $\angle MBH = 60°$, $\angle MAH = 30°$ және MB көлбеуінің проекциясы 9 см-ге тең болса, әр көлбеудің ұзындығын табыңдар.

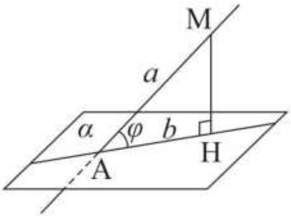
128. ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, $AC = 5\sqrt{2}$ см, $BC = 35\sqrt{2}$ см. P нүктесінен үшбұрыш жазықтығына 24 см-ге тең PC перпендикуляры жүргізілген. P нүктесінен AB түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

8. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш

Тақырыпты оқу барысында:

- түзу мен жазықтық арасындағы бұрыштың анықтамасын білесіңдер;
- сол бұрышты кескіндейсіңдер және оның шамасын табатын боласыңдар.

Түзу мен оған перпендикуляр жазықтық арасындағы бұрыш 90°-қа, ал түзу мен оған параллель жазықтық арасындағы бұрыш 0°-қа тең деп алынады.



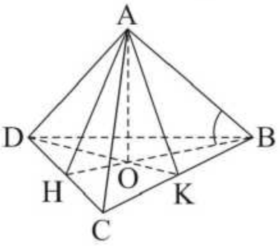
102-сурет

Түзу мен оған перпендикуляр болмайтын жазықтық арасындағы бұрыш деп осы түзу мен оның жазықтықтағы проекциясының арасындағы бұрыш аталады. 102-суретте a түзуі мен α жазықтығы арасындағы $\angle MAH = \varphi$, $\mathbf{0° \le \varphi < 90°}$.

Перпендикуляр емес жазықтықты қиятын түзу мен оның осы жазықтықтағы проекциясының арасындағы бұрыш түзудің осы жазықтықта жататын кез келген түзумен құрайтын бұрыштарының ең кішісі болатынын атап өтейік.

1 - есеп. Барлық қыры a-ға тең $DABC$ тетраэдрі берілген. AB түзуі мен BCD жазықтығы арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табу керек.

Шешуі. Берілген тетраэдрдің барлық жақтары тең болғандықтан, BCD жағын оның табаны деп алайық. AB түзуі мен BCD жазықтығы арасындағы бұрыш – осы түзу мен оның берілген жазықтықтағы проекциясының арасындағы бұрыш. Сол проекцияны салу үшін A нүктесінен BCD жазықтығына перпендикуляр жүргізу керек. AB, AC және AD көлбеулері тең болғандықтан, AO перпендикулярының BCD жазықтығындағы табаны – ΔBCD-ға сырттай сызылған шеңбердің центрі. ΔBCD теңқабырғалы болғандықтан, ол BH пен DK медианаларының қиылысу нүктесі болады (103-сурет). Сонда AB түзуінің BCD жазықтығындағы проекциясы – BO түзуі, демек, ABO – ізделінді бұрыш. ΔABO-дан мынаны табамыз:

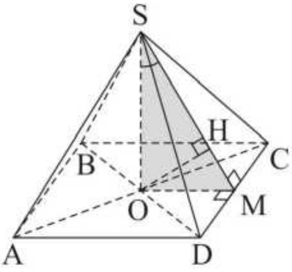


103-сурет

$$\cos\angle ABO = \frac{BO}{AB} = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) : a = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577, \text{ бұдан } \angle ABO \approx 55°.$$

Жауабы. ≈ 55°.

2-есеп. $SABCD$ пирамидасының $ABCD$ табаны – шаршы, ал бүйір қырлары тең. Табанына жүргізілген SO перпендикуляры мен SDC жазықтығының арасындағы бұрышты табу керек.



104-сурет

Шешуі. O – табан диагональдарының қиылысу нүктесі, $SO \perp AC$ және $SO \perp BD$ (себебін түсіндіріңдер), яғни $SO \perp (ABC)$. SO түзуі SDC жазықтығына көлбеу, оның проекциясын салайық. Ол үшін SOM үшбұрышының OH биіктігін жүргіземіз, мұндағы M нүктесі DC қабырғасының ортасы (104-сурет) және OH кесіндісінің SDC жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдейік.

Салуымыз бойынша $OH \perp SM$ және $OH \perp DC$, себебі $DC \perp (SOM)$, бұдан $OH \perp (SDC)$ екені шығады. Демек, SH кесіндісі – SO көлбеуінің SDC жазықтығындағы проекциясы және OSM – ізделінді бұрыш.

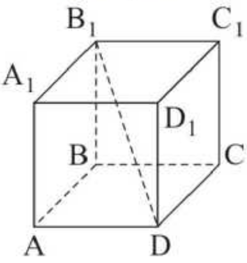
СҰРАҚТАР

1. Егер түзу мен жазықтық: а) параллель; ә) перпендикуляр болса, олардың арасындағы бұрыш неге тең?

2. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш деп нені атайды?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі



105-сурет

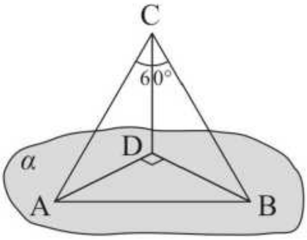
129. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген (105-сурет). 1) B_1D кесіндісінің: а) $ABCD$; ә) DD_1C_1C; б) BB_1C_1C жағының жазықтығына түскен проекциясы болатын кесіндіні көрсетіңдер. 2) B_1D түзуінің DD_1C_1 жазықтығына көлбеулік бұрышының тангенсін табыңдар.

130. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің табаны – шаршы. Параллелепипедтің B_1D диагоналі мен оның DD_1C_1C бүйір жағының арасындағы бұрыш 30°-қа тең. Осы диагональ мен табан жазықтығы арасындағы бұрышты табыңдар.

131. $ABCD$ шаршысының B төбесінен оның жазықтығына перпендикуляр BH кесіндісі жүргізілген, BH = 10 см. HA түзуі шаршы жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. HD түзуінің шаршы жазықтығына көлбеулік бұрышын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

132. Тікбұрышты ABC үшбұрышының ($\angle C = 90°$) жазықтығына ұзындығы 24 см-ге тең DC перпендикуляры тұрғызылған. $AC = 12$ см, $BC = 16$ см, O нүктесі – ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі. DA, DB және DO түзулерінің ABC жазықтығымен арасындағы бұрыштарды 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

133. а) C нүктесінен α жазықтығына екі тең CA және CB көлбеулері жүргізілген. Олардың арасындағы бұрыш 60°-қа, ал олардың α жазықтығындағы проекцияларының арасындағы бұрыш 90°-қа тең (106-сурет). AC түзуі мен α жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

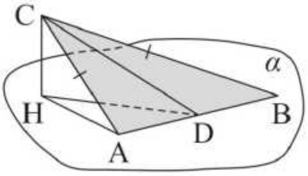


106-сурет

ә) C нүктесінен α жазықтығына өзара тең CA және CB көлбеулері жүргізілген. Көлбеулердің әрқайсысы α жазықтығымен 30° бұрыш жасайды, ал олардың α жазықтығындағы проекцияларының арасындағы бұрыш 120°-қа тең. Егер $AB = 15$ см болса, C нүктесінен α жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

134. $SABCD$ пирамидасының табаны – $ABCD$ тіктөртбұрышы. SB бүйір қыры оның табан жазықтығына перпендикуляр, ал SA мен SC бүйір қырлары табан жазықтығымен, сәйкесінше, 45° және 30° бұрыш жасайды және $SC = 8$ см. SD қырының ұзындығын және SD түзуі мен табан жазықтығының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

135. Теңбүйірлі ABC үшбұрышының AB табаны α жазықтығында жатыр (107-сурет). Егер $AB = 20$ см, $AC = 22$ см, ал AC кесіндісінің α жазықтығындағы проекциясы 14 см-ге тең болса, осы үшбұрыштың CD биіктігі мен α жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.



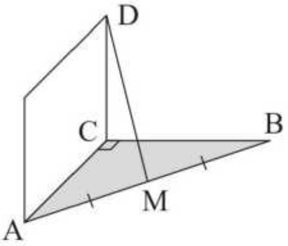
107-сурет

B деңгейі

136. $SABCD$ пирамидасы берілген, оның бүйір қырлары тең, ал $ABCD$ табаны – шаршы. Пирамиданың SO биіктігі h-қа тең, ал SDC бүйір жағының SH биіктігі табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. Пирамиданың бүйір қыры мен табан жазықтығының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

137. Кубтың диагоналі мен оның жағының арасындағы бұрыш оларды таңдап алуға байланысты болмайтынын дәлелдеңдер. Сол бұрыштың шамасын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

138. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы α жазықтығында жатыр, ал оның катеттері осы жазықтықпен 30° және 45° бұрыш құрайды. Үшбұрыштың гипотенузаға жүргізілген биіктігі мен α жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.



108-сурет

139. DC кесіндісі теңбүйірлі тікбұрышты ABC үшбұрышы жазықтығына перпендикуляр ($\angle C = 90°$). M нүктесі – AB гипотенузасының ортасы (108-сурет). Егер $DC = AC$ болса, 1°-қа дейінгі дәлдікпен DM түзуі мен ACD жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

140. Алаңға тігінен орнатылған CA және DB бағандарының биіктіктері, сәйкесінше, 6 м және 9 м, ал олардың табандарының AB қашықтығы $5\sqrt{3}$ м-ге тең. AB кесіндісінің M нүктесіне қадау қағылған, ол бағандардың төбелерімен алаңға бірдей көлбей қатты тартылған MC және MD арқандарымен біріктірілген. MC және MD арқандарының алаңға көлбеулік бұрышын табыңдар.

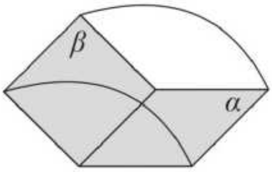
9. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

Тақырыпты оқу барысында:

- екіжақты бұрыштың және оның сызықтық бұрышының анықтамасын білесіңдер;
- екіжақты бұрышты кескіндейсіңдер және оның шамасын табасыңдар;
- екі жазықтықтың перпендикулярлық белгісін білесіңдер және оны есеп шығаруда қолданасыңдар.

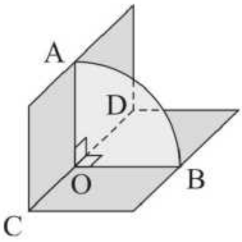
Шекарасы ортақ екі жарты жазықтық кеңістікті екі бөлікке бөледі. **Шекарасы ортақ екі жарты жазықтықтан және кеңістіктің олармен бөлінетін екі бөлігінің бірінен тұратын фигура екіжақты бұрыш деп аталады** (109-сурет).

Екіжақты бұрышты құрайтын жарты жазықтықтар оның *жақтары* деп аталады. Екіжақты бұрыштың екі жағы бар, оның атауы да осыған байланысты. Жарты жазықтықтардың ортақ шекарасы екіжақты бұрыштың *қыры* деп аталады. Біздің айналамызда екіжақты бұрыштың мысалы болатындай көптеген заттар бар, мысалы, үйдің шатыры, жартылай ашық бума, бөлменің екі іргелес қабырғасы.



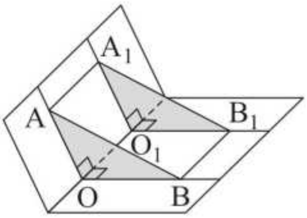
109-сурет

Екіжақты бұрыш былай өлшенеді: екіжақты бұрыштың қырына қандай да бір нүкте белгілеп, осы нүктеден әрбір жағына қырына перпендикуляр болатындай сәулелер жүргізеді. Осы сәулелерден құралған бұрыш *екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы* деп аталады.



110-сурет

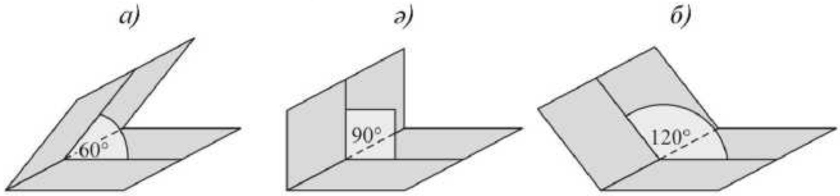
Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы деп төбесі оның қырында, ал қабырғалары оның жақтарында жататын және осы қырына перпендикуляр болатын бұрыш аталады. 110-суретте *AOB* бұрышы қыры *CD* болатын екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы.



111-сурет

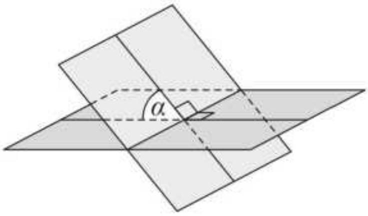
AOB сызықтық бұрышының жазықтығы екіжақты бұрыштың қырына перпендикуляр (түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі бойынша). Екіжақты бұрыштың шексіз көп сызықтық бұрыштары бар. *Екіжақты бұрыштың барлық сызықтық бұрыштары тең* болады. Осы қасиетін 111-суретті пайдалана отырып түсіндіріңдер.

Екіжақты бұрыштың градустық өлшемі деп оның сызықтық бұрышының градустық өлшемі аталады. Мысалы, 112, а-суретте градустық өлшемі 60°-қа тең екіжақты бұрыш кескінделген (қысқаша екіжақты бұрыш 60°-қа тең деп айтады).



112-сурет

Егер екіжақты бұрыш 90°-қа тең болса, оны *тік* бұрыш деп, 90°-тан кем болса, *сүйір* бұрыш деп, ал егер 90°-тан артық, бірақ 180°-тан кем болса, *доғал* бұрыш деп атайды. 112, *а*-суреттегі екіжақты бұрыш сүйір, 112, *ә*-суретте тік, ал 112, *б*-суретте доғал.



113-сурет

Екі қиылысатын жазықтық қыры ортақ төрт екіжақты бұрышты құрайды (113-сурет). Егер осы екіжақты бұрыштардың бірі α-ға тең болса, онда басқа бұрыштар $180° - \alpha$, α, $180° - \alpha$ болады. Егер екіжақты бұрыштардың біреуі тік болса, онда басқалары да тік болады.

Қиылысатын екі жазықтықтың арасындағы бұрыштың градустық өлшемі деп олардың қиылысуынан пайда болған екіжақты бұрыштардың басқаларының әрқайсысынан үлкен болмайтын біреуінің градустық өлшемі аталады.

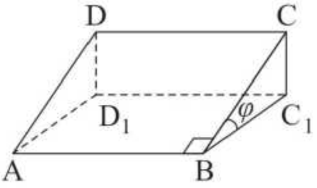
Қиылысатын жазықтықтардың арасындағы бұрыштың градустық өлшемі 90°-тан артық емес. Ол осы жазықтықтарда жататын және жазықтықтардың қиылысу сызығына перпендикуляр болатын түзулердің арасындағы бұрышқа тең.

Қиылысушы екі жазықтықтың арасындағы бұрыш 90°-қа тең болса, бұл жазықтықтар перпендикуляр деп аталады.

Теорема *(жазықтықтардың перпендикулярлық белгісі).* **Егер екі жазықтықтың бірі екінші жазықтыққа перпендикуляр түзу арқылы өтсе, онда ол жазықтықтар перпендикуляр болады.** (Өздігінен дәлелдеңдер.)

Беттесетін немесе параллель жазықтықтардың арасындағы бұрышты 0°-қа тең деп алады. Егер екіжақты бұрыш көпжақтың қыры ортақ көршілес екі жағын қамтитын жарты жазықтықтардан құралған болса, онда оны қысқаша көпжақтың осы қырындағы екіжақты бұрышы деп атайды, мысалы, пирамиданың бүйір қырындағы екіжақты бұрыш.

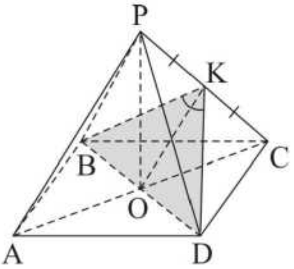
Іс жүзінде, көлденең жазықтықпен сүйір бұрыш құрайтын жазықтықты беткей деп атайды. Беткей мен оның проекциясы болатын жазықтық суретте екі тіктөртбұрыш түрінде кескінделеді, мысалы, $ABCD$ және ABC_1D_1 (114-сурет). CDD_1C_1 жазықтығы ABC_1D_1 көлденең жазықтығымен тік екіжақты бұрыш құрайды, ал CBC_1 бұрышы қыры AB болатын екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы болады. CB кесіндісі және ұштары AB мен CD кесіндісінде жататын оған параллель кез келген кесінді, ең үлкен беткейдің сызығы деп, ал CBC_1 бұрышы беткейдің көлбеулігі деп аталады. Мысалы, ең үлкен беткейдің сызығы бойымен төбеден су ағады, егер жолдың көлбеулік беткейі 15°-тан кем болса, оның бойымен жаяу жүргіншілер мен көліктерге еркін қозғалуға рұқсат беріледі, ал егер 15°-тан артық болса, онда жолдың бөлігі қауіпті екенін ескертетін белгі орнатылады.



114-сурет

Есеп. Әрбір қыры b-ға тең, табаны шаршы болатын төртбұрышты пирамиданың көршілес екі бүйір жағының арасындағы екіжақты бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табу керек.

Шешуі. $PABCD$ берілген төртбұрышты пирамида болсын (115-сурет). Оның бүйір жақтары – өзара тең дұрыс үшбұрыштар. PBC мен PCD жақтарынан құралған екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышын салайық. Ол үшін PC қырына DK мен BK перпендикулярларын жүргіземіз, K нүктесі PC қырының ортасы (неге екенін түсіндіріңдер). BKD – ізделінді бұрыш. Тікбұрышты ΔOKD-дан мынаны аламыз: $\angle OKD = \frac{1}{2}\angle BKD$ (неге екенін түсіндіріңдер). $OD = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ (шаршы диагоналінің жартысы), $KD = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ (ΔPCD-ның медианасы). Сонда $\sin\angle OKD = $ $= \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 0{,}816$. Демек, $\angle OKD \approx 55°$, бұдан $\angle BKD \approx 110°$.



115-сурет

Жауабы. ≈ 110°.

СҰРАҚТАР

1. Қандай фигура екіжақты бұрыш деп аталады?

2. Қандай бұрыш екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы деп аталады?

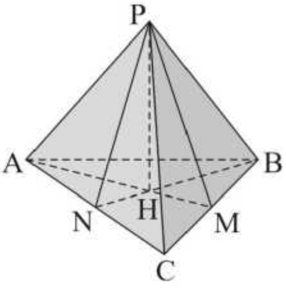
3. Екіжақты бұрыштың градустық өлшемі дегеніміз не?

4. Қандай екіжақты бұрыш: а) тік; ә) сүйір; б) доғал деп аталады?

5. Қиылысатын екі жазықтықтың арасындағы бұрыш дегеніміз не? Оның шамасы қандай болуы мүмкін?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

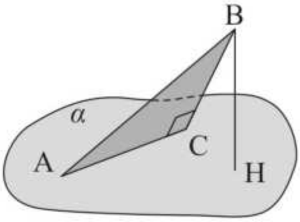


116-сурет

141. 116-суреттегі пирамиданың табаны дұрыс үшбұрыш және барлық бүйір қырлары тең. Бүйір жағы табан жазықтығына 50° бұрышпен көлбеген. Ақиқат болатын теңдікті көрсетіңдер: а) $\angle PAH = 50°$; ә) $\angle MPH = 50°$; б) $\angle PBH = 50°$; в) $\angle PNH = 50°$.

142. а) $PABC$ пирамидасы берілген, оның PB қыры ABC жазықтығына перпендикуляр, ал ACB бұрышы тік. PCB бұрышы AC қыры болатын екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы болатынын дәлелдеп, егер $PB = 4$ см, $PC = 8$ см болса, оның шамасын табыңдар.

ә) $ABCD$ шаршысының B төбесінен оның жазықтығына BM перпендикуляры тұрғызылған. Егер $AB = 5$ см, $DM = 5\sqrt{3}$ см болса, MDC үшбұрышының жазықтығы мен $ABCD$ шаршысының жазықтығынан құралған екіжақты бұрыштың шамасын табыңдар.



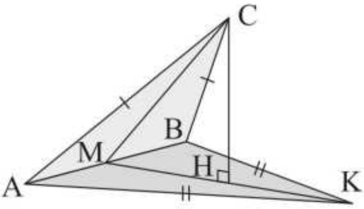
117-сурет

143. ABC үшбұрышының ($\angle C = 90°$) AC катеті α жазықтығында жатыр (117-сурет). Егер ABC жазықтығы мен α жазықтығының арасындағы бұрыш 45°, $AC = 4$ дм, $AB : BC = 3 : 1$ болса, B нүктесінен осы жазықтыққа дейінгі BH қашықтығын табыңдар.

144. $PABC$ пирамидасының AB мен BC қырлары тең, ал PB қыры ABC жазықтығына перпендикуляр. а) PCB бұрышы AC қыры болатын екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы бола ма? ә) Егер $BC = 20$ см, $AC = 32$ см, $PB = 4\sqrt{3}$ см болса, AC қыры болатын екіжақты бұрыштың шамасын табыңдар.

145. BD диагоналі 4 см-ге тең $ABCD$ ромбысы берілген. Ромб жазықтығына оның C төбесінен ұзындығы 8 см-ге тең CM перпендикуляры тұрғызылған. BMD мен ABC жазықтықтарының арасындағы бұрыш 45°. Ромбының ауданын табыңдар.

146. AB табаны ортақ теңбүйірлі ABC мен ABK үшбұрыштары әртүрлі жазықтықтарда жатыр және KM медианасының ортасы – C төбесінің ABK жазықтығындағы проекциясы (118-сурет). Егер $AB = 24$ м, $CB = 4\sqrt{17}$ м, $BK = 20$ м болса, осы үшбұрыштардың жазықтықтарынан құралған екіжақты бұрыштың шамасын табыңдар.



118-сурет

147. BC табаны ортақ ABC мен BDC үшбұрыштары әртүрлі жазықтықтарда жатыр. Олардың табандарына жүргізілген биіктіктері 5 см және 8 см-ге, ал AD қашықтығы 7 см-ге тең. ABC мен BDC жазықтықтарының арасындағы бұрыштың шамасын табыңдар.

148. Дұрыс тетраэдрдің қырындағы екіжақты бұрыштың шамасын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

149. $SABCD$ пирамидасының әрбір қыры a-ға тең, ал табаны – $ABCD$ шаршысы. Пирамиданың CD қырындағы екіжақты бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

B деңгейі

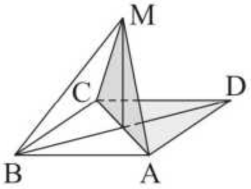
150. $PABC$ пирамидасының барлық бүйір қырлары 13 см-ге тең, ал табаны – $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см болатын тікбұрышты үшбұрыш.
1) Табан жазықтығына перпендикуляр болатын PH-ты және APC мен ABC жазықтықтарының арасындағы сызықтық бұрышты кескіндеңдер.
2) Пирамиданың AC қырындағы екіжақты бұрыштың шамасын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

151. Тікбұрышты ABC үшбұрышының AB гипотенузасы α жазықтығында жатыр және одан C төбесіне дейінгі қашықтық $3{,}6\sqrt{3}$ дм-ге тең. AC мен CB катеттері, сәйкесінше, 12 дм-ге және 9 дм-ге тең. α мен ABC

жазықтықтарының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

152. а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. D_1CD бұрышы ABC мен BD_1C жазықтықтарының арасындағы сызықтық бұрыш екенін дәлелдеп, оның шамасын табыңдар.

ә) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тік параллелепипеді берілген. Оның барлық қырлары тең, ал табаны – сүйір бұрышы 60°-қа тең ромб. $ABCD$ мен DA_1B_1C жазықтықтарының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.



119-сурет

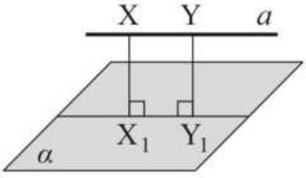
153. а) $ABCD$ ромбысын AC диагоналі бойымен B нүктесі M нүктесінде, ал AMC мен ADC жазықтықтары арасындағы бұрыш тік болатындай етіп бүктеді (119-сурет). Егер $BD = 4$ дм болса, BM түзуі мен ADC жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

ә) Қабырғасы 17 см-ге, ал BD диагоналі 16 см-ге тең $ABCD$ ромбысын осы диагоналі бойымен A нүктесі A_1 нүктесінде болатындай және 30°-қа тең екіжақты бұрыш құрайтындай етіп бүктеді. A_1C қашықтығын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

10. Кеңістіктегі арақашықтық

Тақырыпты оқу барысында:

- нүктеден жазықтыққа дейінгі, түзуден оған параллель жазықтыққа дейінгі қашықтық деп, параллель жазықтықтардың, айқас түзулердің арақашықтығы деп нені атайтынын білесіңдер;
- сол қашықтықтарды табасыңдар.

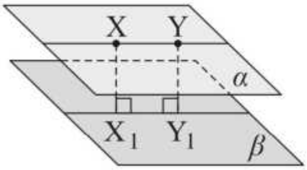


120-сурет

Егер түзу жазықтыққа параллель болса, онда оның барлық нүктелері осы жазықтықтан бірдей қашықтықта болады. 120-суретті пайдаланып, осы қасиетті түсіндіріңдер.

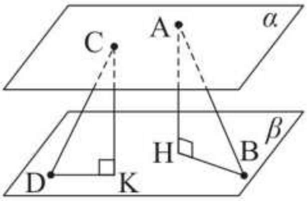
Түзу мен оған параллель жазықтықтың арақашықтығы деп түзудің кез келген нүктесінен осы жазықтыққа дейінгі қашықтық аталады.

Сол сияқты, жазықтықтың кез келген нүктесінен оған параллель жазықтыққа дейінгі қашықтықтың бірдей болатынын анықтауға болады (121-сурет).



121-сурет

Параллель жазықтықтардың арақашықтығы деп олардың біреуінің кез келген нүктесінен екінші жазықтыққа дейінгі қашықтықты айтады.



122-сурет

Есеп. α және β параллель жазықтықтарының арасына AB мен CD кесінділері орналастырылған (122-сурет), олардың ұзындықтарының қосындысы 342 см, ал жазықтықтардың біріне түскен проекцияларының ұзындықтары 78 см және 36 см. Жазықтықтардың арақашықтығын табу керек.

Шешуі. Берілген кесінділердің проекция жазықтығына AH пен CK перпендикулярларын жүргіземіз, сонда $AH = CK$ болады. $AB = x$ см болсын, сонда $CD = (342 - x)$ см. Тікбұрышты AHB мен CKD үшбұрыштарынан мынаны аламыз:

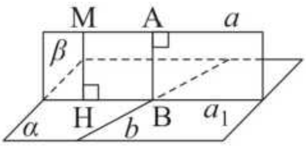
$(342 - x)^2 - 78^2 = x^2 - 36^2$; $(342 - x)^2 - x^2 = 78^2 - 36^2$;

$342 \cdot (342 - 2x) = 114 \cdot 42$; $342 - 2x = 14$; $x = 164$.

Сонда $AH = \sqrt{164^2 - 36^2} = \sqrt{200 \cdot 128} = 160$ (см).

Жауабы. 160 см.

Теорема. **Екі айқас түзудің әрқайсысын қиятын және оларға перпендикуляр болатын бір ғана түзу бар болады.**



123-сурет

Дәлелдеуі. Айқас a мен b түзулері берілген болсын. a түзуіне параллель және b түзуін қамтитын α жазықтығын саламыз. a түзуінен M нүктесін алып, одан α жазықтығына MH перпендикулярын жүргіземіз (123-сурет). Қиылысатын a мен MH түзулері арқылы өтетін β жазықтығын саламыз. α мен β жазықтықтарының қиылысу түзуін a_1 деп, ал b мен a_1 түзулерінің қиылысу нүктесін B деп белгілейік. β жазықтығында a түзуіне BA перпендикулярын жүргіземіз, сонда MH пен AB түзулері параллель және AB түзуі α жазықтығына перпендикуляр. Демек, бұл түзу a және b түзулерінің әрқайсысына перпендикуляр.

AB түзуінің жалғыз екенін дәлелдейік. a мен b түзулерінің әрқайсысына перпендикуляр болатын және оларды қиятын тағы бір A_1B_1 түзуі бар болады деп жориық. Сонда AB мен A_1B_1 түзулері параллель болып, A, B, A_1, B_1 нүктелері бір жазықтықта жатуы керек, бұл айқас түзулердің анықтамасына қайшы келеді. Ендеше біздің жоруымыз қате, демек, AB түзуі жалғыз.

AB кесіндісін a мен b айқас түзулерінің ортақ перпендикуляры деп атайды.

Екі айқас түзудің ***ортақ перпендикуляры*** *деп ұштары осы түзулерде жататын, олардың әрқайсысына перпендикуляр болатын кесіндіні атайды.* **Айқас түзулердің арақашықтығы деп олардың ортақ перпендикулярының ұзындығын атайды.**

1) *Екі айқас түзудің ортақ перпендикулярының ұзындығы ұштары осы түзулерде жататын басқа кесінділердің кез келгенінің ұзындығынан қысқа;*

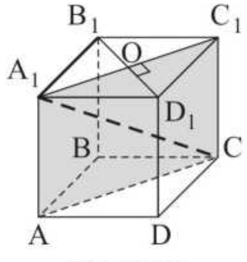
2) *айқас түзулердің бірінен оған параллель және екінші түзуді қамтитын жазықтыққа дейінгі қашықтық осы айқас түзулердің арақашықтығына тең;*

3) *екі айқас түзудің арақашықтығы осы айқас түзулерді қамтитын екі параллель жазықтықтың арақашықтығына тең болатынын* атап өтелік.

2-есеп. Қыры 1 м-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. DD_1 түзуі мен: а) A_1B_1; ә) A_1C түзуінің арақашықтығын табу керек.

Шешуі. а) DD_1 мен A_1B_1, DD_1 мен A_1C – айқас түзулер (124-сурет). AA_1B_1B мен AA_1C_1C жазықтықтары DD_1 түзуіне параллель (түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі бойынша). DD_1 түзуінен AA_1B_1B жазықтығына дейінгі 1 м-ге тең қашықтық DD_1 мен A_1B_1 түзулерінің арақашықтығы болады.

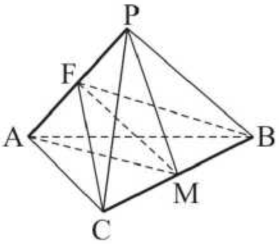
ә) DD_1 түзуінен AA_1C_1C жазықтығына дейінгі қашықтық D_1O кесіндісінің ұзындығына тең, өйткені $D_1O \perp (AA_1C_1)$. D_1O кесіндісінің ұзындығы DD_1 мен A_1C түзулерінің арақашықтығына тең, $D_1O = \frac{\sqrt{2}}{2}$ м.



124-сурет

Жауабы. а) 1 м; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ м.

3-есеп. Қыры a-ға тең дұрыс $PABC$ тетраэдрі берілген. AP мен BC түзулерінің арақашықтығын табу керек.



125-сурет

Шешуі. AP мен BC кесінділерінің сәйкесінше орталары болатын F және M нүктелерін белгілейміз (125-сурет). Сонда FM кесіндісі – AP мен BC айқас түзулерінің ортақ перпендикуляры, өйткені $FM \perp BC$ және $MF \perp AP$, сәйкесінше, теңбүйірлі BFC мен APM үшбұрыштарының табандарына жүргізілген медианалары ретінде. Пифагор теоремасы бойынша ΔAMF-тен мынаны аламыз: $MF^2 =$
$= AM^2 - AF^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4}; MF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Жауабы. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

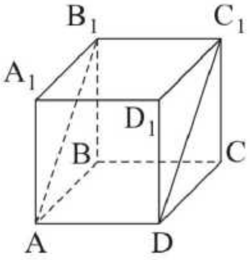
СҰРАҚТАР

а) Нүктеден жазықтыққа дейінгі арақашықтық; ә) түзуден оған параллель жазықтыққа дейінгі арақашықтық; б) параллель түзулердің арақашықтығы; в) айқас түзулердің арақашықтығы деп нені атайды?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

154. Қыры 1 дм-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген (126-сурет). A_1 нүктесінен: а) BCC_1B_1 жағының жазықтығына; ә) BCD; б) B_1C_1D жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.



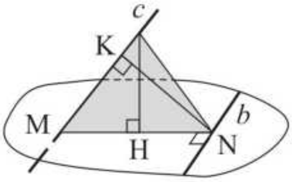
126-сурет

155. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде $AB = 1$ дм, $AD = 2$ дм, $AA_1 = 3$ дм. а) A_1 нүктесінен DC түзуіне дейінгі қашықтықты; ә) A_1C_1 және DC түзулерінің арақашықтығын; б) $A_1B_1C_1$

және MKD жазықтықтарының арақашықтығын табыңдар, мұндағы M және K нүктелері, сәйкесінше, AD мен CD кесінділерінің орталары.

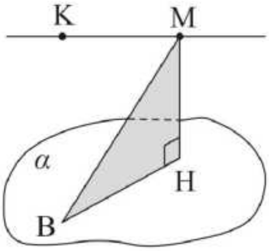
156. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде $AB = 3$ см, $AD = 4$ см. а) A_1D мен BC_1; ә) DD_1 мен A_1C_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

157. a түзуі жазықтыққа перпендикуляр және оны A нүктесінде қияды. b түзуі осы жазықтықта жатыр және A нүктесі арқылы өтпейді. AH кесіндісі b түзуіне перпендикуляр. AH кесіндісінің ұзындығы a мен b түзулерінің арақашықтығына тең екенін дәлелдеңдер.



127-сурет

158. c түзуі жазықтыққа перпендикуляр емес және оны M нүктесінде қияды. b түзуі осы жазықтықта жатыр және M нүктесі арқылы өтпейді. b түзуі c түзуінің осы жазықтықтағы проекциясына перпендикуляр және оны N нүктесінде қияды (127-сурет). N нүктесі мен c түзуі арқылы жазықтық жүргізілген және c түзуіне NK перпендикуляры тұрғызылған. NK кесіндісінің ұзындығы c мен b түзулерінің арақашықтығына тең болатынын дәлелдеңдер.

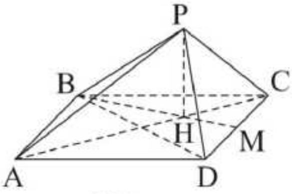


128-сурет

159. M нүктесінен α жазықтығына MH перпендикуляры мен MB көлбеуі жүргізілген. MK түзуі α жазықтығына параллель және MBH жазықтығында жатпайды (128-сурет). Егер MB көлбеуі мен оның α жазықтығындағы проекциясы ұзындықтарының қосындысы 10 см-ге тең, ал олардың қатынасы 5 : 3 болса, MK мен BH түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

160. Қыры a-ға тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. BD мен CC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

B деңгейі



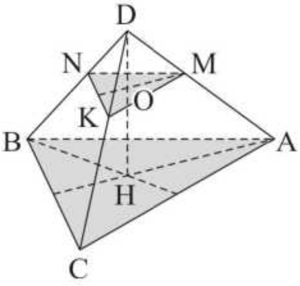
129-сурет

161. $PABCD$ пирамидасының табаны – B бұрышы 120°-қа тең $ABCD$ ромбысы. PB, PC, PD қырларының әрқайсысы табан қабырғасына тең (129-сурет). PH кесіндісі неліктен пирамиданың биіктігі болатынын түсіндіріңдер, мұндағы H – BCD үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесі. Егер ромбының қабырғасы $\sqrt{2}$ дм-ге тең болса, PB мен CD түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

162. a, b, c түзулері α жазықтығында жатыр және қос-қостан параллель. α жазықтығында жатпайтын M нүктесінен осы түзулерге дейінгі қашықтықтар, сәйкесінше, $MA = 12{,}5$ см, $MB = 13$ см, $MC = 20$ см. A, B және C нүктелері бір түзуде жататынын дәлелдеңдер және егер M нүктесінен α жазықтығына дейінгі қашықтық 12 см-ге тең болса, a мен c түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

163. Ұзындығы a-ға тең AB кесіндісі α жазықтығына параллель және одан қашықтығы h-қа тең. α жазықтығына түсірілген AM және BN көлбеулері AB түзуіне перпендикуляр және ұзындықтары c-ға тең. AN көлбеуінің α жазықтығындағы проекциясының ұзындығын табыңдар.

164. $DABC$ пирамидасының табаны дұрыс үшбұрыш және барлық бүйір қырлары тең. AD қырының M нүктесі арқылы табанына параллель және пирамиданың биіктігін D нүктесінен бастап есептегенде $2 : 3$ қатынасына бөлетін MNK қимасы жүргізілген ($N \in DB$, $K \in DC$) (130-сурет). Егер $AB = 4{,}5$ дм, $AD = 3$ дм болса, BC және MN түзулерінің арақашықтығын табыңдар.



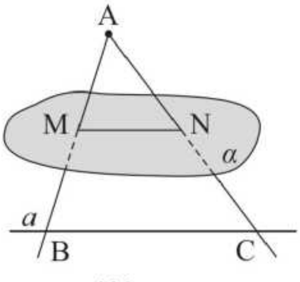
130-сурет

165. $PABC$ дұрыс тетраэдрінің PC бүйір қырының ортасындағы M нүктесі арқылы AP қырына параллель түзу жүргізілген. Егер тетраэдрдің қыры a-ға тең болса, сол түзуден AB түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

166. $DABC$ тетраэдрінде $AB = CD = 3\sqrt{2}$ см, ал қалған әрбір қыры 5 см-ге тең. AB мен CD түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

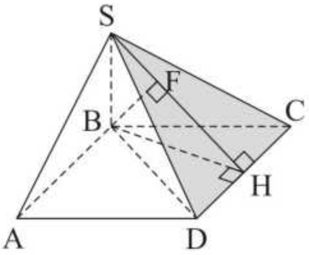
167. α жазықтығына параллель a түзуі мен A нүктесі осы жазықтықтың әртүрлі жағында орналасқан. a түзуіне B, C нүктелері белгіленіп, α жазықтығын, сәйкесінше, M және N нүктелерінде қиятын AB, AC түзулері жүргізілген (131-сурет). Егер A нүктесінен a түзуіне дейінгі қашықтық m-ге, ал MN түзуіне дейінгі қашықтық p-ға тең және $BC = n$ болса, MN кесіндісінің ұзындығын табыңдар.



131-сурет

168. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде $AD = 2\sqrt{3}$ см, $DC = 2$ см, DC_1 диагоналі табан жазықтығына 60° бұрышпен көлбеген. AD_1 мен DC_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

169. 132-суретте кескінделген $SABCD$ пирамидасының табаны – B бұрышы 120°-қа тең ромб. Пирамиданың SB бүйір қыры табан жазықтығына перпендикуляр. B нүктесінен SDC жазықтығына дейінгі қашықтық BF кесіндісінің ұзындығына тең екенін дәлелдеңдер.



132-сурет

170. $\angle BAD = 60°$, $AB = a$ болатын $ABCD$ ромбысы берілген (132-сурет). Ромбының B төбесінен оның жазықтығына BS перпендикуляры жүргізілген. SDC үшбұрышының жазықтығы ромб жазықтығымен 45°-қа тең бұрыш жасайды. а) S нүктесінен ромбының қабырғаларына дейінгі қашықтықтарды; ә) SA, SD және SC түзулерінің ромб жазықтығына көлбеулік бұрыштарын табыңдар.

171. Барлық бүйір қырлары 10 см-ге тең $PABCD$ пирамидасының табаны – қабырғасы $6\sqrt{2}$ см-ге тең $ABCD$ шаршысы. Пирамиданың табанына параллель және бүйір қырларын қақ бөлетін $MNKL$ қимасы жүргізілген. MNK мен ABC жазықтықтарының арақашықтығын табыңдар.

172. Қыры 8 см-ге тең $PABC$ дұрыс тетраэдрі берілген. AC мен PB түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

173. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің бүйір қыры $a\sqrt{3}$-ке тең, $ABCD$ табаны – қабырғасы a-ға тең шаршы. AB_1C_1D жазықтығы мен табан жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

174. $CABD$ үшбұрышты пирамидасының ABD табаны мен ABC бүйір жағы – табаны қабырғасы AB болатын теңбүйірлі үшбұрыштар. $AB = 24$ см, $AC = 13$ см, $AD = 37$ см, $CD = 35$ см екені белгілі болса, ABD мен ABC жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Евклид «Негіздерінің» XI кітабында стереометрия негіздері, соның ішінде кеңістіктегі бұрыштар, арақашықтықтар мен перпендикулярлықтар туралы ілімдер баяндалған. Ондағы көп ұғымдар қазіргімен салыстырғанда жалпылама берілмеген. Сондай-ақ стереометрияның үш перпендикуляр туралы маңызды теоремасы да болған жоқ. Алғаш рет бұл теорема мен оның дәлелдеуі белгісіз ирандық автордың «Исфахандық белгісіз» (XI ғ.)

еңбегінде пайда болған. XIII ғасырда бұл теорема ме
атақты ирандық оқымысты Насыр ад-Дин ат-Тусидің (1
төртқабырға трактатасында» баяндалған. Еуропада бұл т
деуі алғаш рет 1794 жылы француз математигі Адриен М
(1752–1833) «Геометрия элементтері» кітабында келтірілі

Екіжақты бұрыш ұғымы ертедегі құрылыс нысандар
рибесінен және әртүрлі кристалдардың геометриялық сı
теуден бастау алады.

Флюорит

Купр

Ғаламторды пайдаланып:

1) Евклидтің түзу мен жазықтықтың перпендику
анықтағанын;

2) А. Лежандрдың үш перпендикуляр туралы теорем
дегенін біліңдер.

III. КЕҢІСТІКТЕГІ ТІКБҰРЫШТЫ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕСІ ЖӘНЕ ВЕКТОРЛ

Бөлімді оқу нәтижесінде

- кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесін;
- екі нүктенің арақашықтығын, кесінді орталарының координаталарын;
- сфера теңдеуін;
- кеңістіктегі вектордың координаталары ұғымын;
- кеңістіктегі коллинеар және компланар векторлардың анықтамаларын, векторлардың коллинеарлық шартын;
- векторларды қосу, азайту, векторды санға көбейту ережелерін;
- векторлардың скаляр көбейтіндісінің анықтамасын **білу керек.**

- тікбұрышты координаталар
йесін кескіндеу, нүктенің коо
наталарын таба алу;
- екі нүктенің арақашықтығын
сінді ортасының координа
рын таба алу;
- сфера теңдеуін есептер шыға
қолдана алу;
- кеңістіктегі векторлардың к
динаталарын және ұзындығы
ба алу;
- коллинеар және компланар
торларды кескіндей алу;
- векторларды қосу, азайту,
торды санға көбейте алу;
- векторлардың скаляр көбейт
сінің формуласын есептер ш
руда қолдана **алу керек.**

11. Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі

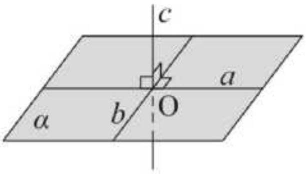
Тақырыпты оқу барысында:

- кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесін және координаталарымен берілген нүктелерді жазықтықта кескіндейсіңдер.

Координаталар деп нүктенің орнын анықтайтын сандарды айтады. Жазықтықтағы нүкте екі координатамен анықталады, кеңістіктегі нүктенің орнын анықтау үшін үш сан қажет. Мысалы, Жер бетіндегі нүктенің орны үш санмен: ендігімен, бойлығымен және теңіз деңгейінен биіктігімен анықталады.

1-есеп. Кеңістіктің қандай да бір нүктесінен қос-қостан перпендикуляр болатын үш түзу жүргізу керек.

Шешуі. Кеңістіктен кез келген O нүктесін алып, сол нүкте арқылы қандай да бір α жазықтығы мен онда жататын a түзуін жүргіземіз (133-сурет). Содан кейін осы жазықтықта O нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр b түзуін жүргіземіз. Енді O нүктесі арқылы өтетін және α жазықтығына перпендикуляр c түзуін жүргіземіз. $c \perp \alpha$ болғандықтан, $c \perp a$ және $c \perp b$ болады. Салынған a, b және c түзулері өзара перпендикуляр.

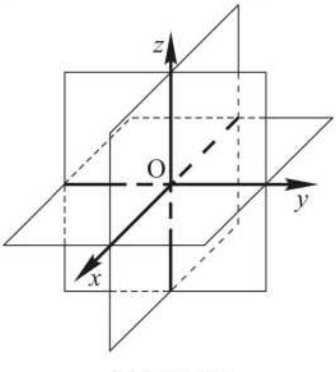


133-сурет

Бұл есептің шешуінен кеңістіктің әрбір нүктесі арқылы өзара перпендикуляр болатын үштен артық емес түзу жүргізуге болатыны шығады.

Енді кеңістіктегі **тікбұрышты координаталарды** анықтайық. O нүктесінде қиылысатын қос-қостан перпендикуляр Ox, Oy және Oz түзулерін (134-сурет) салайық. O нүктесін *координаталар басы*, Ox, Oy және Oz түзулерін координаталық түзулер (немесе координаталар осьтері) деп атайтын боламыз. Ox – *абсцисса осі*, Oy – *ордината осі*, Oz – *аппликата осі*.

xOy, xOz және yOz жазықтықтары *координаталық жазықтықтар* деп аталады. O нүктесі координаталар осьтерінің әрқайсысын екі сәулеге бөледі. Олардың біреуін (Ox, Oy, Oz) оң деп атайық, яғни ол оң бағытты береді, ал екіншісін теріс деп атайық. Координаталар осьтерінің әрқайсысына коор-



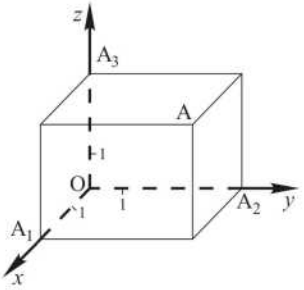
134-сурет

динаталар басынан бастап бірлік ұзындықтағы кесінділер өлш және кеңістіктегі нүктенің координаталары ұғымын анықтайм

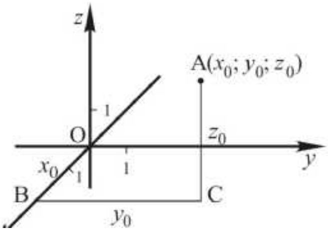
A кеңістіктің кез келген нүктесі болсын. Осы нүкте арқыл талар осьтеріне перпендикуляр жазықтықтар жүргіземіз (135- жазықтықтардың абсцисса, ордината және аппликата осьтерім нүктелерін, сәйкесінше, A_1, A_2 және A_3 деп белгілейік. **A нүкт циссасы** деп:

- A_1 нүктесі OX сәулесіне тиісті болса, OA_1 қашықтығына т **x** саны;
- A_1 нүктесі OX сәулесіне қарама-қарсы сәулеге тиісті болс
- A_1 нүктесі координаталар басымен беттессе, **0** саны атала

A нүктесінің **y ординатасы** мен **z аппликатасы** да дәл осы. лады. Координаталары x, y, z болатын A нүктесі $A(x; y; z)$ деп бел A_2, A_3 нүктелері – A нүктесінің координаталар осьтеріндегі про Сонымен, *кеңістіктегі нүктенің координаталары деп оның к лар осьтеріндегі проекцияларының координаталары аталады.*



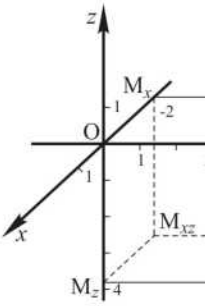
135-сурет



$A(x; y; z)$ нүктесін салу үшін а ординаталар осьтерінен x, y, z сан кес келетін нүктелерді тауып, с сол нүктелер арқылы координата не перпендикуляр үш жазықтық рек. Осы жазықтықтардың қиылы ізделінді нүкте болады (135-сурет

Берілген координаталары бо тені салудың басқа да тәсілі бар. нүктесін салу керек болсын. Ox динаталар басынан бастап $|x_0|$-ге салып (x_0 санының таңбасына қ месе теріс жарты оське), $B(x_0; 0;$ аламыз (136-сурет). Әрі қарай C раллель түзуге B нүктесінен ба тең кесінді салып, $C(x_0; y_0; 0)$ ну

2 - е с е п. $M(-2; 3; -4)$ нүктесі берілген. Осы нүктеден: а) коорд осьтеріне; ә) координаталық жазықтықтарға жүргізілген перпен лар табандарының координаталарын табу керек.



137-суре

Ш е ш у і. M нүктесін салып, одан координаталар осьтеріне жүргізілген перпендикулярлар табандарын M_x, M_y, M_z, ал координаталық жазықтықтардағысын M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} арқылы белгілейік (137-сурет). Сонда: а) $M_x(-2; 0; 0)$, $M_y(0; 3; 0)$, $M_z(0; 0; -4)$; ә) $M_{xy}(-2; 3; 0)$, $M_{yz}(0; 3; -4)$, $M_{xz}(-2; 0; -4)$ болады.

Ж а у а б ы. а) $(-2; 0; 0)$, $(0; 3; 0)$, $(0; 0; -4)$; ә) $(-2; 3; 0)$, $(0; 3; -4)$, $(-2; 0; -4)$.

СҰРАҚТАР

1. Кеңістіктегі нүктенің координаталары деп нені атайды?

2. Кеңістіктегі нүктенің координаталары қалай аталады жә табылады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

175. а) xOy және xOz; ә) yOz және xOy; б) xOy, xOz және yOz жазы рына тиісті нүктенің координаталары қандай болады?

176. $A(-2; -3; 5)$, $B(0; -2; 7)$, $C(4; 0; -5)$, $D(-1; 9; 0)$, $E(0; 0; 6)$, $K($ $N(0; 1; 0)$ нүктелері берілген. Осы нүктелердің қайсылары жазықтығында; ә) Oz осінде; б) yOz жазықтығында жатыр?

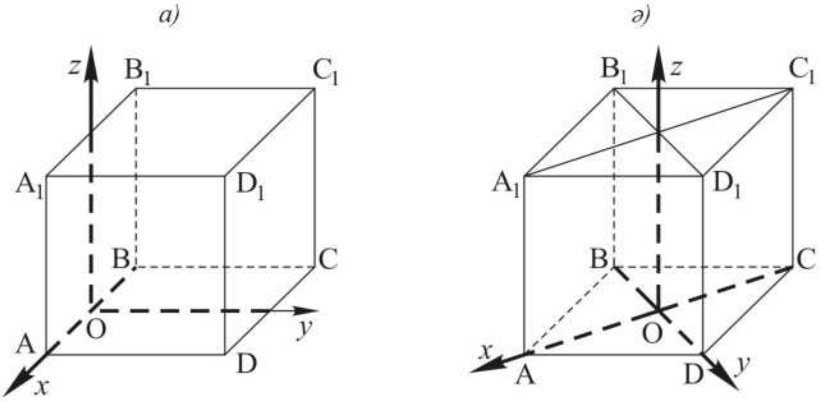
177. $A(12; 0; -\sqrt{5})$ және $B\left(\frac{1}{2}; 1; 16\right)$ нүктелерінің координаталар дегі проекцияларының координаталарын табыңдар.

178. $A(4; -2; -6)$ нүктесі берілген. Оған ең жақын орналасқан және динаталар осьтерінің әрқайсысында; ә) координаталық жазы дың әрқайсысында жататын нүктелердің координаталарын та

179. Координаталар жүйесін салып, оған $A(-3; 5; 2)$, $B(3; -2; 4)$, $C($

181. Координаталары оң сан болатын M нүктесі координаталық жазықтықтардан бірдей қашықтықта орналасқан. Егер $OM = 5\sqrt{3}$ болса, M нүктесінің координаталарын табыңдар.

182. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген және: а) AB қырының (138, *а*-сурет); ә) $ABCD$ жағы диагоналінің (138, *ә*-сурет) ортасы арқылы өтетін координаталар осьтері жүргізілген. Егер кубтың қыры 4-ке тең болса, оның төбелерінің координаталарын табыңдар.



138-сурет

183. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қыры 2-ге тең. B нүктесі координаталар басы, ал кубтың үш қырын қамтитын түзулер осьтері болатын координаталар жүйесінде куб төбелерінің координаталарын табыңдар.

B деңгейі

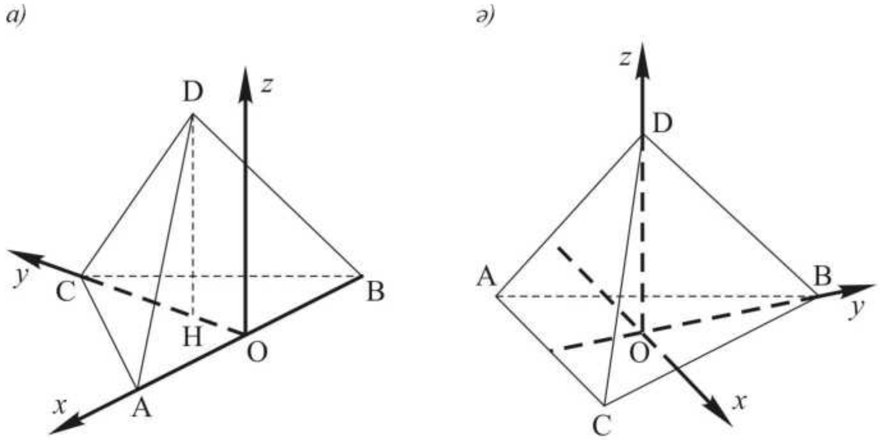
184. а) x пен y координаталары тең; ә) y пен z координаталарының көбейтіндісі 0-ге тең болатын кеңістіктегі нүктелер қайда орналасқан?

185. $M(3;\ 4;\ 0)$ нүктесі арқылы Oz осіне параллель a түзуі жүргізілген. 1) OM қашықтығын табыңдар. 2) a түзуінде жататын, координаталар басынан $5\sqrt{2}$-ге тең қашықтықтағы нүктені көрсетіңдер. Бұл есептің неше шешімі бар?

186. $A(5;\ 0;\ -2)$ нүктесіне: а) координаталар басына; ә) аппликата осіне қатысты симметриялы нүктелердің координаталарын табыңдар.

187. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген, оның жағының диагоналі $\sqrt{2}$ см-ге тең. D нүктесін координаталар басы ретінде алып, координаталар жүйесін салыңдар және куб төбелерінің координаталарын табыңдар.

188. $A(3; 0; 0)$ және $B(-3; 0; 0)$ нүктелері – табаны xOy жазықтығында жататын $DABC$ дұрыс тетраэдрінің төбелері (139, *а*-сурет). Оның басқа төбелерінің координаталары қандай?



139-сурет

189. Қыры $2\sqrt{3}$ дм-ге тең $DABC$ дұрыс тетраэдрі берілген. $Oxyz$ координаталар жүйесі салынған (139, *ә*-сурет), мұндағы O – ABC жағының центрі, $Ox \| AC$, $B \in Oy$, $D \in Oz$. Тетраэдрдің барлық төбелерінің координаталарын табыңдар.

12. Екі нүктенің арақашықтығы. Кесінді ортасының координаталары. Сфераның теңдеуі

Тақырыпты оқу барысында:

- кеңістіктегі екі нүктенің арақашықтығын табасыңдар;
- кеңістіктегі кесінді ортасының координаталарын табасыңдар;
- сфераның теңдеуін білесіңдер және оны есептер шығаруда қолданасыңдар.

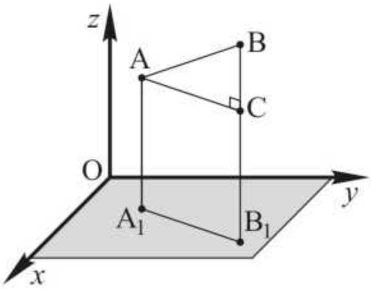
Теорема. **Егер кеңістікте $A(x_1, y_1, z_1)$ және $B(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері берілген болса, онда олардың арақашықтығы:**

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (1)$$

Дәлелдеуі. Алдымен AB кесіндісі Oz осіне параллель болмайтын жағдайды қарастырайық (140-сурет). A және B нүктелерінен Oz осіне параллель түзулер жүргіземіз. Ол түзулер xOy жазықтығына перпендикуляр болады және оны $A_1(x_1, y_1, 0)$ мен $B_1(x_2, y_2, 0)$ нүктелерінде қияды.

A_1ABB_1 жазықтығында $AC \parallel A_1B_1$ жүргіземіз, мұндағы $C \in BB_1$. Сонда $\angle ACB = 90°$, ал C нүктесінің координаталары (x_2, y_2, z_1) болады.

Пифагор теоремасы бойынша $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$.



140-сурет

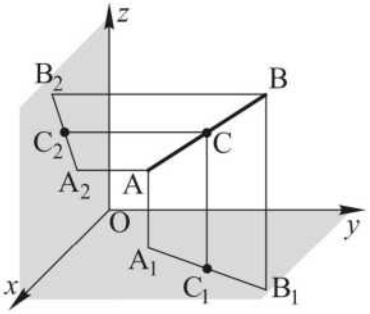
$AC = A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ және $BC = |z_2 - z_1|$ болғандықтан, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Егер $AB \parallel Oz$ болса, онда $AB = |z_2 - z_1|$. (1) формуладан да осындай нәтиже аламыз, өйткені бұл жағдайда $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ болады.

Егер $z_1 = z_2$ болса, онда AB мен A_1B_1 кесінділері тіктөртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары болады (немесе A мен B нүктелері xOy жазықтығында жатса беттеседі). Бұл жағдайда $z_1 - z_2 = 0$ болады және (1) формула орындалады. Сонымен (1) формула дәлелденді.

1-есеп. Кез келген $A(x_1, y_1, z_1)$ және $B(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері берілген болсын. AB кесіндісінің ортасы болатын $C(x, y, z)$ нүктесінің координаталары $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ формуласымен берілетінін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. A, B және C нүктелері арқылы Oz осіне параллель түзулер жүргіземіз (141-сурет). Олар xOy жазықтығын $A_1(x_1, y_1, 0)$, $B_1(x_2, y_2, 0)$ және $C_1(x, y, 0)$ нүктелерінде қияды. Фалес теоремасы бойынша C_1 нүктесі A_1B_1 кесіндісінің ортасы болады. xOy жазықтығында кесінді ортасының координаталары оның ұштарының координаталары арқылы мына формулалармен өрнектеледі: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. z координатасы үшін өрнекті xOy жазықтығының орнына xOz (немесе yOz) жазықтығын алу арқылы табуға болады. Яғни AB кесіндісін, мысалы, xOz жазықтығына Oy осіне параллель проекциялау керек. Осы дәлелдеуді 141-суретті пайдаланып, әрі қарай жалғастырыңдар.



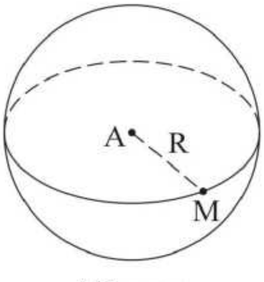
141-сурет

Кеңістікте берілген нүктеден бірдей қашықтықта жататын барлық нүктелер жиынынан тұратын фигура сфера деп аталады. Берілген нүктені *сфераның центрі* деп, ал сол қашықтықты *сфераның радиусы* деп атайды.

2-есеп. Тікбұрышты $Oxyz$ координаталар жүйесінде радиусы R, центрі $A(a;\, b;\, c)$ нүктесі болатын сфера $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ теңдеуімен берілетінін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. Сфераға тиісті кез келген $M(x, y, z)$ нүктесінен (142-сурет), $A(a;\, b;\, c)$ нүктесіне дейінгі қашықтық $MA = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ формуласымен табылады.

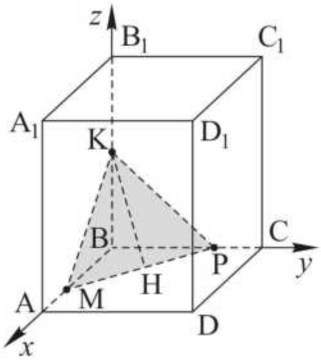
$MA = R$ болғандықтан, M нүктесінің координаталары көрсетілген теңдеуді қанағаттандырады. Егер M нүктесі берілген сферада жатпаса, онда $MA^2 \neq R^2$, яғни M нүктесінің координаталары бұл теңдеуді қанағаттандырмайды. Демек, тікбұрышты координаталар жүйесінде **радиусы R, центрі $A(a;\, b;\, c)$ болатын сфераның теңдеуі мына түрде болады: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.**



142-сурет

Дербес жағдайда, радиусы R, центрі координаталар басында болатын сфераның теңдеуі $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ болады.

3-есеп. Қыры 30-ға тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Оның BB_1 қырының ортасына K нүктесі, AB қырына $MB = 2AM$ болатындай



143-сурет

M нүктесі, ал BC қырына $BP = 4PC$ болатындай P нүктесі белгіленген. ΔMKP-ның KH медианасының ұзындығын табу керек.

Шешуі. 143-суретте көрсетілгендей координаталар жүйесін енгіземіз. Сонда $K(0, 0, 15)$, $M(20, 0, 0)$, $P(0, 24, 0)$ болады. H нүктесі – MP кесіндісінің ортасы, $H(10, 12, 0)$. Екі нүктенің арақашықтығының формуласы бойынша $KH = \sqrt{(10-0)^2+(12-0)^2+(0-15)^2} = \sqrt{469}$ аламыз.

Жауабы. $\sqrt{469}$.

СҰРАҚТАР

1. Кеңістіктегі екі нүктенің арақашықтығын қандай формуламен табуға болады?

2. Егер кесінді ұштарының координаталары белгілі болса, оның ортасының координаталары неге тең?

3. Центрі $B(m, n, k)$ нүктесінде және радиусы R-ге тең сфераның теңдеуін жазыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

190. $A(0; 4; 3)$ нүктесінен: а) координаталар басына; ә) аппликата осіне; б) xOy координаталық жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

191. а) $M(9; 10; 8)$ нүктесінен координаталар басына дейінгі қашықтықты табыңдар. ә) Егер координаталар басынан $A(2; -3; z)$ нүктесіне дейінгі қашықтық $\sqrt{17}$-ге тең болса, z координатасын табыңдар.

192. Ұштары $M(4; 0; -2)$ және $N(6; -4; 2)$ нүктелерінде болатын кесіндінің ұзындығын табыңдар.

193. Кесіндінің бір ұшының координаталары $(2; 3; 4)$ және ортасынікі $(0; -4; 5)$. Кесіндінің басқа ұшының координаталарын табыңдар.

194. а) Ұштары $A\left(100000; 2\frac{1}{3}; \frac{1}{17}\right)$ және $B\left(-100000; \sqrt{5}; -\frac{1}{17}\right)$ нүктелерінде болатын кесіндінің ортасы абсцисса осіне тиісті; ә) ұштары

$M\left(0{,}0001; \sqrt{2}; 3\frac{11}{50}\right)$ және $N\left(2020; -\sqrt{15}; -3\frac{11}{50}\right)$ нүктелерінде болатын кесіндінің ортасы xOy жазықтығына тиісті деген ақиқат па?

195. $A(0; 5; -2)$, $B(4; 4; -5)$, $C(-8; 3; 0)$ төбелері болатын ABC үшбұрышы берілген. Координаталар басынан оның BM медианасының ортасына дейінгі қашықтықты табыңдар.

196. Үшбұрышты пирамиданың төбелері $P(0; -5; 4)$, $A(3; 0; 1)$, $B(-1; 4; 1)$, $C(5; 2; 3)$. O нүктесі BCP үшбұрышының PM медианасының ортасы болса, AO қашықтығын табыңдар.

197. а) $A(7; 0; 14)$, $B(14; 7; 0)$, $C(7; 14; 0)$ нүктелері – $ABCD$ параллелограмының тізбектес үш төбесі. Оның төртінші D төбесінің координатасын табыңдар.

ә) $OBCD$ параллелограмының төбелері $O(0; 0; 0)$, $B(1; 2; 0)$, $C(2; 0; 3)$. Оның BD диагоналінің ұзындығын табыңдар.

198. а) $A(2; 6; 4)$, $B(0; 4; 8)$, $C(2; 2; 8)$, $D(4; 4; 4)$ нүктелері $ABCD$ параллелограмының; ә) $M(6; 7; 8)$, $N(8; 2; 6)$, $K(4; 3; 2)$, $L(2; 8; 4)$ нүктелері $MNKL$ ромбысының төбелері бола ма?

199. Сфера центрінің координаталары мен радиусын табыңдар:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;
б) $x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 25$;
ә) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$;
в) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 7$.

200. Центрі координаталар басында болатын, радиусы: а) 6; ә) 7; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{5}$-ке тең сфераның теңдеуін жазыңдар.

201. Радиусы 4-ке тең, центрі: а) $A(1; 2; 3)$; ә) $B(-2; 0; 1)$; б) $C(0; -3; 4)$; в) $D(-10; -0{,}5; -300)$ нүктесінде болатын сфераның теңдеуін жазыңдар.

202. Мына теңдеулердің қайсысы сфераның теңдеуі болады:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$;
б) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (-z + 3)^2 = 1$;
ә) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$;
в) $(x - y)^2 + (x + y)^2 + 2z^2 = 8$?

B деңгейі

203. а) Ox осінде жататын және $A(1; 2; 3)$ мен $B(-3; 3; 2)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта болатын M нүктесінің координаталарын табыңдар.

ә) xOy жазықтығында жататын және $A(0; 4; -4)$, $B(-4; 0; 4)$, $C(0; -4; 0)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта болатын D нүктесін табыңдар.

204. Ұштары: а) $M(a; b; c)$ және $N(m; n; -c)$ нүктелерінде болатын кесіндінің ортасы xOy жазықтығында; ә) $C(a; -b; c)$ және $D(-a; b; d)$ нүктелерінде болатын кесіндінің ортасы Oz осінде жататынын дәлелдеңдер.

205. Төбелері $A(7;\ 1;\ -5)$, $B(4;\ -3;\ -4)$, $C(1;\ 3;\ -2)$ нүктелерінде болатын үшбұрыштың теңбүйірлі болатынын дәлелдеп, оның кіші медианасының ұзындығын табыңдар.

206. Куб төбелерінің берілген $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 1;\ 0)$, $B_1(0;\ 0;\ 1)$, $D(1;\ 1;\ 0)$ координаталары бойынша координаталар жүйесіне $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубын салыңдар және A нүктесінен DD_1C_1C жағы диагональдарының қиылысу нүктесіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

207. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің қырлары $AB = 4$ м, $BB_1 = 4$ м және $BC = 3$ м. Оның AB мен BB_1 қырларының орталарына, сәйкесінше, M және K нүктелері белгіленген, ал BC қырына $BP = 2PC$ болатындай P нүктесі белгіленген. MKP үшбұрышы медианаларының ұзындықтарын табыңдар.

208. а) Центрі координаталар басында болатын және $M(3;\ 2;\ \sqrt{3})$ нүктесі арқылы өтетін; ә) центрі $A(-1;\ 0;\ 2)$ нүктесінде болатын және $B(0;\ \sqrt{6};\ -1)$ нүктесі арқылы өтетін сфераның теңдеуін жазыңдар.

209. Мына теңдеулердің қайсысы сфераның теңдеуі болады:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$;

ә) $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$; в) $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 2z$?

210. Радиусы 3-ке тең және координаталар басы мен $B(0;\ 4;\ 0)$ және $C(4;\ 0;\ 0)$ нүктелері арқылы өтетін сфера центрінің координаталарын табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

211. $D(1;\ 0;\ -2)$, $F(0;\ 0;\ 5)$, $M(-3;\ 4;\ 0)$, $N(7;\ 0;\ 0)$, $K(-8;\ 0;\ 1)$, $L(0;\ 9;\ 0)$ нүктелерінің қайсысы: а) Ox осіне; ә) Oy осіне; б) xOz жазықтығына тиісті?

212. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қыры 5-ке тең. C нүктесі – координаталар басы, ал оның үш қыры осьтері болатын координаталар жүйесінде кубтың төбелерінің координаталарын табыңдар.

213. Егер координаталар басынан $B(-4;\ y;\ 3)$ нүктесіне дейінгі қашықтық 5-ке тең болса, оның белгісіз координатасын табыңдар.

214. Егер M нүктесі Oz осінде жатса және $A(0;\ -2;\ 3)$ мен $B(2;\ 4;\ -5)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта болса, оның координаталарын табыңдар.

215. $A(1; 3; -1)$, $B(-2; 1; 0)$, $C(-1; 0; 1)$ нүктелері – $ABCD$ параллелограмының төбелері. D нүктесінің координаталарын табыңдар.

216. $DABC$ пирамидасының табаны – тікбұрышты үшбұрыш және $\angle C = 90°$, $AC = BC = 4$ см. Бүйір қыры $DC = 4$ см және табан жазықтығына перпендикуляр. Координаталар жүйесін пайдаланып, ADB үшбұрышының DM медианасының ұзындығын табыңдар.

217. $C(2; -1; 0)$ нүктесі центрі болатын, радиусы 3-ке тең сфераның теңдеуін жазыңдар.

218. Центрі координаталар басында, радиусы 2-ге тең сфераның координаталар осьтерімен қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар.

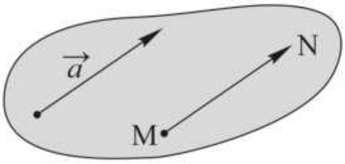
13. Кеңістіктегі вектордың координаталары. Векторларды қосу және азайту, векторды санға көбейту

Тақырыпты оқу барысында:

- кеңістіктегі вектордың координаталарын және ұзындығын табасыңдар;
- векторларды қосу және азайтуды, векторды санға көбейтуді орындайсыңдар, оның ережелерін білетін боласыңдар.

9-сынып геометрия курсындағы сияқты кеңістіктегі бір ұшы A, екінші ұшы B болатын AB кесіндісі бағытталған кесінді немесе *вектор* деп аталады. A нүктесі вектордың басы, ал B нүктесі оның ұшы деп аталады. $\overrightarrow{AB}$ *векторының ұзындығы* деп AB кесіндісінің ұзындығы аталады, $|\overrightarrow{AB}|$ деп белгіленеді. Егер вектордың басы оның ұшымен беттесетін болса, онда оны *нөлдік* вектор деп атайды, $\vec{0}$ немесе $\overrightarrow{AA}$ деп белгіленеді. Оның ұзындығы 0-ге тең деп есептеледі. Ұзындықтары тең және бағыттас векторлар *тең* векторлар деп аталады.

Кеңістікте кез келген нүктеден берілген векторға тең бір ғана вектор салуға болады.



144-сурет

Шынымен де, $\vec{a}$ берілген вектор, M кеңістіктің кез келген нүктесі болсын. $\vec{a}$ векторын қамтитын түзу мен M нүктесі арқылы жазықтық жүргіземіз (144-сурет). Бұл жалғыз жазықтық (неге екенін түсіндіріңдер). Осы жазықтықта M нүктесінен $\vec{a}$ векторына тең бір ғана вектор салуға болады: $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$.

9-сыныптың геометрия курсында оқылған векторлардың барлық негізгі қасиеттері мен оларға амалдар қолдану ережелері кеңістіктегі векторлар үшін де орындалады.

Егер $\vec{a}$ векторы координаталар жүйесінде салынған болса және $A(x_1; y_1; z_1)$ нүктесі оның басы, ал $B(x_2; y_2; z_2)$ нүктесі ұшы болса, онда $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ сандарын $\vec{a}$ **векторының координаталары** деп атайды. $\vec{a}\,(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ немесе $\overrightarrow{AB}\,(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ деп белгілейді. Нөлдік вектордың координаталары (0; 0; 0) болады. Егер $\vec{a}$ векторы координаталар басынан бастап салынған және $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ болса, онда оның координаталары M нүктесінің координаталарына тең болады.

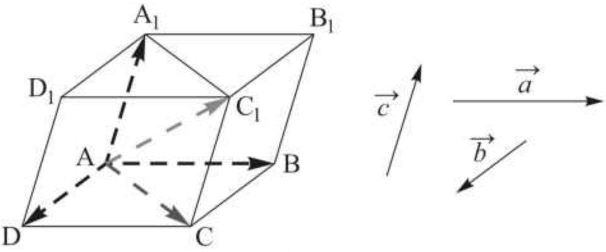
Тең векторлардың аттас координаталары тең болады және керісінше, *егер векторлардың аттас координаталары тең болса, онда векторлар да тең болатынын* ескерте кетелік.

$\overrightarrow{AB}$ векторының ұзындығы AB кесіндісінің ұзындығына тең, яғни:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Егер $\overrightarrow{AB}(a; b; c)$ болса, онда $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ болады.

Бір жазықтықта жатпайтын кез келген үш векторды қосу үшін *параллелепипед ережесі* қолданылады. Оның мәні мынада. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ көрсетілген векторлар болсын. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ болатын $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедін саламыз, сонда оның AC_1 диагоналі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының қосындысын кескіндейтін вектор болады (145-сурет).

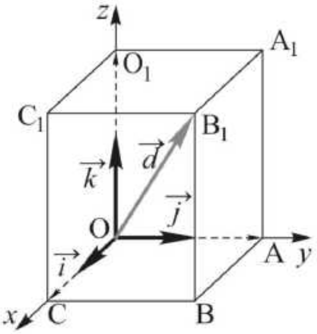


145-сурет

Шынымен де, $ABCD$ мен AA_1C_1C төртбұрыштары – параллелограмдар. Екі векторды қосудың параллелограмм ережесін екі рет қолданып, мынаны аламыз:

$$\overrightarrow{AC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AA_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Координаталар жүйесінің басынан бастап Ox, Oy және Oz осьтеріне салынған ұзындықтары 1-ге тең векторлар *координаталық векторлар* деп аталады және $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ деп белгіленеді (146-сурет). Кез келген $\vec{d}(x, y, z)$ векторын $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ түрінде көрсетуге болады, мұндағы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – координаталық векторлар.



146-сурет

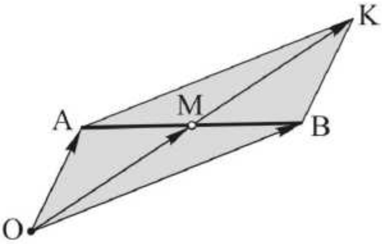
Шынымен де, координаталар жүйесіне $\overrightarrow{OB_1} = \vec{d}$ векторын және тікбұрышты $ABCOA_1B_1C_1O_1$ параллелепипедін салсақ (146-сурет), векторларды қосудың параллелепипед ережесі бойынша $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OO_1}$ болады. $\overrightarrow{OC} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OO_1} = z\vec{k}$ болғандықтан, $\overrightarrow{OB_1} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. $\vec{d}(x, y, z)$ векторының бұлай көрсетілуінің жалғыз екенін ескерте кетелік.

Керісінше, егер $\vec{b} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ болса, онда **(m, n, p) сандары $\vec{b}$ векторының координаталары** болады.

Векторлардың координаталарын пайдаланып, олардың қосындысына, айырымына және вектордың санға көбейтіндісіне тең векторлардың координаталарын келесі ережелер бойынша табуға болады:

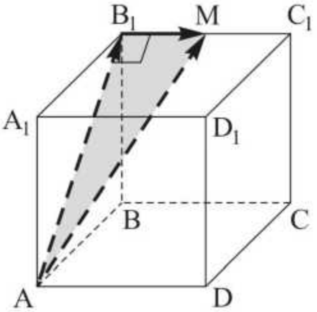
- *екі немесе одан да көп векторлар қосындысының әрбір координатасы осы векторлардың сәйкес координаталарының қосындысына тең;*
- *екі вектордың айырымының әрбір координатасы осы векторлардың сәйкес координаталарының айырымына тең;*
- *вектордың санға көбейтіндісінің әрбір координатасы вектордың сәйкес координаталарының сол санға көбейтіндісіне тең.*

1-есеп. AB кесіндісі берілген, M нүктесі – оның ортасы, O – кеңістіктің кез келген нүктесі. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ болатынын дәлелдеу керек.



147-сурет

Дәлелдеуі. OM сәулесіне $MK = OM$ кесіндісін саламыз (147-сурет). Сонда $OAKB$ төртбұрышы параллелограмм болады. Векторларды қосудың параллелограмм ережесі бойынша $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Сонда $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ болады, дәлелдеу керегі де осы еді.



148-сурет

2-есеп. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген, M нүктесі – оның 16 см-ге тең B_1C_1 қырының ортасы (148-сурет). $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1M}$ қосындысына тең вектордың ұзындығын табу керек.

Шешуі. Векторларды қосудың үшбұрыш ережесі бойынша $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{AM}$. $\overrightarrow{AM}$ векторының ұзындығы AM кесіндісінің ұзындығына тең. ΔAB_1M тікбұрышты, өйткені түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі бойынша $C_1B_1 \perp (AA_1B_1)$, демек, $C_1B_1 \perp AB_1$. Пифагор теоремасы бойынша $AM = \sqrt{AB_1^2 + B_1M^2} = \sqrt{(16\sqrt{2})^2 + 8^2} = 24$ (см).

Жауабы. 24 см.

3-есеп. $\overrightarrow{AB}$ (2; –4; 3) векторы басының координаталары (1; 2; –5) екені белгілі болса, оның ұшының координаталарын табу керек.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $A(1;\ 2;\ -5)$, $B(x;\ y;\ z)$ болсын. Вектордың координаталарының анықтамасы бойынша: $x - 1 = 2$, $y - 2 = -4$, $z + 5 = 3$. Бұл теңдіктерден: $x = 3$, $y = -2$, $z = -2$ шығады.

Жауабы. $B(3;\ -2;\ -2)$.

4-есеп. $\vec{a}(2; m; m)$ мен $\vec{b}(1; m\sqrt{2}; m)$ векторларының ұзындықтары тең болатындай m-нің барлық мәндерін табу керек.

Шешуі. $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + m^2 + m^2} = \sqrt{4 + 2m^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (m\sqrt{2})^2 + m^2} = \sqrt{1 + 3m^2}$. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ болғандықтан, $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$ болады. Теңдеу құрып, оны шешейік: $4 + 2m^2 = 1 + 3m^2$, $m^2 = 3$, $m = \pm\sqrt{3}$.

Жауабы. $\pm\sqrt{3}$.

5-есеп. $\vec{a}(-2; 3; 1)$ мен $\vec{b}(4; 0; -5)$ векторлары берілген. $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ векторының ұзындығын 0,1-ге дейінгі дәлдікпен табу керек.

Шешуі. $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 5\vec{k}$ болады. Сонда $\vec{c} = 2(-2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) - 3(4\vec{i} - 5\vec{k}) = -16\vec{i} + 6\vec{j} + 17\vec{k}$, яғни $\vec{c}(-16; 6; 17)$; $|\vec{c}| = \sqrt{(-16)^2 + 6^2 + 17^2} = \sqrt{581} \approx 24{,}1$.

Жауабы. $\approx 24{,}1$.

СҰРАҚТАР

1. Кеңістіктегі вектордың координаталары деп нені атайды?

2. Егер вектордың координаталары белгілі болса, оның ұзындығын қандай формуламен табуға болады?

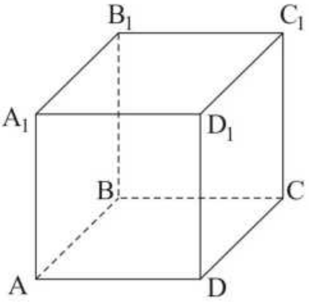
3. Векторлардың қосындысының, айырымының және вектордың санға көбейтіндісінің координаталарын қалай табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

219. $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$ екені белгілі болса, $\vec{a} = \vec{b}$ деп ұйғаруға бола ма?

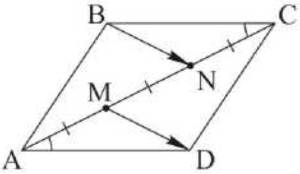
220. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген (149-сурет). а) $\overrightarrow{A_1D}$ және $\overrightarrow{D_1C}$; ә) $\overrightarrow{A_1D_1}$ және $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$ және $\overrightarrow{BD_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}$ және $\overrightarrow{DC_1}$ векторлары тең бе?



149-сурет

221. 149-суретті пайдаланып: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$; ә) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DC}$ векторына тең векторды көрсетіңдер.

222. $ABCD$ параллелограмы мен кеңістіктің кез келген X нүктесі берілген. $\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XD} - \overrightarrow{XC}$ болатынын дәлелдеңдер.



150-сурет

223. $ABCD$ параллелограмының AC д
ліне $AM = MN = NC$ болатындай
не N нүктелері белгіленген (150
а) $\overrightarrow{AN}$ және $\overrightarrow{MC}$; ә) $\overrightarrow{MD}$ және $\overrightarrow{BN}$
ларының теңдігін дәлелдеңдер.

224. $A(0;\ 10;\ –14)$, $B(7;\ –8;\ 0)$ нүктелері б
а) $\overrightarrow{AB}$; ә) $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{BB}$ векторының координаталарын табыңдар

225. Егер $\overrightarrow{CD}\,(2;4;–3)$ векторының D нүктесінің координаталары: а)(2
ә) (0,5; –1,25; 4) болса, оның C нүктесінің координаталарын та

226. $A(0;\ 1;\ 1)$, $B(1;\ –3;\ –2)$, $C(–2;\ 0;\ 2)$ және $D(–3;\ 4;\ 5)$ нүктелері б
а) $\overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{BC}$; ә) $\overrightarrow{DA}$ және $\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{BD}$ векторларь

227. Егер: а) $\overrightarrow{MN}$ және $\overrightarrow{NK}$; ә) $\overrightarrow{MP}$ және $\overrightarrow{NK}$ векторлары тең болса, M
$N(–4;\ y;\ 0)$, $K(3;\ –2;\ z)$, $P(0;\ 5;\ 0)$ нүктелерінің белгісіз координа
табыңдар.

Торыш шатқалындағы шарлар алқабы

228. Маңғыстау түбегінің
алқабындағы төрт ша
параллелограмының
рінде орналасқан. Ке
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$
дігі орындалатындай O
бар бола ма?

229. а) $\vec{a}(7;\ 3;\ –6)$; ә) $\vec{b}(0;$
б) $\vec{c}\,(17;\ –16;\ 0)$; в) $\vec{d}\,(–0,$
векторының координата
торларға жіктелуін жа

230. а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$; б) $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$;
ә) $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$; в) $\vec{d} = -\vec{i} - 0{,}3\vec{j} + 2\vec{k}$
векторының координаталары неге тең?

231. а) $\vec{b}(–5;\ 4;\ 3)$; ә) $\vec{c}(\sqrt{2};\sqrt{3};2)$ векторының ұзындығын табынд

232. Ұзындығы: а) 13-ке; ә) 10-ға тең $\vec{a}(4;\ –3;\ z)$ векторының белгі
динатасын табыңдар.

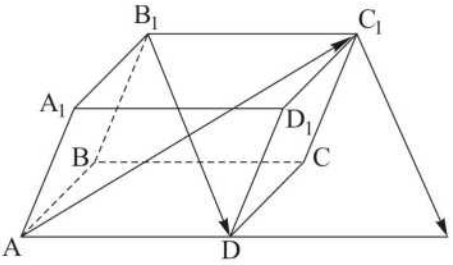
234. $\vec{a}(1; -2; 0)$ және $\vec{b}(2; 2; -4)$ векторлары берілген. а) $\vec{a} + \vec{b}$; ә) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; б) $2\vec{a} + \vec{b}$; в) $-2\vec{b} - 4\vec{a}$ векторына тең вектордың ұзындығын табыңдар.

235. $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ және $\overrightarrow{AC} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ векторлары берілген. а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; ә) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; б) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$; в) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ векторына тең вектордың ұзындығын табыңдар.

B деңгейі

236. M және N нүктелері $OABC$ тетраэдрінің, сәйкесінше, OB және OC қырларының орталары. а) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$; ә) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB})$ болатыны ақиқат па?

237. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген. Келесі теңдіктер ақиқат па: а) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC_1} - \overrightarrow{DA_1}$; ә) $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{B_1D} = 2\overrightarrow{BC}$ (151-сурет); б) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OC_1}$, мұндағы O – кеңістіктің кез келген нүктесі?



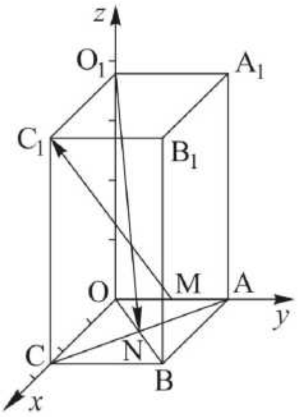
151-сурет

238. Координаталар жүйесіне: а) $\overrightarrow{OA}(2; -3; 4)$; ә) $\overrightarrow{OB}(-4; 4; -4)$ векторын салыңдар.

239. $\vec{a}(-2; 4{,}5; 1)$ және $\vec{b}(4; 0; -5)$ векторлары берілген. а) 0,1-ге; ә) 0,01-ге дейінгі дәлдікпен $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ векторының ұзындығын табыңдар.

240. $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ және $\overrightarrow{AC} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ векторларының ұзындықтары ABC үшбұрышының қабырғаларына тең. Осы үшбұрыштың AM медианасының ұзындығын табыңдар.

241. Тікбұрышты $OABCO_1A_1B_1C_1$ параллелепипеді координаталар жүйесіне 152-суретте көрсетілгендей етіп орналастырылған. $OA = 2$, $OB = 3$, $OO_1 = 4$ болса: а) $\overrightarrow{MC_1}$, мұндағы M – AO-ның ортасы; ә) $\overrightarrow{O_1N}$, мұндағы N – $OABC$ жағының центрі, векторының ұзындығын табыңдар.



152-сурет

14. Коллинеар және компланар векторлар

Тақырыпты оқу барысында:

- кеңістіктегі коллинеар және компланар векторлардың анықтамаларын, векторлардың коллинеарлық шартын білесіңдер.

Егер кеңістіктегі нөлдік емес екі вектор бір түзудің бойында немесе параллель түзулерде жатса, олар **коллинеар** векторлар деп аталады. Бір нүктеден салынған барлық коллинеар векторлар бір түзудің бойында жатады. «Коллинеар» сөзі латын тілінде *linea* – сызық (түзу) және *cum* – бірге, яғни түзуде жататындар дегенді білдіреді.

Кеңістікте, жазықтықтағы сияқты, $\vec{b}$ векторы $\vec{a}$ векторына коллинеар болуы үшін $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ болатындай k саны бар болуы керек. Осы шарттан *коллинеар векторлардың аттас координаталары пропорционал* болатыны шығады.

Егер кеңістіктегі нөлдік емес үш вектор бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда жатса, олар **компланар** векторлар деп аталады. Бір нүктеден салынған барлық компланар векторлар бір жазықтықта жатады. Кез келген екі вектор компланар. «Компланар» сөзі латын тілінде *planum* – жазықтық және *cum*, яғни бір жазықтықта жататын дегенді білдіреді.

Планиметрия курсынан белгілі болғандай, кез келген нөлдік емес $\vec{c}$ векторын коллинеар емес $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларына бір ғана жолмен былай жіктеуге болады: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, мұндағы x пен y – қайсыбір сандар. Егер $\vec{c}$ векторын $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларына көрсетілгендей етіп жіктеуге болса, онда $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары компланар.

1-есеп. $\vec{a}(3; -2; z)$ мен $\vec{b}(x; 4; 2)$ векторлары коллинеар болатындай z пен x-тің мәндерін табу керек.

Шешуі. Егер векторлардың аттас координаталары пропорционал болса, олар коллинеар болады. Демек, $\frac{3}{x} = \frac{-2}{4}$, $x = -6$; $\frac{z}{2} = \frac{-2}{4}$, $z = -1$.

Жауабы. $x = -6$, $z = -1$.

2-есеп. $\vec{a}(1; 1; -0{,}5)$ векторына коллинеар және ұзындығы 3-ке тең $\vec{b}$ векторының координаталарын табу керек.

Шешуі. Екі вектордың коллинеарлық белгісі бойынша $\vec{b} = k\vec{a}$, мұндағы k – қайсыбір сан және $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$. $\vec{a}$ векторының ұзындығы: $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-0{,}5)^2} = 1{,}5$. Сонда $3 = 1{,}5|k|$, бұдан $|k| = 2$, $k = 2$ немесе $k = -2$. $\vec{b}$ векторының координаталарын табамыз: $(2; 2; -1)$ немесе $(-2; -2; 1)$.

Жауабы. $(2; 2; -1)$ немесе $(-2; -2; 1)$.

3-есеп. $\vec{c}(6; 5; 5)$, $\vec{a}(3; 2; 1)$, $\vec{b}(0; 1; 3)$ векторларының компланар екенін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. Бұл векторлар бір жазықтықта жатады, себебі $\vec{c}$ векторын $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларына былай жіктеуге болады: $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$. Демек, $\vec{c}$, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары компланар.

СҰРАҚТАР

1. Қандай векторлар: а) коллинеар; ә) компланар векторлар деп аталады?

2. Екі вектордың коллинеарлық шартын тұжырымдаңдар.

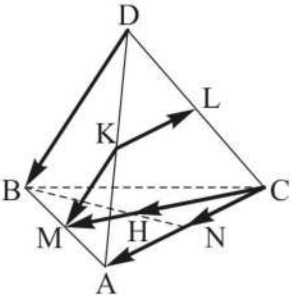
3. а) Екі коллинеар вектор; ә) үш компланар вектор арқылы қанша жазықтық жүргізуге болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

242. 153-суретте $DABC$ тетраэдрі кескінделген, M, N, K, L нүктелері, сәйкесінше, AB, AC, DA және DC қырларының орталары. а) Коллинеар векторлар жұптарын; ә) үш компланар векторды көрсетіңдер.

243. Егер $\vec{a} + \vec{b}$ мен $\vec{a} - \vec{b}$ векторлары коллинеар болса, онда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары: а) коллинеар; ә) компланар болады деген ақиқат па?



153-сурет

244. $\vec{a}(2; 3; -1)$, $\vec{b}(-4; -6; 2)$ және $\vec{c}(-2; -3; 1)$ векторлары коллинеар ма?

245. а) $\vec{b}(3; 0; 0)$; ә) $\vec{c}(0; -1; 0)$; б) $\vec{d}(0; 15; 0)$; в) $\vec{a}(5; 0; 6)$ векторларының қайсысы $\vec{j}(0; 1; 0)$ векторына коллинеар?

246. $\vec{b}(1; -2; 0)$ векторына коллинеар қанша $\vec{a}$ векторы бар болады? $\vec{a}$ векторының координаталарын атаңдар.

247. x-тің қандай мәнінде: а) $\vec{a}(2; 3; -4)$ мен $\vec{b}(x; -6; 8)$; ә) $\vec{c}(x; -6; 5)$ мен $\vec{d}(2; -3; 4)$ векторлары параллель болады?

248. m мен n-нің қандай мәндерінде: а) $\vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + m\vec{k}$ және $\vec{d} = n\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$; ә) $\vec{a} = 5\vec{i} - 4m\vec{k}$ және $\vec{b} = n\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ векторлары коллинеар болады?

249. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген. Көрсетілген үш вектордың қайсылары компланар:

а) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$; ә) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$; б) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB_1}$, $\overrightarrow{B_1B}$?

250. а) $\vec{a}(0; 0; -2)$; ә) $\vec{b}(0; -4; 5)$; б) $\vec{c}(-3; 1; 0)$; в) $\vec{d}(16; 0; 16)$ векторының қайсысы $\vec{i}$ мен $\vec{k}$ векторларымен компланар?

В деңгейі

251. *PABC* тетраэдрінің *PAB* жағының медианалары *M* нүктесінде, ал *PAC* жағынікі *N* нүктесінде қиылысады. Неліктен: а) $\overrightarrow{MN}$ мен $\overrightarrow{BC}$ векторларының коллинеар; ә) $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{AB}$ векторларының компланар болатынын түсіндіріңдер.

252. Бір жазықтықта жатпайтын *ABCD* мен *ABMK* параллелограмдары берілген. $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CM}$ және $\overrightarrow{DK}$ векторларының компланар екенін дәлелдеңдер.

253. Басы $A(1; 1; 1)$ нүктесінде болатын және: а) $\vec{c}(3; 4; 5)$; ә) $\vec{d}(0; -2; 4)$ векторына коллинеар $\overrightarrow{AB}$ векторы ұшының координаталарын табыңдар.

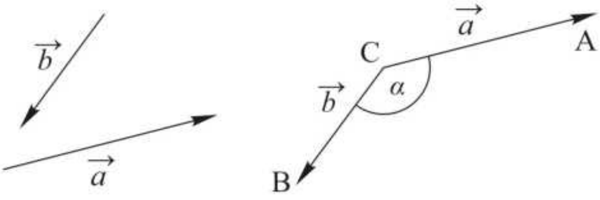
254. $\vec{a}(-2; 6; 3)$ векторына коллинеар және: а) онымен бағыттас; ә) оған қарама-қарсы бағытталған, ұзындығы 1-ге тең вектордың координаталарын табыңдар.

255. Егер: а) $|\vec{a}| = 5$; ә) $|\vec{a}| = 50$ болса, $\vec{b}(6; -8; 7,5)$ векторына коллинеар $\vec{a}$ векторының координаталарын табыңдар.

15. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі

Тақырыпты оқу барысында:

- координаталық түрдегі векторлардың скаляр көбейтіндісінің анықтамасы мен формуласын білесіңдер және оларды есептер шығаруда қолданасыңдар.



154-сурет

Кеңістікте, жазықтығы сияқты, *нөлдік емес* $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ *векторларының арасындағы бұрыш* деп оларға тең, басы ортақ екі вектордың арасындағы бұрыш аталады. $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ деп белгіленеді. Мысалы, 154-суреттегі $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \angle ACB$.

Бағыттас векторлардың арасындағы бұрыш 0°, ал қарама-қарсы бағытталған векторлардың арасындағы бұрыш 180° деп алынады.

Планиметриядағы сияқты, стереометрияда *екі вектордың скаляр көбейтіндісі деп олардың ұзындықтары мен арасындағы бұрыштың косинусына көбейтіндісін атайды:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Теорема. **$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ векторларының скаляр көбейтіндісі $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$ формуласымен өрнектеледі.**

Дәлелдеуі. Коллинеар емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары координаталар басынан салынған болсын. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ деп белгілейік (суретін өздігінен салыңдар). Косинустар теоремасы бойынша $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB$. Осы теңдіктен $(\vec{a} \cdot \vec{b})$-ға тең болатын $OA \cdot OB \times \cos\angle AOB$ көбейтіндісін табайық:

$$OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2).$$

Мұндағы $OA^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, $OB^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$ болғандықтан, алдыңғы теңдіктен мынаны аламыз:

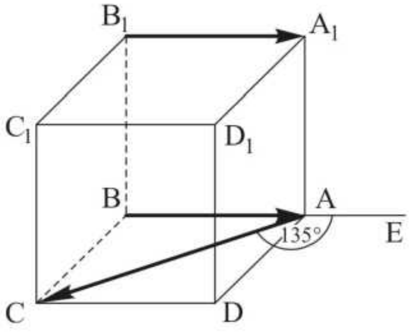
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Бұл формула коллинеар векторлар үшін де ақиқат.

Екі вектордың скаляр көбейтіндісінің анықтамасынан олардың перпендикулярлық белгісі шығады: *егер екі вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, онда олар перпендикуляр болады.*

Скаляр көбейтіндінің анықтамасы мен қарастырылған теоремадан координаталарымен берілген екі вектордың арасындағы бұрыштың косинусын табатын формула шығады:

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$



155-сурет

1 - есеп. Қыры 2-ге тең болатын $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{B_1A_1}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табу керек.

Шешуі. $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{BA}$ болғандықтан, $\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B_1A_1}) = \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \angle CAE =$ $= 135°$ (155-сурет). Сонда $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B_1A_1} =$ $= |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{B_1A_1}| \cdot \cos 135° = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ $= -4$.

Жауабы. –4.

2 - есеп. $\vec{a}(2; 2; -1)$ және $\vec{b}(-3; -2; 2)$ векторларының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табу керек.

Шешуі. Векторлар арасындағы бұрыштың косинусы формуласы бойынша: $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\cdot(-3) + 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 2}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{9+4+4}} = -\frac{12}{3\sqrt{17}} = -\frac{4\sqrt{17}}{17} \approx -0{,}970.$ Бұрыштардың тригонометриялық функциялары мәндерінің кестесі мен келтіру формуласын пайдаланып, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 166°$ аламыз.

Жауабы. ≈ 166°.

СҰРАҚТАР

1. Екі вектордың скаляр көбейтіндісінің анықтамасын беріңдер.

2. Координаталарымен берілген екі вектордың скаляр көбейтіндісін қандай формуламен табуға болады?

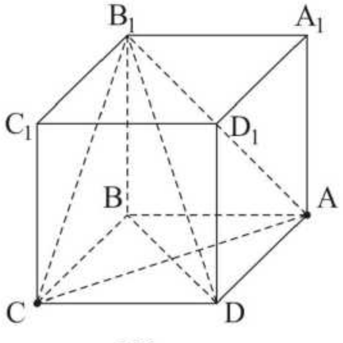
3. Координаталарымен берілген екі вектордың перпендикулярлық шартын тұжырымдаңдар.

4. Координаталарымен берілген екі вектордың арасындағы бұрыштың косинусын қандай формуламен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

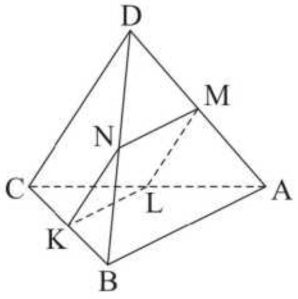
256. Қыры 1-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген (156-сурет). а) $\overrightarrow{CA}$ және $\overrightarrow{CB_1}$; ә) $\overrightarrow{CA}$ және $\overrightarrow{AB_1}$; б) $\overrightarrow{A_1A}$ және $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{B_1D}$ және $\overrightarrow{B_1B}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.



156-сурет

257. Қыры 1-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген (156-сурет). а) $\overrightarrow{B_1A_1}$ және $\overrightarrow{CA}$; ә) $\overrightarrow{CA}$ және $\overrightarrow{DC_1}$; б) $\overrightarrow{CA}$ және $\overrightarrow{B_1D_1}$; в) $\overrightarrow{DB_1}$ және $\overrightarrow{AB}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

258. Қыры 4-ке тең $DABC$ дұрыс тетраэдрі берілген. M, N, K, L нүктелері, сәйкесінше, AD, BD, BC, AC қырларының орталары (157-сурет). а) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AM}$; ә) $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AN}$; б) $\overrightarrow{MN}$ және $\overrightarrow{LK}$; в) $\overrightarrow{ML}$ және $\overrightarrow{KN}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.



157-сурет

259. а) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ және $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$; ә) $\vec{c} = 13\vec{i} + \vec{k}$ және $\vec{d} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

260. z-тің қандай мәнінде: а) $\vec{a}(6; 0; 12)$ және $\vec{b}(-8; 13; z)$; ә) $\vec{c}(0; -1; z)$ және $\vec{d}(20; 50; 2z)$ векторлары перпендикуляр болады?

261. $A(0; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(-2; 0; 1)$ және $D(-3; 4; 5)$ нүктелері берілген. а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$; ә) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}$ көбейтіндісін табыңдар.

262. $\vec{a}(1; 5; 1)$, $\vec{b}(1; -5; 2)$ және $\vec{c}(2; 1; 1{,}5)$ векторлары берілген. а) $\vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$; ә) $\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c}$ табыңдар.

263. а) $\vec{c}(-1; 2; -2)$ және $\vec{b}(6; 3; -6)$; ә) $\vec{a}(0; -3; 4)$ және $\vec{d}(16; 0; 12)$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

264. $\vec{a}(1; 1; 1)$ векторы мен координаталық: а) $\vec{i}$; ә) $\vec{j}$; б) $\vec{k}$ векторының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

265. ΔABC-ның төбелері: $A(1; 3; 0)$, $B(1; 0; 4)$, $C(-2; 1; 6)$. Осы үшбұрыштың A төбесінің сыртқы бұрышының косинусын табыңдар.

В деңгейі

266. $\angle ABC = 60°$, $BC = 4$ см болатын ΔABC ($\angle C = 90°$) берілген. DA кесіндісі үшбұрыш жазықтығына перпендикуляр, $\angle DBA = 45°$. $\overrightarrow{BC}$ мен $\overrightarrow{BD}$ векторларының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

267. $\vec{a}(4; -1; 0)$ және $\vec{b}(2; 3; -1)$ векторлары берілген. m-нің қандай мәнінде $\vec{c} = 2\vec{a} + m\vec{b}$ векторы $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$ векторына перпендикуляр?

268. m-нің қандай мәнінде $\vec{a}(0; m; -2)$ мен $\vec{b}(-1; 0; -1)$ векторларының арасындағы бұрыш: а) 60°-қа; ә) 120°-қа тең болады?

269. ΔABC-ның төбелері: $A(3; -5; 1)$, $B(-4; -1; -2)$, $C(-3; 3; 1)$. $\overrightarrow{AC}$ мен $\overrightarrow{BK}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар, мұндағы K – AC қабырғасының ортасы.

270. Үшбұрыштың екі қабырғасының ұзындығы $\vec{a}(3; 4; 5)$ мен $\vec{b}(-5; -4; 3)$ векторларының ұзындықтарына, ал осы қабырғалардың арасындағы бұрышы 150°-қа тең болса, үшбұрыштың ауданын табыңдар.

271. Екі ұшақтың бірі Нұр-Сұлтаннан Алматыға, екіншісі Мәскеуге ұшып шықты. Егер Нұр-Сұлтан мен Алматы әуежайларының арақашықтығы 973 км, Нұр-Сұлтан мен Мәскеудікі 2273 км, Алматы мен Мәскеудікі 3105 км болса, ұшақтар қозғалысын кескіндейтін векторлардың арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

Нұрсұлтан Назарбаев халықаралық әуежайы

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

272. $\vec{a}(2; -1; 4)$ және $\vec{b}(3; 0; -2)$ векторлары берілген. а) $5\vec{a}$; ә) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ векторының координаталарын табыңдар.

273. $\vec{c}(17; 4; -5)$ векторының $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координаталық векторлары бойынша жіктелуін жазыңдар.

274. Ұзындығы 13-ке тең $\vec{b}(4; -12; z)$ векторының белгісіз координатасын табыңдар.

275. m мен n-нің қандай мәндерінде $\vec{c}(-1; 4; -2)$ мен $\vec{d}(-3; m; n)$ векторлары: а) коллинеар; ә) компланар болады?

276. n-нің қандай мәнінде $\vec{a}(n; -2; 1)$ және $\vec{b}(n; 1; -n)$ векторлары перпендикуляр болады?

277. Қыры 4-ке тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. $\overrightarrow{AC}$ мен $\overrightarrow{B_1C_1}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Тікбұрышты координаталар жүйесін оларды алғаш рет жазықтықта енгізген француз математигі Рене Декарттың (1596–1650) атымен декарттық координаталар жүйесі деп те атайды. Географиялық координаталарды (бойлық пен ендікті) Жердегі тұрған орынды анықтау үшін біздің дәуіріміздің І ғасырынан бастап пайдалана бастаған.

А. Клеро

К. Вессель

Кеңістіктегі координаталарды алғаш рет XVIII ғасырда швейцар математигі Иоганн Бернулли (1667–1748) қолдана бастаған. Кеңістіктегі координаталар туралы ілім алғаш рет француз математигі Алекси Клод Клероның (1713–1765) еңбектерінде баяндалған болатын, кейіннен ол аналитикалық геометрия деп аталған.

Тарих бойынша векторлар теориясы үш: физикалық, геометриялық және алгебралық жолмен жүзеге асырылған. Мысалы, жылдамдықтарды параллелограмм ережесімен қосу ежелгі грек ғалымы Аристотель (б. д. д. 384–322 жж.) мектебі оқушыларының «Механикалық мәселелер» еңбегінде сипатталған. Планиметрия мен стереометриядағы геометриялық бағыт алғаш рет толығымен 1799 жылы норвегиялық ғалым Каспар Вессельдің (1745–1818) «Бағыттың аналитикалық көрінісі туралы тәжірибе және оның қолданылуы» атты кітабында көрсетілген. «Вектор» сөзін алғаш рет ирландық математик Уильям Роуэн Гамильтон (1805–1865) енгізген.

Ғаламторды пайдаланып:

1) И. Бернулли кеңістіктегі координаталарды қалай анықтағанын;

2) К. Вессель векторлар қосындысын қалай тапқанын;

3) өздерің тұратын жердің географиялық координаталарын (бойлығы мен ендігін) біліңдер.

10-СЫНЫПТАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

А деңгейі

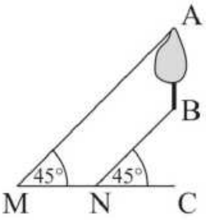
278. а) Егер *AB* мен *CD* түзулері бір жазықтықта жатпаса, онда *AC* мен *BD* түзулері де бір жазықтықта жатпайды; ә) кеңістіктегі берілген нүктеден өтіп, берілген түзуді қиятын барлық түзулер бір жазықтықта жатады; б) қиылысатын екі түзудің біріне параллель және екіншісін қиятын барлық түзулер бір жазықтықта жатады деген ақиқат па?

279. Қандай жағдайда кеңістікте берілген нүктеден қиылысатын екі түзудің әрқайсысына параллель жазықтықты жүргізуге болады?

280. Кеңістіктегі түзуде жатқан кез келген нүктеден оған перпендикуляр 2020 түзу жүргізуге бола ма?

281. Ұлытау тауларына туристік жорыққа оқушылар өздерімен бұрышөлшеуіш пен өлшеуіш таспаны ала шықты. Демалу кезінде Бексұлтан жартастың шетінде өсіп тұрған ағаштың биіктігін білмекші болды. Ол үшін $\angle AMC = 45°$ болатындай *M* нүктесін, содан кейін $\angle BNC = 45°$ болатындай *N* нүктесін белгілеп, ағаштың *AB* биіктігі *MN* кесіндісінің ұзындығына тең деген қорытынды жасады (158-сурет). Бексұлтанның қорытындысы неге негізделген?

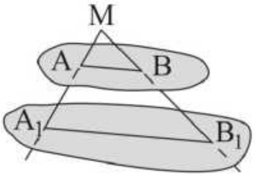
Ұлытау таулары, Қарағанды облысы



158-сурет

282. Кесіндінің ұштары оның ортасы арқылы өтетін жазықтықтан неге бірдей қашықтықта болатынын түсіндіріңдер.

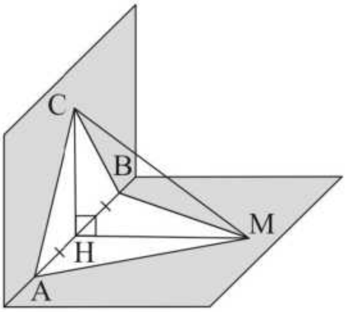
283. *A* нүктесінен жазықтыққа *AH* перпендикуляры мен өзара тең *AB* және *AC* көлбеулері жүргізілген. $AH = 4$ см, $\angle BAH = 60°$, $\angle BAC = 90°$ болса, *BC*-ны табыңдар.



159-сурет

284. Екі параллель жазықтық берілген. M нүктесінен осы жазықтықтарды, сәйкесінше, A және A_1, B және B_1 нүктелерінде қиятын екі сәуле жүргізілген (159-сурет). $MA = 4$ см, $BB_1 = 9$ см, $AA_1 = MB$ болса, MA_1 мен MB_1-ді табыңдар.

285. $ABCD$ тіктөртбұрышы берілген, $CD = 8$ см, OC – тіктөртбұрыш жазықтығына жүргізілген перпендикуляр, ұзындығы 6 см-ге тең. O нүктесінен AD түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.



160-сурет

286. ABC мен ABM дұрыс үшбұрыштары перпендикуляр жазықтықтарда орналасқан (160-сурет). Егер $AB = 14$ см болса, CM қашықтығын табыңдар.

287. Координаталар жүйесіне $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(0;\ 1;\ 1)$ және $C(1;\ 0;\ 1)$ нүктелерін салыңдар. Олар бір жазықтықта жата ма?

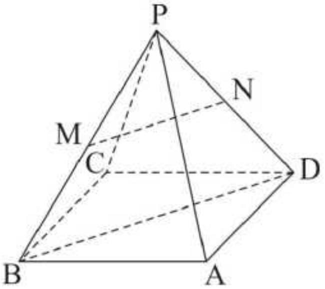
288. Төбелері $A(3;\ -2;\ 1)$, $B(-2;\ 1;\ 3)$, $C(1;\ 3;\ -2)$ нүктелері болатын үшбұрыш теңқабырғалы деген ақиқат па?

289. m-нің қандай мәнінде $\vec{a}(m;\ 4;\ 4)$ және $\vec{b}(m;\ 1;\ m)$ векторлары перпендикуляр болады? Осы векторлар: а) коллинеар; ә) компланар бола ма?

290. $\vec{c}(0;\ -4;\ 3)$ және $\vec{d}(0{,}5;\ -0{,}5;\ 1)$ векторлары берілген. а) $\vec{c} + 2\vec{d}$; ә) $4\vec{d} - \vec{c}$ векторына тең вектордың ұзындығын табыңдар.

В деңгейі

291. Бір нүкте арқылы өтетін, бірақ бір түзу арқылы өтпейтін үш жазықтық кеңістікті неше бөлікке бөледі?



161-сурет

292. $PABCD$ пирамидасының табаны – қабырғасы 10 см-ге тең шаршы, ал бүйір қырлары 13 см-ден. M және N нүктелері, сәйкесінше, PB мен PD қырларының орталары (161-сурет). а) MN және BC; ә) DN және BC түзулерінің өзара орналасуын анықтап, олардың арасындағы бұрышты табыңдар.

293. Медианалары O нүктесінде қиылысатын ABC дұрыс үшбұрышы берілген. DO кесіндісі осы үшбұрыш жазықтығына перпендикуляр. Егер $AB = BD$ болса, ABC мен ABD жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

294. α және β жазықтықтарының арасындағы екіжақты бұрыш тік. α жазықтығындағы A нүктесінен осы бұрыштың қырына ұзындығы 5 см-ге тең AD перпендикуляры, β жазықтығындағы B нүктесінен ұзындығы 4 см-ге тең BK перпендикуляры жүргізілген. Егер $DK = 3$ см болса, AB-ны табыңдар.

295. Төбелері $A(1; 4; 2)$, $B(2; -1; 5)$, $C(0; -2; 4)$ нүктелерінде болатын үшбұрыш тікбұрышты деген ақиқат па?

296. ABC үшбұрышының төбелері: $A(-4; 0; 2)$, $B(6; 5; -2)$, $C(-2; 5; 4)$. Оның медианаларының қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

ҚОСЫМШАЛАР

0°-ТАН 90°-ҚА ДЕЙІНГІ БҰРЫШТАРДЫҢ СИНУСТАРЫ МЕН КОСИНУСТАРЫНЫҢ ЖУЫҚ МӘНДЕРІНІҢ КЕСТЕСІ

A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B
0°	0,000	90°	30°	0,500	60°	60°	0,866	30°
1°	0,017	89°	31°	0,515	59°	61°	0,875	29°
2°	0,035	88°	32°	0,530	58°	62°	0,883	28°
3°	0,052	87°	33°	0,545	57°	63°	0,891	27°
4°	0,070	86°	34°	0,559	56°	64°	0,899	26°
5°	0,087	85°	35°	0,574	55°	65°	0,906	25°
6°	0,105	84°	36°	0,588	54°	66°	0,914	24°
7°	0,122	83°	37°	0,602	53°	67°	0,921	23°
8°	0,139	82°	38°	0,616	52°	68°	0,927	22°
9°	0,156	81°	39°	0,629	51°	69°	0,934	21°
10°	0,174	80°	40°	0,643	50°	70°	0,940	20°
11°	0,191	79°	41°	0,656	49°	71°	0,946	19°
12°	0,208	78°	42°	0,669	48°	72°	0,951	18°
13°	0,225	77°	43°	0,682	47°	73°	0,956	17°
14°	0,242	76°	44°	0,695	46°	74°	0,961	16°
15°	0,259	75°	45°	0,707	45°	75°	0,966	15°
16°	0,276	74°	46°	0,719	44°	76°	0,970	14°
17°	0,292	73°	47°	0,731	43°	77°	0,974	13°
18°	0,309	72°	48°	0,743	42°	78°	0,978	12°
19°	0,326	71°	49°	0,755	41°	79°	0,982	11°
20°	0,342	70°	50°	0,766	40°	80°	0,985	10°
21°	0,358	69°	51°	0,777	39°	81°	0,988	9°
22°	0,375	68°	52°	0,788	38°	82°	0,990	8°
23°	0,391	67°	53°	0,799	37°	83°	0,993	7°
24°	0,407	66°	54°	0,809	36°	84°	0,995	6°
25°	0,423	65°	55°	0,819	35°	85°	0,996	5°
26°	0,438	64°	56°	0,829	34°	86°	0,998	4°
27°	0,454	63°	57°	0,839	33°	87°	0,999	3°
28°	0,469	62°	58°	0,848	32°	88°	0,999	2°
29°	0,485	61°	59°	0,857	31°	89°	1,000	1°
30°	0,500	60°	60°	0,866	30°	90°	1,000	0°
A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B

0°-ТАН 89°-ҚА ДЕЙІНГІ БҰРЫШТАРДЫҢ ТАНГЕНСІНІҢ ЖУЫҚ МӘНДЕРІНІҢ КЕСТЕСІ

A	tg *A*	*A*	tg *A*	*A*	tg *A*
0°	0,000	30°	0,577	60°	1,73
1°	0,017	31°	0,601	61°	1,80
2°	0,035	32°	0,625	62°	1,88
3°	0,052	33°	0,649	63°	1,96
4°	0,070	34°	0,675	64°	2,05
5°	0,087	35°	0,700	65°	2,14
6°	0,105	36°	0,727	66°	2,25
7°	0,123	37°	0,754	67°	2,36
8°	0,141	38°	0,781	68°	2,48
9°	0,158	39°	0,810	69°	2,60
10°	0,176	40°	0,839	70°	2,75
11°	0,194	41°	0,869	71°	2,90
12°	0,213	42°	0,900	72°	3,08
13°	0,231	43°	0,933	73°	3,27
14°	0,249	44°	0,966	74°	3,49
15°	0,268	45°	1,000	75°	3,73
16°	0,287	46°	1,04	76°	4,01
17°	0,306	47°	1,07	77°	4,33
18°	0,325	48°	1,11	78°	4,70
19°	0,344	49°	1,15	79°	5,14
20°	0,364	50°	1,19	80°	5,67
21°	0,384	51°	1,23	81°	6,31
22°	0,404	52°	1,28	82°	7,12
23°	0,424	53°	1,33	83°	8,14
24°	0,445	54°	1,38	84°	9,51
25°	0,466	55°	1,43	85°	11,4
26°	0,488	56°	1,48	86°	14,3
27°	0,510	57°	1,54	87°	19,1
28°	0,532	58°	1,60	88°	28,6
29°	0,554	59°	1,66	89°	57,3

ЖАУАПТАР МЕН НҰСҚАУЛАР

1. в). **2.** а) 3 жұп; ә) 6 жұп. **3.** $(20 + 4\sqrt{3})$ см. **4.** 96 см^2. **5.** 7 см. **6.** а) $\Delta OPA = \Delta OPB = \Delta OPC$, $\Delta APC = \Delta APB = \Delta CPB$, $\Delta AOB = \Delta AOC = \Delta BOC$; ә) дұрыс тетраэдр. **7.** $0,5\sqrt{2}$ дм. **9.** $4\sqrt{2}$ см. **10.** а) 60; ә) 20; б) 45. **11.** а) Шексіз көп; ә) бір немесе шексіз көп; б) бірде-бір емес немесе бір. **12.** а) Мүмкін; ә) мүмкін емес. **14.** Қиылысады. **15.** а) Мүмкін емес; ә) мүмкін. **16.** а) $D \in AB$; ә) 1) $MN \cap (ABC) = K$, $K \in BC$; 2) $(DMN) \cap (ABC) = BC$. **17.** а) BC; ә) D_1C_1. **18**. $4\sqrt{5}$ см. Үшбұрыштардың ұқсастығын пайдаланыңдар. **20.** Мұндай нүкте бар және ол MN түзуіне тиісті. **21.** Қате бар. B, D, E нүктелері бір түзудің бойында жатуы тиіс. **22.** $(A_1C_1D) \cap (ACD_1) = KN$, мұндағы $K = AD_1 \cap A_1D$, $N = DC_1 \cap CD_1$; $KN = 2\sqrt{2}$ дм. **23.** а) Мүмкін емес. **24.** ә) Ақиқат емес. **26.** а) 16 см; ә) 5,52 дм. **27.** а) BKD жазықтығында $MN \parallel BD$ салыңдар, $N \in BK$, $BN : NK = 2 : 3$; ә) BMN жазықтығында $OK \parallel MN$ жүргізіңдер, $K \in BN$, $OK = 4$ см. **28.** Параллелограмм, $P = 32$ см. **29.** SB түзуі. **30.** Мысалы, A_1C және DC_1 немесе A_1C және BD. Айқас түзулердің басқа жұбын көрсетіңдер. **31.** 3 дм. **32.** 3 см. **33.** AB_1C жазықтығында $KL \parallel AC$ жүргізіңдер, $L \in B_1C$, $KL = 3\sqrt{2}$ см. **34.** ABC жазықтығында O нүктесі арқылы $KL \parallel BC$ және KDL жазықтығында P нүктесі арқылы $MN \parallel KL$ жүргізіңдер. $S = 36\sqrt{3}$ см^2. **35.** Ақиқат емес, $DK \subset (ABC)$, ал $OB \cap (ABC) = B$, $B \notin DK$. **36.** CK мен DN айқас түзулер екенін дәлелдеңдер. **37.** а) Дұрыс емес; ә) параллель немесе айқас болуы мүмкін. **38.** б) Бұл түзу үшбұрыштың жазықтығында жатуы немесе оған параллель болуы мүмкін. **39.** а) 10 см; ә) $4a$. **40.** 28 м^2. **41.** а) $\alpha \cap \beta = b$ болсын. b түзуі мен A нүктесі арқылы γ жазықтығын және онда жататын $AB \parallel b$ түзуін салыңдар. $AB \parallel \alpha$, $AB \parallel \beta$ болатынын дәлелдеңдер. ә) α жазықтығында β жазықтығын қиятын c түзуін салыңдар. c түзуі мен A нүктесі арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады және онда $AC \parallel c$ болатын AC түзуін салу керек. $AC \parallel \alpha$ және $AC \cap \beta$ болатынын дәлелдеңдер. **42.** а) $a \parallel \alpha$ болсын. α жазықтығында кез келген B нүктесін белгілеңдер және a түзуі мен B нүктесі арқылы өтетін β жазықтығын жүргізіңдер. α мен β жазықтықтары a түзуіне параллель түзу арқылы қиылысады. Мұны негіздеңдер. **43.** а) 168 см^2; ә) 48 см^2; б) $72\sqrt{3}$ см^2. **44.** $\frac{2}{3}b$. **45.** ә) $\frac{4}{3}$. **46.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **47.** α мен β жазықтықтары параллель. **48.** а) Параллель жазықтықтарда орналасқан түзулер қиылыспайтындықтан; ә) жабынды көлденең болмауы мүмкін. **49.** Кері жору арқылы дәлелдеу тәсілін қолданыңдар. **50.** Үшінші қабырғасы α-ға параллель. **51.** Дұрыс емес. **52.** ә) Үшбұрыштың орта сызығының қасиеті мен жазықтықтардың параллельдік белгісін пайдаланыңдар. **53.** Параллелепипедтің барлық жақтары параллелограмдар екенін ескеріп, жазықтықтардың параллельдік белгісін пайдаланыңдар. **55.** а) $\sqrt{2}$ см; ә) 9 см. **57.** 20,4 см. **58.** а) Тіктөртбұрыш, 64 см^2; ә) ромб, 96 см^2. **59.** 10 : 9. **60.** а) 50 см^2; ә) $\frac{1}{9}S$ және $\frac{4}{9}S$. **61.** $\frac{6a^2\sqrt{14}}{625}$. ΔABC ауданын табу үшін Герон формуласын пайдаланыңдар. **62.** Қима – ΔPMN, мұндағы $PM \parallel BC$, $PN \parallel BK$, M, N нүктелері – DC және KD кесінділерінің орталары. **63.** Мүмкін емес. **64.** Қиылыспайды, айқас түзулердің белгісін пайдаланыңдар. **65.** 12 см. **66.** а) $MK \cap (ABC) = X$, мұндағы $X = MK \cap AC$; ә) BX түзуі. **67.** M, N, K, P нүктелері, сәйкесінше, AD, DB, AC, CB қырларының орталары болсын. $MK \parallel NP$ болатынын дәлелдеңдер. **68.** 8 дм. **69.** 8 см. **70.** Шексіз көп. **71.** 55°. **72.** Сәйкесінше ($BA \parallel B_1A_1$, $BC \parallel B_1C_1$) қабырғалары параллель болатын ABC мен $A_1B_1C_1$ бұрыштары параллель жазықтықтарда жатыр. Олардың қабырғаларында $AB = A_1B_1$ және $BC = B_1C_1$ болатындай өзара тең кесінділер салыңдар, сонда ABB_1A_1, BCC_1B_1 мен ACC_1A_1 төртбұрыштары параллелограмдар болады. Демек, $AC = A_1C_1$. Одан кейін ABC мен $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарын қарастырыңдар. **74.** 60°. **75.** а) $\angle(MN;\ BC) = 65°$; ә) $\angle(MN;\ AB) = 0°$. **76.** $\operatorname{tg}\angle MA_1B = 3$. **79.** а) $\sqrt{c^2+2}$ дм, мұндағы c – параллелепипедтің бүйір қырының ұзындығы; ә) бірінің катеттері қорапшаның ұзындығы мен еніне тең, екіншінің бір катеті қорапшаның биіктігіне, ал екінші катеті бірінші үшбұрыштың гипотенузасына тең болатын екі тікбұрышты үшбұрыш салыңдар. Екінші үшбұрыштың гипотенузасы ізделінді диагональдың ұзындығына тең болатынын дәлелдеңдер. **80.** Үшбұрыштардың теңдігінің белгілерін пайдаланыңдар. **81.** ә) $BD \perp (AA_1C)$ болатынын дәлелдеңдер. **83.** 8 см, 6 см, $2\sqrt{41}$ см. **84.** O нүктесі арқылы AB-ға параллель KL түзуін жүргізіңдер, сонда $\angle(AB;\ OM) = \angle MOL$. Одан әрі KLM теңбүйірлі үшбұрышының қасиетін пайдаланыңдар. **85.** ≈ 11,1 см. O нүктесі $ABCD$ шаршысы диагональдарының қиылысу нүктесі болсын, MH-қа параллель PO түзуін жүргізіңдер, $H \in AC$; ΔNMH тікбұрышты болатынын дәлелдеңдер. **86.** $\frac{1}{6}$. ΔNPM үшін косинустар теоремасын пайдаланыңдар, мұндағы $PM = 6\sqrt{3}$ см, $MN = 3\sqrt{3}$ см, $PN = 3\sqrt{13}$ см (PN түзуін тікбұрышты ΔPKN-нің гипотенузасы ретінде табуға болады). **87.** 15° немесе 75°. **88.** а) 0,8 дм; ә) ақиқат. **89.** $\sqrt{c^2+(b-a)^2}$ м. **90.** ≈ 18,7 см. ΔAKH тікбұрышты екенін анықтаңдар, себебі $AB \perp (CKH)$. **91.** 20 см. **92.** $a \perp (AOB)$ болатынын дәлелдеңдер. **93.** Қима – $MNKL$ тіктөртбұрышы, мұндағы M, N, K, L, сәйкесінше, AB, AD, A_1D_1,

A_1B_1 қырларының орталары. $S_{MNKL}=\frac{b^2\sqrt{2}}{2}$. **94.** 3) а) 16 см; ә) 15 см. **95.** 9 см. **96.** 25 см. **97.** 13 см. **98.** 6 см. ΔMPN теңбүйірлі екенін және ізделінді қашықтық осы үшбұрыштың PK биіктігінің ұзындығы болатынын анықтаңдар. **99.** 10 см. **100.** а) 10 см, 10 см; ә) $2\sqrt{21}$ см. **101.** Дұрыс; ≈ 29,7 м. **102.** ә) $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ см. **104.** а) $PA=PB=PC=PD=\sqrt{3}$ дм; ә) P нүктесі шаршының барлық қабырғаларынан $\frac{\sqrt{10}}{2}$ дм-ге тең қашықтықта орналасқан. **105.** а) Берілген жазықтыққа параллель және M нүктесінен осы жазықтыққа жүргізілген перпендикулярды қақ бөлетін жазықтықты; ә) берілген жазықтыққа параллель жазықтықта жататын, центрі M нүктесінен осы жазықтыққа жүргізілген перпендикулярдың ортасы болатын шеңберді. **106.** 8 см, 6 см. **107.** а) ≈ 5,7 см; ә) ≈ 22,2 см. **108.** ә) 30 см. **109.** Құрылғылар бір түзудің бойында жатпайтын A, B, C нүктелерінде орналассын, ал S – жарқыл нүктесі, сонда ABC жазықтығына түсірілген SO перпендикулярының ұзындығы – ізделінді арақашықтық. O нүктесі – ΔABC-ға сырттай сызылған шеңбердің центрі. $SO = \sqrt{d^2-R^2}$, мұндағы $R=\frac{abc}{4S}$, $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **110.** а) Берілген нүктелерді жалғайтын кесіндіге перпендикуляр және оның ортасы арқылы өтетін жазықтық; ә) берілген үшбұрыштың жазықтығына перпендикуляр және осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі арқылы өтетін түзу. **111.** 2) 5 см. **112.** 25 см. **113.** 10 см. **114.** 7 см; 8 см. **115.** 2) MA. **116.** 2) $48\sqrt{2}$ см^2. **117.** $50\sqrt{6}$ см^2. **118.** а) Ромбының шаршы болатынын анықтаңдар. ә) 92,16 дм^2. **119.** $MK = MH = MD = \sqrt{3}$ дм. **120.** 3 : 2. **121.** $\sqrt{7}$ дм. **122.** AB мен DC қабырғаларына дейінгі арақашықтық 1,7 дм-ден, ал AD мен BC қабырғаларына дейін 1 дм-ден. **123.** O – AB гипотенузасының ортасы екенін анықтаңдар. AB, AC, BC қабырғаларына дейінгі арақашықтық, сәйкесінше, 4 см, $4\sqrt{2}$ см, 5 см-ге тең. **124.** Алдымен α жазықтығына түсірілген AH перпендикулярының табаны A_1 бұрышының биссектрисасына тиісті екенін анықтаңдар. Одан әрі $B_1C_1\perp(AA_1H)$... болатынын дәлелдеңдер. **125.** 1) H нүктесі AC-ның ортасы болсын, сонда $AC\perp BH$ және $AC\perp PH$, демек, $AC\perp(PBH)$ және $AC\perp PB$. 2) 90°. **126.** 1) Мысалы, а) CC_1; ә) C_1D – көлбеу, CD – оның проекциясы. 2) Үш перпендикуляр туралы теорема бойынша AC – A_1C көлбеуінің ABC жазықтығына проекциясы, себебі $AC\perp BD$, онда $A_1C\perp BD$. **127.** $MB = 18$ см; $MA = 18\sqrt{3}$ см. **128.** 25 см. **129.** 1) а) BD; ә) DC_1; б) B_1C. 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **130.** 45°. **131.** ≈ 35°. **132.** $\angle DAC \approx 63°$,

$\angle DBC \approx 56°$, $\angle DOC \approx 67°$. **133.** а) 45°; ә) 5 см. **134.** $4\sqrt{5}$ см, ≈ 27°. **135.** 60°. **136.** ≈ 35°. **137.** ≈ 35°. **138.** 60°. **139.** ≈ 24°. **140.** 60°. **141.** $\angle PNH = 50°$. **142.** а) 30°; ә) 45°. **143.** 1 дм. **144.** а) Болмайды; ә) 30°. **145.** 32 см^2. **146.** 45°. **147.** 60°. **148.** ≈ 71°. **149.** ≈ 55°. **150.** ≈ 71°. **151.** 60°. **152.** а) 45°; ә) ≈ 49°. **153.** а) 45°; ә) ≈ 7,8 см. **154.** а) 1 дм; ә) 1 дм; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ дм. **155.** а) $\sqrt{13}$ дм; ә) 3 дм; б) 3 дм. **156.** а) 3 см; ә) 2,4 см. **159.** 5 см. **160.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **161.** 1 дм. **162.** 12,5 см немесе 19,5 см. **163.** $\sqrt{c^2 + a^2 - h^2}$. **164.** 0,9 дм. **165.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. Берілген тетраэдрдің APB жағын табаны деп алып, ізделінді арақашықтық осы жағына түсірілген CO перпендикулярының жартысына тең болатынын анықтаңдар. **166.** 4 см. **167.** $\frac{np}{m}$. **168.** ≈ 53°. **170.** а) AB мен BC қабырғаларына дейінгі қашықтық $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$-ге, AD мен DC қабырғаларына дейінгі қашықтық $\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)$-ге тең; ә) ≈ 41°, берілген түзулердің ромбының жазықтығымен α-ға тең бұрыштар құрайтынын дәлелдеңдер, мұндағы $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **171.** 4 см. **172.** $4\sqrt{2}$ см. **173.** 60°. **174.** $\frac{1}{14}$. **175.** а) $(x;\ 0;\ 0)$; ә) $(0;\ y;\ 0)$; б) $(0;\ 0;\ 0)$. **176.** а) D, K, N; ә) E; б) B, E, N. **177.** $A_x(12;\ 0;\ 0)$, $A_y(0;\ 0;\ 0)$, $A_z(0;\ 0;\ -\sqrt{5})$. **178.** а) $A_x(4;\ 0;\ 0)$, $A_y(0;\ -2;\ 0)$, $A_z(0;\ 0;\ -6)$; ә) $A_{xy}(4;\ -2;\ 0)$, $A_{yz}(0;\ -2;\ -6)$, $A_{xz}(4;\ 0;\ -6)$. **180.** $M(0;\ 4;\ 4)$. **181.** $M(5;\ 5;\ 5)$. **182.** а) $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(-2;\ 0;\ 0)$, $C(-2;\ 4;\ 0)$, $D(2;\ 4;\ 0)$, $A_1(2;\ 0;\ 4)$, $B_1(-2;\ 0;\ 4)$, $C_1(-2;\ 4;\ 4)$, $D_1(2;\ 4;\ 4)$; ә) $A(2\sqrt{2};\ 0;\ 0)$, $B(0;\ -2\sqrt{2};\ 0)$, $C(-2\sqrt{2};\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 2\sqrt{2};\ 0)$, $A_1(2\sqrt{2};\ 0;\ 4)$, $B_1(0;\ -2\sqrt{2};\ 4)$, $C_1(-2\sqrt{2};\ 0;\ 4)$, $D_1(0;\ 2\sqrt{2};\ 4)$. **183.** Егер $BA \subset Ox$, $BC \subset Oy$, $BB_1 \subset Oz$ болса, онда $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 2;\ 0)$, $D(2;\ 2;\ 0)$, $A_1(2;\ 0;\ 2)$, $B_1(0;\ 0;\ 2)$, $C_1(0;\ 2;\ 2)$, $D_1(2;\ 2;\ 2)$. **184.** а) xOz және yOz жазықтықтарының арасындағы екіжақты бұрышты қақ бөлетін жазықтықта. **185.** 1) $OM = 5$; 2) $M_1(3;\ 4;\ 5)$, $M_2(3;\ 4;\ -5)$. **186.** а) $A_1(-5;\ 0;\ 2)$; ә) $A_2(-5;\ 0;\ -2)$. **187.** Егер $DA \subset Ox$, $DC \subset Oy$, $DD_1 \subset Oz$ болса, онда $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 0)$, $C(0;\ 1;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ 0)$, $A_1(1;\ 0;\ 1)$, $B_1(1;\ 1;\ 1)$, $C_1(0;\ 1;\ 1)$, $D_1(0;\ 0;\ 1)$. **188.** $C(0;\ 3\sqrt{3};\ 0)$, $D(0;\ \sqrt{3};\ 2\sqrt{6})$. **189.** $A(-\sqrt{3};\ -1;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 0)$, $C(\sqrt{3};\ -1;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ 2\sqrt{2})$. **190.** а) 5; ә) 4; б) 3. **191.** а) $7\sqrt{5}$; ә) $z = 2$. **192.** 6. **193.** $(-2;\ -11;\ 6)$. **194.** а) Ақиқат емес; ә) ақиқат. **195.** 5. **196.** 3. **197.** а) $D(0;\ 7;\ 14)$; ә) 5. **198.** а) және ә) Болады. Мынаны дәлелдеу жеткілікті: а) AC мен BD диагональдарының орталары беттеседі; ә) MK мен NL диагональдарының орталары беттеседі және $MN = NK$.

199. а) (0; 0; 0), $R = 3$; в) (2; –1; 0), $R = \sqrt{7}$. **201.** б) $x^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 16$. **202.** Берілген барлық теңдеулер – сфераның теңдеуі. **203.** а) $M(-1; 0; 0)$; ә) $D(-1; 1; 0)$. **204.** а) $z = 0$; ә) $x = 0$ және $y = 0$ болатынын дәлелдеу жеткілікті. **205.** $AB = \sqrt{26}$, $BC = AC = 7$, $AM = \frac{\sqrt{101}}{2}$. **206.** $0{,}5\sqrt{6}$. **207.** Барлық медианалары $\sqrt{6}$-ға тең. ΔMKP-ның теңқабырғалы, қабырғасы $2\sqrt{2}$-ге тең болатынын анықтаңдар. **208.** а) мен ә) тапсырмаларында $R = 4$ болатынын анықтаңдар. **209.** ә) мен в) теңдеулері. **210.** (2; 2; 1) немесе (2; 2; –1). **211.** а) N; ә) L; б) D, F, N, K. **212.** Егер $CB \subset Ox$, $CD \subset Oy$, $CC_1 \subset Oz$ болса, онда $A(5; 5; 0)$, $B(5; 0; 0)$, $C(0; 0; 0)$, $D(0; 5; 0)$, $A_1(5; 5; 5)$, $B_1(5; 0; 5)$, $C_1(0; 0; 5)$, $D_1(0; 5; 5)$. **213.** $y = 0$. **214.** $M(0; 0; -2)$. **215.** $D(2; 2; 0)$. **216.** $2\sqrt{6}$. **217.** $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$. **218.** Ox: (2; 0; 0) және (–2; 0; 0); Oy: (0; 2; 0) және (0; –2; 0); Oz: (0; 0; 2) және (0; 0; –2). **219.** Болмайды, неге екенін түсіндіріңдер. **221.** а) $\overrightarrow{AB_1}$; ә) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{DB}$; в) $\overrightarrow{CD_1}$. **223.** ә) AMD мен BNC үшбұрыштарының теңдігін пайдаланыңдар. **224.** а) $\overrightarrow{AB}(7; -18; 14)$. **225.** а) (0; 11; –15); ә) (–1,5; –5,25; 7). **226.** а) және ә) – тең; б) тең емес. **227.** а) $x = -11$, $y = 0$, $z = 8$; ә) $x = -7$, $y = -5$, $z = 8$. **228.** Бар болады, ол берілген параллелограмм диагональдарының қиылысу нүктесі. **231.** а) $5\sqrt{2}$; ә) 3. **232.** а) ±12; ә) $\pm 5\sqrt{3}$. **233.** а) (6; 2; –1); ә) (3; 11; –13); б) (3; –17; 22); в) (–6; –2; 1). **234.** а) 5; ә) $\sqrt{13}$; б) 6; в) 12. **235.** а) $\sqrt{2}$; ә) $3\sqrt{6}$; б) $\sqrt{26}$; в) $\sqrt{6}$. **239.** а) ≈ 25,0; ә) ≈ 25,02. **240.** 6. **241.** а) $\overrightarrow{MC_1}(\sqrt{5}; -1; 4)$; ә) $\overrightarrow{O_1N}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; 1; -4\right)$. **243.** а) және ә) ақиқат. Бір нүктеден салынған $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бір түзудің бойында жататынын анықтаңдар. **244.** Коллинеар, себебі $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{b} = k\vec{c}$, $\vec{a} = p\vec{c}$. k мен p-ны табыңдар. **246.** Шексіз көп, мысалы, $\vec{a}(-5; 10; 0)$ немесе $\vec{a}\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 0\right)$. **247.** а) –4; ә) x-тің ондай мәндері жоқ. **248.** а) $n = -\frac{3}{2}$, $m = 4$; ә) берілген векторлар коллинеар бола алмайды (неге екенін түсіндіріңдер). **249.** а) мен ә) жағдайында. **250.** $\vec{a}$ мен $\vec{d}$. **253.** Мысалы, а) (7; 9; 11); ә) (1; 5; –7). **254.** а) $\vec{b}\left(-\frac{2}{7}; \frac{6}{7}; \frac{3}{7}\right)$. **255.** а) $\vec{a}(2{,}4; -3{,}2; 3)$ немесе $\vec{a}(-2{,}4; 3{,}2; -3)$. **256.** а) $\frac{1}{2}$; ә) $-\frac{1}{2}$; б) 0; в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **257.** а) 1; ә) –1; б) 0; в) 1. **258.** а) 4; ә) 12; б) 4; в) –4. **259.** а) –9; ә) 25. **260.** а) 4; ә) ±5. **261.** а) 18; ә) 9. **262.** а) 8,5; ә) 8,5. **263.** а) $\frac{4}{9}$; ә) 0,48. **264.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **265.** $-\frac{6}{7}$. **266.** ≈ 69°. **267.** $2\frac{2}{3}$. **268.** а) ±2; ә) m-нің ондай мәндері жоқ. **269.** –0,48. **270.** 12,5. **271.** ≈ 143°. **272.** а) (10; –5; 20);

ә) (–5; –2; 14). **273.** $17\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$. **274.** ±3. **275.** а) $m=12$, $n=-6$; ә) m мен n-нің кез келген мәндерінде. **276.** $n=-1$ немесе $n=2$ болғанда. **277.** 16. **278.** а), ә) және б) ақиқат. **279.** Егер ол нүкте берілген түзулер жатқан жазықтыққа тиісті болмаса. **280.** Болады. **281.** MA мен BN түзулері бір жазықтықта жатыр және $MA \parallel BN$. Егер осы жазықтықта N нүктесі арқылы $NK \perp MN$ түзулерін жүргізсе, онда $KNBA$ параллелограмы мен теңбүйірлі ΔMKN шығады. **282.** Егер AB кесіндісі берілген жазықтыққа перпендикуляр болмаса және оны C нүктесінде қиса, онда BC мен AC көлбеулерінің теңдігінен олардың осы жазықтықтағы B_1C мен A_1C проекцияларының теңдігі шығады. **283.** $8\sqrt{2}$ см. **284.** 10 см, 15 см. **285.** 10 см. ADO бұрышының тік болатынын анықтаңдар. **286.** $7\sqrt{6}$ см. **288.** Ақиқат. **289.** $m=-2$ болғанда. а) Болмайды; ә) болады. **290.** а) $\sqrt{51}$; ә) 3. **291.** 8 бөлікке. **292.** а) 45°; ә) ≈ 68°. **293.** $\frac{1}{3}$. **294.** $5\sqrt{2}$ см. **295.** Ақиқат. $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{BC}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар. **296.** $\left(0; 3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$. AA_1 мен BB_1 медианалары M нүктесінде қиылысатын болсын. $\overrightarrow{AA_1}$ мен $\overrightarrow{AM}$ векторларының координаталарын табыңдар.

ПӘНДІК КӨРСЕТКІШ

Вектор 84
– нөлдік 84
Векторды санға көбейту 86
Вектордың координаталары 84
– нүктенің 74
Вектордың ұзындығы 85
Вектордың ұзындығын оның координаталары бойынша есептеу 85
– екі нүктенің арақашықтығын 78
– кесіндінің ортасының координаталарын 79
Векторлардың арасындағы бұрыш 93
– айқас түзулердің 37
– жазықтықтардың 60
– түзу мен жазықтықтың 55
Векторларды азайту 86
Векторларды параллелепипед ережесі бойынша қосу 85
– параллелограмм ережесі 85
– үшбұрыш ережесі 86
Векторлардың перпендикулярлығы 94
– жазықтықтардың 59
– түзу мен жазықтықтың 38
– түзулердің 38
Векторлардың скаляр көбейтіндісі 93
Екі жазықтықтың параллельдік белгісі 29
– түзу мен жазықтықтың 25
Екі жазықтықтың перпендикулярлық белгісі 60
– айқас түзулердің 20
– түзу мен жазықтықтың 38
Екі параллель жазықтықтың арақашықтығы 65
– айқас түзулердің 66
– нүктеден түзуге дейінгі 65
– түзу мен жазықтықтың 65
Екіжақты бұрыш 59
Екіжақты бұрыштың жағы 59
– көпжақтың 9
Екіжақты бұрыштың қыры 59
– көпжақтың 9
Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы 59
Жазықтықтардың параллельдігі 29
– түзу мен жазықтықтың 25
– түзулердің 18
Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі 73
Коллинеар векторлар 90
– бірдей бағытталған 84
– қарама-қарсы бағытталған 93
– компланар 90
– тең 84
Пирамиданың биіктігі 46
Көпжақтың қимасы 31
Көлбеудің табаны 44
– перпендикулярдың 44
Координаталар басы 73
Координаталар осьтері 73
Координаталық векторлар 85
– жазықтықтар 73
– осьтер 73
Көлбеудің жазықтыққа проекциясы 44
– нүктенің 44
– фигураның 44
Куб 9
Нүктеден жазықтыққа жүргізілген көлбеу 44
Нүктеден жазықтыққа жүргізілген перпендикуляр 44
Нүктенің абсциссасы 74
Нүктенің аппликатасы 74
Нүктенің ординатасы 74
Пирамида 10
Стереометрия аксиомалары 13
Сфера 79
Сфераның (шардың) радиусы 79
Сфераның теңдеуі 79
Тетраэдр 10

ҚОСЫМША ӘДЕБИЕТ

1. Бадаев С. А., Досанбай П. Т., Мажитова А. Д., Таласбаева Ж. Т. Аналитикалық геометрия. Есептер жинағы: оқу құралы. – Алматы: Қазақ университеті баспасы, 2016.

2. Глейзер Г. И. История математики в школе: 9–10 классы. – М.: Просвещение, 1981.

3. Гусев В., Қайдасов Ж., Есенғазин Е. Есептер жинағы: жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныбына арналған оқу құралы. – Алматы: Мектеп, 2015.

4. Сергеев И. Н., Олехник С. Н., Гашков С. Б. Примени математику. – М.: Наука, 1990.

5. Солтан Г. Н., Солтан А. Е., Жумадилова А. Ж. Геометрия: жалпы білім беретін мектептің 9-сынып оқушыларына арналған оқулық + CD. – Көкшетау: Келешек-2030, 2019.

6. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.

Қосалқы беттердегі иллюстрацияларда пайдаланылған фотосуреттер тізімі

1. Алматы қ. әл-Фараби көшесіндегі көлік айрығы – 12 б.

2. «Нұрлы жол» көпірі. Орталық Азиядағы ең ұзын көпір, Павлодар қаласы – 36 б.

3. Нұр-Сұлтан қаласындағы ең биік Абу-Даби Плаза ғимаратының макеті – 72 б.

СОЛТАН Геннадий Николаевич
СОЛТАН Алла Евгеньевна
ЖУМАДИЛОВА Аманбала Жумадиловна

Геометрия

Жалпы білім беретін мектептің
қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы
10 (1-б.), 11 (2-б.) сыныптардың оқушыларына арналған
ОҚУЛЫҚ
Екі бөлімді
10-сынып (1-б.)

Редакторы	С. Ш. Алибеков
Суретшісі	А. Б. Жусупов
Техникалық редакторы	Б. К. Еслямов
Мұқаба дизайнері	Е. Е. Велькер
Корректорлары	Р. С. Какаманова С. А. Абденова

Коды **5**13056

ИП Келешек-2030 баспасы
Қазақстан Республикасы,
020000, Көкшетау қ.
Баспа кеңсесі: Абай к-сі, 112а,
тел.: 8 (7162) 72-29-43 (қабылдау бөлімі),
8 (7162) 44-18-74, +7 708 444 18 74,
ұялы тел.: +7 702 781 06 78, +7 705 745 09 75.
http://www.keleshek-2030.kz, E-mail: torg@keleshek-2030.kz

Оглавление

Untitled.FR11