Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК

для учащихся 10 (ч. 1), 11 (ч. 2) классов
общественно-гуманитарного направления
общеобразовательной школы

В двух частях
10 класс (ч. 1)

Рекомендовано Министерством образования и науки
Республики Казахстан

KELESHEK 2030
КОКШЕТАУ

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72
С60

Солтан Г. Н.
С60 **Геометрия.** Учебник для учащихся 10 (ч. 1), 11 (ч. 2) классов общественно-гуманитарного направления общеобразовательной школы. В двух частях. 10 класс (ч. 1) / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Кокшетау: Келешек-2030 баспасы, 2020. – 112 с.

ISBN 978-601-317-518-8
ISBN 978-601-317-519-5

Электронный вариант учебника: http://keleshek-2030.kz/books/geom_ogn_10ru.php

Предлагаемый учебник продолжает линию учебников по предмету «Геометрия» авторов Г. Н. Солтана, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадиловой издательства «Келешек-2030» по программе обновленного содержания образования. Учебник адресован учащимся классов общественно-гуманитарного направления общеобразовательной школы и состоит из двух частей: 10 класс – часть 1, 11 класс – часть 2.

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72

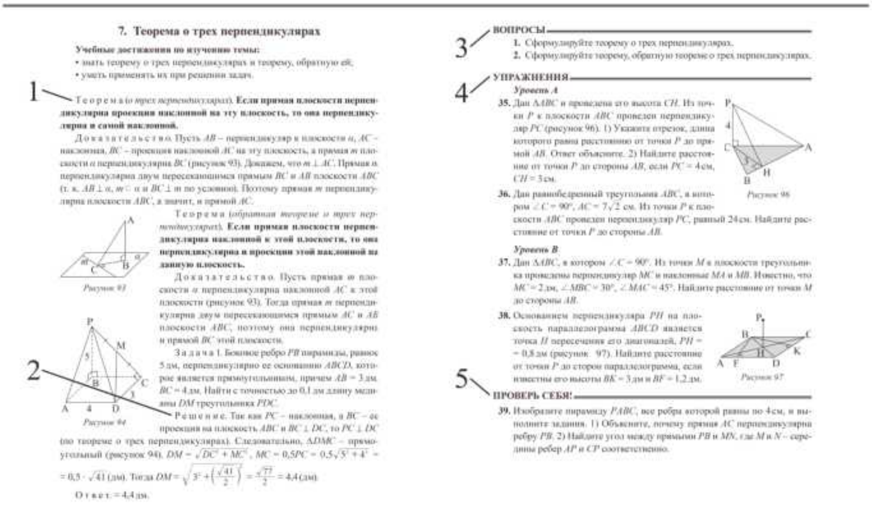
ISBN 978-601-317-519-5
ISBN 978-601-317-518-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие десятиклассники! В 7–9 классах вы изучали планиметрию, теперь приступаете к изучению стереометрии. Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» – пространственный, объемный и «метрео» – измеряю. В планиметрии изучаются фигуры, все точки которых лежат в одной плоскости. Такие фигуры называются плоскими. Например, отрезок, угол, треугольник, круг. *Геометрической фигурой называют любое множество точек.* Множество *всех точек*, рассматриваемых в стереометрии, называется *пространством*. В курсе геометрии 10 класса вы будете изучать аксиомы стереометрии, свойства взаимного расположения прямых и плоскостей, измерение углов и расстояний в пространстве, а также расширите знания о прямоугольной системе координат и векторах.

Содержание данного учебника состоит из теоретического и практического материала для занятий по каждой теме учебной программы. Определения понятий, аксиомы, теоремы, следствия из них выделены специальными шрифтами (1). К каждой теме предлагаются решения типовых задач (2) и контрольные вопросы (3) для проверки усвоения теории. Далее даны упражнения двух уровней сложности (A и B) для формирования практических умений и навыков (4). В конце каждого раздела имеются задания под рубрикой «Проверь себя!» (5) и исторические сведения. К упражнениям даются указания и ответы.



7. Теорема о трех перпендикулярах

Учебные достижения по изучению темы:
- знать теорему о трех перпендикулярах и теорему, обратную ей;
- уметь применять их при решении задач.

1 Теорема (*о трех перпендикулярах*). **Если прямая плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной.**

Доказательство. Пусть AB – перпендикуляр к плоскости α, AC – наклонная, BC – проекция наклонной AC на эту плоскость, а прямая m плоскости α перпендикулярна BC (рисунок 93). Докажем, что $m \perp AC$. Прямая m перпендикулярна двум пересекающимся прямым BC и AB плоскости ABC (т. к. $AB \perp \alpha$, $m \subset \alpha$ и $BC \perp m$ по условию). Поэтому прямая m перпендикулярна плоскости ABC, а значит, и прямой AC.

Рисунок 93

Теорема (*обратная теореме о трех перпендикулярах*). **Если прямая плоскости перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной на данную плоскость.**

Доказательство. Пусть прямая m плоскости α перпендикулярна наклонной AC к этой плоскости (рисунок 93). Тогда прямая m перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и AB плоскости ABC, поэтому она перпендикулярна и прямой BC этой плоскости.

Задача 1. Боковое ребро PB пирамиды, равное 5 дм, перпендикулярно ее основанию $ABCD$, которое является прямоугольником, причем $AB = 3$ дм, $BC = 4$ дм. Найти с точностью до 0,1 дм длину медианы DM треугольника PDC.

Рисунок 94

2 Решение. Так как PC – наклонная, а BC – ее проекция на плоскость ABC и $BC \perp DC$, то $PC \perp DC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, $\triangle DMC$ – прямоугольный (рисунок 94). $DM = \sqrt{DC^2 + MC^2}$, $MC = 0{,}5PC = 0{,}5\sqrt{5^2 + 4^2} = 0{,}5 \cdot \sqrt{41}$ (дм). Тогда $DM = \sqrt{3^2 + \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{77}}{2} = 4{,}4$ (дм).

Ответ. $\approx 4{,}4$ дм.

3 **ВОПРОСЫ**

1. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.
2. Сформулируйте теорему, обратную теореме о трех перпендикулярах.

4 **УПРАЖНЕНИЯ**

Уровень A

35. Дан $\triangle ABC$ и проведена его высота CH. Из точки P к плоскости ABC проведен перпендикуляр PC (рисунок 96). 1) Укажите отрезок, длина которого равна расстоянию от точки P до прямой AB. Ответ объясните. 2) Найдите расстояние от точки P до стороны AB, если $PC = 4$ см, $CH = 3$ см.

Рисунок 96

36. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $AC = 7\sqrt{2}$ см. Из точки P к плоскости ABC проведен перпендикуляр PC, равный 24 см. Найдите расстояние от точки P до стороны AB.

Уровень B

37. Дан $\triangle ABC$, в котором $\angle C = 90°$. Из точки M к плоскости треугольника проведены перпендикуляр MC и наклонные MA и MB. Известно, что $MC = 2$ дм, $\angle MBC = 30°$, $\angle MAC = 45°$. Найдите расстояние от точки M до стороны AB.
38. Основанием перпендикуляра PH на плоскость параллелограмма $ABCD$ является точка H пересечения его диагоналей, $PH = 0{,}8$ дм (рисунок 97). Найдите расстояние от точки P до сторон параллелограмма, если известны его высоты $BK = 3$ дм и $BF = 1{,}2$ дм.

Рисунок 97

5 **ПРОВЕРЬ СЕБЯ!**

39. Изобразите пирамиду $PABC$, все ребра которой равны по 4 см, и выполните задания. 1) Объясните, почему прямая AC перпендикулярна ребру PB. 2) Найдите угол между прямыми PB и MN, где M и N – середины ребер AP и CP соответственно.

Желаем успехов! *Авторы*

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ИЗ КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ

Основные формулы и теоремы

Произвольный треугольник

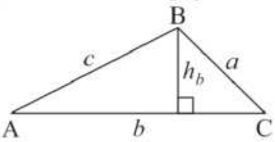


Рисунок 1

a, b, c – стороны;

$\angle A, \angle B, \angle C$ – противолежащие им углы;

h_b – высота, проведенная к стороне b;

S – площадь; p – полупериметр;

R – радиус описанной окружности;

r – радиус вписанной окружности.

Средняя линия треугольника MN (рисунок 2):

$$MN \parallel AC, MN = \frac{1}{2}AC;$$

$$S = \frac{1}{2}b \cdot h_b; \ S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \angle A;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$S = p \cdot r, \quad S = \frac{abc}{4R}.$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R.$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A.$$

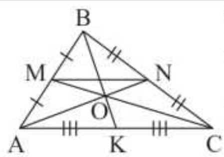


Рисунок 2

Медианы треугольника:

$$\frac{AO}{ON} = \frac{BO}{OK} = \frac{CO}{OM} = \frac{2}{1}.$$

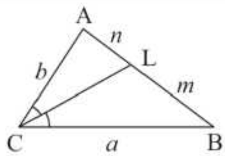


Рисунок 3

Биссектриса треугольника:

$$\frac{n}{m} = \frac{b}{a}.$$

$$CL = \sqrt{ab - mn}.$$

Прямоугольный треугольник

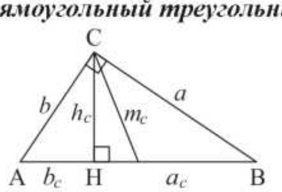


Рисунок 4

a, b – катеты; c – гипотенуза;

a_c, b_c – проекции катетов на гипотенузу;

m_c – медиана, проведенная к гипотенузе;

h_c – высота, проведенная к гипотенузе.

$$S = \frac{1}{2}ab; \qquad S = \frac{1}{2}c \cdot h_c;$$

$$m_c = \frac{1}{2}c = R; \qquad r = \frac{1}{2}(a + b - c);$$

$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}, \qquad a = \sqrt{c \cdot a_c}, \qquad b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$.

Решение прямоугольного треугольника:

$$a = c \cdot \sin \angle A; \qquad b = c \cdot \cos \angle A;$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \angle A; \qquad b = a \cdot \operatorname{ctg} \angle A.$$

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Тригонометрические формулы:

$\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha.$

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$

Правильный треугольник

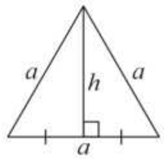


Рисунок 5

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$r = \frac{1}{3}h$;

$R = 2r$.

Квадрат

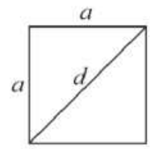


Рисунок 6

$d = a\sqrt{2}$;

$S = a^2$; $S = \frac{1}{2}d^2$;

$r = \frac{1}{2}a$;

$R = \frac{1}{2}d$.

Параллелограмм

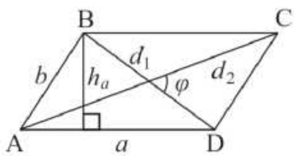


Рисунок 7

a, b – смежные стороны;

d_1, d_2 – диагонали;

φ – угол между диагоналями;

h_a – высота, проведенная к стороне a;

S – площадь.

$S = a \cdot h_a$; $S = ab \cdot \sin\angle A$;

$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$;

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Если $d_1 = d_2$, то $ABCD$ – прямоугольник (рисунок 8, *а*).

Рисунок 8

Если $d_1 \perp d_2$, то $ABCD$ – ромб (рисунок 8, *б*).

Трапеция

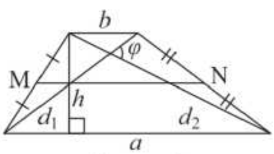


Рисунок 9

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$;

MN – средняя линия (рисунок 9);

MN параллельна основаниям

и $MN = \frac{a+b}{2}$.

Окружность

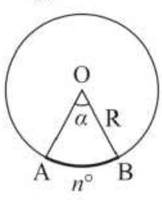


Рисунок 10

C – длина окружности; S – площадь круга;

l – длина дуги AB; $S_{\text{сект.}}$ – площадь сектора;

$n°$ – градусная мера дуги AB (центрального угла AOB);

α – радианная мера центрального угла.

$C = 2\pi R$; $S = \pi R^2$; $l = \frac{\pi R n°}{180°}$; $l = R\alpha$.

$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n°}{360°}$; $S_{\text{сект.}} = \frac{1}{2}R^2\alpha$.

Свойства: а) касательных к окружности;

б) касательной и секущей.

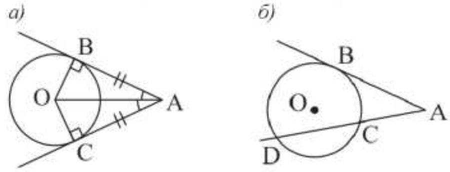


Рисунок 11

$AB^2 = AD \cdot AC$ (рисунок 11, *б*).

Свойство хорд

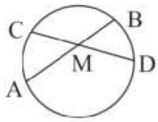


Рисунок 12

$AM \cdot MB = CM \cdot MD$

Угол между: а) касательной и хордой; б) хордами; в) секущими.

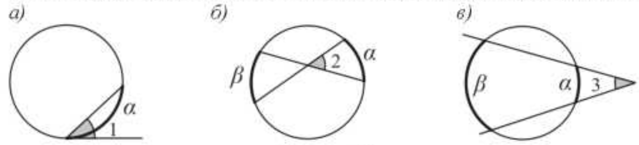


Рисунок 13

а) $\angle 1 = \frac{1}{2}\alpha$; б) $\angle 2 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; в) $\angle 3 = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

Вписанный четырехугольник

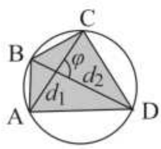


Рисунок 14

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$,

где d_1, d_2 – диагонали;

φ – угол между ними.

Описанный четырехугольник

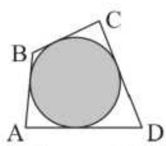


Рисунок 15

$AB + CD = AD + BC$.

$S = rp$,

где r – радиус вписанной окружности;

p – полупериметр четырехугольника.

Подобные треугольники

1) углы равны;

2) стороны пропорциональны.

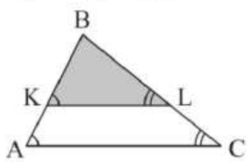


Рисунок 16

Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает треугольник, подобный данному (рисунок 16).

$$\Delta ABC \sim \Delta KBL \Rightarrow \frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KL} = \frac{BC}{BL} = k,$$

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle KBL}} = k, \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle KBL}} = k^2.$$

Сумма двух векторов

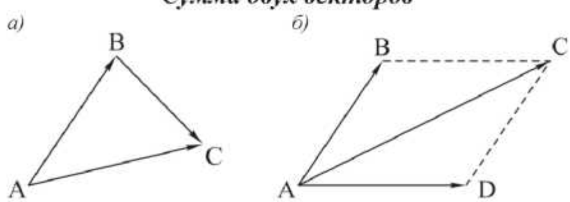


Рисунок 17

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ по правилу треугольника;

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ по правилу параллелограмма.

Разность двух векторов

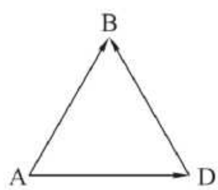


Рисунок 18

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор $k\vec{a}$, удовлетворяющий условиям:

1) $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$;

2) $k\vec{a} \parallel \vec{a}$;

3) если $k > 0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены (рисунок 19);
если $k < 0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ противоположно направлены (рисунок 20);

4) если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то $k\vec{a} = \vec{0}$.

$k > 0$

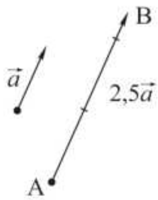


Рисунок 19

$\overrightarrow{AB} = 2{,}5\vec{a}$

$k < 0$

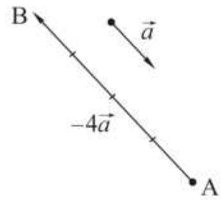


Рисунок 20

$\overrightarrow{AB} = -4\vec{a}$

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.

Если даны два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то любой вектор $\vec{c}$ можно единственным образом представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – некоторые числа. В разложении вектора $\vec{c}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, то есть $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$, числа x и y являются *координатами* вектора $\vec{c}$.

ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ. ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 7–9 КЛАССОВ

В пространстве рассматриваются разные *линии*, *геометрические тела* и их свойства. Представление о геометрических телах дают физические тела, например, кирпич – о прямоугольном параллелепипеде, апельсин – о шаре, пирамиды Древнего Египта – о геометрических телах, называемых пирамидами (рисунок 21).

Рисунок 21

При изучении пространственных фигур пользуются их изображениями на рисунке. Например, на рисунке 22, *а* изображен параллелепипед, на рисунках 22, *б*, *в* – треугольная и четырехугольная пирамиды (невидимые части фигур изображаются штриховыми линиями). Все эти тела являются представителями большого класса фигур, называемых *многогранниками*. Многогранник – это тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, называемых его *гранями*. Стороны этих многоугольников называются *ребрами*, а вершины – *вершинами* многогранника.

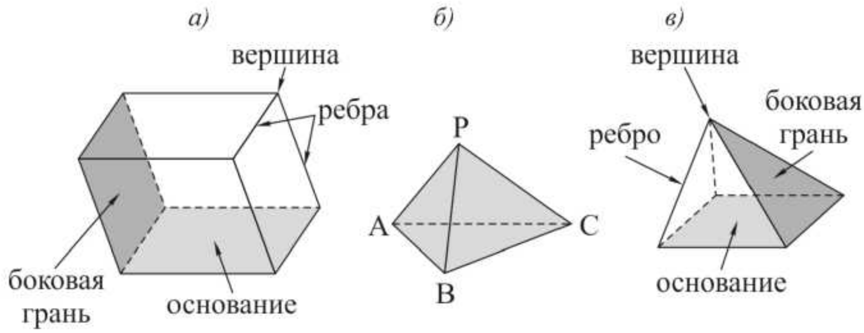


Рисунок 22

Параллелепипед – это многогранник, в котором 6 граней (рисунок 22, *а*); все его грани – параллелограммы (в *прямоугольном параллелепипеде* все грани – прямоугольники).

Куб – это прямоугольный параллелепипед, в котором все 6 граней – квадраты.

Пирамида – это многогранник, в котором одна грань – n-угольник, а остальные n граней – треугольники с общей вершиной (рисунки 22, *б*, *в*). Треугольную пирамиду называют также *тетраэдром* (то есть четырехгранником, в переводе с греческого языка). *Правильный тетраэдр* – это тетраэдр, все грани которого правильные треугольники.

Отметим, что признаки равенства и подобия треугольников выполняются не только для треугольников, содержащихся в одной плоскости, но и для треугольников, лежащих в разных плоскостях.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

1. В каком из предложений сформулирован признак равенства двух треугольников, лежащих в двух разных плоскостях?

а) Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны;

б) если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны;

в) если сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны;

г) если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

2. Пусть $PABC$ – тетраэдр. Сколько пар равных треугольников среди его граней, если: а) $PA = PB = PC$, $AB = BC = CA$; б) $PA = BC$, $PB = AC$, $PC = AB$? (В обозначении любой пирамиды первая буква – ее вершина).

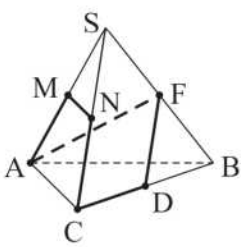


Рисунок 23

3. $SABC$ – правильный тетраэдр, длина ребра которого равна 8 см. Точки M, N, D, F – середины ребер SA, SC, CB, SB соответственно. Вычислите длину пространственной ломаной $AMNCDFA$ (рисунок 23).

4. Радиус окружности, вписанной в одну из граней куба, равен 2 см (рисунок 24). Вычислите площадь поверхности куба (сумму площадей всех его граней).

5. Сумма площадей всех граней правильного тетраэдра равна $49\sqrt{3}$ см^2. Найдите длину ребра этого тетраэдра.

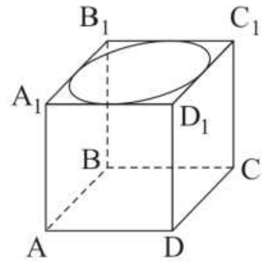


Рисунок 24

Уровень B

6. а) Пусть $PABC$ – треугольная пирамида, в которой все боковые ребра равны между собой, а основание ABC – правильный треугольник, точка O – центр основания. Соедините точку O отрезками с точками P, A, B, C и на полученном рисунке найдите все равные между собой треугольники.

б) Имеются 6 одинаковых палочек. Какая фигура получится, если в пространстве сложить их так, чтобы образовались 4 правильных треугольника, каждая сторона которых равна данной палочке?

7. $SABCD$ – четырехугольная пирамида, каждое ребро которой равно 1 дм, O – точка пересечения диагоналей основания $ABCD$, являющегося квадратом. Найдите расстояние SO.

8. Из плотного листа бумаги изготовьте модель правильного тетраэдра (рисунок 25, *а*), ребро которого равно 9 см. На рисунке 25, *б* показана развертка тетраэдра, на ней выделены цветом клапаны для склеивания.

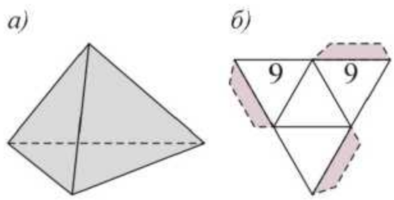


Рисунок 25

9. Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат, диагональ которого равна 4 см. Чему равна длина диагонали боковой грани этого параллелепипеда, если площадь его боковой грани $8\sqrt{3}$ см^2?

10. Боковые грани деревянного куба с ребром 10 см покрасили, а затем этот куб разрезали на кубики с ребром 2 см. Сколько получилось кубиков: а) с одной окрашенной гранью; б) с двумя окрашенными гранями; в) не имеющих окрашенных граней?

I. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

В результате изучения раздела надо

знать

- аксиомы стереометрии и их следствия;
- определения параллельных и скрещивающихся прямых в пространстве;
- свойства параллельных прямых в пространстве;
- признаки и свойства параллельности прямой и плоскости;
- признаки параллельности плоскостей.

уметь

- иллюстрировать аксиомы, их следствия и записывать их с использованием математических символов;
- находить параллельные и скрещивающиеся прямые и изображать их;
- применять свойства параллельных прямых в пространстве при решении задач;
- применять признаки, свойства параллельности прямой и плоскости при решении задач;
- применять признаки параллельности плоскостей при решении задач.

1. Аксиомы стереометрии и их следствия

Учебные достижения по изучению темы:

• знать основные понятия, аксиомы стереометрии и их следствия;

• уметь иллюстрировать и записывать их с использованием математических символов.

За основные неопределяемые понятия в стереометрии принимаются следующие: точка, прямая и плоскость. На рисунке плоскость изображают в виде параллелограмма или другой какой-нибудь плоской фигуры (рисунок 26). Обычно плоскости обозначают буквами греческого алфавита: α, β, γ и т. д. Для точек и прямых сохраняют обозначения, принятые в планиметрии: точки A, B, C, ...; прямые a, b, c, ... или AB, AC, ... Если точка C принадлежит плоскости α, то говорят также: «плоскость α проходит через точку C» (записывают $C \in \alpha$).

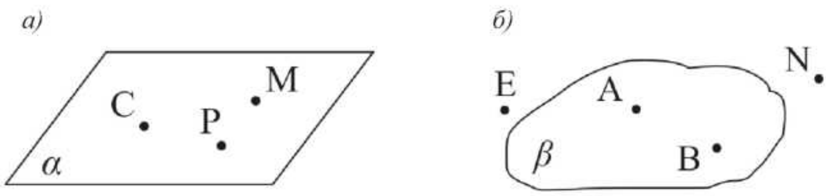


Рисунок 26

Каждой плоскости принадлежат какие-то точки пространства и существуют точки, не принадлежащие ей. На рисунке 26, *б* точки A и B принадлежат плоскости β, а точки N и E не принадлежат плоскости β. Это записывают так: $A \in \beta$, $N \notin \beta$.

Если прямая AB лежит в плоскости γ (рисунок 27), то говорят также, что плоскость проходит через прямую AB. Это записывают так: $AB \subset \gamma$.

Прямая и плоскость называются пересекающимися, если они имеют единственную общую точку. Например, на рисунке 27 прямая a пересекает плоскость γ, так как имеет с этой плоскостью только одну общую точку C, обозначают: $a \cap \gamma = C$.

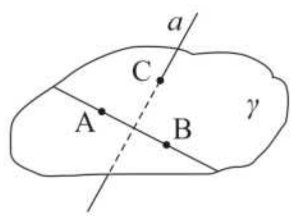


Рисунок 27

В совокупность аксиом школьной стереометрии входят аксиомы планиметрии и следующие аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве.

А к с и о м а 1. **Через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость** (рисунок 28, *а*). Плоскость, проходящая через три точки A, B, C, не принадлежащие одной прямой, обозначается: плоскость ABC или (ABC).

А к с и о м а 2. **Если две точки прямой принадлежат плоскости, то все ее точки принадлежат этой плоскости.** Например, на рисунке 28, *б* прямая DE лежит в плоскости β ($DE \subset \beta$).

Две различные плоскости, имеющие общую прямую, называются *пересекающимися плоскостями*.

А к с и о м а 3. **Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.** Например, на рисунке 28, *в* плоскости γ и δ пересекаются по прямой a, обозначают: $\gamma \cap \delta = a$.

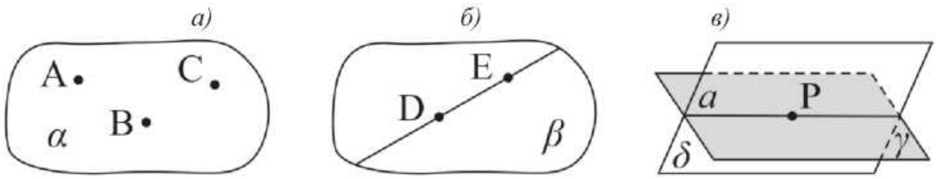


Рисунок 28

На аксиоме 1 основано устройство многих приспособлений, например, штатива для фотоаппарата. Острия трех ножек штатива принадлежат одной плоскости, поэтому фотоаппарат занимает устойчивое положение. Аксиома 1 позволяет утверждать, что две плоскости совпадают, если они имеют три общие точки, не принадлежащие одной прямой.

Четыре точки могут не лежать в одной плоскости. Наглядное подтверждение этого факта: если четыре ножки стула не одинаковы по длине, то он стоит на трех ножках, то есть опирается на три ножки, а конец четвертой ножки не лежит в плоскости пола, поэтому стул качается.

Рассмотрим некоторые следствия из аксиом 1–3.

С л е д с т в и е 1. **Через прямую и не принадлежащую ей точку можно провести единственную плоскость.**

С л е д с т в и е 2. **Через две пересекающиеся прямые можно провести единственную плоскость.**

С л е д с т в и е 3. **Через две различные точки пространства можно провести единственную прямую.**

Объясните эти следствия самостоятельно, используя аксиомы и рисунки 29, *а*, *б*.

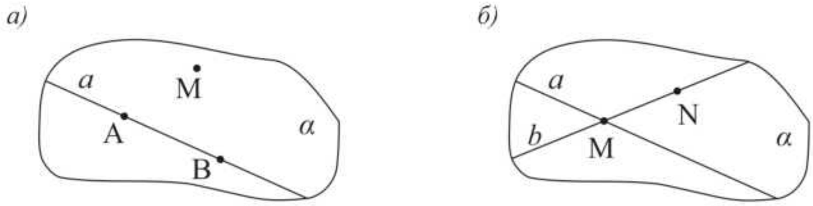


Рисунок 29

На практике следствие 2 используется, например, когда плотнику надо распилить брус пилой. Он намечает плоскость распила, проводя по двум смежным граням бруса прямые, и затем полотно пилы идет по этим прямым (рисунок 30).

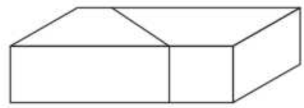


Рисунок 30

З а д а ч а 1. Даны две прямые, пересекающиеся в точке A. Доказать, что все прямые, пересекающие две данные прямые и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.

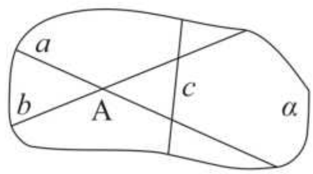


Рисунок 31

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем через данные прямые a и b плоскость α (рисунок 31), она единственная. Любая прямая c, пересекающая данные прямые, не проходящая через точку A, имеет с плоскостью α две общие точки (точки пересечения с данными прямыми). По аксиоме 2 эта прямая лежит в плоскости α. Таким образом, все прямые, пересекающие две данные прямые и не проходящие через точку их пересечения, лежат в одной плоскости.

З а д а ч а 2. Дан тетраэдр $PABC$ и точки K и M, принадлежащие ребрам PA и PC соответственно так, что $KM \nparallel AC$. Построить точку пересечения прямой KM с плоскостью ABC.

Р е ш е н и е. Так как две точки K и M принадлежат одной грани APC, то по аксиоме 2 прямая KM лежит в плоскости APC. В этой плоскости прямая KM пересекает прямую AC в точке E (рисунок 32).

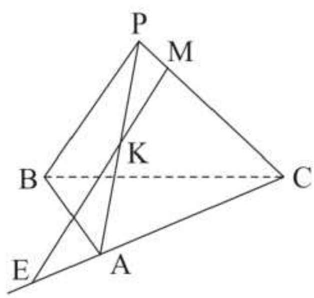


Рисунок 32

Точка E принадлежит плоскости ABC, так как лежит на прямой AC, все точки которой принадлежат этой плоскости. Таким образом, точка E – искомая, так как является общей точкой прямой KM и плоскости ABC.

ВОПРОСЫ

1. Каковы основные понятия стереометрии?
2. Сформулируйте аксиомы стереометрии и проиллюстрируйте их на рисунке.
3. Сформулируйте следствия из аксиом стереометрии и проиллюстрируйте их на рисунке.
4. Сколько плоскостей можно провести через три точки, если они лежат на одной прямой?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

11. Сколько плоскостей можно провести через: а) две точки; б) три точки; в) четыре точки, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

12. Могут ли прямая и плоскость иметь: а) только одну общую точку; б) только две общие точки?

Планеты Солнечной системы

13. Используя интернет-ресурсы, установите:

а) могут ли центры Солнца, Земли и Марса лежать на одной прямой;

б) лежат ли орбиты Земли и Марса в одной плоскости.

в) Отрезки MN и KL пересекаются в точке O. Докажите, что прямые KN, KM, LM и NL лежат в одной плоскости.

14. Плоскости α и β пересекаются по прямой AD ($\alpha \cap \beta = AD$), а плоскости α и γ – по прямой BD ($\alpha \cap \gamma = BD$). Пересекаются ли плоскости β и γ? Ответ объясните.

15. Могут ли иметь только одну общую точку: а) две плоскости; б) три плоскости?

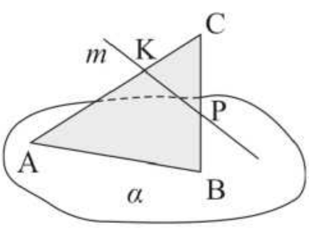


Рисунок 33

16. а) Вершины A и B треугольника ABC лежат в плоскости α, а вершина C не принадлежит этой плоскости (рисунок 33). Прямая m пересекает стороны AC и CB треугольника в точках K и P соответственно, а плоскость α в точке D. Лежит ли точка D на прямой AB? Ответ объясните.

б) Параллелограмм $BCDE$ и треугольник ABC лежат в разных плоскостях. Точки M и N отмечены на сторонах параллелограмма DE и DC соответственно (рисунок 34). 1) Постройте точку пересечения прямой MN и плоскости ABC. 2) По какой прямой пересекаются плоскости DMN и ABC?

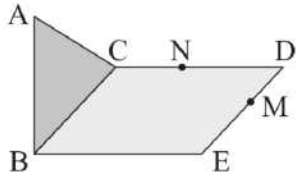


Рисунок 34

17. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка M (рисунок 35). Укажите прямую, на которой лежит точка пересечения прямой и плоскости: а) $B_1M \cap (ABC)$; б) $DM \cap (A_1B_1C_1)$.

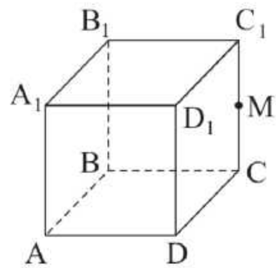


Рисунок 35

18. Точка M – середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте точку E пересечения прямой D_1M с плоскостью основания $ABCD$ и найдите длину отрезка D_1E, если ребро куба равно 4 см.

Уровень В

19. Дан тетраэдр $PABC$ и отмечены точки: M – на его ребре PB, K – в грани APC. Объясните построение точки пересечения прямой MK с плоскостью ABC (рисунок 36).

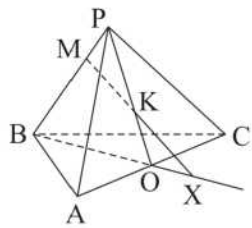


Рисунок 36

20. Два луча AB и CD пересекают плоскость в точках M и N соответственно, причем начала этих лучей лежат по разные стороны от нее, а сами лучи – на пересекающихся прямых (рисунок 37). Постройте точку пересечения отрезка AC с этой плоскостью, если она существует.

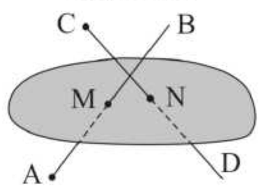


Рисунок 37

21. Ученик выполнял задание: изобразить три попарно пересекающиеся прямые, каждая из которых пересекает плоскость α (рисунок 38). Есть ли ошибка на рисунке? Ответ объясните.

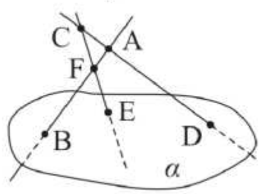


Рисунок 38

22. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 4 дм. По какой прямой пересекаются плоскости A_1C_1D и ACD_1? Найдите длину общего отрезка треугольников A_1C_1D и ACD_1.

2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определения параллельных и скрещивающихся прямых в пространстве, изображать их;

• знать свойства параллельных прямых в пространстве и применять их при решении задач.

Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек. Параллельность прямых обозначается так же, как в планиметрии. Например, на рисунке 39, *а* прямые: $a \parallel b$, $a \nparallel c$, $b \nparallel d$.

Два отрезка (или отрезок и луч, или два луча) называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых. Отрезок (или луч) называется параллельным прямой, если он лежит на прямой, параллельной ей. Например, на рисунке 39, *б* отрезки CD и EF параллельны, а отрезки AB и CD не параллельны, отрезок AB параллелен прямой a, луч DC не параллелен отрезку AB.

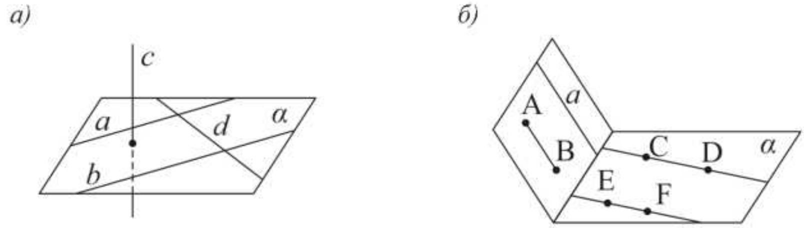


Рисунок 39

Отметим, что, как и в планиметрии, в пространстве, **если каждая из двух прямых параллельна третьей, то эти две прямые параллельны.**

З а д а ч а 1. Даны прямая a и точка A, не принадлежащая ей. Построить прямую b, параллельную прямой a и проходящую через точку A.

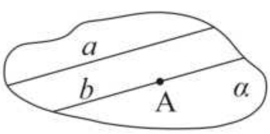


Рисунок 40

Р е ш е н и е. Через прямую a и точку A проводим плоскость α (рисунок 40). В плоскости α проводим через точку A прямую b, параллельную прямой a. Прямая b единственная, так как через прямую a и точку A, не лежащую на ней, проходит единственная плоскость (следствие из аксиомы 1), а по аксиоме параллельных прямых в плоскости α через точку A, не лежащую на прямой a, можно провести только одну прямую, параллельную прямой a.

Решив эту задачу, мы доказали, что **в пространстве через точку, не принадлежащую прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной.**

Теорема. **Через две параллельные прямые можно провести единственную плоскость.**

Доказательство. Существование одной такой плоскости следует из определения параллельных прямых. Предположим, что существует другая плоскость, содержащая обе данные прямые. Отметив на одной из прямых точки A и B, а на другой точку C (рисунок 41), получим, что через три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, проведены две плоскости, что противоречит аксиоме 1. Значит, наше предположение неверно, такая плоскость единственная.

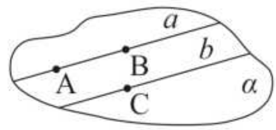


Рисунок 41

Задача 2. Через концы отрезка AB и его середину M проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках A_1, B_1 и M_1. Найти длину отрезка MM_1, если отрезок AB не пересекает эту плоскость и $AA_1 = 5$ см, а $BB_1 = 11$ см.

Решение. Прямые AA_1, BB_1 и MM_1 лежат в одной плоскости β, поэтому точки A_1, B_1 и M_1 лежат на прямой A_1B_1 пересечения плоскости β с данной плоскостью α (рисунок 42). По теореме Фалеса точка M_1 – середина отрезка A_1B_1. Отрезок MM_1 – средняя линия трапеции AA_1B_1B. Тогда $MM_1 = 0{,}5 \cdot (5 + 11) = 8$ (см).

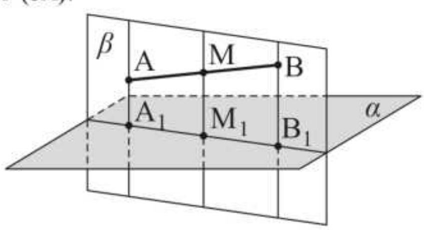


Рисунок 42

Ответ. 8 см.

Задача 3. Даны куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки M, N на его ребрах AA_1, DC соответственно. Построить прямые $MK \parallel A_1C$ и $NL \parallel A_1C$, где K и L – точки пересечения этих прямых с гранями куба. Лежат ли прямые MK и NL в одной плоскости?

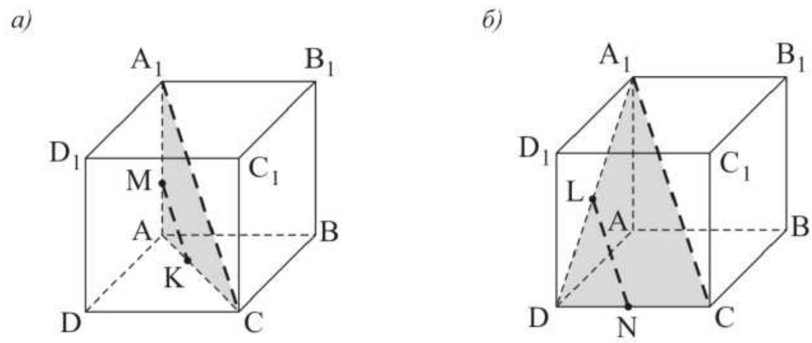


Рисунок 43

Р е ш е н и е. Вначале построим плоскость, в которой лежат параллельные прямые MK и A_1C. Точка $M \in AA_1$, а через пересекающиеся прямые AA_1 и A_1C проходит плоскость AA_1C. В этой плоскости построим прямую $MK \parallel A_1C$, где $K \in AC$ (рисунок 43, *а*). Аналогично, для построения прямой NL, строим плоскость A_1CD и в этой плоскости $NL \parallel A_1C$, где $L \in A_1D$ (рисунок 43, *б*). Так как прямые $MK \parallel A_1C$ и $NL \parallel A_1C$, то $MK \parallel NL$. Следовательно, прямые MK и NL лежат в одной плоскости.

Если две прямые пересекаются или параллельны, то они лежат в одной плоскости. В пространстве две прямые могут быть расположены так, что они не лежат в одной плоскости. **Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.**

Т е о р е м а (*признак скрещивающихся прямых*). **Если одна прямая лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.**

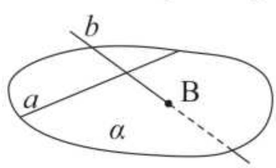


Рисунок 44

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает эту плоскость в точке B, не принадлежащей прямой a (рисунок 44). Допустим, что через прямые a и b можно провести плоскость β. Тогда точка B прямой b тоже будет принадлежать плоскости β. Значит, плоскости α и β будут иметь общие прямую a и не принадлежащую ей точку B. Поэтому плоскости α и β совпадут. Отсюда следует, что прямая b тоже лежит в плоскости α, что противоречит условию. Следовательно, через прямые a и b нельзя провести плоскость, значит, эти прямые скрещивающиеся.

Примеры скрещивающихся прямых: линии пересечения стен, пола и потолка в комнате (рисунок 45), прямолинейные шоссейные развязки, идущие на разных уровнях. Используя признак скрещивающихся прямых, можно выяснить, какие прямые изображены на рисунке: скрещивающиеся или пересекающиеся.

Задача 4. Дано: $a \cap (ABC) = A$, $N \in a$, $M \in a$, $O \in BC$ (рисунок 46). а) Как расположены прямые ON и BM? б) Пересекаются ли прямые ON и AB?

Решение. а) Прямые ON и BM являются скрещивающимися, так как прямая BM лежит в плоскости ABM, а прямая ON пересекает эту плоскость в точке N, не принадлежащей прямой BM.

б) Прямые ON и AB не пересекаются, так как они являются скрещивающимися. (Обоснуйте это самостоятельно.)

Рисунок 45

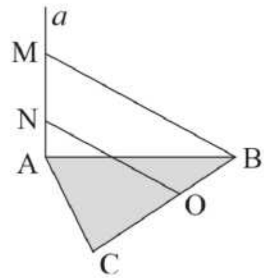


Рисунок 46

Перечислим теперь все возможные случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве:

1) две прямые лежат в одной плоскости и имеют только одну общую точку (пересекающиеся прямые);

2) две прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек (параллельные прямые);

3) две прямые не лежат в одной плоскости (скрещивающиеся прямые).

Отметим: если две прямые имеют две различные общие точки, то они совпадают.

ВОПРОСЫ

1. Перечислите все возможные случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве.

2. Сколько плоскостей можно провести через две параллельные прямые?

3. Сформулируйте признак скрещивающихся прямых.

4. Верно ли, что если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

23. а) Точки E, K, M, P не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые KM и PE быть параллельными?

б) Прямая c пересекает две параллельные прямые a и b. Докажите, что прямые a, b и c лежат в одной плоскости.

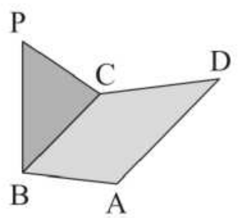
24. а) В чем сходство параллельных и скрещивающихся прямых и в чем их различие?

б) Одна прямая пересекает две другие. Верно ли, что все три прямые лежат в одной плоскости?

25. а) Точка P не лежит в плоскости трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC (рисунок 47, *а*). Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков PB и PC, параллельна средней линии трапеции.

б) Параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1 лежат в различных плоскостях (рисунок 47, *б*). Докажите, что четырехугольник C_1CDD_1 – параллелограмм.

а)



б)

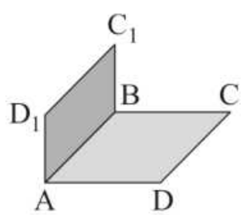


Рисунок 47

26. а) Отрезок AB имеет с плоскостью α общую точку A. Через точку B и середину отрезка C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1, C_1 соответственно. Найдите длину отрезка BB_1, если $CC_1 = 8$ см.

б) Конец A отрезка AB лежит в плоскости α, а через конец B отрезка и его внутреннюю точку C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1 и C_1 соответственно. Найдите длину отрезка CC_1, если $AC = 9{,}2$ дм, $AB : BB_1 = 5 : 3$.

27. а) Даны правильный тетраэдр $DABC$ и точка M на медиане DK его грани ADC, расположенная так, что $DM : MK = 2 : 3$ (рисунок 48, *а*). Постройте прямую MN, параллельную ребру DB, и укажите место расположения точки N – пересечения этой прямой и грани ABC.

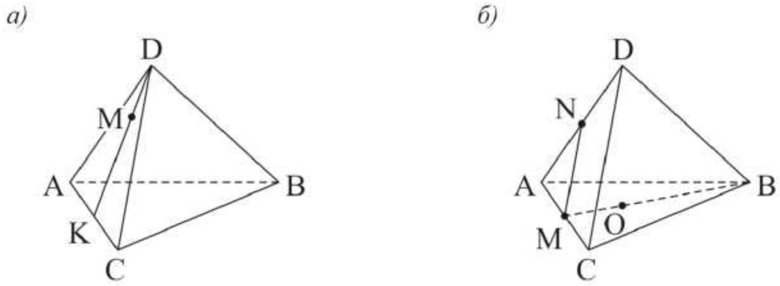


Рисунок 48

б) Через центр O основания ABC правильного тетраэдра $DABC$ проведите прямую, параллельную отрезку MN, где M, N – середины ребер AC и AD соответственно (рисунок 48, *б*). Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между гранями тетраэдра, если его ребро равно 12 см.

28. Дана пирамида $SABC$ (рисунок 49, *а*). Точки M, N, P, K – середины ее ребер SA, SC, BC и AB соответственно. Установите вид четырехугольника $MNPK$ и найдите его периметр, если SB = = 18 см, AC = 14 см.

29. Точка M – внутренняя точка ребра SB тетраэдра $SABC$ (рисунок 49, *а*). Докажите, что прямые SA и BC скрещивающиеся. Проведите прямую, проходящую через точку M и пересекающую прямые SA и BC.

30. Используя изображение куба (рисунок 49, *б*), укажите скрещивающиеся прямые, содержащие диагонали граней и диагональ куба.

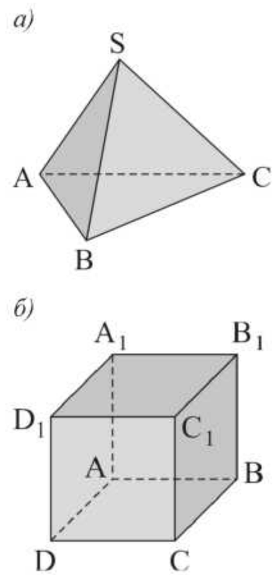


Рисунок 49

Уровень B

31. Через точки A, B и середину M отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках A_1, B_1, M_1 соответственно. Найдите длину отрезка MM_1, если AA_1 = 13 дм, BB_1 = = 7 дм, причем отрезок AB пересекает данную плоскость (рисунок 50).

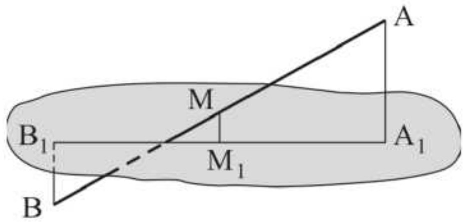


Рисунок 50

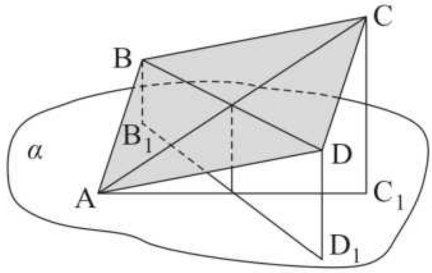


Рисунок 51

32. Вершина A параллелограмма $ABCD$ лежит в плоскости α, а через его вершины B, C и D проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1, C_1, D_1 соответственно (рисунок 51). Найдите длину отрезка BB_1, если $CC_1 = 14$ см, $DD_1 = 11$ см.

33. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K лежит на диагонали AB_1 так, что $AK:KB_1 = 2:3$. а) Постройте прямую, проходящую через точку K и параллельную прямой AC. б) Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между точками пересечения ее с гранями куба, если ребро куба равно 5 см.

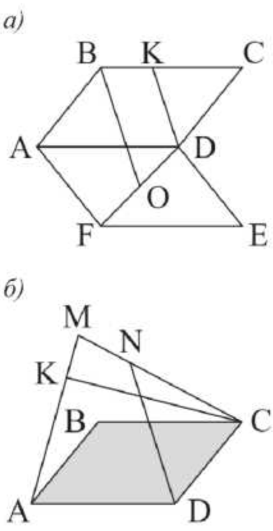


Рисунок 52

34. Дан правильный тетраэдр $DABC$, O – точка пересечения медиан треугольника ABC, P – середина отрезка DO. Постройте прямую MN, проходящую через точку P и параллельную ребру CB (M, N – точки пересечения этой прямой с гранями тетраэдра). Найдите площадь поверхности тетраэдра, если $MN = 2$ см.

35. Два параллелограмма $ABCD$ и $ADEF$ расположены в разных плоскостях. Отмечены точки: K на отрезке BC, O на диагонали DF (рисунок 52, *а*). Верно ли, что прямые OB и DK параллельны? Ответ обоснуйте.

36. Даны параллелограмм $ABCD$ и точка M, не лежащая в его плоскости. Отмечены точки K и N на отрезках AM и CM соответственно (рисунок 52, *б*). Пересекаются ли прямые CK и DN? Ответ обоснуйте.

3. Взаимное расположение прямой и плоскости

Учебные достижения по изучению темы:

- знать признак и свойства параллельных прямой и плоскости;
- уметь применять их при решении задач.

В предыдущих пунктах учебника рассматривались два случая расположения прямой и плоскости в пространстве: 1) *прямая лежит в плоскости,* если две различные точки этой прямой принадлежат плоскости; 2) *прямая и плоскость пересекаются,* если они имеют единственную общую точку.

Возможен третий случай взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве. **Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.** Обозначение параллельности прямой и плоскости: $a \parallel \alpha$ (или $\alpha \parallel a$).

Теорема (*признак параллельности прямой и плоскости*). **Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна этой плоскости.**

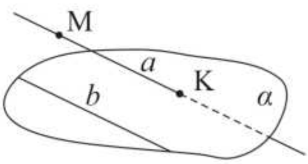


Рисунок 53

Доказательство. Пусть даны плоскость α, прямая b, лежащая в ней, и прямая a, параллельная прямой b и не лежащая в плоскости α. Предположим, что прямая a пересекает плоскость α в точке K (рисунок 53). Поскольку прямые a и b параллельны, то прямая b не может проходить через точку K, тогда по признаку скрещивающихся прямых прямые a и b – скрещивающиеся. Но по условию теоремы эти прямые параллельны. Полученное противоречие означает, что сделанное предположение неверно. Следовательно, прямая a и плоскость α не пересекаются, то есть они параллельны.

Следствие. **Через точку, не принадлежащую плоскости, можно провести сколько угодно прямых, параллельных ей.**

Теорема. **Через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести единственную плоскость, параллельную другой прямой.**

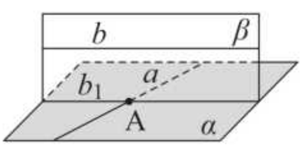


Рисунок 54

Доказательство. Пусть даны две скрещивающиеся прямые a и b. Возьмем на прямой a произвольную точку A и проведем через нее прямую b_1, параллельную прямой b (рисунок 54). Через прямые a и b_1 проведем плоскость α. По признаку параллельности прямой и плоскости $\alpha \parallel b$.

Эта плоскость единственная, так как через две пересекающиеся прямые a и b_1 можно провести только одну плоскость.

Т е о р е м а. **Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть прямая a параллельна плоскости α, плоскость β проходит через эту прямую и пересекает плоскость α по прямой b (рисунок 55). Прямые a и b лежат в одной плоскости β и не пересекаются. Прямая a не может пересекать прямую b, так как иначе она пересекала бы плоскость α. Следовательно, $b \parallel a$.

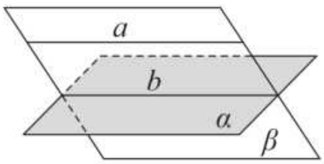


Рисунок 55

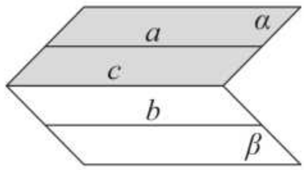


Рисунок 56

С л е д с т в и е. **Если две прямые параллельны, через каждую из них проходит плоскость и плоскости пересекаются, то линия пересечения плоскостей параллельна каждой из этих прямых.** На рисунке 56 дано: $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ и $\alpha \cap \beta = c$, следовательно, $c \parallel a$ и $c \parallel b$.

Т е о р е м а. **Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $c \parallel \alpha$, $c \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = m$ (рисунок 57). Докажем, что $c \parallel m$. В плоскостях α и β имеются соответственно прямые a и b, каждая из которых параллельна прямой c. Тогда $a \parallel b$ и $m \parallel a$, $m \parallel b$, следовательно, $m \parallel c$.

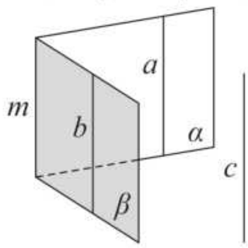


Рисунок 57

З а д а ч а. Дан ΔABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке A_1, а сторону BC – в точке B_1. Найти длину отрезка A_1B_1, если $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$.

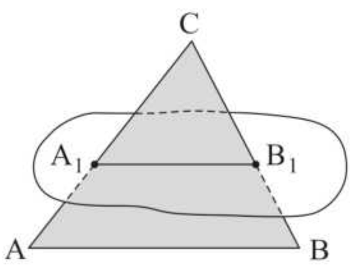


Рисунок 58

Р е ш е н и е. Прямая A_1B_1 параллельна прямой AB (рисунок 58). В плоскости ABC получаем два подобных треугольника ABC и A_1B_1C. Тогда $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C}{AC}$, получим $\frac{A_1B_1}{b} = \frac{c}{a+c}$, откуда $A_1B_1 = \frac{bc}{a+c}$.

О т в е т. $\frac{bc}{a+c}$.

ВОПРОСЫ

1. Перечислите все возможные случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве.
2. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
3. Какие свойства (теоремы и следствия из них) о параллельных прямой и плоскости вы знаете?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

37. а) Верно ли утверждение: если прямая параллельна плоскости, то она параллельна любой прямой этой плоскости?

б) Как могут быть взаимно расположены прямая, параллельная плоскости, и прямые, лежащие в ней?

38. а) Известно, что лишь одна из сторон параллелограмма лежит в плоскости. Как расположены по отношению к этой плоскости остальные стороны параллелограмма?

б) Даны ΔABC и плоскость α, $AC \subset \alpha$, $B \notin \alpha$. Как расположена по отношению к плоскости α прямая, проходящая через середины сторон AB и BC?

в) Прямая параллельна одной из медиан треугольника. Как эта прямая может быть расположена относительно плоскости, в которой лежит этот треугольник?

39. Плоскость, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его стороны AC и BC в точках M и K соответственно. Найдите длину отрезка AB, если: а) $MK = 5$ см, $MC = MA$; б) $MK = a$, $CK : KB = 1 : 3$.

40. Через середину стороны AB треугольника ABC проведена плоскость, параллельная прямой AC и отсекающая от него треугольник, площадь которого равна 7 м^2. Найдите площадь ΔABC.

41. Даны две пересекающиеся плоскости α, β и точка A, не принадлежащая им. Постройте прямую, проходящую через точку A:
а) параллельную каждой из плоскостей;
б) параллельную плоскости α и пересекающую плоскость β.

Уровень B

42. Докажите, что: а) если прямая параллельна плоскости, то в этой плоскости найдется прямая, параллельная данной; б) если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая пересекает ее.

43. Прямая a и плоскость α параллельны. Через точки A и B прямой a проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках A_1 и B_1. Найдите площадь четырехугольника A_1ABB_1, если:
а) $AA_1 = 13$ см, $AB = 14$ см, $AB_1 = 15$ см;
б) $AB_1 = A_1B = 10$ см, $AA_1 = 6$ см;
в) $\angle BA_1B_1 = \angle AA_1B = 30°$, $AA_1 = 12$ см.

44. Большее основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α, а ее вершина B не принадлежит этой плоскости. Из вершины B проведен луч, пересекающий сторону CD в точке M так, что $CM:MD = 3:2$, а плоскость α – в точке K. Найдите расстояние DK, если меньшее основание трапеции равно b.

45. а) Докажите, что плоскость, пересекающая боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ в их серединах, параллельна основаниям трапеции.
б) Через середину M боковой стороны трапеции $ABCD$ проведена плоскость, параллельная основанию трапеции AD. Найдите отношение площадей фигур, на которые эта плоскость делит трапецию, если известно, что $BC:AD = 9:5$.

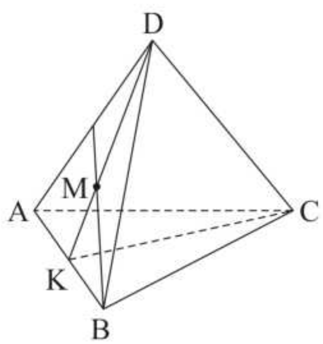


Рисунок 59

46. Дан тетраэдр $DABC$, его основание – правильный ΔABC со стороной, равной a (рисунок 59). Через точку пересечения медиан ΔABD проведите прямую m, параллельную плоскости ABC, так, чтобы она пересекала прямую DC. Найдите длину отрезка прямой m, являющегося пересечением этой прямой и данного тетраэдра.

4. Взаимное расположение двух плоскостей

Учебные достижения по изучению темы:

- знать признак и свойства параллельных плоскостей;
- уметь применять их при решении задач.

Вам уже известно, что если две плоскости имеют одну общую точку, то они *пересекаются* по прямой, проходящей через нее. **Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.**

Теорема (*признак параллельности двух плоскостей*). **Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.**

Доказательство. Пусть пересекающиеся прямые a_1, a_2 лежат в плоскости α, $a_1 \cap a_2 = A$, а прямые b_1, b_2 – в плоскости β, $b_1 \cap b_2 = B$, причем $a_1 \parallel b_1$, $a_2 \parallel b_2$ (рисунок 60, *а*). Докажем, что $\alpha \parallel \beta$.

Допустим, что плоскости имеют общую точку, тогда они пересекутся по прямой c (рисунок 60, *б*). По условию плоскости α и β проходят через параллельные прямые a_1 и b_1, следовательно, $c \parallel a_1$. Кроме того, плоскости α и β проходят через параллельные прямые a_2 и b_2, следовательно, $c \parallel a_2$. Допущение, что плоскости α и β имеют общую точку, привело к тому, что через точку A проходят две прямые a_1 и a_2, параллельные прямой c, что невозможно, так как через точку, не принадлежащую прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной. Значит, плоскости α и β не имеют общих точек, то есть они параллельны.

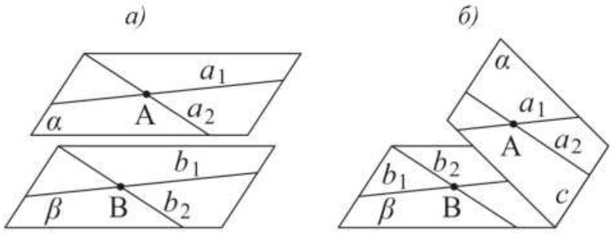


Рисунок 60

Признаком параллельности плоскостей пользуются на практике, например, распиливая брус, чтобы плоскости распила были параллельны, на его смежных гранях прочерчивают параллельные отрезки (рисунок 61).

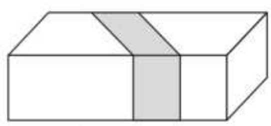


Рисунок 61

Отметим, что:

1) *через точку, не принадлежащую плоскости, можно провести единственную плоскость, параллельную данной;*

2) *если каждая из двух плоскостей параллельна третьей, то эти две плоскости параллельны.*

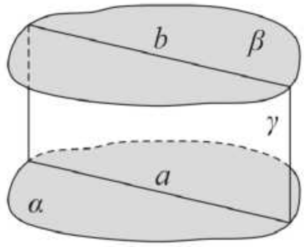


Рисунок 62

Теорема. **Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.**

Доказательство. Пусть $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$ (рисунок 62). Докажем, что $a \parallel b$. Допустим, что прямые a и b не параллельны. Прямые a и b лежат в одной плоскости γ, поэтому они пересекутся в некоторой точке. Прямая a лежит в плоскости α, а прямая b – в плоскости β, поэтому из пересечения прямых a и b следует, что пересекаются и плоскости α и β, а это противоречит условию. Следовательно, допущение неверно и $a \parallel b$.

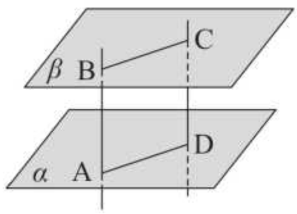


Рисунок 63

Следствие. **Параллельные отрезки, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны** (рисунок 63).

Задача 1. Через каждую из двух скрещивающихся прямых провести плоскость так, чтобы эти плоскости были параллельны.

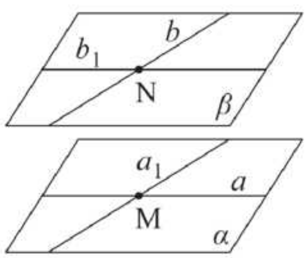


Рисунок 64

Решение. Через произвольную точку M прямой a (рисунок 64) проведем прямую a_1, параллельную прямой b. Через прямые a и a_1 проведем плоскость α. Аналогично проводим плоскость β. Плоскости α и β параллельны по признаку параллельности плоскостей. Такая пара плоскостей – единственная.

Задача 2. Три луча, исходящие из одной точки O, пересекают плоскость α в точках A, B, C, а параллельную ей плоскость β соответственно в точках A_1, B_1, C_1 (рисунок 65). Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Р е ш е н и е. Так как линии пересечения двух параллельных плоскостей α и β третьей плоскостью, проходящей через пары данных лучей, параллельны, то $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$.

Следовательно, $\Delta OAB \sim \Delta OA_1B_1$, $\Delta OBC \sim \Delta OB_1C_1$, $\Delta OCA \sim \Delta OC_1A_1$ (объясните, по какому признаку). Из подобия треугольников следует, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}$, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{OC}{OC_1}$, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{OC}{OC_1} = \frac{OA}{OA_1}$. Из этих пропорций получаем: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

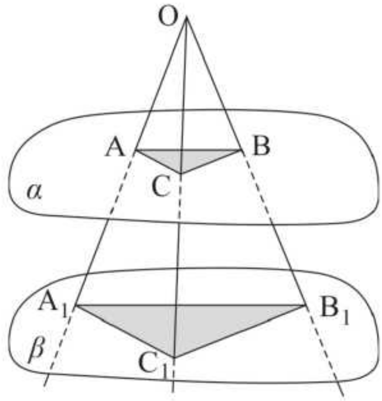


Рисунок 65

З а д а ч а 3. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина ребра AA_1. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и параллельной плоскости AB_1D_1, если площадь треугольника AB_1D_1 равна 0,5 м^2.

Поясним, что *секущей плоскостью* многогранника называется плоскость, разделяющая его на два многогранника. Множество всех общих точек многогранника и секущей плоскости называется *сечением* многогранника этой плоскостью. Например, ΔAB_1D_1 является сечением данного параллелепипеда плоскостью AB_1D_1 (рисунок 66, *а*).

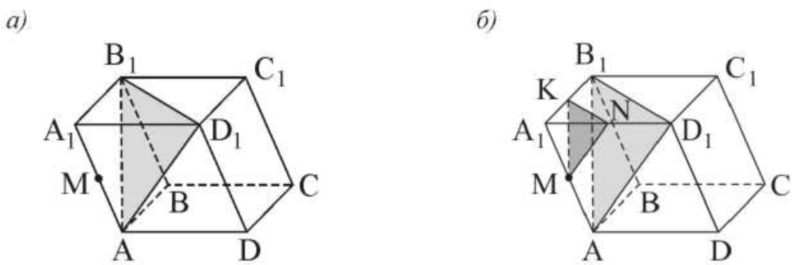


Рисунок 66

Р е ш е н и е. Построим сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и параллельной плоскости AB_1D_1. Линии пересечения этих плоскостей с гранями параллелепипеда будут параллельны, поэтому строим прямые $MN \parallel AD_1$ и $MK \parallel AB_1$ (рисунок 66, *б*). По признаку параллельности плоскостей $(MNK) \parallel (AB_1D_1)$. Треугольник MNK – искомое сечение.

Так как $\frac{MN}{AD_1} = \frac{MK}{AB_1} = \frac{KN}{B_1D_1} = \frac{1}{2}$ (объясните почему), то $\Delta MKN \sim \Delta AB_1D_1$ с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. Следовательно, $\frac{S_{\Delta MKN}}{S_{\Delta AB_1D_1}} = \frac{1}{4}$, откуда $S_{\Delta MKN} = \frac{1}{4} \cdot 0{,}5 = 0{,}125$ (м^2).

Ответ. 0,125 м^2.

ВОПРОСЫ

1. В каком случае две плоскости: а) пересекаются; б) параллельны?
2. Сформулируйте признак параллельности двух плоскостей.
3. Какие свойства параллельных плоскостей вы знаете?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

47. Каково взаимное расположение плоскостей α и β, если пересекающиеся прямые a и b лежат в плоскости α и $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$?

48. а) Объясните, почему часовая и минутная стрелки настенных часов движутся в параллельных плоскостях.

б) Две жерди уложены горизонтально. Горизонтально ли уложенное на них плоское покрытие? Ответ объясните.

49. Докажите, что любая прямая, проведенная в одной из параллельных плоскостей, параллельна другой плоскости.

50. Две стороны треугольника параллельны плоскости α. Параллельна ли этой плоскости третья сторона треугольника?

51. Верно ли утверждение: если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны?

52. а) Даны пирамида $DABC$ и точки K, P, M, принадлежащие ее ребрам DA, DB и DC соответственно. При этом прямая KP параллельна прямой AB, а PM параллельна BC. Докажите, что плоскости ABC и KPM не имеют общих точек.

б) Через середины ребер AB, AC и AD тетраэдра $DABC$ проведена плоскость. Докажите, что эта плоскость параллельна плоскости BCD.

53. Докажите, что каждые две противоположные грани параллелепипеда параллельны (рисунок 67).

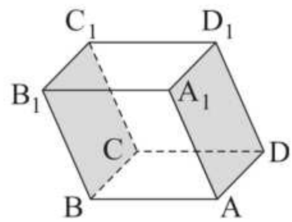


Рисунок 67

54. Через середины трех ребер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, исходящих из вершины A (рисунок 67), проведена плоскость. Докажите, что эта плоскость параллельна плоскости BDA_1.

55. а) Даны две параллельные плоскости. Через точки A и B одной из этих плоскостей проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках C и D. Чему равен отрезок CD, если $AB = \sqrt{2}$ см?

б) Из точки M плоскости α к параллельной ей плоскости β проведены отрезки $MN = 13$ см и $MK = 10$ см. Через точку N проведена прямая, параллельная MK и пересекающая плоскость α в точке E. Найдите длину отрезка KE, если $ME = 5$ см.

56. Одна сторона треугольника лежит в плоскости α, а параллельная ей плоскость β пересекает две другие стороны треугольника. Докажите, что плоскость β отсекает от данного треугольника подобный ему треугольник.

57. Даны параллельные плоскости α, β и точка O, не принадлежащая ни одной из данных плоскостей. Прямая AO пересекает плоскость α в точке A, а плоскость β в точке C. Прямая BO пересекает плоскость α в точке B, а плоскость β в точке D. Известно, что $AO = 5$ см, $CO = 6$ см, $AB = 17$ см. Найдите расстояние DC.

Уровень В

58. Две параллельные плоскости α и β пересечены двумя параллельными прямыми, пересекающими плоскость α в точках A и B, а плоскость β соответственно в точках A_1 и B_1, O – точка пересечения диагоналей четырехугольника A_1ABB_1. Установите вид четырехугольника A_1ABB_1 и найдите его площадь, если: а) $AB_1 = A_1B = 16$ см, $\angle A_1OB_1 = 30°$; б) $AB_1 = 16$ см, $A_1B = 12$ см, $\angle A_1OB_1 = 90°$.

59. Площади двух подобных многоугольников, лежащих в параллельных плоскостях, относятся как $100:81$. Найдите отношение периметров этих многоугольников.

60. а) В правильном тетраэдре $DABC$ точка M лежит на ребре BD так, что $DM:MB = 3:2$. Найдите площадь грани DAC, если площадь сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и параллельной этой грани, равна 8 см^2.

б) Точки P и K делят ребро DB тетраэдра $DABC$ на три равные части. Постройте сечения тетраэдра, проходящие через точки P и K, параллельно грани ABC. Найдите площади построенных сечений, если площадь треугольника ABC равна S.

61. Дана пирамида $PABC$, основанием которой является ΔABC со сторонами, равными a, $0{,}5a$, $0{,}9a$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной ее основанию и делящей ее боковое ребро PB в отношении $2:3$, считая от вершины P. Найдите площадь этого сечения.

62. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Точка K лежит на отрезке AD так, что $AK:KD = 3:2$, а точка P – середина отрезка BD. Постройте плоскость, проходящую через точку P параллельно плоскости BCK.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

63. Четыре точки не принадлежат одной плоскости. Могут ли три из них принадлежать одной прямой? Ответ объясните.

64. Известно, что точка D не лежит в плоскости ABC, а точка C не лежит на прямой AB. Сделайте чертеж. Пересекаются ли прямые AB и DC? Ответ объясните.

65. Вершины C и D трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD лежат в плоскости α. Прямая AB пересекает плоскость α в точке E. Найдите длину отрезка DE, если $AD = 18$ см, $BC = 6$ см, $DC = 8$ см.

66. Даны пирамида $DABC$, точка M на ребре AD и точка K на ребре DC (MK не параллельна AC). Постройте: а) точку пересечения прямой MK и плоскости ABC; б) линию пересечения плоскостей MKB и ABC.

67. Докажите, что середины ребер AD, DB, AC, CB тетраэдра $DABC$ принадлежат одной плоскости.

68. Дан отрезок AB, не пересекающий плоскость α. Через точки A, B и середину M отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, M_1 соответственно, причем $AA_1 = 11{,}3$ дм, $BB_1 = 4{,}7$ дм. Найдите длину отрезка MM_1.

69. Плоскости α и β параллельны. Через вершины ΔABC, лежащего в плоскости α, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β

в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите высо
$AB = 12$ см, $AC = BC = 10$ см.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Евклид

аль-Фараби

На развитие геометрии большое влияние оказали
го древнегреческого математика Евклида, жившего
назад, объединенных под названием «Начала». В ев
стереометрия изложена в трех последних книгах, хот
чаются в первой книге. Например, пятое предложени
мулируется так: «Поверхность есть то, что имеет толі
Многие определения и аксиомы, изложенные в «На
удовлетворяют требованиям современной геометрі
витие геометрии продолжалось на протяжении мног
совершенства лишь в конце XIX века в опубликован
учном труде «Основания геометрии» немецкого матем
берта (1862–1943). Он ввел шесть основных понятий
(всего аксиом 20), которые могут быть применены для
вания как геометрии, так и других наук. Аксиомы, ис
ящее время в школьной геометрии, имеются в системе

II. УГЛЫ И РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

В результате изучения раздела надо

знать

- определение угла между двумя прямыми в пространстве;
- определения перпендикуляра, наклонной, ее проекции и их свойства;
- определение, признак и свойства прямой, перпендикулярной плоскости;
- теорему о трех перпендикулярах;
- определение: угла между прямой и плоскостью; двугранного угла; угла между двумя плоскостями; перпендикулярных плоскостей;
- признак перпендикулярности двух плоскостей;
- определение расстояния: от точки до плоскости; между параллельными плоскостями; между скрещивающимися прямыми.

уметь

- находить углы между двумя прямыми в пространстве;
- изображать перпендикуляр, наклонную, ее проекцию;
- применять признак и свойства прямой, перпендикулярной плоскости, при решении задач;
- применять теорему о трех перпендикулярах при решении задач;
- изображать угол между прямой и плоскостью, двугранный угол; угол между двумя плоскостями и находить их величины;
- применять признак перпендикулярности плоскостей при решении задач;
- находить: расстояние от точки до плоскости; между параллельными плоскостями; между скрещивающимися прямыми.

5. Угол между двумя прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямой и плоскости

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определение угла между двумя прямыми в пространстве;

• знать признак перпендикулярности прямой и плоскости, следствие из него;

• уметь применять их при решении задач.

Любые две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и образуют четыре неразвернутых угла. Если известен один из этих углов, то можно найти и три других угла. Один из этих углов, который не превосходит любого из трех остальных, называется углом между пересекающимися прямыми. Угол между двумя параллельными или совпадающими прямыми принимается равным 0°.

Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется угол между любыми двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными им. Угол между прямыми a и b можно обозначить: $\angle(a; b)$, а между прямыми AB и CD так: $\angle(AB; CD)$. Величина угла между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки пространства, через которую проводятся эти пересекающиеся прямые. Объясните это свойство, используя рисунок 68.

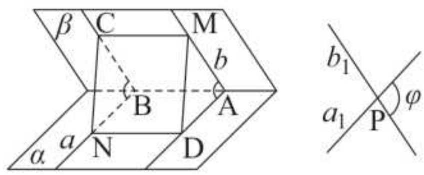


Рисунок 68

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

З а д а ч а 1. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок 69), основанием которого является квадрат $ABCD$, M – точка пересечения диагоналей основания. Доказать, что прямые BD и C_1M перпендикулярны.

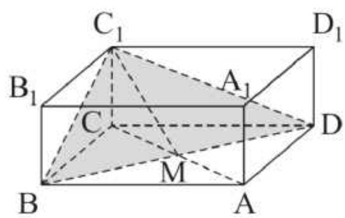


Рисунок 69

Д о к а з а т е л ь с т в о. ΔBC_1D равнобедренный, потому что $BC_1 = C_1D$ как диагонали равных прямоугольников; $BM = MD$, так как диагонали квадрата точкой пересечения делятся пополам. Тогда медиана C_1M равнобедренного треугольника BC_1D является и его высотой. Следовательно, прямые BD и C_1M перпендикулярны, что и требовалось доказать.

Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой этой плоскости. Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \perp \alpha$. Говорят также, что плоскость α перпендикулярна прямой a. В окружающем нас мире много примеров, демонстрирующих перпендикулярность прямой и плоскости. Например, колонны здания перпендикулярны плоскости фундамента, ножки стола перпендикулярны полу. Отметим, что отрезки и лучи, лежащие на прямой, перпендикулярной плоскости, также называются перпендикулярными этой плоскости.

Теорема (*признак перпендикулярности прямой и плоскости*). **Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.**

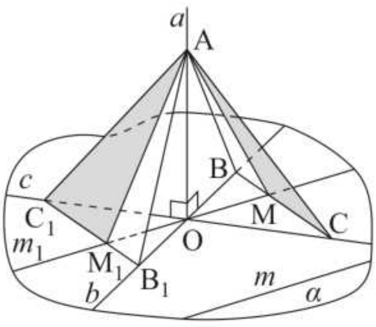


Рисунок 70

Доказательство. Пусть прямая a пересекает плоскость α в точке O и перпендикулярна двум пересекающимся прямым b и c, лежащим в этой плоскости и проходящим через точку O (рисунок 70). Если две пересекающиеся прямые b и c не проходят через точку O, то всегда в плоскости α можно через эту точку провести прямые, соответственно параллельные прямым b и c. Докажем, что $a \perp \alpha$.

Для этого докажем, что прямая a перпендикулярна произвольной прямой m плоскости α. Проведем через точку O прямую m_1, параллельную прямой m. Возьмем на прямых b и c точки B и C так, чтобы отрезок BC пересекал прямую m_1 в какой-то точке M. В плоскости α построим точки B_1, C_1, M_1, соответственно симметричные точкам B, C, M относительно точки O. Тогда $BO = OB_1$, $CO = OC_1$, $MO = OM_1$, $BC = B_1C_1$, причем точка M_1 принадлежит отрезку B_1C_1 и $BM = B_1M_1$ (на основании свойств центральной симметрии). Возьмем на прямой a произвольную точку A и проведем отрезки AB, AM, AC, AC_1, AM_1, AB_1. Тогда треугольники BAB_1 и CAC_1 равнобедренные, так как в каждом из них медиана AO является высотой, поэтому $AB = AB_1$, $AC = AC_1$. Треугольники ABC и AB_1C_1 равны (по трем сторонам), следовательно, $\angle ABC = \angle AB_1C_1$. Тогда $\Delta ABM = \Delta AB_1M_1$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $AM = AM_1$. То есть ΔAMM_1 равнобедренный, следовательно, его медиана AO является и высотой. Значит, прямая a перпендикулярна прямой m_1 и прямой m, параллельной m_1. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. **Прямая, перпендикулярная одной из параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой плоскости.**

Отметим, что: 1) *через каждую точку пространства можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной плоскости;* 2) *если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.*

Признаком перпендикулярности прямой и плоскости пользуются при решении практических задач.

Например, для вертикальной установки столба достаточно сделать так, чтобы он был перпендикулярен двум пересекающимся прямым, проведенным через его основание. А это можно сделать, натянув из одной точки столба две пары растяжек одинаковой длины и закрепив их на одинаковом расстоянии от основания. Используя рисунок 71, обоснуйте, почему столб перпендикулярен плоскости площадки, на которой он установлен.

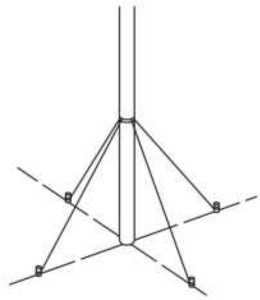


Рисунок 71

З а д а ч а 2. Дан тетраэдр $PABC$, все ребра которого равны. Найти угол между прямыми BC и PA.

Р е ш е н и е. Проведем медианы AM и PM треугольников ABC и PBC соответственно (рисунок 72, *а*). Тогда $AM \perp BC$ и $PM \perp CB$ по свойству медиан равносторонних треугольников. Следовательно, $BC \perp (APM)$ – по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Тогда $BC \perp AP$ (по определению перпендикулярных прямой и плоскости), $\angle(BC; PA) = 90°$.

О т в е т. 90°.

З а д а ч а 3. Дана пирамида $PABC$, основание которой – правильный ΔABC со стороной 12 см, а все ее боковые ребра равны по 18 см. Точки M, D, K – середины ребер AB, PC, AC соответственно. Найдите синус угла между прямыми MP и KD.

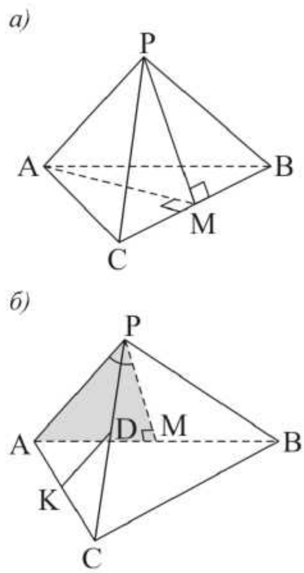


Рисунок 72

Р е ш е н и е . Прямые MP и KD – скрещивающиеся (по признаку скрещивающихся прямых). $KD \parallel PA$, так как DK – средняя линия ΔACP. Тогда $\angle(MP; KD) = \angle(MP; PA) = \angle MPA$ (рисунок 72, *б*). Треугольник MPA –

прямоугольный по свойству медианы PM равнобедренного ΔAPB; $\sin \angle MPA = AM : AP = \frac{1}{3}$.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задача 4. Построить прямую, проходящую через середину K бокового ребра AP правильного тетраэдра $PABC$, перпендикулярную плоскости его основания ABC.

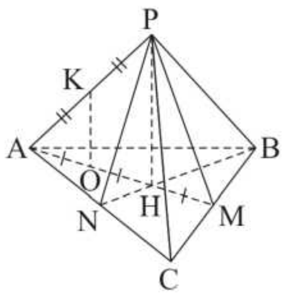


Рисунок 73

Решение. 1) Построим плоскости APM и BPN, где AM и BN – медианы ΔABC. Обозначим прямую PH, по которой пересекаются эти плоскости (рисунок 73).

2) По свойству медианы равнобедренного треугольника $PM \perp BC$, $AM \perp BC$. Следовательно, $BC \perp (APM)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости и $BC \perp PH$ по определению перпендикулярности прямой и плоскости.

3) Аналогично, $BN \perp AC$, $PN \perp AC$, следовательно, $AC \perp (BPN)$, $AC \perp PH$. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $PH \perp (ABC)$.

4) В плоскости APM построим прямую $KO \parallel PH$, где O – середина отрезка AH. Прямая KO – искомая, так как перпендикулярна плоскости ABC (если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости).

ВОПРОСЫ

1. Как в пространстве определяется угол между двумя прямыми: а) пересекающимися; б) параллельными; в) скрещивающимися?
2. Могут ли скрещивающиеся прямые быть перпендикулярными?
3. Дайте определение прямой, перпендикулярной плоскости.
4. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

70. Сколько прямых, перпендикулярных данной прямой и проходящих через данную ее точку, можно провести в пространстве?

71. Разность двух смежных углов равна 70°. Чему равен угол между прямыми, содержащими стороны таких углов?

72. Используя рисунок 74, докажите, что два любых острых или тупых угла в пространстве, с соответственно параллельными сторонами, равны.

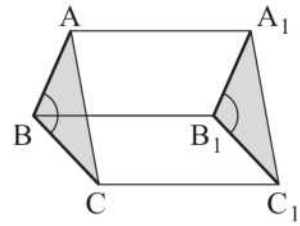


Рисунок 74

73. а) Дан правильный тетраэдр $DABC$, в котором проведена биссектриса DL треугольника DAB. Докажите, что любая прямая, параллельная прямой AB, перпендикулярна прямой DL.

б) Дана пирамида $PABCD$, основанием которой является прямоугольник $ABCD$, а все боковые ребра равны. Через центр симметрии O прямоугольника и точку P проведена прямая. Докажите, что любая прямая, параллельная ей, перпендикулярна прямой BD.

74. Найдите величину угла между двумя скрещивающимися диагоналями A_1C_1 и D_1C соседних граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

75. Прямая MN не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$ и параллельна его стороне DC. Установите взаимное расположение прямых: а) MN и BC; б) MN и AB. Найдите угол между ними, если $\angle ABC = 115°$.

76. На рисунке 75 прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $DA = 4$ дм, $DC = DD_1 = 1$ дм. Найдите тангенс угла между прямыми A_1M и D_1C, где M – середина ребра B_1C_1.

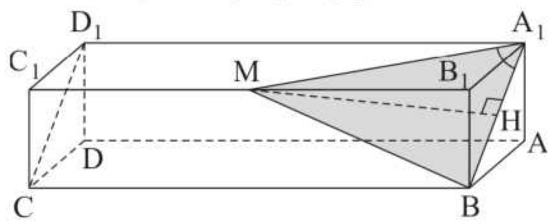


Рисунок 75

77. Деревянная балка имеет вид прямоугольного параллелепипеда. Требуется распилить ее перпендикулярно ребру. Как можно сделать разметку на поверхности балки для такого распила?

78. Прямая b проходит через вершину A треугольника ABC и перпендикулярна его сторонам AB и AC. Как эта прямая расположена относительно стороны BC?

79. а) Длинная деталь имеет вид прямоугольного параллелепипеда. Его поперечное сечение, т. е. сечение, плоскость которого перпендикулярна боковому ребру параллелепипеда, – квадрат со стороной 1 дм. Как практически можно найти длину диагонали этого параллелепипеда? Ответ объясните.

б) Постройте на листе бумаги отрезок, равный диагонали спичечной коробки, не производя ее измерения непосредственно.

80. Отрезок MN перпендикулярен плоскости α, пересекает ее в точке O и делится ею пополам. В плоскости α проведены два равных отрезка OK и OP. Докажите, что $MK = NP$.

81. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$: а) $A_1B_1 \perp B_1C$; б) $A_1C \perp BD$.

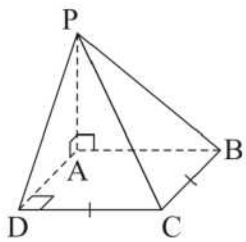


Рисунок 76

82. В пирамиде $PABCD$ основание – квадрат $ABCD$. Прямая PA перпендикулярна плоскости основания (рисунок 76). Докажите, что: а) $CD \perp PD$; б) $BC \perp PB$; в) $\Delta PAD = \Delta PAB$; г) $\Delta PBC = \Delta PDC$.

83. Основание пирамиды $SABCD$ – прямоугольник $ABCD$, диагональ которого равна 10 см. Известно, что $SB \perp (ABC)$, $SA = 10$ см, $SC = 8\sqrt{2}$ см. Найдите стороны AD и DC основания и ребро SD пирамиды.

Уровень B

84. Дан правильный тетраэдр $DABC$, O – точка пересечения медиан его основания ABC, M – внутренняя точка отрезка DC. Докажите, что угол между прямыми AB и OM равен $90°$.

85. Дана пирамида $PABCD$, каждое ребро которой равно 14 см, а основанием является квадрат $ABCD$. На отрезке PC отмечена его середина – точка M, а на отрезке AC – точка N такая, что $AN : AC = 0{,}25$. Найдите длину отрезка MN с точностью до 0,1 см.

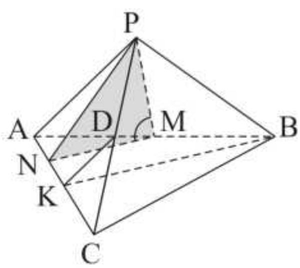


Рисунок 77

86. На рисунке 77 дан тетраэдр $PABC$, все ребра которого по 12 см. Точки M, D, K – середины ребер AB, PC, AC соответственно. Найдите косинус угла между прямыми PM и BK.

87. Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб, сторона которого равна 6 см, а площадь – 18 см^2. Найдите угол между прямыми AC и A_1B_1.

88. Окружность с центром в точке O лежит в плоскости α. Прямая OM перпендикулярна плоскости α. Точка M соединена отрезком с точкой A окружности. а) Найдите радиус окружности, если $OM = 1{,}5$ дм, $MA = 1{,}7$ дм. б) Верно ли, что прямая MA перпендикулярна касательной к окружности, проведенной через точку A? Ответ обоснуйте.

89. В землю вкопаны вертикально два столба, то есть перпендикулярно плоскости, содержащей их основания, которые возвышаются над землей на a м и b м, а расстояние между ними равно c м. Между верхушками этих столбов натянут провод. Найдите длину этого провода (без учета его провисания).

90. Через вершину C прямого угла ΔABC проведена прямая CK, перпендикулярная его плоскости, и из этой же вершины – его высота CH (рисунок 78). Найдите с точностью до 0,1 см расстояние KH, если $AC = 12$ см, $BC = 16$ см, $AK = 20$ см.

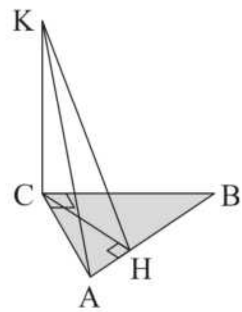


Рисунок 78

91. Периметр ΔABC равен 82 см. В точке M, середине стороны AB, к плоскости треугольника восстановлен перпендикуляр MK, равный 12 см. Точки F и E – середины сторон BC и AC соответственно. Найдите длину отрезка AK, если $KF = 15$ см, $KE = 20$ см.

92. В плоскости α даны параллельные прямые a и b. Из точки O, не принадлежащей плоскости α, проведены перпендикуляры OA и OB к прямым a и b соответственно. Докажите, что прямая AB перпендикулярна прямым a и b.

93. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно b. Постройте сечение этого куба плоскостью, проходящей через середину ребра AB и перпендикулярной прямой AC. Найдите площадь этого сечения.

6. Перпендикуляр и наклонная

Учебные достижения по изучению темы:
• знать определения и свойства перпендикуляра, наклонной и проекции наклонной в пространстве;
• уметь применять их при решении задач.

Перпендикуляром, проведенным из данной точки к плоскости, называется перпендикулярный ей отрезок, один конец которого принадлежит этой плоскости.

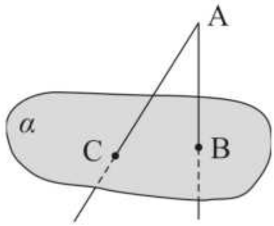


Рисунок 79

Например, проведем луч AB, перпендикулярный плоскости α, который пересекает эту плоскость в точке B (рисунок 79). Тогда отрезок AB – перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости α, точка B называется *основанием* этого перпендикуляра.

Отметим, что из данной точки можно провести к плоскости единственный перпендикуляр, так как через эту точку можно провести только одну прямую, перпендикулярную плоскости. **Длина перпендикуляра,** проведенного из точки к плоскости, называется **расстоянием** от нее до этой плоскости.

Наклонной, проведенной из данной точки к плоскости, называется неперпендикулярный ей отрезок, один конец которого принадлежит этой плоскости.

Например, на рисунке 79 отрезок AC – наклонная, проведенная из точки A к плоскости α, точка C называется *основанием* этой наклонной.

Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведенного из нее к этой плоскости.

Например, на рисунке 79 точка B – проекция точки A на плоскость α.

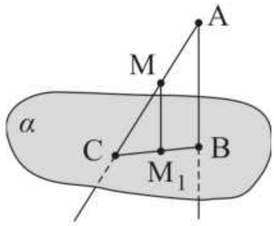


Рисунок 80

Проекцией фигуры на плоскость называется множество проекций всех ее точек на эту плоскость.

Например, на рисунке 80 отрезок BC – проекция наклонной AC на плоскость α. Если на отрезке AC взять точку M и построить ее проекцию на плоскость α – точку M_1, то отрезок BM_1 будет проекцией отрезка AM на плоскость α (рисунок 80).

Теорема. **Если из точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр короче наклонной.**

Доказательство. Пусть AB – перпендикуляр, а AC – наклонная к плоскости α (рисунок 81). Тогда в прямоугольном треугольнике ABC катет AB короче гипотенузы AC.

Из этой теоремы следует, что расстояние AB наименьшее из всех расстояний от точки A до любой точки плоскости α.

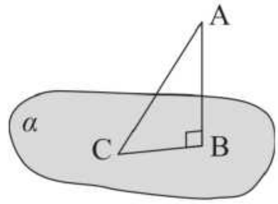


Рисунок 81

Отметим, что если из одной точки к плоскости проведены две наклонные, то:

1) *наклонные, имеющие равные проекции, равны и обратно, равные наклонные имеют равные проекции;*

2) *из двух наклонных, имеющих неравные проекции, больше та, проекция которой больше и обратно, большая наклонная имеет большую проекцию.*

Обоснуйте эти свойства самостоятельно, используя рисунок 82.

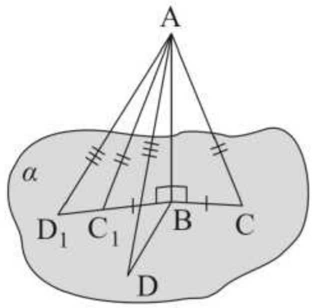


Рисунок 82

Задача. Доказать, что если точка пространства равноудалена от всех вершин треугольника, то ее проекцией на плоскость треугольника является центр описанной около него окружности.

Доказательство. Пусть даны ΔABC и точка M, не принадлежащая его плоскости. Из точки M к этой плоскости можно провести единственный перпендикуляр. Пусть точка O – основание перпендикуляра MO к плоскости ABC, причем эта точка не совпадает ни с одной из вершин ΔABC, что следует из условия задачи (рисунок 83). Тогда равные наклонные MA, MB, MC имеют равные проекции OA, OB, OC соответственно. Следовательно, точка O – центр окружности, описанной около ΔABC.

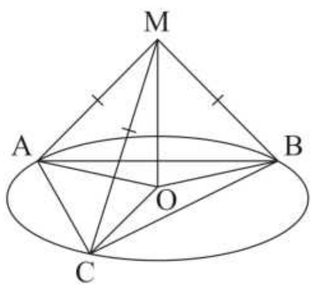


Рисунок 83

Отметим, что перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости ее основания, называется *высотой* пирамиды.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определения перпендикуляра и наклонной, проведенных из данной точки к плоскости.

2. Сформулируйте свойства перпендикуляра и наклонной, проведенных из данной точки к плоскости.

3. Что называется проекцией фигуры на плоскость?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

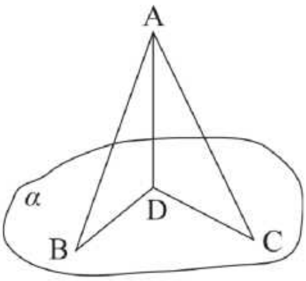


Рисунок 84

94. На рисунке 84 прямая AD перпендикулярна плоскости α. Используя рисунок 84, выполните задания:

1) укажите наклонные и их проекции;

2) сравните отрезки BD и CD, если:

а) $AB < AC$; б) $AB = AC$;

3) найдите длину отрезка AD, если:

а) $AB : AC = 10 : 17$, а проекции этих наклонных на плоскость α равны 12 см и 30 см;

б) наклонные равны 17 см и 25 см, а разность их проекций равна 12 см.

95. Через центр O правильного шестиугольника проведена прямая OK, перпендикулярная его плоскости (рисунок 85). Найдите расстояние OK, если сторона этого шестиугольника равна 12 см, а расстояние от его вершины до точки K 15 см.

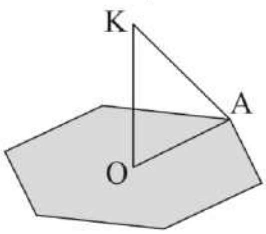


Рисунок 85

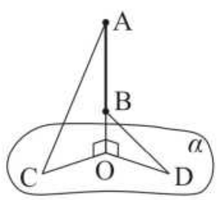


Рисунок 86

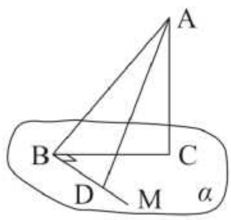


Рисунок 87

96. Из концов отрезка AB, перпендикулярного плоскости α и не имеющего с ней общих точек, проведены к плоскости α наклонные $AC = 40$ см и $BD = 25$ см. Точка O – проекция этого отрезка на плоскость α, причем $CO = OD = 24$ см (рисунок 86). Найдите длину отрезка AB.

97. На рисунке 87 $AC \perp \alpha$, $BM \perp BC$. Докажите, что $BM \perp BA$ и найдите AD, если $BD = 5$ см, $AB = 12$ см.

98. Через центр O круга, радиус которого равен 6 см, проведена перпендикулярная его плоскости прямая, на которой отмечена точка P, причем $OP = 1$ см (рисунок 88). Найдите расстояние от точки P до хорды MN этого круга, равной 2 см.

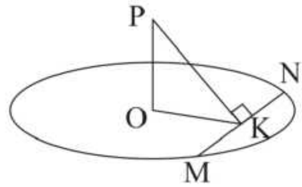


Рисунок 88

99. Сторона AB треугольника ABC, равная 16 см, лежит в плоскости α, точка C_1 – проекция точки C на эту плоскость, причем $CC_1 = 24$ см (рисунок 89). Найдите проекцию стороны AC на плоскость α, если проекция стороны BC равна 18 см, а $\angle ABC = 60°$.

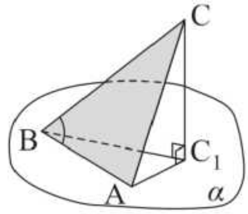


Рисунок 89

100. Дан равносторонний ΔABC со стороной 8 см. Через вершину A к его плоскости проведен перпендикуляр $AP = 6$ см (рисунок 90). Найдите расстояние от точки P: а) до вершин B и C треугольника; б) до стороны BC.

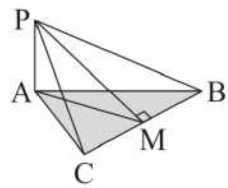


Рисунок 90

101. Три домика для сторожевых собак находятся в вершинах треугольной площадки, стороны которой равны 40 м, 40 м и 50 м. Верно ли, что если вертикальный столб установлен в центре окружности, описанной около этой площадки, то эти домики одинаково освещаются в ночное время светильником, прикрепленным над вершиной столба? Если верно, то найдите с точностью до 0,1 м длину светового потока от вершины столба до каждого из домиков, если высота столба равна 15 м.

102. а) Докажите, что если точка пространства равноудалена от всех сторон треугольника, то ее проекцией на плоскость треугольника является центр вписанной в него окружности (рисунок 91).

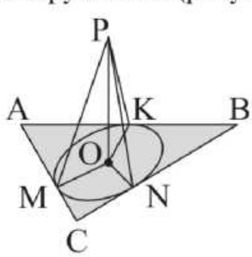


Рисунок 91

б) Дан треугольник со сторонами 13 см, 13 см и 10 см. Точка P удалена от каждой из прямых, содержащих стороны треугольника, на 5 см. Найдите расстояние от точки P до плоскости треугольника.

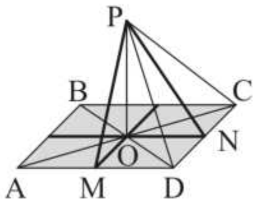


Рисунок 92

103. Используя рисунок 92, докажите, что: а) точка, одинаково удаленная от прямых, содержащих стороны квадрата, одинаково удалена от его вершин; б) точка, одинаково удаленная от вершин прямоугольника, не являющегося квадратом, неодинаково удалена от его сторон.

104. Дан квадрат $ABCD$. Через точку O пересечения диагоналей к его плоскости проведен перпендикуляр OP. Известно, что $AB = OP = \sqrt{2}$ дм. Найдите расстояние от точки P: а) до вершин квадрата; б) до прямых, содержащих стороны квадрата.

Уровень В

105. а) Какую фигуру образует множество точек середин всех наклонных, проведенных из данной точки M к плоскости α?

б) Какую фигуру образует множество точек середин всех равных наклонных, проведенных из данной точки M к плоскости α?

106. Проекцией точки M на плоскость ромба $ABCD$ является точка O пересечения его диагоналей. Найдите длины проекций отрезков MC и MD на эту плоскость, если $MC = 17$ см, $MD = 3\sqrt{29}$ см, а площадь ромба равна 96 см^2.

107. Через центр O правильного ΔABC, сторона которого равна 9 см, проведена прямая $PO \perp (ABC)$, причем $PO = 12$ см. Через точку C проведена прямая $CK \parallel PO$, причем $CK = 0{,}8 \cdot PO$. Найдите с точностью до 0,1 см длину отрезка KP, если точки K и P лежат: а) по одну сторону от плоскости ABC; б) по разные стороны плоскости ABC.

108. а) Точки P и M равноудалены от точек A, B, C, не лежащих на одной прямой. Докажите, что прямая PM перпендикулярна плоскости ABC.

б) Стороны треугольника равны 7 см, 15 см и 20 см. На каком расстоянии от плоскости треугольника находится точка, удаленная на 32,5 см от каждой его вершины?

109. Три одинаковых прибора, находящихся на казахстанском плато Устюрт, зафиксировали одновременно яркое свечение объекта, появившееся над ними высоко в небе. Приборами установлено, что расстояние от каждого из них до этого объекта равно d. Как можно вычислить расстояние от объекта до плато, если расстояния между приборами равны a, b, c?

Плато Устюрт, Мангистауская область

110. Какую фигуру в пространстве образуют все точки, равноудаленные от: а) двух данных точек; б) от вершин треугольника; в) от вершин прямоугольника?

7. Теорема о трех перпендикулярах

Учебные достижения по изучению темы:
- знать теорему о трех перпендикулярах и теорему, обратную ей;
- уметь применять их при решении задач.

Теорема (*о трех перпендикулярах*). **Если прямая плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной.**

Доказательство. Пусть AB – перпендикуляр к плоскости α, AC – наклонная, BC – проекция наклонной AC на эту плоскость, а прямая m плоскости α перпендикулярна BC (рисунок 93). Докажем, что $m \perp AC$. Прямая m перпендикулярна двум пересекающимся прямым BC и AB плоскости ABC (т. к. $AB \perp \alpha$, $m \subset \alpha$ и $BC \perp m$ по условию). Поэтому прямая m перпендикулярна плоскости ABC, а значит, и прямой AC.

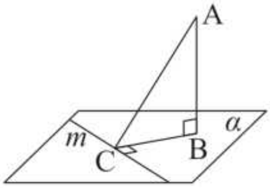


Рисунок 93

Теорема (*обратная теореме о трех перпендикулярах*). **Если прямая плоскости перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной на данную плоскость.**

Доказательство. Пусть прямая m плоскости α перпендикулярна наклонной AC к этой плоскости (рисунок 93). Тогда прямая m перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и AB плоскости ABC, поэтому она перпендикулярна и прямой BC этой плоскости.

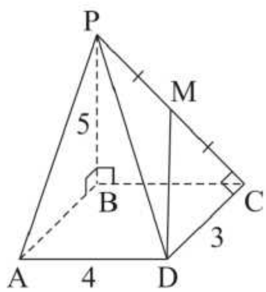


Рисунок 94

Задача 1. Боковое ребро PB пирамиды, равное 5 дм, перпендикулярно ее основанию $ABCD$, которое является прямоугольником, причем $AB = 3$ дм, $BC = 4$ дм. Найти с точностью до 0,1 дм длину медианы DM треугольника PDC.

Решение. Так как PC – наклонная, а BC – ее проекция на плоскость ABC и $BC \perp DC$, то $PC \perp DC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, ΔDMC – прямоугольный (рисунок 94). $DM = \sqrt{DC^2 + MC^2}$, $MC = 0{,}5PC = 0{,}5\sqrt{5^2 + 4^2} = 0{,}5 \cdot \sqrt{41}$ (дм). Тогда $DM = \sqrt{3^2 + \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{77}}{2} \approx 4{,}4$ (дм).

Ответ. $\approx 4{,}4$ дм.

З а д а ч а 2. Вершина B неразвернутого угла ABC, лежащего в плоскости α, является основанием наклонной MB к этой плоскости. Наклонная образует со сторонами данного угла равные острые углы. Доказать, что проекция BD этой наклонной на плоскость α лежит на биссектрисе данного угла.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем перпендикуляры DK, DH соответственно к сторонам AB, BC угла ABC и наклонные MK, MH к его плоскости (рисунок 95). Тогда $MK \perp AB$ и $MH \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Отсюда получаем, что $\Delta MKB = \Delta MHB$ по гипотенузе и острому углу. Из равенства этих треугольников следует, что $MK = MH$. Тогда $DK = DH$ (равные наклонные, проведенные из одной точки, имеют равные проекции). Получили, что точка D равноудалена от сторон угла ABC, следовательно, отрезок BD лежит на биссектрисе этого угла.

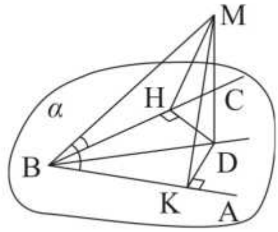


Рисунок 95

ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.
2. Сформулируйте теорему, обратную теореме о трех перпендикулярах.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

111. Дан ΔABC и проведена его высота CH. Из точки P к плоскости ABC проведен перпендикуляр PC (рисунок 96). 1) Укажите отрезок, длина которого равна расстоянию от точки P до прямой AB. Ответ объясните. 2) Найдите расстояние от точки P до стороны AB, если $PC = 4$ см, $CH = 3$ см.

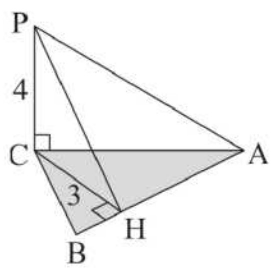


Рисунок 96

112. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $AC = 7\sqrt{2}$ см. Из точки P к плоскости ABC проведен перпендикуляр PC, равный 24 см. Найдите расстояние от точки P до стороны AB.

113. Дан ΔABC, в котором $\angle C = 90°$, $BC = 12$ см. Из точки K – середины гипотенузы проведен к его плоскости перпендикуляр KH, равный 8 см. Найдите расстояние от точки H до стороны AC.

114. Через вершину B параллелограмма $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр BM, равный $\sqrt{37}$ см. Известно, что $AB = 4$ см, $AD = 6$ см, $\angle C = 60°$. Найдите расстояния от точки M до сторон AD и DC параллелограмма.

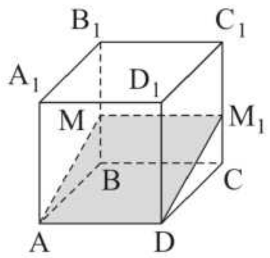


Рисунок 97

115. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $MM_1 \parallel AD$ (рисунок 97).

1) Укажите вид четырехугольника AMM_1D:

а) квадрат; б) ромб с острым углом при вершине A; в) трапеция; г) прямоугольник, в котором $AD \neq DM_1$. Ответ объясните.

2) Длина какого отрезка является расстоянием от точки M до прямой AD?

116. Диагональ AC ромба $ABCD$ равна 16 см. Из точки M к его плоскости проведены перпендикуляр MB, равный 6 см, и наклонные MA и MC. 1) Проведите высоту MO треугольника AMC. 2) Найдите площадь ΔAMC, если $\angle BMO = 45°$.

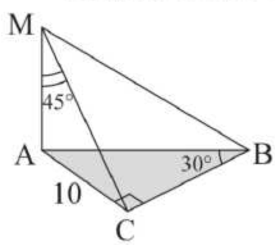


Рисунок 98

117. Дан ΔABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$, $AC = 10$ см. Из точки M к плоскости треугольника проведены перпендикуляр MA и наклонные MC и MB (рисунок 98). Докажите, что ΔMCB – прямоугольный и найдите его площадь, если $\angle AMC = 45°$.

118. а) Точка, не принадлежащая плоскости ромба, одинаково удалена от его вершин. Найдите углы ромба.

б) Точка M удалена от плоскости квадрата на 1,4 дм, а от каждой из его сторон – на 5 дм. Найдите площадь квадрата.

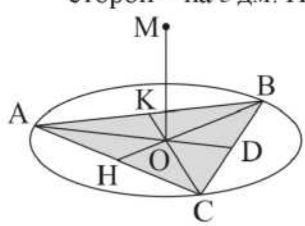


Рисунок 99

119. Дан правильный ΔABC со стороной 3 дм и около него описана окружность с центром в точке O (рисунок 99). К плоскости треугольника проведен перпендикуляр OM, равный 1,5 дм. Найдите расстояния от точки M до сторон треугольника.

120. Дан ΔABC, в котором $\angle C = 90°$, $AC = 9$ см, $BC = 6$ см. Из точки M к плоскости треугольника проведены перпендикуляр MH, где $H \in (ABC)$, и наклонная MC, образующая равные углы с его катетами. В каком отношении, считая от точки A, луч CH делит гипотенузу треугольника?

Уровень В

121. Дан ΔABC, в котором $\angle C = 90°$. Из точки M к плоскости треугольника проведены перпендикуляр MC и наклонные MA и MB. Известно, что $MC = 2$ дм, $\angle MBC = 30°$, $\angle MAC = 45°$. Найдите расстояние от точки M до стороны AB.

122. Основанием перпендикуляра PH на плоскость параллелограмма $ABCD$ является точка H пересечения его диагоналей, $PH = 0{,}8$ дм (рисунок 100). Найдите расстояния от точки P до сторон параллелограмма, если известны его высоты $BK = 3$ дм и $BF = 1{,}2$ дм.

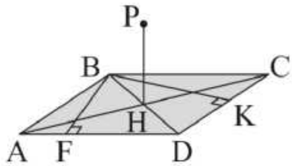


Рисунок 100

123. Дан ΔABC, в котором $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. Из точки M к плоскости треугольника проведены перпендикуляр $MO = 4$ см и равные наклонные MA, MB, MC. Найдите расстояния от точки M до сторон треугольника.

124. Плоскость, содержащая равносторонний треугольник ABC, параллельна плоскости α. Из вершин треугольника проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1 (рисунок 101). Известно, что $\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1$. Докажите, что CBB_1C_1 – прямоугольник.

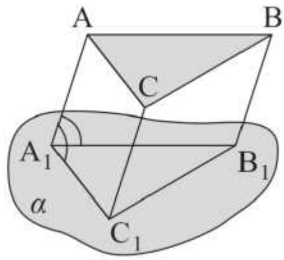


Рисунок 101

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

125. Изобразите пирамиду $PABC$, все ребра которой по 4 см, и выполните задания. 1) Объясните, почему прямая AC перпендикулярна ребру PB.

2) Найдите угол между прямыми PB и MN, где M и N – середины ребер AP и CP соответственно.

126. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и выполните задания. 1) Назовите: а) прямые, перпендикулярные плоскости ABC; б) какую-либо наклонную и ее проекцию на плоскость ABC. 2) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна прямой BD.

127. Из точки M к плоскости α проведены перпендикуляр MH и две наклонные MA и MB. Известно, что $\angle MBH = 60°$, $\angle MAH = 30°$. Найдите длину каждой наклонной, если проекция наклонной MB равна 9 см.

128. В ΔABC угол C – прямой, $AC = 5\sqrt{2}$ см, $BC = 35\sqrt{2}$ см. Из точки P к плоскости треугольника проведен перпендикуляр PC, равный 24 см. Найдите расстояние от точки P до прямой AB.

8. Угол между прямой и плоскостью

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определение угла между прямой и плоскостью;
- уметь изображать этот угол и находить его величину.

Величина угла между прямой и перпендикулярной ей плоскостью равна 90°, а величина угла между прямой и параллельной ей плоскостью принимается равной 0°.

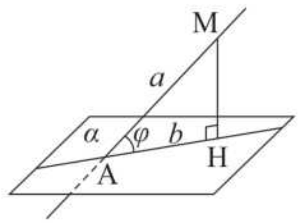


Рисунок 102

Углом между прямой и не перпендикулярной ей плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость. На рисунке 102 $\angle MAH = \varphi$ – угол между прямой a и плоскостью α, $\mathbf{0° \leq \varphi < 90°}$.

Отметим, что *угол между прямой, пересекающей не перпендикулярную ей плоскость, и ее проекцией на эту плоскость является наименьшим из всех углов, которые данная прямая образует с прямыми, лежащими в этой плоскости.*

З а д а ч а 1. Дан тетраэдр $DABC$, все ребра которого равны a. Найти с точностью до 1° угол между прямой AB и плоскостью BCD.

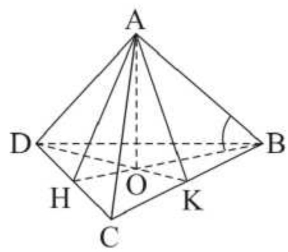


Рисунок 103

Р е ш е н и е. В данном тетраэдре все грани равны, примем грань BCD за его основание. Угол между прямой AB и плоскостью BCD – это угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость. Для построения указанной проекции нужно провести перпендикуляр из точки A к плоскости BCD. Так как наклонные AB, AC и AD равны, то основание перпендикуляра AO на плоскость BCD – это центр окружности, описанной около ΔBCD. Так как ΔBCD – равносторонний, то это точка пересечения его медиан BH и DK (рисунок 103). Тогда проекцией прямой AB на плоскость BCD является прямая BO, следовательно, $\angle ABO$ – искомый. Из ΔABO находим: $\cos\angle ABO =$ $= \frac{BO}{AB} = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) : a = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$. Далее получаем $\angle ABO \approx 55°$.

О т в е т. ≈ 55°.

З а д а ч а 2. Основание пирамиды $SABCD$ – квадрат $ABCD$, а ее боковые ребра равны. Постройте угол между перпендикуляром SO к плоскости основания и плоскостью SDC.

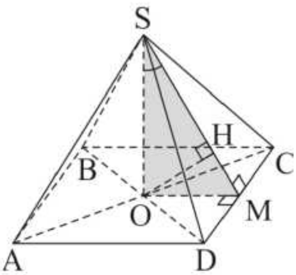


Рисунок 104

Р е ш е н и е. Точка O – это точка пересечения диагоналей основания, так как $SO \perp AC$ и $SO \perp BD$ (объясните почему), то $SO \perp (ABC)$. Прямая SO – наклонная к плоскости SDC, построим ее проекцию. Для чего проведем высоту OH треугольника SOM, где точка M – середина стороны DC (рисунок 104), и докажем, что OH является перпендикуляром к плоскости SDC.

Так как $OH \perp SM$ по построению и $OH \perp DC$, потому что $DC \perp (SOM)$, то $OH \perp (SDC)$. Тогда SH – проекция наклонной SO на плоскость SDC и $\angle OSM$ – искомый.

ВОПРОСЫ

1. Чему равен угол между прямой и плоскостью, если они: а) параллельны; б) перпендикулярны?

2. Что называется углом между прямой и плоскостью?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

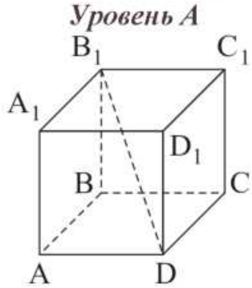


Рисунок 105

129. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок 105). 1) Укажите отрезок, являющийся проекцией отрезка B_1D на плоскость грани: а) $ABCD$; б) DD_1C_1C; в) BB_1C_1C. 2) Найдите тангенс угла наклона прямой B_1D к плоскости DD_1C_1.

130. Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – квадрат. Угол между диагональю B_1D параллелепипеда и его боковой гранью DD_1C_1C равен 30°. Найдите угол между этой диагональю и плоскостью основания.

131. Из вершины B квадрата $ABCD$ проведен отрезок BH, перпендикулярный плоскости квадрата, $BH = 10$ см. Прямая HA наклонена к плоскости квадрата под углом 45°. Найдите с точностью до 1° угол наклона прямой HD к плоскости квадрата.

132. К плоскости прямоугольного ΔABC ($\angle C = 90°$) восстановлен перпендикуляр DC, равный 24 см. Известно, что $AC = 12$ см, $BC = 16$ см, точка O – центр окружности, описанной около ΔABC. Найдите с точностью до 1° углы наклона прямых DA, DB и DO к плоскости ABC.

133. а) Из точки C к плоскости α проведены две равные наклонные CA и CB, угол между которыми равен 60°, а угол между их проекциями на плоскость α равен 90° (рисунок 106). Найдите угол между прямой AC и плоскостью α.

б) Из точки C к плоскости α проведены две равные наклонные CA и CB, образующие с этой плоскостью углы по 30°, а угол между их проекциями на плоскость α равен 120°. Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если $AB = 15$ см.

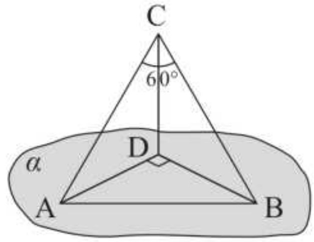


Рисунок 106

134. Боковое ребро SB пирамиды $SABCD$ перпендикулярно плоскости ее основания, а боковые ребра SA и SC образуют с плоскостью основания углы 45° и 30° соответственно. Известно, что $ABCD$ – прямоугольник и $SC = 8$ см. Найдите длину ребра SD и угол между прямой SD и плоскостью основания с точностью до 1°.

135. Основание AB равнобедренного ΔABC лежит в плоскости α (рисунок 107). Найдите угол между высотой CD этого треугольника и плоскостью α, если $AB = 20$ см, $AC = 22$ см, а длина проекции отрезка AC на плоскость α равна 14 см.

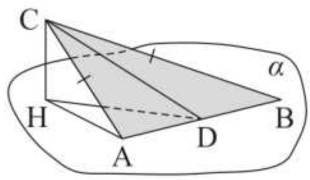


Рисунок 107

Уровень B

136. Дана пирамида $SABCD$, боковые ребра которой равны, а основание $ABCD$ – квадрат. Высота SO пирамиды равна h, а высота SH боковой грани SDC наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите с точностью до 1° угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания.

137. Докажите, что угол между диагональю куба и его гранью не зависит от их выбора. Найдите величину этого угла с точностью до 1°.

138. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит в плоскости α, а его катеты образуют с этой плоскостью углы в $30°$ и $45°$. Найдите угол между высотой треугольника, проведенной к гипотенузе, и плоскостью α.

139. Отрезок DC является перпендикуляром к плоскости равнобедренного прямоугольного ΔABC ($\angle C = 90°$). Точка M – середина гипотенузы AB (рисунок 108). Найдите с точностью до $1°$ угол между прямой DM и плоскостью ACD, если $DC = AC$.

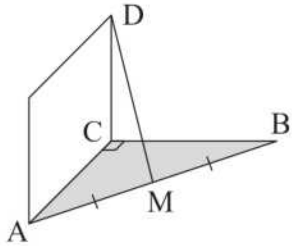


Рисунок 108

140. Высоты двух вертикально установленных на площадке столбов CA и DB равны 6 м и 9 м соответственно, а расстояние AB между их основаниями равно $5\sqrt{3}$ м. На отрезке AB в точке M вбит штырь, который соединен с вершинами столбов туго натянутыми канатами MC и MD, одинаково наклоненными к площадке. Найдите угол наклона канатов MC и MD к площадке.

9. Угол между двумя плоскостями

Учебные достижения по изучению темы:
- знать определения двугранного угла и его линейного угла;
- изображать двугранный угол и находить его величину;
- знать признак перпендикулярности двух плоскостей и уметь применять его при решении задач.

Две полуплоскости с общей границей разделяют пространство на две части. **Фигура, состоящая из двух полуплоскостей с общей границей и одной из двух частей пространства, на которые оно разделяется ими, называется двугранным углом** (рисунок 109).

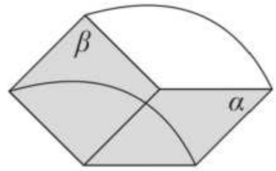


Рисунок 109

Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его *гранями*. В двугранном угле две грани, этим и обусловлено его название. Общая граница полуплоскостей называется *ребром* двугранного угла. В окружающей обстановке много предметов, моделирующих двугранные углы, например, крыши зданий, полураскрытая папка, две смежные стены комнаты.

Измеряются двугранные углы следующим образом: на ребре двугранного угла отмечают какую-нибудь точку и в каждой грани из этой точки проводят луч, перпендикулярный ребру. Угол, образованный этими лучами, называется *линейным углом двугранного угла.*

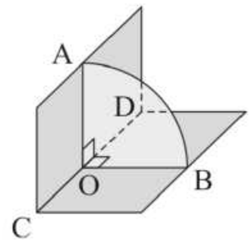


Рисунок 110

Линейным углом двугранного угла называется угол, вершина которого принадлежит его ребру, а стороны лежат в его гранях и перпендикулярны этому ребру. На рисунке 110 угол AOB – линейный угол двугранного угла с ребром CD.

Плоскость линейного угла AOB перпендикулярна ребру двугранного угла (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Двугранный угол имеет бесконечно много линейных углов. Отметим, что *все линейные углы данного двугранного угла равны.* Объясните это свойство, используя рисунок 111.

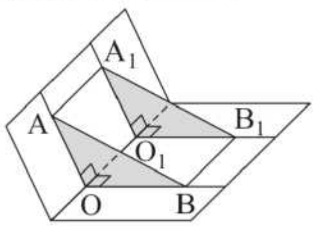


Рисунок 111

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла. Например, на рисунке 112, *а* изображен двугранный угол, градусная мера которого равна 60° (кратко говорят: двугранный угол равен 60°).

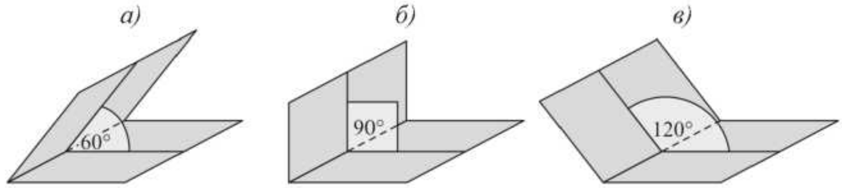


Рисунок 112

Двугранный угол называется *прямым*, если он равен 90°, *острым*, если он меньше 90°, *тупым*, если он больше 90°, но меньше 180°. Двугранный угол на рисунке 112, *а* – острый, на рисунке 112, *б* – прямой, на рисунке 112, *в* – тупой.

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром (рисунок 113). Если один из этих двугранных углов равен α, то остальные углы равны $180° - \alpha$, α, $180° - \alpha$. В частности, если один из углов прямой, то и остальные три угла – прямые.

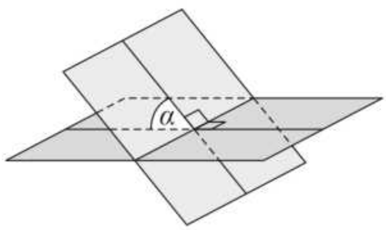


Рисунок 113

Градусной мерой угла между двумя пересекающимися плоскостями называется градусная мера одного из образованных ими двугранных углов, который не больше каждого из остальных.

Величина угла между пересекающимися плоскостями не больше 90°. Она равна величине угла между прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными линии их пересечения.

Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Теорема (*признак перпендикулярности плоскостей*). **Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.** (Докажите самостоятельно.)

Угол между совпадающими или параллельными плоскостями принимается равным 0°. Отметим, что если двугранный угол образован полуплоскостями, содержащими две соседние грани многогранника с общим ребром, то его кратко называют двугранным углом при этом ребре многогранника, например, двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

На практике плоскость, образующую с горизонтальной плоскостью острый угол, называют скатом. Скат и плоскость его проекции на чертеже обычно являются изображениями двух прямоугольников, например, $ABCD$ и ABC_1D_1 (рисунок 114). При этом плоскость CDD_1C_1 образует с горизонтальной плоскостью ABC_1D_1 прямой двугранный угол, а угол CBC_1 является линейным углом двугранного угла с ребром AB. Отрезок CB, как и любой параллельный ему отрезок с концами на отрезках AB и CD, называется линией наибольшего ската, а угол CBC_1 – крутизной ската. Например, по линии наибольшего ската стекает вода с крыши; если крутизна ската дороги менее 15°, то допускается свободное передвижение по ней пешеходов и транспорта, если же больше 15°, то устанавливаются предупреждающие знаки об опасности участка дороги.

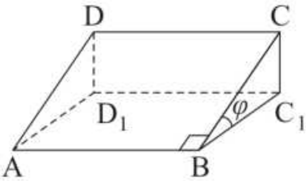


Рисунок 114

З а д а ч а. Найти с точностью до 1° двугранный угол между двумя соседними боковыми гранями четырехугольной пирамиды, каждое ребро которой равно b, причем ее основание – квадрат.

Р е ш е н и е. Пусть $PABCD$ – данная четырехугольная пирамида (рисунок 115). Ее боковые грани – равные правильные треугольники. Построим линейный угол двугранного угла, образованного гранями PBC и PCD. Для этого проведем перпендикуляры DK и BK к ребру PC, K – середина PC (объясните почему). Угол BKD – искомый. Из прямоугольного ΔOKD найдем $\angle OKD = \frac{1}{2}\angle BKD$ (объясните почему). Отрезок $OD = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ (половина диагонали квадрата), отрезок $KD = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ (медиана ΔPCD). Тогда $\sin\angle OKD = \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 0{,}816$. Следовательно, $\angle OKD \approx 55°$, тогда $\angle BKD \approx 110°$.

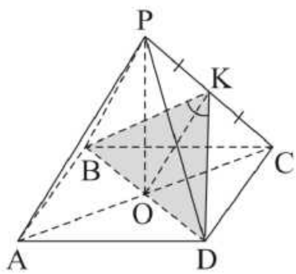


Рисунок 115

О т в е т. ≈ 110°.

ВОПРОСЫ

1. Какая фигура называется двугранным углом?
2. Какой угол называется линейным углом двугранного угла?
3. Что называется градусной мерой двугранного угла?
4. Какой двугранный угол называется: а) прямым; б) острым; в) тупым?
5. Что называется углом между двумя пересекающимися плоскостями? Какой может быть его величина?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

141. На рисунке 116 пирамида, основание которой правильный треугольник, и все ее боковые ребра равны. Известно, что угол наклона боковой грани к основанию равен 50°. Укажите верное равенство: а) $\angle PAH = 50°$; б) $\angle MPH = 50°$; в) $\angle PBH = 50°$; г) $\angle PNH = 50°$.

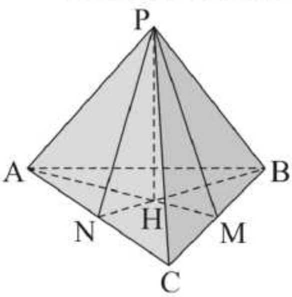


Рисунок 116

142. а) Дана пирамида $PABC$, ребро PB которой перпендикулярно плоскости ABC, а угол ACB – прямой. Докажите, что угол PCB – линейный угол двугранного угла с ребром AC и найдите его величину, если $PB = 4$ см, $PC = 8$ см.

б) Из вершины B квадрата $ABCD$ к его плоскости восстановлен перпендикуляр BM. Найдите величину двугранного угла, образованного плоскостью треугольника MDC и плоскостью квадрата $ABCD$, если $AB = 5$ см, $DM = 5\sqrt{3}$ см.

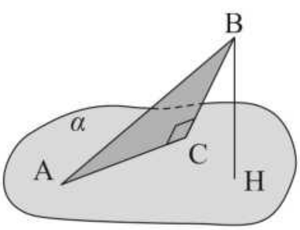


Рисунок 117

143. Катет AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) лежит в плоскости α (рисунок 117). Найдите расстояние BH от точки B до этой плоскости, если угол между плоскостью ABC и плоскостью α равен 45°, $AC = 4$ дм, $AB : BC = 3 : 1$.

144. Дана пирамида $PABC$, в которой ребра AB и BC равны, а ребро PB перпендикулярно плоскости ABC. а) Является ли угол PCB линейным углом двугранного угла с ребром AC? б) Найдите величину двугранного угла с ребром AC, если $BC = 20$ см, $AC = 32$ см, $PB = 4\sqrt{3}$ см.

145. Дан ромб $ABCD$, диагональ BD которого равна 4 см. Из вершины C восстановлен перпендикуляр CM к плоскости ромба, равный 8 см. Угол между плоскостями BMD и ABC равен 45°. Найдите площадь ромба.

146. Равнобедренные треугольники ABC и ABK с общим основанием AB лежат в разных плоскостях, причем проекцией вершины C на плоскость треугольника ABK является середина медианы KM (рисунок 118). Найдите величину двугранного угла, образованного плоскостями этих треугольников, если $AB = 24$ м, $CB = 4\sqrt{17}$ м, $BK = 20$ м.

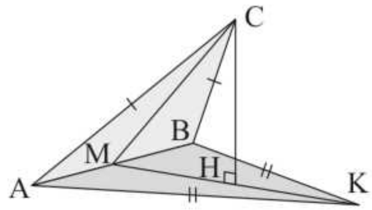


Рисунок 118

147. Равнобедренные треугольники ABC и BDC с общим основанием BC лежат в разных плоскостях. Их высоты, проведенные к основанию, равны 5 см и 8 см, а расстояние AD равно 7 см. Найдите величину угла между плоскостями ABC и BDC.

148. Найдите с точностью до 1° величину двугранного угла при ребре правильного тетраэдра.

149. Каждое ребро пирамиды $SABCD$ равно a, а ее основание – квадрат $ABCD$. Найдите с точностью до 1° двугранный угол при ребре CD пирамиды.

Уровень В

150. Все боковые ребра пирамиды $PABC$ равны по 13 см, а ее основание – прямоугольный треугольник, в котором $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. 1) Изобразите перпендикуляр PH к плоскости основания и линейный угол между гранями APC и ABC; 2) найдите с точностью до 1° величину двугранного угла при ребре AC пирамиды.

151. Гипотенуза AB прямоугольного ΔABC, в котором катеты AC и CB равны 12 дм и 9 дм, лежит в плоскости α, а вершина C удалена от нее на расстояние, равное $3{,}6\sqrt{3}$ дм. Найдите угол между плоскостями α и ABC с точностью до 1°.

152. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $\angle D_1CD$ – линейный угол между плоскостями ABC и BD_1C и найдите его величину.

б) Дан прямой параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все ребра которого равны, а в основании лежит ромб с углом 60°. Найдите угол между плоскостями $ABCD$ и DA_1B_1C с точностью до 1°.

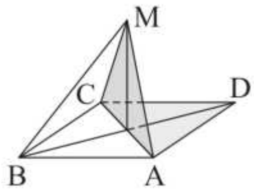


Рисунок 119

153. а) Ромб $ABCD$ перегнули по диагонали AC так, что точка B оказалась в точке M, а угол между плоскостями AMC и ADC – прямой (рисунок 119). Найдите угол между прямой BM и плоскостью ADC, если $BD = 4$ дм.

б) Ромб $ABCD$, сторона которого равна 17 см, а диагональ BD равна 16 см, перегнут по этой диагонали так, что образовался двугранный угол, равный 30°, причем точка A оказалась в точке A_1. Найдите с точностью до 0,1 см расстояние A_1C.

10. Расстояние в пространстве

Учебные достижения по изучению темы:
• знать, что называется расстоянием: от точки до плоскости, от прямой до параллельной ей плоскости, между параллельными плоскостями, между скрещивающимися прямыми;
• уметь находить эти расстояния.

Если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости. Объясните это свойство, используя рисунок 120.

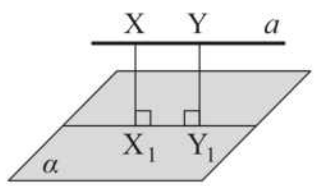


Рисунок 120

Расстоянием между параллельными прямой и плоскостью называется расстояние от любой точки прямой до этой плоскости.

Аналогично можно установить, что расстояние от каждой точки плоскости до параллельной ей плоскости одинаково (рисунок 121).

Расстоянием между параллельными плоскостями называется расстояние от любой точки одной из плоскостей до другой.

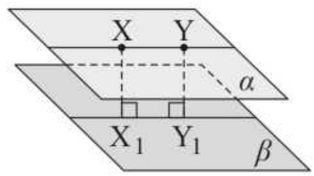


Рисунок 121

Задача 1. Между двумя параллельными плоскостями α и β заключены два отрезка AB и CD (рисунок 122), сумма длин которых равна 342 см, а длины их проекций на одну из плоскостей равны 78 см и 36 см. Найти расстояние между плоскостями.

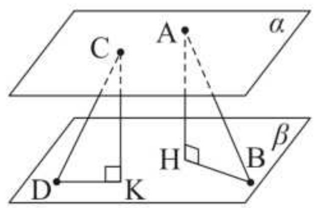


Рисунок 122

Решение. Проведем перпендикуляры AH и CK к плоскости проекции данных отрезков, тогда $AH = CK$. Пусть $AB = x$ см, тогда $CD = (342 - x)$ см. Из прямоугольных треугольников AHB и CKD получаем:

$(342 - x)^2 - 78^2 = x^2 - 36^2$; $(342 - x)^2 - x^2 = 78^2 - 36^2$;

$342 \cdot (342 - 2x) = 114 \cdot 42$; $342 - 2x = 14$; $x = 164$.

Тогда $AH = \sqrt{164^2 - 36^2} = \sqrt{200 \cdot 128} = 160$ (см).

Ответ. 160 см.

Теорема. **Существует единственная прямая, пересекающая каждую из двух скрещивающихся прямых и перпендикулярная им.**

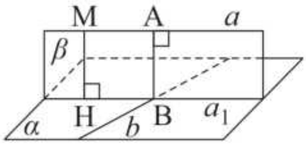


Рисунок 123

Доказательство. Пусть даны две скрещивающиеся прямые a и b. Построим плоскость α, параллельную прямой a и содержащую прямую b. Возьмем на прямой a точку M и проведем из нее перпендикуляр MH к плоскости α (рисунок 123). Построим плоскость β, проходящую через пересекающиеся прямые a и MH. Обозначим прямую a_1, по которой пересекаются плоскости α и β, и точку B – пересечения прямых b и a_1. Проведем в плоскости β перпендикуляр BA к прямой a, тогда прямые MH и AB параллельны, причем прямая AB перпендикулярна плоскости α. Следовательно, эта прямая перпендикулярна каждой из прямых a и b.

Докажем, что прямая AB – единственная. Допустим, что существует еще одна прямая A_1B_1, перпендикулярная каждой из прямых a и b и пересекающая их. Тогда прямые AB и A_1B_1 параллельны, а значит, точки A, B, A_1, B_1 лежат в одной плоскости, что противоречит определению скрещивающихся прямых. Таким образом, допущение неверно, прямая AB – единственная.

Отрезок AB называют общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым a и b.

Общим перпендикуляром *к двум скрещивающимся прямым называется отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный каждой из них.* **Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.**

Отметим, что:

1) *длина общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым меньше длины любого другого отрезка, концы которого лежат на этих прямых;*

2) *расстояние от одной из скрещивающихся прямых до плоскости, ей параллельной и содержащей другую прямую, равно расстоянию между этими скрещивающимися прямыми;*

3) *расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между двумя параллельными плоскостями, содержащими эти скрещивающиеся прямые.*

Задача 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1 м. Найти расстояние между прямыми DD_1 и: а) A_1B_1; б) A_1C.

Решение. а) Прямые DD_1 и A_1B_1, DD_1 и A_1C – скрещивающиеся (рисунок 124). Плоскости AA_1B_1B и AA_1C_1C параллельны прямой DD_1 (по признаку параллельности прямой и плоскости). Расстояние от прямой DD_1 до плоскости AA_1B_1B, равное 1 м, является расстоянием между прямыми DD_1 и A_1B_1.

б) Расстояние от прямой DD_1 до плоскости AA_1C_1C равно длине отрезка D_1O, так как $D_1O \perp (AA_1C_1)$. Длина отрезка D_1O является расстоянием между прямыми DD_1 и A_1C, $D_1O = \frac{\sqrt{2}}{2}$ м.

Ответ. а) 1 м; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ м.

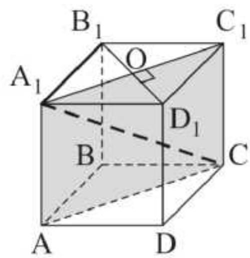


Рисунок 124

Задача 3. Дан правильный тетраэдр $PABC$, ребро которого равно a. Найти расстояние между прямыми AP и BC.

Решение. Отметим точки F и M – середины отрезков AP и BC соответственно (рисунок 125). Тогда отрезок FM – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AP и BC, так как $FM \perp BC$ и $MF \perp AP$ как медианы равнобедренных треугольников BFC и APM соответственно, проведенные к их основаниям. Из прямоугольного ΔAMF по теореме Пифагора находим: $MF^2 = AM^2 - AF^2 = $
$= \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4}$; $MF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

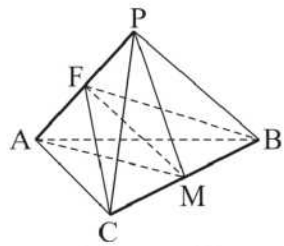


Рисунок 125

Ответ. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

ВОПРОСЫ

1. Что называется расстоянием: а) от точки до плоскости; б) от прямой до параллельной ей плоскости; в) между параллельными плоскостями; г) между скрещивающимися прямыми?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

154. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1 дм (рисунок 126). Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости: а) грани BCC_1B_1; б) BCD; в) B_1C_1D.

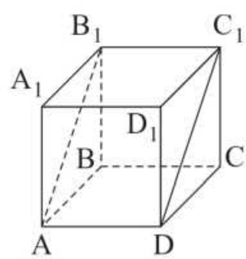


Рисунок 126

155. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 1$ дм, $AD = 2$ дм, $AA_1 = 3$ дм. Найдите расстояние: а) от точки A_1 до прямой DC; б) между прямыми A_1C_1 и DC; в) между плоскостями $A_1B_1C_1$ и MKD, где точки M и K – середины отрезков AD и CD соответственно.

156. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 3$ см, $AD = 4$ см. Найдите расстояние между прямыми: а) A_1D и BC_1; б) DD_1 и A_1C_1.

157. Прямая a перпендикулярна плоскости и пересекает ее в точке A. Прямая b лежит в этой плоскости и не содержит точку A. Отрезок AH – перпендикуляр к прямой b. Докажите, что длина отрезка AH равна расстоянию между прямыми a и b.

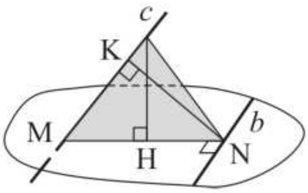


Рисунок 127

158. Прямая c не перпендикулярна плоскости и пересекает ее в точке M. Прямая b лежит в этой плоскости и не проходит через точку M, причем b перпендикулярна проекции прямой c на эту плоскость и пересекает ее в точке N (рисунок 127). Через точку N и прямую c проведена плоскость, в которой построен перпендикуляр NK к прямой c. Докажите, что длина отрезка NK равна расстоянию между прямыми c и b.

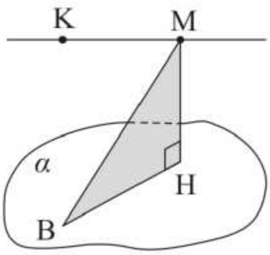


Рисунок 128

159. Из точки M проведены перпендикуляр MH и наклонная MB к плоскости α. Прямая MK параллельна плоскости α и не лежит в плоскости MBH (рисунок 128). Найдите расстояние между прямыми MK и BH, если сумма длин наклонной MB и ее проекции на плоскость α равна 10 см, а их отношение равно 5 : 3.

160. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a. Найдите расстояние между прямыми BD и CC_1.

Уровень В

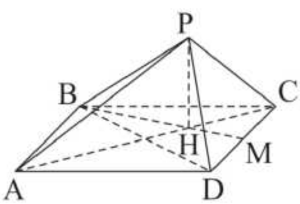


Рисунок 129

161. Основанием пирамиды $PABCD$ является ромб $ABCD$, угол B которого равен $120°$. Каждое из боковых ребер PB, PC, PD равно стороне основания (рисунок 129). Объясните, почему отрезок PH является высотой пирамиды, где H – точка пересечения медиан ΔBCD. Найдите расстояние между прямыми PB и CD, если сторона ромба равна $\sqrt{2}$ дм.

162. Прямые a, b, c лежат в плоскости α и попарно параллельны. Известны расстояния от точки M, не принадлежащей плоскости α, до этих прямых соответственно: $MA = 12{,}5$ см, $MB = 13$ см, $MC = 20$ см. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой, и найдите расстояние между прямыми a и c, если расстояние от точки M до плоскости α равно 12 см.

163. Отрезок AB, длина которого равна a, параллелен плоскости α и находится от нее на расстоянии h. Наклонные AM и BN к плоскости α перпендикулярны прямой AB и имеют длины, равные c. Найдите длину проекции наклонной AN на плоскость α.

164. Дана пирамида $DABC$, основание которой правильный треугольник, и все ее боковые ребра равны. Через точку M ребра AD проведено сечение MNK ($N \in DB$, $K \in DC$), параллельное основанию и делящее высоту пирамиды в отношении $2 : 3$, считая от вершины D (рисунок 130). Найдите расстояние между прямыми MN и BC, если $AB = 4{,}5$ дм, $AD = 3$ дм.

165. Через середину M бокового ребра PC правильного тетраэдра $PABC$ проведена прямая, параллельная ребру AP. Найдите расстояние от этой прямой до прямой AB, если ребро тетраэдра равно a.

166. В тетраэдре $DABC$ $AB = CD = 3\sqrt{2}$ см, а каждое из остальных ребер равно 5 см. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

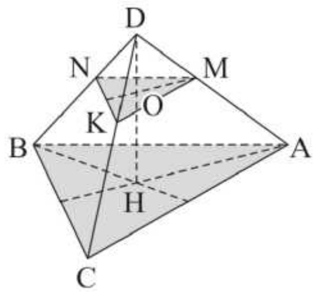


Рисунок 130

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

167. Прямая a, параллельная плоскости α, и точка A расположены по разные стороны от этой плоскости. На прямой a отмечены точки B, C и проведены прямые AB, AC, пересекающие плоскость α в точках M и N соответственно (рисунок 131). Найдите длину отрезка MN, если известно, что расстояние от точки A до прямой a равно m, а до прямой MN равно p и $BC = n$.

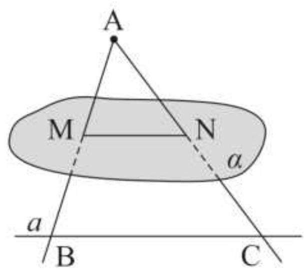


Рисунок 131

168. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AD = 2\sqrt{3}$ см, $DC = 2$ см, диагональ DC_1 наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите угол между прямыми AD_1 и DC_1.

169. На рисунке 132 изображена пирамида $SABCD$, основание которой ромб с углом B, равным 120°. Боковое ребро SB пирамиды перпендикулярно плоскости основания. Докажите, что расстояние от точки B до плоскости SDC равно длине отрезка BF.

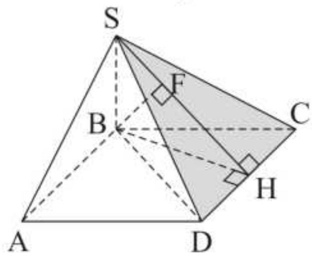


Рисунок 132

170. Дан ромб $ABCD$, в котором $\angle BAD = 60°$, $AB = a$ (рисунок 132). Из вершины B ромба к его плоскости проведен перпендикуляр BS. Известно, что плоскость треугольника SDC образует с плоскостью ромба угол, равный 45°. Найдите: а) расстояния от точки S до сторон ромба; б) углы наклона прямых SA, SD и SC к плоскости ромба.

171. Дана пирамида $PABCD$, основанием которой является квадрат $ABCD$ со стороной, равной $6\sqrt{2}$ см, а ее каждое боковое ребро равно 10 см. Построено сечение $MNKL$ пирамиды плоскостью, параллельной основанию и делящей ее боковые ребра пополам. Найдите расстояние между плоскостями MNK и ABC.

172. Дан правильный тетраэдр $PABC$, ребро которого равно 8 см. Найдите расстояние между прямыми AC и PB.

173. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$ – квадрат со стороной a и боковое ребро равно $a\sqrt{3}$. Найдите угол между плоскостью AB_1C_1D и плоскостью основания.

174. В треугольной пирамиде $CABD$ основание ABD и боковая грань ABC – равнобедренные треугольники с основанием AB. Известно, что $AB = 24$ см, $AC = 13$ см, $AD = 37$ см, $CD = 35$ см. Найдите косинус угла между плоскостями ABD и ABC.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

В XI книге «Начал» Евклида изложены основы стереометрии, в том числе и учение об углах, расстояниях и перпендикулярности в пространстве. Многие понятия в ней являются менее общими, чем в настоящее время. Не было в ней и важнейшей теоремы стереометрии о трех перпендикулярах. Впервые эта теорема и ее доказательство появились в труде «Исфаханский аноним» (XI в.) неизвестного иранского автора. В XIII в. эта теорема и ее доказательство были изложены в «Трактате о полном четырехстороннике» знаменитого иранского ученого Насир ад-Дин ат-Туси

(1201–1274). В Европе доказательство этой теоремы впервые приведено лишь в 1794 году в книге «Элементы геометрии» французского математика Адриена Мари Лежандра (1752–1833).

Понятие двугранного угла берет свое начало в древности из практики строительства различных сооружений и исследования геометрических характеристик разных кристаллов.

Флюорит

Куприт

Используя интернет-ресурсы, узнайте:

1) как понятие перпендикулярности прямой и плоскости определял Евклид;

2) как теорему о трех перпендикулярах доказывал А. Лежандр.

Насир ад-Дин ат-Туси

А. Лежандр

III. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

В результате изучения раздела надо

знать

- понятие прямоугольной системы координат в пространстве;
- формулу расстояния между двумя точками, координаты середины отрезка;
- уравнение сферы;
- понятие координат вектора в пространстве;
- определение коллинеарных и компланарных векторов в пространстве, условие коллинеарности векторов;
- правила сложения, вычитания векторов, умножение вектора на число;
- определение скалярного произведения векторов.

уметь

- изображать прямоугольную систему координат, находить координаты точки;
- находить расстояние между двумя точками, координаты середины отрезка;
- применять уравнение сферы при решении задач;
- находить координаты вектора и длину вектора в пространстве;
- изображать коллинеарные и компланарные векторы;
- выполнять сложение, вычитание векторов, умножение вектора на число;
- применять формулу скалярного произведения векторов при решении задач.

11. Прямоугольная система координат в пространстве

Учебные достижения по изучению темы:

• уметь изображать на плоскости прямоугольную систему координат в пространстве и точки в ней с заданными координатами.

Координаты – это числа, определяющие положение точки. Точка на плоскости определяется двумя координатами, для установления положения точки в пространстве необходимы три числа. Например, положение точки на Земле определяется тремя числами: широтой, долготой и высотой над уровнем моря.

З а д а ч а 1. Провести через произвольную точку пространства три попарно перпендикулярные прямые.

Р е ш е н и е. Возьмем в пространстве произвольную точку O, проведем через нее какую-нибудь плоскость α и прямую a, лежащую в этой плоскости (рисунок 133). Затем проведем в этой плоскости через точку O прямую $b \perp a$. Построим прямую c, проходящую через точку O и $c \perp \alpha$. Так как $c \perp \alpha$, то $c \perp a$ и $c \perp b$. Построенные прямые a, b и c попарно перпендикулярны.

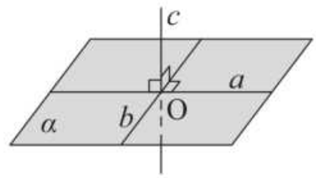


Рисунок 133

Из решения этой задачи следует, что через каждую точку пространства можно провести три, но не более, попарно перпендикулярные прямые.

Определим теперь **прямоугольные координаты** в пространстве. Построим три попарно перпендикулярные и пересекающиеся в точке O прямые Ox, Oy и Oz (рисунок 134). Точку O будем называть *началом координат*, прямые Ox, Oy и Oz – координатными прямыми (или осями координат). *Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат.*

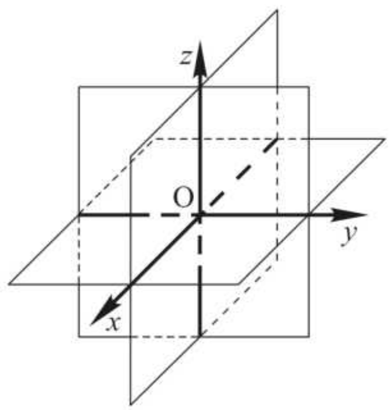


Рисунок 134

Плоскости xOy, xOz и yOz называются *координатными плоскостями*. Точка O разбивает каждую из осей координат на два луча. Один из них (Ox, Oy, Oz) условимся называть положительным, то есть он задает положительное направление, а второй – отрицательным. На каждой из осей координат отложим от начала координат отрезки единичной длины и определим понятие координат точки в пространстве.

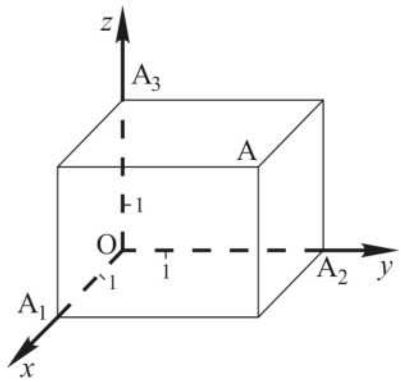


Рисунок 135

Пусть A – произвольная точка пространства. Проведем через эту точку плоскости, перпендикулярные координатным осям (рисунок 135). Обозначим A_1, A_2 и A_3 – точки пересечения этих плоскостей соответственно с осями абсцисс, ординат и аппликат.

Абсциссой точки A называется число:

- $\boldsymbol{x}$, равное расстоянию OA_1, если точка A_1 принадлежит лучу OX;
- $\boldsymbol{-x}$, если эта точка принадлежит лучу, противоположному лучу OX;
- **0**, если эта точка совпадает с началом координат.

Аналогично определяются **ордината** $\boldsymbol{y}$ и **аппликата** $\boldsymbol{z}$ точки A. Точку A с координатами x, y, z обозначают: $A(x; y; z)$. Отметим, что точки A_1, A_2, A_3 являются проекциями точки A на оси координат. Таким образом, *координатами точки в пространстве называются координаты ее проекций на оси координат*.

Чтобы построить точку $A(x; y; z)$, можно сначала найти на осях координат точки, соответствующие числам x, y, z; затем через эти точки провести три плоскости, перпендикулярные осям координат. Точка пересечения этих плоскостей является искомой (рисунок 135).

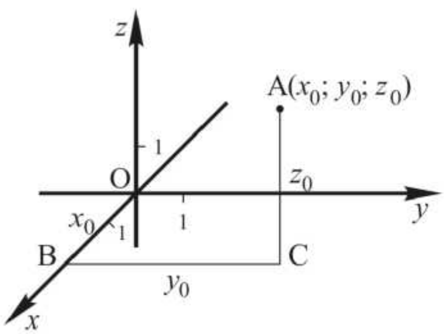


Рисунок 136

Возможен и другой способ построения точки по ее координатам. Пусть надо построить точку $A(x_0; y_0; z_0)$. От начала координат на оси Ox откладываем отрезок, равный $|x_0|$ (на положительной или отрицательной полуоси, учитывая знак числа x_0), получаем точку $B(x_0; 0; 0)$ (рисунок 136). Далее от точки B на прямой, параллельной оси Oy, откладываем отрезок, равный $|y_0|$, получаем точку $C(x_0; y_0; 0)$.

Наконец от точки C на прямой, параллельной оси Oz, откладываем отрезок, равный $|z_0|$, получаем искомую точку. Итак, чтобы построить точку $A(x_0; y_0; z_0)$, достаточно построить трехзвенную ломаную $OBCA$.

Задача 2. Дана точка $M(-2; 3; -4)$. Найти координаты оснований перпендикуляров, проведенных из этой точки: а) к координатным осям; б) к координатным плоскостям.

Решение. Построим точку M и обозначим основания перпендикуляров, проведенных из точки M на оси координат, через M_x, M_y, M_z, а на координатные плоскости – M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} (рисунок 137). Тогда: а) $M_x(-2; 0; 0)$, $M_y(0; 3; 0)$, $M_z(0; 0; -4)$; б) $M_{xy}(-2; 3; 0)$, $M_{yz}(0; 3; -4)$, $M_{xz}(-2; 0; -4)$.

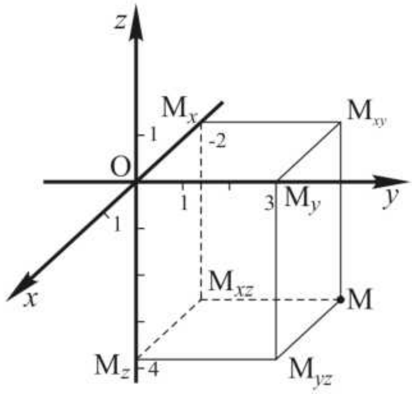


Рисунок 137

Ответ. а) $(-2; 0; 0)$, $(0; 3; 0)$, $(0; 0; -4)$; б) $(-2; 3; 0)$, $(0; 3; -4)$, $(-2; 0; -4)$.

ВОПРОСЫ

1. Что называется координатами точки в пространстве?
2. Как называются и находятся координаты точки в пространстве?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

175. Какие координаты имеет точка, принадлежащая плоскостям: а) xOy и xOz; б) yOz и xOy; в) xOy, xOz и yOz?

176. Даны точки $A(-2; -3; 5)$, $B(0; -2; 7)$, $C(4; 0; -5)$, $D(-1; 9; 0)$, $E(0; 0; 6)$, $K(-8; 0; 0)$, $N(0; 1; 0)$. Какие из этих точек лежат: а) в плоскости xOy; б) на оси Oz; в) в плоскости yOz?

177. Найдите координаты проекций на оси координат точек $A(12; 0; -\sqrt{5})$ и $B\left(\frac{1}{2}; 1; 16\right)$.

178. Дана точка $A(4; -2; -6)$. Каковы координаты точек, ближайших к ней и лежащих: а) на каждой из осей координат; б) в каждой координатной плоскости?

179. Постройте систему координат и отметьте в ней точки $A(-3; 5; 2)$, $B(3; -2; 4)$, $C(2; 6; -1)$, $D(-2; 0; 3)$, $E(0; 3; 0)$.

180. Точка M лежит на биссектрисе угла yOz. Найдите ее координаты, если $OM = 4\sqrt{2}$.

181. Точка M с положительными координатами равноудалена от координатных плоскостей. Найдите ее координаты, если $OM = 5\sqrt{3}$.

182. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проведены оси координат, проходящие через середину: а) ребра AB (рисунок 138, *а*); б) диагонали грани $ABCD$ (рисунок 138, *б*). Найдите координаты вершин куба, если его ребро равно 4.

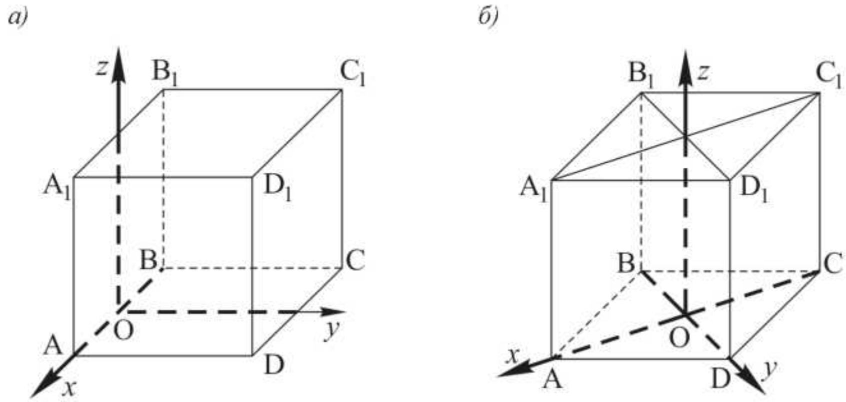


Рисунок 138

183. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найдите координаты его вершин в системе координат с началом в точке B и осями, содержащими три ребра куба.

Уровень B

184. Где расположены точки пространства: а) координаты x и y которых равны; б) произведение координат y и z которых равно 0?

185. Через точку $M(3;\ 4;\ 0)$ проведена прямая a, параллельная оси Oz. 1) Найдите расстояние OM. 2) Укажите на прямой a точку, удаленную от начала координат на расстояние, равное $5\sqrt{2}$. Сколько решений имеет эта задача?

186. Найдите координаты точек, симметричных точке $A(5;\ 0;\ -2)$ относительно: а) начала координат; б) оси аппликат.

187. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, диагональ грани которого равна $\sqrt{2}$ см. Постройте систему координат, выбрав точку D за ее начало, и найдите координаты вершин куба.

188. Точки $A(3; 0; 0)$ и $B(-3; 0; 0)$ являются вершинами правильного тетраэдра $DABC$, основание которого лежит в плоскости xOy (рисунок 139, *а*). Каковы координаты остальных его вершин?

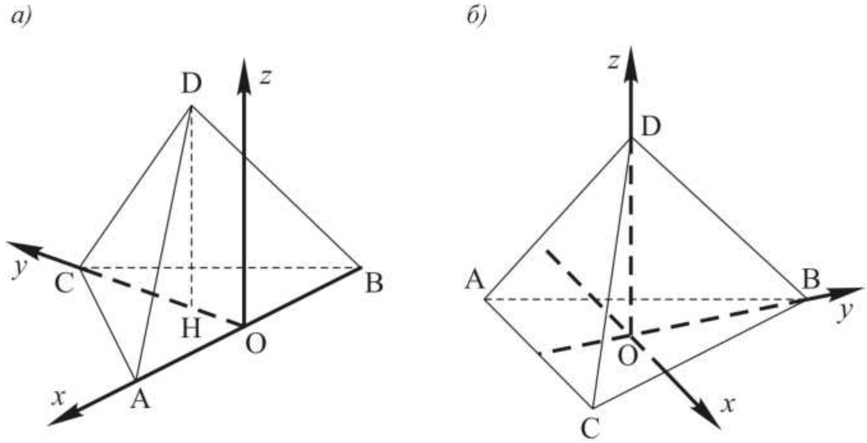


Рисунок 139

189. Дан правильный тетраэдр $DABC$ с ребром, равным $2\sqrt{3}$ дм. Построена система координат $Oxyz$ (рисунок 139, *б*), где O – центр грани ABC, $Ox \parallel AC$, $B \in Oy$, $D \in Oz$. Найдите координаты всех вершин тетраэдра.

12. Расстояние между двумя точками. Координаты середины отрезка. Уравнение сферы

Учебные достижения по изучению темы:

- уметь находить расстояние между двумя точками в пространстве;
- уметь находить координаты середины отрезка в пространстве;
- знать уравнение сферы и применять его при решении задач.

Теорема. **Если в пространстве даны точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то расстояние между ними равно:**

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда отрезок AB не параллелен оси Oz (рисунок 140). Проведем через точки A и B прямые, параллельные Oz. Эти прямые перпендикулярны плоскости xOy и пересекают ее в точках $A_1(x_1, y_1, 0)$ и $B_1(x_2, y_2, 0)$.

В плоскости A_1ABB_1 проведем $AC \parallel A_1B_1$, где $C \in BB_1$. Тогда $\angle ACB = 90°$, а точка C имеет координаты (x_2, y_2, z_1).

По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$.

Так как $AC = A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ и $BC = |z_2 - z_1|$, то $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если $AB \parallel Oz$, то $AB = |z_2 - z_1|$. Такой же результат получим и по формуле (1), так как в этом случае $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$.

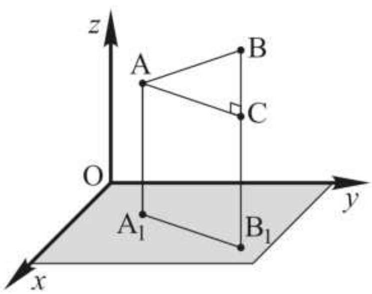


Рисунок 140

Если $z_1 = z_2$, то отрезки AB и A_1B_1 являются противоположными сторонами прямоугольника (или совпадают, когда точки A и B лежат в плоскости xOy). В этом случае $z_1 - z_2 = 0$ и формула (1) выполняется. Таким образом, формула (1) доказана.

Задача 1. Пусть даны две произвольные точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Доказать, что координаты точки $C(x, y, z)$ – середины отрезка AB задаются формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Доказательство. Проведем через точки A, B и C прямые, параллельные оси Oz (рисунок 141). Они пересекут плоскость xOy в точках $A_1(x_1, y_1, 0)$, $B_1(x_2, y_2, 0)$ и $C_1(x, y, 0)$. По теореме Фалеса точка C_1 является серединой отрезка A_1B_1. На плоскости xOy координаты середины отрезка выражаются через координаты его концов по формулам: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Для того чтобы найти выражение для координаты z, достаточно вместо плоскости xOy взять плоскость xOz (или yOz). То есть спроектировать отрезок AB, например, на плоскость xOz параллельно оси Oy. Продолжите рассуждения, используя рисунок 141.

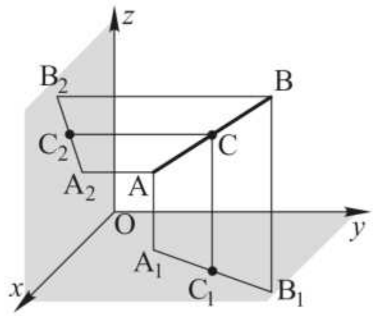


Рисунок 141

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки на одно и то же расстояние. Данную точку называют *центром сферы*, а это расстояние – *радиусом сферы*.

Задача 2. Доказать, что в прямоугольной системе координат $Oxyz$ сфера радиуса R с центром в точке $A(a, b, c)$ задается уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

Доказательство. Расстояние от произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей сфере (рисунок 142), до точки A находится по формуле $MA = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$.

Поскольку $MA = R$, то координаты точки M удовлетворяют указанному уравнению. Если точка M не лежит на данной сфере, то $MA^2 \neq R^2$, то есть координаты точки M не удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, в прямоугольной системе координат **уравнение сферы радиуса R с центром в точке $A(a, b, c)$ имеет вид: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.**

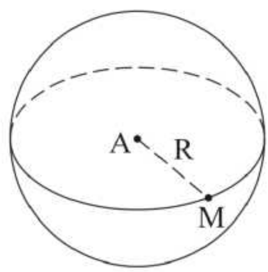


Рисунок 142

Отметим, в частности, что уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат имеет вид: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 30. На его ребре BB_1 отмечена середина – точка K, на ребре AB – точка M так, что

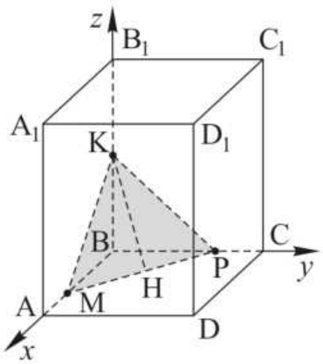


Рисунок 143

$MB = 2AM$, а на ребре BC – точка P так, что $BP = 4PC$. Найти длину медианы KH ΔMKP.

Решение. Введем систему координат, как показано на рисунке 143. Тогда имеем: $K(0, 0, 15)$, $M(20, 0, 0)$, $P(0, 24, 0)$. Точка H – середина отрезка MP, $H(10, 12, 0)$. По формуле расстояния между двумя точками получаем: $KH = \sqrt{(10-0)^2+(12-0)^2+(0-15)^2} = \sqrt{469}$.

Ответ. $\sqrt{469}$.

ВОПРОСЫ

1. По какой формуле можно найти расстояние между двумя точками в пространстве?
2. Чему равны координаты середины отрезка в пространстве, если известны координаты его концов?
3. Запишите уравнение сферы с центром в точке $B(m, n, k)$ и радиусом R.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

190. Найдите расстояние от точки $A(0; 4; 3)$: а) до начала координат; б) до оси аппликат; в) до координатной плоскости xOy.

191. а) Найдите расстояние от точки $M(9; 10; 8)$ до начала координат. б) Найдите координату z точки $A(2; -3; z)$, если ее расстояние от начала координат равно $\sqrt{17}$.

192. Найдите длину отрезка с концами в точках $M(4; 0; -2)$ и $N(6; -4; 2)$.

193. Даны координаты $(2; 3; 4)$ одного конца отрезка и $(0; -4; 5)$ его середины. Найдите координаты другого конца отрезка.

194. Верно ли, что: а) середина отрезка с концами в точках $A\left(100000; 2\frac{1}{3}; \frac{1}{17}\right)$ и $B\left(-100000; \sqrt{5}; -\frac{1}{17}\right)$ принадлежит оси абсцисс; б) середина отрезка с концами в точках $M\left(0{,}0001; \sqrt{2}; 3\frac{11}{50}\right)$ и $N\left(2020; -\sqrt{15}; -3\frac{11}{50}\right)$ принадлежит плоскости xOy?

195. Дан треугольник ABC с вершинами $A(0; 5; -2)$, $B(4; 4; -5)$, $C(-8; 3; 0)$. Найдите расстояние от начала координат до середины его медианы BM.

196. Треугольная пирамида имеет вершины $P(0; -5; 4)$, $A(3; 0; 1)$, $B(-1; 4; 1)$, $C(5; 2; 3)$. Найдите расстояние AO, где O – середина медианы PM треугольника BCP.

197. а) Точки $A(7; 0; 14)$, $B(14; 7; 0)$, $C(7; 14; 0)$ являются тремя последовательными вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты его четвертой вершины D.

б) Дан параллелограмм $OBCD$ с вершинами $O(0; 0; 0)$, $B(1; 2; 0)$, $C(2; 0; 3)$. Найдите длину его диагонали BD.

198. Являются ли точки: а) $A(2; 6; 4)$, $B(0; 4; 8)$, $C(2; 2; 8)$, $D(4; 4; 4)$ вершинами параллелограмма $ABCD$; б) $M(6; 7; 8)$, $N(8; 2; 6)$, $K(4; 3; 2)$, $L(2; 8; 4)$ вершинами ромба $MNKL$?

199. Найдите координаты центра сферы и ее радиус:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; в) $x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 25$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$; г) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 7$.

200. Запишите уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом, равным: а) 6; б) 7; в) $\sqrt{2}$; г) $\sqrt{5}$.

201. Запишите уравнение сферы с радиусом, равным 4, и центром в точке: а) $A(1; 2; 3)$; б) $B(-2; 0; 1)$; в) $C(0; -3; 4)$; г) $D(-10; -0,5; -300)$.

202. Какие из уравнений являются уравнениями сферы:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; в) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (-z + 3)^2 = 1$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$; г) $(x - y)^2 + (x + y)^2 + 2z^2 = 8$?

Уровень В

203. а) Найдите координаты точки M, лежащей на оси Ox и одинаково удаленной от точек $A(1; 2; 3)$ и $B(-3; 3; 2)$. б) В плоскости xOy найдите точку D, равноудаленную от трех данных точек $A(0; 4; -4)$, $B(-4; 0; 4)$, $C(0; -4; 0)$.

204. Докажите, что середина отрезка с концами в точках: а) $M(a; b; c)$ и $N(m; n; -c)$ лежит в плоскости xOy; б) $C(a; -b; c)$ и $D(-a; b; d)$ лежит на оси Oz.

205. Докажите, что треугольник с вершинами $A(7; 1; -5)$, $B(4; -3; -4)$, $C(1; 3; -2)$ – равнобедренный, и найдите длину его меньшей медианы.

206. Постройте в системе координат куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известны координаты его вершин $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $B_1(0; 0; 1)$,

$D(1;\ 1;\ 0)$, и найдите расстояние от точки A до точки пересечения диагоналей грани DD_1C_1C.

207. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребра которого $AB = 4$ м, $BB_1 = 4$ м и $BC = 3$ м. На его ребрах AB и BB_1 отмечены середины – точки M и K соответственно, а на ребре BC – точка P так, что $BP = 2PC$. Найдите длины медиан треугольника MKP.

208. Запишите уравнение сферы:

а) с центром в начале координат и проходящей через точку $M(3;\ 2;\ \sqrt{3})$;

б) с центром в точке $A(-1;\ 0;\ 2)$ и проходящей через точку $B(0;\ \sqrt{6};\ -1)$.

209. Какие из уравнений являются уравнениями сферы:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$;

г) $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 2z$?

210. Найдите координаты центра сферы радиуса 3, проходящей через начало координат и точки $B(0;\ 4;\ 0)$ и $C(4;\ 0;\ 0)$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

211. Из точек $D(1;\ 0;\ -2)$, $F(0;\ 0;\ 5)$, $M(-3;\ 4;\ 0)$, $N(7;\ 0;\ 0)$, $K(-8;\ 0;\ 1)$, $L(0;\ 9;\ 0)$ укажите точки, принадлежащие: а) оси Ox; б) оси Oy; в) плоскости xOz.

212. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 5. Найдите координаты его вершин в системе координат с началом в точке C и осями, содержащими три ребра куба.

213. Найдите неизвестную координату точки $B(-4;\ y;\ 3)$, если расстояние от начала координат до этой точки равно 5.

214. Найдите координаты точки M, если она лежит на оси Oz и равноудалена от точек $A(0;\ -2;\ 3)$ и $B(2;\ 4;\ -5)$.

215. Точки $A(1;\ 3;\ -1)$, $B(-2;\ 1;\ 0)$, $C(-1;\ 0;\ 1)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки D.

216. Основание пирамиды $DABC$ – прямоугольный треугольник, в котором $\angle C = 90°$, $AC = BC = 4$ см. Боковое ребро $DC = 4$ см перпендикулярно плоскости основания. Используя систему координат, найдите длину медианы DM треугольника ADB.

217. Запишите уравнение сферы с центром в точке $C(2;\ -1;\ 0)$ и радиусом, равным 3.

218. Найдите координаты точек пересечения сферы с центром в начале координат и радиусом, равным 2, с координатными осями.

13. Координаты вектора в пространстве. Сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число

Учебные достижения по изучению темы:

- уметь находить координаты и длину вектора в пространстве;
- знать правила и уметь выполнять сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число.

Как и в курсе геометрии 9 класса, отрезок AB в пространстве, для которого конец A считается первым, а конец B – вторым, называется направленным отрезком или *вектором*. Точка A называется началом вектора, а точка B – его концом. *Длиной вектора* $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB, обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Если начало вектора совпадает с его концом, то такой вектор называется *нулевым*, обозначается $\vec{0}$ или $\overrightarrow{AA}$. Его длина считается равной 0. Два вектора называются *равными*, если они имеют равные длины и одинаково направлены.

В пространстве от любой точки можно отложить только один вектор, равный данному вектору.

Действительно, пусть $\vec{a}$ – данный вектор, M – произвольная точка пространства. Проведем через прямую, содержащую вектор $\vec{a}$, и точку M плоскость (рисунок 144). Эта плоскость единственная (объясните почему). В этой плоскости от точки M можно отложить только один вектор, равный вектору $\vec{a}$: $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$.

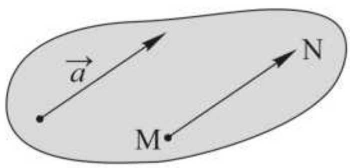


Рисунок 144

Все основные свойства векторов и правила действий над ними, изученные в курсе геометрии 9 класса, выполняются и для векторов в пространстве.

Если вектор $\vec{a}$ построен в системе координат и его начало – точка $A(x_1; y_1; z_1)$, а конец – точка $B(x_2; y_2; z_2)$, то числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ называют **координатами вектора** $\vec{a}$. Обозначают: $\vec{a}\,(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ или $\overrightarrow{AB}\,(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Нулевой вектор имеет координаты (0; 0; 0). Если вектор $\vec{a}$ отложен от начала координат и $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, то его координаты равны координатам точки M.

Отметим, *что равные векторы имеют равные одноименные координаты* и обратно, *если одноименные координаты векторов равны, то и векторы равны.*

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна длине отрезка AB, то есть

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Если $\overrightarrow{AB}(a; b; c)$, то $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Для сложения любых трех векторов, не лежащих в одной плоскости, используется *правило параллелепипеда*. Суть его в следующем. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – указанные векторы. Построим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. Тогда диагональ AC_1 изображает сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рисунок 145).

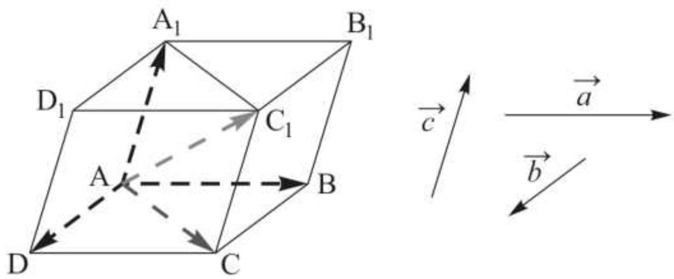


Рисунок 145

Действительно, четырехугольники $ABCD$ и AA_1C_1C – параллелограммы. Дважды применив правило параллелограмма сложения двух векторов, имеем:

$$\overrightarrow{AC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AA_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

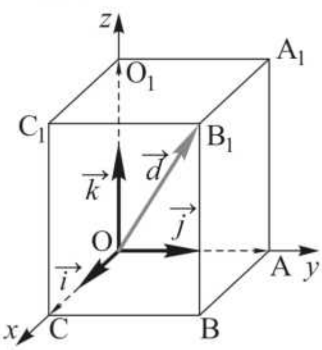


Рисунок 146

Если в системе координат от ее начала на лучах Ox, Oy и Oz отложены векторы, длины которых равны 1, то их называют *координатными* векторами и обозначают $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ (рисунок 146). Любой вектор $\vec{d}\,(x, y, z)$ можно представить в виде $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – координатные векторы.

Действительно, построим в системе координат вектор $\overrightarrow{OB_1} = \vec{d}$ и прямоугольный параллелепипед $ABCOA_1B_1C_1O_1$ (рисунок 146). По правилу параллелепипеда сложения векторов $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OO_1}$. Так как $\overrightarrow{OC} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OO_1} = z\vec{k}$, то $\overrightarrow{OB_1} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Отметим, что такое представление вектора $\vec{d}\,(x, y, z)$ – единственное.

Верно и обратное: если $\vec{b} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$, то **$(m, n, p)$ – координаты вектора $\vec{b}$.**

Используя координаты векторов, можно находить координаты векторов, равных их сумме, разности и произведению вектора на число, по следующим правилам:
- *каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов;*
- *каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов;*
- *каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующих координат вектора на это число.*

Задача 1. Даны отрезок AB, точка M – его середина, O – произвольная точка пространства. Доказать, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Доказательство. Отложим на луче OM отрезок $MK = OM$ (рисунок 147). Тогда четырехугольник $OAKB$ – параллелограмм. По правилу параллелограмма сложения векторов $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Тогда $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, что и требовалось доказать.

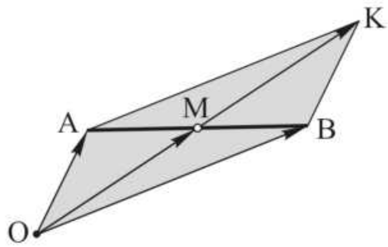


Рисунок 147

Задача 2. Даны куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M – середина его ребра B_1C_1, равного 16 см (рисунок 148). Найти длину вектора, равного $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1M}$.

Решение. По правилу треугольника сложения векторов $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{AM}$. Длина вектора $\overrightarrow{AM}$ равна длине отрезка AM. ΔAB_1M прямоугольный, так как $C_1B_1 \perp (AA_1B_1)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, следовательно, $C_1B_1 \perp AB_1$. По теореме Пифагора $AM = \sqrt{AB_1^2 + B_1M^2} = \sqrt{(16\sqrt{2})^2 + 8^2} = 24$ (см).

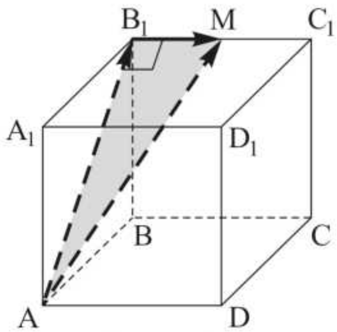


Рисунок 148

Ответ. 24 см.

Задача 3. Найти координаты конца вектора $\overrightarrow{AB}(2; -4; 3)$, если известны координаты $(1; 2; -5)$ его начала.

Решение. По условию $A(1; 2; -5)$ обозначим $B(x; y; z)$. По определению координат вектора имеем: $x - 1 = 2$, $y - 2 = -4$, $z + 5 = 3$. Из этих равенств получаем: $x = 3$, $y = -2$, $z = -2$.

Ответ. $B(3; -2; -2)$.

Задача 4. Найти все значения m, при которых длины векторов $\vec{a}(2; m; m)$ и $\vec{b}(1; m\sqrt{2}; m)$ равны.

Решение. $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + m^2 + m^2} = \sqrt{4 + 2m^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (m\sqrt{2})^2 + m^2} = \sqrt{1 + 3m^2}$. Так как $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, то $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$. Составим и решим уравнение: $4 + 2m^2 = 1 + 3m^2$, $m^2 = 3$, $m = \pm\sqrt{3}$.

Ответ. $\pm\sqrt{3}$.

Задача 5. Даны векторы $\vec{a}(-2; 3; 1)$ и $\vec{b}(4; 0; -5)$. Найти с точностью до 0,1 длину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Решение. Имеем $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 5\vec{k}$. Тогда $\vec{c} = 2(-2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) - 3(4\vec{i} - 5\vec{k}) = -16\vec{i} + 6\vec{j} + 17\vec{k}$, то есть $\vec{c}(-16; 6; 17)$; $|\vec{c}| = \sqrt{(-16)^2 + 6^2 + 17^2} = \sqrt{581} \approx 24{,}1$.

Ответ. $\approx 24{,}1$.

ВОПРОСЫ

1. Что называется координатами вектора в пространстве?
2. По какой формуле можно найти длину вектора в пространстве, если известны его координаты?
3. Как можно найти координаты суммы, разности векторов и произведения вектора на число?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

219. Известно, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$. Можно ли утверждать, что $\vec{a} = \vec{b}$?

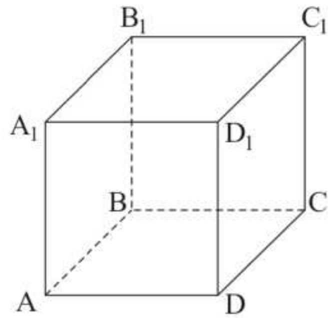


Рисунок 149

220. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок 149). Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{D_1C}$; б) $\overrightarrow{A_1D_1}$ и $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{BD_1}$; г) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{DC_1}$?

221. Используя рисунок 149, укажите вектор, равный: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DC}$.

222. Даны параллелограмм $ABCD$ и произвольная точка X пространства. Докажите, что $\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XD} - \overrightarrow{XC}$.

223. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки M и N так, что $AM = MN = NC$ (рисунок 150). Докажите равенство векторов: а) $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{MC}$; б) $\overrightarrow{MD}$ и $\overrightarrow{BN}$.

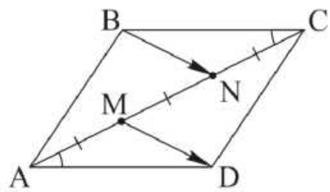


Рисунок 150

224. Даны точки $A(0;\ 10;\ -14)$, $B(7;\ -8;\ 0)$. Найдите координаты вектора: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{BB}$.

225. Найдите координаты начала вектора $\overrightarrow{CD}(2;\ 4;\ -3)$, если точка D имеет координаты: а) $(2;\ 15;\ -18)$; б) $(0{,}5;\ -1{,}25;\ 4)$.

226. Даны точки $A(0;\ 1;\ 1)$, $B(1;\ -3;\ -2)$, $C(-2;\ 0;\ 2)$ и $D(-3;\ 4;\ 5)$. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$?

227. Найдите неизвестные координаты точек $M(x;\ 2;\ -8)$, $N(-4;\ y;\ 0)$, $K(3;\ -2;\ z)$, $P(0;\ 5;\ 0)$, если равны векторы: а) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{NK}$; б) $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{NK}$.

Долина шаров в урочище Торыш

228. Четыре шара в Дол полуострове Мангы жены в вершинах па $ABCD$. Существует стве точка O такая, ч $+ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$?

229. Разложите вектор ным векторам:
а) $\vec{a}(7; 3; -6)$; в)
б) $\vec{b}(0; -1; 4)$; г)

230. Чему равны координаты вектора:
а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$; в) $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$;
б) $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$; г) $\vec{d} = -\vec{i} - 0{,}3\vec{j} + 2\vec{k}$?

231. Найдите длину вектора: а) $\vec{b}(-5; 4; 3)$; б) $\vec{c}(\sqrt{2}; \sqrt{3}; 2)$.

232. Найдите неизвестную координату вектора $\vec{a}(4; -3; z)$, равна: а) 13; б) 10.

233. Даны векторы $\vec{a}(3; -1; 2)$ и $\vec{b}(0; 4; -5)$. Найдите коор ра $\vec{c}$, если:
а) $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$; в) $\vec{c} = \vec{a} - 4\vec{b}$; г) $\vec{c} = -$

234. Даны векторы $\vec{a}(1; -2; 0)$ и $\vec{b}(2; 2; -4)$. Найдите длину ве
а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; в) $2\vec{a} + \vec{b}$; г) $-2\vec{b} - 4\vec{a}$.

235. Даны векторы $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\overrightarrow{AC} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ну вектора, равного:
а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; в) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$; г) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}$

Уровень B

236. В тетраэдре $OABC$ точки M и N – середины ребер OB ственно. Верно ли, что:

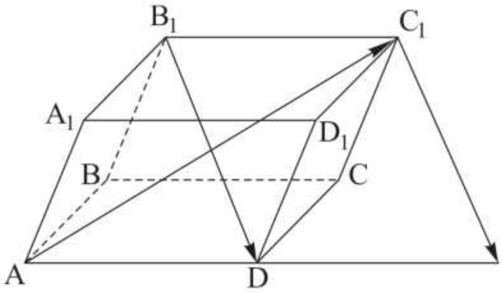


Рисунок 151

238. Постройте в системе координат вектор:
а) $\overrightarrow{OA}(2; -3; 4)$; б) $\overrightarrow{OB}(-4; 4; -4)$.

239. Даны векторы $\vec{a}(-2; 4{,}5; 1)$ и $\vec{b}(4; 0; -5)$. Найдите длину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ с точностью: а) до 0,1; б) до 0,01.

240. Длины векторов $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ и $\overrightarrow{AC} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ равны сторонам треугольника ABC. Найдите длину медианы AM этого треугольника.

241. Прямоугольный параллелепипед $OABCO_1A_1B_1C_1$ расположен в системе координат, как показано на рисунке 152. Известно, что $OA = 2$, $OB = 3$, $OO_1 = 4$. Найдите координаты и длину вектора: а) $\overrightarrow{MC_1}$, где M – середина AO; б) $\overrightarrow{O_1N}$, где N – центр грани $OABC$.

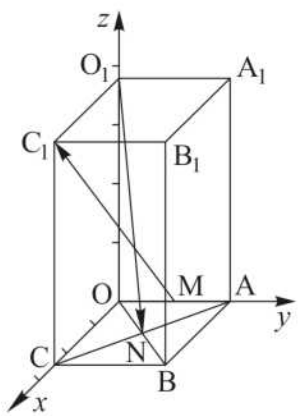


Рисунок 152

14. Коллинеарность и компланарность векторов

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определения коллинеарных и компланарных векторов в пространстве, условие коллинеарности векторов.

Два ненулевых вектора в пространстве называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Все коллинеарные векторы, отложенные от одной точки, лежат на одной прямой. Слово «коллинеарные» происходит от латинских *cum* – с (вместе) и *linea* – линия (прямая), то есть лежащие на прямой.

В пространстве, как и на плоскости, вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$ лишь тогда, когда существует такое число k, что $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$. Из этого условия следует, что у *коллинеарных векторов одноименные координаты пропорциональны*.

Три ненулевых вектора в пространстве называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Все компланарные векторы, отложенные от одной точки, лежат в одной плоскости. Любые два вектора компланарны. Слово «компланарные» происходит от латинских *cum* и *planum* – плоскость, то есть лежащие в одной плоскости.

Из курса планиметрии известно, что любой ненулевой вектор $\vec{c}$ можно единственным образом разложить по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – некоторые числа. Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ указанным образом, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

З а д а ч а 1. Найти значения z и x, при которых векторы $\vec{a}(3; -2; z)$ и $\vec{b}(x; 4; 2)$ коллинеарны.

Р е ш е н и е. Векторы коллинеарны, если их одноименные координаты пропорциональны. Следовательно, $\frac{3}{x} = \frac{-2}{4}$, $x = -6$; $\frac{z}{2} = \frac{-2}{4}$, откуда $z = -1$.

О т в е т. $x = -6$, $z = -1$.

З а д а ч а 2. Найти координаты вектора $\vec{b}$, длина которого равна 3, коллинеарного вектору $\vec{a}(1; 1; -0,5)$.

Р е ш е н и е. По условию коллинеарности двух векторов $\vec{b} = k\vec{a}$, где k – некоторое число, при этом $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$. Длина вектора $\vec{a}$ равна: $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-0,5)^2} = 1,5$. Тогда имеем $3 = 1,5|k|$, откуда $|k| = 2$, $k = 2$ или $k = -2$. Найдем координаты вектора $\vec{b}$: (2; 2; −1) или (−2; −2; 1).

О т в е т. (2; 2; −1) или (−2; −2; 1).

З а д а ч а 3. Доказать, что векторы $\vec{c}(6; 5; 5)$, $\vec{a}(3; 2; 1)$, $\vec{b}(0; 1; 3)$ компланарны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эти векторы лежат в одной плоскости, так как вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так: $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$. Следовательно, векторы $\vec{c}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны.

ВОПРОСЫ

1. Какие векторы называются: а) коллинеарными; б) компланарными?
2. Сформулируйте условие коллинеарности двух векторов.
3. Сколько плоскостей можно провести: а) через два коллинеарных вектора; б) через три компланарных вектора?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

242. На рисунке 153 изображен тетраэдр $DABC$, точки M, N, K, L – середины его ребер AB, AC, DA и DC соответственно. Укажите: а) пары коллинеарных векторов; б) три компланарных вектора.

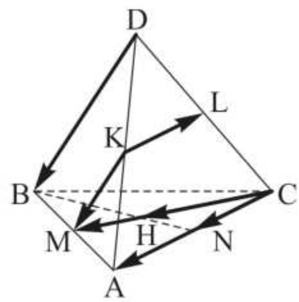


Рисунок 153

243. Верно ли, что если векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарны, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: а) коллинеарны; б) компланарны?

244. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}(2; 3; -1)$, $\vec{b}(-4; -6; 2)$ и $\vec{c}(-2; -3; 1)$?

245. Какие из векторов коллинеарны вектору $\vec{j}(0; 1; 0)$:
а) $\vec{b}(3; 0; 0)$; б) $\vec{c}(0; -1; 0)$; в) $\vec{d}(0; 15; 0)$; г) $\vec{a}(5; 0; 6)$?

246. Сколько существует векторов $\vec{a}$, коллинеарных вектору $\vec{b}(1; -2; 0)$? Назовите координаты вектора $\vec{a}$.

247. При каком значении x параллельны векторы:
а) $\vec{a}(2; 3; -4)$ и $\vec{b}(x; -6; 8)$; б) $\vec{c}(x; -6; 5)$ и $\vec{d}(2; -3; 4)$?

248. При каких значениях m и n коллинеарны векторы:
а) $\vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + m\vec{k}$ и $\vec{d} = n\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$;
б) $\vec{a} = 5\vec{i} - 4m\vec{k}$ и $\vec{b} = n\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$?

249. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какие три из указанных векторов компланарны:
а) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$; б) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$; в) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB_1}$, $\overrightarrow{B_1B}$?

250. Какой из векторов компланарен с векторами $\vec{i}$ и $\vec{k}$:
а) $\vec{a}\,(0;\ 0;\ -2)$; б) $\vec{b}\,(0;\ -4;\ 5)$; в) $\vec{c}\,(-3;\ 1;\ 0)$; г) $\vec{d}\,(16;\ 0;\ 16)$?

Уровень В

251. В тетраэдре $PABC$ медианы грани PAB пересекаются в точке M, а медианы грани PAC – в точке N. Объясните, почему векторы: а) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны; б) $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ компланарны.

252. Даны параллелограммы $ABCD$ и $ABMK$, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что векторы $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{DK}$ компланарны.

253. Найдите координаты конца вектора $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(1;\ 1;\ 1)$, коллинеарного вектору: а) $\vec{c}\,(3;\ 4;\ 5)$; б) $\vec{d}\,(0;\ -2;\ 4)$.

254. Найдите координаты вектора единичной длины, коллинеарного вектору $\vec{a}\,(-2;\ 6;\ 3)$ и: а) одинаково направленного с ним; б) противоположно направленного ему.

255. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, коллинеарного вектору $\vec{b}\,(6;\ -8;\ 7{,}5)$, если: а) $|\vec{a}| = 5$; б) $|\vec{a}| = 50$.

15. Скалярное произведение двух векторов

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определение и формулу скалярного произведения векторов в координатной форме и применять их при решении задач.

В пространстве, как и на плоскости, *углом между ненулевыми векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом. Обозначается: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Например, на рисунке 154 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \angle ACB$.

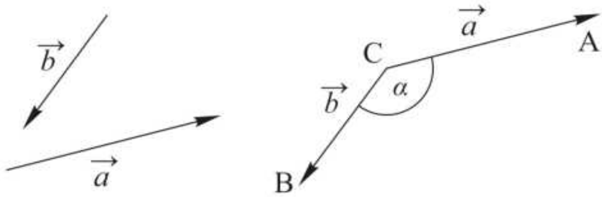


Рисунок 154

Угол между одинаково направленными векторами принимается равным 0°, а между противоположно направленными – 180°.

Как и в планиметрии, в стереометрии *скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Т е о р е м а. **Скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ выражается формулой**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарные векторы, отложенные от начала координат. Обозначим $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ (рисунок предложите самостоятельно). По теореме косинусов $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \times$ $\times \cos\angle AOB$. Выразим из этого равенства произведение $OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB$, равное $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Получим:

$$OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2).$$

Так как $OA^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, $OB^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 +$ $+ (z_2 - z_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Эта формула верна и для коллинеарных векторов.

Из определения скалярного произведения двух векторов следует условие их перпендикулярности: *два вектора перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.*

Из определения скалярного произведения и рассмотренной теоремы следует формула для нахождения косинуса угла между двумя векторами, заданными своими координатами:

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

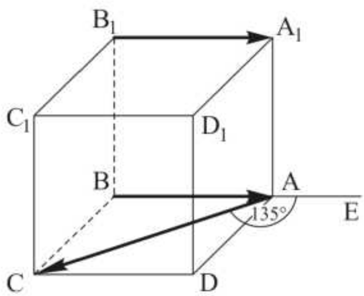


Рисунок 155

З а д а ч а 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 2. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_1A_1}$.

Р е ш е н и е. Так как $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{BA}$, то $\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B_1A_1}) = \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \angle CAE = 135°$ (рисунок 155). Тогда $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B_1A_1} = |\overrightarrow{AC}| \times$ $\times |\overrightarrow{B_1A_1}| \cdot \cos 135° = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4.$

О т в е т. -4.

З а д а ч а 2. Найти угол между векторами $\vec{a}(2; 2; -1)$ и $\vec{b}(-3; -2; 2)$ с точностью до 1°.

Р е ш е н и е. По формуле косинуса угла между векторами имеем:

$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\cdot(-3) + 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 2}{\sqrt{4+4+1} \cdot \sqrt{9+4+4}} = -\frac{12}{3\sqrt{17}} = -\frac{4\sqrt{17}}{17} \approx -0{,}970.$ Используя таблицы значений тригонометрических функций углов и формулу приведения, находим $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 166°$.

О т в е т. $\approx 166°$.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение скалярного произведения двух векторов.
2. По какой формуле можно найти скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами?
3. Сформулируйте условие перпендикулярности двух векторов, заданных своими координатами.
4. По какой формуле можно найти косинус угла между двумя векторами, заданными своими координатами?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

256. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1 (рисунок 156). Найдите косинус угла между векторами:
а) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB_1}$; в) $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{BD}$;
б) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB_1}$; г) $\overrightarrow{B_1D}$ и $\overrightarrow{B_1B}$.

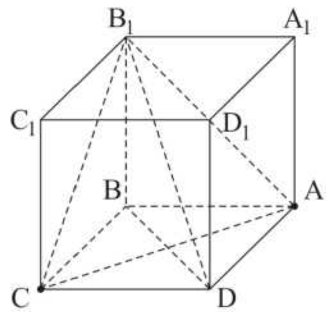


Рисунок 156

257. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1 (рисунок 156). Найдите скалярное произведение векторов:
а) $\overrightarrow{B_1A_1}$ и $\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$;
б) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{DC_1}$; г) $\overrightarrow{DB_1}$ и $\overrightarrow{AB}$.

258. Дан правильный тетраэдр $DABC$, ребро которого равно 4. Точки M, N, K, L – середины его ребер AD, BD, BC, AC соответственно (рисунок 157). Найдите скалярное произведение векторов:
а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$; в) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{LK}$;
б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AN}$; г) $\overrightarrow{ML}$ и $\overrightarrow{KN}$.

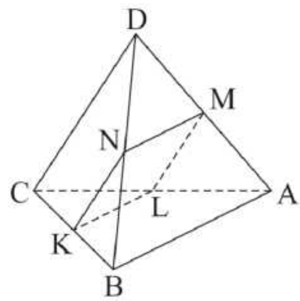


Рисунок 157

259. Найдите скалярное произведение векторов:
а) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$;
б) $\vec{c} = 13\vec{i} + \vec{k}$ и $\vec{d} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

260. При каком значении z перпендикулярны векторы:
а) $\vec{a}(6; 0; 12)$ и $\vec{b}(-8; 13; z)$; б) $\vec{c}(0; -1; z)$ и $\vec{d}(20; 50; 2z)$?

261. Даны точки $A(0; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(-2; 0; 1)$ и $D(-3; 4; 5)$. Найдите:
а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

262. Даны векторы $\vec{a}(1; 5; 1)$, $\vec{b}(1; -5; 2)$ и $\vec{c}(2; 1; 1{,}5)$. Найдите:
а) $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$; б) $\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c}$.

263. Найдите косинус угла между векторами:
а) $\vec{c}(-1; 2; -2)$ и $\vec{b}(6; 3; -6)$; б) $\vec{a}(0; -3; 4)$ и $\vec{d}(16; 0; 12)$.

264. Найдите косинус угла между вектором $\vec{a}(1; 1; 1)$ и координатным вектором: а) $\vec{i}$; б) $\vec{j}$; в) $\vec{k}$.

265. Дан треугольник с вершинами $A(1; 3; 0)$, $B(1; 0; 4)$, $C(-2; 1; 6)$. Найдите косинус внешнего угла этого треугольника при вершине A.

Уровень В

266. Дан прямоугольный ΔABC ($\angle C = 90°$), в котором $\angle ABC = 60°$, $BC = 4$ см. Отрезок DA – перпендикуляр к плоскости этого треугольника, $\angle DBA = 45°$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$ с точностью до $1°$.

267. Даны векторы $\vec{a}(4; -1; 0)$ и $\vec{b}(2; 3; -1)$. При каком значении m вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + m\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$?

268. При каком значении m угол между векторами $\vec{a}(0; m; -2)$ и $\vec{b}(-1; 0; -1)$ равен: а) $60°$; б) $120°$?

269. Дан треугольник с вершинами $A(3; -5; 1)$, $B(-4; -1; -2)$, $C(-3; 3; 1)$. Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BK}$, где точка K – середина стороны AC.

270. Найдите площадь треугольника, длины двух сторон которого равны длинам векторов $\vec{a}(3; 4; 5)$ и $\vec{b}(-5; -4; 3)$, если угол между этими сторонами равен $150°$.

271. Два самолета вылетели из Нур-Султана, один – в Алматы, другой – в Москву. Найдите с точностью до $1°$ угол между векторами, изображающими перемещение самолетов, если расстояние между аэропортами Нур-Султана и Алматы равно 973 км, Нур-Султана и Москвы – 2273 км, Алматы и Москвы – 3105 км.

Международный аэропорт
Нурсултан Назарбаев

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

272. Даны векторы $\vec{a}(2; -1; 4)$ и $\vec{b}(3; 0; -2)$. Найдите координаты вектора: а) $5\vec{a}$; б) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

273. Запишите разложение вектора $\vec{c}(17; 4; -5)$ по координатным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

274. Найдите неизвестную координату вектора $\vec{b}(4; -12; z)$, длина которого равна 13.

275. При каких значениях m и n векторы $\vec{c}(-1; 4; -2)$ и $\vec{d}(-3; m; n)$: а) коллинеарны; б) компланарны?

276. При каком значении n векторы $\vec{a}(n; -2; 1)$ и $\vec{b}(n; 1; -n)$ перпендикулярны?

277. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 4. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Прямоугольные координаты называют еще декартовыми по имени французского математика Рене Декарта (1596–1650), который впервые ввел их на плоскости. Заметим, что географическими координатами (долготой и широтой) для определения положения мест на Земле пользовались еще в I веке нашей эры.

А. Клеро

К. Вессель

Координаты в пространстве первым стал использовать в XVIII в. швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667–1748). Учение о координатах в пространстве, которое стало впоследствии называться аналитической геометрией, впервые было изложено в трудах французского математика Алекси Клода Клеро (1713–1765).

Исторически учение о векторах развивалось тремя путями: физически, геометрически и алгебраически. Например, сложение скоростей по правилу параллелограмма описывалось в труде «Механические проблемы», созданном учениками школы древнегреческого ученого Аристотеля (384–322 г. до н.э.). Геометрическое направление, как в планиметрии, так и в стереометрии впервые полно представлено в 1799 году в книге «Опыт об аналитическом представлении направления и его применениях» норвежского ученого Каспара Весселя (1745–1818). Термин «вектор» ввел ирландский математик Уильям Роуэн Гамильтон (1805–1865).

Используя интернет-ресурсы, узнайте:

1) как координаты в пространстве определял И. Бернулли;

2) как находил сумму векторов К. Вессель;

3) географические координаты (долготу и широту) того населенного пункта, где вы живете.

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 10 КЛАССА

Уровень А

278. Верно ли, что: а) если прямые AB и CD не лежат в одной плоскости, то и прямые AC и BD не лежат в одной плоскости; б) все прямые, проходящие через данную точку пространства и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости; в) все прямые, параллельные одной из двух пересекающихся прямых и пересекающие другую прямую, лежат в одной плоскости?

279. В каком случае через данную точку пространства можно провести плоскость, параллельную каждой из двух пересекающихся прямых?

280. Можно ли в пространстве через любую точку на прямой провести 2020 прямых, ей перпендикулярных?

281. В туристический поход по горам Улытау учащиеся взяли с собой угломер и мерную рулетку. Во время привала Бексултан решил узнать высоту дерева, растущего на краю обрыва. Для этого он отметил точку M так, что $\angle AMC = 45°$, затем – такую точку N, что $\angle BNC = 45°$, и сделал вывод, что высота дерева AB равна длине отрезка MN (рисунок 158). На чем основан вывод Бексултана?

Горы Улытау, Карагандинская область

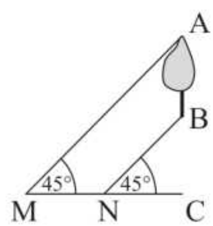


Рисунок 158

282. Объясните, почему концы отрезка находятся на одинаковом расстоянии от плоскости, проходящей через его середину.

283. Из точки A к плоскости проведены перпендикуляр AH и две равные наклонные AB и AC. Известно, что $AH = 4$ см, $\angle BAH = 60°$, $\angle BAC = 90°$. Найдите BC.

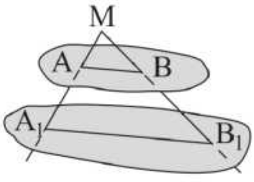


Рисунок 159

284. Даны две параллельные плоскости. Из точки M проведены два луча, пересекающие эти плоскости в точках A и A_1, B и B_1 соответственно (рисунок 159). Известно, что $MA = 4$ см, $BB_1 = 9$ см, $AA_1 = MB$. Найдите MA_1 и MB_1.

285. Дан прямоугольник $ABCD$, в котором $CD = 8$ см, OC – перпендикуляр к плоскости этого прямоугольника, равный 6 см. Найдите расстояние от точки O до прямой AD.

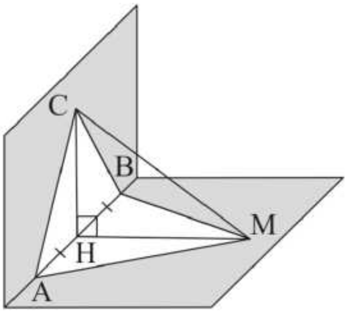


Рисунок 160

286. Два правильных треугольника ABC и ABM расположены в перпендикулярных плоскостях (рисунок 160). Найдите расстояние CM, если $AB = 14$ см.

287. Постройте в системе координат точки $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(0;\ 1;\ 1)$ и $C(1;\ 0;\ 1)$. Лежат ли они в одной плоскости?

288. Верно ли, что треугольник с вершинами $A(3;\ -2;\ 1)$, $B(-2;\ 1;\ 3)$, $C(1;\ 3;\ -2)$ – равносторонний?

289. При каком значении m векторы $\vec{a}(m;\ 4;\ 4)$ и $\vec{b}(m;\ 1;\ m)$ перпендикулярны? Являются ли эти векторы: а) коллинеарными; б) компланарными?

290. Даны векторы $\vec{c}(0;\ -4;\ 3)$ и $\vec{d}(0{,}5;\ -0{,}5;\ 1)$. Найдите длину вектора, равного: а) $\vec{c} + 2\vec{d}$; б) $4\vec{d} - \vec{c}$.

Уровень B

291. На сколько частей делят пространство 3 плоскости, проходящие через одну точку так, что никакие три из них не проходят через одну прямую?

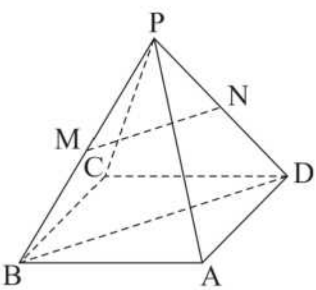


Рисунок 161

292. Дана пирамида $PABCD$, основание $ABCD$ которой квадрат со стороной 10 см, а боковые ребра по 13 см, точки M и N – середины ее ребер PB и PD соответственно (рисунок 161). Установите взаимное расположение прямых и найдите угол между ними: а) MN и BC; б) DN и BC. Ответ обоснуйте.

293. Дан правильный треугольник ABC, медианы которого пересекаются в точке O. Отрезок DO перпендикулярен к плоскости этого треугольника. Найдите косинус угла между плоскостями ABC и ABD, если известно, что $AB = BD$.

294. Двугранный угол между плоскостями α и β – прямой. В плоскости α из точки A проведен перпендикуляр AD к ребру этого угла, равный 5 см. В плоскости β к этому ребру проведен перпендикуляр BK, равный 4 см. Найдите AB, если $DK = 3$ см.

295. Верно ли, что треугольник с вершинами $A(1;\ 4;\ 2)$, $B(2;\ -1;\ 5)$, $C(0;\ -2;\ 4)$ – прямоугольный?

296. Дан треугольник с вершинами $A(-4;\ 0;\ 2)$, $B(6;\ 5;\ -2)$, $C(-2;\ 5;\ 4)$. Найдите координаты точки пересечения его медиан.

ТАБЛИЦА ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ УГЛОВ ОТ 0° ДО 90°

A	sin *A*	*B*	*A*	sin *A*	*B*	*A*	sin *A*	*B*
0°	0,000	90°	30°	0,500	60°	60°	0,866	30°
1°	0,017	89°	31°	0,515	59°	61°	0,875	29°
2°	0,035	88°	32°	0,530	58°	62°	0,883	28°
3°	0,052	87°	33°	0,545	57°	63°	0,891	27°
4°	0,070	86°	34°	0,559	56°	64°	0,899	26°
5°	0,087	85°	35°	0,574	55°	65°	0,906	25°
6°	0,105	84°	36°	0,588	54°	66°	0,914	24°
7°	0,122	83°	37°	0,602	53°	67°	0,921	23°
8°	0,139	82°	38°	0,616	52°	68°	0,927	22°
9°	0,156	81°	39°	0,629	51°	69°	0,934	21°
10°	0,174	80°	40°	0,643	50°	70°	0,940	20°
11°	0,191	79°	41°	0,656	49°	71°	0,946	19°
12°	0,208	78°	42°	0,669	48°	72°	0,951	18°
13°	0,225	77°	43°	0,682	47°	73°	0,956	17°
14°	0,242	76°	44°	0,695	46°	74°	0,961	16°
15°	0,259	75°	45°	0,707	45°	75°	0,966	15°
16°	0,276	74°	46°	0,719	44°	76°	0,970	14°
17°	0,292	73°	47°	0,731	43°	77°	0,974	13°
18°	0,309	72°	48°	0,743	42°	78°	0,978	12°
19°	0,326	71°	49°	0,755	41°	79°	0,982	11°
20°	0,342	70°	50°	0,766	40°	80°	0,985	10°
21°	0,358	69°	51°	0,777	39°	81°	0,988	9°
22°	0,375	68°	52°	0,788	38°	82°	0,990	8°
23°	0,391	67°	53°	0,799	37°	83°	0,993	7°
24°	0,407	66°	54°	0,809	36°	84°	0,995	6°
25°	0,423	65°	55°	0,819	35°	85°	0,996	5°
26°	0,438	64°	56°	0,829	34°	86°	0,998	4°
27°	0,454	63°	57°	0,839	33°	87°	0,999	3°
28°	0,469	62°	58°	0,848	32°	88°	0,999	2°
29°	0,485	61°	59°	0,857	31°	89°	1,000	1°
30°	0,500	60°	60°	0,866	30°	90°	1,000	0°
A	cos *B*	*B*	*A*	cos *B*	*B*	*A*	cos *B*	*B*

ТАБЛИЦА ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТАНГЕНСОВ УГЛОВ ОТ 0° ДО 89°

A	tg A	A	tg A	A	tg A
0°	0,000	30°	0,577	60°	1,73
1°	0,017	31°	0,601	61°	1,80
2°	0,035	32°	0,625	62°	1,88
3°	0,052	33°	0,649	63°	1,96
4°	0,070	34°	0,675	64°	2,05
5°	0,087	35°	0,700	65°	2,14
6°	0,105	36°	0,727	66°	2,25
7°	0,123	37°	0,754	67°	2,36
8°	0,141	38°	0,781	68°	2,48
9°	0,158	39°	0,810	69°	2,60
10°	0,176	40°	0,839	70°	2,75
11°	0,194	41°	0,869	71°	2,90
12°	0,213	42°	0,900	72°	3,08
13°	0,231	43°	0,933	73°	3,27
14°	0,249	44°	0,966	74°	3,49
15°	0,268	45°	1,000	75°	3,73
16°	0,287	46°	1,04	76°	4,01
17°	0,306	47°	1,07	77°	4,33
18°	0,325	48°	1,11	78°	4,70
19°	0,344	49°	1,15	79°	5,14
20°	0,364	50°	1,19	80°	5,67
21°	0,384	51°	1,23	81°	6,31
22°	0,404	52°	1,28	82°	7,12
23°	0,424	53°	1,33	83°	8,14
24°	0,445	54°	1,38	84°	9,51
25°	0,466	55°	1,43	85°	11,4
26°	0,488	56°	1,48	86°	14,3
27°	0,510	57°	1,54	87°	19,1
28°	0,532	58°	1,60	88°	28,6
29°	0,554	59°	1,66	89°	57,3

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. г). **2.** а) 3 пары; б) 6 пар. **3.** $(20 + 4\sqrt{3})$ см. **4.** 96 см^2. **5.** 7 см. **6.** а) $\Delta OPA = \Delta OPB = \Delta OPC$, $\Delta APC = \Delta APB = \Delta CPB$, $\Delta AOB = \Delta AOC = \Delta BOC$; б) правильный тетраэдр. **7.** $0{,}5\sqrt{2}$ дм. **9.** $4\sqrt{2}$ см. **10.** а) 60; б) 20; в) 45. **11.** а) Бесконечно много; б) одну или бесконечно много; в) ни одной или одну. **12.** а) Могут; б) не могут. **14.** Пересекаются. **15.** а) Не могут; б) могут. **16.** а) $D \in AB$; б) 1) $MN \cap (ABC) = K$, $K \in BC$; 2) $(DMN) \cap (ABC) = BC$. **17.** а) BC; б) D_1C_1. **18.** $4\sqrt{5}$ см. Используйте подобие треугольников. **20.** Такая точка существует, она принадлежит прямой MN. **21.** Есть ошибка. Точки B, D, E должны лежать на одной прямой. **22.** $(A_1C_1D) \cap (ACD_1) = KN$, где $K = AD_1 \cap A_1D$, $N = DC_1 \cap CD_1$; $KN = 2\sqrt{2}$ дм. **23.** а) Не могут. **24.** б) Неверно. **26.** а) 16 см; б) 5,52 дм. **27.** а) В плоскости BKD постройте $MN \parallel BD$, $N \in BK$, $BN:NK = 2:3$; б) в плоскости BMN проведите $OK \parallel MN$, $K \in BN$, $OK = 4$ см. **28.** $MNPK$ – параллелограмм, $P = 32$ см. **29.** Прямая SB. **30.** Например, A_1C и DC_1 или A_1C и BD. Укажите другие пары скрещивающихся прямых. **31.** 3 дм. **32.** 3 см. **33.** В плоскости AB_1C проведите $KL \parallel AC$, $L \in B_1C$, $KL = 3\sqrt{2}$ см. **34.** В плоскости ABC через точку O проведите $KL \parallel BC$ и в плоскости KDL через точку P – $MN \parallel KL$. $S = 36\sqrt{3}$ см^2. **35.** Неверно, $DK \subset (ABC)$, а $OB \cap (ABC) = B$, $B \notin DK$. **36.** Докажите, что прямые CK и DN – скрещивающиеся. **37.** а) Неверно; б) могут быть параллельными или скрещивающимися. **38.** в) Эта прямая может лежать в плоскости треугольника или быть параллельной ей. **39.** а) 10 см; б) $4a$. **40.** 28 м^2. **41.** а) Пусть $\alpha \cap \beta = b$. Через прямую b и точку A постройте плоскость γ и в ней прямую $AB \parallel b$. Докажите, что $AB \parallel \alpha$, $AB \parallel \beta$. б) В плоскости α постройте прямую c, пересекающую плоскость β. Прямая c и точка A задают единственную плоскость, в которой постройте прямую $AC \parallel c$. Докажите, что $AC \parallel \alpha$ и $AC \cap \beta$. **42.** а) Пусть прямая $a \parallel \alpha$. Отметьте в плоскости α произвольную точку B и постройте плоскость β, проходящую через прямую a и точку B. Плоскости α и β пересекаются по прямой, параллельной прямой a. Обоснуйте это. **43.** а) 168 см^2; б) 48 см^2; в) $72\sqrt{3}$ см^2. **44.** $\frac{2}{3}b$. **45.** б) $\frac{4}{3}$. **46.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **47.** Плоскости α и β параллельны. **48.** а) Так как прямые, расположенные в параллельных плоскостях, не пересекаются; б) покрытие может быть не горизонтальным. **49.** Используйте метод доказательства «от противного». **50.** Третья сторона параллельна α. **51.** Неверно. **52.** б) Используйте свойство средней линии треугольника и признак параллельности плоскостей. **53.** Используйте то, что все грани параллелепипеда – параллелограммы и признак параллельности плоскостей. **55.** а) $\sqrt{2}$ см; б) 9 см. **57.** 20,4 см. **58.** а) Прямоугольник, 64 см^2; б) ромб, 96 см^2. **59.** 10 : 9. **60.** а) 50 см^2; б) $\frac{1}{9}S$ и $\frac{4}{9}S$. **61.** $\frac{6a^2\sqrt{14}}{625}$. Используйте формулу Герона для нахождения площади ΔABC. **62.** Сечение – ΔPMN, где $PM \parallel BC$, $PN \parallel BK$, точки M, N – середины отрезков DC и KD. **63.** Не могут. **64.** Не пересекаются, используйте признак скрещивающихся прямых. **65.** 12 см. **66.** а) $MK \cap (ABC) = X$, где $X = MK \cap AC$; б) прямая BX. **67.** Пусть точки M, N, K, P – середины ребер AD, DB, AC, CB соответственно. Докажите, что $MK \parallel NP$. **68.** 8 дм. **69.** 8 см. **70.** Бесконечно много. **71.** 55°. **72.** Углы ABC и $A_1B_1C_1$ с соответственно параллельными сторонами ($BA \parallel B_1A_1$, $BC \parallel B_1C_1$) лежат в параллельных плоскостях. Отложите на их сторонах равные отрезки: $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$, тогда четырехугольники ABB_1A_1, BCC_1B_1 и ACC_1A_1 – параллелограммы. Следовательно, $AC = A_1C_1$. Далее рассмотрите треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. **74.** 60°. **75.** а) $\angle(MN; BC) = 65°$; б) $\angle(MN; AB) = 0°$. **76.** $\operatorname{tg}\angle MA_1B = 3$. **79.** а) $\sqrt{c^2+2}$ дм, где c – длина бокового ребра параллелепипеда; б) постройте два прямоугольных треугольника, первый с катетами, равными длине и ширине коробки, у второго – один катет равен высоте коробки, а второй – равен гипотенузе первого треугольника. Докажите, что гипотенуза второго треугольника равна длине искомой диагонали. **80.** Используйте признаки равенства треугольников. **81.** б) Докажите, что $BD \perp (AA_1C)$. **83.** 8 см, 6 см, $2\sqrt{41}$ см. **84.** Через точку O проведите $KL \parallel AB$, тогда $\angle(AB; OM) = \angle MOL$. Далее используйте свойство равнобедренного треугольника KLM. **85.** ≈ 11,1 см. Пусть O – точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, проведите $MH \parallel PO$, $H \in AC$ и докажите, что ΔNMH – прямоугольный. **86.** $\frac{1}{6}$. Используйте теорему косинусов для ΔNPM, в котором $PM = 6\sqrt{3}$ см, $MN = 3\sqrt{3}$ см, $PN = 3\sqrt{13}$ см (PN может быть найдена как гипотенуза прямоугольного ΔPKN). **87.** 15° или 75°. **88.** а) 0,8 дм; б) верно. **89.** $\sqrt{c^2+(b-a)^2}$ м. **90.** ≈ 18,7 см. Установите, что ΔAKH – прямоугольный, т. к. $AB \perp (CKH)$. **91.** 20 см. **92.** Докажите, что $a \perp (AOB)$. **93.** Сечение – прямоугольник $MNKL$, где M, N, K, L – середины ребер AB, AD, A_1D_1, A_1B_1 соответственно. $S_{MNKL} = \frac{b^2\sqrt{2}}{2}$. **94.** 3) а) 16 см; б) 15 см. **95.** 9 см. **96.** 25 см. **97.** 13 см. **98.** 6 см. Установите, что ΔMPN – равнобедренный и искомым расстоянием является длина высоты PK этого треугольника. **99.** 10 см. **100.** а) 10 см, 10 см; б) $2\sqrt{21}$ см.

101. Верно; $\approx 29{,}7$ м. **102.** б) $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ см. **104.** а) $PA = PB = PC = PD = \sqrt{3}$ дм; б) точка P одинаково удалена от всех сторон квадрата на расстояние, равное $\frac{\sqrt{10}}{2}$ дм. **105.** а) Плоскость, параллельную данной и делящую перпендикуляр, проведенный из точки M к данной плоскости, пополам; б) окружность, лежащую в плоскости, параллельной данной, с центром в середине перпендикуляра, проведенного к данной плоскости из точки M. **106.** 8 см, 6 см. **107.** а) $\approx 5{,}7$ см; б) $\approx 22{,}2$ см. **108.** б) 30 см. **109.** Пусть приборы находятся в точках A, B, C, не лежащих на одной прямой, а S – точка свечения, тогда длина перпендикуляра SO на плоскость ABC – искомое расстояние. Точка O – центр описанной около треугольника ABC окружности. $SO = \sqrt{d^2 - R^2}$, где $R = \frac{abc}{4S}$, $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **110.** а) Плоскость, перпендикулярную отрезку, соединяющему данные точки, проходящую через его середину; б) прямую, перпендикулярную плоскости данного треугольника и проходящую через центр окружности, описанной около этого треугольника. **111.** 2) 5 см. **112.** 25 см. **113.** 10 см. **114.** 7 см; 8 см. **115.** 2) MA. **116.** 2) $48\sqrt{2}$ см^2. **117.** $50\sqrt{6}$ см^2. **118.** а) Установите, что ромб является квадратом. б) 92,16 дм^2. **119.** $MK = MH = MD = \sqrt{3}$ дм. **120.** 3 : 2. **121.** $\sqrt{7}$ дм. **122.** Расстояния до сторон AB и DC равны по 1,7 дм, а до сторон AD и BC – по 1 дм. **123.** Установите, что O – середина гипотенузы AB. Расстояния до сторон AB, AC, BC равны соответственно 4 см, $4\sqrt{2}$ см, 5 см. **124.** Сначала установите, что основание перпендикуляра AH на плоскость α принадлежит биссектрисе угла A_1. Далее докажите, что $B_1C_1 \perp (AA_1H)$. **125.** 1) Пусть H – середина AC, тогда $AC \perp BH$ и $AC \perp PH$, следовательно, $AC \perp (PBH)$ и $AC \perp PB$. 2) 90°. **126.** 1) Например, а) CC_1; б) C_1D – наклонная, CD – ее проекция. 2) По теореме о трех перпендикулярах: AC – проекция наклонной A_1C на плоскость ABC, так как $AC \perp BD$, то и $A_1C \perp BD$. **127.** $MB = 18$ см; $MA = 18\sqrt{3}$ см. **128.** 25 см. **129.** 1) а) BD; б) DC_1; в) B_1C. 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **130.** 45°. **131.** $\approx 35°$. **132.** $\angle DAC \approx 63°$, $\angle DBC \approx 56°$, $\angle DOC \approx 67°$. **133.** а) 45°; б) 5 см. **134.** $4\sqrt{5}$ см, $\approx 27°$. **135.** 60°. **136.** $\approx 35°$. **137.** $\approx 35°$. **138.** 60°. **139.** $\approx 24°$. **140.** 60°. **141.** $\angle PNH = 50°$. **142.** а) 30°; б) 45°. **143.** 1 дм. **144.** а) Не является; б) 30°. **145.** 32 см^2. **146.** 45°. **147.** 60°. **148.** $\approx 71°$. **149.** $\approx 55°$. **150.** $\approx 71°$. **151.** 60°. **152.** а) 45°; б) $\approx 49°$. **153.** а) 45°; б) $\approx 7{,}8$ см. **154.** а) 1 дм; б) 1 дм; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ дм.

155. а) $\sqrt{13}$ дм; б) 3 дм; в) 3 дм. **156.** а) 3 см; б) 2,4 см. **159.** 5 см. **160.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **161.** 1 дм. **162.** 12,5 см или 19,5 см. **163.** $\sqrt{c^2+a^2-h^2}$. **164.** 0,9 дм. **165.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. Примите грань APB данного тетраэдра за основание и установите, что искомое расстояние равно половине перпендикуляра CO, проведенного к этой грани. **166.** 4 см. **167.** $\frac{np}{m}$. **168.** $\approx 53°$. **170.** а) Расстояния до сторон AB и BC равны $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, до сторон AD и DC – $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; б) $\approx 41°$, докажите, что указанные прямые образуют с плоскостью ромба равные углы α, причем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **171.** 4 см. **172.** $4\sqrt{2}$ см. **173.** 60°. **174.** $\frac{1}{14}$. **175.** а) $(x; 0; 0)$; б) $(0; y; 0)$; в) $(0; 0; 0)$. **176.** а) D, K, N; б) E; в) B, E, N. **177.** $A_x(12; 0; 0)$, $A_y(0; 0; 0)$, $A_z(0; 0; -\sqrt{5})$. **178.** а) $A_x(4; 0; 0)$, $A_y(0; -2; 0)$, $A_z(0; 0; -6)$; б) $A_{xy}(4; -2; 0)$, $A_{yz}(0; -2; -6)$, $A_{xz}(4; 0; -6)$. **180.** $M(0; 4; 4)$. **181.** $M(5; 5; 5)$. **182.** а) $A(2; 0; 0)$, $B(-2; 0; 0)$, $C(-2; 4; 0)$, $D(2; 4; 0)$, $A_1(2; 0; 4)$, $B_1(-2; 0; 4)$, $C_1(-2; 4; 4)$, $D_1(2; 4; 4)$; б) $A(2\sqrt{2}; 0; 0)$, $B(0; -2\sqrt{2}; 0)$, $C(-2\sqrt{2}; 0; 0)$, $D(0; 2\sqrt{2}; 0)$, $A_1(2\sqrt{2}; 0; 4)$, $B_1(0; -2\sqrt{2}; 4)$, $C_1(-2\sqrt{2}; 0; 4)$, $D_1(0; 2\sqrt{2}; 4)$. **183.** Если $BA \subset Ox$, $BC \subset Oy$, $BB_1 \subset Oz$, то $A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $D(2; 2; 0)$, $A_1(2; 0; 2)$, $B_1(0; 0; 2)$, $C_1(0; 2; 2)$, $D_1(2; 2; 2)$. **184.** а) В плоскости, делящей пополам двугранный угол между плоскостями xOz и yOz. **185.** 1) $OM = 5$; 2) $M_1(3; 4; 5)$, $M_2(3; 4; -5)$. **186.** а) $A_1(-5; 0; 2)$; б) $A_2(-5; 0; -2)$. **187.** Если $DA \subset Ox$, $DC \subset Oy$, $DD_1 \subset Oz$, то $A(1; 0; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $A_1(1; 0; 1)$, $B_1(1; 1; 1)$, $C_1(0; 1; 1)$, $D_1(0; 0; 1)$. **188.** $C(0; 3\sqrt{3}; 0)$, $D(0; \sqrt{3}; 2\sqrt{6})$. **189.** $A(-\sqrt{3}; -1; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(\sqrt{3}; -1; 0)$, $D(0; 0; 2\sqrt{2})$. **190.** а) 5; б) 4; в) 3. **191.** а) $7\sqrt{5}$; б) $z = 2$. **192.** 6. **193.** $(-2; -11; 6)$. **194.** а) Неверно; б) верно. **195.** 5. **196.** 3. **197.** а) $D(0; 7; 14)$; б) 5. **198.** а) и б) Являются. Достаточно доказать, что: а) середины диагоналей AC и BD совпадают; б) середины диагоналей MK и NL совпадают и $MN = NK$. **199.** а) $(0; 0; 0)$, $R = 3$; г) $(2; -1; 0)$, $R = \sqrt{7}$. **201.** в) $x^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 16$. **202.** Все данные уравнения являются уравнениями сферы. **203.** а) $M(-1; 0; 0)$; б) $D(-1; 1; 0)$. **204.** Достаточно доказать, что: а) $z = 0$; б) $x = 0$ и $y = 0$. **205.** $AB = \sqrt{26}$, $BC = AC = 7$, $AM = \frac{\sqrt{101}}{2}$. **206.** $0{,}5\sqrt{6}$. **207.** Все медианы равны $\sqrt{6}$. Установите, что ΔMKP равносторонний со стороной $2\sqrt{2}$. **208.** Установите, что в заданиях а) и б) $R = 4$. **209.** Уравнения б) и г). **210.** $(2; 2; 1)$ или $(2; 2; -1)$. **211.** а) N; б) L; в) D, F, N, K. **212.** Если $CB \subset Ox$,

$CD \subset Oy$, $CC_1 \subset Oz$, то $A(5; 5; 0)$, $B(5; 0; 0)$, $C(0; 0; 0)$, $D(0; 5; 0)$, $A_1(5; 5; 5)$, $B_1(5; 0; 5)$, $C_1(0; 0; 5)$, $D_1(0; 5; 5)$. **213.** $y = 0$. **214.** $M(0; 0; -2)$. **215.** $D(2; 2; 0)$. **216.** $2\sqrt{6}$. **217.** $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$. **218.** Ox: $(2; 0; 0)$ и $(-2; 0; 0)$; Oy: $(0; 2; 0)$ и $(0; -2; 0)$; Oz: $(0; 0; 2)$ и $(0; 0; -2)$. **219.** Нельзя, объясните почему. **221.** а) $\overrightarrow{AB_1}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{DB}$; г) $\overrightarrow{CD_1}$. **223.** б) Используйте равенство треугольников AMD и BNC. **224.** а) $\overrightarrow{AB}(7; -18; 14)$. **225.** а) $(0; 11; -15)$; б) $(-1{,}5; -5{,}25; 7)$. **226.** а) и б) – равны; в) не равны. **227.** а) $x = -11$, $y = 0$, $z = 8$; б) $x = -7$, $y = -5$, $z = 8$. **228.** Существует, это точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. **231.** а) $5\sqrt{2}$; б) 3. **232.** а) ± 12; б) $\pm 5\sqrt{3}$. **233.** а) $(6; 2; -1)$; б) $(3; 11; -13)$; в) $(3; -17; 22)$; г) $(-6; -2; 1)$. **234.** а) 5; б) $\sqrt{13}$; в) 6; г) 12. **235.** а) $\sqrt{2}$; б) $3\sqrt{6}$; в) $\sqrt{26}$; г) $\sqrt{6}$. **239.** а) $\approx 25{,}0$; б) $\approx 25{,}02$. **240.** 6. **241.** а) $\overrightarrow{MC_1}(\sqrt{5}; -1; 4)$; б) $\overrightarrow{O_1N}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; 1; -4\right)$. **243.** Верно а) и б). Установите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенные от одной точки, лежат на одной прямой. **244.** Коллинеарны, так как $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{b} = k\vec{c}$, $\vec{a} = p\vec{c}$. Найдите k и p. **246.** Бесконечно много, например, $\vec{a}(-5; 10; 0)$ или $\vec{a}\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 0\right)$. **247.** а) -4; б) нет таких значений x. **248.** а) $n = -\frac{3}{2}$, $m = 4$; б) данные векторы не могут быть коллинеарны (объясните почему). **249.** В случае а) и б). **250.** $\vec{a}$ и $\vec{d}$. **253.** Например, а) $(7; 9; 11)$; б) $(1; 5; -7)$. **254.** а) $\vec{b}\left(-\frac{2}{7}; \frac{6}{7}; \frac{3}{7}\right)$. **255.** а) $\vec{a}(2{,}4; -3{,}2; 3)$ или $\vec{a}(-2{,}4; 3{,}2; -3)$. **256.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 0; г) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **257.** а) 1; б) -1; в) 0; г) 1. **258.** а) 4; б) 12; в) 4; г) -4. **259.** а) -9; б) 25. **260.** а) 4; б) ± 5. **261.** а) 18; б) 9. **262.** а) 8,5; б) 8,5. **263.** а) $\frac{4}{9}$; б) 0,48. **264.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **265.** $-\frac{6}{7}$. **266.** $\approx 69°$. **267.** $2\frac{2}{3}$. **268.** а) ± 2; б) нет таких значений m. **269.** $-0{,}48$. **270.** 12,5. **271.** $\approx 143°$. **272.** а) $(10; -5; 20)$; б) $(-5; -2; 14)$. **273.** $17\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$. **274.** ± 3. **275.** а) $m = 12$, $n = -6$; б) при любых значениях m и n. **276.** При $n = -1$ или $n = 2$. **277.** 16. **278.** а), б) и в) – верно. **279.** Если эта точка не принадлежит плоскости, в которой лежат данные прямые. **280.** Можно. **281.** Прямые AM и BN лежат в одной плоскости и $AM \parallel BN$. Если в этой плоскости через точку N провести прямую $NK \perp MN$, то получится параллелограмм $KNBA$ и равнобедренный ΔMKN. ... **282.** Если отрезок AB не перпендикулярен данной плоскости и пересекает ее в точке C, то из равенства наклонных BC и AC следует равенство их проекций B_1C

и A_1C на эту плоскость. **283.** $8\sqrt{2}$ см. **284.** 10 см, 15 см. **285.** 10 см. Установите, что угол ADO – прямой. **286.** $7\sqrt{6}$ см. **288.** Верно. **289.** При $m = -2$. а) Не являются; б) являются. **290.** а) $\sqrt{51}$; б) 3. **291.** На 8 частей. **292.** а) 45°; б) ≈ 68°. **293.** $\frac{1}{3}$. **294.** $5\sqrt{2}$ см. **295.** Верно. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. **296.** $\left(0; 3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$. Пусть медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AM}$. …

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Глейзер Г. И. История математики в школе: 9–10 классы. – М.: Просвещение, 1981.

2. Сергеев И. Н., Олехник С. Н., Гашков С. Б. Примени математику. – М.: Наука, 1990.

3. Солтан Г. Н., Солтан А. Е., Жумадилова А. Ж. Геометрия: учебник для учащихся 9 класса общеобразовательной школы + CD. – Кокшетау: Келешек-2030, 2019.

4. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.

Список фотоснимков,
использованных в иллюстрациях на шмуцтитулах

1. Транспортная развязка в г. Алматы на ул. аль-Фараби – 12 стр.

2. Нурлы жол – самый длинный мост в Центральной Азии, г. Павлодар – 36 стр.

3. Макет самого высокого здания в г. Нур-Султане – Абу-Даби Плаза – 72 стр.

СОЛТАН Геннадий Николаевич
СОЛТАН Алла Евгеньевна
ЖУМАДИЛОВА Аманбала Жумадиловна

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК
для учащихся 10 (ч. 1), 11 (ч. 2) классов
общественно-гуманитарного направления
общеобразовательной школы
В двух частях
10 класс (ч. 1)

Редактор	С. Ш. Алибеков
Художник	А. Б. Жусупов
Технический редактор	Б. К. Еслямов
Дизайн	Е. Е. Велькер
Корректор	М. О. Джусупова

Код **6**13058

ИП Келешек-2030 баспасы
Республика Казахстан,
020000, г. Кокшетау.
Офис издательства: ул. Абая, 112а,
тел.: 8 (7162) 72-29-43 (приемная),
+7 708 444 18 64, 8 (7162) 44-18-64,
моб. тел.: +7 702 781 06 78, +7 705 745 09 75.
http://www.keleshek-2030.kz, E-mail: torg@keleshek-2030.kz

Оглавление

Geometriya_10_RU.indd