Ә.Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д.Ә. ШЫНЫБЕКОВ, Р.Н. ЖҰМАБАЕВ

АЛГЕБРА
ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныпқа арналған оқулық

Екі бөлімді

1-бөлім

11

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі ұсынған

Алматы «Атамұра» 2020

1–5167

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я 72
Ш 97

Оқулық Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі бекіткен жалпы орта білім беру деңгейінің жаратылыстану-математика бағытындағы 10—11-сыныптарына арналған «Алгебра және анализ бастамалары» пәнінің жаңартылған мазмұндағы Типтік оқу бағдарламасына сәйкес дайындалды.

Пікір жазған ҚР ҰҒА-ның академигі,
физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор **Өтелбаев М.Ө.**

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ШАРТТЫ БЕЛГІЛЕР:

— жаңа материалды бекіту сұрақтары
— тарихқа шолу
— практикалық, қолданбалы және шығармашылық тапсырмалар

Есептер:

A — бастапқы деңгей
B — орта деңгей
C — жоғары деңгей
✻ — күрделілігі жоғары тапсырмалар мен есептер
▲ — дәлелдеудің немесе есепті шешудің басы
■ — дәлелдеудің немесе есепті шешудің соңы

Шыныбеков Ә.Н. т.б.
Ш 97 **Алгебра және анализ бастамалары:** Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныпқа арналған оқулық, 2 бөлімді / Ә.Н. Шыныбеков, Д.Ә. Шыныбеков, Р. Н. Жұмабаев. — Алматы: Атамұра, 2020. — 192 бет.

ISBN 978-601-331-773-1

1-бөлім. — 2020. — 192 б.
ISBN 978-601-331-774-8

ISBN 978-601-331-774-8 (1-бөлім)
ISBN 978-601-331-773-1

АЛҒЫ СӨЗ

Оқулық жаңартылған оқу бағдарламасына сәйкес жалпы білім беретін мектептердің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныбына арналып жазылған және авторлардың 5—10-сынып оқулықтарымен сабақтасып, олардың құрылымдық жалғасы болып табылады.

Оқулықта тапсырмалар деңгейге қарай іріктелген. Күрделілігі жоғары материалдар (*) таңбасымен белгіленіп, **С** тобына, негізінен, математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптарға арналған тапсырмалар ұсынылған. Дегенмен, математиканы жетік меңгеріп, қызығушылық танытқан оқушыларға да бұл материалдардың пайдасы зор.

Оқулықты қолдану барысында әр тақырыптың соңында ұсынылған пысықтау сұрақтары мен тапсырмаларды орындап, **А** тобы материалдары мен практикалық тапсырмаларды толық меңгерген соң ғана **В** және **С** топтарының есептеріне көшуге болады.

Уақытты үнемді қолдану мақсатында онлайн ресурстарға (онлайн графиктік калькулятор, оқу бағдарламалары) сілтемелер берілді.

Ізденіс, еңбек пен талап өз жемісін берері сөзсіз! Оқуда табыс тілейміз!

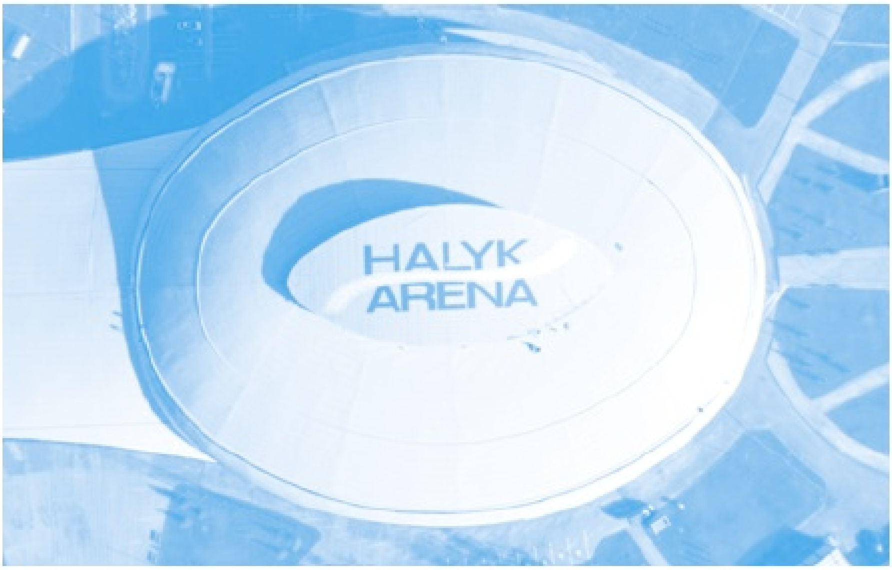
Онлайн графиктік калькулятормен (https://www.desmos.com/calculator) жұмыс істеу

Desmos онлайн графиктік калькуляторы — функцияның формуласын пайдаланып графиктерді тұрғызуға мүмкіндік беретін онлайн сервис.

Графиктік калькулятормен жұмыс істеудің толық нұсқаулығын мына сілтемеден тегін жүктеп алуға болады:

https://desmos.s3.amazonaws.com/Desmos_User_Guide_RU.pdf

10-СЫНЫП МАТЕРИАЛДАРЫН ҚАЙТАЛАУ



Бөлімді оқып-үйрену барысында сендер:

- 10-сынып материалдарын қайталайсыңдар;
- жаңа өтілетін материалдарды нәтижелі меңгеруге дайындық жасайсыңдар.

Жаттығулар

А

0.1. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+4} - \dfrac{x+4}{2x-3}$; 2) $f(x) = \sqrt{x+1}$;

3) $f(x) = \sqrt{|x|+1}$; 4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x+2}$.

0.2. $f(g(x))$ күрделі функциясын жазыңдар:

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x - 2$;

2) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \sin x$;

3) $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2 - 2x - 3$;

4) $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$.

0.3. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $4\cos 45° \cdot \sin 135°$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\frac{\pi}{3}$;

3) $\sin 420° \cdot \cos 600°$; 4) $\sin\frac{5\pi}{6}\,\mathrm{tg}\frac{7\pi}{3}$.

0.4. Тригонометриялық өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{3\mathrm{tg}^2(\alpha+3\pi)-1}{3-\mathrm{tg}^2\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)}$; 2) $\frac{\mathrm{tg}2\alpha+\mathrm{tg}3\alpha}{1-\mathrm{tg}2\alpha\mathrm{tg}3\alpha}$;

3) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$; 4) $\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha+\sin\alpha}$;

5) $\cos^4\frac{\alpha}{2}-\sin^4\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha$; 6) $\cos^4\alpha(1+\mathrm{tg}^2\alpha)+\sin^2\alpha$.

0.5. Өрнектің таңбасын анықтаңдар:

1) $\sin 138° + \cos 50°$; 2) $\sin\frac{7\pi}{5} - \sin\frac{17\pi}{10}$;

3) $\sin\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\mathrm{tg}3,14 - \mathrm{tg}\pi$.

0.6. Тригонометриялық функцияның графигін салыңдар және нәтижені https://www.desmos.com/calculator онлайн график калькуляторымен тексеріңдер:

1) $y = 2\sin x$; 2) $y = \cos 2x$;

3) $y = \mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = \mathrm{ctg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

0.7. Есептеңдер:

1) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{2}\right)$; 2) $\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}3)$;

3) $\mathrm{ctg}(2\mathrm{arcctg}2)$; 4) $\sin(\mathrm{arctg}3)$.

0.8. Теңдеуді шешіңдер:

1) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; 2) $\sqrt{3}\mathrm{tg}x - 1 = 0$;

3) $6\sin x - 5 = 0$; 4) $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$;

5) $\sqrt{3}\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = 1$; 6) $\mathrm{tg}3x = 9$.

0.9. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x + 0{,}5 < 0$;

3) $3\mathrm{ctg}x - \sqrt{3} > 0$; 4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{2}\right) > 1$;

5) $2\cos x \geqslant -\sqrt{2}$; 6) $\sqrt{3}\mathrm{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < 1$.

Функцияның туындысын табыңдар (**0.10—0.11**):

0.10. 1) $y = x - x^3$; 2) $y = \sqrt{x} + \frac{x^2}{2}$;

3) $y = \frac{x-1}{x+1}$; 4) $y = \sin 3x$;

5) $y = x \cdot \mathrm{tg}\frac{x}{2}$; 6) $y = \left(3x + \frac{x^6}{6}\right) \cdot \cos x$.

0.11. 1) $y = (2-3x)^7$; 2) $y = (x^2-4x+1)^4$;

3) $y = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$; 4) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

5) $y = x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$; 6) $y = \left(\frac{x^2 + 2x}{6}\right) \cdot \cos 3x$.

0.12. Туынды көмегімен функцияның көрсетілген аралықтағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

1) $y = 4x - x^4$, $x \in [-1;2]$; 2) $y = \frac{2x-5}{x^2-4}, x \in [3;5]$.

0.13. Функцияның өсу аралығын анықтаңдар:

1) $y = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$; 2) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$; 3) $y = 3\cos x$.

0.14. Туынды көмегімен функцияны зерттеп, оның графигін салыңдар (нәтижені онлайн графиктік калькулятормен https://www.desmos.com/calculator тексеріңдер):

1) $y = (x - 3)^3$; 2) $y = -x^3 + 3x^2$.

0.15. Теңсіздікті интервалдар әдісімен шешіңдер:

1) $4 - x > \frac{1}{x-1}$; 2) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} > 3$.

0.16*. Иррационал теңсіздікті шешіңдер:

1) $\sqrt{9x-20}<x$;   2) $\sqrt{\dfrac{x+3}{4-x}}\leqslant 2$.

В

0.17. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$;   2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{4-x}}$.

0.18. $f(x) = x^2 + 1$ және $g(x)=\sqrt{3-x}$ функциялары берілген. Функциялардың анықталу облысы: $f(x)$ — $(-\infty; +\infty)$; $g(x)$ — $(-\infty; 3]$. Мына күрделі функцияларды анықтаңдар:

1) $f(g(x))$;   2) $g(f(x))$.

0.19. $f(x) = x^2+1$, $x \geqslant 1$ және $g(x)=\sqrt{3-x}$, $x \in (-\infty; 3]$ функциялары берілген. Осы функциялардың кері функцияларын табыңдар және графиктік калькулятор арқылы функция мен кері функциялардың графиктері өзара қалай орналасатынын анықтаңдар:

1) $f^{-1}(x)$;   2) $g^{-1}(x)$.

0.20. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $4\sin\dfrac{5x}{2}\cos x\cos\dfrac{x}{2}$;   2) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}3x-\mathrm{tg}x}-\dfrac{1}{\mathrm{ctg}3x-\mathrm{ctg}x}$;

3) $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos x-\cos 3x}$;   4) $\dfrac{\cos^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha}$.

0.21*. Модуль таңбасы бар функцияның графигін салыңдар және нәтижесін түсіндіріңдер:

1) $y=\left|\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$;   2) $y=\sin\left|2x-\dfrac{\pi}{3}\right|$.

0.22. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sin 2x - 3\cos^2 x = 4$;   2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x$;

3) $4\sin 3x-3\cos 3x=\dfrac{5}{2}$;   4) $\sin x + \cos x + \sin x\cos x = 1$;

5) $\arccos x-\pi=\arcsin\dfrac{4x}{3}$;   6) $\mathrm{arctg}2x+\mathrm{arctg}3x=\dfrac{3\pi}{4}$.

0.23. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\cos^2 x + \sin x\cdot\cos x \geqslant 1$;   2) $1 - \sin x + \cos x < 0$;

3) $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x \geqslant 2$;   4) $|\sin x| > |\cos x|$.

0.24. Функцияның туындысын табыңдар:

1) $y=\sqrt{x-2}\cdot\sin(3x-2)$; 2) $y=\dfrac{\sin(2x-1)}{\sqrt{x+4}}$;

3) $y=(x^2+1)\operatorname{tg}x$; 4) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

0.25. Функцияның үзіліс нүктелерін тауып, олардың тегін (түрін) анықтаңдар:

1) $y=\dfrac{x+1}{x^2-4x-5}$; 2) $y=\begin{cases}x-3, & x\leqslant 2,\\ 1-x^2 & x>2.\end{cases}$

0.26. Шекті анықтаңдар:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2x^2}$.

0.27. Екінші ретті туындыны қолданып функцияның ойыс-дөңестік аралықтарын анықтаңдар, иілу нүктелерін табыңдар:

1) $y=x^4+4x^3-18x^2+x-17$; 2) $y=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$.

0.28. Функцияны зерттеп графигін салыңдар. Жұп және тақ функциялары графиктерінің ерекшелігін атап өтіңдер:

1) $y=x^4+2x^2-3$; 2) $y=\dfrac{1}{2}(x+1)^2(x-2)^3$; 3) $y=x^3-3x$.

0.29. Жолаушылар пойызында 20 вагон бар. Үш жолаушыны әртүрлі вагондарға неше тәсілмен отырғызуға болады?

0.30. Ойын сүйегін екі рет тастағанда әртүрлі ұпайлар түсу ықтималдылығы қандай? Бірдей ұпайлар түсу ықтималдылығы ше?

0.31. Математикалық индукция әдісімен дәлелдеңдер:

1) $n^3+3n^2+2n\,\vdots\,6$;

2) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{1\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$.

0.32. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $4x^4+8x^3-x^2-8x-3$;

2) $(x^2+x+3)(x^2+x+4)-12$.

C

0.33. $\dfrac{\cos x + 2\sin x}{2\sin x - 3\cos x} = 2$ деп алып, $\operatorname{tg}2x$-тің мәнін табыңдар.

0.34. $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x + y) + 2\cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x - y) - 3$ өрнегі x пен y-ке тәуелсіз екенін көрсетіңдер.

0.35. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sin x = \cos\sqrt{x}$;
2) $\sin(\pi\operatorname{ctg}x) = \cos(\pi\operatorname{tg}x)$;
3) $2\arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$;
4) $\arccos x = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

0.36. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $4\sin^3 x < 2\sin x + \cos 2x$;
2) $\cos(\sin x) < 0$.

0.37*. Функцияның асимптоталарын тауып, оның графигін салыңдар:

1) $y = 3x - \dfrac{4}{x+1} - 2$; егер $x \neq 4$,
2) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$.

0.38. m параметрінің қандай мәнінде

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3 + 9} - 5}{x^2 - 5x + 4} \\ m, \text{ егер } x = 4, \end{cases}$$

функциясы $x=4$ нүктесінде үздіксіз болады?

0.39. $y = 2x^3 - 3x^2 + 6x$ функциясының $y = 6x - 5$ түзуіне параллель жанамасының теңдеуін жазыңдар.

0.40. $y = 3x^5 - 10x^3 + 3x$ функциясының иілу нүктелері бір түзудің бойында жататынын көрсетіңдер.

0.41. Мергеннің нысанаға тигізу ықтималдылығы 0,8. Мерген нысанаға 15 рет атты. Оқ неше рет тиді?

І бөлім. АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛ

Нұр-Сұлтан қаласында орналасқан «Москва» ғимаратының параболамен шектелген бөлігінің ауданын интегралды қолданып есептеуге болатынына осы бөлімнің оқу материалдарын меңгеру барысында көз жеткізесіңдер

Сендер математикалық анализдің ең қызықты тақырыптарының бірі интеграл ұғымымен танысасыңдар. «Интеграл» ұғымы «Функцияның туындысы және дифференциал» ұғымдарымен тығыз байланысты. Интегралдың қолданыс аясы өте кең, өйткені қоршаған ортаның, ғылым мен техниканың көптеген салаларындағы математикалық модельдер дифференциалдық және интегралдық теңдеулермен өрнектеледі. Осындай үрдістерді болашақта зерттей алу үшін сендер интеграл тарауын меңгерулерің керек, сонымен қатар бұл оқушының математикалық қисынды ойлау қабілетін дамытады.

Бөлімде қарастырылатын тақырыптар:

1.1. Алғашқы функция және анықталмаған интеграл. Интегралдар кестесі
1.2. Интегралдау әдістері
1.3. Қисықсызықты трапецияның ауданы. Анықталған интеграл
1.4. Анықталған интегралдың геометриялық және қолданбалы есептерде қолданылуы

1.1. Алғашқы функция және анықталмаған интеграл. Интегралдар кестесі

Бұл тақырыпта сендер интеграл ұғымен танысып, соңында:

- алғашқы функция және анықталмаған интегралдың анықтамаларын білесіңдер;
- анықталмаған интегралдың қасиеттерін білесіңдер және қолданасыңдар;
- анықталмаған интегралдардың негізгі формулаларын білесіңдер және оларды функцияның интегралын табуда қолданасыңдар.

1.1.1 Алғашқы функция және анықталмаған интеграл

Біз берілген функцияның туындысын табуды жақсы білеміз. Енді оған кері есепті қарастырайық. Берілген туындысы бойынша функцияның өзін табайық. Мысалы, туындысы $f(x) = 3x^2$ болатын функцияны табу керек делік. Туындысы бойынша функцияның өзін табу есептерін ***функцияны интегралдау*** есебі немесе қысқаша ***интегралдау*** деп атайды. Интеграл ғылымда жиі қолданылады. Мысалы, егер туындыны пайдаланып дененің қозғалыс заңы бойынша оның лездік жылдамдығын анықтасақ, интеграл көмегімен дененің әр нүктедегі жылдамдығының өзгеру заңдылығы көмегімен қозғалыс заңын табамыз.

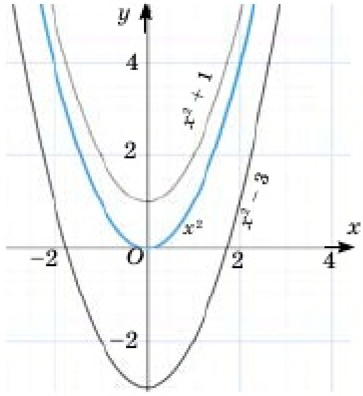
Анықтама. *I аралығындағы кез келген x үшін $F'(x) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда I аралығында $y = F(x)$ функциясы $y = f(x)$ функциясының* ***алғашқы функциясы*** *деп аталады.*

Алғашқы функциялардың саны шексіз көп. Мысалы, $2x$-тің алғашқы функциялары:

$$F_1 = x^2;$$

$$F_2 = x^2 + 1;$$

$$F_3 = x^2 - 3.$$



1.1-сурет

Өйткені бұл функциялардың барлығының туындылары $2x$-ке тең.

Теорема. *Егер қайсыбір I аралығында $y = F(x)$ функциясы $y = f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда кез келген C тұрақты шамасы үшін $F(x) + C$ функциясы да $y = f(x)$-тің алғашқы функциясы болады және $y = f(x)$ функциясының I аралығында өзге түрдегі алғашқы функциясы болмайды.*

▲ Егер $(a;\ b)$ аралығында $y = F(x)$ функциясы $y = f(x)$-тің алғашқы функциясы болса, онда кез келген тұрақты C саны үшін

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$$

теңдігі орындалады. Сондықтан $y = F(x) + C$ функциясы $y = f(x)$-тің алғашқы функциясы болады.

Енді $y = F(x) + C$ түріндегі функциядан өзге алғашқы функцияның болмайтынын көрсетейік. $y = f(x)$ функциясының $y = F(x) + C$ түріне келтірілмейтін, өзге $y = \Phi(x)$ түріндегі алғашқы функциясы бар делік. $y = \Phi(x)$ және $y = F(x)$ функциялары $y = f(x)$ функциясының алғашқы функциялары болғандықтан,

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Осыдан $\Phi(x) - F(x) = C \Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$. Бұл $y = \Phi(x)$-тың өзге түрдегі алғашқы функция болсын деп топшылауымызға қайшы. Теорема дәлелденді. ■

Сонымен, $y = F(x)$ функциясы $y = f(x)$ функциясының қандай да бір алғашқы функциясы болса, $y = f(x)$ функциясының өзге алғашқы функциялары $y = F(x) + C$ түрінде жазылады, мұндағы C — кез келген тұрақты сан.

Топтық жұмыс

Қарапайым функциялардың туындысын қолданып, олардың алғашқы функциясын атаңдар. Мысалы, *x^3-тың туындысы $3x^2$, сондықтан $3x^2$-тың алғашқы функциясы, жалпы жағдайда $x^3 + C$ түрінде жазылады.*

Айталық, $y = f(x)$ функциясы мен оның алғашқы функциялары қайсыбір I аралығында анықталсын.

Анықтама. *Кез келген $x \in I$ үшін $y = f(x)$ функциясының барлық алғашқы функциялар жиынтығын осы функцияның* ***анықталмаған интегралы*** *деп атайды және оны $\int f(x)dx$ арқылы белгілейді.*

Тарихқа шолу

$\int$ таңбасы математикада интегралды белгілеу үшін қолданылады. Оны алғаш рет XVII ғасырдың соңында дифференциалдың, интегралдық есептеулердің негізін салушылардың бірі, неміс математигі Лейбниц қолданды. $\int$ символы S әрпінен шыққан. Ол латын тіліндегі қосынды сөзінің бас әрпінен алынған.

Егер $(a; b)$ аралығында $y = F(x)$ функциясы $y = f(x)$ функциясының қандай да бір алғашқы функциясы болса, онда анықтамаға сәйкес мына теңдік орындалады:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

мұндағы $f(x)$ — интеграл астындағы функция, C — кез келген тұрақты шама, $f(x)dx$ — интеграл астындағы өрнек, x — интеграл айнымалысы.

Осыдан жоғарыда қарастырылған мысалдар үшін

$$\int 3x^2dx = x^3 + C,$$

$$\int 2xdx = x^2 + C$$

теңдіктері орындалады.

➢ **Қосымша электрондық ресурстар**

https://www.youtube.com/watch?v=tZ_rMl6MOEI

$(x^{r+1})' = (r + 1)x^r$ $(r \in R)$ теңдігі мен анықталмаған интеграл анықтамасынан мына формула шығады:

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1 .$$

Осы формула арқылы дәреже көрсеткіші −1-ден өзге кез келген дәрежелік функцияның интегралын табуға болады:

$y = x^r$ ($r \in R$, $r \neq -1$) түріндегі функцияны интегралдау үшін оның дәреже көрсеткішін 1 санына арттырып, сол алынған дәреже көрсеткішіне тең санға бөліп, шыққан нәтижеге тұрақты шаманы қосса жеткілікті.

Бұл формуланы $y = \frac{1}{x}$ фунциясына қолдануға болмайды, өйткені $\int x^{-1}dx = \frac{x^0}{0} + C$. Бұл анықталмаған.

Тақырып бойынша мысалдар қарастырайық.

1-мысал. $\int x^3dx$ интегралын табайық.

▲ $\int x^3dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$. x^3 дәрежелік функциясын интегралдау үшін көрсетілген формулаға сәйкес амалдарды орындаймыз.

Функцияның дәреже көрсеткішін 1-ге арттырамыз

$$\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C$$

Интеграл тұрақтысын қосамыз

Дәреже көрсеткішіне тең санға бөлеміз

Интеграл тұрақтысын қосуды ұмытып кетпеңдер!

Есептің жауабын тексеру үшін интегралдан туынды алынады. Сонда интеграл астындағы функция шығу керек.

Тексеру:

$$\left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 + 0 = x^3.$$ ■

2-мысал. $\int \frac{1}{x^3}\,dx$ интегралын табайық.

▲ Берілген интегралды $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx$ түрінде жазып, $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ формуласын қолдансақ,

$$\int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

Тексеру:

$$\left(-\frac{1}{2x^2}+C\right)' = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)' + 0 = \left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\left(-2x^{-3}\right) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}.$$ ■

Кейбір функциялардың интегралын табу үшін алдымен функцияны қарапайым түрге келтіріп алу керек.

3-мысал. $\int 7dx$ интегралын табу керек:

▲ $x^0 = 1$ екенін ескерсек,

$$\int 7dx = \int 7\cdot x^0 dx = 7\cdot\frac{x^{0+1}}{0+1} + C = 7x + C.$$

Тұрақты k санының интегралы әрқашан $kx+C$-ға тең: $\int kdx = kx + C$. Мысалы, $\int 2dx = 2x + C$; $\int 2018dx = 2018x + C$; $\int \pi dx = \pi x + C$. ■

1.1.2. Анықталмаған интегралдың қасиеттері

1-қасиет. *Тұрақты көбейткішті интеграл таңбасының алдына шығаруға болады:*

$$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot\int f(x)dx.$$

2-қасиет. *Қосындының интегралы интегралдардың қосындысына тең:*

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Бірнеше қосылғыштан тұратын функцияның интегралын табу үшін әр қосылғыштың интегралдары жеке-жеке есептеліп, қосылады.

1- мысал. $\int\left(3x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2}\right)dx$ интегралын анықтайық.

▲ Қосындының интегралы интегралдардың қосындысына тең:

$$\int\left(3x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2}\right)dx = \int 3x^2dx - \int\frac{2}{\sqrt{x}}dx + \int\frac{7}{x^2}dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} -$$

$$-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx + 7\int x^{-2}dx = x^3 - 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 7\frac{x^{-1}}{-1} + C = x^3 - 4\sqrt{x} - \frac{7}{x} + C.$$ ■

Берілген интегралды жеке қосылғыштарға жіктейміз

$$\int\left(3x^2-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{7}{x^2}\right)dx=\int 3x^2dx-\int\frac{2}{\sqrt{x}}dx+\int\frac{7}{x^2}dx=$$

$$=3\cdot\frac{x^3}{3}-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx+7\int x^{-2}dx=x^3-2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+7\frac{x^{-1}}{-1}+C=$$

Әр қосылғыштың интегралын табамыз

$$=x^3-4\sqrt{x}-\frac{7}{x}+C.$$

Интеграл тұрақтысын тек бір рет қосамыз

Интеграл тұрақтысын тек бір рет қана қосамыз, өйткені тұрақты шамалардың қосындысы қандай да бір тұрақты шаманы береді.

2-мысал. ▲ Егер $y'(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^{\frac{3}{2}}x$ болса, $y(x)$-ті табу керек. $y(x)$ функциясы $y'(x)$-тың алғашқы функциясы болғандықтан, $y(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3-4x^{\frac{3}{2}}x\right)dx$. Қосындының интегралы жеке интегралдардың қосындысына тең:

$$y(x)=\int\frac{1}{2}x^3dx-4\int x^{\frac{3}{2}}xdx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}-4\int x^{2,5}dx=$$

$$=\frac{x^4}{8}-4\frac{x^{3,5}}{3,5}+C=\frac{x^4}{8}-\frac{8x^3\sqrt{x}}{7}+C.$$ ■

Негізі бірдей дәрежелерді көбейткенде дәреже көрсеткіштерінің қосылатынын ескеру керек, сондықтан мұнда $x^{\frac{3}{2}}x=x^{2,5}$ болатыны ескерілген.

3-мысал. $\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$ интегралын табайық:

▲ Қысқаша көбейту формуласын қолданып жақшаны ашамыз және алымын бөліміне мүшелеп бөлеміз:

$$\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x}}dx-\int\frac{2x}{\sqrt{x}}dx+\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{Интеграл астындағы} \\ \text{функцияларды бір} \\ \text{дәрежеге келтіреміз} \end{matrix} \right| = \int x^{1,5}dx - 2\int x^{0,5}dx + \int x^{-0,5}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{Қосылғыштардың} \\ \text{интегралдарын} \\ \text{табамыз} \end{matrix} \right| = \frac{x^{2,5}}{2,5} - 2\frac{x^{1,5}}{1,5} + \frac{x^{0,5}}{0,5} + C =$$

$$= \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} - \frac{4x\sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x} + C. \blacksquare$$

Кейбір интегралды тапқанда алдымен функцияны түрлендірген соң оны жеке қосылғыштарға жіктеп алып, дәрежелік түрге келтіру қажет.

Бұл тақырыпқа кейінірек 3.5-параграфта қайта ораламыз.

1.1.3. Интегралдар кестесі

Анықталмаған интеграл анықтамасына сәйкес туындылар кестесі көмегімен интегралдар кестесін аламыз.

Туындылар кестесі		Интегралдар кестесі
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\Rightarrow$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
$(\sin x)' = \cos x$	$\Rightarrow$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\Rightarrow$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
$(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$

Интегралдар кестесін қолданып функциялардың интегралдарын есептелік:

1-мысал. 1) $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x$; 2) $f(x) = x^4 - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sin^2 x}$ функциясының алғашқы функциясының жалпы түрін табу керек.

▲ 1) $F(x) = 2\sqrt{3}(-\cos x) + C = -2\sqrt{3}\cos x + C$;

2) $F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \mathrm{ctg} x + C = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \mathrm{ctg} x + C =$

$$=\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-\operatorname{ctg}x+C. \blacksquare$$

2-мысал. 1) $\int(2\sin x-3\cos x)dx$; 2) $\int\frac{\cos 2y}{\sin^2 y\cdot\cos^2 y}dy$ интегралын анықтайық.

▲ 1) $\int(2\sin x-3\cos x)dx=$ | Қосындының интегралы жекеленген интегралдардың қосындысына тең | $=\int 2\sin x\,dx-$

$-\int 3\cos x\,dx=$ | Егер функцияның алдында коэффициент болса, коэффициентті интеграл таңбасының алдына шығаруға болады | $=$

$=2\int\sin x\,dx-3\int\cos x\,dx=$ | Интегралдар кестесінен | $=-2\cos x-3\sin x+C.$

Қажет жағдайда тригонометрияның формулаларын қолдану керек.

2) $\int\frac{\cos 2y}{\sin^2 y\cdot\cos^2 y}dy=$ | Қос аргументтің формуласы $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ | $=\int\frac{\cos^2 y-\sin^2 y}{\sin^2 y\cdot\cos^2 y}dy=$

$$=\int\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y\cdot\cos^2 y}dy-\int\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y\cdot\cos^2 y}dy=$$

$$=\int\frac{1}{\sin^2 y}dy-\int\frac{1}{\cos^2 y}dy=-\operatorname{ctg}y-\operatorname{tg}y+C. \blacksquare$$

Алғашқы функцияның қолданбалы есептерді шешкенде қолданылуына мысал келтірейік.

3-мысал. Доп 80 м биіктіктен 20 м/с бастапқы жылдамдықпен жоғары қарай лақтырылды (1.2-сурет). Еркін түсу үдеуі 10 м/с^2 деп алып, төмендегі тапсырмаларды орындау керек:

1) доптың жер бетінен көтерілу биіктігінің уақытқа тәуелді өзгерісін сипаттайтын $h=h(t)$ функциясын;

2) доптың жерге түсу уақытын.

▲ Доптың жер бетінен көтерілу биіктігінің уақытқа тәуелділігін сипаттайтын $h=h(t)$ функциясын анықтайық. Бастапқы $t=0$ уақыт мезетінде доп 80 м биіктікте болды: $h(0)=80$. Туындының физикалық мағынасына сәйкес,

$$v(t)=h'(t),\text{ ал } a(t)=v'(t).$$

Доп жоғары қарай $t = 0$ уақыт мезетінде 20 м/с бастапқы жылдамдықпен лақтырылды, сондықтан $v(0) = h'(0) = 20$. Еркін түсу үдеуі доптың жоғары көтерілу бағытына кері бағытталған: $g = -10$ және $g = v'(0) = h''(0) \Rightarrow h''(0) = -10$. Сонымен, төмендегі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} h(0) = 80, \\ h'(0) = 20, \\ h''(0) = -10. \end{cases}$$

$h'(t)$ функциясы — $h''(t)$ функциясының алғашқы функциясы. Сондықтан $h'(t) = \int h''(t)dt = \int(-10)\,dt = -10t + C_1$. Интеграл тұрақтысының C_1 мәнін $h'(0) = 20$ шамасын ескеріп табамыз:

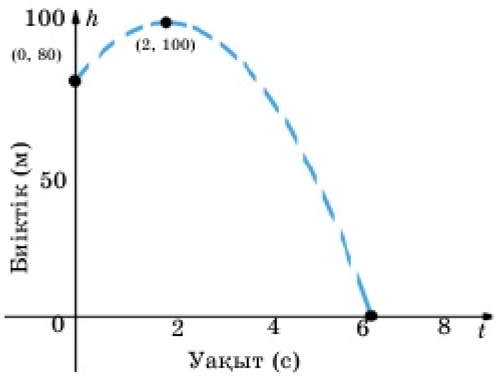
$$h'(0) = -10 \cdot 0 + C_1 = 20 \Rightarrow C_1 = 20 \Rightarrow h'(t) = -10t + 20.$$

$h(t)$ функциясы $h'(t)$-тың алғашқы функциясы болғандықтан,

$$h(t) = \int h'(t)dt = \int(-10t + 20)dt = -5t^2 + 20t + C_2.$$

C_2 — интеграл тұрақтысының мәні. Оны $h(0) = 80$ шартынан анықтаймыз: $h(0) = -5 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + C_2 = 80 \Rightarrow C_2 = 80 \Rightarrow h(t) = -5t^2 + 20t + 80$. Біз доптың ұшу биіктігін сипаттайтын функцияны таптық. Енді доптың қанша уақыттан соң жерге түсетінін табайық. Доп жерге түскенде оның жерге дейінгі қашықтығы нөлге тең:

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 80 = 0.$$



1.2-сурет

Осы теңдеуді шешеміз:
$D = 20^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 80 = 2000$. Мұнда $t > 0$ екенін ескерсек,

$$t = \frac{-20 + \sqrt{2000}}{-10} = 6{,}472 \text{ с.}$$

1. Берілген функцияның алғашқы функциясы дегеніміз не? Мысал келтіріңдер.
2. Анықталмаған интеграл деген не?
3. Анықталмаған интегралды табу ережелерін тұжырымдаңдар.
4. Кестелік интеграл формулаларын дәлелдеңдер, жатқа жазып көріңдер.

Есептер

A

1.1. Берілген функцияның алғашқы функциясын ауызша табыңдар:

1) $f(x) = 8x^7$; 2) $f(x) = 4x^3$; 3) $f(x) = 8x + 1$;
4) $f(x) = -5x^4$; 5) $f(x) = -11 + \sin x$; 6) $f(x) = 5x - 4$;
7) $f(x) = \frac{3}{5}x^2$; 8) $f(x) = 5x\sqrt{x}$; 9) $f(x) = 4x^3 - 5\cos x + 7x$;
10) $f(x) = \frac{1}{6}x^3$; 11) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$; 12) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x}$;
13) $f(x) = x^3 - 3x^5 + \sin x$; 14) $f(x) = 5 - \cos x$;
15) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 5$; 16) $f(x) = 3 - 4x + \sin x$;
17) $f(x) = 2 - 6x^4 + 3x$; 18) $f(x) = 3 + \sin x$;
19) $f(x) = 1 - 2\cos x$; 20) $f(x) = 4x^6 - 5x^3 + 3$.

1.2.

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1$$

формуласын қолданып, мына функциялардың интегралын ауызша табыңдар:

1) $-4x^{-5}$; 2) x^{-4}; 3) $x^{\frac{1}{2}}$;
4) $x^{\frac{1}{3}}$; 5) $24\,x^{-25}$; 6) $-\frac{1}{4}x^{-3,5}$.

1.3. Берілген $F(x)$ функциясы $f(x)$-тің алғашқы функциясы болатынын көрсетіңдер:

1) $F(x) = 2\sqrt{x}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

2) $F(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + x$; $f(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}} + 1$;

3) $F(x) = \frac{x^4}{4} + 3x + 1$; $f(x) = x^3 + 3$;

4) $F(y) = \cos 5y + y$; $f(y) = -5\sin 5y + 1$;

5) $F(z) = \frac{1}{z-1}$; $f(z) = -\frac{1}{(z-1)^2}$.

1.4. Берілген функцияның алғашқы функциясын анықтаңдар:

1) $f(x) = 2x - 1$; 2) $f(x) = 5x^3 - 4$;

3) $f(x) = 7x^2 - 3\cos x - 3$; 4) $f(x) = 2 - \dfrac{3}{\cos^2 x}$;

5) $f(x) = (5x - 4)^3$; 6) $f(x) = 7\sin x - 3x^2 - 3\cos x - 3$.

1.5. Туынды алу арқылы мына теңдіктердің орындалатынын тексеріңдер:

1) $\int\left(-\dfrac{6}{x^4}\right)dx = \dfrac{2}{x^3} + C$; 2) $\int\left(8x^3 + \dfrac{1}{2x^2}\right)dx = 2x^4 - \dfrac{1}{2x} + C$;

3) $\int(x-4)(x+4)\,dx = \dfrac{x^3}{3} - 16x + C$.

1.6. Анықталмаған интегралды тауып, нәтижені туынды көмегімен тексеріңдер:

1) $\int x^{\frac{2}{3}}\,dx$; 2) $\int 7x^{\frac{4}{3}}\,dx$; 3) $\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$.

1.7. Кестені толтырыңдар:

Бастапқы интеграл	Түрлендірулер	Интегралын табыңдар	Ықшамдаңдар
$\int\left(\dfrac{7}{x^2} - x + 1\right)dx$			
$\int\dfrac{x^5 - 3}{x^2}\,dx$			
$\int\dfrac{x^3 - 8}{2 - x}\,dx$			

1.8. Берілген туындысы бойынша $f(x)$ функциясын табыңдар:

1) $5x + 3x^{-4}$; 2) $4x(x^2 - 1)$; 3) $(x - 3)^2$;

4) $x\left(6x + \dfrac{4}{x^4}\right)$; 5) $\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^2$; 6) $x\left(3x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{2}{x^{\frac{4}{3}}}\right)$;

7) $6\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}$; 8) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} - 7x^2\sqrt{x}$; 9) $5\left(\sqrt{x}\right)^3 - \dfrac{3x}{\sqrt{x}}$.

Интегралдар кестесін қолданып есептеңдер **(1.09—1.10)**:

1.9. 1) $\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$; 2) $\int(\sin x + 3\cos x)dx$;

3) $\int(x^3 - \sin x)dx$; 4) $\int\left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{3\cos x}{2}\right)dx$;

5) $\int\left(3\cos x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$; 6) $\int\left(6x^5 - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx$.

1.10. 1) $\int x^7 dx$; 2) $\int x^3\sqrt[4]{x}dx$; 3) $\int \frac{x^3+3x^2-\sqrt[3]{x}+1}{x\sqrt{x}}dx$;

4) $\int \frac{x^4-16}{x^2+4}dx$; 5) $\int\left(8\sin x - \frac{9}{\cos^2 x}\right)dx$; 6) $\int\left(6\cos x - \frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; 8) $\int 5\sqrt{x}dx + \int\frac{10dx}{\cos^2 x}$; 9) $\int\frac{5dx}{\sin^2 x} - \int\frac{6}{x\sqrt{x}}dx$.

1.11. $y = f(x)$ функциясының M нүктесі арқылы өтетін алғашқы функциясын табыңдар:

1) $f(x) = 6x^2 - 2x - 5$, $M(1;-6)$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$, $M(1;1)$;

3) $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}$, $M(1;1,5)$.

▲ 1) Алғашқы функцияны табу үшін анықталмаған интегралын анықтайық:

$$F(x) = \int(6x^2 - 2x - 5)dx = 6\cdot\frac{x^3}{3} - x^2 - 5x + C =$$
$$=2x^3 - x^2 - 5x + C.$$

$M(1;\ -6)$ нүктесі $F(x)$ функциясының графигіне тиісті. Олай болса, $F(1) = -6$, яғни $2\cdot1^3 - 1^2 - 5\cdot1 + C = -6 \Rightarrow C = -2$. Сондықтан $F(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$. ■

1.12. $f'(x)$ туындысы бойынша M нүктесі арқылы өтетін $y = f(x)$ функциясын табыңдар:

1) $f'(x) = 2x - 1$, $M(2;3)$; 2) $f'(x) = 3x^2 - 3$, $M(1;2)$;

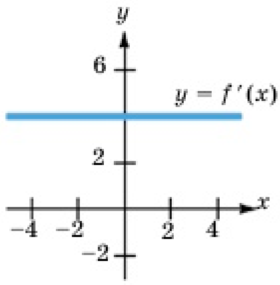
3) $f'(x) = \frac{6}{x^3}$, $M(1;4)$; 4) $f'(x) = 3 - x^2$, $M(6;1)$;

5) $f'(x) = 6x^2 + 12\sqrt{x}$, $M(4;10)$.

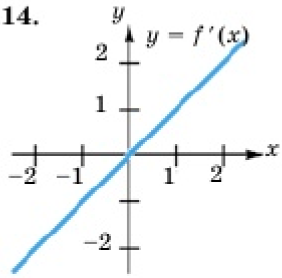
B

1.13—1.16-есептерде $y = f(x)$ функциясының туындысы $y = f'(x)$-тың графигі бейнеленген. $y = f(x)$ функциясы графигінің екі нұсқасын көрсетіңдер. Туындының графигі бойынша $y = f(x)$ функциясының өсу-кему аралықтарын анықтаңдар:

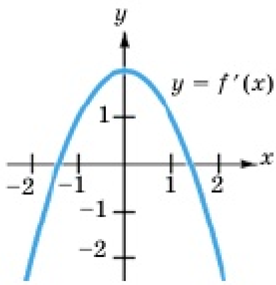
1.13.



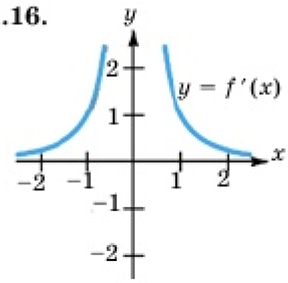
1.14.



1.15.



1.16.



1.17. $f(x)$ функциясының алғашқы функциясын табыңдар:

1) $f(x) = 1,5x^2 - \dfrac{4}{x^2}$; 2) $f(x) = \dfrac{4}{3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4} + 5x^{\frac{3}{2}}$.

1.18. Интегралды табыңдар:

1) $\displaystyle\int \frac{y^6 + 8y^4}{y}\,dy$; 2) $\displaystyle\int \left(\sqrt{y}+1\right)\left(\sqrt{y}-1\right)dy$.

1.19. $y = F(x)$ функциясы $y = f(x)$-тің алғашқы функциясы болатынын дәлелдеңдер:

1) $F(x) = 7x^5 + 5\cos^2 3x - 2$; $f(x) = 35x^4 - 15\sin 6x$;

2) $F(x) = 6x^4 + 5\sin^2 2x + 5$; $f(x) = 24x^3 + 10\sin 4x$.

1.20. Интегралды есептеңдер:

1) $\displaystyle\int \frac{z^3 + 2z}{z\sqrt{z}}\,dz$; 2) $\displaystyle\int (z+2)^2\left(z^2+2\right)dz$.

1.21. Интеграл астындағы өрнекті түрлендіріп, интегралды анықтаңдар:

1) $\int\left(3x-5\sqrt{x}\right)^2 dx$;   2) $\int\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)^2 dx$;

3) $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-3\right)dx$;   4) $\int\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$.

Есептеңдер **(1.22—1.23):**

1.22. 1) $\int\left(1+\frac{3}{2t^2}\right)dt$;   2) $\int t\left(\frac{2}{t}+\frac{t}{2}\right)dt$.

1.23. 1) $\int\frac{2x^3-\sqrt{x}}{x}dx$;   2) $\int\frac{10x^2+3x+4}{\sqrt{x}}dx$;

3) $\int\frac{(5x-3)^2}{\sqrt{x}}dx$;   4) $\int\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}dx$.

1.24. $f(x)$ функциясы үшін графигі A нүктесі арқылы өтетін алғашқы функцияны анықтаңдар:

1) $f(x)=\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}$, $A\left(\frac{5\pi}{4};\sqrt{2}\right)$;

2) $f(x)=\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$, $A\left(\frac{7\pi}{4};2\sqrt{2}\right)$.

1.25. Тригонометрияның формулаларын қолданып есептеңдер:

1) $\int\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}d\alpha$;   2) $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$;

3) $\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^4 2x+2\sin^2 2x\cos^2 2x+\cos^4 2x}$;   4) $\int\frac{1}{2}\sin^2\frac{y}{2}dy$.

Қолданбалы тапсырма

1.26. Доп 6 м/с бастапқы жылдамдықпен 2 м биіктіктен жоғары лақтырылды. Еркін түсу үдеуі 10 м/с^2 деп алып,

а) доптың көтерілу биіктігінің уақытқа тәуелділігін сипаттайтын $h(t)$ функциясын;

ә) доптың жерге түсу уақытын;

б) доптың көтерілу биіктігін табыңдар.

1.27. Есептеңдер:

1) $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + 1} dx$; 2) $\int (x+3)^7 \, dx$;

3) $\int \sqrt{x-3} \, dx$; 4) $\int \frac{x^2 - 4x\sqrt{x} + 4x}{\left(\sqrt{x} - 2\right)^2} dx$.

1.28. Берілген шарттарды қанағаттандыратын $y = f(x)$ функциясын анықтаңдар:

1) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, мұндағы $f(9) = 1$;

2) $f''(x) = 6$; $f'(-1) = 2$, мұндағы $f(-1) = 0$;

3) $f''(x) = 12x^2 + 2$, мұнда $(1;1)$ нүктесінен өтетін жанаманың бұрыштық коэффициенті 3-ке тең;

4) $f'(x) = x^2$ және $y = 4x + 7$ түзуі — $y = f(x)$ функциясы графигінің жанамасы.

1.29. Берілген алғашқы функциясы бойынша бастапқы функцияны анықтаңдар:

1) $F(x) = \frac{x^7}{7} + 2\cos 2x$; 2) $F(x) = \mathrm{arctg}^2 3x$;

3) $F(x) = \mathrm{tg}^3 2x - \cos 5x$; 4) $F(x) = \cos\sqrt{x} - \sin\left(x^2\right)$.

C

1.30*. $y = f(x)$ функциясы үшін графигі M нүктесі арқылы өтетін алғашқы функцияны табыңдар:

1) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ егер } x < 0, \\ 1, \quad \text{ егер } x \geqslant 0, \end{cases}$ $M\ (0;0)$;

2) $f(x)=\begin{cases}1, \text{егер } x<1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \text{егер } x\geqslant 1,\end{cases}$ $M\ (4;0)$.

▲ Алғашқы функцияны табу үшін берілген функцияның анықталмаған интегралын анықтайық:

$$F(x)=\begin{cases}\int \cos x dx, \text{ егер } x<0,\\ \int 1dx, \text{ егер } x\geqslant 0,\end{cases} = \begin{cases}\sin x + C_1, \text{ егер } x<0,\\ x+C_2, \text{ егер } x\geqslant 0.\end{cases}$$

$M(0;\ 0)$ нүктесі $F(x)$ функциясының графигіне тиісті. Олай болса, $F(0)=0$, яғни $\begin{cases}\sin 0 + C_1 = 0,\\ 0+C_2=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1=0,\\ C_2=0.\end{cases}$ Сондықтан $F(x)=\begin{cases}\sin x, \text{ егер } x<0,\\ x, \text{ егер } x\geqslant 0.\end{cases}$ ■

1.31. Кез келген нүктесіне жүргізілген жанамасының бұрыштық коэффициенті $\left(3-\dfrac{x}{5}\right)$-ке тең және $M(0;7)$ нүктесі арқылы өтетін қисықтың теңдеуін жазыңдар.

1.32. Кез келген нүктесіне жүргізілген жанамасының бұрыштық коэффициенті 1) жанасу нүктесінің абсциссасына; 2) жанасу нүктесі абсциссасының квадратына тең және $M(2;1)$ нүктесі арқылы өтетін қисықтың теңдеуін жазыңдар.

1.33. Кез келген нүктесіне жүргізілген жанамасы абсцисса өсіне параллель және $M(2;1)$ нүктесі арқылы өтетін қисықтың теңдеуін жазыңдар.

1.34. Кез келген нүктесіне жүргізілген жанамасы абсцисса өсімен 45^0 бұрыш жасайтын және $M(2;1)$ нүктесі арқылы өтетін қисықтың теңдеуін жазыңдар.

1.35. Екі дене бір уақытта, бір нүктеден бір бағытта түзу сызық бойымен қозғала бастады. Біріншісінің жылдамдығы $v(t) = 3t^2-6t$, ал екіншісінікі $v(t)=10t+20$. Қанша уақыттан кейін және бастапқы нүктеден қандай қашықтықта бұл екі дене кездеседі? (Жылдамдық м/с-пен өлшенеді).

Қолданбалы тапсырмалар (1.36—1.37):

1.36. Массасы 10 кг дене $F = 6$Н күштің әрекетінен қозғалады. Бастапқы уақыт мезетінде ($t=0$) дене координаталар бас нүктесінде болған. Дененің қозғалыс заңын табыңдар.

▲ Дененің $s(t)$ қозғалыс заңын анықтау үшін үдеуді есептеу керек.

Ньютонның екінші заңы бойынша $F = ma \Rightarrow a = \frac{6}{10}\left(\frac{м}{с^2}\right)$.

$$a = v'(t) \Rightarrow v(t) = \int a dt = \frac{3}{5}t + C_1;$$

$$s(t) = \int v(t)dt = \int\left(\frac{3}{5}t + C_1\right)dt = \frac{3}{10}t^2 + C_1 t + C_2.$$

Бастапқы уақыт мезетінде ($t=0$) дене координаталар бас нүктесінде болғандықтан,

$$s(0) = 0 \Rightarrow \frac{3}{10}\cdot 0^2 + C_1\cdot 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Сондықтан $s(t) = \frac{3}{10}t^2 + C_1 t$. ■

1.37. Нұр-Сұлтан қаласындағы «Бәйтерек» монументінің іргетасымен қоса есептегендегі биіктігі 105 метр. Осы биіктікке жетуі үшін жерден атылған отшашудың бастапқы жылдамдығы қандай болуы керек? Отшашу снарядының массасы ескерілмейді ($g \approx 10$ м/с^2).

1.38. Кез келген тақ функцияның алғашқы функциясы жұп бола ма? Керісінше кез келген жұп функцияның алғашқы функциясы тақ бола ма?
Жауаптарыңды мысалмен негіздеп, дәйекті қорытынды жасаңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

1.39. Функцияның туындысын табыңдар:

1) $y = (x - 1)^2 \sin x$; 2) $y = \frac{\cos 2x}{1 - x^2}$;

3) $y = \operatorname{arctg}(x + 1)$; 4) $y = (x^2 - 2x + 3) \cdot \sin 2x$.

1.40. $f(x)$ функциясының графигіне x_0 нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$; x_0 — графиктің абсцисса өсімен қиылысу нүктесі;

2) $f(x) = (7 - 3x)^3$, x_0 — функция графигінің $y = 1$ түзуімен қиылысу нүктесі;

3) $f(x) = (4x + 3)^5$, x_0 — функция графигінің $y = -1$ түзуімен қиылысу нүктесі;

4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$, $x_0 = 1$.

1.41. Теңдеуді шешіңдер:

1) $2\cos x = 3\operatorname{tg} x$; 2) $\sqrt{3}\sin 3x = 2\cos x \cdot \sin 3x$.

1.2. Интегралдау әдістері

Бұл тақырыпта сендер интегралдау әдістерімен танысып, тақырыптың соңында:

- айнымалыны алмастыру әдісін;
- бөліктеп интегралдау әдісін меңгересіңдер.

1.2.1. Айнымалыны алмастыру арқылы интегралдау

Бұл әдіс күрделі функцияларды дифференциалдау ережесіне сүйенеді.

Дифференциалданатын $y = f(x)$ және $x = g(t)$ функциялары үшін күрделі $y = f(g(t))$ функциясы анықталсын және $\int f(x)dx = F(x) + C$ теңдігі орындалсын.

Онда

$$\int f[g(t)] \cdot g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx \,\Big|_{x = g(t)} \qquad (1)$$

теңдігі орындалады.

Бұл теңдікті былай қолданады:

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx = \begin{vmatrix} u = g(x), \\ du = g'(x)dx \end{vmatrix} = \int f(u)du =$$

$$= F(u)\Big|_{u=g(x)} = F\big(g(x)\big) + C.$$

Айнымалыны $u(x) = kx + b$ сызықтық функциясымен алмастырсақ, $u'(x) = k$ болғандықтан,

$$\boxed{\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C\,.} \qquad (2)$$

Демек, алғашқы функцияны сызықтық функцияның бұрыштық коэффициентіне бөлсек жеткілікті.

1-мысал. 1) $f(x)=\cos\left(\sqrt{5}x+3\right)$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{(8-5x)^7}$;

3) $f(x)=3\sqrt{5-2x}$; 4) $f(x)=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)+7x^5-4$ функциясының алғашқы функциясын табу керек.

▲ 1) $f(x)=\cos\left(\sqrt{5}x+3\right)$. Мұнда $k=\sqrt{5}$, демек, (2) формуладан $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\left(\sqrt{5}x+3\right)+C$.

2) $f(x)=\dfrac{1}{(8-5x)^7}$. Берілген функцияны $f(x) = (-5x + 8)^{-7}$ түрінде жазайық. $k = -5$ болғандықтан,

$$F(x)=-\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(-5x+8)^{-6}+C=\frac{1}{30(8-5x)^6}+C\,.$$

3) $f(x)=3\sqrt{5-2x}$. $k = -2$. Олай болса,

$$F(x)=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=-(5-2x)^{\frac{3}{2}}+C=-\sqrt{(5-x)^3}+C\,.$$

4) $f(x)=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)+7x^5-4$. $k = 3$, демек,

$$F(x)=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\right)+7\frac{x^6}{6}-4x+C=$$

$$=-\frac{2}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{7}{6}x^6-4x+C.\ ■$$

Интегралдар табуға мысалдар қарастырайық.

2-мысал.

$$\blacktriangle \int x\sqrt{x-3}dx = \left|\begin{matrix} x-3=t; \\ x=t+3, \\ dx=dt. \end{matrix}\right| = \int (t+3)\sqrt{t}dt = \int\left(t^{\frac{3}{2}} + 3t^{\frac{1}{2}}\right)dt =$$

$$= \frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5} + 2t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5} + 2\sqrt{(x-3)^3} + C. \blacksquare$$

3-мысал.

$$\blacktriangle \int \sin^6 x\cos x dx = \int \sin^6 x d\sin x = |\sin x = t| =$$

$$= \int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^7 x}{7} + C. \blacksquare$$

4-мысал.

$$\blacktriangle \int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = |\cos x = t| =$$

$$= -\int (1-\cos^2 x) d\cos x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C. \blacksquare$$

1.2.2. Бөліктеп интегралдау әдісі

Бізге $u(x)$ және $v(x)$ дифференциалданатын функциялары берілсін. Олардың көбейтіндісінің дифференциалы былай анықталады:

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Бұл теңдіктің екі жағын да интегралдасақ,

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu.$$

$\int d(uv) = uv + C$, сондықтан $uv + C = \int udv + \int vdu.$

Демек, $\int udv = uv - \int vdu + C.$

C тұрақтысын интеграл құрамына енгізсек,

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Бұл формула udv өрнегін интегралдауды vdu өрнегін интегралдауға әкеледі. Соңғы өрнекті интегралдау кей кездерде оңай. Интегралды осы формула бойынша есептеуді ***бөліктеп интегралдау*** әдісі деп атайды.

Мысалдар қарастырайық.

5-мысал.

$$\blacktriangle \int x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, dv = \sin x dx, \\ du = dx, v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -x\cos x - \int (-\cos x) dx = -x\cos x + \sin x + C. \blacksquare$$

6-мысал.

$$\blacktriangle \int x\cos 3x dx = \begin{vmatrix} u = x,\ dv = \cos 3x dx, \\ du = dx, v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{vmatrix} = x\cdot\frac{1}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x dx =$$

$$= \frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C. \blacksquare$$

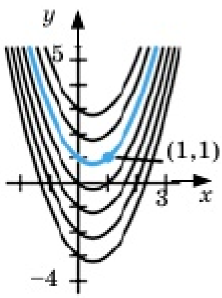
1. Айнымалыны алмастыру формуласын жазып, оның мағынасын түсіндіріңдер.
2. Бөліктеп интегралдау формуласын жазып, оның мағынасын түсіндіріңдер.

Есептер

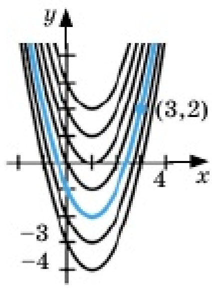
А

1.42. $f(x)$-тің көрсетілген нүкте арқылы өтетін алғашқы функциясын анықтаңдар:

1) $f(x) = 2x - 1$; 2) $f(x) = 2(x - 1)$.



1.3-сурет



1.4-сурет

1.43. $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$ формуласын қолданып берілген функциялардың интегралдарын табыңдар:

1) $f(x) = 10\cos 9x$; 2) $f(x) = 7\sin 4x$; 3) $f(x) = (2x - 3)^6$;
4) $f(x) = (7x - 9)^5$; 5) $f(x) = 2\cos 3x$; 6) $f(x) = (3x - 8)^5$;

7) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 4x}$; 8) $f(x) = (3x - 1)^3$; 9) $f(x) = 1 + \cos 3x$.

Интегралды есептеңдер **(1.44—1.46)**:

1.44. 1) $\int (3x+2)^3\,dx$; 2) $\int \left(\dfrac{x}{2}-1\right)^5 dx$; 3) $\int \dfrac{dx}{(2x-1)^3}$; 4) $\int \dfrac{dx}{(3x+1)^4}$.

1.45. 1) $\int (2 - 9x)^6 dx$; 2) $\int (7 + 5x)^{13} dx$; 3) $\int 6\left(\dfrac{x}{3}+1\right)^5 dx$.

1.46. 1) $\int \dfrac{dx}{\cos^2(2x-1)}$; 2) $\int \sin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)dx$; 3) $\int \sin(3 - 4x)\,dx$;

4) $\int \cos(3x - 2)\,dx$; 5) $\int \dfrac{dx}{\sin^2(x-4)}$; 6) $\int \dfrac{dx}{\cos^2(4x+4)}$;

7) $\int 3\cos 3x\,dx$.

1.47. $f(x)$-тің алғашқы функциясын анықтаңдар:

№	Функция	Жауап нұсқалары арасынан алғашқы функцияны көрсетіңдер		
		A	B	C
1	$f(x) = 7x^2 - 3\cos x - 3$	$\dfrac{7x^3}{3} - 3\sin x - 3x + C$	$14x - 3\sin x - 3x$	$\dfrac{7x^3}{3} - 3\cos x - 3x + C$
2	$f(x) = 5x^3 - 4$	$\dfrac{5}{4}x^4 - 4x + C$	$\dfrac{5}{4}x^4 - 4x$	$5x^4 - x + C$
3	$f(x) = (5x - 4)^3$	$\dfrac{5}{2}x^2 - 4x + C$	$\dfrac{(5x-4)^4}{5} + C$	$\dfrac{(5x-4)^4}{20} + C$
4	$f(x) = 7\sin 7x - 3x^2$	$7\cos x - x^3 + C$	$-\cos 7x - x^3 + C$	$49\cos x - 6x$
5	$f(x) = 10\cos 9x$	$\dfrac{10}{9}\sin 9x$	$90\sin 9x + C$	$\dfrac{10}{9}\cos 9x + C$

1.48. Дәрежені төмендету формуласын қолданып интегралдарды анықтаңдар:

1) $\int \cos^2 x\,dx$; 2) $\int \sin^2 x\,dx$; 3) $\int \sin^2 2x\,dx$; 4) $\int \cos^2 2x\,dx$.

▲ 3) Интеграл асты өрнегін дәрежені төмендету формуласы бойынша түрлендірген соң қосылғыштардың интегралдарын жеке есептесек,

$$\int \sin^2 2x dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$ ■

1.49. Интеграл астындағы өрнекті түрлендіріп, интегралдарды анықтаңдар:

1) $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)dx$; 2) $\int (\mathrm{tg}^2 x + 1)dx$;
3) $\int (\mathrm{ctg}^2 x + 1)dx$; 4) $\int \cos x \sin x dx$.

1.50*. Бөліктеп интегралдау әдісімен анықтаңдар:

1) $\int x\cos x dx$; 2) $\int x\sin 2x dx$; 3) $\int x\cos 2x dx$.

B

1.51. $f(x)$ үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңдар:

1) $f(x) = \dfrac{3}{\cos^2(4x - 1)} + 2\sin(3 - 2x) + 5$;

2) $f(x) = \dfrac{4}{\sin^2(3x - 2)} + 5\cos(7 - 4x) - 2$.

1.52. Интеграл астындағы функцияны ықшамдап, интегралдарды анықтаңдар:

1) $\int \left(\cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)\right)dx$; 2) $\int \sin 2x \sin 6x dx$;

3) $\int \cos 3x \cos 5x dx$; 4) $\int \sin 4x \cos 3x dx$;

5) $\int 12\cos\left(\dfrac{\pi}{8} - x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8} - x\right)dx$.

▲ 3) Интеграл астындағы өрнекті

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

формуласын қолданып түрлендіріп алған соң қосындының интегралы жеке интегралдардың қосындысына тең деген ережені қолданамыз:

4) $\int \sin 4x \cos 3x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin x)dx = \int \frac{1}{2} \sin 7x dx +$

$+\int \frac{1}{2} \sin x dx = -\frac{\cos 7x}{14} - \frac{\cos x}{2} + C.$ ■

1.53. Интегралды табыңдар:

1) $\int \left(1+\frac{x}{2}\right)^8 dx$; 2) $\int \frac{ydy}{\sqrt{3y^2+1}}$;

3) $\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{\left(1-5x^3\right)^3}}$; 4) $\int \frac{6x^2dx}{\sqrt{\left(2x^3-1\right)^2}}$.

▲ 3) $\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{(1-5x^3)^3}} = \left|x^3 = t, \quad 3x^2dx = dt\right| =$

$= \int \frac{dt}{\sqrt{(1-5t)^3}} = \int (1-5t)^{-\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{-5} \frac{(1-5t)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C =$

$= \frac{2}{5\sqrt{1-5t}} + C = \frac{2}{5\sqrt{1-5x^3}} + C.$ ■

1.54*. Айнымалыны алмастыру әдісін қолданып интегралды табыңдар:

1) $\int x(x+1)^3 dx$; 2) $\int (2x+1)\sqrt{x-5}dx$;

3) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$.

1.55. Интегралдарды қолайлы әдістермен есептеңдер:

1) $\int x(2x-3)^8dx$; 2) $\int x(1-2x)^5dx$;

3) $\int \frac{1-x^3}{1-x}dx$; 4) $\int \frac{x^5-3}{x^2}dx$.

1.56. Айнымалыны алмастыру әдісін қолданып интегралды табыңдар:

1) $\int \cos x\sqrt{\sin x}\,dx$; 2) $\int \sin x\sqrt{\cos x}\,dx$;

3) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$; 4) $\int \frac{\mathrm{tg}x+1}{\cos^2 x}dx$.

1.57. Интегралды табыңдар:

1) $\int \sin^3 x dx$; 2) $\int \cos^3 x dx$;

3) $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{\sin^2 x} dx$; 4) $\int 7 \frac{\operatorname{tg}^6 x}{\cos^2 x} dx$.

▲ 1) $\int \sin^3 x dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x dx = \int \sin x \cdot (1 - \cos^2 x) dx =$

$= \left| \cos x = t, -\sin x dx = dt \right| = \int -(1 - t^2) dt = \int (t^2 - 1) dt = \frac{t^3}{3} - t + C =$

$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$. ■

1.58. Айнымалыны алмастыру әдісін қолданып интегралды табыңдар:

1) $\int \frac{x+3}{(3x-4)^{3/2}} dx$; 2) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$;

3) $\int \frac{x^2}{(x-1)^4} dx$.

1.59. Интегралдарды анықтаңдар:

1) $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt[3]{3x+12}}$; 2) $\int \frac{2x}{(5-2x)^3} dx$;

3) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2 - 2x + 1}$; 4) $\int (2x+1)\cos(x^2 + x + 4) dx$.

C

1.60. Айнымалыны алмастыру әдісін қолданып интегралды табыңдар:

1) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$; 2) $\int \sqrt{t}\sqrt{1 + t\sqrt{t}}\, dt$.

1.61*. Бөліктеп интегралдау әдісімен есептеңдер:

1) $\int x^2 \sin x dx$; 2) $\int x^2 \cos 3x dx$;

3) $\int x \cdot \cos^2 x dx$; 4) $\int x \cdot \sin^2 x dx$.

▲ Есепті шешу үшін бөліктеп интегралдау әдісін екі рет қолданамыз:

1) $\int x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2,\ dv = \sin x dx, \\ du = 2x dx,\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x - \int 2x(-\cos x) dx =$

$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx$;

$$\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \cos x dx, \\ du = dx, & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int x^2 \sin x dx = -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C. \blacksquare$$

1.62. $\int \sin 2x \cos^4 x dx$ интегралын табыңдар.

1.63. Дәрежені төмендету формуласын екі рет қолданып интегралды анықтаңдар:

1) $\int \cos^4 x dx$; 2) $\int \sin^4 x dx$.

Қайталауға арналған жаттығулар

1.64. Функцияның көрсетілген нүктедегі туындысын табыңдар:

1) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x_0 = 2$; 2) $y = x \cdot \sin^2 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

1.65*. $f(x)$ функциясын зерттеп, графигін салыңдар:

$f(x) = x^2(x-2)^2$.

1.66. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ функциясы берілген. $y'(2)$-ні табыңдар.

1.67. $f(x) = \dfrac{1+x-2x^2}{x+1}$ функциясының графигін салыңдар.

1.68. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{18x^2 - 3x - 1}}.$$

1.3. Қисықсызықты трапеция және оның ауданы. Анықталған интеграл

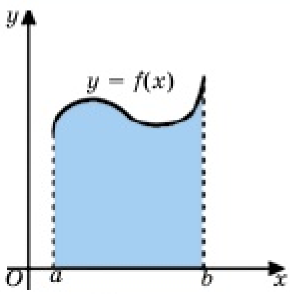
Бұл тақырыпта қисықсызықты трапецияның ауданын анықталған интеграл көмегімен есептеуді үйреніп, соңында:

- қисықсызықты трапецияның анықтамасын білесіңдер;
- Ньютон—Лейбниц формуласын қисықсызықты трапецияның ауданын табуға қолданасыңдар;
- анықталған интеграл ұғымын білесіңдер және оны есептейсіңдер;

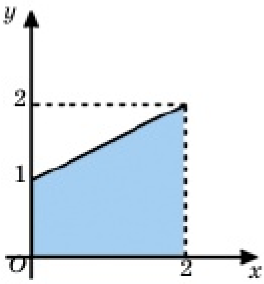
- қисықтармен шектелген жазық фигураның ауданын есептеуді үйренесіңдер.

1.3.1 Қисықсызықты трапеция және оның ауданы

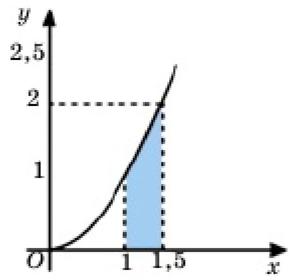
Анықтама. *Үзіліссіз, теріс емес $y = f(x)$ функциясының графигімен, Ox өсімен және $x = a$, $x = b$ түзулерімен шектелген жазық фигура **қисықсызықты трапеция** деп аталады (1.5-сурет).*



1.5-сурет



1.6-сурет

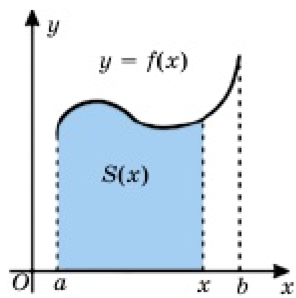


1.7-сурет

Қисықсызықты трапецияның табаны ретінде Ox өсіндегі $[a; b]$ кесіндісі алынады. Мысалы, $f(x) = 0,5x + 1$, $x \in [0; 2]$ функциясына сәйкес қисықсызықты трапеция бізге таныс (1.6-сурет).

$f(x) = x^2$, $x \in [1; 1,5]$ жағдайындағы қисықсызықты трапеция 1.7-суретте кескінделген.

$y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant 0$ болсын. Осы функцияның графигімен шектелген және $[a; x]$ кесіндісінде тұрғызылған қисықсызықты трапецияның ауданын $S(x)$ арқылы белгілейік (1.8-сурет). Олай болса, $S(x)$-ті $[a; b]$ аралығында анықталған функция ретінде қарастыруға болады. Бұл функция бірсарынды өспелі және $S(a)=0$ теңдігін қанағаттандырады.



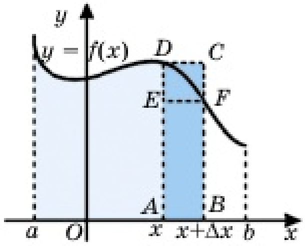
1.8-сурет

Теорема. *$y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant 0$ үздіксіз функция, $F(x)$ оның алғашқы функциясы болсын. Онда $y = f(x)$ функциясының графигімен, Ox өсімен және $x = a$, $x = b$ түзулерімен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданы*

$$S = F(b) - F(a)$$

формуласымен анықталады.

▲ Алдымен $S(x)$ функциясы (қисықсызықты трапецияның ауданы) $f(x)$-тің алғашқы функциясы екенін, демек, $S'(x) = f(x)$ теңдігі



1.9-сурет

орындалатынын көрсетейік. Туындының анықтамасы бойынша

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x}.$$

1.9-суреттен $S(x + \Delta x) - S(x) = S_{ABFD}$ және $S_{ABFE} \leqslant S_{ABFD} \leqslant S_{ABCD}$ екені белгілі. Тіктөртбұрыштардың ауданы:

$$S_{ABFE} = f(x + \Delta x) \cdot \Delta x \text{ және } S_{ABCD} = f(x) \cdot \Delta x.$$

$f(x + \Delta x) \cdot \Delta x \leqslant S_{ABFD} \leqslant f(x) \cdot \Delta x$ теңсіздігінің екі жағын да Δx-ке бөлсек,

$$f(x + \Delta x) \leqslant \frac{S_{ABFD}}{\Delta x} \leqslant f(x). \qquad (1)$$

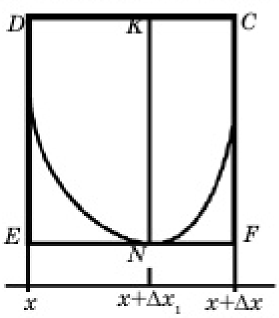
$\Delta x \to 0$ ұмтылғанда $f(x + \Delta x) \to f(x)$, сондықтан $\dfrac{S_{ABFD}}{\Delta x} \to f(x)$ қатынасы орындалады. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{S_{ABFD}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x}$ болғандықтан, (1) қос теңсіздіктен $S'(x) = f(x)$ теңдігін аламыз. Олай болса алғашқы функцияның қасиеті бойынша (п.1.1.)

$$S(x) = F(x) + C.$$

Берілген қисықсызықты трапецияның ауданын S арқылы белгілесек, ол $S = S(b) = F(b) + C$ теңдігімен анықталады. $S(a) = 0$ екенін ескерсек, $0 = S(a) = F(a) + C$. Ендеше, $C = -F(a)$. Бұдан

$$S = F(b) - F(a).$$ ■

Ескерту: $y = f(x)$ функциясын $[x;\ x + \Delta x]$ аралығында кемімелі деп алдық (1.9-сурет). Егер функция бұл аралықта бірсарынды өспелі болса да теорема жоғарыдағыдай дәлелденеді. Тек мұнда (1) қос теңсіздіктегі таңбаларды қарама-қарсы таңбаға өзгертсе жеткілікті.



1.10-сурет

Функция $[x;\ x + \Delta x]$ аралығында бірсарынды болмаса, Δx-ті кішірейтіп, $[x;\ x + \Delta x]$ аралығының орнына функцияның бірсарынды аралығын алу керек. Мысалы, 1.10-суретте көрсетілгендей Δx шамасының орнына Δx_1-ді қойып, $DENK$ тіктөртбұрышын аламыз.

1-мысал. $y = \sin x$, $x \in [0;\ \pi]$ функциясының графигімен және абсциссалар өсімен шектелген фигураның ауданын табайық (1.11-сурет).

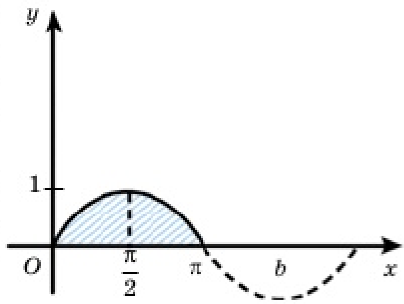
▲ $y = \sin x$-тің алғашқы функцияларының бірі ретінде $y = -\cos x$-ті алуға болады. $x \in [0;\ \pi]$ болғандықтан, $a = 0$, $b = \pi$ (1.11-сурет). Онда

$$S = F(b) - F(a)$$

формуласынан

$$S = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

Берілген фигураның ауданы 2-ге тең.



1.11-сурет

Жауабы: 2 кв.бірл. ■

Сонымен, $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$, $f(x) \geqslant 0$ функциясының графигімен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын табу үшін төмендегі алгоритм қолданылады:

1) *координаталық жазықтыққа* $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$ *функциясының графигін саламыз;*

2) $y = f(x)$ *функциясының* $F(x)$ *алғашқы функциясын анықтаймыз;*

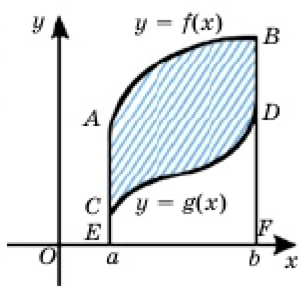
3) *егер айқын көрсетілмесе, қисықсызықты трапецияның төменгі табаны болатын кесіндінің шеткі нүктелерінің координаталарын* (a-мен b-ны) *анықтаймыз;*

4) $S = F(b) - F(a)$ *формуласы бойынша қисықсызықты трапецияның ауданын табамыз.*

Егер фигура $[a;\ b]$ аралығында $f(x) > 0$, $g(x) \geqslant 0$ үздіксіз функцияларының графиктерімен шектелсе және $f(x) \geqslant g(x)$, $x \in [a;\ b]$ шарты орындалса (1.12-сурет), бұл фигураның ауданы

$$S = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a))$$

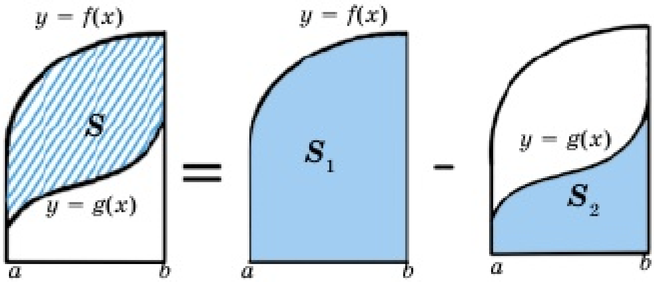
формуласымен анықталады. Мұндағы $F(x)$ және $G(x)$ функциялары — сәйкесінше $y = f(x)$ және $y = g(x)$-тің алғашқы функцияларының бірі.



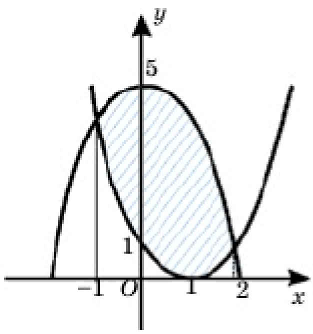
1.12-сурет

▲ Шынында да, 1.13-суреттен

$$S = S_1 - S_2 = (F(b) - F(a)) - (G(b) - G(a)) = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)).$$ ■



1.13-сурет



1.14-сурет

2-мысал. $y = 5 - x^2$ және $y = (x - 1)^2$ функцияларының графиктерімен шектелген фигураның ауданын табу керек (1.14-сурет).

▲ $y = 5 - x^2$ және $y = (x - 1)^2$ функциялары графиктерінің қиылысу нүктелерінің абсциссаларын табу үшін бұл функцияларды теңестіреміз (өйткені бұл функциялардың сол нүктелердегі мәндері тең).

$(x - 1)^2 = 5 - x^2$ теңдеуін аламыз. Бұл квадрат теңдеудің шешімдері $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

$y = 5 - x^2$ функциясының алғашқы функцияларының бірі $y = 5x - \dfrac{x^3}{3}$, ал $y = (x - 1)^2$ функциясының алғашқы функцияларының бірі $y = \dfrac{1}{3}(x-1)^3$. Сонымен,

$$S = \left(5x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}(x-1)^3\right)\Bigg|_{x=2} - \left(5x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}(x-1)^3\right)\Bigg|_{x=-1} =$$

$$= \left(10 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(-5 + \frac{1}{3} + \frac{8}{3}\right) = 9.$$

Жауабы: 9 кв.бірл. ■

1.3.2 Анықталған интеграл және оның қасиеттері

Анықтама. *$y = f(x)$, $x \in [a; b]$ үздіксіз функция болсын. Оның b және a нүктелеріндегі алғашқы функциясы мәндерінің айырымын осы функцияның **анықталған интегралы** деп атайды және оны $\int_a^b f(x)dx$ арқылы белгілейді («интеграл a-дан b-ға дейін эф икстен дэ икс» деп оқылады). a және b сандары интегралдың сәйкесінше төменгі және жоғарғы шектері, $f(x)$ интеграл астындағы функция деп аталады.*

Сонымен, анықтама бойынша

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Бұл ***Ньютон—Лейбниц формуласы.***

$F(b) - F(a)$ айырымын қысқаша $F(x)\Big|_a^b$ арқылы белгілейді, сондықтан Ньютон—Лейбниц формуласын былай жазуға да болады:

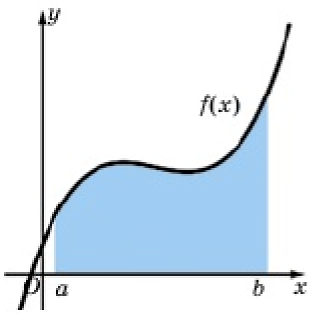
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{2}$$

3-мысал. 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; 2) $\int_1^2 (x^2 - 3)dx$ интегралдарын есептейік.

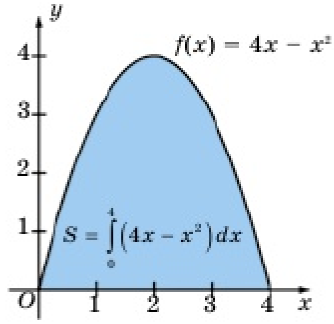
▲ 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$.

2) $\int_1^2 (x^2 - 3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 3x\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 3\cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 3\cdot 1\right) = -\frac{2}{3}$. ■

Анықталған интегралды жоғарыдан $f(x) \geqslant 0$ функциясымен, төменнен абсцисса өсімен және $x=a$, $x=b$ түзулерімен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын тапқанда қолдануға болады (1.15-сурет). Мысалы, жоғарыдан $f(x) = 4 - x^2$ параболасымен, төменнен абсцисса өсімен шектелген фигураның ауданы $S = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx$ анықталған интегралымен есептеледі (1.16-сурет).



1.15-сурет

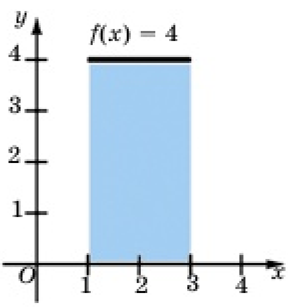


1.16-сурет

Сонымен, $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant 0$ функциясы үшін анықталған интегралдың геометриялық мағынасы — жоғарыдан $f(x) \geqslant 0$ функциясымен, төменнен абсцисса өсімен және $x=a$, $x=b$ түзулерімен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданы.

4-мысал. Берілген анықталған интегралды сипаттайтын фигураны тұрғызып, оның ауданын табу керек:

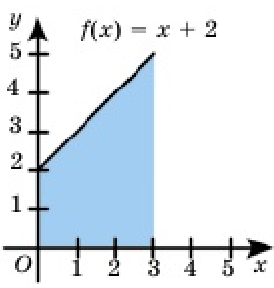
1) $\int_1^3 4dx$;   2) $\int_0^3 (x+2)\,dx$;   3) $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.



1.17-сурет

▲ 1) $\int_1^3 4dx$ анықталған интегралының геометриялық мағынасы — тіктөртбұрыштың ауданы (1.17-сурет). Геометриялық жолмен есептесек, төртбұрыштың ауданы $S = 2 \cdot 4 = 8$ кв.бірл. Енді оны анықталған интеграл көмегімен есептейік:

$$S = \int_1^3 4dx = 4x\Big|_1^3 = 4\cdot3 - 4\cdot1 = 12 - 4 = 8 \text{ кв.бірл.}$$



1.18-сурет

2) $\int_0^3 (x+2)\,dx$ анықталған интегралы 1.18-суретте кескінделген трапецияның ауданына тең. Трапецияның ауданын геометриялық жолмен есептесек, үлкен табаны $a = 5$, кіші табаны $b = 2$, биіктігі $h = 3$ болғандықтан,

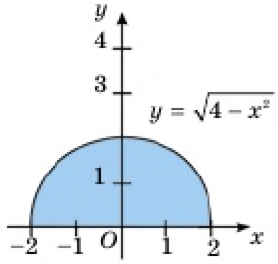
$$S = \frac{a+b}{2}\cdot h = \frac{5+2}{2}\cdot 3 = \frac{21}{2} = 10{,}5 \text{ кв.бірл.}$$

Ньютон—Лейбниц формуласы бойынша бұл аудан былай есептеледі:

$$\int_0^3 (x+2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_0^3 = \left(\frac{9}{2}+6\right) - 0 = 10,5.$$

3) $S = \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Интеграл астындағы $y = \sqrt{4-x^2}$ функциясын квадраттап айнымалыларды бір жаққа жинасақ, $y^2 + x^2 = 4$ шығады. Бұл центрі координаталар басында, радиусы 2-ге тең шеңбердің теңдеуі (1.19-сурет). Анықталған интеграл жарты шеңбердің ауданын береді. Оны геометриялық формуламен есептейік:



1.19-сурет

$$S = \frac{\pi \cdot R^2}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi \text{ кв.бірл.}$$

Анықталған интегралдың қасиеттері

1°. *Интеграл шектерінің орындарын алмастырғанда интегралдың таңбасы қарама-қарсыға өзгереді:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

Анықталған интегралдың анықтамасына сәйкес,

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, ал $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$.

Олай болса, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$.

Мысалы, $\int_3^0 (x+2)\,dx = -\int_0^3 (x+2)\,dx$.

2°. *Кез келген $f(x)$ функциясы үшін мына теңдік орындалады:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

Мысалы, $\int_\pi^\pi \sin x dx$ интегралы үшін

$$\int_\pi^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_\pi^\pi = -\cos\pi + \cos\pi = 0\,.$$

3°. *Кез келген a, b және c сандары үшін*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

теңдігі орындалады.

Мысалы, $\int_{-1}^{1}|x|dx = \int_{-1}^{0}(-x)dx + \int_{0}^{1}xdx = 0,5 + 0,5 = 1$.

4°. *Кез келген $f(x)$, $g(x)$ функциялары мен тұрақты k саны үшін*

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^c f(x)dx \pm \int_c^b g(x)dx \quad \textit{және} \quad \int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

теңдіктері орындалады.

5°. *Әрбір $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant 0$ теріс емес функциясы үшін*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

теңсіздігі орындалады.

Топтық жұмыс

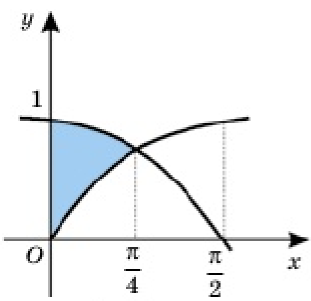
Анықталған интегралдың қасиеттері мен олардың салдарларын Ньютон—Лейбниц формуласы көмегімен дәлелдеңдер.

Мысалы, 3°-қасиетті дәлелдейік.

▲ 3°. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = (F(b) - F(c)) + (F(c) - F(a)) =$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$ ■

5-мысал. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x \geqslant 0$ қисықтарымен және ординаталар өсімен шектелген фигураның ауданын табу қажет (1.20-сурет).



1.20-сурет

▲ Алдымен берілген қисықтардың қиылысу нүктелерін анықтайық:

$$\sin x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$$

Бұл шешімдер ішінен есеп шартын қанағаттандыратыны $x = \frac{\pi}{4}$.

Олай болса,

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - \sin x)dx = (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - \sin 0 - \cos 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1 \text{ кв. бірл.}$$ ■

Анықталған интегралды айнымалыны алмастыру әдісімен есептегенде оның шектерін жаңа айнымалыға сәйкес өзгерту қажет:

$$\int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2+1\right)^3 (2x)\,dx = \boxed{x \text{ айнымалысының шектері}}$$

$$= \left|u = x^2+1\right| = \frac{1}{2}\int_1^2 u^3 du = \frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right) \quad \boxed{u \text{ айнымалысының шектері}}$$

Есептеуді аяқтайық:

$$\frac{1}{2}\int_1^2 u^3 du = \frac{1}{2}\,\frac{u^4}{4}\bigg|_1^2 = \frac{1}{8}(16-1) = \frac{15}{8}.$$

1. Қисықсызықты трапеция деген не?
2. Қисықсызықты трапецияның ауданы қандай формуламен анықталады?
3. Анықталған интеграл деген не?
4. Ньютон–Лейбниц формуласын жазыңдар.
5. Анықталған интегралдың қасиеттерін жазып, олардың мағынасын түсіндіріңдер.

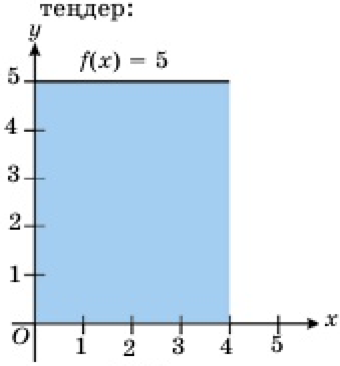
➢ **Қосымша электрондық ресурстар**

https://www.desmos.com/calculator — онлайн графиктік калькулятор

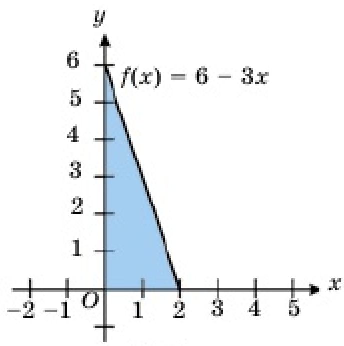
Есептер

А

1.69. 1.21, 1.22-суреттерде көрсетілген фигуралардың ауданын геометриялық жолмен және анықталған интеграл арқылы есептеңдер:

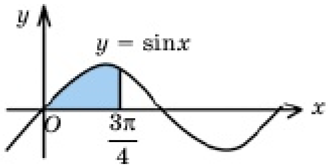


1.21-сурет

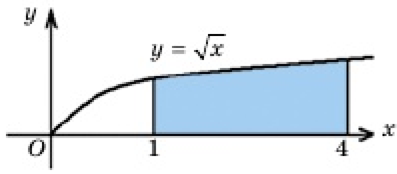


1.22-сурет

1.70. 1.23, 1.24-суреттерде көрсетілген қисықсызықты трапецияның ауданын анықталған интеграл арқылы өрнектеп, есептеңдер:

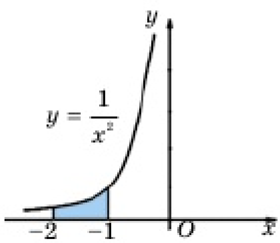


1.23-сурет

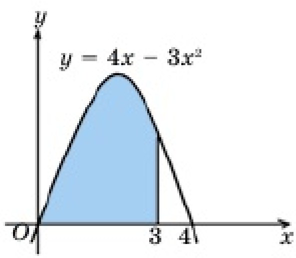


1.24-сурет

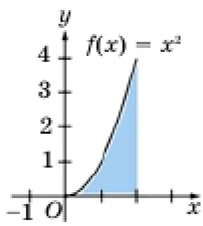
1.71. 1.25—1.27-суреттерде кескінделген қисықсызықты трапецияның ауданын анықталған интеграл арқылы жазып есептеңдер:



1.25-сурет



1.26-сурет



1.27-сурет

1.72. $y = f(x)$ функциясының графигімен, $x = a$, $x = b$ түзулерімен және абсциссалар өсімен шектелген фигураны кескіндеңдер, нәтижені онлайн графиктік калькулятор көмегімен тексеріңдер:

1) $y = x$, $a = 0$, $b = 2$;　　2) $y = x^2$, $a = 0$, $b = 2$;

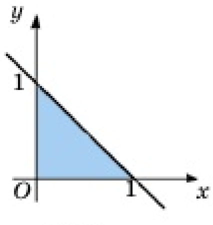
3) $y = \cos x$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$;　　4) $y = 1 - x^2$, $a = -1$, $b = 1$.

1.73. $y = f(x)$ функциясының графигімен, $x = a$, $x = b$ түзулерімен және абсциссалар өсімен шектелген қисықсызықты трапецияны кескіндеңдер:

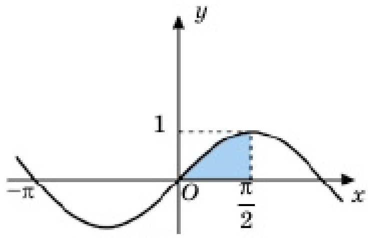
1) $y = x^2$, $a = 1$, $b = 3$;　　2) $y = x^2$, $a = 0$, $b = 1$;

3) $y = 4x - x^2$, $a = 2$, $b = 4$;　　4) $y = \frac{1}{x^2}$, $a = -2$, $b = -1$.

1.74. 1.28, 1.29-суреттерде көрсетілген қисықсызықты трапецияның қандай функцияның графигімен шектелгенін анықтап, оның ауданын табыңдар:



1.28-сурет



1.29-сурет

1.75. 1.72-есепте берілген фигуралардың ауданын табыңдар.

1.76. 1.73-есепте берілген фигуралардың ауданын табыңдар.

1.77. Есептеңдер:

1) $\int\limits_{2}^{6} 8dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{3} xdx$; 3) $\int\limits_{-1}^{1} x^3dx$;

4) $\int\limits_{1}^{4} 4x^2dx$; 5) $\int\limits_{-2}^{1} (2x^2+3)dx$.

1.78. Төмендегі қисықтармен шектелген фигураның ауданын табыңдар, сәйкес фигураны кескіндеңдер:

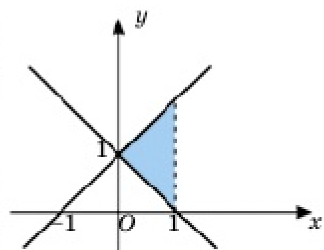
1) $y = 2 - x$, $x = 0$, $y = 0$;

2) $y = 2x - x^2$, $y = 0$;

3) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$;

4) $y = x - 1$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.

1.79. 1.30-суретте кескінделген фигураның қандай функцияның графиктерімен шектелгенін анықтап, оның ауданын есептеңдер.



1.30-сурет

1.80. Жоғарыдан $f(x)$ функциясының графигімен, төменнен берілген интервалмен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын Ньютон—Лейбниц формуласы арқылы есептеңдер:

1) $f(x) = x + 2$ және $[0, 4]$ интервалы;

2) $f(x) = 4 - x^2$ және $[-1, 2]$ интервалы.

1.81. Ньютон—Лейбниц формуласын қолданып, мына анықталған интегралды есептеңдер:

1) $\int_{-5}^{5} 10x^3dx$; 2) $\int_{-1}^{6} 6x(x-1)dx$; 3) $\int_{-1}^{3} (3x^2-5)dx$;

4) $\int_{-2}^{1} (12x^5-36)dx$; 5) $\int_{-1}^{1} (x^4+x^2)dx$; 6) $\int_{-5}^{4} x^2dx$.

Есептеңдер (**1.82—1.83**):

1.82. 1) $\int\limits_{-2}^{3} (2x-1)dx$; 2) $\int\limits_{1}^{8} (3-x)dx$; 3) $\int\limits_{1}^{9} \sqrt{x}dx$; 4) $\int\limits_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

1.83. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{2\sin^2 x}$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$;

4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$; 5) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin x dx$.

1.84. Анықталған интегралдың мәнін көрсетіңдер:

1. $\int_{0}^{4} \sqrt{x}dx$.

a) 5; *b*) − 3; *c*) 10; *d*) $5\frac{1}{3}$; *e*) $2\frac{1}{4}$.

2. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} 4\cos\pi x dx$.

a) 4; *b*) $-\frac{1}{2\pi}$; *c*) 2π; *d*) $2\frac{1}{3}$; *e*) $\frac{4}{\pi}$.

3. $\int_{0}^{1} 2\sin\pi x dx$.

a) $\frac{4}{\pi}$; *b*) $\frac{1}{2\pi}$; *c*) 15π; *d*) $\frac{2}{\pi}$; *e*) $\frac{1}{\pi}$.

4. $\int_{0}^{9} (1+\sqrt{x})dx$.

a) − 3; *b*) 9; *c*) 27; *d*) 3; *e*) 2.

Есептеңдер (**1.85—1.88**):

1.85. 1) $\int\limits_{1}^{2} \frac{x^2+\sqrt{x}}{x}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{2} (x^2+2x)dx$;

3) $\int_{1}^{3}\left(x^2+1\right)dx$; 4) $\int_{0}^{2}\left(2x-x^2\right)dx$.

1.86. 1) $\int_{0}^{2}\left(x^2+2\right)dx$; 2) $\int_{0}^{4}3\sqrt{x}dx$;

3) $\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2}+x^{-3}\right)dx$; 4) $\int_{-2}^{1}\left(\frac{3}{x^3}-2x^2\right)dx$.

1.87. 1) $\int_{1}^{2}\frac{4x^5-3x^4+x^3-1}{x^2}dx$; 2) $\int_{-2}^{-1}\frac{5x^7-4x^6+2x}{x^3}dx$;

3) $\int_{2}^{3}\frac{6x^4-4x^3+7x^2-1}{x^2}dx$; 4 $\int_{-2}^{-1}\frac{3x^6-4x^5-7x^4+3x^2}{x^4}dx$.

1.88. 1) $\int_{0}^{\pi}\left(5x^4-5\cos x\right)dx$; 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(7\sin x-3x^2\right)dx$;

3) $\int_{0}^{1}\left(3x^2-2x+1\right)dx$; 4) $\int_{1}^{3}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$.

1.89. Интеграл астындағы өрнекті ықшамдап, анықталған интегралды есептеңдер:

1) $\int_{-1}^{0}\frac{\left(x^2-2x\right)\left(3-2x\right)}{x-2}dx$; 2) $\int_{2}^{3}\frac{\left(x^2-3x+2\right)\left(2+x\right)}{x-1}dx$;

3) $\int_{2}^{3}\frac{\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)}{x^2+x-2}dx$; 4) $\int_{-1}^{1}\frac{\left(9-x^2\right)\left(x^2-16\right)}{x^2-7x+12}dx$.

Интегралды есептеңдер **(1.90—1.91):**

1.90. 1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{8}}\sin 2x dx$; 2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}4\cos 3x dx$.

1.91. 1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2\sin\frac{x}{3}dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{5}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{7}{\cos^2 3x}dx$.

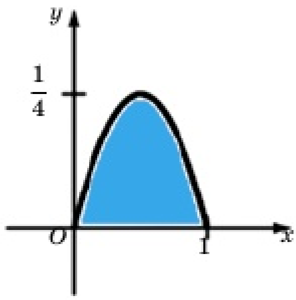
1.92. Интеграл астындағы өрнекті түрлендірген соң интегралды есептеңдер:

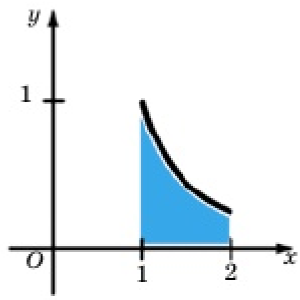
1) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos^2 \frac{x}{2}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 3x dx$;

3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 3x dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos 7x \cos 5x dx$.

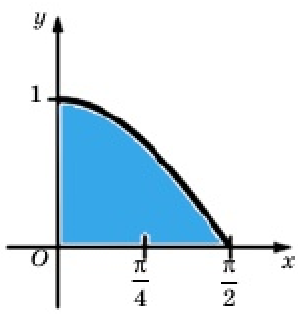
1.93. Анықталған интеграл көмегімен төмендегі қисықсызықты трапецияның аудандарын есептеңдер:

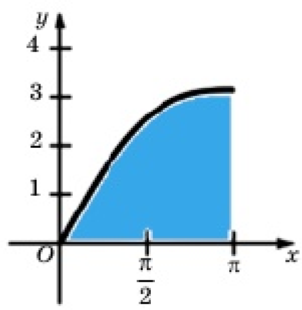
1) $y = x - x^2$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$;





3) $y = \cos x$; 4) $y = x + \sin x$;





1.94. Қисықтармен шектелген трапецияны кескіндеп, геометриялық жолмен ауданын табыңдар:

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ x = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

1.95. Берілген түзулермен шектелген трапецияның ауданын геометриялық жолмен және интеграл арқылы табыңдар, сызбасын салыңдар:

1) $\begin{cases} y = -\dfrac{2}{3}x + 4; \\ y = 0; \\ x = 0; \\ x = 4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 4x - 5; \\ y = 0; \\ x = -2; \\ x = -3. \end{cases}$

1.96. Кубтық парабола және түзулермен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын табыңдар:

1) $\begin{cases} y = x^3 - x; \\ y = 0; \\ x = -1; \\ x = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x^3; \\ y = 0; \\ x = -3; \\ x = 3. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 4x^3; \\ y = 0; \\ x = 1; \\ x = 2. \end{cases}$

1.97. Берілген парабола және абцисса өсімен шектелген қисықсызықты трапецияны салып, ауданын табыңдар:

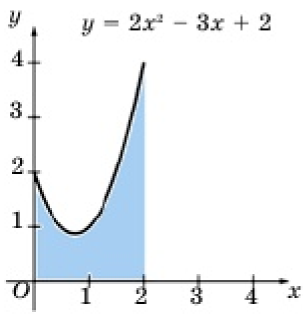
1) $\begin{cases} y = 9 - x^2; \\ y = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x^2 + 2x; \\ y = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - x - 6; \\ y = 0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4; \\ y = 0. \end{cases}$

1.98. Берілген парабола және түзулермен шектелген қисықсызықты трапецияны салып, ауданын табыңдар:

1) $\begin{cases} y = 0; \\ y = x^2 + 1; \\ x = -1; \\ x = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x^2 + 1; \\ y = 0; \\ x = 1; \\ x = 5. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - x; \\ y = 0; \\ x = 0; \\ x = 2. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 2; \\ y = 0; \\ x = 0; \\ x = 2. \end{cases}$



1.31-сурет

▲ 4) Есепте берілген парабола және түзулермен шектелген фигураның сызбасы 1.31-суретте кескінделген. Фигураның ауданын табу үшін анықталған интегралды есептесек жеткілікті:

$$S = \int_0^2 \left(2x^2 - 3x + 2\right)dx =$$

$$= \left(2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^2 = \left(2\frac{2^3}{3} - \right.$$

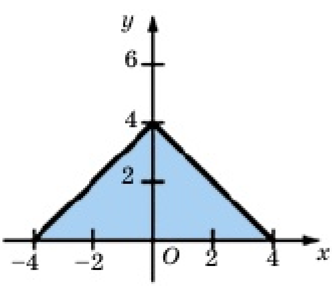
$$\left. - 3\frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right) - \left(2\frac{0^3}{3} - 3\frac{0^2}{2} + 2\cdot 0\right) = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3} \text{ кв. бірл.}$$ ■

1.99. Мына мәліметтерді анықтаңдар:

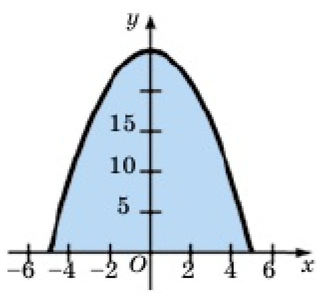
1) $f(x)$ функциясы жұп болса, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ теңдігі орындала ма? Жауапты түсіндіріңдер.

2) Төмендегі 1.32, 1.33-суреттерді қолданып, фигураның ауданын оңтайлы тәсілмен есептеңдер.

$f(x) = 4 - |x|$ $f(x) = 25 - x^2$.



1.32-сурет



1.33-сурет

B

1.100. $y = f(x)$ функциясының графигімен, $x = a$, $x = b$ түзулерімен және абсцисса өсімен шектелген фигураны кескіндеңдер, ауданын есептеңдер:

1) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $a = 1$, $b = 2$; 2) $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $xy = 4$, $a = 1$, $b = 4$; 4) $y = 4 - x^2$.

1.101. Қисықтармен шектелген фигураны кескіндеп, ауданын табыңдар:

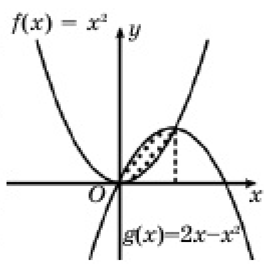
1) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{9}x^2; \\ y = x. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2 + 4; \\ y = 6 - x. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 2x^2 - x; \\ y = x. \end{cases}$

1.102. Қисықтармен шектелген фигураның ауданын табыңдар:

1) $\begin{cases} f(x) = x^2; \\ g(x) = 2x - x^2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}x^2; \\ g(x) = 4 - x. \end{cases}$

3) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}; \\ g(x) = x. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x}; \\ x = 1; \\ x = 9. \end{cases}$

▲ 1) $\begin{cases} f(x) = x^2; \\ g(x) = 2x - x^2 \end{cases}$ функцияларының графиктерін салайық (1.34-сурет). Суреттен $g(x)$ функциясының графигі $f(x)$ функциясының графигінен жоғары орналасқан. Қиылысу нүктелерін табу үшін екі функцияны теңестіріп теңдеуді шешеміз:



1.34-сурет

$x^2 = 2x - x^2$;

$2x^2 - 2x = 0$;

$2x(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

Алғашқы функцияларды табайық:

$$F(x)=\frac{x^3}{3};\ G(x)=x^2-\frac{x^3}{3}.$$

Ньютон—Лейбниц формуласы көмегімен есептейік:

$$S=\int_0^1 (G(x)-F(x))dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\left(x^2-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{2}{3}-0=\frac{1}{3}.$$ ■

1.103. Берілген қисықтармен шектелген фигураны кескіндеп, ауданын табыңдар:

1) $\begin{cases} y=x^2; \\ y=2-x^2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=5+3x-2x^2; \\ y=x+1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=x^2+4x; \\ y=x+4. \end{cases}$

Анықталған интегралды есептеңдер **(1.104—1.105):**

1.104. 1) $\int_1^2 x\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)dx$; 2) $\int_1^2 \frac{x^6+8x^4+x}{x}dx$;

3) $\int_{-1}^1 (x+1)^2(2x+3)dx$; 4) $\int_6^8 (x-7)^7 dx$.

1.105. 1) $\int_{-1}^1 (2x+3)^6 dx$; 2) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x-3)^{10}}dx$;

3) $\int_3^4 \sqrt{x-3}\,dx$; 4) $\int_{-8}^8 \frac{dx}{\sqrt{5+\frac{x}{2}}}$.

1.106. Интеграл астындағы өрнекті түрлендіріп алып, анықталған интегралды есептеңдер:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{16}} \sin 2x\cos 2x dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin x+\cos x)^2 dx$;

3) $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$; 4) $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$;

5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x dx$;   6) $\int\limits_0^{\pi} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)dx$.

1.107*. Егер $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leqslant x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x < 2, \\ 3, & 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$ болса, $\int_{-1}^{4} f(x)dx$ интегралын есептеңдер.

1.108. Модульдің анықтамасын қолданып интегралды есептеңдер:

1) $\int_0^3 |x-2|dx$; 2) $\int_{-3}^1 |x|dx$; 3) $\int_0^4 |2x-6|dx$; 4) $\int_0^2 |2x-1|dx$.

▲4) $\int_0^2 |2x-1|dx$ интегралын есептейік (1.35-сурет). Модульдің анықтамасы бойынша

$$|2x-1| = \begin{cases} -(2x-1), & x < 0,5; \\ 2x-1, & x \geqslant 0,5. \end{cases}$$

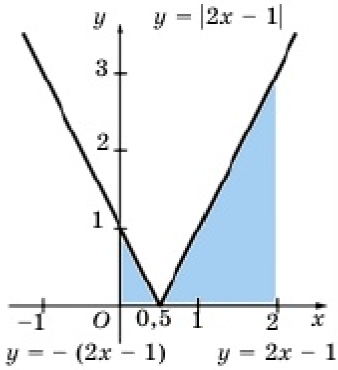
Сондықтан

$$\int_0^2 |2x-1|dx = \int_0^{0,5} (-2x+1)dx + \int_{0,5}^2 (2x-1)dx;$$

$$\int_0^{0,5} (-2x+1)dx = \frac{1}{4}, \text{ ал}$$

$$\int_{0,5}^2 (2x+1)dx = 2,25,$$

$$\int_0^2 |2x-1|dx = 0,25 + 2,25 = 2,5 .$$ ■



1.35-сурет

1.109. Интеграл шегін оңтайлы бөліктеп, берілген функцияның интегралын есептеңдер:

1) $\int_0^3 f(x)dx$, егер $f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \leqslant x < 2; \\ 1, & 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

2) $\int_{-2}^2 f(x)dx$, егер $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leqslant x < -1; \\ 4, & -1 \leqslant x < 1; \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

1.110. Қисықтармен шектелген фигураның ауданын табыңдар:

1) $y = x^4 - 29x^2 + 100$, $y = 0$;

2) $y = 2\cos x, \quad y = 1, \ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

1.111. 1) $\int_{-1}^{1}\left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = 0$; 2) $\int_{-1}^{1}\left(Ax^2 + Bx + C\right) \cdot xdx = 0$ теңдіктері орындалатындай A, B және C сандарын табыңдар.

C

1.112*. Төмендегі қисықтармен шектелген фигураның ауданын табыңдар:
1) $4y = x^2$, $y^2 = 4x$; 2) $y = \cos^5 x\sin 2x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

▲2) $y = \cos^5 x\sin 2x,\ \ y = 0,\ \ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin 2x dx =$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x 2\sin x\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\sin x dx.$$

Айнымалыны алмастыру әдісін қолданып мына интегралды анықтайық:

$$\int \cos^6 x\sin x dx = \left|\cos x = t \Rightarrow -\sin x = dt\right| =$$

$$= \int -t^6 dt = -\frac{t^7}{7} + C = -\frac{\cos^7 x}{7} + C \Rightarrow$$

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\sin x dx = -\frac{2\cos^7 x}{7}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2\cos^7\dfrac{\pi}{2}}{7} + \frac{2\cos^7 0}{7} = \frac{2}{7}. \ ■$$

1.113. $y = 0$, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ қисықтарымен шектелген фигураның ауданын табыңдар.

1.114. Анықталған интегралды есептеңдер:

1) $\int\limits_0^1 \left(2x^2 - 5\right)^3 dx$; 2) $\int\limits_3^{-18} \sqrt[3]{2 - \dfrac{x}{3}}dx$; 3) $\int\limits_0^3 (1 + 2x)^9 dx$;

4) $\int\limits_1^5 \dfrac{xdx}{\sqrt{4x + 5}}$; 5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$; 6) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3 x dx$.

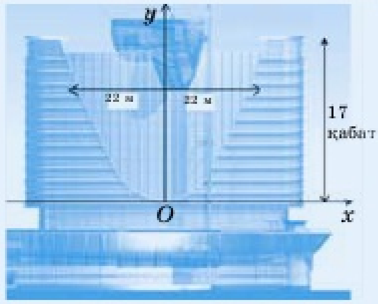
1.115. $f(x)$ функциясы тақ болса, $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ анықталған интегралының мәні қандай болады? Қорытынды жасаңдар.

1.116. Тұжырымның қате екенін түсіндіріңдер:

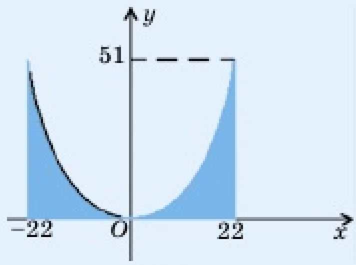
1) $\int\limits_{-1}^{1} x^{-2}dx = (-x^{-1})\Big|_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$; 2) $\int\limits_{-2}^{1} \dfrac{2}{x^3}dx = \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = -\dfrac{3}{4}$.

Практикалық тапсырма

Шығармашылық есеп. Бөлімнің басында бейнеленген «Москва» ғимаратының параболамен шектелген бөлігінің ауданын табыңдар (1.36-сурет).
Көмек: параболаның төбесі ғимараттың 5-қабатында орналасқан. Параболаның аумағы 17 қабатты қамтиды. Әр қабаттың биіктігі шамамен 3 м және параболаның ең жоғарғы жолағының ұзындығы шамамен 44 м деп алғанда 1.37-суретте көрсетілген модель шығады.



1.36-сурет



1.37-сурет

Қайталауға арналған жаттығулар

1.117. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\text{tg}x+\text{tg}y}{\text{ctg}x+\text{ctg}y}$; 2) $\dfrac{\cos^2 x-\text{ctg}^2 x}{\sin^2 x-\text{tg}^2 x}$.

1.118. 3-ке бөлгенде 1-ге тең қалдық қалатын барлық екі таңбалы сандардың қосындысын табыңдар.

1.119. Функцияның өспелі және кемімелі аралықтарын анықтаңдар:

1) $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 8$;

2) $y = 3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + 49$.

1.4. Анықталған интегралдың геометриялық және практикалық есептерде қолданылуы

Бұл тақырыпта анықталған интеграл көмегімен практикалық есептерді шешуді үйреніп, соңында:

- қашықтық пен жұмысты есептеуге арналған физикалық есептерді шығарғанда анықталған интегралды қолданып үйренесіңдер;
- анықталған интегралды қолданып айналу денелерінің көлемін есептейтін формуланы білесіңдер және қолданасыңдар.

1.4.1. Қашықтық пен жұмысты есептеуде анықталған интегралды қолдану

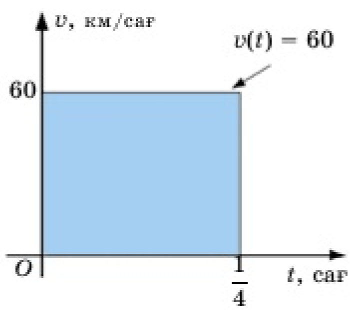
Анықталған интегралды түзусызықты қозғалыс кезіндегі жүрілген жолды (қашықтықты) есептеу үшін қолдануға болады. Туындының физикалық мағынасы дененің берілген нүктедегі жылдамдығы екенін білесіңдер: $v(t) = s'(t)$. Сондықтан орын ауыстыру

$$s(t) = \int v(t)dt$$

формуласымен есептеледі. Мысалдар қарастырайық:

Көлік түзу сызық бойымен 15 мин ($\frac{1}{4}$ сағ) тұрақты 60 км/сағ жылдамдықпен қозғалсын делік. Оның жүрген жолы

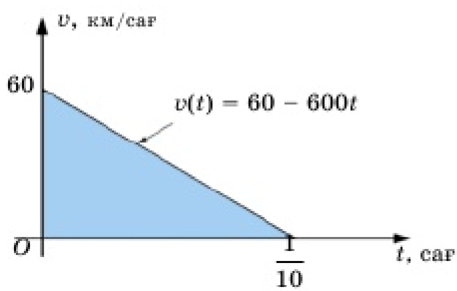
$$s = v \cdot t = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15 \text{ км}.$$



1.38-сурет

Жылдамдықтың уақытқа тәуелділік графигін салсақ (1.38-сурет), ол — горизонталь түзу. Көліктің жүрген жолы, сан мәні бойынша, боялған тіктөртбұрыштың ауданына тең. Олай болса, көліктің жүрген жолын табу үшін анықталған интегралды қолдануға болады:

$$S = \int_0^{\frac{1}{4}} 60\,dt = 15 \text{ км}.$$



1.39-сурет

Енді көліктің жылдамдығы бірқалыпты кемімелі болсын және 6 минуттан кейін тоқтайды делік (1.39-сурет). Бұл жағдайда орташа жылдамдық

$$v_{\text{орт}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{60 + 0}{2} = 30 \text{ км/сағ}.$$

Ал жүрілген жол:

$$s = v_{\text{орт}} \cdot t = 30 \cdot \frac{1}{10} = 3 \text{ км}.$$

Анықталған интеграл арқылы есептесек те, дәл осы нәтижені алатынымызды көрсетейік.

Алдымен жылдамдықтың уақытқа тәуелділік заңын тауып алайық. Ол тәуелділік — сызықты функция. Түзу теңдеуінің формуласына сәйкес

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow\frac{v-v_1}{v_2-v_1}=\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\Rightarrow\frac{v-60}{0-60}=\frac{t-0}{\frac{1}{10}-0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{10}(v-60)=-60t\Rightarrow v=60t-600t.$$

Енді анықталған интегралды қолдансақ,

$$S=\int_0^{\frac{1}{10}}(60-600t)\,dt=\left(60t-300t^2\right)\Big|_0^{\frac{1}{10}}=3\text{ км}.$$

Жоғарыдағы екі мысалдың нәтижелерінен қозғалыстағы дене (материялық нүкте) жылдамдығының бағыты өзгермесе жүрілген жолды

$$s=\int_{t_1}^{t_2}v(t)\,dt \tag{1}$$

формуласымен есептеуге болады.

Жылдамдықтың бағыты өзгерсе, анықталған интегралдың мәні теріс. Ал арақашықтықтың мәні оң болу керек. Сондықтан жалпы жағдай үшін жүрілген жолды мына интегралмен есептейді:

$$s=\left|\int_{t_1}^{t_2}v(t)\,dt\right|.$$

Қорытынды. *Материялық нүкте қозғалысының жылдамдығы үзіліссіз $v(t)$ функциясымен берілсін. Онда t_1 және t_2 уақыт аралығындағы материялық дененің жүрген жолының сан мәні $y=v(t)$ функциясы $t=t_1$, $t=t_2$ түзулері және $[t_1;\ t_2]$ интервалымен шектелген қисықсызықты трапеция ауданының шамасына тең.*

1-мысал. Материялық нүкте түзу сызық бойымен

$$v(t)=t^3-2t+3\ (\text{м/с})$$

жылдамдығымен қозғалсын. Нүктенің [0; 2] уақыт аралығында жүрген жолын табайық.

▲ (1) формулаға сәйкес $s=\int_0^2\left(t^3-2t+3\right)dt=\left(\frac{t^4}{4}-t^2+3t\right)\Big|_0^2=6$ м.

Жауабы: 6 м. ■

Айталық, материялық нүкте Ox өсі (түзу сызық) бойымен айнымалы $F = F(x)$ күшінің әрекетінен қозғалсын. F күшінің әрекетінен нүктенің $[a; b]$ аралығында орын ауыстыру үшін жасаған жұмысы

$$A = \int_a^b F(x)dx. \qquad (2)$$

2-мысал. Серіппені 1 см-ге созу үшін 0,2 кН күшпен әрекет ету қажет болса, оны 10 см-ге созу үшін қандай жұмыс жасалатынын анықтайық.

▲ Гук заңы бойынша серіппені созуға қажетті күш шамасы оның ұзаруына пропорционал: $F = kx$, мұндағы x — серіппенің ұзаруы. $x = 0{,}01$ м болғандықтан, $0{,}2 = k \cdot 0{,}01 \Rightarrow$ $\Rightarrow k = 20$ — бұл пропорционалдық коэффициенттің шамасы. Сонымен, күш серіппеге $F = 20x$ заңдылығымен әрекет етеді. Онда (2) формула бойынша серіппені 0,1 метрге (10 см) созғанда

$$A = \int_0^{0,1} 20xdx = 10x^2\Big|_0^{0,1} = 0{,}1 \text{ кДж}$$

жұмысы жасалады.

Жауабы: 0,1 кДж. ■

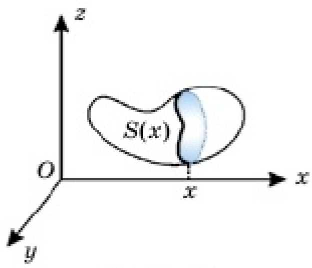
Ескерту. (1) және (2) формулаларды материялық нүкте тек түзу сызық бойымен қозғалғанда ғана қолдануға болатынын есте сақтау қажет.

1.4.2 Дененің көлемін есептеу

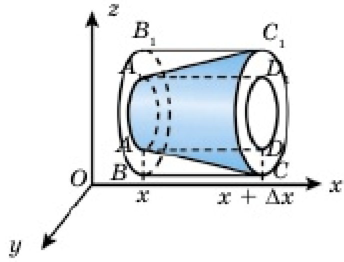
Қисықсызықты трапецияның ауданын анықталған интеграл арқылы есептеп табуды үйрендіңдер. Енді анықталған интегралды дене көлемін есептеуге қолдануға болатынын көрсетейік. Жалпы, дененің көлемі ұғымы мен оның қасиеттерін геометрия курсында тереңірек қарастырамыз. Айталық, D денесі берілсін. Оның кеңістіктегі $Oxyz$ тікбұрышты координаталар жүйесінде Oyz жазықтығына параллель және абциссасы x-ке тең нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын $S(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ арқылы белгілеп (1.40-сурет), $[a;b]$ аралығында анықталған және үздіксіз $S = S(x)$ функциясы берілді деп есептейміз.

D денесінің көлемін анықтайық.

D денесінің a-дан x-ке, $x \in [a; b]$ дейінгі аралығына сәйкес келетін көлемін $V(x)$ арқылы белгілейік. Онда $V'(x) = S(x)$ теңдігі орындалады. Шынында да, егер x-ке Δx, $\Delta x > 0$ өсімшесін берсек, $V(x)$ функциясының өсімшесі былай жазылады: $\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x)$. 1.41-суреттен $\Delta V = V_{AA_1C_1C}$ болатынын көреміз. Дененің бұл бөлігінің көлемі AA_1D_1D цилиндрінің көлемінен үлкен, BB_1C_1C цилиндрінің көлемінен кіші. $S_{AA_1D_1D} = S(x)\cdot\Delta x$, $S_{BB_1C_1C} = S(x + \Delta x)\cdot\Delta x$ болғандықтан,



1.40-сурет



1.41-сурет

$$S(x)\cdot\Delta x \leqslant \Delta V \leqslant S(x+\Delta x)\cdot\Delta x \Rightarrow S(x) \leqslant \frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x} \leqslant S(x+\Delta x).$$

Осыдан $\Delta x \to 0$ болғанда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} S(x) = S(x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} S(x+\Delta x) = S(x)$ екенін ескерсек,

$$V'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x} = S(x).$$

$V(x)$ функциясы — $S(x)$-тің алғашқы функциясы.

Ньютон—Лейбниц формуласы бойынша

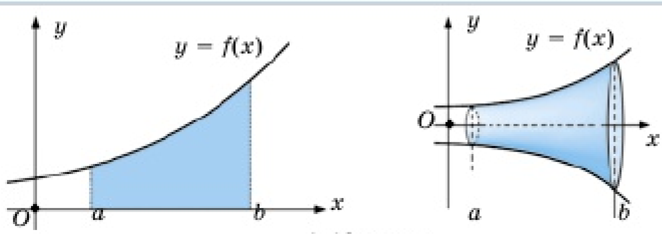
$$\int_a^b S(x)\,dx = V(b) - V(a).$$

$V(b) = V$, $V(a) = 0$ болғандықтан, $V = \int_a^b S(x)\,dx$ формуласы алынады.

Сонымен, $V = \int_a^b S(x)\,dx$ формуласын қолдану үшін $S(x)$ функциясы белгілі болуы қажет. Әрине, әрбір дене үшін $S(x)$ функциясының түрін анықтау өз алдына күрделі мәселе. Дегенмен, кейбір дербес жағдайларда бұл функцияның түрін анықтауға болады. Мұндай дербес жағдайларға айналу денелерін жатқызуға болады.

1.4.3. Айналу денесінің көлемі

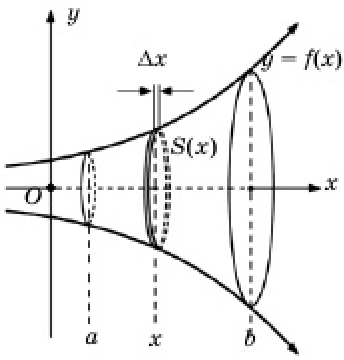
Анықтама. *$[a, b]$ кесіндісінде $y = f(x)$ үзіліссіз функцияның графигін Ox өсінен айналдырғанда шығатын бетпен шектелген **денені айналу денесі** деп атайды* (1.42-сурет).



1.42-сурет

Топтық жұмыс

Цилиндр, конус, қиық конус, шарды алу үшін қандай фигуралар-ды қай өстен айналдыратынын атап көрсетіңдер.



1.43-сурет

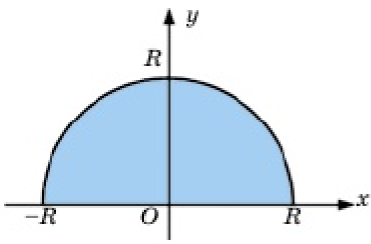
Айналу денесінің көлемін табу үшін анықталған интегралды қолданады.

$[a;b]$ кесіндісінің бойынан кез келген x нүктесін алайық. Осы нүкте арқылы Ox өсіне перпендикуляр жазықтық жүргізсек, қимада дөңгелек пайда болады (1.43-сурет). Шыққан дөңгелектің радиусы $f(x)$. Демек, қиманың ауданы $S(x) = \pi f^2(x)$. Айналу денесінің көлемін анықтау үшін $V = \int_a^b S(x)dx$ формуласын қолдансақ,

$$V = \int_a^b S(x)dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

немесе

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (3)$$

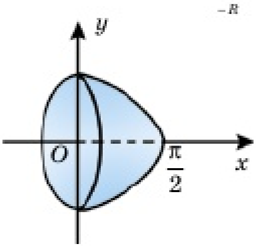


1.44-сурет

1-мысал. Радиусы R болатын шардың көлемі $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ формуласымен есептелетінін дәлелдеу керек.

▲ Шар жарты дөңгелекті Ox өсінен айналдырғанда пайда болады (1.44-сурет). Жарты шеңбердің теңдеуі $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Сондықтан

$$V = \pi\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3. \ ■$$



1.45-сурет

2-мысал. $y = \cos x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функциясының графигін Ox өсінен айналдырғанда шығатын дененің көлемін анықтайық (1.45-сурет).

▲ $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$ және дәрежені төмендету формуласы бойынша

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \pi\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}. \blacksquare$$

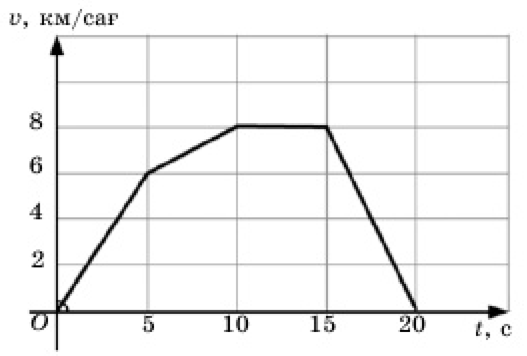
1. $v = v(t)$, $t \in [t_1;\ t_2]$ жылдамдығымен түзусызықты қозғалатын материялық нүктенің орын ауыстыруын анықтайтын формуланы жазыңдар.
2. Қозғалыстың уақытқа тәуелділік функциясының графигімен шектелген қисықсызықты трапеция ауданының мағынасын түсіндіріңдер.
3. Шар көлемінің формуласын дәлелдеңдер.
4. Дене көлемін анықталған интеграл арқылы есептеу формуласын жазыңдар.
5. Айналу денесі деп қандай денені айтады?
6. Айналу денесінің көлемін қандай формуламен есептейді?
7. $F = F(x)$, $x \in [a;\ b]$ күшінің әрекетінен дене орын ауыстырғанда жасалатын жұмыс қалай анықталады?

> **Қосымша электрондық ресурстар**
>
> https://www.desmos.com/calculator — онлайн графиктік калькулятор

Есептер

А

1.120. 1.46-суретте оқушының жүгіру жылдамдығының уақытқа тәуелділік графигі берілген. Оқушы жүгірген қашықтықты табыңдар.



1.46-сурет

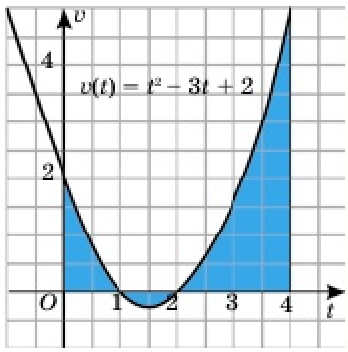
1.121. Материялық нүкте жылдамдығының уақытқа тәуелділігі $v(t)$ функциясымен берілген. Оның t уақыт аралығында жүрген жолын табыңдар:

1) $v(t) = t - 3$, $t = 3$; 2) $v(t) = 3t + 5$, $t = 5$;

3) $v(t) = t^2 + 4t - 1$, $t = 3$; 4) $v(t) = 3t^2 - 2t + 4$, $t = 2$.

1.122. Материялық дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігі $v(t) = t^2 - 3t + 2$ формуласымен берілген. Алғашқы 4 секундта жүрген жолды және бастапқы нүктеден қандай қашықтыққа ұзағанын табыңдар.

▲ $v(t) = t^2 - 3t + 2$ параболасының графигі 1.47-суретте кескінделген. t өсінің жоғары жағында орналасқан қисықсызықты трапецияның аудандары оң бағытта қозғалған дененің жүрген жолын, ал t өсінен төмен орналасқан қисықсызықты трапецияның ауданы кері жүрген жолды көрсетеді. Графикке сәйкес қозғалыстың алғашқы 1 секундында материялық нүкте оң бағытта мынадай жол жүрген:



1.47-сурет

$$s_1 = \int_0^1 (t^2 - 3t + 2)dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{6}.$$

1 с және 2 с аралығында материялық нүкте кері бағытта жүрген:

$$s_2 = \left|\int_1^2 (t^2 - 3t + 2)dt\right| = \left|\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right)\Bigg|_0^2\right| = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}.$$

2 с-тың соңында қайтадан оң бағытқа қозғалған:

$$s_3 = \int_2^4 (t^2 - 3t + 2)dt = \frac{14}{3}.$$

Сондықтан барлық жүрілген жол:

$$s = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = 5\frac{2}{3} \text{ (бірлік).}$$

Ал бастапқы нүктеден ұзаған қашықтығы:

$$D = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ бірл.}$$ ■

1.123. Материялық дене жылдамдығының уақытқа тәуелділік функциясы $\upsilon(t) = 1 - 2t$ (м/с). Алғашқы 1 с-та жүрген жолды және бастапқы нүктеден қанша алыстағанын табыңдар.

1.124. Материялық дене жылдамдығының уақытқа тәуелділік функциясы: 1) $\upsilon(t) = t^2 - t - 2$ (м/с); 2) $\upsilon(t) = 3t^2 + 4t$ (м/с). Алғашқы 3 с-та жүрген жолды және бастапқы нүктеден қанша алыстағанын табыңдар.

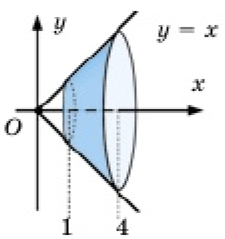
Қолданбалы тапсырма

1.125. Пойыз жылдамдығының уақытқа тәуелділігі

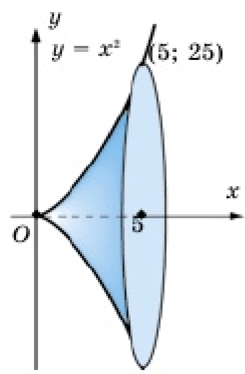
$$\upsilon(t) = \frac{t}{10} - 3 \ (\text{м/с})$$

заңдылығымен өзгереді. Пойыздың бастапқы жылдамдығы 45 м/с болса, алғашқы минутта жүрген жолды табыңдар.

1.126. $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$ формуласы арқылы 1.48, 1.49-суреттерде кескінделген айналу денелерінің көлемін есептеңдер.

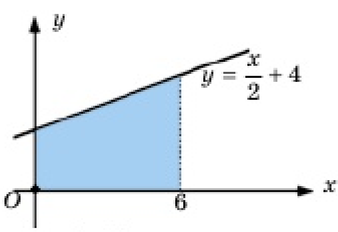


1.48-сурет

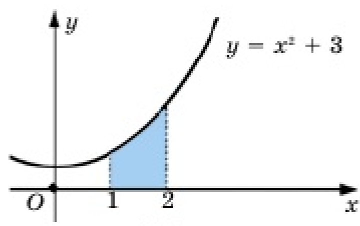


1.49-сурет

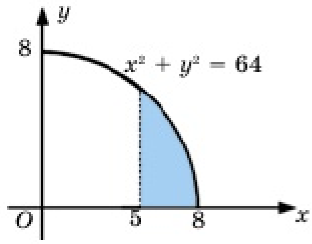
1.127. 1.50 *а*, *ә*, *б*-суреттерде берілген қисықсызықты трапецияны Ox өсінен айналдырғанда шығатын дененің көлемін анықтаңдар.



1.50, а-сурет



1.50, ә-сурет



1.50, *б*-сурет

1.128. Қисықсызықты трапеция Ox өсінен айналғанда пайда болған денені кескіндеп, көлемін табыңдар:

1) $y = 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$; 2) $y = x^3$, $1 \leqslant x \leqslant 2$;

3) $y = x^2$, $2 \leqslant x \leqslant 4$; 4) $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

1.129. Қисықсызықты трапеция Ox өсінен айналғанда пайда болған денені кескіндеп, көлемін табыңдар **(1.29—1.30)**:

1) $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; 2) $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$;

3) $y = x$, $1 \leqslant x \leqslant 2$; 4) $y = \sqrt{x}$, $2 \leqslant x \leqslant 3$.

1.130. 1) $y = \cos x$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; 2) $y = 2x - x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$;

3) $y = -\dfrac{x}{2} + 2$, $0 \leqslant x \leqslant 4$; 4) $y = \sqrt{x - 2}$, $2 \leqslant x \leqslant 11$.

1.131. Серіппені 1 см-ге созу үшін 0,1 кН күшпен әрекет ету қажет. Серіппені 5 см-ге созу үшін қандай жұмыс жасалады?

B

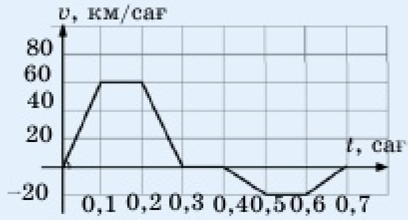
Қолданбалы тапсырмалар (1.132—1.135):

1.132. Көлік түзу жол бойымен қозғалады. Қозғалыс жылдамдығының уақытқа тәуелділік функциясының графигі 1.51-суретте берілген.

1) Графиктің t өсінен жоғары, төмен және t өсінің бойында орналасуының мағынасын түсіндіріңдер.

2) Көліктің жалпы жүрген жолын табыңдар.

3) Көліктің бастапқы нүктемен салыстырғандағы орын ауыстыруын анықтаңдар.



1.51-сурет

1.133. Велосипедші қозғалысын бастаған соң алғашқы 3 мин бойы жылдамдығын 40 км/сағ-қа дейін жеткізеді. Содан кейін 10 мин бойы тұрақты жылдамдықпен қозғалады. Шаршағаннан кейін жылдамдығын 1 мин ішінде 30 км/сағ-қа дейін төмендетіп және осы жылдамдықпен тағы 10 мин қозғалады. Содан соң жылдамдығын азайтып 2 мин ішінде тоқтайды. Жылдамдықтың уақытқа тәуелділік графигін сызып, велосипедшінің жүрген жолын есептеңдер.

1.134. Материялық дене жылдамдығының уақытқа тәуелдік функциясы $v(t) = -4t^3 + 16t$ м/с. Берілген уақыт аралығында дененің жүрген жолын табыңдар:

1) $0 \leqslant t \leqslant 3$ с; 2) $1 \leqslant t \leqslant 3$ с.

1.135. Материялық дене жылдамдығының уақытқа тәуелділік функциясы $v(t) = -3t^2 + 2t$ м/с. Алғашқы секундта жүрген жолы мен бастапқы нүктеден қанша қашықтыққа орын ауыстырғанын табыңдар.

1.136. Берілген қисықтармен шектелген фигура Ox өсінен айналғанда шыққан дененің көлемін табыңдар:

1) $y = x + 1,\ y = 1,\ x = 2$; 2) $y + x = 2,\ y = x,\ x = 0$;

3) $y = \dfrac{x^2}{2},\ y = x$; 4) $y = 2\sqrt{x},\ y = x$.

1.137. Қисықсызықты трапеция Ox өсінен айналғанда пайда болған денені кескіндеп, көлемін табыңдар:

1) $y = \cos 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; 2) $y = (x-1)^3,\ 1 \leqslant x \leqslant 3$;

3) $y = 4\sin 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; 4) $y = \sqrt{\sin x},\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$.

1.138*. $y = f(x)$ функциясы $[a; b]$ аралығында үздіксіз және бірсарынды болып, $c \leqslant f(x) \leqslant d$, $x \in [a; b]$ теңсіздігі орындалсын. Осы қисықты Oy өсінен айналдырғанда шыққан дененің көлемі

$$V = \pi\int_c^d \left(f^{-1}(x)\right)^2 dx \quad (3)$$

формуласымен есептелетінін көрсетіңдер.
Жалпы, іс жүзінде қолайлы болу үшін, Ox өсінен айналу денелері үшін

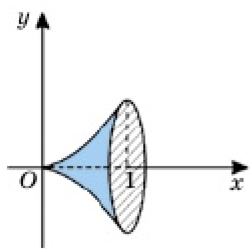
$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx$$

түрінде, ал (3) формуланы (Oy өсінен айналатын денелер үшін)

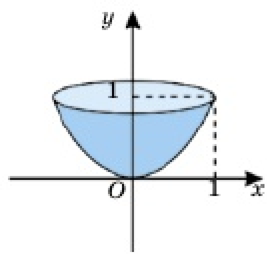
$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy$$

түрінде жиі қолданады. Мысалы, $y = x^2$, $x \in [0; 1]$ параболасының Ox өсінен айналғанда шыққан айналу денесінің көлемі былай анықталады (1.52-сурет):

$$V_x = \pi\int_0^1 y^2 dx = \pi\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi}{5}.$$



1.52-сурет



1.53-сурет

Осы қисық Oy өсінен айналғанда шыққан дененің көлемін табу үшін берілген функцияны былай жазады (x-ті y арқылы өрнектейміз): $x = \sqrt{y}$, $y \in [0; 1]$. Сонда бізге қажет дененің көлемі (1.53-сурет):

$$V_y = \pi\int_0^1 x^2 dy = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi\int_0^1 y dy = \frac{\pi}{2}.$$

1.139. 1) $y = 6x - x^2 -5$; 2) $y = 2x - x^2$ параболасымен және $y = 0$ түзуімен шектелген фигура Ox өсінен айналғанда шыққан дененің көлемін табыңдар.

1.140. Түзу сызық бойымен қозғалатын материялық нүктенің жылдамдығы $v = 2t + 1$ (м/с) теңдеуімен берілген. Материялық нүкте алғашқы 6 м жолды қанша уақытта жүріп өтеді?

Қолданбалы тапсырма

1.141. Серіппені 1 см-ге созу үшін 1 кН күшпен әрекет етеді. Ол $A = 5$ кДж жұмыс жасағанда неше сантиметрге ұзарады?

C

1.142. Материялық дене жылдамдығының уақытқа тәуелділік функциясы берілген: $v(t) = \cos t$ м/с. Материялық дененің екі нүкте арасында ғана жүргенін дәлелдеңдер және сол нүктелердің арақашықтығын табыңдар.

1.143. $y = \sqrt{4 - x^2}$ қисығының Ox өсінің жоғарғы жағындағы бөлігін Oy өсінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемін анықтаңдар.

1.144. Төмендегі қисықтармен шектелген фигура Ox өсінен айналғанда пайда болған дененің көлемін табыңдар. Тиісті сызба жұмыстарын орындаңдар:

1) $y = 3\sin x$, $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$;

2) $y = 5\cos x$, $y = \cos x$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

3) $y = 2x - x^2$, $y = 2 - x$;

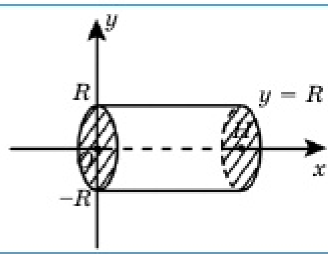
4) $y = x^2$, $y^2 = x$.

1.145. Табан радиусы R, биіктігі H болатын 1) цилиндрдің; 2) конустың көлемін интеграл арқылы анықтаңдар.

▲ 1) $y = R$;

$$V = \pi\int_0^H R^2 dx = \pi R^2 x\Big|_0^H =$$

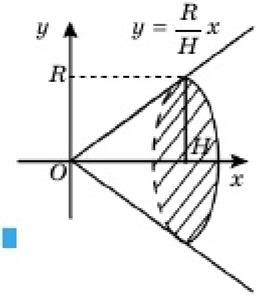
$$= \pi R^2 (H - 0) = \pi R^2 H.$$



2) $y = \frac{R}{H}x$;

$$V = \pi\int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi\frac{R^2}{H^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^H =$$

$$= \pi\frac{R^2}{H^2}\left(\frac{H^3}{3} - 0\right) = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$



1.146. Табан радиустары R және r, биіктігі H-қа тең қиық конустың көлемін табыңдар.

1.147. Радиусы R және центрлік бұрышы α-ға тең шар секторының көлемін табыңдар.

Қолданбалы тапсырма

1.148. Массасы 16 кг гірді жер бетінен 1 м биіктікке көтергенде жасалатын жұмысты анықтаңдар.

1.149. $y = 2x^2$ және $x + y = 3$ түзуінің графиктерін координаталар жазықтығының бірінші ширегіне салыңдар. Парабола мен түзудің қиылысу нүктесін табыңдар. Парабола және түзумен шектелген фигураны Oy өсінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемін анықтаңдар.

1.150*. Жеңіл көліктің фарының беті $x = 2t^2$, $y = 4t$, $-\sqrt{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$ теңдеулерімен модельденеді. Бұл қисықтың теңдеуі $y^2 = 8x$ екенін көрсетіңдер. Қисық Ox өсінен айналғанда пайда болатын дененің көлемін есептеңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

1.151. $x^2 + y^2 = 50$ шеңбері мен $x+7y=50$ түзуінің жанасатынын көрсетіп, жанасу нүктесінің координаталарын табыңдар.

1.152. $q = \frac{1}{2}$, $b_n = 2$, $S_n = 254$ болса, геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі мен n-ді табыңдар.

1.153. Өрнектің ең үлкен мәнін табыңдар:

1) $1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$;

2) $\cos 2\alpha \text{tg} 2\alpha + 5\cos 2\alpha - 1$.

1.154. $\sqrt{3}\text{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ теңдеуінің $[-\pi; \pi]$ аралығына тиісті барлық шешімдерін табыңдар.

«АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛ» бөлімінің қорытындысы

$(a; b)$ аралығындағы кез келген x үшін $F'(x) = f(x)$ теңдігі орындалса, осы $(a; b)$ аралығында $y = F(x)$ функциясы $y = f(x)$ функциясының *алғашқы функциясы* деп аталады.

$(a; b)$ аралығында $y = F(x)$ функциясы $y = f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, кез келген C тұрақты шамасы үшін $y = F(x) + C$ функциясы да $y = f(x)$-тің алғашқы функциясы болады.

Кез келген $x \in I$ үшін $y = f(x)$ функциясының барлық алғашқы функциялар жиынтығын осы функцияның анықталмаған интегралы деп атайды және $\int f(x)dx$ арқылы белгілейді.

1) $\int kdx = kx + C$;

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ n \neq -1$;

3) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x + C$;

6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg} x + C$.

Тұрақты көбейткішті интеграл таңбасының алдына шығаруға болады:

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx \,.$$

Қосындының интегралы интегралдардың қосындысына тең:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \,.$$

Интегралдаудың айнымалыны алмастыру және бөліктеп интегралдау әдістері: $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$, $\int udv = uv - \int vdu$.

$y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant 0$ үздіксіз функция, $F(x)$ оның алғашқы функциясы болсын.

Теріс емес үздіксіз $y = f(x)$ функциясының графигімен шектелген фигура *қисықсызықты трапеция* деп аталады.

Оның ауданы $S = F(b) - F(a)$ формуласымен анықталады.

$y = f(x)$, $x \in [a; b]$ үздіксіз функция болсын. Осы функцияның b және a нүктелеріндегі алғашқы функциясы мәндерінің айырымын оның *анықталған интегралы* деп атайды және $\int_a^b f(x)dx$ арқылы белгілейді.

Ньютон—Лейбниц формуласы:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \,.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \,.$$

Практикалық, физика есептерін шығарғанда, айналу денелерінің көлемін есептегенде анықталған интеграл қолданылады.

Терминдер атауының сөздігі

№	Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
1	Алғашқы функция	Первообразная	Antiderivative
2	Анықталмаған интеграл	Неопределенный интеграл	Indefinite integral
3	Анықталған интеграл	Определенный интеграл	Definite integral
4	Айнымалыны алмастыру әдісі	Метод замены переменной	Integration by substitution
5	Бөліктеп интегралдау	Интегрирование по частям	Integration by parts
6	Интеграл астындағы функция	Подынтегральная функция	Integrand
7	Интеграл астындағы өрнек	Подынтегральное выражение	Expression under the integral sign
8	Қисықсызықты трапеция	Криволинейная трапеция	Curvilinear trapezium
9	Ньютон—Лейбниц формуласы	Формула Ньютона—Лейбница	Newton—Leibniz formula

II бөлім. МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКАНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

«Статистика» термині латынның «status» сөзінен шыққан және «күй», «хал-жағдай» деген мағынаны білдіреді. Қоғамда, табиғатта болып жатқан процестер алуан түрлі және күрделі болып келеді. Статистика көмегімен зерттеушілер табиғи-әлеуметтік құбылыстарды, процестерді сан арқылы немесе сандар қатынасы арқылы жан-жақты зерттейді. Мысалы, заңгерлер, социологтар, психологтар қылмысқа қатысты ақпараттарды жинап, оларды зерттейді. Өте үлкен статистикалық ақпараттарды, сандық мәліметтерді зерттеу үшін математикалық статистика қолданылады. Математикалық статистика — қандай да бір заңдылықтарды байқау үшін ақпараттарды өңдеу жолдарын қарастыратын математиканың бөлімі. Оның мақсаты — ғылыми және практикалық қорытындылар жасау мақсатында статистикалық мәліметтерді жинақтау және өңдеу тәсілдерін қалыптастыру. Қазіргі кезде математикалық статистика тәсілдерін қолданбайтын бірде-бір ғылым, техника, халықшаруашылығы және саяси-әлеуметтік саланы атап көрсету мүмкін емес. Осы бөлімде математикалық статистиканың бастапқы түсініктерімен танысасыңдар.

Ақмола облысының фермері бидай өсіреді. Бидай өнімділігі масақтағы бидай санымен өлшенеді. Бидай өнімділігін арттыру үшін фермер құнарландырушы тыңайтқыштарды қолданып, оның бидай өнімділігіне әсерін зерттемекші болды. Ол жерінің бір бөлігіне тыңайтқышты қолданды, екінші бөлігіне ештеңе қолданбады. Бірақ егістіктің екі бөлігін де бірдей күтті. Бөлім материалдарын оқып-үйрену барысында осы екі жерден алынған өнімдерді статистикалық тәсілдермен салыстыруды үйренесіңдер.

Бөлімде қарастырылатын тақырыптар:

2.1. Басты және таңдалым жиынтықтары. Дискретті және интервалдық жиілік кестелері. Негізгі статистикалық орта мәндер

Бұл тақырыпта статистикада қолданылатын негізгі терминдермен танысып, соңында:

- басты жиынтық және таңдалым жиынтығын анықтап, мысал келтіре аласыңдар;
- басты жиынтық пен таңдалым көлемін анықтауды үйренесіңдер;
- негізгі статистикалық орта мәндерін анықтайсыңдар;
- дискретті кездейсоқ шама мен үздіксіз кездейсоқ шаманы ажыратасыңдар, мысал келтіресіңдер;
- жиілік кестесі мен салыстырмалы жиілік кестесін құрасыңдар.

2.1.1. Басты және таңдалым жиынтықтары

Қайсыбір біртекті объектілер жиынтығына қандай да бір сандық белгілеріне қарай зерттеулер жасау қажет болады. Мысалы, белгілі бір зауыт өндірген тетіктердің өлшемдерін (ұзындығы, ауданы, көлемі, салмағы, сыйымдылығы және т.с.с.) тексеру қажет. Осындай кезде біз сан мәнді ақпараттарды жинақтаймыз. Кейде берілген объектілер жиынтығын түгел тексереді, яғни берілген жиынтықтың әрбір элементінің бізге қажет белгілерін зерттейді. Іс жүзінде осындай түгел тексеру тәсілін орындау, әсіресе, берілген объектілер жиынтығында өте көп элементтер болса, әрбір элементті тексеріп шығу мүмкін емес. Мысалы, белгілі бір жер теліміне егілген дәндердің өнімділігін, яғни себілген дәндердің неше пайызы өніп шыққанын анықтау қажет болсын. Мұнда осы жер телімін түгел тексеріп шығу, яғни әрбір себілген дәннің өніп шыққанын немесе өнбей қалғанын анықтау мүмкін емес. Осындай жағдайларда бүкіл жиынтықтан оның шектеулі бөлігін кездейсоқ таңдап алып, осы таңдап алынған бөліктің элементтерін зерттейді.

Анықтама. *Зерттелетін объектілер жиынтығын* ***басты жиынтық****, басты жиынтықтан кездейсоқ таңдап алынған объектілер жиынын* ***таңдалым жиынтығы*** *немесе жай ғана* ***таңдалым*** *деп атайды.*

Жоғарыда қарастырылған мысалда берілген жер теліміне себілген барлық дәндер жиыны — басты жиынтық, кездейсоқ таңдап алынған бөлікке себілген дәндер жиыны таңдалым болады.

Топтық жұмыс

Басты жиынтық пен таңдалымға мысал келтіріңдер. Мысалы, еліміздегі мектептердің 11-сынып оқушыларына мектеп формасын тігу үшін оқушылардың бойының ұзындығы туралы мәлімет қажет болды. Ол үшін зерттеушілер кездейсоқ алынған 4 мектептің 11-сынып оқушыларының бойының ұзындықтарын өлшеді. Мұнда, еліміздегі барлық 11-сынып оқушылары — басты жиынтық, ал кездейсоқ алынған 4 мектептің 11-сынып оқушылары — таңдалым жиынтығы.

Жиынға енетін объектілер саны жиынның *көлемі* деп аталады. Мысалы, егер берілген 10 000 тетік арасынан зерттеуге 100 тетік кездейсоқ таңдалып алынса, таңдалым көлемі 100, басты жиынтық көлемі 10 000 болады.

2.1.2. Жиілік кестесі

Мысал қарастырайық.

Ақмола облысының фермері бидай өсіреді. Бидай өнімділігін арттыру үшін фермер тыңайтқышты қолданып, оны зерттемекші болды. Ол жерінің бір бөлігіне тыңайтқышты қолданды, екінші бөлігіне тыңайтқыш қолданбады. Бірақ екі бөліктегі бидай егістігін бірдей күтті. Күзде екі бөлікте өсірілген егістіктің әрқайсысынан кездейсоқ 150 масақтан теріп алынды және әр масақтағы бидай дәні саналды.

Тыңайтқыш қолданған жерден алынған бидай масағындағы дәндер саны:

6 7 7 4 9 5 5 5 8 9 8 9 7 7 5 8 7 6 6 7 9 7 7 7 8 9 3 7 4 8 5 10 8
6 7 6 7 5 6 8 7 9 4 4 9 6 8 5 8 7 7 4 7 8 10 6 10 7 7 7 9 7 7 8 6 8 6 8
7 4 8 6 8 7 3 8 7 6 9 7 6 9 7 6 8 3 9 5 7 6 8 7 9 7 8 4 8 7 7 7 6 6 8 6
3 8 5 8 7 6 7 4 9 6 6 6 8 4 7 8 9 7 7 4 7 5 7 4 7 6 4 6 7 7 6 7 8 7 6 6
7 8 6 7 10 5 13 4 11 12

Бұл келтірілген деректерді осы күйінде сараптау зерттеушілерге айтарлықтай қиындық туғызады, өйткені олар қолайсыз. Мәліметті өңдеп, оны көрнекі түрде жазу жолдары бар. Солардың бірі — жиілік кестесін құру. Жиілік кестесін құру үшін берілген таңдалым санының мәндерінен бір-бірден алып, оларды өсу тәртібімен жазамыз. Осылай алынған сандар тізбегін ***ығыспалы қатар***, ығыспалы қатардың әрбір элементін ***нұсқалық*** деп атайды. Тыңайтқышты қолданған жерден алынған бидай масағындағы дәндер санын қарастырсақ, әрбір масақтағы дәндер саны 3-тен 13-ке дейін жеткенін көреміз. Сонымен, кездейсоқ алынған масақтардағы дәндер саны, яғни таңдалым саны 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 және басқа сандар кездеспейді. Осы алынған сандар тізбегі біздің мысалдағы *ығыспалы қатар*, қатардың әрбір элементі — *нұсқалықтар*. Мұнда ең кіші нұсқалық 3 және ол ығыспалы қатарда 4 рет кездеседі, 4 нұсқалығы қатарда 13 рет кездеседі, 5 саны тізбекте 11 рет кездеседі, осылай жалғастырып, берілген мәліметтерді 2.1-кестеге енгіземіз:

Масақтағы бидай дәнінің саны, x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Ығыспалы қатар
Жиілігі, n_i	4	13	11	28	46	27	14	4	1	1	1	Таңдалым көлемі 150-ге тең

2.1-кесте. Тыңайтқышты қолданған жерден алынған бидай масағындағы дәндер саны

Анықтама. *Таңдалым элементтері арасында өзара тең емес элементтерді бір-бірден алып, оларды өсу тәртібімен жазғанда шығатын тізбекті* ***ығыспалы қатар****, ал ығыспалы қатардың әрбір элементін* ***нұсқалық*** *деп атайды.*

Бастапқы сандар тізбектерімен салыстырғанда сандарды жиілік кестесі арқылы зерделеу оңай және түсінікті. Ығыспалы қатарда x_i нұсқалығы n_i рет қайталанса, n_i саны x_i нұсқалығының ***жиілігі*** деп аталады. Біздің мысалда 5 нұсқалығының жиілігі 11-ге, 6 нұсқалығының жиілігі 28-ге, 7 нұсқалығының жиілігі 46-ға тең, және т.с.с. Барлық нұсқалық жиіліктерінің қосындысы таңдалым *көлемін* береді. Егер нұсқалықтар астына сәйкес жиіліктерін жазып, кесте құрсақ, бұл кестені *ығыспалы қатардың жиіліктер кестесі* немесе жай ғана *жиілік кестесі* деп атайды (2.2-кесте):

x_i — таңдалым нұсқалығының элементтері	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i — жиілік	n_1	n_2	n_3	...	n_k

2.2-кесте. Жиілік кестесінің түрі

Топтық жұмыс

Тыңайтқыш қолданбаған жерден алынған бидай масағындағы дәндер саны берілген. Осы мәліметтер бойынша жиілік кестесін құрыңдар, жауапты 2.4-кестемен (81-бет) салыстырыңдар:

4 6 5 6 5 6 4 6 4 9 5 3 6 8 5 4 6 8 6 5 6 7 4 6 5 2 8 6 5 6 5 5 5 4 4 4
6 7 5 6 7 5 5 6 4 8 5 3 7 5 3 6 4 7 5 6 5 7 5 7 6 7 5 4 7 5 5 5 6 6 5 6 7 5
8 6 8 6 7 6 6 3 7 6 8 3 3 4 4 7 6 5 6 4 5 7 3 7 7 6 7 7 4 6 6 5 6 7 6 3 4 6 6
3 7 6 7 6 8 6 6 6 6 4 7 6 6 5 3 8 6 7 6 8 6 7 6 6 6 8 4 4 8 6 6 2 6 5 7 3

Жиілік кестесін құруға Ms Excel электронды кестелер редакторын қолдану.

➢ **Қосымша электрондық ресурстар**

http://ourmath.ru/articles/tablitsa-i-diagramma-na-excel-legko.html

Кейбір деректерді пайызбен сипаттап көрсеткен дұрыс. Осындай жағдайларда *салыстырмалы жиіліктер кестесі* қолданылады. Егер x_i нұсқалығының жиілігі n_i, таңдалым көлемі n болса, n_i/n саны осы нұсқалықтың *салыстырмалы жиілігі* деп аталады. 2.2-кестедегі жиіліктер орнына сәйкес салыстырмалы жиіліктерді қолдансақ, *салыстырмалы жиіліктер кестесі* алынады. Егер салыстырмалы жиілікті 100-ге көбейтсек, сәйкес нұсқалықтың таңдалым құрамындағы пайыздық үлесі шығады. Мысалы, тыңайтқышты қолданған жерден алынған бидай масақтарындағы дәндер санын сипаттайтын тізбектің салыстырмалы жиіліктері 2.3-кестеде берілген. Мұнда 8-ге тең нұсқалықтың таңдалым құрамындағы пайыздық үлесі $\frac{27}{150}100\% = 18\%$.

Масақтағы бидай дәнінің саны, x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Барлығы
Салыстырмалы жиілік, n_i/n	$\frac{4}{150}$	$\frac{13}{150}$	$\frac{11}{150}$	$\frac{28}{150}$	$\frac{46}{150}$	$\frac{27}{150}$	$\frac{14}{150}$	$\frac{4}{150}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{150}$	1

2.3-кесте. Тыңайтқышты қолданған жерден алынған бидай масақтарындағы дәндер санының салыстырмалы жиілігі

Салыстырмалы жиіліктер кестесі:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

2.1.3. Негізгі статистикалық орта мәндер

Берілген таңдалымды зерттеп, зерделеу үшін статистикалық орта мәндер қолданылады: таңдалым құлашы, таңдалымның модасы мен медианасы, таңдалымның орта мәні. Олармен біз төменгі сыныптардан бастап таныспыз. Енді олардың анықтамаларын еске түсірелік:

Анықтама. *Таңдалым нұсқалығы элементтерінің ішінде ең үлкені мен ең кішісінің айырымын* ***таңдалым құлашы*** *деп атайды және R әрпімен белгілейді:*

$$R = x_{max} - x_{min}.$$

Мысалы, тыңайтқышты қолданған жерден алынған бидай масағындағы дәндер саны үшін таңдалым құлашы $R = 13 - 3 = 10$.

Анықтама. *Таңдалым элементтерінің ішінде ең жиі кездесетін элементті* ***таңдалым модасы*** *деп атайды.* Моданы M_o арқылы белгілейді.

Мысалы, тыңайтқышты қолданған жерден алынған бидай масағындағы дәндер саны үшін таңдалым модасы 7-ге тең, өйткені масақтағы бидай саны 7 болатын масақтар 47 рет кездескен, таңдалымның өзге мәндерімен салыстырғанда бұл ең көп кездескен мән. Таңдалымның модасы үнемі бірмәнді анықтала бермейді, өйткені кейбір екі немесе одан да көп таңдалымдық нұсқалықтардың жиіліктері бірдей және ең үлкен мәнге тең болуы мүмкін.

Таңдалымның модасын анықтауға Ms Excel электронды кестелер редакторын қолдану.

➢ **Қосымша электрондық ресурстар**

http://ourmath.ru/articles/kak-nayti-modu-neskolykih-tchisel-ispolyzuya-excel.html

Анықтама. *Таңдалым элементтерінің арифметикалық ортасын* ***таңдалымның орта мәні*** *деп атайды және $\overline{X}$ әрпімен белгілейді.*

$$\overline{X} = \frac{\text{барлық элементтердің қосындысы}}{\text{элементтер саны}}.$$

Тыңайтқышты қолданған жерден алынған бидай масағындағы дәндер санының орта мәнін есептеу үшін алдымен барлық элементтерді қосып аламыз. Шыққан қосындыны элементтер санына бөлеміз. Таңдалымдағы элементтер саны (таңдалым көлемі) 150.

$$\overline{X} = \frac{\text{барлық элементтердің қосындысы}}{\text{элементтер саны}} = \frac{6+7+7+4+\ldots+4+11+12}{150}.$$

Таңдалым көлемі үлкен болған сайын орта мәнді есептеу қиынға соғады. Сондықтан жиілік кестесін қолданып есептеу қажет:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i\, n_i}{\sum n_i} = \frac{3\cdot4+4\cdot13+5\cdot11+\ldots+12\cdot1+13\cdot1}{150} \approx 6,85.$$

Сонымен, тыңайтқышты қолданған жерде бір масақтағы бидай санының орта мәні 6,85.

Таңдалымның орта мәнін анықтауға Ms Excel электронды кестелер редакторын қолдану.

➤ **Қосымша электрондық ресурстар**

http://ourmath.ru/articles/vtchislyaem-srednee-znatchenie-neskolykih-tchisel.html

Анықтама. *Таңдалым элементтерін өсу тәртібімен орналастырып, сандар тізбегі түрінде жазамыз. Таңдалым көлемі тақ сан болса, тізбектің дәл ортасында орналасқан элементті* ***таңдалым медианасы*** *деп атайды. Таңдалым элементтерінің саны жұп болса, тізбектің ортасындағы екі санның арифметикалық ортасы таңдалымның* ***медианасы*** *болады. Медиананы M_e арқылы белгілейді.*

Тыңайтқышты қолданған жерден алынған бидай масағындағы дәндер саны 150. Олай болса, өсу ретімен орналастырғандағы

75- және 76-элементтердің арифметикалық ортасы медиана болады:

$$M_e = \frac{x_{75} + x_{76}}{2} = \frac{7+7}{2} = 7.$$

Медиана таңдалым элементтерін дәл ортасынан екіге бөледі. Мысалы, сыныптағы оқушылардың бақылау жұмысынан алған ұпайларының медианасы 15 болса, сыныптың, кем дегенде, тең жартысының алған ұпайларының саны 15-тен кем емес дегенді білдіреді. Медиананы статистикалық орта санатына жатқызуымыз орынды, бұл әсіресе өзге орта мәндер толық мәлімет бермегенде маңызды.

Таңдалымның орта мәнін анықтауға Ms Excel электронды кестелер редакторын қолдану.

➤ **Қосымша электрондық ресурстар**

http://ourmath.ru/articles/vtchislenie-median-neskolykih-tchisel.html

Топтық жұмыс

2.4-кестедегі тыңайтқышты қолданбаған жерден алынған бидай масағындағы дәндер санының жиілік кестесі арқылы таңдалымның құлашын, орта мәнін, модасы мен медианасын анықтаңдар.

Масақтағы бидай дәнінің саны, x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
Жиілігі, n_i	2	11	19	29	51	25	12	1

2.4-кесте. Тыңайтқышты қолданбаған жерден алынған бидай масағындағы дәндер санының жиілік кестесі

1. Басты жиынтық деген не?
2. Таңдалым деп нені түсінесіңдер?
3. Математикалық статистиканың негізгі мақсаты қандай?
4. Басты жиынтық (таңдалым) көлемі деп нені түсінесіңдер?
5. Таңдалым нұсқалығы деген не? Жиіліктің (салыстырмалы жиіліктің) кестесі қалай жасалады?

Есептер

А

2.1. Берілген мысалдардағы басты жиынтық пен таңдалымның көлемін анықтаңдар (2.1-сурет):

- Қазақстандағы жеңіл көліктердің таралымын зерттеу үшін зерттеушілер Маңғыстау, Алматы және Шығыс Қазақстан облыстарының жеңіл көліктерін қарастыруды шешті.
- 10 жылдан аса қызмет еткен көліктердің моторын тексеру үшін зерттеушілер Жамбыл облысының көліктерін қарастыруды шешті.

2016 жылдың қыргүйектегі жеңіл көліктер саны (бірлік)

	Барлығы	3 жылдан аз	3—7 жыл	7—10 жыл	10 жылдан көп
Қазақстан	**3 853 705**	**622 546**	**391 282**	**350 054**	**2 264 640**
Ақмола обл.	177 457	23 855	14 612	15 134	115 335
Ақтөбе обл.	155 584	36 511	19 834	15 239	72 727
Алматы обл.	467 912	39 099	29 332	34 406	349 908
Атырау обл.	116 809	45 317	16 012	11 388	30 449
БҚО	118 949	27 945	12 807	11 400	57 991
Жамбыл обл.	189 600	10 598	11 300	11 972	151 763
Қарағанды обл.	284 717	34 174	26 061	23 987	188 063
Қостанай обл.	176 960	32 960	16 015	14 918	101 904
Қызылорда обл.	109 866	13 575	9 015	9 017	72 913
Маңғыстау обл.	140 403	34 561	19 632	16 059	56 324
ОҚО	473 580	48 364	43 594	36 557	326 771
Павлодар обл.	159 265	15 402	10 341	10 671	116 297
СҚО	150 278	20 008	12 859	14 425	95 836
ШҚО	306 342	46 584	27 107	28 893	187 001
Нұр-Сұлтан қаласы	346 434	74 101	33 702	23 431	90 447
Алматы қаласы	463 674	90 562	72 570	60 736	205 812
Дипломатиялық	21 628	8 187	4 931	2 306	3 930
Регион көрсетілмеген	93 977	20 743	11 558	9 515	41 169
Дерек көзі: ҚР ҰЭМ СК (Ұлттық экономика министрлігінің статистика комитеті)					

2.1-сурет

2.2. 13 күн бойы мұғалім мектепке келмей қалған оқушы саны туралы ақпаратты жазып отырып, мына мәліметтерді алды: 4 6 3 2 7 8 3 5 5 7 6 6 4. Осы берілгендердің орта мәнін, құлашын, модасы мен медианасын анықтап, олардың мағынасын түсіндіріңдер.

2.3. Кездейсоқ шаманың басты жиынтығынан таңдалым алынған:

1) 2, 1, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 2, 2, 3, 4, 3, 1, 5, 4, 2, 3;

2) 4, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 5, 3, 5, 6, 8, 5, 3, 4, 6.

1) таңдалым көлемін табыңдар; 2) таңдалымның статистикалық орталарын анықтаңдар (құлашын, модасы, медианасы, орта мәні); 3) жиілік кестесін жазыңдар.

2.4. Қандай да бір дискретті кездейсоқ шаманың басты жиынтығынан мынадай таңдалым алынған: 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4.

1) таңдалымның ығыспалы қатарын құрыңдар; 2) таңдалым көлемін және статистикалық орталарды анықтаңдар; 3) жиілік кестесін жазыңдар.

2.5. 11-сыныптың кездейсоқ алынған 50 оқушысын сұрастыру нәтижесінде олардың аяқкиімдерінің өлшемі мынадай болып шықты: 40, 38, 38, 39, 36, 42, 41, 37, 37, 39, 39, 40, 41, 40, 40, 39, 42,40, 39, 38, 39, 40, 39, 40, 36, 35, 41, 41, 36, 42, 37, 40, 39, 38, 41, 38, 42, 42, 37, 35, 41, 36, 38, 39, 40, 40, 38, 39, 37, 41. Осы таңдалымның көлемін, таңдалым нұсқалықтарын анықтаңдар және жиілік кестесі мен салыстырмалы жиілік кестесін құрыңдар.

▲ 1) Есеп шарты бойынша таңдалым көлемі 50.

2) Сұрастыру нәтижесінде аяқкиім өлшемдерінің 8 түрі кездескен: 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42. Бұл таңдалым нұсқалығы болады.

3) Берілген тізімде 35-өлшемді аяқкиімді 2 оқушы, 36 — 4 оқушы, 37 — 5 оқушы, 38 — 7 оқушы, 39 — 10 оқушы, 40 — 10 оқушы, 41 — 7 оқушы, 42 — 5 оқушы киетіні анықталған. Онда жиілік кестесі былай жазылады:

x_i — аяқкиім өлшемі	35	36	37	38	39	40	41	42
n_i — жиілік	2	4	5	7	10	10	7	5

4) Алдыңғы жиілік кестесінен салыстырмалы жиілік кестесін алу үшін жиілік қатарындағы сандарды таңдалым көлемі 50-ге бөлеміз:

x_i — *аяқкиім өлшемі*	35	36	37	38	39	40	41	42
$n_i/50$ — салыстырмалы жиілік	0,04	0,08	0,1	0,14	0,2	0,2	0,14	0,1

■

B

2.6. Мектептің 60 оқушысынан үйлерінен мектепке дейін қанша уақытта жететінін білу мақсатында сауалнама алынды. Сауалнама нәтижесіндегі мәліметтер (минут есебімен):
12 15 16 8 10 17 25 34 42 18 24 18 45 33 38 45 40 3 20
12 10 10 27 16 37 45 15 16 26 32 35 8 14 18 15 27 19 32
6 12 14 20 10 16 14 28 31 21 25 8 32 46 14 15 20 18 8 10
25 22. Осы мәліметтердің орта мәні (калькулятор қолдануға

болады) мен медианасын анықтаңдар және оның мағынасын түсіндіріңдер.

2.7. Жиілік кестесі берілген: таңдалымның көлемін, орта мәнін, модасын, медианасын анықтаңдар:

1)

x_i	1	5	9	13
n_i	20	10	14	6

2)

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

2.8. Қандай да бір кездейсоқ шаманы зерттеу барысында 40 рет жасалған тәуелсіз бақылаулар нәтижесі төмендегідей болды: 10, 13, 10, 9, 9, 12, 12, 6, 7, 9, 8, 9, 11, 9, 14, 13, 9, 8, 8, 7,10, 10, 11, 11, 11, 12, 8, 7, 9, 10,14, 13, 8, 10, 9, 7, 10, 9, 8, 12.
1) Таңдалымның статистикалық орталарын анықтаңдар;
2) салыстырмалы жиілік кестесін құрыңдар.

C

2.9. Таңдалымның 30 элементі бар. Оның алғашқы 10 өлшемінің орта мәні 15,7-ге тең, қалған 20 өлшемінің орта мәні 14,3. Таңдалымның орта мәнін анықтаңдар.

2.10. Асқар әрқайсысы 12 есептен тұратын жеті тест орындады. Әр дұрыс есепке 1 ұпай беріледі. Ол осы жеті тесттің тек бесеуінің ғана нәтижелерін біле алды, олар 9, 5, 7, 9 және 10 ұпай. Асқар мұғалімінен қалған екі тест нәтижесін сұрағанда мұғалім оның барлық нәтижелерінің модасы 9 ұпай, орта мәні 8 ұпай екенін айтты. Қалған екі тест нәтижесін анықтаңдар.

2.2. Статистикалық диаграммалар: жиілік полигоны және гистограмма

Бұл тақырыпта статистикада қолданылатын негізгі диаграммалармен, дискретті және үздіксіз кездейсоқ шамаларды анықтаудың статистикалық әдістерімен танысып, соңында:

- дискретті және үздіксіз кездейсоқ шамаларды ажырата білесіңдер;
- жиілік кестесі мен салыстырмалы жиілік кестесін қолданып, жиілік полигонын тұрғызасыңдар;

- жиіліктің интервалдық кестесін тұрғызасыңдар;
- интервалдық кестені қолданып гистограмманы тұрғызасыңдар.

2.2.1. Жиілік полигоны

Сынақ нәтижесінде әртүрлі мән қабылдай алатын шама *кездейсоқ шама* (КШ) деп аталады. Мысалы, ойын сүйегін лақтырғанда тек 1,2,3,4,5,6 сандарының бірі түсуі мүмкін. Олай болса, түскен ұпай саны — кездейсоқ шама, түскен сандар — кездейсоқ шаманың мәндері. Кездейсоқ шамалардың екі түрі болады: дискретті және үздіксіз кездейсоқ шамалар. Егер КШ мәндер жиыны санаулы немесе КШ-ның барлық мәндерін нөмірлеп шығу мүмкін болса, мұндай КШ *дискретті кездейсоқ шама* деп аталады. Дискретті кездейсоқ шамалар тек қана «оқшауланған» мәндер қабылдаса, үздіксіз кездейсоқ шамалар белгілі бір сан аралығының кез келген мәнін қабылдауы мүмкін. Дискретті шамаға мысал ретінде адамдар санын алуға болады. Олардың санын 1,2,3 т.с.с натурал сандармен есептейміз. Бұл оқшауланған сандар, яғни 1 мен 2 арасында «бір жарым» жоқ, өйткені «бір жарым» адам болмайды. Екінші мысал, тестілеуден жинаған ұпайлар саны — дискретті шама. Өйткені оқушы 4 немесе 5 ұпай алуы мүмкін, бірақ 4,002 сияқты 4 пен 5 арасында жатқан сандарға тең ұпай алмайды. Үздіксіз кездейсоқ шамаға мысал ретінде оқушылардың бойларының ұзындықтарын алуға болады. Мұнда бойдың ұзындығы 150 см мен 170 см арасындағы кез келген санға оқушы табылады, яғни үзіліс жоқ.

Топтық жұмыс

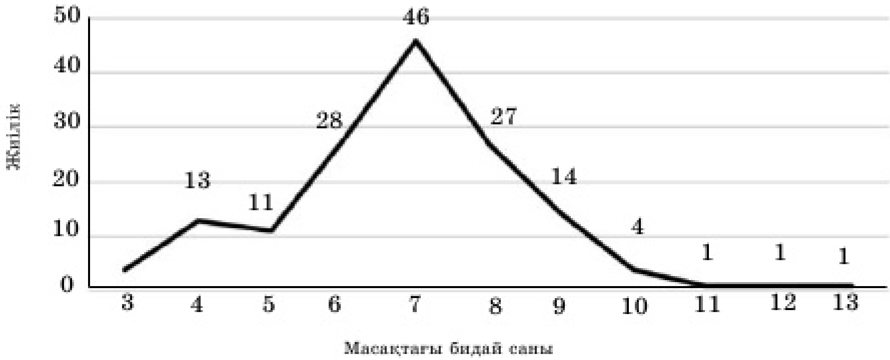
Дискретті және үздіксіз кездейсоқ шамаларға күнделікті өмірден мысал келтіріңдер.

Зерттеу обьектісінің шамалары дискретті болса, алынған мәліметтерді жиілік полигондары арқылы графиктік түрде бейнелеуге болады.

Вертикаль өсі салыстырмалы жиілікті, екінші өсі таңдалым сандарын көрсететін жазықтықта $(x_1;\ n_1)$, $(x_2;\ n_2)$, ..., $(x_k;\ n_k)$ нүктелерін белгілеп, оларды кесінділермен тізбектеп қосқаннан шығатын фигураны *жиілік полигоны* деп атайды. Жалпы жиілік полигоны арқылы таңдалым элементтерінің шамамен қандай заңдылықпен үлестірілгенін және жиілік полигонынан статистикалық орталарды көріп, қандай да бір тұжырым жасауға болады. Тыңайтқышты қолданған жерден алынған бидай масағындағы дәндер санының жиілік кестесінен жиілік полигонын сызайық (2.2-сурет).

(Microsoft Excel қолданбалы бағдарламасын пайдалануға болады).

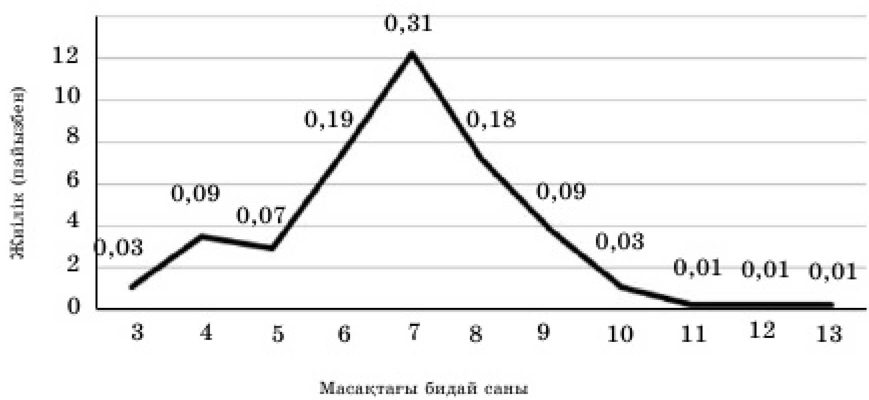
Тыңайтқышты қолданған жерден алынған бидай масағындағы дәндер санының жиілік полигоны



2.2-сурет

Вертикаль өсіне жиілікті, екінші өске таңдалымдағы сандарды көрсететін жазықтықта $(x_i; \frac{n_i}{n})$ нүктелерін белгілеп, оларды түзу кесінділерімен тізбектеп қосқаннан шығатын фигураны *салыстырмалы жиілік полигоны* деп атайды. Тыңайтқышты қолданған жерден алынған бидай масағындағы дәндер санының салыстырмалы жиілік кестесінен салыстырмалы жиілік полигонын сызсақ, 2.3-суреттегі графикті аламыз (Microsoft Excel қолданбалы бағдарламасын қолдануға болады).

Салыстырмалы жиілік полигоны



2.3-сурет

➤ **Қосымша электрондық ресурстар**

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/565707/

Топтық жұмыс

Тыңайтқышты қолданбаған жерден алынған бидай масағындағы дәндер санының жиілік кестесін (2.4-кесте) қолданып, жиілік алқабын және салыстырмалы жиілік полигонын сызыңдар.

Практикалық тапсырма

Ақмола облысының фермері бидай өсіреді. Бидай өнімділігінің сапасы масақтағы дәндер санымен өлшенеді. Бидай өнімділігін арттыру үшін фермер тыңайтқышты қолданып, оның өнімділікке әсерін зерттемекші болды. Ол жерінің бір бөлігіне тыңайтқышты қолданды, ал екінші бөлігіне ештеңе қолданбады. Бірақ екі бөліктегі бидай егістігін бірдей күтті.

Осы екі жерден алынған астықтың таңдалымын пайдаланып, оның статистикалық орталарын есептеуге болады. Ол үшін қорытынды салыстырмалы талдау жасайық.

№	Статистикалық орта	Тыңайтқышты қолданған астық нәтижесі	Тыңайтқышты қолданбаған астық нәтижесі	Талдау, қорытынды
1	Құлашы	10	7	Тыңайтқышты қолданғанда бидай масағындағы дәндер құлашы үлкен, яғни бір масақтағы дәндер саны артады
2	Орта мәні	6,85	5,63	Құнарланған жерден алынған бидай масағында орташа алғанда 6,85 дән, тыңайтқышты қолданбаған бидай масағында орта есеппен 5,63 дән болады екен, яғни тыңайту арқасында бидай масағындағы дәндер санын 1,22-ге арттыруға болады
3	Медиана	7	6	Тыңайтқышты қолданған бидай масағының жартысынан астамында 7 дәннен көп, ал тыңайтқыш қолданбаған жағдайда ма-

				сақтардың жартысынан астамында дәндер саны 6-дан артық болмады.
4	Мода	7	6	Тыңайтқышты қолданғанда масақтағы дәндердің көпшілігі 6 дәннен 7 дәнге дейін артады

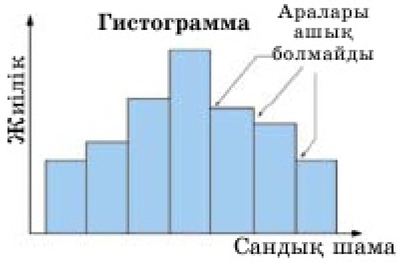
2.4-сурет

2.5-сурет

Қараңдар: 78-беттегі 2.3-кесте, 81-беттегі 2.4-кесте. *Тыңайтқышты қолданған және қолданбаған жерден алынған бидай масағындағы дәндер санының жиіліктер кестесі*

2.2.2. Гистограмма

Кездейсоқ шамаларды (КШ) зерттеу кезінде алынатын таңдалым берілген сан аралығының кез келген мәнін қабылдауы мүмкін. Егер x кездейсоқ шамасы шекті немесе шексіз интервалдың барлық мәндерін қабылдаса, оны ***үздіксіз КШ*** деп атайды. Осындай үздіксіз КШ зерттеу барысында немесе таңдалым нұсқалықтары өте көп болған жағдайларда сәйкес КШ жиіліктер полигоны көмегімен зерттеу мүмкін бола бермейді және бұл іс-шара күтілетін нәтижелерді тиісті деңгейде сипаттай алмайды. Мұндай жағдайларда интервалдық жиіліктер қатары мен гистограмма қолданады. Мысалы, 11-сынып оқушыларының бойлары, айталық, 140 см мен 200 см аралығындағы кез келген мәнді қабылдауы мүмкін. Сондықтан бойлары абсолютті бірдей оқушылар табылмай, әрбір оқушының бойы жеке, өз алдына нұсқалық болып қалуы мүмкін. Мұндай таңдалымдық мәліметтерді жиіліктер алқабы көмегімен оқып-үйрену тиісті нәтиже бермейтіні анық. Өте көп ақпаратты қамтитын КШ статистикалық түрде өңдеп сипаттау үшін гистограмма қолданады. Ол үшін таңдалым құлашын өзара тең сандық интервалдарға бөліп көрсету керек, мысалы, 11-сынып оқушыларының бойының ұзындығы 140—150 см аралығында, 151—160 см аралығы т.с.с деп интервалдарға бөліп қарастыруға болады. Мұнда жиілік ретінде бойлары берілген интервалға тиесілі оқушылар санын алады. Горизонталь өске шамалардың интервалдары, вертикаль өске осы интервалда орналасқан шамалардың жиіліктері көрсетіледі (2.6-сурет). Үздіксіз КШ сипаттағанда гистограммалық бағандар арасы ашық болмайды. Көлемі өте үлкен дискретті КШ гистограммамен сипатталғанда бағандар арасын ашық етіп бейнелейді.



2.6-сурет

Анықтама. ***Кездейсоқ шамалардың интервалдық ығыспалы қатарлары*** *деп өсу ретімен берілген интервалдар жиындарында жататын кездейсоқ шамалардың жиіліктері көрсетілген кестені айтады.*

Интервал	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	....	$[x_{n-1}; x_n)$
Жиілік	N_1	N_2	....	N_{n-1}

Сонымен, жиіліктің интервалдық ығыспалы қатарын құру үшін:

- *интервалдар санын анықтау керек. Ол үшін Стерджес формуласын қолдануға болады:* $K = \log_2 n + 1$, *мұндағы* n — *таңдалым көлемі. (Ескерту: логарифм ұғымын 7-бөлімде оқып-үйренеміз. Оның мәнін жуықтап калькулятор көмегімен есептеуге болады);*
- *әр интервалдың енін анықтау керек. Ол үшін қатар құлашын интервалдар санына бөліп интервалдың шеткі нүктелерін анықтайды;*
- *таңдалым элементтерінің шамасына сай әр интервалда орналасу жиіліктерін анықтап, кестеге толтыру керек.*

Гистограмма тұрғызуға Ms Excel электронды кестелер редакторын қолдану.

➢ **Қосымша электрондық ресурстар**

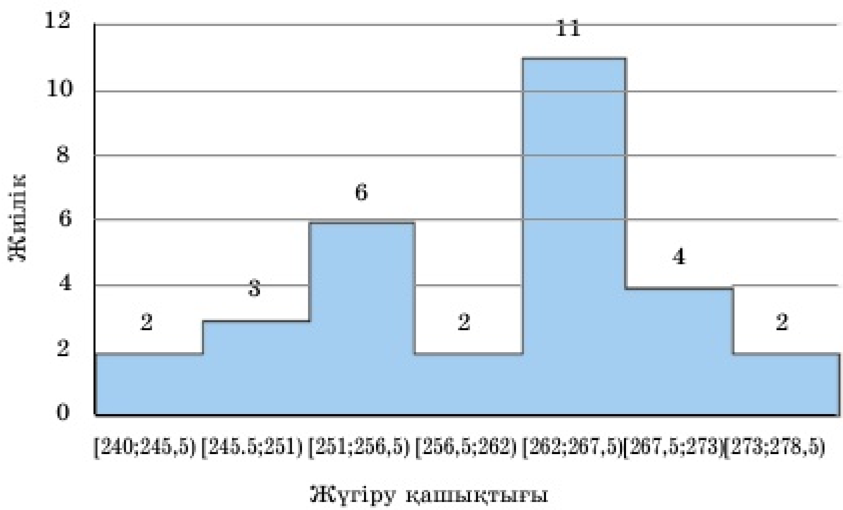
https://www.youtube.com/watch?v=EE4ZQFdFIrE
https://statanaliz.info/excel/diagrammy/gistogramma-chastot-v-excel-2016/

1-мысал. Денешынықтыру сабағында 1 мин ішінде сыныптағы 30 оқушының жүгіріп өткен қашықтықтығын өлшегенде мына нәтижелер алынған (метрмен): 244,6; 245,1; 248,0; 248,8; 250,0; 251,1; 251,2; 253,9; 254,5; 254,6; 255,9; 257,0; 260,6; 262,8; 262,9; 263,1; 263,2; 264,3; 264,4; 265,0; 265,5; 265,6; 266,5; 267,4; 269,7; 270,5; 270,7; 272,9; 275,6; 277,5. Осы мәліметтер бойынша интервалдық ығыспалы қатар құрып, оның гистограммасын тұрғызу керек.

▲ Берілген таңдалымның интервалдық ығыспалы қатарын құру үшін интервалдар санын есептейік: $K = \log_2 30 + 1 \approx 6$. Шамалардың арасында ең кішісі 244,6 м болса, ең үлкені 277,5, яғни құлашы $277{,}5 - 244{,}6 = 32{,}9$. Сондықтан интервал өлшемі 5,5 метрге тең болатын 6 топқа бөліп жиілік кестесін құрайық: 240 м мен 245,5 м аралығында жүгірген 1 оқушы бар, 245 м мен 250 м аралығында жүгірген 3 оқушы бар, т.с.с жалғастырып жиіліктің интервалдық кестесін аламыз.

Интервал	[240; 245,5)	[245,5; 251)	[251; 256,5)	[256,5; 262)	[262; 267,5)	[267,5; 273)	[273; 278,5)
Жиілік	2	3	6	2	11	4	2

Гистограмманы сызсақ, 2.7-суретті аламыз. ■



2.7-сурет

2-мысал. Сиыр фермасындағы кездейсоқ алынған 25 сиыр сүтінің майлылығы (% есебімен) анықталады: 3,45; 3,56; 3,68; 3,66;3,70; 3,75; 3,78; 3,80; 3,94; 3,88; 3,86; 3,88; 3,94; 3,93; 3,90; 3,96;4,03; 4,03; 3,98; 4,00; 4,08; 4,10; 4,18; 4,35; 4,02.

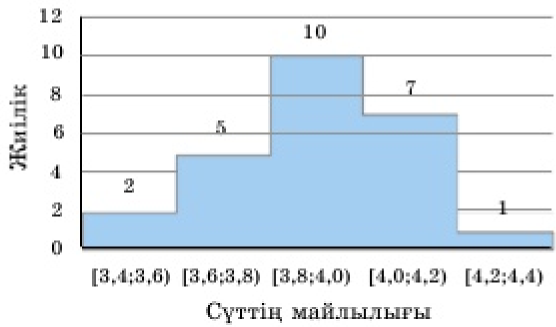
Жиіліктің интервалдық кестесін жазып, жиілік гистограммасын салу керек.

▲ $K = \log_2 25 + 1 \approx 5$ болғандықтан, $a = 3,4$ және $b = 4,4$ сандары аралығын 5 бөлікке бөлеміз. Сонда әрбір [3,4; 3,5), [3,5; 3,6), [3,6; 3,7), ..., [4,2; 4,3), [4,3; 4,4) интервалдарына тиісті таңдалым элементтері санын анықтай отырып, жиіліктің интервалдық кестесін аламыз:

Интервал	[3,4; 3,6)	[3,6; 3,8)	[3,8; 4,0)	[4,0; 4,2)	[4,2; 4,4)
Жиілік	2	5	10	7	1

Гистограмма 2.8-суретте көрсетілген.

Салыстырмалы жиіліктің интервалдық кестесі бойынша да гистограмма тұрғызуға болады. ■



2.8-сурет

1. Дискретті шамаға мысал келтіріңдер.
2. Үздіксіз шамаға мысал келтіріңдер.
3. Жиілік полигоны деген не? Ол қалай салынады?
4. Интервалдық жиілік кестесі деп нені айтады? Ол қалай құрастырылады?
5. Гистограмма қалай салынады?

Есептер

A

2.11. Таңдалымның жиілік кестесі бойынша жиіліктер полигонын салыңдар:

x_i — аяқкиім өлшемдері	35	36	37	38	39	40	41	42
n_i	2	4	5	7	10	10	7	5

2.12. Берілген таңдалымның жиілік кестесі бойынша оның полигонын тұрғызыңдар:

x_i	1	5	9	13
n_i	20	10	14	6

2.13. Таңдалымның жиілік кестесі бойынша жиілік алқабын тұрғызыңдар.

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

2.14. Таңдалымның салыстырмалы жиілігінің интервалдық кестесі берілген. Оның гистограммасын тұрғызыңдар.

Интервал	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Салыстырмалы жиілік	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

2.15. Таңдалымның салыстырмалы жиілігінің интервалдық кестесі берілген. Оның гистограммасын тұрғызыңдар.

Интервал	[1; 3)	[3; 6)	[6;9)	[9;12)
Салыстырмалы жиілік	0,24	0,40	0,20	0,16

2.16. Дискретті кездейсоқ шаманың басты жиынтығынан таңдалым алынған. Таңдалымның жиілік полигонын тұрғызыңдар:
1, 2, 1, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 2, 2, 3, 4, 3, 1, 5, 4, 2, 3, 4, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 5, 3, 5, 6, 8, 5, 3, 4, 6.

2.17. Поштамен қандай да бір күні жіберілген тауарлар салмағы өлшеніп мына мәліметтер алынды (килограммен):
2,1; 3,0; 0,6; 1,5; 1,9; 2,4; 3,2; 4,2; 2,6; 3,1; 1,8; 1,7; 3,9; 2,4; 0,3; 1,5; 1,2.
1) жиіліктің интервалдық кестесін толтырыңдар; 2) гистограммасын тұрғызыңдар.

Интервал	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)	[4;5)
Жиілік					

2.18. Берілген мәліметтерді статистикалық түрде сипаттау үшін жиілік полигоны мен гистограмманың қайсысын қолдану керегін анықтаңдар және оны тұрғызыңдар.
1) 30 сіріңке қорабындағы шилердің саны

x_i — шилер саны	47	49	50	51	52	53	55
n_i — жиілік	1	1	9	12	4	2	1

2) 25 оқушы бойының ұзындығы (сантиметрге дейін жуықталған)

Бойдың ұзындығы	120—129	130—139	140—149	150—159	160—169
Жиілік	1	2	7	14	1

B

2.19. Таңдалым жиілігінің интервалдық кестесі берілген. 1) таңдалым көлемін табыңдар; 2) салыстырмалы жиілігінің интервалдық кестесін жазыңдар; 3) гистограммасын салыңдар.

Интервал	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22)	[22; 24)
n_i	2	4	8	12	16	10	3

2.20. Облыс мекемелерінің бір жұмысшысы еңбек өнімділігінің өсімі (өткен жылмен салыстырғанда % есебімен) жөнінде мынадай таңдалым деректер берген.

%	80—90	90—100	100—110	110—120	120—130
Мекеме саны	2	14	60	20	4

1) кестені интервалдық салыстырмалы жиілік кестесіне ауыстырыңдар; 2) гистограмманы тұрғызыңдар.

2.21. Қандай да бір дискретті кездейсоқ шаманың басты жиынтығынан мынадай таңдалым алынған: 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4. Жиілік алқабын салыңдар.

2.22. Қандай да бір дискретті кездейсоқ шаманы зерттеу барысында 40 тәуелсіз бақылаулар нәтижесі төмендегідей болды: 10, 13, 10, 9, 9, 12, 12, 6, 7, 9, 8, 9, 11, 9, 14, 13, 9, 8, 8, 7, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 8, 7, 9, 10, 14, 13, 8, 10, 9, 7, 10, 9, 8, 12. Салыстырмалы жиілік полигонын тұрғызыңдар.

2.23. 30 мекеменің қаржылық қоры жөнінде (млрд. теңге есебімен) мынадай мәліметтер берілген: 2,2 5,3 3,4 4,5 5,1 3,4 4,3 2,7 3,5 5,8 2,3 4,4 4,7 2,1 4,8 3,6 3,5 4,2 5,7 3,7 4,2 3,4 4,3 3,4 4,3 4,1 5,3 4,8 5,1 2,4.
1) [2; 2,7), [2,7; 3,4), [3,4; 4,1), [4,1; 4,8) [4,8; 5,5), [5,5; 6) интервалдары көмегімен жиіліктің интервалдық кестесін жазыңдар; 2) гистограммасын тұрғызыңдар.

C

2.24. Құрылыс мекемесінде жұмыс істейтін кездейсоқ алынған 50 жұмысшының жалақыларын зерттеу (мың теңге есебімен) мынадай нәтиже берді:
71,4 70,4 71,2 70,1 69,9 72,2 72,6 72,8 74,0 71,6 72,4 72,0
76,0 70,4 74,0 69,0 71,8 73,2 75,4 72,4 70,4 72,1 75,6 76,0
72,8 73,2 70,4 68,2 73,2 73,0 74,2 72,2 76,0 69,8 71,6 69,8
73,2 74,2 71,6 72,6 70,8 72,1 70,4 72,2 69,6 72,2 73,8 72,4
73,4 72,3;
1) жиіліктің интервалдық кестесін жазыңдар (68 мың теңгеден бастап, интервал ұзындығын 1 мың теңге етіп алыңдар); 2) гистограммасын тұрғызыңдар.

2.25. Бақ күтушісі 6 айлық көшеттердің ішінен кездейсоқ таңдалым алып, олардың ұзындығын милиметрге дейінгі дәлдікпен өлшеді. Нәтижелері жиіліктің интервалдық кестесімен берілген:

Көшеттердің ұзындық интервалы, мм	300—324	325—349	350—374	375—399	400—424	425—449
Жиілік	12	18	42	28	14	6

1. Мәліметтерді сипаттайтын гистограмманы тұрғызыңдар;
2. Ұзындығы 400 мм-ден кем емес қанша көшет бар?
3. Барлық көшеттердің неше пайызының ұзындығы 349 мм-ден биік және 400 мм-ден қысқа?
4. Егер барлық көшеттер саны 1462 болса, олардың неше пайызының ұзындығы 400 мм-ден қысқа?

Қайталауға арналған жаттығулар

2.26. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ функциясын жұп-тақтылыққа тексеріңдер, графигін салыңдар.

2.27. Функцияның үзіліс нүктелерін анықтаңдар:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 2x - 1}$.

2.28*. Анықталған интегралды есептеңдер: $\int_0^2 |1 - x|\,dx$.

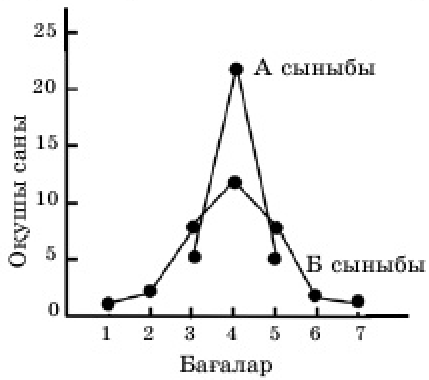
2.3 Кездейсоқ шамалар таңдалымының сандық сипаттамалары

Бұл тақырыпта таңдалымның негізгі сандық сипаттамалары-мен танысып, соңында:

- дискретті кездейсоқ шамалар таңдалымының орта мәнін есептеуді;
- үздіксіз кездейсоқ шамалар таңдалымының орта мәнін есептеуді;
- таңдалымның дисперсиясын есептеуді;
- таңдалымның стандартты ауытқуын есептеуді үйренесіңдер.

Мысалдар қарастырайық.

«А» және «Б» сыныбының әрқайсысында 32 оқушы бар. Екі сыныптың оқушылары тест тапсырды (IELTS). «А» сыныбының 5 оқушысы 3 ұпай, 22 оқушы 4 ұпай және 5 оқушы 5 ұпай алды. «Б» сыныбының 1 оқушысы 1 ұпай, 2 оқушысы 2 ұпай, 7 оқушысы 3 ұпай, 12 оқушысы 4 ұпай, 7 оқушысы 5 ұпай, 2 оқушысы 6 ұпай және 1 оқушы 7 ұпай алды. Осы екі сынып оқушыларының нәтижелерін зерттеу үшін статистикалық орталарды есептесек, екі сыныптың да орташа бағасы 4, медианасы да 4. Осы статистикалық орталарға ғана сүйенсек, екі сыныптағы оқушылардың тесттен алған нәтижесі бірдей сияқты болады, бірақ біз білетіндей олардың нәтижелерінде «айырмашылықтар» бар. Жиілік алқабын тұрғызсақ (2.9-сурет), «А» сыныбындағы оқушылардың орташа бағасы 4 және оқушылардың бағаларының орташа бағадан ауытқуы 1-ге тең. «Б» сыныбының орташа бағасы 4 болғанымен, осы бағадан оқушылардың бағаларының ауытқуы «А» сыныбынан үлкен. Осындай «ауытқуларды» статистикалық түрде өлшеу үшін сандық сипаттамалар қолданылады. Олар:



2.9-сурет

- дисперсия;
- стандартты (орташа квадраттық) ауытқу.

Айталық, таңдалымның жиілік кестесі берілсін:

x_i — таңдалым нұсқалығының элементтері	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i — жиілік	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Мұндағы $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$. Таңдалымның орта мәнін $\bar{x}$ деп белгілейді және оны мына формуламен есептейді:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \ldots + x_k \cdot n_k).$$

Таңдалым элементтерінің орта мәннен ауытқуын есептеу үшін таңдалым *дисперсиясы* ($\bar{D}$) мен *стандартты* (*орташа квадраттық*) *ауытқуын* (σ) мына формулалар арқылы табады:

$$\bar{D} = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \bar{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot n_2 + (x_3 - \bar{x})^2 \cdot n_3 + \ldots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot n_k\right].$$

$$\sigma = \sqrt{\bar{D}}.$$

Дисперсия мен стандартты ауытқу таңдалымның орта мәннен қаншалықты «шашыраңқы» орналасатынын сипаттайды. Сондықтан олардың мәні аз болған сайын таңдалым «жинақы» және оның құлашы аз.

Үздіксіз кездейсоқ шамалар үшін жиіліктің интервалдық кестесі:

Интервал	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	...	$[x_{k-1}; x_k)$
Жиілік	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Кестеден

$$x_1^* = \frac{x_0 + x_1}{2},\ x_2^* = \frac{x_1 + x_2}{2},\ \ldots\ x_k^* = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

Нүктелер (интервалдар ортасы) көмегімен оған сәйкес келетін жиіліктердің ығыспалы қатарын аламыз:

x_i^* — таңдалым нұсқалығының элементтері	x_1^*	x_2^*	x_3^*	...	x_k^*
n_i — жиілік	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Осы жиіліктер кестесімен үздіксіз КШ дисперсиясы мен стандартты ауытқуы анықталады.

1-мысал. Жиіліктің интервалдық кестесі бойынша берілген таңдалымның орта мәнін, дисперсиясын және стандартты ауытқуын анықтайық:

Интервал	[3,5; 3,6)	[3,6; 3,7)	[3,7; 3,8)	[3,8; 3,9)	[3,9; 4,0)	[4,0; 4,1)	[4,1; 4,2)	[4,2; 4,3)
Жиілік	1	2	3	4	6	5	2	1

▲ Алдымен әр интервалдың ортасын есептеп аламыз:

$$x_1^* = \frac{3,5+3,6}{2} = 3,55,\quad x_2^* = \frac{3,6+3,7}{2} = 3,65,\ \dots\ x_8^* = \frac{4,2+4,3}{2} = 4,25\,.$$

Сәйкес таңдалымның жиіліктер кестесі мынадай:

x_i^*	3,55	3,65	3,75	3,85	3,95	4,05	4,15	4,25
Жиілік	1	2	3	4	6	5	2	1

$$\overline{x} = \frac{1}{24}(3,55\cdot 1 + 3,65\cdot 2 + 3,75\cdot 3 + \dots + 4,25\cdot 1) = 3,92.$$

$$\overline{D} = \frac{1}{24}\Big[(3,55-3,92)^2\cdot 1 + (3,65-3,92)^2\cdot 2 + (3,75-3,92)^2\cdot 3 +$$

$$+ (4,25-3,92)^2\cdot 1\Big] = 0,029.$$

$$\sigma = \sqrt{0,029} = 0,17.$$ ■

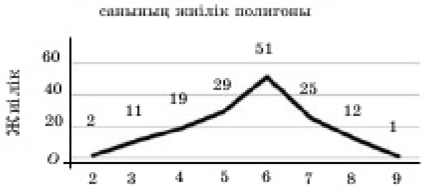
1. Дискретті кездейсоқ шама үшін орта мән қалай есептеледі?
2. Үздіксіз кездейсоқ шама үшін орта мән қалай есептеледі?
3. Дисперсия мен стандартты ауытқу формулаларын жазыңдар.
4. Дисперсия мен стандартты ауытқудың статистикалық мағынасы неде?

Есептер

А

2.29. Екі таңдалымның жиілік полигоны берілген:

2.10-сурет



2.11-сурет

(Қараңдар: 78-беттегі 2.3-кесте, 81-беттегі 2.4-кесте. Тыңайтқышты қолданған және қолданбаған жерден алынған бидай масағындағы дәндер санының жиілік кестелері.)

Жиілік полигонына қарап қай таңдалымның құлашы кең екенін анықтаңдар.
Әр таңдалымның орта мәнін есептеп алып, оның дисперсиясы мен стандартты ауытқуын табыңдар. Алынған нәтиженің мағынасын түсіндіріңдер.

2.30. Жиілік кестесі берілген. Таңдалымның орта мәнін, дисперсиясы мен стандартты ауытқуын есептеңдер:

x_i — таңдалым нұсқалығының элементтері	1	5	9	13
n_i — жиілік	20	10	14	6

2.31. Нұркен мен Ерғазының сегіз баскетбол ойынында жинаған ұпайлары кестеде берілген:

Нұркеннің ұпайлары	23	17	31	25	25	19	28	32
Ерғазының ұпайлары	9	29	41	26	14	44	38	43

Әр ойыншының орташа ұпайы мен стандартты ауытқуын есептеңдер. Осы екі ойыншының қайсысы мықты деп ойлайсыңдар? Себебін түсіндіріңдер.

2.32. Жиілік кестесі берілген. Таңдалымның орта мәнін, дисперсиясы мен стандартты ауытқуын есептеңдер:

x_i — таңдалым нұсқалығының элементтері	3	4	5	7	10
n_i — жиілік	1	2	3	4	2

B

2.33. Таңдалымның интервалдық жиіліктер кестесі берілген. Таңдалымның орта мәнін, дисперсиясы мен стандартты ауытқуын есептеңдер:

Интервал	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22)	[22; 24)
n_i — жиілік	2	4	8	12	16	10	3

2.34. Бақша күтуші 6 айлық көшеттердің ішінен таңдалым алып, олардың ұзындығын милиметрге дейінгі дәлдікпен өлшеді. Нәтижелер интервалдық жиіліктер кестесімен берілген:

Көшеттердің ұзындық интервалы, мм	300—324	325—349	350—374	375—399	400—424	425—449
Жиілік	12	18	42	28	14	6

Таңдалымның орта мәнін, дисперсиясы мен стандартты ауытқуын есептеңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

2.35. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$ функциясының экстремум нүктелерінің ординаталарының қосындысын табыңдар.

2.36. $g(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{x+1}$ функциясының анықталу облысын табыңдар.

2.37. Есептеңдер:

1) $\int(2x-3)^3dx$; 2) $\int\left(2x^3-3\right)^3dx$.

«МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКАНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ» бөлімінің қорытындысы

Зерттелетін объектілер жиынтығын *басты жиынтық*, басты жиынтықтан кездейсоқ таңдап алынған объектілер жиынын *таңдалым жиынтығы* немесе жай ғана *таңдалым* деп атайды.

Таңдалым элементтері арасында өзара тең емес элементтерді бір-бірден алып, оларды өсу тәртібімен жазғанда шығатын тізбені *ығыспалы қатар*, ығыспалы қатардың әрбір элементін *нұсқалық* деп атайды.

Жиілік кестесінің түрі:

x_i — таңдалым нұсқалығының элементтері	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i — жиілік	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Салыстырмалы жиілік кестесінің түрі:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Таңдалым нұсқалығы элементтерінің ішінде ең үлкені мен ең кішісінің айырымын ***таңдалым құлашы*** *деп атайды және R әрпімен белгілейді:*

$$R = x_{max} - x_{min}.$$

Таңдалым элементтерінің ішіндегі ең жиі кездесетін элементті *таңдалым модасы* деп атайды. Моданы M_0 арқылы белгілейді.

Таңдалым элементтерінің арифметикалық ортасын таңдылымның *орта мәні* деп атайды және $\overline{X}$ әрпімен белгілейді.

Таңдалымның дәл ортасында орналасқан элемент *таңдалым медианасы* деп аталады. Егер таңдалым элементтерің саны жұп болса, онда тізбенің ортасындағы екі санның арифметикалық ортасы таңдалымның *медианасы* болады. Медиананы M_e арқылы белгілейді.

Егер КШ мәндерінің жиыны санаулы немесе КШ барлық мәндерін нөмірлеп шығу мүмкіндігі бар болса, мұндай КШ *дискретті кездейсоқ шама* деп аталады. Дискретті кездейсоқ шамалар тек қана «оқшауланған» мәндер қабылдаса, үздіксіз кездейсоқ шамалар белгілі бір сан аралығының кез келген мәнін қабылдауы мүмкін.

Вертикаль өсі салыстырмалы жиілікті, екінші өсі таңдалым сандарын көрсететін жазықтықта $(x_1;\ n_1)$, $(x_2;\ n_2)$, ..., $(x_k;\ n_k)$ нүктелерін белгілеп, оларды кесінділермен тізбектеп қосқанда шығатын фигураны *жиілік полигоны* деп атайды.

Кездейсоқ шамалардың интервалдық *ығыспалы қатарлары* деп өсу ретімен берілген интервалдар жиындарында жататын кездейсоқ шамалардың жиіліктері көрсетілген кестені айтамыз.

Интервал	$[x_1;\ x_2)$	$[x_2;\ x_3)$	...	$[x_{n-1};\ x_n)$
Жиілік	N_1	N_2	...	N_{n-1}

Таңдалымның орта мәні, дисперсия және стандартты (орташа квадраттық) ауытқу — таңдалымның жиі кездесетін сандық сипаттамалары.

Таңдалымның орта мәнін $\overline{x}$ деп белгілейді және оны мына формуламен есептейді:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \ldots + x_k \cdot n_k).$$

Таңдалымның *дисперсиясы* $(\overline{D})$ мен *стандартты (орташа квадраттық) ауытқуы* (σ) мына формулалармен есептеледі:

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \overline{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot n_2 + (x_3 - \overline{x})^2 \cdot n_3 + \ldots + (x_k - \overline{x})^2 \cdot n_k\right].$$

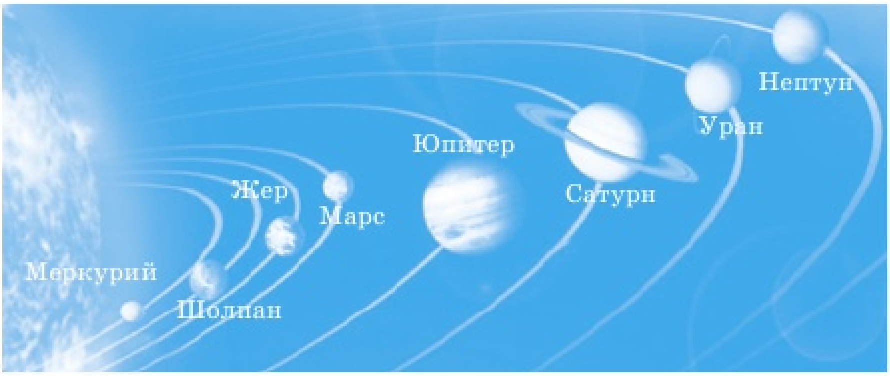
$$\sigma = \sqrt{\overline{D}}\,.$$

Дисперсия мен стандартты ауытқу таңдалымның орта мәннен қаншалықты «шашыраңқы» орналасатынын сипаттайды. Олардың мәні аз болған сайын таңдалым «жинақы».

Терминдер атауының сөздігі

№	Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
1	Гистограмма	Гистограмма	histogram
2	Дисперсия	Дисперсия	variance
3	Жиілік кестесі	Таблица частот	frequency table
4	Медиана	Медиана	median
5	Мода	Мода	mode
6	Орта мән	Средняя величина	mean
7	Стандартты ауытқу	Стандартное отклонение	standard deviation
8	Құлаш	Размах	range

III бөлім. ДӘРЕЖЕЛЕР ЖӘНЕ ТҮБІРЛЕР. ДӘРЕЖЕЛІК ФУНКЦИЯЛАР



Дәрежелік функция табиғатта, күнделікті өмірде болып жатқан құбылыстардың математикалық моделін құрып, оны зерттеуге кеңінен қолданылады. Соның бірі — Кеплер заңы. Бөлім соңында Жер мен Күннің арақашықтығы арқылы Шолпанның Күнді айналу периоды мен Марстан Күнге дейінгі арақашықтықты есептеуді үйренесіңдер

Бөлімде қарастырылатын тақырыптар:

3.1. n-дәрежелі түбір және оның қасиеттері
3.2. Рационал көрсеткішті дәреже және оның қасиеттері. Иррационал көрсеткішті дәреже ұғымы
3.3. Иррационал өрнектерді түрлендіру. Иррационал көрсеткішті дәреже ұғымы
3.4. Дәрежелік функцияның қасиеттері, графигі
3.5. Дәрежелік функцияның туындысы мен интегралы

3.1 n-дәрежелі түбір және оның қасиеттері

Бұл тақырыпта n-дәрежелі түбір ұғымымен танысып, соңында:

- n-дәрежелі түбірдің анықтамасын;
- n-дәрежелі арифметикалық түбірдің анықтамасын білесіңдер;
- n-дәрежелі түбірдің қасиеттерін үйреніп, оны есептер шығарғанда қолданасыңдар.

3.1.1 n-дәрежелі түбірдің анықтамасы

Анықтама. *Егер n ($n > 1$) натурал саны мен a және b нақты сандары үшін*

$$b^n = a \tag{1}$$

*теңдігі орындалса, b саны a санының **n-дәрежелі түбірі** деп аталады.*

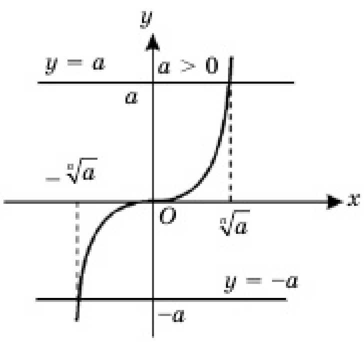
Сонымен, a санының n-дәрежелі түбірі деп n-дәрежесі a-ға тең кез келген b санын айтамыз. Олай болса, a санының n-дәрежелі түбірі деп

$$x^n = a \tag{2}$$

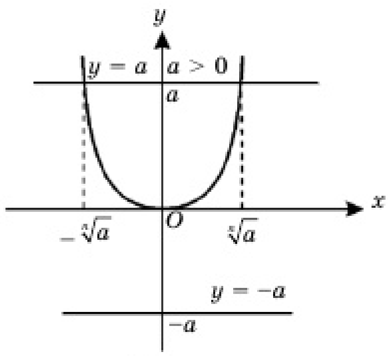
теңдеуінің түбірлерін айтуға болады.

(2) теңдеудің түбірлерін анықтау үшін оны графиктік жолмен шешіп көрейік.

n тақ сан болсын. (2) теңдеудің шешімдері $y = x^n$ және $y = a$ функциялары графиктерінің қиылысу нүктелерінің абсциссаларына тең.



3.1-сурет



3.2-сурет

3.1-суретте $y = x^n$ және $y=a$ функцияларының графиктері кез келген a саны үшін бір нүктеде қиылысатынын көреміз: $a > 0$ болса, оның n-дәрежелі түбірі оң сан; $a = 0$ болса, n-дәрежелі түбірі 0-ге тең; $a < 0$ болса, оның n-дәрежелі түбірі теріс сан.

n жұп сан болсын. 3.2-суреттен көріп отырғанымыздай, $a > 0$ болғанда (2) теңдеудің екі түбірі, $a = 0$ болса, бір түбірі ($x = 0$) бар, ал $a < 0$ болса, онда (2) теңдеудің түбірі жоқ. Себебі соңғы жағдайда $y = x^{2k}$ ($n = 2k$) және $y = a$ ($a < 0$) функцияларының графиктері қиылыспайды. Демек, егер n тақ сан болса, кез келген нақты санның жалғыз n-дәрежелі түбірі бар. Жалпы, n-дәрежелі түбірді $\sqrt[n]{a}$ арқылы белгілейді және оны «n-дәрежелі түбір асты *a*» деп оқиды. Мұндағы *n* — түбір көрсеткіші, *a* түбір астындағы сан (өрнек). Мысалы, $2^5 = 32$ болғандықтан, $\sqrt[5]{32} = 2$; $(-3)^3 = -27$ болғандықтан, $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[3]{0} = 0$.

Егер *n* жұп сан және $a>0$ болса, *a*-ның *n*-дәрежелі екі түбірі бар: $-\sqrt[n]{a}$ және $\sqrt[n]{a}$. Егер $n = 2$ болса, бізге үйреншікті квадрат түбір аламыз. Квадрат түбірлердің көрсеткіші жазылмайды. Мысалы, $\sqrt[2]{3}$ жазуының орнына $\sqrt{3}$ жазылды; $a = 0$ болса, $\sqrt[n]{0} = 0$. *n* жұп және $a < 0$ болғанда *a*-ның жұп дәрежелі түбірі жоқ, яғни $\sqrt[n]{a}$ түбірінің мағынасы болмайды.

Мысалы, $3^4 = 81$, демек, $\sqrt[4]{81} = 3$; $2^6 = 64$ болғандықтан, $\sqrt[6]{64} = 2$, ал $\sqrt[4]{-81}$ және $\sqrt[6]{-64}$ түбірлерінің нақты сандар жиынында мағынасы жоқ.

Теріс емес саннан алынған *n* жұп дәрежелі оң түбірді осы санның ***жұп дәрежелі арифметикалық түбірі*** (түбірдің арифметикалық мәні) деп атайды: $\sqrt[n]{a}$, $a > 0$. Мысалы: $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[6]{64}$.

3.1.2 *n*-дәрежелі түбірдің қасиеттері

Түбірлерге қолданылатын негізгі ережелер

Түбір астындағы өрнектерді теріс емес сандар деп қабылдаймыз.

1°. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ — *n-дәрежелі түбірдің n дәрежесі түбір астындағы санға тең.*

2°. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ — *көбейтіндінің түбірі көбейткіштердің түбірлерінің көбейтіндісіне тең.*

3°. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ — *түбірді дәрежеге шығару үшін түбір астындағы өрнекті осы дәрежеге шығарса, жеткілікті.*

4°. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$ — *бөліндінің түбірі оның алымының түбірін бөлімінің түбіріне бөлгенге тең.*

5°. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ — *түбірден түбір алғанда түбір көрсеткіштері көбейтіледі.*

6°. $\sqrt[kn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ — *түбір көрсеткіші мен түбір астындағы санның дәреже көрсеткіштерін бірдей сандарға қысқартуға болады.*

Осы қасиеттерді дәлелдейік.

1°-қасиеттің дәлелдеуі түбірдің анықтамасынан шығады.

2°-қасиеттің дәлелдеуі: 1°-қасиет $\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab$ және дәрежелерді көбейту ережесінен $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$ аламыз.

3°-қасиеттің дәлелдеуі: $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n\cdot k} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k$ және $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = a^k$ теңдеулерінен $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ шығады.

Топтық жұмыс

4°-қасиетті өздерің дәлелдеңдер, мысал келтіріңдер.

5°-қасиеттің дәлелдеуі $\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$ және $\left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn} = a$ теңдіктерінен шығады.

6°-қасиеттің дәлелдеуі 1°, 3° және 5°-қасиеттерден шығады: $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{km}}} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[k]{a^m}\right)^k} = \sqrt[n]{a^m}$.

1-мысал. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{2}$ өрнегін ықшамдау керек.

▲ Берілген түбірлердің көрсеткіштері 2, 3 және 6-ға тең. Бұл берілген сандардың ең кіші ортақ еселігі 6 болғандықтан, $\sqrt{2}$ және $\sqrt[3]{4}$ түбірлерінің көрсеткіштерін 6°-қасиет бойынша 6-ға дейін толықтырамыз. Онда 2°-қасиетке сәйкес

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^4}\cdot\sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3\cdot 2^4\cdot 2} = \sqrt[6]{2^8}.$$

Осыдан түбір көрсеткіші 6 мен түбір астындағы 2-нің дәреже көрсеткіші 8-ді 6°-қасиет бойынша ортақ бөлгіш 2-ге қысқартып, $\sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4} = = \sqrt[3]{2^3\cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$ теңдігін аламыз. Сонда

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{2} = 2\sqrt[3]{2}. \blacksquare$$

2-мысал. $\sqrt[7]{2^{58}}$ өрнегінің мәнін есептеу керек.

▲ $\sqrt[7]{2^{58}} = \sqrt[7]{2^{7\cdot 8+2}} = \sqrt[7]{2^{7\cdot 8}\cdot 2^2} = \sqrt[7]{2^{7\cdot 8}}\cdot\sqrt[7]{2^2} = 2^8\sqrt[7]{2^2} = 256\sqrt[7]{4}$. ■

3-мысал. $\dfrac{\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[4]{9}}{\sqrt[6]{24}}$ өрнегінің мәнін есептеу керек.

▲ $$\frac{\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[4]{9}}{\sqrt[6]{24}}=\frac{\sqrt[12]{36^4}\cdot\sqrt[12]{9^3}}{\sqrt[12]{24^2}}=\frac{\sqrt[12]{2^8\cdot3^8\cdot3^6}}{\sqrt[12]{2^6\cdot3^2}}=\sqrt[12]{\frac{2^8\cdot3^{14}}{2^6\cdot3^2}}=\sqrt[12]{2^2\cdot3^{12}}=$$

$$=3\sqrt[12]{2^2}=3\sqrt[6]{2}.$$ ■

1. a санының n-дәрежелі түбірі деген не?
2. n-дәрежелі арифметикалық квадрат түбір деген не?
3. n-дәрежелі түбірдің қандай қасиеттерін білесіңдер? Оларды дәлелдеп беріңдер.

Есептер

А

3.1. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^3=8$; 2) $3x^4-48=0$; 3) $x^5=-32$;
4) $x^3=4$; 5) $x^4=10$; 6) $x^5=6$;
7) $x^3=-4$; 8) $x^4=-10$; 9) $x^6=7$.

3.2. x-тің қандай мәндерінде теңдіктер орындалады:

1) $\sqrt{x^2}=x$; 2) $\sqrt[3]{x^3}=x$; 3) $\sqrt[4]{x^4}=-x$?

3.3. Өрнектің анықталу облысын табыңдар:

1) $\sqrt[4]{x}$; 2) $\sqrt[3]{x}$; 3) $\sqrt[6]{-x}$; 4) $\sqrt[8]{x-2}$;

5) $\sqrt[5]{3-x}$; 6) $\sqrt[6]{\frac{1}{2x-5}}$; 7) $\sqrt[3]{\frac{17}{x-6}}$; 8) $\sqrt[14]{\frac{x+3}{x-3}}$;

9) $\sqrt[10]{\frac{x-5}{2-x}}$; 10) $\sqrt[7]{\frac{x-2}{2+x}}$; 11) $\sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}}$; 12) $\sqrt[8]{\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}}$.

3.4. Есептеңдер:

1) $\sqrt[6]{2^6}$; 2) $\sqrt[4]{(-3)^4}$; 3) $-\sqrt[6]{25^3}$; 4) $\sqrt[3]{125}-\sqrt[4]{(-9)^4}$;

5) $\sqrt[5]{7^5}$; 6) $\sqrt[3]{(-2)^3}$; 7) $\left(-3\sqrt[3]{3}\right)^3$; 8) $\sqrt[5]{32}-\sqrt[6]{27^2}$.

3.5. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt[4]{16}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$; 3) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; 4) $\sqrt[3]{0,027}$;

5) $\sqrt[5]{-32}$; 6) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; 7) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$; 8) $\sqrt[4]{0,0625}$;

9) $\sqrt[12]{1}$; 10) $\sqrt[7]{-1}$; 11) $\sqrt[6]{11\dfrac{25}{64}}$; 12) $\sqrt[5]{-0,00001}$.

3.6. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\sqrt{5}$ және $\sqrt[4]{5}$; 2) $\sqrt{0,5}$ және $\sqrt[4]{0,5}$; 3) $\sqrt[3]{2}$ және $\sqrt[5]{3}$;
4) $\sqrt[3]{0,7}$ және $\sqrt[5]{0,7}$; 5) $\sqrt[3]{3}$ және $\sqrt[5]{4}$; 6) $\sqrt[4]{3}$ және $\sqrt[4]{5}$;
7) $\sqrt[10]{8}$ және 1; 8) $\sqrt[7]{0,85}$ және 1; 9) $\sqrt[5]{-0,2}$ және $\sqrt[5]{-0,3}$;
10) $\sqrt[18]{\dfrac{4}{7}}$ және $\sqrt[18]{0,57}$.

3.7. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt[3]{8\cdot 27}$; 2) $\sqrt[4]{625\cdot 16}$; 3) $\sqrt[5]{243\cdot\dfrac{1}{32}}$; 4) $\sqrt[3]{125\cdot 27}$;

5) $\sqrt[3]{0,001\cdot 125}$; 6) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}\cdot 10000}$; 7) $\sqrt[4]{16\cdot 81}$; 8) $\sqrt[4]{0,0016\cdot 81}$.

3.8. $a > 0$ деп алып, көбейткішті түбір алдына шығарыңдар:

1) $\sqrt{4\cdot a}$; 2) $\sqrt{50\cdot a^3}$; 3) $\sqrt[4]{16\cdot a}$; 4) $\sqrt[4]{81\cdot a^6}$;

5) $\sqrt[4]{81a^2}$; 6) $\sqrt[3]{27a^3}$; 7) $\sqrt[3]{5a^4}$; 8) $\sqrt[6]{10a^8}$.

3.9. Көбейткішті түбір астына алыңдар:

1) $2\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt[3]{5}$; 3) $3\sqrt[4]{\dfrac{1}{9}}$; 4) $3\sqrt{5}$;

5) $3\sqrt{2}$; 6) $5\sqrt[3]{2}$; 7) $2\sqrt[5]{\dfrac{1}{8}}$; 8) $b\sqrt[4]{5}$, $b > 0$.

B

3.10. Айырымның таңбасын анықтаңдар:

1) $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{7}$; 2) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}}-\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}}$; 3) $\sqrt[6]{0,28}-\sqrt[6]{\dfrac{2}{7}}$;

4) $\sqrt[8]{11}-\sqrt[8]{10}$; 5) $1-\sqrt[4]{0,99}$; 6) $\sqrt[7]{\dfrac{7}{11}}-\sqrt[7]{\dfrac{9}{19}}$;

7) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[5]{2}$; 8) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}-\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}$; 9) $\sqrt[k]{3}-\sqrt[2k]{3}$.

3.11. Сандарды өсу ретімен орналастырыңдар:

1) $\sqrt{2};\ \sqrt[3]{3};\ \sqrt{6}$;   2) $\sqrt{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{0,35};\ \sqrt[6]{0,15}$;

3) $\sqrt{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{0,3};\ \sqrt[5]{0,2}$;   4) $5\sqrt{0,1};\ 3\sqrt[3]{\frac{1}{6}};\ 2\sqrt[6]{\frac{1}{3}}$.

3.12. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt[3]{\frac{64\cdot 27}{125}}$;   2) $\sqrt[4]{\frac{81}{16\cdot 625}}$;   3) $\sqrt[5]{\frac{3^{10}\cdot 5^5}{7^{10}}}$;   4) $\sqrt[6]{\frac{9^9}{2^{12}\cdot 5^6}}$.

3.13. Әріптермен оң сандар белгіленген. Көбейткішті түбір алдына шығарыңдар:

1) $\sqrt{16x^2y}$;   2) $\sqrt[4]{81ab^4}$;   3) $\sqrt[3]{125a^5x^3}$;   4) $\sqrt[3]{64b^{12}\cdot y^7}$.

3.14. Әріптермен оң сандар белгіленген. Көбейткіштерді түбір астына алыңдар:

1) $a\cdot\sqrt{\frac{5}{a}}$;   2) $x\cdot\sqrt[3]{\frac{8}{x^2}}$;   3) $b\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{b^3}}$;   4) $2c\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{16c^4}}$.

3.15. $a > 0$ болса,

1) $\sqrt[n+1]{a\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}$;   2) $\sqrt[2n+2]{a^3\cdot\sqrt[n]{a^3}} = \sqrt[2n]{a^3}$

теңдіктерінің орындалатынын көрсетіңдер.

3.16. Көрсетілген теңдіктердің орындалатынын көрсетіңдер:

1) $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} = 1$;   2) $\sqrt[6]{1,5-\sqrt{2}} : \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[6]{0,5}$.

3.17. 1) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}}$;   2) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{10}}$;   3) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$;   4) $\frac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$

бөлшектерінің бөлімдерінде түбір таңбасы болмайтындай етіп түрлендіріңдер.

C

Өрнекті ықшамдаңдар (**3.18—3.19**):

3.18. 1) $\sqrt[6]{8x\left(7+4\sqrt{3}\right)}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}$;

2) $\frac{a}{2}\sqrt[4]{(a+1)\left(a^2-1\right)\left(1+2a+a^2\right)}\cdot\left(\frac{a^2+3a+2}{\sqrt{a}-1}\right)^{-1}$.

3.19. 1) $\sqrt{\dfrac{(a+1)\sqrt[3]{a+1}}{3a}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}}$;

2) $ab\sqrt[n]{a^{n-1}b^{-n} - a^{-n}b^{1-n}} \cdot \sqrt[n]{(a-b)^{-1}}$.

3.20*. $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

3.21. $4x^2 - 3y = 0$ теңдеуінің графигін салыңдар.

3.22. 1) 0; 2) -3; 3) -2 саны $x^3 + x^2 = 6x$ теңдеуінің түбірі бола ма?

3.23. $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20 = 0$ теңдеуінің графигін салыңдар.

3.2 Рационал көрсеткішті дәреже және оның қасиеттері

Бұл тақырыпта рационал көрсеткішті дәрежемен танысып, соңында:

- рационал көрсеткішті дәреженің анықтамасы мен қасиеттерін білесіңдер;
- алгебралық өрнектерді түрлендіру үшін рационал көрсеткішті дәреженің қасиеттерін қолдануды үйренесіңдер.

3.2.1 Рационал көрсеткішті дәреже

Натурал m саны n-ге қалдықсыз бөлінетін жағдайда $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ теңдігі орындалады. Мысалы, $\sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2$. Бұл теңдік санның кез келген бөлшек дәрежесін анықтауға мүмкіндік береді.

Айталық, оң $a > 0$ саны мен $r = \dfrac{m}{n}$ рационал саны берілсін. Мұндағы m — бүтін сан, n — натурал сан. ***Онда a санының r рационал көрсеткішті дәрежесі деп*** $\sqrt[n]{a^m}$ ***өрнегін айтады:***

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

$r > 0$ және $a = 0$ болса, анықтама бойынша $0^r = 0$. Мысалы,

$$(0,2)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{0,2^2};\ 3^{-\frac{3}{4}} = 3^{\frac{-3}{4}} = \sqrt[4]{3^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{27}};$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2,1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{21}{10}} = \sqrt[10]{\left(\frac{1}{3}\right)^{21}};\ 0^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Ал $0^{-\frac{2}{3}}$, $(-2)^{\frac{3}{4}}$ және $(-8)^{\frac{1}{6}}$ сияқты өрнектердің мағынасы болмайды.

Әр рационал санды бірнеше бөлшек сан түрінде өрнектеуге, мысалы, 0,5 санын $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ т.с.с. бөлшектер түрінде жазуға болады. Олай болса, r рационал көрсеткішті дәреженің мәні дәреже көрсеткіші r санын осы санды беретін бөлшектердің қайсысымен жазсақ та өзгермейтінін көрсетейік.

▲ Шынында да, әрбір r рационал санын қысқармайтын бөлшек түрінде жазуға болады. Айталық, $r = \frac{m}{n}$ қысқармайтын бөлшек болсын. r-дің бөлшек түріндегі өзге жазылуларын алу үшін $\frac{m}{n}$ бөлшегінің алымын да, бөлімін де бірдей k натурал санына көбейтеміз. Енді біз $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}}$ теңдігін дәлелдесек, жеткілікті: $a^{\frac{km}{kn}} = \sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Дәлелдеу керегі де осы. ■

3.2.2. Рационал көрсеткішті дәреженің қасиеттері

Санның бүтін көрсеткішті дәрежелерінің негізгі қасиеттері оның рационал көрсеткішті дәрежелері үшін де орындалады.

$a > 0$, $b > 0$ болса, кез келген p және q рационал сандары үшін:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$;
3. $(a^p)^q = a^{pq}$;
4. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

▲ **1-қасиетің дәлелдеуі.** Берілген p және q рационал сандарын бөлімдері бірдей бөлшектермен жазайық: $p = \frac{m}{n}$; $q = \frac{k}{n}$. (Мысалы, $p = \frac{1}{2}$; $q = \frac{2}{3}$ болса, $p = \frac{3}{6}$; $q = \frac{4}{6}$ деп алуға болады.) Онда

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{p+q}.$$

Осыдан әрбір рационал p саны үшін

$$a^{-p}=\frac{1}{a^{p}}$$

теңдігі шығады. Шынында да, 1-қасиет бойынша $a^p \cdot a^{-p} = a^0 = 1$. Осыдан $a^{-p}=\dfrac{1}{a^{p}}$.

$a^{p-q} \cdot a^q = a^{p-q+q} = a^p$ теңдігінен 2-қасиеттің орындалатынын көреміз.

3-қасиеттің дәлелдеуі: $a > 0$, $p=\dfrac{m}{n}$; $q=\dfrac{k}{l}$ болсын. Онда $\left(a^{p}\right)^{q}=$

$$=\sqrt[l]{\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{k}}=\sqrt[l]{\sqrt[n]{a^{mk}}}=\sqrt[l\cdot n]{a^{mk}}=a^{\frac{mk}{l\cdot n}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}}=a^{p\cdot q}.$$

4-қасиеттің дәлелдеуі: $p=\dfrac{m}{n}$ болса,

$$(a\cdot b)^{p}=(a\cdot b)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(a\cdot b)^{m}}=\sqrt[n]{a^{m}\cdot b^{m}}=\sqrt[n]{a^{m}}\cdot\sqrt[n]{b^{m}}=a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}=a^{p}\cdot b^{p}.\ ■$$

Топтық жұмыс

5-қасиетті өздерің дәлелдеңдер, мысал келтіріңдер.

Құрамында рационал көрсеткішті дәрежелері бар өрнектерді түрлендіруге мысалдар қарастырайық.

1-мысал. $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}-25x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}-5x^{\frac{1}{4}}}$ өрнегін ықшамдау керек.

▲ Бұл өрнектің анықталу облысы $x > 0$ теңсіздігімен беріледі. Өрнекті ықшамдау үшін оның алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктейміз:

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}-25x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+5x^{\frac{1}{4}}}=\frac{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{2}{4}}-25)}{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{4}}+5)}=\frac{x^{\frac{2}{4}}-25}{x^{\frac{1}{4}}+5}=\frac{(x^{\frac{1}{4}})^{2}-5^{2}}{x^{\frac{1}{4}}+5}=$$

$$=\frac{(x^{\frac{1}{4}}+5)(x^{\frac{1}{4}}-5)}{x^{\frac{1}{4}}+5}=x^{\frac{1}{4}}-5.\ ■$$

1. Санның рационал көрсеткішті дәрежесі деп нені түсінесіңдер?
2. Рационал көрсеткішті дәреженің қандай қасиеттерін білесіңдер? Оларды дәлелдеп беріңдер.

Есептер

А

3.24. Бөлшек көрсеткішті дәрежені түбірмен алмастырыңдар:

1) $7^{\frac{5}{3}};\ 5^{\frac{1}{7}};\ 6^{-\frac{1}{3}};\ 10^{-0,5};$ 2) $3x^{\frac{1}{2}};\ (3x)^{\frac{1}{2}};\ \frac{1}{5}y^{\frac{1}{5}};\ -y^{-\frac{2}{3}};$

3) $2,5^{-\frac{2}{3}};\ \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}};\ 0,5^{0,5};$ 4) $(ab)^{\frac{2}{3}};\ ab^{\frac{2}{3}};\ (a+b)^{\frac{2}{3}};\ a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}};$

5) $a^{0,5};\ b^{1,2};\ c^{-0,6};\ d^{-0,5};$ 6) $xy^{-1,5};\ 4(x-y)^{-1,5};\ 2x(x+y)^{-\frac{1}{8}};$

7) $5x^{\frac{2}{3}};\ 7a^{-1,5};\ ab^{\frac{5}{8}};\ (x+y)^{\frac{2}{3}};$ 8) $-3y^{-\frac{1}{2}};\ -1,2b^{-1,2};\ (ab)^{\frac{5}{8}};\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}.$

3.25. Өрнекті қосынды түрінде жазыңдар:

1) $a^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}});$ 2) $e^{-\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}\cdot(e^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}});$

3) $(a^{\frac{2}{3}}-1)(a^{\frac{1}{3}}+2);$ 4) $(x^{-\frac{3}{4}}+2)(x^{-\frac{1}{4}}-3);$

5) $(1+b^{\frac{1}{2}})(1-b^{\frac{1}{2}});$ 6) $(2-y^{1,5})(2+y^{1,5}).$

3.26. Есептеңдер:

1) $100^{\frac{1}{2}};\ 8^{\frac{1}{3}};\ 3,61^{-\frac{1}{2}};$ 2) $0^{\frac{5}{6}};\ 8^{1\frac{1}{3}};\ \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}};$

3) $27^{-\frac{1}{3}};\ 81^{\frac{3}{4}};\ 0,25^{-\frac{3}{2}};$ 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}};\ 16^{\frac{1}{4}};\ 343^{\frac{1}{3}};$

5) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25};\ 0,0081^{\frac{1}{4}};\ \left(\frac{1}{625}\right)^{\frac{1}{4}};$ 6) $(0,001)^{\frac{2}{3}};\ 256^{\frac{1}{8}};\ (0,000001)^{-\frac{1}{3}}.$

3.27. Өрнекті ықшамдап, рационал көрсеткішті дәреже түріне келтіріңдер:

1) $c^{\frac{1}{2}}\cdot c^{\frac{1}{3}};$ 2) $b^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}};$ 3) $x^{0,2}\cdot x^{-1}\cdot x^{0,6};$

4) $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}\cdot a^{\frac{5}{3}};$ 5) $y^{0,8}\cdot y^{-5}\cdot y^{7,2};$ 6) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}};$

7) $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{9}};$ 8) $\left(x^{0,1}\right)^{-2,5};$ 9) $\left(y^{-0,5}\right)^{-1};$

10) $\dfrac{x^{\frac{3}{7}} \cdot x^{\frac{5}{21}}}{x^{\frac{1}{6}}}$; 11) $\dfrac{a^{5,2} \cdot a^{-0,8}}{a \cdot a^{0,9}}$; 12) $\dfrac{b^{0,2} \cdot b^{0,5}}{b^{-1,5} \cdot b^{3}}$.

3.28. Есептеңдер:

1) $5^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{-0,25} \cdot 5^{\frac{4}{5}} \cdot 5^{-0,75}$; 2) $3^{\frac{3}{8}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} \cdot 3^{-0,25} \cdot 3^{\frac{11}{40}}$;

3) $4^{0,7} \cdot 2^{-0,4}$; 4) $25^{0,3} \cdot 5^{\frac{14}{10}}$;

5) $9^{-\frac{4}{3}} \cdot 27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$; 6) $64^{\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{8}{3}}$;

7) $(81 \cdot 16)^{\frac{1}{4}}$; 8) $(81 \cdot 16)^{-\frac{1}{4}}$;

9) $\left(0,01 \cdot \dfrac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 10) $\left(\dfrac{1}{27} \cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

3.29. Қосынды түрінде жазыңдар:

1) $\left(2p^{\frac{1}{3}} + q^{-1}\right)\left(2p^{\frac{1}{3}} - q^{-1}\right)$; 2) $\left(1 + b^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$;

3) $\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^{2}$; 4) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}\right)^{2}$;

5) $\left(\left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)\right)^{2}$; 6) $\left(\left(x^{-\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{-\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{4}}\right)\right)^{2}$.

3.30. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ формуласын қолданып, көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $3 - x^2$; 2) $y^4 - 5$; 3) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{2} - 4$;

4) $y^{\frac{2}{5}} - 9$; 5) $25 - p^{\frac{4}{7}}$; 6) $a - b^{\frac{1}{2}}$.

3.31. Көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x - 2$; 2) $10 - y$; 3) $a^{\frac{1}{16}} - 16$;

4) $9c^{0,3} - 4$; 5) $a^{1,5} - y^2$; 6) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}} - 49$.

3.32. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right)$ формуласын қолданып, көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 - 8$; 2) $\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^3 + 27$; 3) $\left(p^{\frac{1}{3}}\right)^2 + 1$;

4) $q^{\frac{5}{6}} - 125$; 5) $125 - b$; 6) $y - 2^{\frac{3}{2}}$;

7) $a^{0,9} - 8b$; 8) $x + 1000$; 9) $a^{2,4} + b^{0,5}$.

B

3.33. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{0,6} \cdot x^{-\frac{2}{5}}$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $\left(y^{-\frac{5}{8}}\right)^{0,4} \cdot y^{0,25}$; 4) $\left(c^{\frac{5}{12}}\right)^{1,2} : \left(c^{-\frac{1}{3}}\right)^{-1,5}$;

5) $a^{\frac{5}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{6}}\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^4$; 6) $\left(c^{-\frac{3}{7}} \cdot y^{-0,4}\right)^3 c^{\frac{2}{7}} \cdot y^{0,2}$;

7) $\left(a^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right)^{1\frac{1}{3}} a^{0,7} \cdot x^{0,8}$; 8) $p^{-1}q^{\frac{5}{4}}\left(p^{-\frac{2}{7}} \cdot q^{\frac{1}{14}}\right)^{-3,5}$.

3.34. Егер $x > 0$ болса, x^6; x^{40}; x^{28}; x^{-14}; x^5; x^{-3}; x; $x^{\frac{1}{4}}$; x^{-1}; $x^{\frac{1}{3}}$ өрнектерін қандай да бір өрнектің квадраты түрінде жазыңдар.

3.35. Егер $y > 0$ болса, y^6; y^{-21}; y^7; y; $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{-1,5}$; $y^{-\frac{1}{3}}$; $y^{0,2}$; $y^{-0,9}$ өрнектерін қандай да бір өрнектің кубы түрінде жазыңдар.

3.36. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\left(\dfrac{a^{\frac{5}{12}} \cdot a^{-\frac{3}{8}}}{a^{\frac{7}{24}}}\right)^{-\frac{4}{3}}$, мұндағы $a = 125$;

2) $\left(\dfrac{b^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{6}} \cdot c^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}}$, мұндағы $b = 0,001$, $c = 25$.

3.37. $x > 0$ және $y > 0$ деп алып, x-ті y арқылы өрнектеңдер:

1) $y = x^{\frac{2}{3}}$; 2) $y = x^{\frac{4}{7}}$; 3) $y = x^{-\frac{3}{2}}$; 4) $y = x^{-0,75}$;

5) $y = 5x^{\frac{4}{5}}$; 6) $y = \dfrac{1}{6}x^{-\frac{2}{3}}$.

Өрнекті ықшамдаңдар (3.38—3.39):

3.38. 1) $\left(\dfrac{4}{c^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\dfrac{c^{\frac{3}{4}}}{8}\right)^{\frac{1}{9}}$; 2) $\left(\dfrac{27x^{\frac{1}{2}}}{z^{0,2}}\right)^{2,5} \cdot \left(\dfrac{z^{\frac{1}{12}}}{3\sqrt[4]{3}\;x^{\frac{1}{24}}}\right)^{6}$.

3.39. 1) $\left(1+c^{\frac{1}{2}}\right)^{2} - 2c^{\frac{1}{2}}$; 2) $b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}} - \left(b^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{1}{4}}\right)^{2}$;

3) $\left(x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{3}}\right)^{2} + 2x^{\frac{7}{12}}$; 4) $(a^{0,2} + x^{0,2})^2 - (a^{0,2} - x^{0,2})^2$;

5) $\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)$; 6) $\left(b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right)\left(b + b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} + c\right)$.

3.40. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^{\frac{1}{2}} = 5$; 2) $x^{\frac{2}{3}} = 4$; 3) $x^{\frac{3}{2}} = 27$;

4) $x^{-0,8} = 16$; 5) $x^{\frac{4}{5}} \cdot x^{1,8} = 1$; 6) $x^{\frac{5}{8}} \cdot x^{\frac{3}{8}} = -25$.

Өрнекті ықшамдаңдар (3.41—3.42):

3.41. 1) $\left(p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}}\right)\left(p^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{2}{3}}\right)$; 2) $\left(b^{1\frac{1}{2}} - c^{1\frac{1}{2}}\right)^{2}\left(b^{1\frac{1}{2}} + c^{1\frac{1}{2}}\right)^{2}$;

3) $a + 6a^{\frac{2}{3}} + 12a^{\frac{1}{3}} + 8$; 4) $x^2 - 9x^{\frac{4}{3}} + 27x^{\frac{2}{3}} - 27$.

3.42. 1) $\left(-\dfrac{15m^{3,5}}{8n^{\frac{1}{2}}}\right)^{3} \cdot \left(-\dfrac{4n^{\frac{3}{8}}}{5m^{2,5}}\right)^{4}$; 2) $\left(-\dfrac{10x^{0,4}}{9a^{0,6}}\right)^{4} \cdot \left(-\dfrac{5x^{\frac{1}{2}}}{27a^{0,8}}\right)^{-3}$.

3.43. Көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x - y + x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$; 2) $u - v^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{1}{2}} - v$;

3) $a + 2a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} + 1$; 4) $2b^2 + b^{\frac{8}{3}} + ba^{\frac{2}{3}} + 2$;

5) $x + 5x^{\frac{1}{2}} + 4$; 6) $y^{\frac{1}{2}} - 13y^{\frac{1}{4}} + 36$.

C

3.44. $x - 1$ өрнегін $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots a + 1)$ формуласын қолданып, бір көбейткіші 1) $x^{\frac{1}{4}} - 1$; 2) $x^{\frac{1}{5}} - 1$; 3) $x^{\frac{1}{6}} - 1$ болатындай етіп көбейткіштерге жіктеңдер.

3.45. x пен y-тің арасындағы тәуелділікті табыңдар:

1) $\begin{cases} x = t^{\frac{1}{2}}, \\ y = t^{-\frac{1}{2}}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t^{\frac{1}{3}}, \\ y = t^{\frac{1}{6}}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 3t^{\frac{1}{2}}, \\ y = 2t^{-\frac{1}{3}}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}, \\ y = \frac{1}{3}t^{-\frac{1}{3}}. \end{cases}$

3.46. $x = \dfrac{a^2+1}{2a}$ деп алып, $\dfrac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x-1)^{-0,5} - (x+1)^{-0,5}}$ өрнегін ықшамдаңдар. Мұндағы $0 < a < 1$.

Қайталауға арналған жаттығулар

3.47. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \geqslant \dfrac{1}{x+2}$; 2) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{x} > \dfrac{3}{x-1}$.

3.48*. Кестені пайдаланбай есептеңдер:

1) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}$; 2) $8\cos10^\circ\cos30^\circ\cos50^\circ\cos70^\circ$.

3.3 Иррационал өрнектерді түрлендіру. Иррационал көрсеткішті дәреже ұғымы

Бұл тақырыпта иррационал көрсеткішті дәреже ұғымымен танысып, соңында:

- иррационал өрнектерді түрлендіргенде n-дәрежелі түбірдің қасиеттерін қолданып үйренесіңдер;
- күрделі түбірлер формуласын білесіңдер және қолданасыңдар.

3.3.1. Иррационал көрсеткішті дәреже ұғымы

Біз негізі $a > 0$ болатын дәрежені оқып-үйренуді жалғастырып, дәреже көрсеткіші нақты сан болатын жағдайды қарастырамыз. Нақты сандар жиыны — рационал және иррационал сандар жиынының бірігуі. Демек, рационал және иррационал көрсеткішті дәрежелер анықталса, нақты көрсеткішті дәрежелер де анықталады.

Санның иррационал көрсеткішті дәрежесі ұғымымен 3.3-параграфта таныстыңдар. Оны анықтау үшін иррационал санды артығымен және кемімен рационал сандар арқылы жуықтау тәсілі қолданылады. Мысалы, $3^{\sqrt{2}}$ өрнегін анықтау үшін $\sqrt{2}$ санының артығымен және кемімен алынған жуықтауларын 3 санының рационал дәреже көрсеткіштері ретінде алып,

$$3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2$$

$$3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5}$$

$$3^{1,41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,42}$$

....

қос теңсіздігін жазамыз. Осы процесті жалғастырсақ, қос теңсіздіктердің сол жақ және оң жақ бөліктері шексіз ондық бөлшектер түрінде жазылатынын көреміз. Теңсіздіктің оң және сол жақ бөліктеріндегі дәреже көрсеткішіндегі үтірден кейін тұрған бірдей ондық сандар қадам сайын артып отырады. Бұл өзара тең ондық таңбаларды $3^{\sqrt{2}}$ иррационал санының ондық таңбалары ретінде қабылдаймыз.

Жалпы, $a > 0$ болғанда кез келген нақты x саны үшін a^x саны анықталады және санның нақты көрсеткішті дәрежелері де жоғарыда айтылған 1–5-қасиеттерді қанағаттандырады.

Теріс сандардың тақ көрсеткішті түбірлері анықталғандықтан, $\frac{m}{n}$ қысқармайтын бөлшек және n тақ сан болғанда $a < 0$ теріс саны үшін $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ өрнегін анықтауға болады. Ал теріс санның иррационал дәрежесі анықталмайды.

1-мысал. $\sqrt[5]{\frac{8}{9}} \cdot \sqrt[7]{\frac{3}{16}}$ өрнегін ықшамдау керек.

▲ $$\sqrt[5]{\frac{8}{9}} \cdot \sqrt[7]{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{9}} \cdot \frac{\sqrt[7]{3}}{\sqrt[7]{16}} = \frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{3}}{\sqrt[7]{2^4}} = \frac{2^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{2}{5}}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{7}}}{2^{\frac{4}{7}}} =$$

$$= 2^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{-\frac{2}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{-\frac{4}{7}} = 2^{\frac{1}{35}} \cdot 3^{-\frac{9}{35}} = \sqrt[35]{\frac{2}{3^9}}.$$ ■

Егер $a > 0$, $b > 0$, $a^2 > b$ болса, онда $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm$ $\pm \sqrt{\dfrac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$ формуласын ***күрделі түбірлер формуласы*** (күрделі радикал формулалары) деп атайды.

2-мысал. $\sqrt{9 - 6\sqrt{2}}$ өрнегін ықшамдау керек.

▲ **1-тәсіл.** Күрделі түбір формуласын қолданамыз:

$$\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{9 - \sqrt{72}} = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{81 - 72}}{2}} - \sqrt{\frac{9 - \sqrt{81 - 72}}{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{3}.$$

2-тәсіл. Толық квадратқа келтіріп, ықшамдау:

$$\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{6 - 6\sqrt{2} + 3} = \sqrt{\sqrt{6}^2 - 2\sqrt{6 \cdot 3} + \sqrt{3}^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{6} - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6} - \sqrt{3}. \ ■$$

1. Санның иррационал көрсеткішті дәрежесін қалай анықтауға болады?
2. Күрделі түбірлер формуласын жазыңдар.
3. Анықталу облысына түбір дәрежесі қалай әсер етеді?

Есептер

A

3.49. Өрнекті рационал көрсеткішті дәреже түріне келтіріңдер:

1) $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{143^2}$; $\sqrt[6]{\dfrac{1}{15}}$;

2) $\sqrt{0,2}$; $\sqrt[5]{73^3}$; $\sqrt[8]{2^{-2}}$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3^{-2}}}$; $\sqrt[3]{2b}$; $\sqrt[4]{7 + a}$;

4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$; $\sqrt[4]{3a}$; $\sqrt[5]{2 + b}$;

5) $2,5\sqrt{40}$; $a\sqrt{a}$; $(x + 1)^2 \cdot \sqrt[4]{x + 1}$;

6) $-8\sqrt[3]{2}$; $-b\sqrt[3]{b}$; $(y - 5)^3 \cdot \sqrt[4]{y - 5}$.

3.50. Өрнектерді рационал көрсеткішті дәреже түрінде жазыңдар:

1) $\sqrt[10]{x} \cdot \sqrt[15]{x}$;

2) $\sqrt[8]{a^3} \cdot \sqrt[12]{a}$;

3) $\sqrt[7]{y^2} \cdot \sqrt[3]{y^{-1}}$;

4) $\sqrt[3]{x^2 \sqrt{x}}$;

5) $\sqrt[10]{y \cdot \sqrt[3]{y^2}}$;

6) $\sqrt[5]{x^2 \cdot \sqrt[4]{x^{-3}}}$;

7) $\dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[14]{x}}$;

8) $\sqrt[5]{a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}$;

9) $\dfrac{\sqrt[5]{b^2 \cdot \sqrt{b}}}{\sqrt[3]{b \cdot \sqrt{b}}}$.

3.51. Бөлшекті бөлімінде түбір таңбасы болмайтындай етіп түрлендіріңдер:

1) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4}}$; 2) $\dfrac{18}{\sqrt[4]{27}}$; 3) $\dfrac{6}{\sqrt[5]{8}}$;

4) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{-49}}$; 5) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 6) $\dfrac{7}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$;

7) $\dfrac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$; 8) $\dfrac{29}{\sqrt{20}-\sqrt{9}}$.

B

3.52. Бөлшекті бөлімінде түбір таңбасы болмайтындай етіп түрлендіріңдер:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; 2) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$; 3) $\dfrac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$; 4) $\dfrac{29}{3+\sqrt[3]{2}}$.

3.53. Бөлшекті қысқартыңдар:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{b}-a^3}{a\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+b}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

4) $\dfrac{\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt{b}}$; 5) $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}}$; 6) $\dfrac{b\sqrt{b}-\sqrt[3]{a^2}}{a^2+b^4\sqrt{b}}$.

3.54*. Бөлімдегі иррационалдықтан құтылыңдар:

1) $\dfrac{1}{3+\sqrt[4]{2}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}}$;

4) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}$; 5) $\dfrac{2}{\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{3}}$; 6) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

3.55. Өрнекті ықшамдаңдар:

$$x\sqrt[6]{x^3y\sqrt{7-4\sqrt{3}}}\cdot\sqrt[6]{x^3y\sqrt{7+4\sqrt{3}}}.$$

C

3.56. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$ тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

▲ $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=a$ белгілеуін енгізіп, теңдіктің екі жағын да кубтайық:

$$2+\sqrt{5}+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+3\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+2-\sqrt{5}=a^3;$$

$4+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+3\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=a^3$. Ортақ көбейткіштерді жақшаның сыртына шығарсақ,

$$4+3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)=a^3,$$

$4+3\sqrt[3]{4-5}\cdot\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)=a^3$. Жақша ішіндегі өрнектің a-ға тең екенін ескерсек, $4-3a=a^3$ кубтық теңдеуін аламыз. Оны көбейткіштерге жіктейік:

$a^3+3a-4=a^3-1+3a-3=(a-1)(a^2+a+1)+3(a-1)=$
$=(a-1)(a^2+a+4)$.

Осы теңдеудің түбірі $a=1$. ■

3.57. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right)^{-\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[10]{(a-b)^3}$;

2) $y\left[\left(\frac{x\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x^2y^3}}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}}-\sqrt[4]{xy}\right):\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)-\sqrt[4]{x}\right]^{-4}$.

3.58. Күрделі түбірлер формуласының дұрыстығын дәлелдеңдер:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

3.59. Өрнектің мәнін есептеңдер:

1) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1+\sqrt[32]{a}\right)\left(1-\sqrt[32]{a}\right)$,

мұндағы $a=2018$;

2) $\left(a-\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1\right)$, мұндағы $a=5$.

Қайталауға арналған жаттығулар

3.60. Екімүше түрінде жазыңдар:

1) $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2)$;

2) $(a + b)(a - b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.

3.61. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 + xy + x = 14, \\ y^2 + xy + y = 27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 1, \\ 3y + x = 0. \end{cases}$

3.4. Дәрежелік функция, оның қасиеттері мен графигі

Бұл тақырыпта дәрежелік функциямен танысып, соңында:

- дәреже көрсеткіші нақты сан болатын дәрежелік функцияның анықтамасын білесіңдер;
- дәреже көрсеткішіне тәуелді дәрежелік функцияның графигін тұрғызуды үйренесіңдер;
- дәрежелік функцияның қасиеттерін білесіңдер және қолданасыңдар;
- дәрежелік функцияның күнделікті өмірде қолданылуымен танысасыңдар.

Анықтама. $y = ax^{\alpha}$ $(x > 0)$ *түріндегі функцияны дәрежелік функция деп атайды. Мұндағы a және α — берілген нақты сандар, x — аргумент, α — дәреженің көрсеткіші.*

Анықтама бойынша α дәреже көрсеткіші — нақты сан, яғни рационал сан да, иррационал сан да болуы мүмкін. Ал иррационал көрсеткішті дәрежелер рационал көрсеткішті дәрежелер арқылы анықталатындықтан, рационал көрсеткішті дәрежелерді ғана қарастырамыз. Сондықтан дәлелденген қасиеттердің барлығы да кез келген нақты көрсеткішті дәрежелер үшін орындалады деп есептейміз. Жалпы жағдайда санның рационал көрсеткішті дәрежесі тек оң сандар үшін анықталғандықтан, рационал көрсеткішті $y = x^{\alpha}$ функциясының анықталу облысы ретінде $(0; +\infty)$ жиынын аламыз.

Дәрежелік функциялардың мынадай қасиеттері бар:

1°. *Дәрежелік функция тек оң мәндер ғана қабылдайды, яғни әрбір $x \in (0; +\infty)$, α нақты сандары үшін $x^{\alpha} > 0$ теңсіздігі орындалады.*

▲ $\alpha = 0$ болса, $x^{\alpha} = x^0 = 1 > 0$. Егер $\alpha = \dfrac{m}{n}$ $(m,\ n \in N)$ болса, $x^{\alpha} = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$. Шарт бойынша $x > 0$, демек, $x^m > 0$.

Арифметикалық түбір ретінде $\sqrt[n]{x^m} > 0$. Енді $\alpha = -\dfrac{m}{n}$ $(n, m \in N)$ болсын, онда $x^\alpha = x^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} > 0$. ■

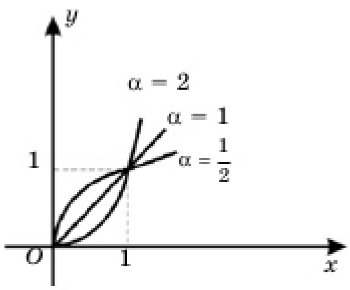
2°. *Көрсеткіші оң дәрежелік функция бірсарынды өспелі, яғни $x_1 < x_2$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ және $\alpha > 0$ нақты сандары үшін $x_1^\alpha < x_2^\alpha$ теңсіздігі орындалады.*

▲ $y = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha > 0$ өспелі болатынын туынды көмегімен тексерейік. Шынында да, $y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0$. Себебі $\alpha > 0$ және $x^{\alpha-1} > 0$ (1°-қасиет). Олай болса, $y = x^\alpha$, $\alpha > 0$ функциясы $(0; +\infty)$ жиынында өспелі. ■

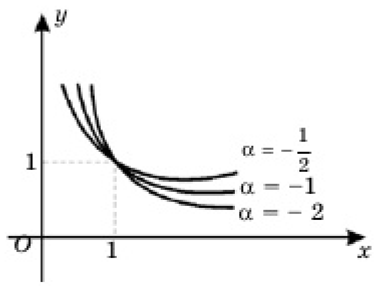
3°. *Көрсеткіші теріс дәрежелік функция бірсарынды кемімелі, яғни $x_1 < x_2$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір x_1, $x_2 \in (0; +\infty)$ және $\alpha < 0$ нақты сандары үшін $x_1^\alpha > x_2^\alpha$ теңсіздігі орындалады.*

▲ $y = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha < 0$ функциясы берілсін. Онда $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} < 0$, себебі $\alpha < 0$, $x^{\alpha-1} > 0$. Сондықтан бұл функция $(0; +\infty)$ аралығында кемімелі. ■

Жоғарыда айтқанымыздай, бұл қасиеттер кез келген нақты көрсеткішті дәрежелер үшін орындала береді. 3.3, 3.4-суреттерде $\alpha = 2, 1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -1, -2$ болғандағы дәрежелік $y = x^\alpha$ функциясының графиктері бейнеленген.

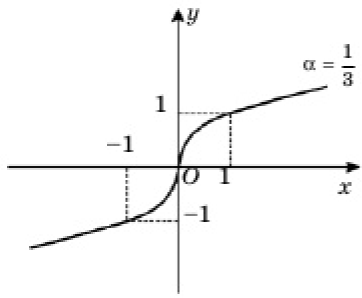


3.3-сурет

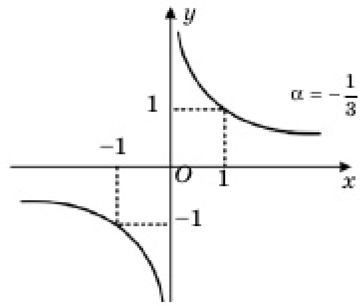


3.4-сурет

Кейде бөлімі тақ сан болатын бөлшек көрсеткішті дәрежелік функцияларды аргументтің теріс мәндері үшін де қарастыра береді. Мысалы, 3.5- және 3.6-суреттерде сәйкесінше $y = x^{\frac{1}{3}}$ және $y = x^{-\frac{1}{3}}$ функцияларының графиктері бейнеленген.



3.5-сурет



3.6-сурет

1. Дәрежелік функцияның 1° — 3°-қасиеттерін тұжырымдап, оларды дәлелдеп беріңдер.
2. Жалпы жағдайда нeліктен дәрежелік функцияның анықталу облысы ретінде $(0; +\infty)$ жиынын алады?
3. а) Оң көрсеткішті; ә) теріс көрсеткішті дәрежелік функция $x = 0$ нүктесінде анықталған ба? Жауаптарыңды негіздеңдер.
4. Неліктен көрсеткіші $\alpha = \dfrac{m}{2n-1}$ $(n \in N,\ m \in Z)$ түріндегі дәрежелік функцияларды аргументтің теріс мәндері үшін анықтауға болады?

Есептер

A

3.62. Сандарды өсу ретімен жазыңдар:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}; \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}; \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}};$ 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{7}{11}}; \left(\frac{4}{3}\right)^{0}; \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}};$

3) $0{,}12^{-\frac{1}{2}}; 0{,}12^{-\frac{1}{3}}; 0{,}12^{-\frac{1}{4}};$ 4) $2{,}24^{-\frac{1}{2}}; 2{,}24^{-\frac{1}{3}}; 2{,}24^{-\frac{1}{4}}.$

3.63. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ және $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$ және $\left(\frac{4}{7}\right)^{0}$;

3) $\left(\frac{9}{4}\right)^{0,2}$ және $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$; 4) $0{,}01^{-0,5}$ және $0{,}01^{-0,6}$.

3.64. Функцияның өспелі не кемімелі екенін анықтаңдар:

1) $y = x^{\frac{4}{3}}$; 2) $y = x^{-0,2}$; 3) $y = x^{0,2}$; 4) $y = x^{-\frac{7}{11}}$.

3.65. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = x^{\frac{3}{2}}$; 2) $y = \sqrt[4]{x}$; 3) $y = x^2$; 4) $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

Тарихқа шолу

Дәрежелік функция ғылымда кең қолданылады. Соның бірі — Иоганн Кеплердің Күн жүйесі планеталарының қозғалысы жайлы ашқан үшінші заңы. Бұл заң планеталардың Күнді толық бір айналып өтетін уақыты (планеталардың периоды деп аталады) және планета мен Күннің арақашықтығы арасында тәуелділік бар екенін көрсетеді. Нақтырақ айтсақ, планетаның периоды p және Күнге дейінгі қашықтық d болса, $d^3 \sim p^2$ (Күн жүйесі планеталарының периодының квадраты оның Күнге дейінгі қашықтығының кубына пропорционал). Үшінші дәрежелі түбір мен k коэффициентті енгізіп, мына формуланы аламыз:

И. Кеплер
(1571–1630)

$$d = k\sqrt[3]{p^2}.$$

k коэффициентін, Жердің Күнді айналу периоды 365,25 тәул және планетадан Күнге дейінгі қашықтығы $d = 1{,}496 \cdot 10^8$ км екенін ескерсек,

$$d = k\sqrt[3]{p^2} \Rightarrow k = \frac{d}{\sqrt[3]{p^2}} = \frac{1{,}496 \cdot 10^8}{\sqrt[3]{365{,}25^2}} = 2{,}928 \cdot 10^7.$$

Сонымен, Кеплердің үшінші заңы:

$$d = 2{,}928 \cdot 10^7 \cdot \sqrt[3]{p^2}.$$

Тапсырма

- Кеплер заңына сәйкес планетаның периоды артқан сайын оның Күнге дейінгі қашықтығы қалай өзгереді? Түсіндіріңдер.
- Марс планетасының Күнді айналу периоды 687 тәул екенін ескеріп, Марстан Күнге дейінгі қашықтықты есептеңдер, жауаптарыңды ғаламтордан алынған мәліметпен салыстырыңдар.
- Шолпан планетасының Күнге дейінгі қашықтығы $1{,}082 \cdot 10^8$ км. Оның периодын анықтаңдар.

B

3.66. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}}$ және $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{5}}$; 2) $0{,}132^{\sqrt{2}}$ және $0{,}132^{-\sqrt{2}}$;

3) $\left(2\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$ және $(12)^{-\frac{1}{3}}$; 4) $\left(\sqrt{76}\right)^{-\frac{6}{11}}$ және $\left(5\sqrt{3}\right)^{-\frac{6}{11}}$.

3.67. Сандарды өсу ретімен орналастырыңдар:

1) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-0,2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{0,2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{10}{3}}$; $\left(\frac{2}{7}\right)^{-\frac{6}{5}}$; $\left(\frac{13}{17}\right)^{0}$;

3) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$; $\left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{1}{15}}$; $\left(\frac{4}{25}\right)^{-4}$.

3.68. Функцияның өспелі не кемімелі болатынын анықтаңдар:

1) $y = x^{\sqrt{2}}$; 2) $y = x^{-\sqrt{3}}$; 3) $y = x^{\sqrt{\frac{2}{3}}}$; 4) $y = x^{-\sqrt{\frac{2}{3}}}$.

3.69. 3.68-есептегі функциялардың графиктерін салып, оларды сәйкесінше $y = x$ және $y = \frac{1}{x}$ функцияларының графиктерімен салыстырыңдар.

Есептеңдер **(3.70—3.71)**:

3.70. 1) $\left(27^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 32^{\frac{2}{5}} \cdot 81^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}$; 2) $\left(100^{-\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{4}{3}} \cdot 0,25^{0,5} \cdot 16^{-0,75}\right)^{\frac{3}{4}}$;

3) $\left(6,25^{0,5} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} \cdot 100^{-\frac{1}{2}} \cdot 0,01^{-1}\right)^{-\frac{3}{2}}$;

4) $\left(3^{2,5} \cdot \left(3^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right) : \left(3^{-\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{5}{6}}\right) : \left(\frac{1}{32} \cdot \frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{7}}$.

3.71*. 1) $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[3]{25 + 4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1 + 2\sqrt{6}}$;

3) $\left(\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\right)\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$.

Практикалық тапсырма

3.72. Адамның жүгіру жылдамдығы оның қадамының ұзындығының квадратына пропорционал екен. Қадамы 0,6 м-ге тең бала 7 м/с жылдамдықпен жүгіреді. Егер ол қадамын 0,65 метрге жеткізсе, оның жылдамдығы қандай болады?

C

3.73*. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = \sqrt[3]{x-2}$; 2) $y = (x+3)^{-\frac{1}{2}} + 1$; 3) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$.

3.74. Егер $f(x)$ функциясы жұп және:

1) $f(x) = \sqrt[4]{x},\ x \geqslant 0$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ x \geqslant 0$; 3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}},\ x > 0$

болса, $f(x)$ функциясын бір формуламен жазып көрсетіңдер.

3.75*. Егер $f(x)$ тақ функциясы

1) $f(x) = \sqrt[4]{x},\ x \geqslant 0$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ x \geqslant 0$; 3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}},\ x > 0$

шарттарын қанағаттандырса, $f(x)$ функциясын бір формуламен жазып көрсетіңдер.

3.76. $x = 4(a-1)$, $a > 2$ деп алып, $\left(a + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a - x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ өрнегінің мәнін есептеңдер.

3.77. Егер $1 \leqslant a \leqslant 2$ болса, $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

3.78. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{6}{5}} = \left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]^{\frac{6}{5}}$; 2) $\left(\dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}\right)^{\frac{6}{7}}$.

3.79. $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5}$ сандарын өсу ретімен орналастырыңдар.

3.80. Адам денесі терісінің ауданы ($м^2$) оның бойы мен салмағына тәуелді және оны төмендегі формуламен жуықтап есептейді: $S = 0,007184 \cdot h^{\frac{3}{4}} \cdot w^{\frac{2}{5}}$. Мұндағы h — адамның бойы, w — оның салмағы (кг есебімен). Өз терілеріңнің ауданын калькулятор көмегімен есептеп көріңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

3.81. 1; –1; 2; –2; 3; –3; 4; –4; ... тізбегі 1) төменнен; 2) жоғарыдан шенеле ме?

3.82. a-ның қандай мәндерінде $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}$ сандары 1) арифметикалық прогрессияның; 2) геометриялық прогрессияның; 3) әрі арифметикалық, әрі геометриялық прогрессияның тізбектес мүшелері болып табылады?

3.5 Нақты көрсеткішті дәрежелік функцияның туындысы мен интегралы

Бұл тақырыпта дәрежелік функцияның туындысы мен интегралын табуды үйреніп, соңында:

- дәреже көрсеткіші нақты сан болатын дәрежелік функцияның туындысының формуласын білесіңдер және қолданасыңдар;
- дәреже көрсеткіші нақты сан болатын дәрежелік функцияның интегралы формуласымен танысасыңдар, оны қолданасыңдар.

Нақты көрсеткішті дәрежелік функцияның туындысы бүтін көрсеткішті дәрежелердің туындысын табу формулалары арқылы есептеледі.

$x > 0$ болғанда кез келген r рационал саны үшін $y = x^r$ дәрежелік функциясының туындысы мына формуламен есептеледі:

$$\left(x^r\right)' = rx^{r-1}.$$

1-мысал. $y = \sqrt[3]{x^2}$ функциясының туындысын табу керек.

▲ Рационал көрсеткішті дәреженің анықтамасы $\left(\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}\right)$ бойынша берілген функцияны $y = x^{\frac{2}{3}}$ түрінде жазамыз.

$$y' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}. \ ■$$

2-мысал. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ функциясының $x_0 = 1$ нүктесіндегі туындысын табу керек.

▲ Рационал көрсеткішті дәреженің анықтамасы бойынша $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$. Сондықтан

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}};$$

$$y'(1) = \frac{1}{3\cdot 1\sqrt[3]{1}} = -\frac{1}{3}. \ ■$$

Бүтін көрсеткішті дәрежелік функцияның анықталмаған интегралын табу формуласы нақты көрсеткішті дәрежелік функцияның туындысын табуға да қолданылады:

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1.}$$

3-мысал. $\int \sqrt[3]{x^4}\, dx$.

▲ Рационал көрсеткішті дәреженің қасиеті бойынша $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$. Сондықтан $\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$.

$$\int x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^7}}{7} + C.$$

Бөлшекке бөлгенде абай болыңдар: $\frac{a}{b}$ санына бөлу $\frac{b}{a}$ санына көбейтумен бірдей.

Интегралдан туынды алып тексерсек,

$$\left(\frac{3\sqrt[3]{x^7}}{7} + C\right)' = \left(\frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7}\right)' + 0 = \frac{3}{7}\cdot\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4}.$$ ■

1. Дәрежелік функцияның туындысын табу формуласын жазыңдар.
2. Дәрежелік функцияның анықталмаған интегралын табу формуласын жазыңдар.

Есептер

А

Функцияның туындысын табыңдар (3.83—3.84):

3.83. 1) $y = \sqrt[5]{x}$; 2) $y = \sqrt[4]{x}$;

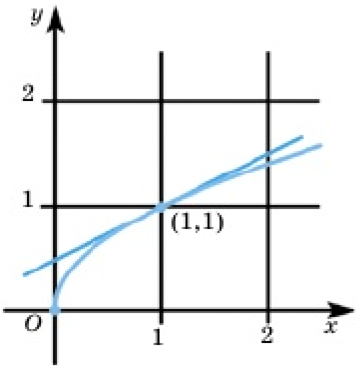
3) $y = \sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$; 4) $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$.

3.84. 1) $f(x) = x^{\frac{4}{5}} - x^{\frac{2}{3}}$; 2) $f(t) = t^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{1}{3}} + 4$;

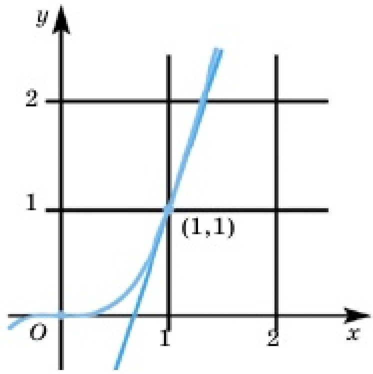
3) $f(x) = 6\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

3.85. Дәрежелік функциялардың (1; 1) нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін анықтаңдар:

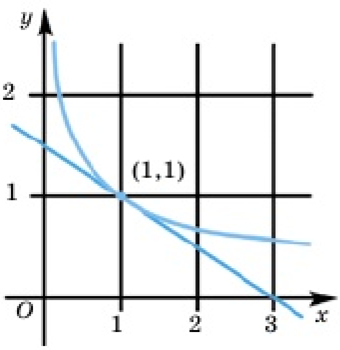
1. $y = x^{\frac{1}{2}}$



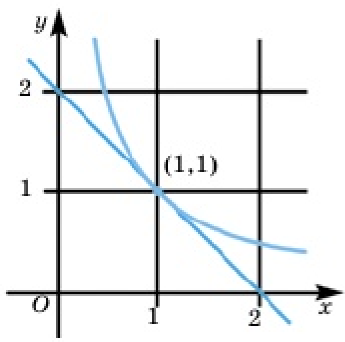
2. $y = x^3$



3. $y = x^{-\frac{1}{2}}$



4. $y = x^{-1}$



3.86. Кестені толтырыңдар:

Бастапқы функция	Түрлендіріңдер	Туындысын табыңдар	Ықшамдаңдар
$y = \dfrac{5}{2x^2}$	$y = \dfrac{5}{2}x^{-2}$	$y' = \dfrac{5}{2}\cdot(-2)x^{-2-1}$	$y' = -5x^{-3}$
$y = \dfrac{6}{(5x)^3}$			
$y = \dfrac{\pi}{(3x)^{\frac{5}{2}}}$			
$y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{3x^{-\frac{3}{2}}}$			

3.87. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$;

формуласын қолданып, берілген функцияның интегралын ауызша табыңдар:

1) $1,5x^{\frac{1}{2}}$; 2) $4x^{\frac{1}{3}}$; 3) $4x^{-2,5}$; 4) $7x^{\frac{2}{5}}$.

3.88. Берілген функцияның алғашқы функциясын табыңдар:

1) $f(x) = 5x\sqrt{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{6}x^{1,75}$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$; 4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x}$.

3.89. Кестені толтырыңдар:

Анықталмаған интеграл	Түрлендіріңдер	Интегралын табыңдар	Ықшамдаңдар
$\int \sqrt[7]{x^3}\, dx$	$\int x^{\frac{3}{7}} dx$	$\dfrac{x^{\frac{10}{7}}}{\frac{10}{7}} + C$	$\dfrac{7\sqrt[7]{x^{10}}}{10} + C$
$\int \sqrt{x} dx$			
$\int \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx$			

3.90. Дәрежелік функцияның интегралдарын табыңдар және нәтижені туынды алып тексеріңдер:

1) $\int 2x^{-\frac{1}{3}} dx$; 2) $\int 14x^{0,4} dx$; 3) $\int -1,2x^{-0,6} dx$.

B

3.91. Функцияның берілген нүктедегі жанамасының теңдеуін табыңдар және нәтижені https://www.desmos.com/calculator-онлайн графиктік калькулятор көмегімен тексеріңдер: $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$, $M\ (1;\ 2)$.

3.92. Функция туындысының көрсетілген нүктедегі мәнін есептеңдер:

1) $y = x^{-\frac{2}{5}}(2x-2)$, $x_0 = -2$; 2) $y = x^3(x-5)^{\frac{6}{7}}$, $x_0 = 2$.

3.93. Интегралды есептеңдер:

1) $\int x^7 dx$; 2) $\int x^3\sqrt[4]{x}dx$;

3) $\int \frac{x^3+3x^2-\sqrt[3]{x}+1}{x\sqrt{x}}dx$; 4) $\int 5\sqrt{x}dx + \int \frac{6}{x\sqrt{x}}dx$.

3.94. Берілген $f'(x)$ туындысы бойынша $f(x)$ функциясын табыңдар және интеграл арқылы тексеріңдер:

1) $x\left(3x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{x^{\frac{4}{3}}}\right)$; 2) $6\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$;

3) $\frac{2}{\sqrt{x}} - 7x^2\sqrt{x}$; 4) $\left(5\sqrt{x}\right)^3 - \frac{3x}{\sqrt{x}}$.

3.95. $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}$ функциясының $M(1;\ 1{,}5)$ нүктесі арқылы өтетін алғашқы функциясын табыңдар.

3.96. $f(x)$ функциясының алғашқы функциясын табыңдар.

1) $f(x) = 1{,}5x^2 - \frac{4}{x^2}$; 2) $f(x) = \frac{4}{3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4} + 5x^{\frac{3}{2}}$.

3.97. Интегралды рационал көрсеткішті дәреженің қасиеттерін қолданып табыңдар:

1) $\int \sqrt[3]{x}dx$; 2) $\int \sqrt[3]{x^7}dx$;

3) $\int -12\sqrt[10]{x^6}dx$; 4) $\int -2\sqrt[4]{x^5}dx$;

5) $\int -\frac{3}{2\sqrt{x}}dx$; 6) $\int -\frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}dx$.

3.98. $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2}; \\ y = \sqrt{2x} \end{cases}$ қисықтарымен шектелген фигураны кескіндеп, ауданын табыңдар.

3.99. Анықталған интегралды есептеңдер:

1) $\int_{3}^{4} \sqrt{x-3}dx$; 2) $\int_{-8}^{8} \frac{dx}{\sqrt{5+\frac{x}{2}}}$.

Қайталауға арналған жаттығулар

3.100. Өрнектің таңбасын анықтаңдар:

1) $\sin\frac{17\pi}{4}$; 2) cos2; 3) tg3,3π; 4) ctg90.

3.101. Жалпы мүшесі $a_n = 2^{7-n}$ формуласымен берілген тізбектің алғашқы 10 мүшесінің қосындысын табыңдар.

«ДӘРЕЖЕЛЕР ЖӘНЕ ТҮБІРЛЕР. ДӘРЕЖЕЛІК ФУНКЦИЯ» бөлімінің қорытындысы

Егер $n > 1$ натурал саны мен a және b нақты сандары үшін $b^n = a$ теңдігі орындалса, b саны a санының *n-дәрежелі түбірі* деп аталады. Теріс емес саннан алынған n-дәрежелі оң түбірді осы санның *n-дәрежелі арифметикалық түбірі* деп атайды $\sqrt[n]{a}$, $a \geqslant 1$.

***n*-дәрежелі түбірдің қасиеттері:**

1°. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$; 2°. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

3°. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$; 4°. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$;

5°. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; 6°. $\sqrt[kn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

a санының r рационал көрсеткішті дәрежесі деп $\sqrt[n]{a^m}$ өрнегінің мәнін айтады:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Рационал көрсеткішті дәреженің қасиеттері ($a > 0$, $b > 0$):

1°. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; 2°. $a^p : a^q = a^{p-q}$;

3°. $(a^p)^q = a^{pq}$; 4°. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$;

5°. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Күрделі түбірлер формуласы:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

$y = ax^{\alpha}$ $(x > 0)$ түріндегі функцияны дәрежелік функция деп атайды. Мұндағы a және α — берілген нақты сандар. Дәрежелік функция тек оң мәндер ғана қабылдайды, яғни барлық x, $x \in (0; +\infty)$ және α нақты сандары үшін $x^{\alpha} > 0$ теңсіздігі орындалады.

$x > 0$ болғанда кез келген r рационал саны үшін $y = x^r$ дәрежелік функциясының туындысы мына формуламен есептеледі:

$$(x^r)' = rx^{r-1}.$$

Терминдер атауының сөздігі

№	Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
1	Анықталу облысы	Область определения	Domain
2	Дәрежелік функция	Степенная функция	Power function
3	Дәреже көрсеткіші	Показатель степени	Exponent
4	Иррационал	Иррационал	Irrational
5	Рационал	Рационал	Rational
6	Функцияның қасиеттері	Свойства функции	Function properties
7	n-дәрежелі түбір	Корень n- ой степени	n-th root

IV бөлім. ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР

Иррационал теңдеулер Пифагор теоремасынан бастап геометрияның көптеген есептерін шешкенде, сондай-ақ мәнерлеп сырғанау, биология, физика, авиацияда да қолданылады.

Мәнерлеп сырғанауда айналу үшін қадамның ұзындығын өлшегенде, жәндіктің өмір сүру аумағындағы тығыздығын есептеу немесе Эйнштейннің салыстырмалылық теориясындағы дене жылдамдығы, ұшақтың жылдамдығын есептеу үшін иррационал теңдеулерді шешу керек.

Эйнштейннің салыстырмалылық теориясына сәйкес m, l шамаларын анықтау формулалары:

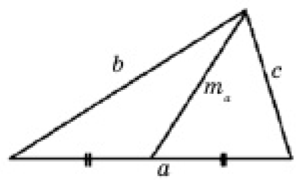
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

мұндағы m_0, l_0 — сәйкесінше дененің бастапқы массасы мен ұзындығы, v — дененің жылдамдығы, c — жарық жылдамдығы.

Үшбұрыштың медианасын есептеу формуласы:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}$$



Бөлімде қарастырылатын тақырыптар:

4.1. Иррационал теңдеулер және теңдеулер жүйелері

4.2. Иррационал теңсіздіктер

4.1 Иррационал теңдеулер және теңдеулер жүйелері

Бұл тақырыпта иррационал теңдеулерді қарастырып, соңында:

- иррационал теңдеудің анықтамасын білесіңдер және оның ММЖ-ын анықтай аласыңдар;
- иррационал теңдеуді дәрежелеу арқылы шеше аласыңдар;
- иррационал теңдеуді айнымалыны алмастыру әдісі арқылы шеше аласыңдар;
- иррационал теңдеулер жүйесін шешуді меңгересіңдер.

Анықтама. *Айнымалысы түбір таңбасының астында болатын теңдеу* ***иррационал теңдеу*** деп аталады.

Мысалы, $\sqrt[3]{x}-2=0$, $\sqrt{6-x}-\sqrt{x-7}=5$, $\sqrt{x^2-5}=2$ және т.с.с. теңдеулер — иррационал теңдеулер. $x^2-\sqrt[5]{3}+\sqrt{3}=\sqrt{7}$ теңдеуі иррационал теңдеу емес, өйткені мұнда түбір таңбасы астында айнымалы жоқ. Жұп көрсеткішті түбірлері бар иррационал теңдеулердің мағыналары (құрамындағы айнымалылардың әрбір мәнінде) бола бермейді. Сондықтан, иррационал теңдеулердің мүмкін мәндер жиынын (ММЖ) анықтап отыру қажет.

Мысалы, $\sqrt{6-x}-\sqrt{x-7}=5$ теңдеуінің ММЖ-ны $\begin{cases}6-x\geqslant 0,\\ x-7\geqslant 0\end{cases}$ теңдеулер жүйесімен анықталады. Демек, ММЖ — бос жиын. Сол себепті теңдеудің шешімі жоқ.

Тағы бір мысал қарастырайық: $\sqrt{2-x}-\sqrt{x-2}=0$. Теңдеудің ММЖ-ны $\begin{cases}2-x\geqslant 0,\\ x-2\geqslant 0\end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімі болады. Жүйені шешсек, теңдеудің ММЖ-ны тек бір ғана элементтен тұратынын көреміз: $\{2\}$. Осы санды теңдеуге қойып тексеріп, оның түбір екеніне көз жеткіземіз.

Иррационал теңдеуді дәрежелеу арқылы шешу

Иррационал теңдеулерді шешудің негізгі әдісі — теңдеудің екі жағын да тиісті дәрежеге шығару. Мақсат — түбір таңбасынан құтылу. Теңдеудегі берілген түбірдің дәреже көрсеткішіне қарай кейде квадраттап, кубтап түбірден құтылу керек. Бірақ жұп санға дәрежелегенде бөгде түбірлер алынуы мүмкін, сол себепті табылған шешімдерді теңдеуге қойып тексеру керек.

1-мысал. $\sqrt{x^2-5}=2$ теңдеуін шешейік.

▲ Бұл теңдеудің екі жақ бөлігін де квадрат дәрежеге шығарамыз: $x^2-5=4$. Осыдан $x^2=9$, яғни $x=3$ және $x=-3$ мәндері табылады. Осы табылған сандар теңдеудің шешімі бола ма, болмай ма? Соны тексерейік. Шынында да оларды осы теңдеуге қойсақ, санды тепе-теңдіктер шығады: $\sqrt{3^2-5}=2$ және $\sqrt{(-3)^2-5}=2$, олай болса, $x=3$ және $x=-3$ берілген теңдеудің шешімдері.

Жауабы: ±3. ■

8, 9-сыныптарда өткен анықтаманы еске түсірейік: «Шешімдер жиыны бірдей теңдеулерді (теңсіздіктерді) ***пара-пар теңдеулер (теңсіздіктер)***», кейде ***мәндес*** теңдеулер (теңсіздіктер) деп атайды.

Теорема. $\sqrt[2k]{g(x)} = h(x)$ *түрінде берілген иррационал теңдеу*

$$\begin{cases} g(x) = (h(x))^{2k}, \\ h(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

жүйесімен пара-пар, ал $\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x)$ *түрінде берілген иррационал теңдеу* $f(x) = (g(x))^{2k+1}$ *теңдеуімен пара-пар.*

$\sqrt[2k]{g(x)} = h(x)$ түрінде берілген иррационал теңдеудің $\begin{cases} g(x) = (h(x))^{2k} \\ h(x) \geqslant 0 \end{cases}$, теңдеулер жүйесімен пара-пар болатынын дәлелдеу үшін арифметикалық квадрат түбірдің анықтамасын еске түсірсек жеткілікті.

Тақ дәрежеге шығарғанда таңба сақталатындықтан, $\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x)$ түрінде берілген иррационал теңдеу $f(x) = (g(x))^{2k+1}$ теңдеуімен пара-пар.

2-мысал. $\sqrt{x} = x - 2$ теңдеуін шешу керек.

▲ **1-тәсіл.** Теңдеудің екі жағын да квадрат дәрежеге шығарамыз:

$$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x^2 - 4x + 4, \\ x - 2 \geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x \geqslant 2 \quad \text{— ММЖ.} \end{cases}$$

Бірінші теңдеудің түбірлері $x = 1$ және $x = 4$. Мұнда $x = 1$ саны берілген теңдеудің түбірі болмайды, өйткені ол ММЖ-ға тиісті емес. $x = 4$ саны ММЖ-ға тиісті болғандықтан, теңдеудің түбірі болады.

Жауабы: $x = 4$.

2-тәсіл. Берілген теңдеуді квадраттап, $x^2 - 5x + 4 = 0$ квадрат теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудің түбірлері $x = 1$ және $x = 4$. Енді осы табылған сандар теңдеудің шешімі болатынын не болмайтынын анықтау үшін тексеру жүргіземіз.

Тексеру: $x = 1$ болса, берілген теңдеуден $\sqrt{1} = 1 - 2$ немесе $\sqrt{1} = -1$ жалған теңдігін аламыз. Олай болса, 1 саны теңдеудің шешімі бола алмайды, ол *бөгде түбір*.

$x = 4$ болса, берілген теңдеуден $\sqrt{4} = 4 - 2$ немесе $\sqrt{4} = 2$ түріндегі дұрыс, ақиқат теңдік аламыз. Сондықтан $x = 4$ саны берілген теңдеудің түбірі болады.

Жауабы: $x = 4$. ■

Құрамына x айнымалысы кіретін кейбір иррационал теңдеулерде түбір таңбасы бірнеше рет кездесуі мүмкін. Мұндай жағдайда теңдеуді бірнеше рет дәрежелеуіміз қажет.

3-мысал. $\sqrt{2x+2} - \sqrt{3x-2} = 1$.

▲ Алдымен ММЖ-ын анықтайық:

$$\begin{cases} 2x+2 \geqslant 0, \\ 3x-2 \geqslant 0, \\ \sqrt{2x+2} - 1 \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x \geqslant \dfrac{2}{3}, \end{cases} \Rightarrow x \geqslant \frac{2}{3}.$$

Берілген теңдеуді $\sqrt{2x+2} = 1 + \sqrt{3x-2}$ түрінде жазып, оның екі жақ бөлігін квадраттаймыз:

$$\left(\sqrt{2x+2}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{3x-2}\right)^2 \Leftrightarrow 2x+2 = 1 + 2\sqrt{3x-2} + 3x - 2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x-2} = 3 - x .$$

Соңғы теңдеу теорема бойынша мына жүйемен пара-пар:

$$\begin{cases} 3 - x \geqslant 0, \\ \left(2\sqrt{3x-2}\right)^2 = (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 3, \ \text{ММЖ}, \\ 12x - 8 = 9 - 6x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 3, \\ x^2 - 18x + 17 = 0. \end{cases}$$

Квадрат теңдеудің екі түбірі бар:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 3, \\ x = 17 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing \ \text{ және } \begin{cases} \dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 3, \\ x = 1. \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

Жауабы: $x = 1$. ■

Осы мысалдан теңдеуді шешу барысында ММЖ-ның толықтырылып отыратынын көрдік. Мәселен, 3-мысалдың басында ММЖ $x \geqslant \frac{2}{3}$ теңсіздігімен, есеп соңында ММЖ $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 3$ қос теңсіздігімен анықталды.

Топтық жұмыс

Түбірдің дәреже көрсеткіші тақ болғанда ММЖ туралы не айтуға болады?

Иррационал теңдеуді жаңа айнымалы енгізу арқылы шешу

Иррационал теңдеулерде жаңа айнымалы енгізу әдісі жиі қолданылады. Осы әдіс арқылы берілген иррационал теңдеуді ықшамдауға немесе рационал түрге келтіруге болады. Теңдеу құрамында қайталанатын ұқсас өрнектер болса, оны жаңа айнымалы енгізу арқылы шешуге болады.

4-мысал. $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}+\sqrt{\dfrac{2x+3}{3x-2}}=2,5$ теңдеуінің түбірін табу керек.

▲ Теңдеуде ұқсас өрнек бар. $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}=t$ деп жаңа айнымалы енгізсек, $\sqrt{\dfrac{2x+3}{3x-2}}=\dfrac{1}{t}$. Олай болса, бастапқы теңдік былай жазылып, шешіледі:

$$t+\frac{1}{t}=2,5 \Rightarrow t^2-2,5t+1=0 \Rightarrow t_1=2;\ t_2=\frac{1}{2}.$$

Осы анықталған t мәнін орнына қойып,

$\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}=2$ және $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}=\dfrac{1}{2}$ иррационал теңдеулерін аламыз.

Енді шыққан теңдеулердің түбірлерін анықтаймыз:

1) $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}=2 \Rightarrow \dfrac{3x-2}{2x+3}=4 \Rightarrow x=-2,8.$

2) $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{3x-2}{2x+3}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow x=1,1.$

Көп жағдайда теңдеудің ММЖ-ын анықтап, сонан соң теңдеуді шешу барысында табылған сандардың ММЖ-на енетінін емес, теңдеуді қанағаттандыратынын тексерген жеңіл. Мысалы, осы есепте де осылай тексерген тиімді.

Түбірлердің теңдеуді қанағаттандыратынын тексерейік:

$x=-2,8$ үшін $\sqrt{\dfrac{3\cdot(-2,8)-2}{2\cdot(-2,8)+3}}+\sqrt{\dfrac{2\cdot(-2,8)+3}{3\cdot(-2,8)-2}}=\sqrt{4}+\sqrt{\dfrac{1}{4}}=2,5$. Теңдеуді қанағаттандырады.

$x = 1{,}1$ үшін $\sqrt{\dfrac{3\cdot1{,}1-2}{2\cdot1{,}1+3}}+\sqrt{\dfrac{2\cdot1{,}1+3}{3\cdot1{,}1-2}}=\sqrt{\dfrac{1{,}3}{5{,}2}}+\sqrt{\dfrac{5{,}2}{1{,}3}}=2{,}5$. Бұл да теңдеуді қанағаттандырады.

Жауабы: 1,1 ; –2,8.

Жаңа айнымалы енгізу әдісімен иррационал теңдеуді шешуге тағы бір мысал қарастырайық.

5-мысал. $\sqrt[5]{(x-2)^2}-\sqrt[5]{x-2}=2$ теңдеуін шешейік.

▲ $\sqrt[5]{x-2}=u$ деп алсақ, $\sqrt[5]{(x-2)^2}=u^2$.

Берілген теңдеуге жаңа айнымалы енгіземіз:

$$u^2-u-2=0\Rightarrow u_1=-1;\ u_2=2.$$

Сонда $\sqrt[5]{x-2}=-1$ және $\sqrt[5]{x-2}=2$ иррационал теңдеулерін аламыз. Бұл теңдеулерді жеке-жеке шешеміз:

1) $\sqrt[5]{x-2}=-1\Rightarrow\left(\sqrt[5]{x-2}\right)^5=(-1)^5\Rightarrow x_1=1;$

2) $\sqrt[5]{x-2}=2\Rightarrow\left(\sqrt[5]{x-2}\right)^5=2^5\Rightarrow x_2=34.$

Табылған екі шешім де теңдеуді қанағаттандырады.

Жауабы: 1; 34.

Құрамында кем дегенде бір иррационал теңдеуі бар жүйені *иррационал теңдеулер жүйесі* деп атайды. Иррационал теңдеулер жүйесін де өзге жүйелерді шешуде қолданылатын әдістер (қосу, алмастыру, жаңа айнымалы енгізу және т.с.с.) көмегімен шешеді. Мысал қарастырайық.

6-мысал.

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8,\\ x+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{xy}=2\end{cases}$$

теңдеулер жүйесін шешу керек.

▲ Жүйенің ММЖ-ны $x\geqslant0$ және $y\geqslant0$ теңсіздіктерімен анықталады. Алдымен жүйенің екінші теңдеуін түрлендіріп аламыз:

$x+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{xy}=2\Leftrightarrow x-2\sqrt{xy}+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2-$ $-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)-2=0$. Мұнда $\sqrt{x}-\sqrt{y}=u$ деп белгілесек, $u^2-u-2=0$

квадрат теңдеуін аламыз. Оның түбірлері: $u_1 = 2$; $u_2 = -1$. Осыдан $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2$ немесе $\sqrt{x} - \sqrt{y} = -1$. Сонымен, берілген теңдеулер жүйесі

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x} + \sqrt{y} = 8,\\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x} + \sqrt{y} = 8,\\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = -1;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\sqrt{x} = 10,\\ 2\sqrt{y} = 6;\end{cases}\\ \begin{cases}2\sqrt{x} = 7,\\ 2\sqrt{y} = 9;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 25,\\ y = 9;\end{cases}\\ \begin{cases}x = 12,25,\\ y = 20,25\end{cases}\end{array}\right.$$

теңдеулер жүйелері жиынтығына пара-пар.

Табылған шешімдер ММЖ-на енеді.

Жауабы: (25;9), (12,25; 20,25).

Топтық жұмыс

$$\begin{cases}\sqrt{-x-3} + y = 2t,\\ 5 + 2y - \sqrt{3 - 2x - x^2} = t\end{cases}$$

теңдеулер жүйесінің жалғыз шешімі бар екенін көрсетіңдер және оны табыңдар.

1) Жүйенің ММЖ-ны қандай?
2) Табылған ММЖ нәтижесінен қандай қорытынды шығады?
3) Есептің жауабы қандай?
4) ММЖ қайсыбір сан аралығына тең болса, есептің неше жауабы болар еді? Жауаптарыңды негіздеп түсіндіріңдер.

1. Иррационал теңдеудің анықтамасын айтыңдар.
2. Иррационал теңдеудің анықталу облысын қалай анықтайды?
3. Иррационал теңдеуді шешудің негізгі әдісінің алгоритмін айтып беріңдер.
4. Теңдеуді шешкенде жаңа айнымалы енгізу әдісін сипаттаңдар.

Есептер

А

4.1. Теңдеулерді ауызша шешіңдер:

1) $\sqrt{x} = 2$; 2) $\sqrt{x} = 3$; 3) $\sqrt{x} = 0$; 4) $\sqrt{x} = -1$.

4.2. Төмендегі теңдеулер иррационал теңдеу бола ма:

1) $x + \sqrt{x} = 2$; 2) $x\sqrt{7} = 1 + x$;

3) $y + \sqrt{y^2 + 9} = 2$; 4) $\sqrt{x-1} = 3$?

4.3. x_0 саны теңдеудің түбірі бола ма:

1) $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$, $x_0 = 4$;

2) $\sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{x-2}$, $x_0 = 2$;

3) $\sqrt{1-x} = -\sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$?

4.4. Теңдеудің ММЖ-ын анықтаңдар:

1) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$; 2) $\sqrt{x-7} + 3 = \sqrt{5-x}$;

3) $\sqrt[3]{2-3x} + \sqrt[3]{3x+5} = 1$; 4) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} = 5$.

4.5. Айнымалының қандай мәндерінде теңдік орындалатынын анықтаңдар:

1) $\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x+4} = \sqrt{x^2-16}$; 2) $\sqrt{x(x-1)} = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{1-x}$.

4.6. Теңдеудің екі жағын дәрежелеу арқылы шешімін анықтаңдар:

1) $\sqrt{x^4 + 19} = 10$; 2) $\sqrt[3]{x^2 - 28} = 2$;

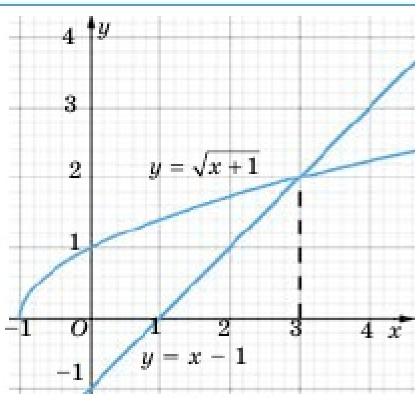
3) $\sqrt{61 - x^2} = 5$; 4) $\sqrt[3]{x-9} = -3$.

4.7. Теңдеудің екі жағын дәрежелеу әдісімен шешіңдер және жауаптарыңды графиктік тәсілмен тексеріңдер:

1) $\sqrt{x+1} = x-1$; 2) $x + \sqrt{2x+3} = 6$;

3) $\sqrt{2x-1} = x-2$; 4) $3 + \sqrt{3x+1} = x$.

▲ 1) $\sqrt{x+1} = x-1$ теңдеуін графиктік тәсілмен шешу үшін $y = \sqrt{x+1}$ және $y = x-1$ функцияларының графиктерін тұрғызып, қиылысу нүктесінің абсциссасын анықтау қажет. ■



4.1-сурет

4.8. Теңдеуді екі жағын дәрежелеу арқылы шешіңдер:

1) $\sqrt{2x-1}-x=-1$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=2$;

3) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6$; 4) $3\sqrt{x-1}+11=2x$.

4.9. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2-2x+4}$; 2) $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-3}$;

3) $\sqrt[3]{x^2-8}=x-2$; 4) $\sqrt[3]{x^2+x^3-6x+8}=x$.

4.10. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=1,\\ 3\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=10;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=2\sqrt{2},\\ 2\sqrt[4]{x}+3\sqrt[4]{y}=8\sqrt{2};\end{cases}$

3) $\begin{cases}2\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=7,\\ -3\sqrt[4]{x}+4\sqrt[4]{y}=6;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt{x}+3\sqrt{y}=5\sqrt{5},\\ 5\sqrt{y}-2\sqrt{x}=\sqrt{5}.\end{cases}$

4.11. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+6}=6$; 2) $\dfrac{x+1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{x-1}$;

3) $\dfrac{x+6}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{3x+2}$; 4) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}=2x$.

Екі рет дәрежелеу арқылы теңдеуді шешіңдер **(4.12—4.13)**:

4.12. 1) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3$; 2) $\sqrt{\sqrt{x^2-16}+x}=2$;

3) $\sqrt{18-\sqrt[3]{x+10}}=4$; 4) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-5}}=1$.

4.13. 1) $\sqrt{x-3}=1+\sqrt{x-4}$; 2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$;

3) $2+\sqrt{10-x}=\sqrt{22-x}$; 4) $\sqrt{1-2x}-3=\sqrt{16+x}$.

4.14. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases}2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5;\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10;\\ 4\sqrt{3y+4}-5\sqrt{6+x}=6.\end{cases}$

4.15. Жаңа айнымалы енгізу арқылы теңдеуді шешіңдер:

1) $\sqrt{x-3}-6=\sqrt[4]{x-3}$; 2) $\sqrt[3]{x+1}+2\sqrt[6]{x+1}=3$;

3) $\sqrt[4]{x-5}=30-\sqrt{x-5}$; 4) $3\sqrt[10]{x^2-3}+\sqrt[5]{x^2-3}=4$.

B

Теңдеулерді шешіңдер (**4.16—4.17**):

4.16. 1) $\dfrac{2}{\sqrt{2-x}}=\sqrt{\dfrac{x+6}{x+3}}$; 2) $\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+1}}=\sqrt{2x+1}$;

3) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$; 4) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$.

4.17. 1) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x+7}$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3(x-1)}$;

3) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-1}$; 4) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x+2}$.

4.18. Жаңа айнымалы енгізу арқылы теңдеулерді шешіңдер:

1) $\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}=5$; 2) $x^2-x+\sqrt{x^2-x+9}=3$;

3) $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$; 4) $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3$;

5) $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+5}=7$; 6) $2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x+9}=30$.

▲6) $2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x+9}=30$ теңдеуі үшін жаңа айнымалы енгізейік: $y=\sqrt{2x^2+3x+9}$, $y\geqslant 0$. Онда $2x^2+3x=y^2-9$. Бастапқы теңдеу мына түрге енеді: $y^2-9-3+y=30$.

$$\begin{cases} y^2+y-42=0, \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

квадрат теңдеуінің екі шешімі бар:

$\begin{cases} y\geqslant 0, \\ y=-7 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$ және $\begin{cases} y\geqslant 0, \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow y=6$.

Бастапқы теңдеуге ораламыз: $\sqrt{2x^2+3x+9}=6$, $2x^2+3x+9=36$,

$2x^2+3x-27=0$, $x_1=3$, $x_2=-4{,}5$.

Жауабы: 3; −4,5. ■

4.19. Көбейткіштерге жіктеу арқылы теңдеулерді шешіңдер:

1) $\sqrt{\dfrac{3x-5}{3x+5}}+\left(\dfrac{3}{4}x+2\right)\cdot\sqrt{9x^2-25}=0;$

2) $\sqrt{\dfrac{6x-5}{6x+5}}+(3x+4)\cdot\sqrt{36x^2-25}=0;$

3) $\sqrt{(4x+5)(3x-2)}=4x+5;$

4) $\sqrt{(3x-1)(4x+3)}=3x-1.$

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (**4.20—4.21**):

4.20. 1) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8,\\ \sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=12;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+2xy}=8,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4.\end{cases}$

4.21. 1) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{3y-2x}{y}}+\sqrt{\dfrac{4y}{3y-2x}}=2\sqrt{2},\\ 3\left(x^2+1\right)=(y+1)(y-x+1);\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{1-5x}=5-\sqrt{5x-3y},\\ \sqrt{2-3y}-1=\sqrt{5x-3y}.\end{cases}$

C

4.22. $\sqrt{x-5}+\sqrt{x^2+4}=0$ теңдеуін шешпей-ақ, оның шешімі болмайтынын түсіндіріңдер.

4.23*. Теңдеуді екімүшенің толық квадратын қолданып шешіңдер:

1) $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-2x+1};$

2) $\sqrt{x^2+4-4x}+\sqrt{x^2+9-6x}=1.$

4.24. $\sqrt{x-4a+16}-2\sqrt{x-2a+4}+\sqrt{x}=0$ теңдеуін a параметріне қатысты шешіңдер.

▲ Теңдеуді мына түрде жазамыз:

$$\sqrt{x-4a+16}+\sqrt{x}=2\sqrt{x-2a+4}.$$

Теңдеудің екі жағын квадраттасақ,

$$2x-4a+16+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4a+16}=4x-8a+16 \text{ немесе}$$

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4a+16}=x-2a.$$

Тағы да екі жағын квадраттаймыз: $16x=4a^2$, $x=\dfrac{a^2}{4}$.

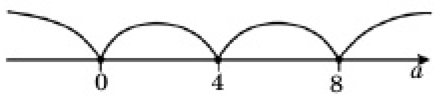
a параметрінің қандай мәндерінде теңдеудің шешімі болатынын анықтайық. Ол үшін x-тің орнына $\dfrac{a^2}{4}$ қойсақ,

$$\sqrt{a^2-16a+64}-2\sqrt{a^2-8a+16}+\sqrt{a^2}=0;$$

$$\sqrt{(a-8)^2}-2\sqrt{(a-4)^2}+\sqrt{a^2}=0;$$

$$|a-8|-2|a-4|+|a|=0.$$

Модульді теңдеуді шешу үшін модуль ішіндегі өрнектер сәйкес таңбаға ие болатындай төрт интервалды қарастырамыз (4.2-сурет):



4.2-сурет

$a\leqslant 0$ болғанда $8-a-2(4-a)-a=0$, $0=0$. Теңдік орындалады. Сол себепті $a\leqslant 0$ жағдайында теңдеудің шешімі бар. $0<a<4$ болса, $8-a-2(4-a)+a=0$, $a=0$. Теңдеудің шешімі жоқ.

Егер $4\leqslant a<8$ болса, теңдеудің шешімі жоқ, өйткені $8-a-2(a-4)+a\neq 0$.

Егер $8\leqslant a<+\infty$ болса, теңдік орындалады, өйткені $a-8-2a+8+a=0$, $0=0$.

Жауабы: $a\in(-\infty;0]\cup[8;+\infty)$ болғанда теңдеудің шешімі $x=\dfrac{a^2}{4}$, ал $0<a<8$ болғанда теңдеудің шешімі жоқ. ■

4.25*. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sqrt{\cos^2 0,5x-6\cos 0,5x+9}-\sqrt{4\cos^2 0,5x-12\cos 0,5x+9}=1;$

2) $\sqrt{(\sin 3x-4)^2}-\sqrt{9-6\sin 3x+\sin^2 3x}=6.$

▲ 1) $\sqrt{(\cos 0,5x-3)^2}-\sqrt{(2\cos 0,5x-3)^2}=1\Rightarrow$

$$\Rightarrow |\cos 0,5x-3|-|2\cos 0,5x-3|=1.$$

Модульдерді ашу үшін модуль ішін бағалайық.

$$-1\leqslant \cos 0,5x\leqslant 1$$

болғандықтан, $-4\leqslant\cos 0,5x-3\leqslant-2$; $|\cos 0,5x-3|=3-\cos 0,5x$.

Сол сияқты $|2\cos 0,5x-3|=3-2\cos 0,5x$.

Теңдеу мына түрге енеді: $3-\cos 0,5x-3+2\cos 0,5=1\Rightarrow$ $\Rightarrow \cos 0,5x=1$; $x=4\pi n$, $n\in Z$.

Жауабы: $4\pi n$, $n\in Z$. ■

4.26*. $\begin{cases} x-a=2\sqrt{y}, \\ y^2-x^2+2x+8y+15 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің кем дегенде бір шешімі болатындай етіп, a параметрінің барлық мәндерін табыңдар.

4.2 Иррационал теңсіздіктер

Бұл тақырыпта иррационал теңсіздіктерді шешу жолдарымен танысып, мына түрдегі иррационал теңсіздіктерді шеше аласыңдар:

- $\sqrt[2k+1]{f(x)}>a$, $\sqrt[2k+1]{f(x)}<a$;
- $\sqrt[2k]{f(x)}>a$, $\sqrt[2k]{f(x)}<a$.

Теорема. *Иррационал теңсіздіктің екі жақ бөлігін де тақ көрсеткішті дәрежеге шығарғанда берілген теңсіздікке пара-пар теңсіздік алынады.*

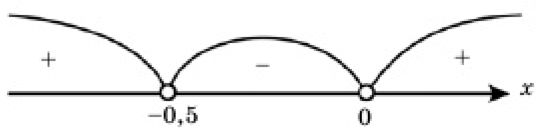
1-мысал. $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}>-1$ теңсіздігін шешейік.

▲ Тақ дәрежелі түбір болғандықтан анықталу облысы $x\neq 0$. Бұл теңдеудің екі жақ бөлігін кубтасақ, теңсіздіктің таңбасы өзгермейді. Сонда $\frac{x+1}{x} > -1$ теңсіздігін аламыз. Оны интервалдар әдісімен шешеміз:

$$\frac{x+1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{x+1+x}{x} > 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{x} > 0.$$

Бөлшектің алымын немесе бөлімін нөлге айналдыратын нүктелерді анықтаймыз: $x = -\frac{1}{2}$; $x = 0$. Бұл нүктелер сан өсін үш интервалға бөледі. Теңсіздіктің сол жақ бөлігіндегі бөлшектің әрбір интервалдағы таңбаларын анықтаймыз (4.3-сурет).

Жауабы: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty)$.



4.3-сурет

Теорема. *Иррационал теңсіздіктің екі жақ бөлігі де теріс емес болған жағдайда ғана оны жұп көрсеткішті дәрежеге шығарып, берілген теңсіздікпен пара-пар теңсіздік алуға болады.*

Түбірдің дәреже көрсеткіші жұп сан болғанда $\sqrt[2k]{f(x)} \geqslant a$ иррационал теңсіздігін шешу үшін a санының барлық мүмкін мәндерін, яғни теріс емес және теріс болу мүмкіндіктерін қарастырамыз (4.4-сурет).

Егер $a \geqslant 0$ болса, теоремаға сәйкес теңсіздіктің екі жағын жұп көрсеткішті дәрежеге шығармыз: $f(x) \geqslant a^{2k}$.

$a < 0$ болса, жұп дәрежелі түбір астындағы өрнектің мағынасы теріс емес сан болғандықтан, тек анықталу облысын шешім ретінде аламыз: $f(x) \geqslant 0$.

$$\sqrt[2k]{f(x)} \geqslant a$$

$a \geqslant 0,$ $f(x) \geqslant a^{2k}.$	$a < 0,$ $f(x) \geqslant 0.$

4.4-сурет

2-мысал. $\sqrt[4]{5x-4} \geqslant 2$ теңсіздігін шешейік.

▲ Теңсіздіктің екі жағы да оң болғандықтан, теоремаға сәйкес жұп дәрежеге шығарамыз. Бұл теңдеудің екі жақ бөлігін де төртінші дәрежеге шығарсақ, $5x - 4 \geqslant 16$. Теңсіздікті шешсек, $x \geqslant 4$.

Жауабы: $[4; +\infty)$. ■

Дәреже көрсеткіші жұп сан болғандағы $\sqrt[2k]{f(x)} < a$ иррационал теңсіздігін шешу үшін a санының теріс емес және теріс болу мүмкіндіктері 4.5-суретте көрсетілген. $a \leqslant 0$ болса, жұп көрсеткішті түбірдің мәні теріс саннан кіші болмайды, оның шешімі жоқ. $a > 0$ болса, теңсіздіктің екі жақ бөлігін де дәрежелеп, оны ММЖ-мен бірге мына жүйеге алмастырамыз:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < a^{2k}. \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} < a$$

$a \leqslant 0$ шешімі жоқ	$a > 0$ $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < a^{2k} \end{cases}$

4.5-сурет

3-мысал. $\sqrt{3x+2} < 4$ теңсіздігін шешейік.

▲ Теңсіздіктің екі жағы да оң болғандықтан, теоремаға сәйкес, жұп дәрежеге шығарамыз. ММЖ-ы ескерсек, $\begin{cases} 3x+2 \geqslant 0, \\ 3x+2 < 16. \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{2}{3}, \\ x < \dfrac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{2}{3} \leqslant x < 4\dfrac{2}{3}.$

Жауабы: $\left[-\dfrac{2}{3}; 4\dfrac{2}{3}\right)$. ■

1. Иррационал теңсіздіктерді шешу теоремаларын тұжырымдаңдар.
2. Жұп түбір көрсеткішті иррационал теңсіздікті шешу схемаларын сызыңдар және түсіндіріңдер.

Есептер

А

4.27. Теңсіздіктерді ауызша шешіңдер:

1) $\sqrt{x} > 2$; 2) $\sqrt{x} < 3$;

3) $\sqrt{x} \geqslant 0$; 4) $\sqrt{x} < -1$.

4.28. Иррационал теңсіздікті шешіңдер:

1) $\sqrt{1-x} \leqslant 2$; 2) $\sqrt{x-3} \leqslant 5$;

3) $\sqrt{2x+3} \geqslant 3$; 4) $\sqrt{x+5} < 4$.

4.29. Берілген функциялардың анықталу облысын анықтаңдар:

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{14+5x-x^2}} + \sqrt{x^2-x-20}$;

2) $y = \sqrt{4x-x^2} \cdot \sqrt{x^2-1}$.

4.30. Иррационал теңсіздік шешімінің бар-жоғын анықтап алып, әрі қарай оны шешіңдер:

1) $\sqrt[4]{3-5x} > -2$; 2) $\sqrt[4]{3-5x} < -2$;

3) $\sqrt{x^2+x-6} > -2$; 4) $\sqrt{x-2} > 4$.

4.31. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\sqrt[3]{9-2x} \leqslant 2$; 2) $\sqrt[3]{1-2x^2} > -3$; 3) $\sqrt[5]{\dfrac{2x-2}{3x+6}} < 1$.

4.32. Иррационал теңсіздікті шешіңдер:

1) $\sqrt{(x+3)(4x+5)} < 6$; 2) $\sqrt{(x-2)(2x+3)} > 3$;

3) $\sqrt{x^2-x} < \sqrt{2}$; 4) $\sqrt[4]{6x-x^2} \geqslant -5$.

B

4.33. Теңсіздікті интервалдар әдісін қолданып шешіңдер:

1) $\sqrt[6]{\dfrac{x-2}{3x+6}} > 1$; 2) $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}} > -1$;

3) $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} > 1$; 4) $\sqrt{x^3-x^2} \geqslant \sqrt{2-x-x^2}$.

4.34. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\sqrt[5]{x^2-4x} > \sqrt[5]{3-2x}$; 2) $\sqrt[3]{x^2+1} > x+1$;

3) $\sqrt[3]{x^2+3x+3} < \sqrt[3]{2x+4}$.

4.35. Теңсіздіктің екі жағы да иррационал өрнек болатын теңсіздікті 4.6-суретте көрсетілген схеманы қолданып шешіңдер:

1) $2\sqrt{2x+1} > 3\sqrt{-x^2-x+6}$; 2) $\sqrt{3x-10} > \sqrt{6-x}$;

3) $\sqrt{x-1} > \sqrt{2x^2-3x-5}$; 4) $\sqrt{x-1} < \sqrt{x^2+1}$.

$$\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{\varphi(x)}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ \varphi(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

4.6-сурет

4.36. Теңсіздіктің екі жағының таңбасын қарастырып, 4.7-суретте көрсетілген схеманың көмегімен теңсіздікті шешіңдер:

1) $\sqrt{7-2x} > x-2$; 2) $\sqrt{5-2x} > 6x-1$;

3) $\sqrt{x^2} > x+1$; 4) $\sqrt{(x+4)(x+3)} > 6-x$.

$$\sqrt[2k]{f(x)} > \varphi(x)$$

$$\begin{cases} \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) > \varphi^{2k}(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

4.7-сурет

1) ▲ $\sqrt{7-2x} > x-2.$

$x - 2 \geqslant 0;$ $\qquad$ $x - 2 < 0.$

$$\begin{cases} 7-2x > (x-2)^2, \\ x-2 \geqslant 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2 < 0, \\ 7-2x \geqslant 0. \end{cases}$$

$2 \leqslant x < 3 \longrightarrow (-\infty;\ 3) \longleftarrow (-\infty;\ 2)$ ■

4.37. Иррационал теңсіздікті 4.8-суретте көрсетілген схеманы қолданып шешіңдер:

1) $\sqrt{3x - x^2} < 4 - x$;

2) $\sqrt{x + 61} < x + 5$;

3) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} < 5 - x$.

$$\sqrt[2k]{f(x)} < \varphi(x)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < \varphi^{2k}(x). \end{cases}$$

4.8-сурет

3) ▲

$$\sqrt{x^2-3x+2}<5-x$$

$$\begin{cases}5-x>0,\\ x^2-3x+2\geqslant 0,\\ x^2-3x+2<(5-x)^2,\end{cases} \qquad 5-x\leqslant 0.$$

$$\varnothing$$

$$\downarrow$$

$$(-\infty;1]\cup\left[2;\frac{23}{7}\right).$$ ■

4.38. Иррационал теңсіздіктерді шешіңдер:

1) $\sqrt{2x-3}>x$; 2) $\sqrt{x+18}>2+x$; 3) $\sqrt{4x+5}<x$;

4) $\sqrt[3]{2x-1}<x-1$; 5) $\sqrt{2x-x^2}<5-x$; 6) $\sqrt{x^2+3x+x}<2x+1$.

C

4.39. Параметрі бар иррационал теңсіздіктерді шешіңдер:

1) $\sqrt[4]{x+a}\geqslant 2$; 2) $\sqrt{5x^2+a^2}\geqslant -3x$;

3) $\sqrt{x-a}\geqslant 2x+1$; 4) $\sqrt[3]{a+x^3}-x<\sqrt[3]{a}$.

4.40*. Модуль таңбасы бар иррационал теңсіздіктерді шешіңдер:

1) $\sqrt{3-|x|}\geqslant x$; 2) $\sqrt{4x+5}>|x-1|$;

3) $\sqrt[3]{x^2-4|x|}>\sqrt[3]{|3-2x|}$.

Қайталауға арналған жаттығулар

4.41. Функцияның туындысын табыңдар:

$y=(x^2-2x+3)\cdot\sin 2x$.

4.42. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$ функциясының графигіне $x_0=1$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар.

«ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР» бөлімінің қорытындысы

Айнымалысы түбір таңбасының астында болатын теңдеу *иррационал теңдеу* деп аталады. $\sqrt[2k]{g(x)}=h(x)$ түрінде берілген иррационал теңдеу $\begin{cases} g(x) = (h(x))^{2k}, \\ h(x) \geqslant 0 \end{cases}$ теңдеулер жүйесіне пара-пар, ал $\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x)$ түрінде берілген иррационал теңдеу $f(x) = (g(x))^{2k+1}$ теңдеуіне пара-пар.

Иррационал теңдеулерді шешкенде дәрежелеу және жаңа айнымалы енгізу әдістері жиі қолданылады.

Теңдеудің ММЖ-ын анықтап, сонан соң теңдеуді шешу барысында табылған сандардың ММЖ-на енетінін тексермей, олардың теңдеуді қанағаттандыратынын тексерген жеңіл.

Иррационал теңсіздіктің екі жақ бөлігін де тақ көрсеткішті дәрежеге шығарғанда берілген теңсіздікке пара-пар теңсіздік алынады.

Иррационал теңсіздіктің екі жақ бөлігі де теріс емес болған жағдайда ғана оны жұп көрсеткішті дәрежеге шығарып, берілген теңсіздікке пара-пар теңсіздік алуға болады.

Теңсіздіктерді шешу схемалары

$\sqrt[2k]{f(x)} \geqslant a$

$\to$ $a \geqslant 0,\ f(x) \geqslant a^{2k}$

$\to$ $a < 0,\ f(x) \geqslant 0$

$\sqrt[2k]{f(x)} < a$

$\to$ $a \leqslant 0$, шешімі жоқ

$\to$ $a > 0$, $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < a^{2k} \end{cases}$

$\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{\varphi(x)}$

$\to$ $\begin{cases} f(x) > \varphi(x), \\ \varphi(x) \geqslant 0 \end{cases}$

$\sqrt[2k]{f(x)} > \varphi(x)$

$\to$ $\begin{cases} \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) > \varphi^{2k}(x) \end{cases}$

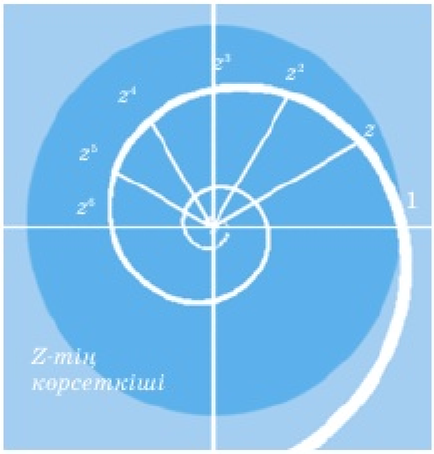
$\to$ $\begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$

Терминдер атауының сөздігі

№	Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
1	Иррационал теңдеу	Иррациональное уравнение	Irrational equation
2	Иррационал теңсіздік	Иррациональное неравенство	Irrational inequality
3	Теңдеулер жүйесі	Система уравнении	System of equations
4	Теңдеудің (теңсіздіктің) мүмкін мәндер жиыны (ММЖ)	Область допустимых значении (ОДЗ) уравнения (неравенства)	Domain of equation
5	Теңдеудің түбірі	Корень уравнения	The root of the equation

V бөлім. КОМПЛЕКС САНДАР

$i = \sqrt{-1}$



Комплекс сандар қолданбалы математикада, оның ішінде айнымалы токты есептегенде маңызды орын алады. Соңғы жүз жыл ішінде комплекс сандар және комплекс аргументті функциялар теориясы қарқынды дамып, бұл теория картографияда, электротехникада, гидромеханикада, аэромеханикада, сандар теориясында және басқа да көптеген жаратылыстану мен техника саласында қолданыс тапты. Бұл бөлімде комплекс сандарға түрлі амалдар қолдануды үйренесіңдер.

Бөлімде қарастырылатын тақырыптар:

5.1. Жорамал бірлік. Комплекс санның анықтамасы
5.2. Алгебралық түрде берілген комплекс сандарға амалдар қолдану
5.3. Квадрат теңдеулердің комплекс сан болатын түбірлері. Алгебраның негізгі теоремасы

5.1 Жорамал сандар. Комплекс сандар анықтамасы

Бұл тақырыпта жорамал бірлік және комплекс сан ұғымымен танысып, соңында:

- комплекс сан және оның модулінің анықтамасын білесіңдер;
- комплекс сандар жазықтығында комплекс санды кескіндейсіңдер;
- түйіндес комплекс санның анықтамасын және оның қасиеттерін білесіңдер.

5.1.1 Комплекс сан ұғымы

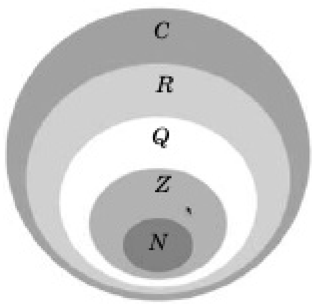
Осыған дейін біздер нақты сандар жиынын қарастырып келдік. Нақты сандар жиынында сызықтық теңдеулердің және дискриминанты теріс емес квадрат теңдеулердің әр уақытта шешімдері бар. Дискриминанты теріс квадрат теңдеулердің нақты сандар жиынында шешімдері жоқ. Мысалы, $x^2 + 1 = 0$ және $x^2 - 4x + 5 = 0$ сияқты теңдеулердің нақты шешімдері болмайтынын жақсы білеміз. Сондықтан осындай теңдеулердің шешімдері бар болатындай етіп нақты сандар жиынын кеңейту қажеттігі туындайды. Мұндай тәсілдермен біз жақсы таныспыз. Мысалы, $x + a = b$ $(a,\ b \in N)$ натурал сандар жиынында шешу мүмкіндігі бола бермегендіктен, нөл және теріс бүтін сандарды енгізіп, натурал сандар жиынын бүтін сандар жиынына дейін кеңейттік. Бүтін сандар жиынында $ax = b$ теңдеуінің шешімі бола бермейтіндіктен, бөлшек сандар ұғымын енгізіп, рационал сандар жиынын анықтадық. Ең соңында, $x^2 - 2 = 0$ теңдеуін қарастырып, оның рационал шешімі болмайтынын көрсеттік те, иррационал сан ұғымын енгізіп, рационал сандар жиынын нақты сандар жиынына дейін кеңейттік.

Осы сияқты, кез келген квадрат теңдеудің түбірлері болатындай етіп, нақты сандар жиынын кеңейту қажеттігі туындайды. Осы жиын *комплекс сандар жиыны* деп аталады және ол C — «complex» сөзінің алғашқы әрпімен белгіленеді.

Сонымен, біз N — натурал сандар жиыны, Z — бүтін сандар жиыны, Q — рационал сандар жиыны, R — нақты сандар жиыны ұғымдарын енгіздік және олар үшін мынадай арақатынастар орындалатынын көрсеттік (5.1-сурет):

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C.$$

Комплекс сандар жиынымен танысу үшін алдымен $x^2 + 1 = 0$ теңдеуін қарастыралық. Бұл теңдеудің нақты сандар жиынында түбірі жоқ. Өйткені квадраты -1-ге тең нақты сан табылмайды. Сондықтан квадраты -1-ге тең жаңа сан енгізу қажет. Осы жаңа санды i арқылы белгілейді. Сонда $i^2 = -1$ теңдігі орындалады деп есептейміз. ***i* саны жорамал бірлік** деп аталады.



5.1-сурет

Сонымен, $x^2 + 1 = 0$, $x^2 = -1$ теңдеуінің түбірлері $x_1 = i$, $x_2 = -i$. Жорамал бірлік көмегімен теріс саннан арифметикалық квадрат түбір алуға болады. Мысалы:

$$\sqrt{-4} = 2i,\ \sqrt{-9} = 3i,\ \sqrt{-64} = 8i.$$

Енді комплекс сандарға анықтама беруге болады.

Анықтама. *Егер a және b нақты сандар болса, алгебралық түрдегі $z = a + bi$ санын* ***комплекс сан*** *деп атайды.*

Мұндағы a — комплекс санның нақты бөлігі, b — оның жорамал бөлігі, ал i — жорамал бірлік: $i^2 = -1$. $\mathrm{Re(z)} = a$, $\mathrm{Im(z)} = b$.

Анықтама. *Екі комплекс санның жорамал және нақты бөліктері сәйкесінше тең болса, оларды* ***өзара тең комплекс сандар*** *деп атайды.*

$a = 0$ болса, z саны *таза жорамал* сан деп аталады, $b = 0$ болса, z саны — нақты сан. $z = 0 = 0 + 0i$ комплекс санының нақты бөлігі мен жорамал бөлігі де нөлге тең.

$z = 2 + 5i$ болса, оның нақты бөлігі $\mathrm{Re}(z) = 2$ және жорамал бөлігі $\mathrm{Lm}(z) = 5$. $z = 3 - 4i$ комплекс санының нақты бөлігі $\mathrm{Re}(z) = 3$ және жорамал бөлігі $\mathrm{Lm}(z) = -4$. $z = 6i$ санының нақты бөлігі $\mathrm{Re}(z) = 0$, жорамал бөлігі $\mathrm{Lm}(z) = 6$.

Ағылшын тілінен аударғанда Real — *нақты*, Imaginary — *жорамал* деген мағынаны білдіреді.

Комплекс сандар жиыны нақты сандар жиынының кеңеюі болғандықтан, әр нақты санды комплекс сан деп қабылдауға болады, себебі $\forall a \in R$ үшін $a = a + 0i$.

1-мысал. $z = x + 3i$ және $w = -2 + yi$ комплекс сандары өзара тең болатындай етіп, x пен y-тің мәндерін анықтау керек.

▲ Анықтама бойынша $z = w$ теңдігі орындалуы үшін $x = -2$, $y = 3$ болуы қажет. ■

Анықтама. *$z = a + bi$ комплекс санына $\overline{z} = a - bi$ комплекс санын* ***түйіндес*** *деп атайды. Бұл сандар* ***өзара түйіндес*** *сандар деп те аталады.*

2-мысал. i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^{-1}, i^{-2} сандарының мәндерін есептеу керек.

▲ $i^2 = i \cdot i = -1$; $\quad i^3 = i^2 \cdot i = -i$; $\quad i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -(-1) = 1$;

$i^5 = i^4 \cdot i = i$; $\quad i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$; $\quad i^{-1} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i \cdot i} = -i$;

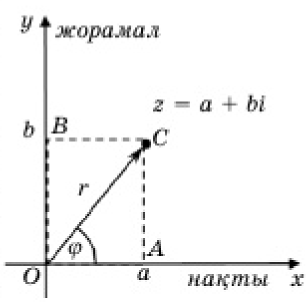
$i^{-2} = \dfrac{1}{i^2} = -1$. ■

Тарихқа шолу

Комплекс сан ұғымы — тұңғыш рет XVI ғасырда итальяндықтар Дж. Кардано және Р. Бомбелли қарастырған дискриминанты теріс квадрат теңдеулердің, әсіресе кубтық теңдеулердің шешімдеріне байланысты шыққан ұғым. 1572 жылы жарық көрген «Алгебра» атты кітабында Р. Бомбелли комплекс сандарға арифметикалық амалдар қолданған. Алғашқы кезде комплекс сандардың іс жүзінде нақты түсінігі (интерпретациясы) болмағандықтан ондай түбірлерді «мүмкін емес», «жорамал» деп санап, осындай түбірлері бар теңдеулерді «түбірі жоқ» теңдеулер қатарына қосқан. Комплекс сандардың жан-жақты қолданылуы тек XVIII ғасырда басталды. Міне, осы кезде комплекс сандардың интегралдық есептеулерде, айталық, механикада және геометрияда қолданулары комплекс аргументті функцияларды қарастыруға әкелді. Комплекс сандарға жазықтықтағы нүкте не вектор деген геометриялық түсінікті 1797 жылы даниялық жер өлшеуші К. Вессель (1745—1818) берген, неміс математигі Карл Фридрих Гаусстың (1777—1855) комплекс сандарды арифметикаға, алгебраға, геометрия және математикалық анализге қолданған еңбектерінен кейін ғана көпшілік комплекс сандардың геометриялық мағынасын қолданып, оны толық пайдалана бастайды. Математикаға «комплекс сан» терминін енгізген және жоғарғы алгебраның негізгі теоремасының толық дәлелдеуін тұңғыш рет ұсынған К. Гаусс.

5.1.2. Комплекс сандардың геометриялық мағынасы

Комплекс сандарды Oxy координаталар жазықтығының көмегімен жазықтықтың нүктелері ретінде өрнектеуге болады (5.2-сурет). Егер $z = a$ нақты сан болса, оған Ox өсінде $A(a;\ 0)$ нүктесі; $z = bi$ таза жорамал санына Oy өсінде орналасқан $B(0;\ b)$ нүктесі сәйкес қойылады, яғни абциссалар өсінде нақты сандар, ординаталар өсінде таза жорамал сандар бейнеленеді. Сондықтан Ox — өсін ***нақты өс*** деп, ал Oy-ті ***жорамал өс*** деп атайды. Жазықтықтағы әрбір $C(a;\ b)$ нүктесіне $z = a + bi$ комплекс санын сәйкес қоямыз. Бұл өзара бірмәнді сәйкестік. Сонымен, комплекс сандар жиыны мен жазықтық нүктелері жиыны арасында өзара бірмәнді сәйкестік орнатылды.



5.2-сурет

Кейде комплекс сандарды кескіндеу үшін $C(a; b)$ нүктесінің орнына $\overrightarrow{OC}$ радиус-векторын қолданады. Комплекс сандарды радиус-векторлар арқылы кескіндеу оларға қолданылатын амалдардың геометриялық мағынасын көруге ыңғайлы. Радиус-вектордың ұзындығын *комплекс санның модулі* деп атайды. ΔOAC тік бұрышты үшбұрыш болғандықтан, Пифагор теоремасы бойынша $OA = a$, $OB = b$, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|z| = r$ — комплекс санның модулі ($r \geqslant 0$).

Анықтама. ***$z \neq 0$ комплекс санының аргументі*** *деп оған сәйкес келетін $\overrightarrow{OC}$ радиус-векторының Ox өсінің оң бағытымен жасайтын бұрышын айтады. Егер бұрыш сағат тілінің бағытына қарсы бағытта есептелінсе, бұл бұрыш оң таңбамен, сағат тілімен бағыттас есептелінсе, теріс таңбамен алынады, $z = a + bi$ комплекс санының аргументі $\varphi = Argz$ немесе $\varphi = Arg(a + bi)$ арқылы белгіленеді.*

$z = 0$ санының аргументі анықталмайды. Сондықтан комплекс санның аргументі жөнінде сөз қозғағанда $z \neq 0$ деп есептейміз.

Берілген $z \neq 0$ комплекс саны үшін оның аргументі 2π-ге еселік санға дейінгі дәлдікпен анықталады. Егер φ оның аргументі болса, онда $\varphi \pm 2\pi k$ ($k \in Z$) бұрыштары да z-тің аргументі болады. Сонымен, әрбір комплекс санның шексіз көп аргументтері бар және олар бір-бірінен 2π-ге еселік қосылғыштарға ғана өзгешеленеді. Сондықтан комплекс сандардың аргументтерін бірмәнді анықтау мақсатында, келісім бойынша оның аргументтерінің тек біреуін ғана алады. Оны $\varphi = argz$ арқылы белгілеп, ***аргументтің басты мәні*** деп атайды және $-\pi \leqslant argz \leqslant \pi$ теңсіздігі орындалатындай етіп алады.

Тригонометриялық функциялардың анықтамасынан

$$\varphi = Arg(a + bi)$$

үшін

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

теңдіктері орындалатынын көреміз.

3-мысал. $z_1 = 4 - 3i$ және $z_2 = -2 - 2i$ комплекс сандарының модулін анықтау керек.

$$▲\ r_1 = |z_1| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.\ ■$$

Топтық жұмыс

1. $z = a + bi$ комплекс саны мен оған түйіндес $\bar{z} = a - bi$ сандарын комплекс жазықтығына бейнелеңдер, олардың модульдері мен аргументтері туралы тұжырым жасаңдар және мысал келтіріңдер.

2. z комплекс саны мен оған қарама-қарсы $(-z)$ сандарын комплекс жазықтығына бейнелеңдер, олардың комплекс сандар жазықтығында өзара қалай орналасатыны туралы тұжырым жасаңдар және мысал келтіріңдер.

Комплекс сандар жазықтығын кейбір әдебиеттерде ***Арган диаграммасы*** *деп те атайды.*

➤ **Қосымша электрондық ресурстар**

Берілген сілтеме арқылы комплекс сандар жазықтығында кескінделген сандардың әдемілігін көре аласыңдар.
https://www.geogebra.org/m/xzEhH5K5

4-мысал. 1) $|z - 3 + 2i| = 4$; 2) $|z - 3 + 2i| \leqslant 4$ шартын қанағаттандыратын барлық z комплекс сандары жиынының геометриялық мағынасын анықтайық.

▲ 1) $|z - 3 + 2i| = 4$ теңдігін қанағаттандыратын барлық $z = x + iy$ комплекс сандары жиынының центрі $(3; -2)$ нүктесінде радиусы 4-ке тең шеңберді анықтайды. Шынында да, $|z - 3 + 2i| = |(x - 3) + i(y + 2)| = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = 4 \Rightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ шеңберінің теңдеуін аламыз.

2) Осы сияқты $|z - 3 + 2i| \leqslant 4 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 16$ болғандықтан, бұл теңсіздікпен центрі $(3; -2)$ нүктесінде, радиусы 4-ке тең дөңгелек анықталады. ■

1. Жорамал бірлік деп қандай санды атайды? Оны квадраттағанда мәні нешеге тең болады?
2. Комплекс сан деп нені айтады және оның бөліктерін неге $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ деп белгілейді?
3. Қандай жағдайда комплекс сан нақты сан болады?
4. Екі комплекс сан тең болу үшін қандай шарт орындалу керек?
5. Комплекс сандар жазықтығында комплекс санды қалай анықтайды?
6. Комплекс санның модулі мен аргументінің геометриялық мағынасын түсіндіріңдер.
7. Қандай сан берілген комплекс санға түйіндес сан деп аталады?

Есептер

A

5.1. Мына сандарды жорамал бірлік арқылы ауызша өрнектеңдер:

1) $\sqrt{-9}$; 2) $\sqrt{-\frac{1}{4}}$; 3) $\sqrt{-64}$; 4) $\sqrt{-5}$; 5) $\sqrt{-8}$.

5.2. $z = 3 + 4i$ және $w = 1 - 2i$ комплекс сандарының нақты және жорамал бөліктерін айтыңдар, оларға түйіндес болатын комплекс санды ауызша анықтаңдар.

5.3. $z = 2 + 3i$ және $w = 6 - 4i$ сандары берілген. Мына сандарды анықтаңдар:

1) $\mathrm{Re}(z)$; $\mathrm{Im}(w)$; $\bar{z}$; 2) $-\bar{z}$; $\mathrm{Re}(\bar{z})$; $\mathrm{Im}(z)$;

3) $\mathrm{Re}(\bar{w})$; $-\bar{w}$; $\bar{w}$.

5.4. Берілген сандарды түбірден шығарып комплекс сандар жазықтығында кескіндеңдер:

1) $\sqrt{-81}$; 2) $\sqrt{-\frac{1}{16}}$; 3) $\sqrt{64}$; 4) $\sqrt[3]{-27}$; 5) $\sqrt[3]{125i}$.

5.5. $z = 3 + 4i$ және $w = 5 - 12i$ сандары үшін

1) $|z|$; 2) $|w|$; 3) $|\bar{z}|$; 4) $|\bar{w}|$

шамаларын анықтаңдар және оларды салыстырып, комплекс сан мен оның түйіндесінің модулі жайлы тұжырым жасаңдар.

5.6. Берілген комплекс сандарды комплекс сандар жазықтығында кескіндеңдер және олардың модулін анықтаңдар:

1) $z = 3 + 2i$; 2) $z = 4i$; 3) $z = -5 + i$; 4) $z = -6 - 5i$.

B

5.7. z және w комплекс сандары өзара тең болатындай нақты x және y сандарын анықтаңдар:

1) $z = x^2 + xyi - 5 + i$ және $w = xi - y^2 + yi$;

2) $z = x^2(1 + i) - 3x$ және $w = y^2(i - 1) - i$.

5.8. z және оған түйіндес w комплекс сандары берілген. Нақты x және y сандарын анықтаңдар:

1) $z = 2x^2 - 3i - 1 + yi$, $w = y + x^2i - 3 - 2i$;

2) $z = (x + i)^2 + y^2$, $w = 12 + yi + i$.

5.9. $z = 2 - 4i$ комплекс саны үшін берілген сандарды комплекс сандар жазықтығында кескіндеңдер:

1) z; 2) $-z$; 3) $\bar{z}$; 4) $-\bar{z}$;

5) iz; 6) $-iz$; 7) $i\bar{z}$; 8) $\overline{(iz)}$.

5.10. $z_1 = 1 + \sqrt{3} \cdot i$ және $z_2 = -2 - 2i$ сандарының модулі мен аргументтерін анықтаңдар.

5.11. z комплекс саны үшін мына теңдіктердің дұрыстығын дәлелдеңдер:

1) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$; 2) $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

5.12. Комплекс сандар жазықтығында мына нүктелерді белгілеңдер:

-1; i; $-\sqrt{2}$; $-3i$; $2 - 3i$; $-4 - 2i$; $3 + i$; $-6 + 2i$; $2 + 2i$; $-2 + 2i$; $-2 - 2i$.

5.13. Сандардың модулі мен аргументтерін анықтаңдар және комплекс сандар жазықтығында кескіндеңдер:

1) $z = 1 + i$; 2) $z = \sqrt{3} - i$; 3) $z = \sqrt{2i}$; 4) $z = 2$; 5) $z = -i$.

C

5.14. Мына шарттарды қанағаттандыратын барлық $z = x + yi$ комплекс сандар жиынын кескіндеңдер:

1) $x = 2$; 2) $1 \leqslant x \leqslant 3$; 3) $\mathrm{Re}\,z = \mathrm{Im}\,z$; 4) $\mathrm{Im}\,z = 2\mathrm{Re}z$.

5.15. Комплекс жазықтығында мына шарттарды қанағаттандыратын нүктелер жиынын кескіндеңдер:

1) $|z| = 5$; 2) $|z| \leqslant 6$; 3) $|z - (2 + i)| \leqslant 3$; 4) $6 \leqslant |z - i| \leqslant 7$.

5.16*. Комплекс жазықтығында мына шарттарды қанағаттандыратын жиынды кескіндеңдер:

1) $|z| = 1$; 2) $|z| \leqslant 5$; 3) $1 \leqslant |z| \leqslant 2$;

4) $\arg z = 0$; 5) $\dfrac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; 6) $|z - 1| = \dfrac{1}{3}$;

7) $|z - 3 + 2i| \leqslant 2$.

Қайталауға арналған жаттығулар

5.17. Ықшамдаңдар: $\dfrac{\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[4]{9}}{\sqrt[6]{24}}$.

5.18. $x^2 + y^2 = 49$ теңдеуінің графигін салыңдар және оны сипаттаңдар.

5.2. Алгебралық түрде берілген комплекс сандарға амалдар қолдану

Бұл тақырыпты оқып-үйрену барысында:

- алгебралық түрде берілген комплекс сандарға арифметикалық амалдар қолдануды білесіңдер;
- жорамал бірлікті бүтін дәрежеге шығару заңдылықтарын есептер шығарғанда қолданасыңдар;
- комплекс саннан квадрат түбір аласыңдар.

5.2.1. Алгебралық түрде берілген комплекс сандарға арифметикалық амалдар қолдану

Нақты сандарға қолданатын арифметикалық амалдар комплекс сандарға да қолданылады.

$z_1 = a + bi$ және $z_2 = c + di$ комплекс сандары үшін:

1°. *Қосу амалы.*

$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i.$

2°. *Азайту амалы.*

$z_1 - z_2 = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i.$

3°. *Көбейту амалы* (бұл амалды қолданғанда жақшаны ашып, $i^2 = -1$ екенін ескерсе жеткілікті).

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + adi + bi \cdot c + b \cdot d \cdot i^2 = ac + adi + bci - bd = ac - bd + (ad + bc)i.$

4°. *Бөлу амалы* (бөлімдегі комплекс санның түйіндесіне көбейту арқылы орындалады, $i^2 = -1$ екенін ескерсе жеткілікті).

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

1-мысал. Комплекс сандарға арифметикалық амалдар қолданайық.

▲ 1) $z_1 = 2 - i$ және $z_2 = -4 + 3i$ сандарының қосындысын табайық:

$z_1 + z_2 = (2 + (-1) \cdot i) + (-4 + 3i) = (2 + (-4)) + ((-1) + 3)i = -2 + 2i.$

2) $z_1 = 2 - 3i$ және $z_2 = -4 + 5i$ сандарының көбейтіндісін есептейік:

$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (-4 + 5i) = 2 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-3i) + 2 \cdot 5i - 3i \cdot 5i = 7 + 22i.$

3) $z_1 = 3 - 2i$ және $z_2 = 3 - i$ сандарының қатынасын есептейік:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(3-2i)}{(3-i)} = \frac{(3-2i)\cdot(3+i)}{(3-i)\cdot(3+i)} = \frac{11-3i}{9+1} = \frac{11}{10} - \frac{3}{10}i. \ ■$$

2-мысал. $\dfrac{9-4i}{2+3i}$ санын $x + yi$ түріне келтіру керек.

▲ Ол үшін бөлшектің алымы мен бөлімін $2 + 3i$ санының түйіндесі $2 - 3i$ санына көбейтеміз:

$$\frac{9-4i}{2+3i}=\frac{(9-4i)\cdot(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{18-27i-8i+12i^2}{4-(3i)^2}=\frac{18-27i-8i-12}{4+9}=$$

$$=\frac{6-35i}{13}=\frac{6}{13}-2\frac{9}{13}i\,.$$ ■

Жұптық жұмыс

x, $y \neq 0$ үшін мына теңдікті дәлелдеңдер:

$$\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}\,.$$

5.2.2. Жорамал бірлікті бүтін дәрежеге шығару заңдылықтарын есептер шығарғанда қолдану

$i^2 = -1$ екенін ескеріп жорамал бірлікті бүтін дәрежеге шығару заңдылықтарын іздесек,

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i,\ i^4 = (i^2)^2 = 1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1.$$

Сондықтан кез келген бүтін k үшін:

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i\ (k \in N).$$

3-мысал. $i^{17} + i^{18} + i^{19}$ есептейік.

▲ $i^{17} + i^{18} + i^{19} = (i^4)^4 \cdot i + (i^4)^4 \cdot i^2 + (i^4)^4 \cdot i^3 = i - 1 - i = -1.$ ■

5.2.3. Комплекс саннан квадрат түбір алу

4-мысал. $\sqrt{3-4i}$ түбірін есептейік.

▲ $\sqrt{3-4i} = x + yi$ деп белгілесек, $(x + yi)^2 = 3 - 4i$ теңдігі орындалу керек. Жақшаны ашсақ, $x^2 + 2xyi - y^2 = 3 - 4i$. Теңдік орындалу үшін теңдіктің екі жағындағы жорамал және нақты бөліктер тең болу керек:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = -4. \end{cases}$$

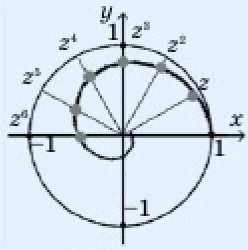
Теңдеулер жүйесінен мына шешімдерді табамыз:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ және } \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Сонымен, $\sqrt{3-4i}=2-i$ және $\sqrt{3-4i}=-2+i$ немесе $\sqrt{3-4i}=$ $=\pm(2-i)$. ■

Практикалық тапсырма

Комплекс сандар жазықтығында $z=1+i$ санын және оның 2, 3, 4, ... 10 дәрежелерін кескіндеңдер. Осы сандардың комплекс жазықтығындағы нүктелерін қисықпен қосыңдар. Нәтижесінде шыққан фигураны сипаттаңдар. Енді осы жазықтықта $\overline{z}=1-i$ санын және оның 2, 3, 4, ... 10 дәрежелерін бейнелеңдер. Осы сандардың комплекс жазықтығындағы нүктелерін қисықпен қосыңдар. Нәтижесінде шыққан фигураны сипаттаңдар (5.3-сурет).



5.3-сурет

1. Комплекс сандарға қандай арифметикалық амалдар қолдануға болады?
2. Комплекс сандарды бөлу амалы қалай орындалады?
3. i^n заңдылығын тұжырымдап, дәлелдеп беріңдер.

Есептер

А

5.19. Амалдарды орындаңдар:

1) $(8+6i)+(6+4i)$; 2) $(5-i)-(6-2i)$;
3) $3(4+6i)+9(1-2i)$; 4) $3i(7-4i)$.

5.20. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $(9+2i)(1+3i)$; 2) $(4-i)(3+2i)$;
3) $(7+3i)^2$; 4) $(3+2i)^3$;
5) $(1+2i)(3-4i)(5+6i)$.

5.21. $z=2+3i$ және $w=6-4i$ сандарын қолданып, мына сандарды есептеңдер:

1) $\overline{z}+\overline{w}$; 2) $\overline{z}-\overline{w}$; 3) $\operatorname{Im}(z+\overline{z})$;
4) $\operatorname{Re}(w-\overline{w})$; 5) $z\overline{z}-w\overline{w}$; 6) $z\overline{w}-\overline{z}w$.

5.22. $p+qi=\dfrac{1}{3+4i}$ теңдігі орындалатындай p және q сандарын анықтаңдар.

5.23. Бөлшектің алымы мен бөлімін түйіндесіне көбейтіп, комплекс сандардың жорамал және нақты бөліктерін анықтаңдар:

1) $\frac{1}{5+12i}$; 2) $\frac{1}{6+8i}$; 3) $\frac{1}{3+i}$; 4) $\frac{1}{6-i}$.

5.24. Берілген теңдікті қанағаттандыратын нақты a $(a > 0)$ және b сандарын табыңдар:

1) $(a + bi)^2 = 21 + 20i$; 2) $(a + bi)^2 = -40 - 42i$;
3) $(a + bi)^2 = -9 - 12i$; 4) $(a + bi)^2 = i$.

5.25. Берілген сандарды $x + yi$ түрінде жазыңдар:

1) $\frac{2+3i}{1+i}$; 2) $\frac{-4+3i}{-2-i}$; 3) $\frac{5i}{6-2i}$; 4) $\frac{7+5i}{6-2i}$.

5.26. $(3 + 2i)(1 + yi)$ көбейтіндісі 1) нақты сан; 2) жорамал сан болатындай етіп y нақты санын анықтаңдар.

5.27. $z = 1 - i$ саны берілген. Мына шамаларды есептеңдер:

1) z^3; 2) $\frac{1}{z^3}$; 3) $z^3\,\overline{z}$.

▲ 2) $z^{-3} = \frac{1}{(1-i)^3} = \frac{1}{1-3i+3i^2-i^3} = \frac{1}{-2-2i} =$

$= \frac{-2+2i}{(-2)^2+(-2)^2} = \frac{-2+2i}{8} = -0{,}25+0{,}25i.$ ■

5.28. $(x + yi)^2 = a + bi$ теңдігін қолданып, квадрат түбірлерді есептеңдер:

1) $\sqrt{4}$; 2) $\sqrt{-4}$; 3) $\sqrt{9i}$; 4) $\sqrt{-25i}$.

5.29. $(x + yi)^2 = a + bi$ теңдігін қолданып, квадрат түбірлерді есептеңдер:

1) $\sqrt{4-3i}$; 2) $\sqrt{3+4i}$; 3) $\sqrt{12+5i}$; 4) $\sqrt{6+8i}$.

B

5.30. Есептеңдер:

1) $(3 - 2i) + (5 + 3i)$; 2) $(1 + 2i) - (3 - i)$;

3) $3(2-i)\cdot(1-i)$; 4) $(1+3i)(-7+2i)$;
5) $(2-i)^2$; 6) $(1+2i)^3$.

5.31. Теңдеуді шешіңдер ($x, y \in R$):
1) $(1+i)x+(2+i)y=5+3i$; 2) $2x+(1+i)(x+y)=7+i$;
3) $(3-y+x)(1+i)+(x-y)(2+i)=6-3i$.

5.32. Түбірлерді есептеңдер:
1) $\sqrt{7-24i}$; 2) $\sqrt{-252-64i}$;
3) $\sqrt{16-12i}$; 4) $\sqrt{21+20i}$.

5.33. Есептеңдер:
1) i^{13}; 2) i^{65}; 3) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$;
4) $\frac{5}{1+2i}$; 5) $\frac{2i-3}{1+i}$; 6) $\frac{2+3i}{i}$;
7) $\frac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$; 8) $\frac{2+i}{2-i}-(3+4i)+\frac{4-i}{3+2i}$; 9) $(2-i)^2$.

5.34. z^{-1}-ді анықтаңдар:
1) $z=7-12i$; 2) $z=3+4i$; 3) $z=-3+7i$; 4) $z=i$.

5.35. $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{i^2}$ және $\frac{1}{i^3}$ шамаларының мәнін есептеңдер және кез келген натурал n үшін $\frac{1}{i^n}$ шамасының мәнін есептейтін заңдылықты анықтаңдар.

5.36. Берілген сандарды $x+yi$ түрінде жазыңдар:
1) $\frac{3-2i}{i}$; 2) $\frac{p+qi}{r+si}$; 3) $\frac{(2+i)(3-2i)}{1+i}$; 4) $\frac{(1-i)^3}{(2+i)^2}$.

5.37. Ықшамдаңдар:
1) $\frac{1}{3+i}-\frac{1}{3-i}$; 2) $\frac{1+i}{1-i}-(1+2i)(2+2i)+\frac{3-i}{1+i}$;
3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; 4) $2i(-1+i)+\left(\sqrt{3}-i\right)^3+(1+i)(1-i)$.

5.38. Сандарды дәрежеге шығарыңдар:
1) $(-1+i)^5$; 2) $(1+i)^{10}$.

5.39. Есептеңдер:

$i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + i^{44} + i^{54} + i^{64} + i^{74} + i^{84}$.

5.40. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\frac{2-i}{3-i} = \frac{13+4i}{17-9i}$; 2) $\frac{\sqrt{m}+i\sqrt{n}}{\sqrt{m}-i\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}+i\sqrt{m}}{\sqrt{n}-i\sqrt{m}}$.

5.41. $\frac{a}{3+i} + \frac{b}{1+2i} = 1-i$ теңдігін қанағаттандыратын a және b нақты сандарын табыңдар.

5.42. $\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}$ өрнегін ықшамдаңдар.

▲ $\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4} = 16\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^{4}$.

Енді екі комплекс санды бөліп алайық:

$$\frac{-7-2i}{2-7i} = \frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)} = \frac{-14-49i-4i+14}{4+49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Өрнектің мәнін аламыз: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$. ■

5.43. Комплекс санның нақты және жорамал бөліктерін анықтаңдар:

1) $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$; 2) $\frac{4+3i}{3+4i} - \frac{5-4i}{4+5i}$;

3) $\frac{1+i}{2-i} + \frac{2-i}{3+i} + 2i$; 4) $\left(\frac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^2$.

5.44. Берілген теңдеулерді қанағаттандыратын нақты x және y сандарын табыңдар:

1) $\frac{x}{1+i} + \frac{y}{1-2i} = 1$; 2) $3x - (1-i)(x-yi) = 2 + 3i$;

3) $\frac{x}{2-i} + \frac{yi}{3+i} = \frac{2}{1+i}$; 4) $x + yi = (1-i)(2+8i)$.

2) $3x - (1 - i)(x - yi) = 2 + 3i$,

$3x - ((x - y) + (-x - y)i) = 2 + 3i$,

$(2x + y) + (x + y)i = 2 + 3i$ комплекс сандары тең болуы үшін олардың нақты мен жорамал бөліктері тең болу керек. Сондықтан:

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x + y = 3. \end{cases} \quad x = -1 \text{ , } y = 4.$$

C

5.45. Есептеңдер:

1) $(1 + i\sqrt{3})^8(1 - i)^7$; 2) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$; 3) $\dfrac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}$.

5.46. Теңдеуді қанағаттандыратын x пен y-тің барлық нақты мәндерін анықтаңдар:

1) $\dfrac{i}{x} + \dfrac{i}{y} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{5i}{y}$; 2) $(1 + i)x + (1 - i)y = 3 - i$;

3) $-\dfrac{2}{y} + xi = 3$; 4) $(2 - i)x + (1 + i)y = 5 - i$.

5.47. Теңдеулерді комплекс сандар жиынында шешіңдер. Шешімді $a + bi$ түрінде беріңдер.

1) $(1 + i)z = 3 + i$; 2) $(3 - 4i)(z - 1) = 10 - 5i$;

3) $(2 + i)(z - 7 + 3i) = 15 - 10i$; 4) $(3 + 5i)(z + 2 - 5i) = 6 + 3i$.

5.48. $z^2 = 2\bar{z}$ теңдігін қанағаттандыратын барлық z комплекс сандарын табыңдар.

5.49. z және w комплекс сандары мына теңдеулер жүйесінің шешімі:

$$\begin{cases} z + iw = 13, \\ 3z - 4w = 2i. \end{cases}$$

z және w сандарын анықтаңдар және жауаптарыңды $x + yi$ түрінде жазыңдар.

5.50. $z = 2 + 3i$ комплекс саны — $z^2 + (a - 1)z + 16 + bi = 0$ теңдеуінің түбірі. a және b нақты сандарын табыңдар.

5.51*. $\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\dfrac{b}{|b|}\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$ формуласының дұрыстығын дәлелдеңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

5.52. Екімүше түрінде жазыңдар:

$$(a + b)(a - b)(a^2 - ab + b^2))(a^2 - ab + b^2).$$

5.53. Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 1, \\ 3y + x = 20. \end{cases}$

5.3. Квадрат теңдеулердің комплекс сан болатын түбірлері. Алгебраның негізгі теоремасы

Бұл тақырыпта квадрат теңдеулердің комплекс сан болатын түбірлерін анықтауды үйреніп, соңында:

- комплекс сандар жиынында квадрат теңдеулерді шеше аласыңдар;
- алгебраның негізгі теоремасын және оның салдарын білесіңдер.

Комплекс сандар алгебралық теңдеулерді шешу барысында пайда болды. $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ және a, b, $c \in R$ квадрат теңдеуінің түбірлерін $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ формуласы арқылы анықтайтынын және $D = b^2 - 4ac$ саны дискриминант деп аталатынын білесіңдер. Дискриминанттың мәні:

$D > 0$ болса, теңдеудің екі әртүрлі нақты түбірі болады;

$D = 0$ болса, теңдеудің екі бір-біріне тең нақты түбірі болады;

$D < 0$ болса, теңдеудің нақты түбірлері жоқ екенін білеміз. Бірақ $D < 0$ жағдайында да квадрат теңдеудің екі түбірі бар, олар тек комплекс сандар жиынында болады.

1-мысал. 1) $x^2 = -4$, 2) $x^2 + x + 2 = 0$ теңдеулерін шешу керек.

▲ 1) $x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$.

2) $x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$. ■

2-мысал. 1) $x^2 + 4$, 2) $x^2 + 11$ өрнектерін көбейткіштерге жіктеу керек.

▲ 1) $x^2 + 4 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$.

2) $x^2 + 11 = \left(x - \sqrt{11}i\right)\left(x + \sqrt{11}i\right)$. ■

Бұл мысалдардан $z = a + bi$ саны қандай да бір квадрат теңдеудің комплекс түбірі болса, оның түйіндесі $\overline{z} = a - bi$ де сол теңдеудің түбірі болатынын тексеру қиын емес (оны өздерің орындаңдар).

Алгебраның негізгі теоремасы. *Дәрежесі нөлдік емес кез келген көпмүшенің комплекс сандар жиынында кем дегенде бір түбірі болады.*

Бұл теореманың дәлелдеуі күрделі болғандықтан, мектеп курсында қарастырмайды.

Алгебраның негізгі теоремасының салдары. *Кез келген n-дәрежелі көпмүшенің комплекс сандар жиынында, еселі түбірлердің барлығын қоса алғанда, тура n түбірі болады.*

Сызықтық теңдеудің 1 түбірі бар екенін білеміз, ал квадрат теңдеудің комплекс сандар жиынында екі түбірі табылатынын көрдік. Осы сияқты, кубтық теңдеудің де үш түбірі бар екенін кейбір теңдеулерден көріп жүрміз. Егер кубтық теңдеудің жалғыз нақты түбірі бар болса, онда оның қалған екі түбірі түйіндес комплекс сандар болады.

$z = a + bi$ саны қандай да бір теңдеудің комплекс түбірі болса, оның түйіндесі $\bar{z} = a - bi$ де сол теңдеудің түбірі болатынын ескерсек, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ кубтық теңдеуінің түбірлері жайлы мынадай тұжырым жасай аламыз:

Кубтық теңдеудің үш түбірі де нақты сан немесе бір түбірі нақты сан, ал өзге екі түбірі өзара түйіндес комплекс сандар болады.

Топтық жұмыс

Төртінші дәрежелі теңдеудің түбірлерінің құрамы қандай сандар бола алатыны жайлы тұжырым жасаңдар.

3-мысал. $1 + 2i$ комплекс саны $4z^3 - 11z^2 + 26z - 15 = 0$ теңдеуінің түбірі болатынын көрсетіп, оның өзге түбірін табу керек.

▲ Алдымен $1 + 2i$ саны берілген теңдеудің түбірі болатынын көрсетелік. Шынында да, $z^2 = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i$ және $z^3 = (1 + 2i)^3 = (1 + 2i)(-3 + 4i) = -11 - 2i$ болғандықтан, табылған мәндерді берілген теңдеуге қойып, мына тепе-теңдікті аламыз: $4z^3 - 11z^2 + 26z - 15 = 4(-11 - 2i) - 11(-3 + 4i) + 26(1 + 2i) - 15 = (-44 + 33 + 26 - 15) + (-8 - 44 + 52)i = 0 + 0i = 0$.

Енді теңдеудің өзге түбірлерін анықтайық. Алгебраның негізгі теоремасының салдары бойынша 3-дәрежелі теңдеудің үш түбірі бар. Бір түбірі $1 + 2i$ комплекс саны болса, оған түйіндес $1 - 2i$ саны да берілген теңдеудің түбірі болады. Екі түбірі комплекс сан болса, үшінші түбірі нақты сан болуы қажет. Ол түбірді a деп белгілеп, көпмүшені көбейткішке жіктейміз:

$4z^3 - 11z^2 + 26z - 15 = 4(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)(z - a)$. Жақшаны ашып, топтаймыз:

$4z^3 - 11z^2 + 26z - 15 = 4(z^2 - z + 2zi - z + 1 - 2i - 2zi + 2i + 4) \times$
$\times (z - a) = 4(z^2 - 2z + 5)(z - a) = 4z^3 - 4az^2 - 8z^2 + 8az + 20z - 20a.$

Сәйкес дәрежелердің коэффициенттерін теңестіреміз (белгісіз коэффициенттер әдісі). z^2 коэффициенттері: $-11 = -4a - 8$; z коэффициенттері: $26 = 8a + 20$; бос мүшелері: $-15 = -20a$.

Барлық теңдеулердің шешімдері бірдей: $a = \dfrac{3}{4}$.

Жауабы: $z_1 + 2i$; $z_2 = 1 - 2i$; $z_3 = \dfrac{3}{4}$. ■

1. Квадрат теңдеудің бір комплекс түбірі берілсе, екіншісін бірден анықтауға бола ма?
2. Алгебраның негізгі теоремасын және оның салдарын айтыңдар, түсіндіріңдер.

Есептер

A

5.54. x комплекс саны үшін мына толымсыз квадрат теңдеулерді шешіңдер:

1) $x^2 + 9 = 0$; 2) $4x^2 - 9 = 0$; 3) $x^2 + 5 = 0$;
4) $x^2 - 25 = 0$; 5) $x^2 + 25 = 0$; 6) $x^2 - 5 = 0$.

5.55. x комплекс саны үшін мына кубтық теңдеулерді көбейткіштерге жіктеу арқылы шешіңдер:

1) $x^3 - 4x = 0$; 2) $x^3 + 2x = 0$; 3) $x^3 + 4x = 0$;
4) $x^3 - 3x = 0$; 5) $x^3 + 3x = 0$.

5.56. x комплекс саны үшін 4-дәрежелі теңдеулерді шешіңдер:

1) $x^4 + x^2 = 6$; 2) $x^4 - 1 = 0$; 3) $x^4 = 81$.

5.57. Квадрат теңдеуді шешіңдер:

1) $x^2 - 10x + 29 = 0$; 2) $x^2 + 6x + 25 = 0$;
3) $x^2 + 14x + 50 = 0$; 4) $2x^2 + 5 = 6x$;
5) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 4 = 0$; 6) $2x + \dfrac{1}{x} = 1$.

5.58. Сызықтық көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x^2 - 9$; 2) $x^2 - 7$; 3) $x^2 + 7$;
4) $2x^2 + 9$; 5) $4x^2 - 1$; 6) $4x^2 + 1$;
7) $2x^2 - 9$; 8) $x^3 - x$; 9) $x^4 - 16$;
10) $x^4 - 1$; 11) $x^3 + x$.

5.59. Теңдеуді шешіңдер:

1) $z^2 + 2z + 2 = 0$; 2) $z^2 - 2z + 5 = 0$;
3) $z^2 - 4z + 13 = 0$; 4) $z^2 + 6z + 34 = 0$;
5) $4z^2 - 4z + 17 = 0$; 6) $z^2 + 4z + 6 = 0$.

5.60. Биквадрат теңдеуді шешіңдер:

1) $z^4 + 2z^2 = 3$; 2) $z^4 = z^2 + 6$; 3) $z^4 + 5z^2 = 36$;
4) $z^4 + 9z^2 + 14 = 3$; 5) $z^4 + 1 = 2z^2$; 6) $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$.

B

5.61. Квадрат теңдеудің екі түбірі $2 \pm \sqrt{3}i$ бойынша теңдеу құрастырыңдар.

5.62. Комплекс сандар жиынында теңдеуді шешіңдер:

1) $z^2 + 4iz - 13 = 0$; 2) $z^2 - 6iz - 10 = 0$;
3) $z^2 - iz - 0{,}5 = 0$; 4) $z^2 + 8iz - 25 = 0$.

5.63. Теңдеуді комплекс сандар жиынында шешіңдер және көпмүшені сызықтық көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x^2 + x + 1 = 0$; 2) $x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0$;
3) $x^2 + 3x + 4 = 0$; 4) $x^2 - 27 = 0$;
5) $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$; 6) $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0$.

5.64. $3z^3 - 2z^2 + 22z + 40 = 0$ кубтық теңдеуі үшін

1) $1 + 3i$ саны теңдеудің түбірі болатынын көрсетіңдер;

2) теңдеудің жалғыз нақты түбірі болатынын түсіндіріңдер;

3) өзге түбірлерін табыңдар.

5.65. $z = -4$ саны $z^3 + 6z^2 + 12z + 16 = 0$ теңдеуінің түбірі екендігін ескеріп, теңдеудің өзге түбірлерін анықтаңдар.

5.66. $2z^3 - z^2 + 4z + k = 0$ теңдеуінің бір түбірі $z = 1 + 2i$ санына тең.
1) Өзге комплекс түбірін анықтаңдар.
2) Үшінші нақты сан болатын түбірін және k-ның мәнін табыңдар.

5.67. $z = 6$ саны $z^3 - 10z^2 + 37z + p = 0$ теңдеуінің түбірі екенін ескеріп,

1) p-ның мәнін анықтаңдар;

2) теңдеудің қалған түбірлерін анықтаңдар.

5.68. $a = 1 + i$ комплекс саны $z^3 + 3z^2 + pz + q = 0$ теңдеуінің түбірі (мұндағы p және q — нақты сандар). Алдымен a^2 және a^3 сандарын есептеп алып теңдеуге қою арқылы $p = -8$ және $q = 10$ болатынын көрсетіңдер. Теңдеудің өзге екі түбірін табыңдар.

C

5.69. p және q сандары — нақты сандар. $\alpha = 1 + 2i$ саны $z^2 + (p + 5i)z + q(2 - i) = 0$ теңдеуінің түбірі. Нақты p және q сандарын анықтаңдар. Теңдеудің өзге түбірін табыңдар.

5.70. Теңдеуді комплекс сандар жиынында шешіңдер және көпмүшені сызықтық көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x^3 - 6x + 9 = 0$; 2) $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$;
3) $x^3 + 9x - 26 = 0$; 4) $x^3 - 4x + 2 = 0$;
5) $x^3 + 18x + 15 = 0$; 6) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$.

5.71*. $\overline{z}$ саны — z комплекс санының түйіндесі. Мына теңдеуді қанағаттандыратын z санын анықтаңдар:

1) $z^2 + \overline{z} = 0$; 2) $z^2 - \overline{z} = 0$.

5.72. $a = 1 + i$ және $b = 2 - i$ комплекс сандары түбірі болатын төртінші дәрежелі көпмүшені жазыңдар.

5.73. $a = 1 + 4i$ саны $z^3 + 5z^2 + kz + m = 0$ теңдеуінің түбірі (мұндағы k және m — нақты сандар). k коэффициентін табыңдар және $m = 119$ болатынын көрсетіңдер. Теңдеудің қалған түбірін анықтаңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

5.74. Өрнектің таңбасын анықтаңдар:

1) $\sin\dfrac{17\pi}{4}$; 2) $\mathrm{tg}\ 3{,}3\pi$.

«КОМПЛЕКС САНДАР» бөлімінің қорытындысы

$i^2 = -1$ теңдігі орындалатын i саны *жорамал бірлік* деп аталады.

a және b нақты сандар болса, $z = a + bi$ түріндегі санды *комплекс сан*, екі комплекс санның жорамал және нақты бөліктері сәйкесінше тең болса, онда оларды өзара тең комплекс сандар деп атайды.

$z = a + bi$ комплекс санына $\overline{z} = a - bi$ комплекс саны *түйіндес*, ал осы сандар өзара *түйіндес сандар* деп те аталады.

$z \neq 0$ *комплекс санының аргументі* деп оған сәйкес келетін радиус-векторының Ox өсінің оң бағытымен жасайтын бұрышын айтады. Бұрыш сағат тілінің бағытына қарсы бағытта есептелінсе, бұл бұрыш оң таңбамен, ал сағат тілімен бағыттас есептелінсе, теріс таңбамен алынады, $z = a + bi$ комплекс санының аргументі $\varphi = \mathrm{Arg}z$ немесе $\varphi = \mathrm{Arg}(a + bi)$ арқылы белгіленеді.

1°. Қосу амалы:

$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i.$

2°. Азайту амалы:

$z_1 - z_2 = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i.$

3°. Көбейту амалын қолдану үшін жақшаны ашып, $i^2 = -1$ екенін ескерсе, жеткілікті.

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + a \cdot di + bi \cdot c + b \cdot d \cdot i^2 =$
$= ac + adi + bci - bd = ac - bd + (ad + bc)i.$

4°. Бөлу амалы бөлімдегі комплекс санның түйіндесіне көбейту арқылы орындалады, $i^2 = -1$ екенін қолданса, жеткілікті.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Кез келген бүтін k үшін

$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i\ (k \in N).$

Дәрежесі нөлдік емес кез келген көпмүшенің комплекс сандар жиынында кем дегенде бір түбірі болады.

Кез келген n-дәрежелі көпмүшенің комплекс сандар жиынында, еселі түбірлердің барлығын қоса алғанда, тура n түбірі болады.

Терминдер атауының сөздігі

№	Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
1	Жорамал бірлік	Мнимая единица	Imaginary unit
2	Комплекс сан	Комплексное число	Complex number
3	Комплекс сандар жазықтығы (Арган диаграммасы)	Плоскость комплексных чисел (Диаграмма Аргана)	Complex number plane (Argand diagram)
4	Нақты сан	Действительное число	Real number
5	Теңдеудің түбірі	Корень уравнения	Root of the equation
6	Түйіндес сан	Сопряженное число	Conjugate number

ЖАУАПТАР

10-сынып материалдарын қайталау

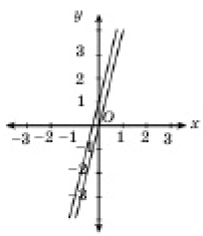
0.1. 1) $(-\infty; -4) \cup (-4; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$; 2) $x \geqslant -1$; 3) R; 4) $x \geqslant 2$. **0.2.** 1) $(3x-2)^2$; 2) $\sqrt{\sin x + 1}$. **0.3.** 1) 2; 2) 0. **0.4.** 1) $\mathrm{tg}^2\alpha$; 2) $\mathrm{tg}5\alpha$; 3) $-\cos\alpha - \sin\alpha$. **0.5** 1) теріс; 2) теріс; 3) 0; 4) теріс. **0.7** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$. **0.8** 1) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$; 3) $x = (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n,\ n \in Z$, 5) $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$. **0.9.** 1) $\left[-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$; 4) $\left(-\frac{\pi}{6} + 4\pi n; \frac{5\pi}{6} + 4\pi n\right)$. **0.10.** 3) $\frac{2}{(x+1)^2}$; 6) $(3 + x^5)\cos x - \left(3x + \frac{x^6}{6}\right)\sin x$. **0.11.** 2) $8(x^2 - 4x + 1)^3(x - 2)$; 5) 1. **0.12.** 1) $\min\limits_{[-1;\,2]} y = -8$; $\max\limits_{-1 \le x \le 2} y = 3$. **0.13.** 2) $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$. **0.15.** 1) $(4; +\infty)$. **0.16.** 1) $(0; 4) \cup (5; +\infty)$; 2) $\left[-3; \frac{13}{5}\right]$. **0.17.** 1) $(-\infty; -2] \cup [2; 4)$. **0.18.** 1) $4 - x$. **0.19.** 1) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$. **0.20.** 1) $4\sin(2,5x)\cos x\cos(0,5x)$. **0.22** 1) $\varnothing$; 2) $\frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. **0.23.** 1) $\left[\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$; 3) $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$. **0.24.** 1) $\frac{\sin(3x-2)}{2\sqrt{x-2}} + 3\sqrt{x-2}\cos(3x-2)$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \times \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$. **0.25.** 1) $x = -1$, II текті үзіліс нүктесі, $x = 5$, I текті үзіліс нүктесі. **0.26.** 1) $\frac{1}{192}$; 3) $-\frac{1}{4}$. **0.27.** 1) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ — функция ойыс, $(-3; 1)$ — функция дөңес. **0.29.** 6840. **0.30.** $\frac{5}{6}; \frac{1}{6}$. **0.32.** 2) $x(x + 1)(x^2 + x + 7)$. **0.33.** $-\frac{28}{45}$. **0.34.** $\sin(\alpha + \beta)$ және $\cos(\alpha - \beta)$ формулаларын қолданып өрнектің мәні тұрақты сан екенін көрсету керек. **0.35.** 1) $\frac{\pi}{2} - x = \sqrt{x}$ теңдеуін шешу керек; 2) $\varnothing$. **0.36.** 2) $\varnothing$. **0.37.** 1) $x = -1$ — вертикаль асимптота, $y = 3x-2$ — көлбеу асимптота. **0.38.** $m = \frac{4}{15}$. **0.41.** $n = 12$.

I бөлім

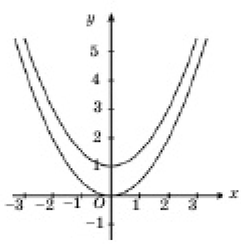
1.3. 1) $F'(x) = \left(2\sqrt{x}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $F'(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + x\right)' = \left(2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + x\right)' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} + 1 = -\frac{1}{x\sqrt{x}} + 1$. **1.4.** 1) $F(x) = x^2 - x + C$; 2) $F(x) = \frac{5}{4}x^4 - 4x + C$; 3) $F(x) = \frac{7}{3}x^3 - 3\sin x - 3x + C$. **1.5.** 1) $\left(\frac{2}{x^3} + C\right)' = \left(2x^{-3} + C\right)' =$

$= 2\cdot(-3)\cdot x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$; 2) $\left(2x^4 - \frac{1}{2x} + C\right)' = 8x^3 + \frac{1}{2x^2}$. **1.6.** 1) $\int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} +$ $+ C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$. Тексеру: $\left(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C\right)' = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = x^{\frac{2}{3}}$; 2) $\int 7x^{\frac{4}{3}}dx = 7\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} +$ $+ C = 3x^{\frac{7}{3}} + C$. Тексеру: $\left(3x^{\frac{7}{3}} + C\right)' = 3\cdot\frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} = 7x^{\frac{4}{3}}$; 3) $\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} +$ $+ C = 2\sqrt{x} + C$. Тексеру: $\left(2\sqrt{x} + C\right)' = 2\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}}$. **1.8.** 1) $f(x) = \frac{5}{2}x^2 -$ $-\frac{1}{x^3} + C$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + C$; 3) $f(x) = \frac{(x-3)^3}{3} + C$; 4) $f(x) = 2x^3 - \frac{2}{x^2} + C$; 5) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{4}{x} + 4x + C$. **1.9.** 1) $\operatorname{tg}x + x + C$; 2) $-\cos x + 3\sin x + C$; 3) $\frac{x^4}{4} + \cos x + C$; 4) $-\operatorname{ctg}x + \frac{3}{2}\sin x + C$; 5) $3\sin x - \operatorname{ctg}x + C$; 6) $x^6 + \frac{1}{2}\cos x + C$. **1.10.** 1) $\frac{x^8}{8} + C$; 2) $\frac{4}{17}x^{\frac{17}{4}} + C$; 3) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$; 4) $\frac{x^3}{3} - 4x + C$; 5) $-8\cos x - 9\operatorname{tg}x + C$. **1.11.** 2) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{3}$; 3) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} - \frac{2}{3}$. **1.12.** 1) $f(x) = x^2 - x + 1$; 2) $f(x) = x^3 - 3x + 4$; 3) $-\frac{3}{x^2} + 7$.

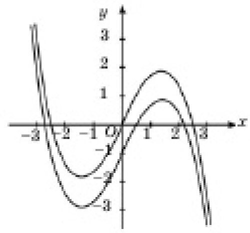
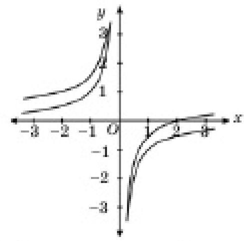
1.13. $(-\infty; +\infty)$ — өспелі.



1.14. $(-\infty; 0)$ — кемімелі; $(0; +\infty)$ — өспелі.



1.15 . $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$ — кемімелі. **1.16.** $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ — өспелі. $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ — өспелі;

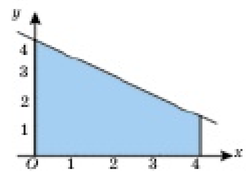
1.17. 1) $F(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{4}{x}+C$; 2) $F(x)=-\frac{4}{\sqrt[3]{x}}+2x^2\sqrt{x}+C$. **1.18.** 1) $\frac{1}{6}y^6+2y^4+$ $+C$. **1.19.** 1) $F'(x)=35x^4+5\cdot 2\cos 3x\cdot(-\sin 3x)\cdot 3=35x^4-15\sin 6x$; 2) $24x^3+$ $+5\cdot 2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2=24x^3+10\sin 4x$. **1.21.** 1) $3x^3-12x^2\sqrt{x}+12{,}5x^2+C$; 2) $6x\sqrt{x}-3x^2+0{,}4x^2\sqrt{x}+C$. **1.22.** 1) $t-\frac{3}{2t}+C$; 2) $2t+\frac{1}{6}t^3+C$. **1.23.** 1) $\frac{2}{3}x^3-$ $-2\sqrt{x}+C$; 2) $4x^2\sqrt{x}+2x\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C$; **1.24.** 1) $F(x)=\sin x+\cos x+$ $+2\sqrt{2}$. **1.25.** 1) $\sin\alpha-\cos\alpha+C$; 2) $\mathrm{tg}x-x+C$. **1.26.** 1) $h(t)=-5t^2+6t+2$; 2) $t=\frac{6+\sqrt{76}}{10}$; 3) $h_{max}(t)=3{,}8$. **1.27.** 1) $\frac{x^2}{2}-x+C$; 2) $\frac{(x+3)^8}{8}+C$. **1.28.** 1) $f(x)=2\sqrt{x}-5$; 2) $3x^2+8x+5$. **1.29.** 1) $F'(x)=x^6-4\sin 2x$; 2) $F'(x)=\frac{6\,\mathrm{arctg}3x}{1+9x^2}$. **1.30.** 1) $F(x)=x$. **1.31.** $f(x)=3x-\frac{1}{10}x^2+7$. **1.32.** 1) $f(x)=$ $=\frac{x^2}{2}-1$; 2) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{3}$. **1.33.** $f(x)=2$; **1.34.** $f(x)=x-1$. **1.35.** $t=10$ с, $s=700$ м. **1.37.** $v_0=10\sqrt{21}$. **1.39.** 1) $y'=(x-1)\cdot[2\sin x+x\cos x-\cos x]$; 2) $y'=\frac{2x\cos 2x}{(1-x^2)^2}-\frac{2\sin 2x}{1-x^2}$. **1.40.** 1) $x_0=1$, $y=0{,}5x-0{,}5$. **1.43** 1) $\frac{10}{9}\sin 9x+C$; 2) $-\frac{7}{4}\cos 4x+C$; 3) $\frac{1}{14}(2x-3)^7+C$; 4) $\frac{1}{42}(7x-9)^6+C$; 5) $\frac{2}{3}\sin 3x+C$; 6) $\frac{1}{18}(3x-8)^6+C$; 7) $\frac{1}{4}\mathrm{tg}4x+C$; 8) $\frac{1}{12}(3x-1)^4+C$; 9) $x+\frac{1}{3}\sin 3x+C$. **1.44** 1) $\frac{1}{12}(3x+2)^4+C$; 2) $\frac{1}{192}(x-2)^6+C$; 3) $-\frac{1}{4(1-2x)^2}+C$; 4) $-\frac{1}{9(3x+1)^3}+C$. **1.45.** 3) $\frac{1}{243}(x+3)^6+C$. **1.46.** 1) $-\frac{1}{2}\mathrm{tg}(1-2x)+C$;

2) $-2\cos\left(1-\frac{x}{2}\right)+C$; 3) $\frac{1}{4}\cos(3-4x)+C$; 4) $-\frac{1}{3}\sin(2-3x)+C$; 5) ctg(4 – – x) + C; 6) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}(4(x+1))+C$; 7) sin3$x$ + C. **1.48.** 1) $\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C$; 2) $\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)+C$; 3) $\frac{1}{8}(4x-\sin 4x)+C$; 4) $\frac{1}{8}(4x+\sin 4x)+C$. **1.49.** 1) sin$xcosx$ + C; 2) tg$x$ + C; 3) –ctg$x$ + C; 4) $-\frac{1}{2}\cos^2 x+C$. **1.50.** 1) $x$sin$x$ + cos$x$ + C; 2) $\frac{1}{4}(\sin 2x-2x\cos 2x)+C$; 3) $\frac{1}{4}(2x\sin 2x+\cos 2x)+C$. **1.51.** 1) $\frac{3\operatorname{tg}(4x-1)}{4}+\cos(2x-3)+5x+C$; 2) $-2x-\frac{5}{4}\sin(7-4x)+\frac{4}{3}\operatorname{ctg}(2-$ $-3x)+C$. **1.52.** 1) $\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+C$; 2) $\frac{1}{16}(2\sin 4x-\sin 8x)+C$; 3) $\frac{1}{16}(4\sin 2x+\sin 8x)+C$; 4) $-\frac{1}{14}(7\cos x+\cos 7x)+C$; 5) $3\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+C$. **1.53.** 1) $\frac{(x+2)^9}{2304}+C$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt{3y^2+1}+C$; 3) $\frac{2\left(1-5x^3\right)}{\sqrt[3]{\left(1-5x^3\right)^3}}+C$; 4) $\frac{1}{1-2x^3}+$ $+C$. **1.54.** 1) $\int x(x+1)^3dx=\left|\begin{matrix}u=x,\ dv=(x+1)^3\\ du=dx,\ v=\dfrac{(x+1)^4}{4}\end{matrix}\right|=\frac{x(x+1)^4}{4}-\frac{(x+1)^5}{20}+C$;

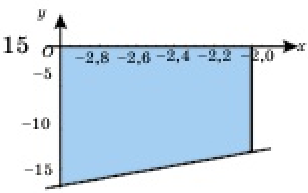
2) $\int(2x+1)\sqrt{x-5}dx=\left|\begin{matrix}x-5=t, & dx=dt\\ x=t+5 & \end{matrix}\right|=\int(2t+11)\sqrt{t}dt=\frac{4t^2\sqrt{t}}{5}+\frac{22t\sqrt{t}}{3}=$ $=\frac{4(x-5)^2\sqrt{x-5}}{5}+\frac{22(x-5)\sqrt{x-5}}{3}+C$. **1.55.** $\int\frac{x^5-3}{x^2}dx=\int x^3dx-\int\frac{3}{x^2}dx=\frac{x^4}{4}+$ $+\frac{3}{x}+C$. **1.56.** 1) $\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x}+C$; 2) $-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+C$; 3) $-3\sqrt[3]{\cos x}$ + C; 4) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\operatorname{tg}x+C$. **1.57.** 1) $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$; 2) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$; 3) $-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+$ C; 4) $\operatorname{tg}^7 x+C$. **1.58.** 1) $\frac{1}{9}\left(2\sqrt{3x-4}-\frac{26}{\sqrt{3x-4}}\right)+C$; 2) $\frac{3\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^5}}{10}-\frac{3\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}}{4}+C$; 3) $-\frac{3x^2-3x+1}{3(x-1)^3}+C$. **1.59.** 1) $\frac{1}{10}\left(\sqrt[3]{(3x+12)^2}\,(8x-33)\right)+$ $+C$; 2) $\frac{4x-5}{4(5-2x)^2}+C$; 3) ln|x – 1| + C; 4) sin(x^2 + x + 4) + C. **1.60.** 1) $\frac{4}{3}\left(\sqrt{\left(\sqrt{t}+1\right)^3}\right)+C$; 2) $\frac{4}{9}\left(\sqrt{\left(\sqrt{t^3}+1\right)^3}\right)+C$. **1.61.** 1) 2$xsinx$ –

$-(x^2-2)\cos x + C$; 2) $\frac{1}{27}\left(\left(9x^3-6x\right)\sin 3x\right)+\left(9x^2-2\right)\cos 3x + C$; 3) $\frac{x\sin 2x}{4}+$ $+\frac{\cos 2x}{8}+\frac{x^2}{4}+C$; 4) $-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}+\frac{x^2}{4}+C$. **1.62.** $-\frac{\cos^6 x}{3}+C$.
1.63. 1) $\frac{3x}{8}+\frac{3\cos x\sin x}{8}+\frac{\cos^3 x\sin x}{4}+C$; 2) $\frac{3x}{8}-\frac{3\cos x\sin x}{8}-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+$ $+C$. **1.64.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$. **1.66.** $-\frac{\sqrt{2}}{36}$. **1.67.** 0. **1.68.** $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **1.74.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1. **1.75.** 1) 2; 2) $\frac{8}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{4}{3}$. **1.76.** 1) $8\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $5\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$. **1.77.** 1) 32; 2) $\frac{5}{2}$; 3) 0; 4) 84; 5) 15. **1.78.** 1) 2; 2) $\frac{4}{3}$; 3) 1; 4) 4. **1.79.** 1. **1.80.** 1) 16; 2) 9. **1.81.** 2) 329; 3) 8; 4) -234; 5) $\frac{16}{15}$; 6) 63. **1.82.** 1) 0; 2) $-10{,}5$; 3) $17\frac{1}{3}$; 4) 2. **1.83.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) $\sqrt{3}$. **1.84.** 1) $\frac{16}{3}$; 2) $\frac{4}{\pi}$; 3) $\frac{4}{\pi}$; 4) 27. **1.85.** 1) $\frac{4\sqrt{2}-1}{2}$; 2) $\frac{20}{3}$; 3) $\frac{32}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$. **1.86.** 1) $\frac{20}{3}$; 2) 16; 3) -2; 4) $-\frac{57}{8}$. **1.87.** 1) 9; 2) 47; 3) $\frac{209}{6}$; 4) $\frac{15}{2}$. **1.88.** 1) π^3; 2) $7-\frac{\pi^3}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{28}{3}$. **1.89.** 1) $-\frac{13}{6}$; 2) $\frac{7}{3}$; 3) $\frac{11}{6}$; 4) $-\frac{74}{3}$. **1.90.** 1) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **1.91.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $3\sqrt{3}-3$; 3) $\frac{10}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{7}{3}$. **1.92.** 1) $\frac{2\sqrt{2}+5\pi}{8}$; 2) $-\frac{2}{5}$; 3) π; 4) $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **1.93.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) $\frac{4+\pi^2}{2}$.

1.95. 1) $\frac{32}{3}$

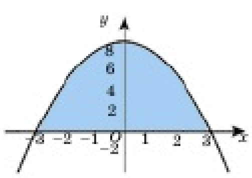


2) 15

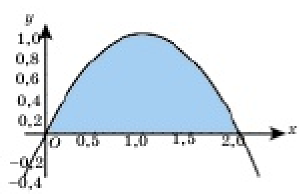


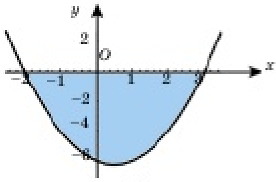
1.96. 1) 0,5; 2) 13,5; 3) 15.

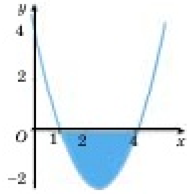
1.97. 1) 36



2) $\frac{4}{3}$



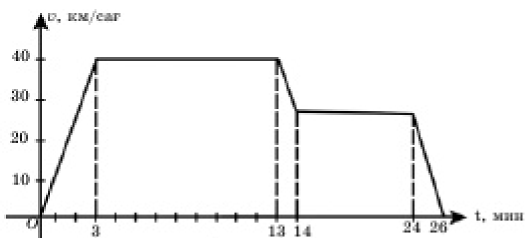
3) $\dfrac{125}{6}$ 

4) $\dfrac{9}{2}$ 

1.98. 1) $\dfrac{10}{3}$; 2) $\dfrac{160}{9}$; 3) $\dfrac{2}{3}$. **1.99.** 1) 16; 2) $\dfrac{500}{3}$. **1.100.** 1) 0.5; 2) 1; 3) ln256; 4) $\dfrac{32}{3}$. **1.101.** 1) 13,5; 2) 4,5; 3) $\dfrac{1}{3}$. **1.102.** 1) $\dfrac{1}{3}$; 2) 18; 3) $\dfrac{1}{6}$; 4) $\dfrac{104}{3}$. **1.103.** 1) $\dfrac{8}{3}$; 2) 9; 3) $\dfrac{125}{6}$; 4) $\dfrac{4}{3}$. **1.104.** 1) $\dfrac{19}{6}$; 2) $37\dfrac{3}{4}$; 3) $\dfrac{32}{3}$; 4) 0.

1.105. 1) $\dfrac{39062}{7}$; 2) $\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{4^9}-\dfrac{1}{5^9}\right)$; 3) $\dfrac{2}{3}$; 4) 8. **1.106.** 1) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{16}$, 2) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{\pi}{6}$; 3) $\dfrac{\pi}{2}$; 4) $\dfrac{\pi}{2}$; 5) $1-\dfrac{\pi}{4}$; 6) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **1.107.** 1) 8,5. **1.108.** 1) 2,5; 2) 5; 3) 10; 4) 2,5. **1.109.** 1) 9; 2) $\dfrac{38}{3}$. **1.110.** 1) $\dfrac{10244}{15}$; 2) $\dfrac{12\sqrt{3}-12-\pi}{3}$. **1.111.** 1) $A=-3C$, B — кез келген сан; 2) $B=0$; A, C — кез келген сандар. **1.112.** 1) $\dfrac{16}{3}$; 2) $\dfrac{2}{7}$. **1.113.** $2\sqrt{2}$. **1.114.** 1) $-85\dfrac{6}{7}$; 6) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}$ **1.120.** 110 м. **1.121.** 1) 4,5; 3) 24. **1.123.** 0,5 м; 1 м. **1.124.** 1) $\dfrac{31}{6}$ м; 1,5 м. **1.125.** 2880 м. **1.126.** 1) 21π; 2) 625π. **1.127.** *а*) 186π; *ә*) $29{,}2\pi$; *б*) 63π. **1.128.** 1) 36π; 2) $\dfrac{127\pi}{7}$; 3) $198{,}4\pi$; 4) 8π. **1.129.** 2) $2\dfrac{2}{3}\pi$; 4) $2{,}5\pi$. **1.130.** 2) $1\dfrac{1}{15}\pi$; 4) $40{,}5\pi$. **1.131.** 12,5 Дж. **1.132.** 1) оң бағыт, теріс бағыт, қозғалмаған; 2) 16 км; 3) 8 км.

1.133.



$s=14\dfrac{5}{12}$ км

1.134. 1) 9 м; 2) 13 м. **1.135.** $\dfrac{1}{12}$ м. **1.136.** 1) $8\dfrac{2}{3}\pi$; 3) $1{,}6\pi$. **1.137.** 2) $\dfrac{128\pi}{7}$; 4) 2π. **1.139.** 2) $\dfrac{16}{15}\pi$. **1.140.** 2 с. **1.141.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ см.

1.142. 1 м. **1.143.** $\frac{16}{3}\pi$ **1.144.** 2) $\frac{25}{4}\pi$; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) $\frac{3}{10}\pi$. **1.148.** 156,8 Дж. **1.149.** $\frac{32}{15}\pi$. **1.150.** $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$. **1.151.** (1;7). **1.152.** $b_1 = \frac{1}{32}$, $n = 7$. **1.153.** 1) ең үлкен мәні: $\sqrt{2}+1$; ең кіші мәні: $-\sqrt{2}+1$; 2) $[-4; 4]$. **1.154.** $\frac{5}{6}\pi$ және $-\frac{7}{6}\pi$.

II бөлім

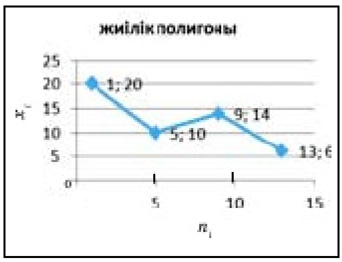
2.1. 1) 3 853 705; 914 657; 2) 264 640; 151 763. **2.2.** $\bar{x} \approx 5{,}17$; $R = 6$; $M_0 = 6$; $M_e = 5{,}5$. **2.3.** 1) таңдалым көлемі 20, $R = 4$; $M_0 = 3$; $M_e = 3$, $\bar{x} = 3{,}15$. **2.4.** Көлемі 15, $R = 8$; $M_0 = 7$; $M_e = 5$, $\bar{x} \approx 5{,}33$.

$x(i)$	2	3	4	5	7	10
n	3	1	2	3	4	2

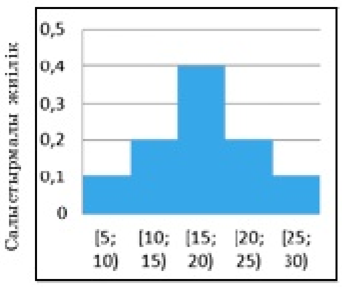
2.6. $M_e = 18$, $\bar{x} \approx 21{,}5$. **2.7.** 1) таңдалым көлемі 50; $M_0 = 1$; $M_e = 5$, $\bar{x} = 5{,}48$. **2.8.** 1) көлемі 40; $M_0 = 9$; $M_e = 9{,}5$; $\bar{x} = 9{,}8$; $R = 8$. **2.9.** $\bar{x} \approx 14{,}8$. **2.10.** 7; 9.

2.11.

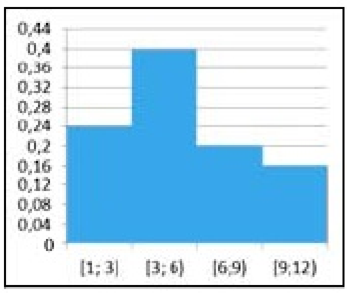
2.12.



2.14.

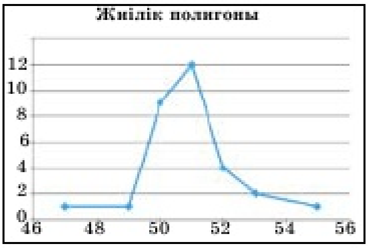


2.15.



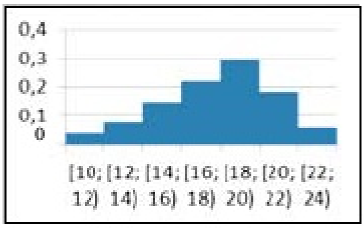
2.16.

2.18. 1)

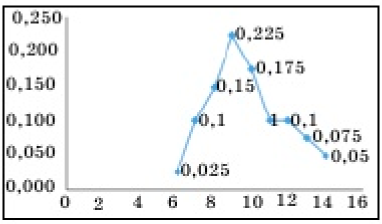


2.19. 2)

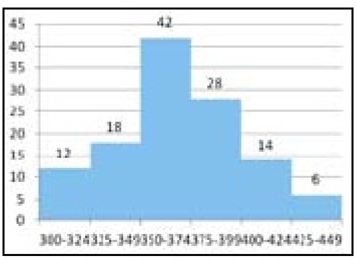
Интер-вал	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22)	[22; 24)
n_i	0,04	0,07	0,15	0,22	0,29	0,18	0,05



2.22.



2.25. 1)



2.29. Тыңайтқышты қолданған бидай масақтары үшін $\bar{x} \approx 6,85$; $D \approx 2,97$; $\sigma \approx 1,72$. Тыңайтқышты қолданбаған бидай масақтары үшін $\bar{x} \approx 5,63$; $D \approx 1,98$; $\sigma \approx 1,41$. **2.30** $\bar{x} = 5,48$; $D \approx 18,3$; $\sigma \approx 4,3$. **2.31.**

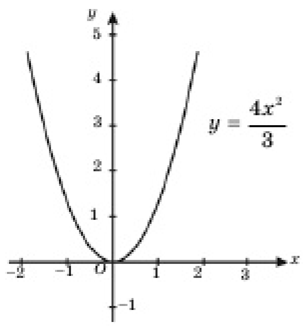
	Орташа ұпай саны	Орташа квадраттық ауытқуы	Орташа ұпай саны бойынша Ерғазы Нұркенмен салыстырғанда мықты болғанымен, Нұркеннің орташа квадраттық ауытқуы аз, яғни ол тұрақтылау
Нұркен	25	24,75	
Ерғазы	30,5	157,75	

2.32 $\bar{x} \approx 6{,}2$; $D \approx 4{,}64$; $\sigma \approx 31{,}91$. **2.33** $\bar{x} \approx 17{,}8$; $D \approx 8{,}39$; $\sigma \approx 2{,}9$. **2.34** $\bar{x} \approx 368{,}67$; $D \approx 1018{,}06$; $\sigma \approx 31261$.

III бөлім

3.1. 4) $\sqrt[3]{4}$; 5) $\pm\sqrt[4]{10}$; 6) $\sqrt[5]{6}$; 7) $-\sqrt[3]{4}$; 8) $\varnothing$; 9) $\pm\sqrt[6]{7}$. **3.2.** 1) Оң; 2) кез келген; 3) теріс. **3.3.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $[2; +\infty)$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $(2{,}5; +\infty)$; 7) $(-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$; 8) $(-\infty; -3] \cup (3; +\infty)$; 9) $(2; 5]$; 10) $(-\infty; -2) \cup \cup (-2; +\infty)$; 11) $(-2; 1] \cup (2: +\infty)$; 12) $(-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$. **3.4.** 1) 2; 2) 3; 3) -5; 4) -4; 5) 7; 6) -2; 7) -81; 8) -1. **3.5.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $1\frac{1}{2}$; 4) 0,3; 5) -2; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-1\frac{1}{2}$; 8) 0,5; 9) 1; 10) -1; 11) $1\frac{1}{2}$; 12) $-0{,}1$. **3.6.** 1) $\sqrt{5} > \sqrt[4]{5}$; 2) $\sqrt{0,5} < \sqrt[4]{0,5}$; 3) $\sqrt[3]{2} > \sqrt[5]{3}$; 4) $\sqrt[3]{0,7} < \sqrt[5]{0,7}$; 5) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{4}$; 6) $\sqrt[4]{3} < \sqrt[4]{5}$; 9) $\sqrt[5]{-0,2} > \sqrt[5]{-0,3}$; 10) $\sqrt[18]{\frac{4}{7}} > \sqrt[18]{0,57}$. **3.7.** 1) 6; 2) 10; 3) 1,5; 4) 15; 5) 0,5; 6) $\frac{10}{3}$; 7) 6; 8) 0,6. **3.8.** 1) $2\sqrt{a}$; 2) $5a\sqrt{2a}$; 3) $2\sqrt[4]{a}$; 4) $3a\sqrt{a}$; 6) $3a$; 7) $a\sqrt[3]{5a}$. **3.9.** 1) $\sqrt{12}$; 2) $\sqrt[3]{40}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{45}$; 5) $\sqrt{18}$; 6) $\sqrt[3]{250}$; 7) $\sqrt[5]{4}$; 8) $\sqrt[4]{5b^4}$. **3.10.** 1) +; 2) +; 3) −; 4) +; 5) +; 6) +; 7) +; 8) −; 9) +. **3.11.** 1) $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{0,35}$; $\sqrt[4]{0,15}$; 3) $\sqrt[3]{0,3}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[5]{0,2}$; 4) $5\sqrt{0,1}$; $3\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$; $2\sqrt[6]{\frac{1}{3}}$.
3.12. 1) $2\frac{2}{5}$; 2) $\frac{3}{10}$; 3) $\frac{45}{49}$; 4) $1\frac{7}{20}$. **3.13.** 1) $4x\sqrt{y}$; 2) $3b\sqrt[4]{b}$; 3) $5ax\sqrt[3]{a^2}$; 4) $4b^4y^2\sqrt[3]{y}$. **3.14.** 1) $\sqrt{5a}$; 2) $\sqrt[3]{8x}$; 3) $\sqrt[4]{3b}$; 4) $\sqrt[5]{2c}$. **3.17.** 1) $\frac{\sqrt[3]{75}}{5}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$; 3) $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1$; 4) $\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}$. **3.18.** 1) $2\sqrt[3]{x}$; 2) $\frac{a}{2}\frac{\sqrt[4]{a-1}\sqrt{a-1}}{a+2}$.
3.19. 1) $\frac{\sqrt[6]{a}}{3}$; 2) 1. **3.20.** $2\sqrt{2}$.

3.21.



3.24. 1) $\sqrt[5]{7^3}$, $\sqrt[7]{5}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 2) $3\sqrt{x}$, $\sqrt{3x}$, $\frac{1}{5}\sqrt[5]{y}$, $-\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{6,25}}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{0,5}$; 4) $\sqrt[3]{(ab)^2}$, $a\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[3]{(a+b)^2}$, $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$; 5) $\sqrt{a}$, $b\sqrt[5]{b}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{c^3}}$, $\frac{1}{\sqrt{d}}$; 6) $\frac{x}{y\sqrt{y}}$, $\frac{4}{(x-y)\sqrt{x-y}}$, $\frac{2x}{\sqrt[8]{x+y}}$; 7) $5\sqrt[3]{x^2}$, $\frac{7}{a\sqrt{a}}$, $a\sqrt[8]{b^5}$, $\sqrt[3]{(x+y)^2}$; 8) $-\frac{3}{\sqrt{y}}$, $-\frac{1,2}{b\sqrt[5]{b}}$, $\sqrt[8]{(ab)^5}$, $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}$. **3.25.** 1) $ax^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x$; 2) $y^{\frac{1}{3}}+e^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$; 3) $a+2a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}-2$; 4) $x^{-1}-3x^{-\frac{3}{4}}+2x^{-\frac{1}{4}}+6$; 5) $1-b$; 6) $4-y^3$. **3.26.** 1) 10; 2; $\frac{10}{19}$; 2) 0; 16; $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{1}{3}$; 27; 8; 4) $\frac{1}{7}$; 2; 7; 5) 2; 0,3; $\frac{1}{5}$. 6) 0,01; 2; 100.

3.27. 1) $c^{\frac{5}{6}}$; 2) $b^{\frac{1}{6}}$; 3) $x^{-0,2}$; 4) $a^{\frac{15}{6}}$; 5) y^3; 6) $a^{\frac{1}{6}}$; 7) $a^{\frac{2}{3}}$; 8) $x^{-\frac{1}{4}}$; 9) $y^{\frac{1}{2}}$; 10) $x^{\frac{1}{2}}$; 11) $a^{\frac{5}{2}}$; 12) $b^{-\frac{4}{5}}$. **3.28.** 1) 1; 2) $3^{0,8}$; 3) 2; 4) 25; 5) 9; 6) 32; 7) 6; 8) $\frac{1}{6}$; 9) 70; 10) 15. **3.29.** 1) $4p^{\frac{2}{3}}-q^{-2}$; 2) $1+2b^{\frac{1}{2}}+b$; 3) $x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$; 4) $a+2a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}+b^{-1}$; 5) $a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$; 6) $x^{-2}-2x^{-1}y^{\frac{1}{2}}+y$. **3.30.** 1) $\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)$; 2) $\left(y^2-\sqrt{5}\right)\left(y^2+\sqrt{5}\right)$; 3) $\left(x^{\frac{1}{3}}-2\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)$; 4) $\left(y^{\frac{1}{5}}-3\right)\left(y^{\frac{1}{5}}+3\right)$; 5) $\left(5-p^{\frac{2}{7}}\right)\times\left(5+p^{\frac{2}{7}}\right)$; 6) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{4}}\right)$. **3.31.** $\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)$; 2) $\left(\sqrt{10}-\sqrt{y}\right)\times\left(\sqrt{10}+\sqrt{y}\right)$; 3) $\left(a^{\frac{1}{32}}-4\right)\left(a^{\frac{1}{32}}+4\right)$; 4) $(3c^{0,15}-2)(3c^{0,15}+2)$; 5) $(a^{0,75}-y)(a^{0,75}+y)$; 6) $\left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{8}}-7\right)\left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{8}}+7\right)$. **3.32.** 1) $\left(x^{\frac{1}{2}}-2\right)\left(x+2x^{\frac{1}{2}}+4\right)$; 2) $\left(y^{\frac{1}{2}}+3\right)\times\left(y-3y^{\frac{1}{2}}+9\right)$; 3) $\left(p^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(p^{\frac{2}{3}}-p^{\frac{1}{3}}+1\right)$; 4) $\left(q^{\frac{2}{5}}-5\right)\left(q^{\frac{4}{5}}+5p^{\frac{2}{5}}+25\right)$; 5) $\left(5-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(25+5b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$; 6) $\left(y^{\frac{1}{3}}-\sqrt{2}\right)\left(y^{\frac{2}{3}}+\sqrt{2}y^{\frac{1}{3}}+2\right)$; 7) $\left(a^{0,3}-2b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{0,6}+2a^{0,3}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$; 8) $\left(x^{\frac{1}{3}}+10\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-10x^{\frac{1}{3}}+100\right)$; 9) $\left(a^{0,8}+b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{0,16}-a^{0,8}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}\right)$.

3.33. 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{7}{8}}$; 6) $\frac{1}{cy}$; 7) $a^{\frac{31}{30}}x^{-\frac{4}{45}}$; 8) q. **3.34.** $(x^3)^2$; $(x^{20})^2$; $\left(x^{\frac{23}{2}}\right)^2$; $(x^{-7})^2$; $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^2$; $\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^2$; $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2$; $\left(x^{\frac{1}{8}}\right)^2$; $\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2$; $\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2$. **3.35.** $(y^2)^3$;

$(y-7)^3$; $\left(y^{\frac{7}{3}}\right)^3$; $\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3$; $\left(y^{\frac{1}{6}}\right)^3$; $\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^3$; $\left(y^{-\frac{1}{9}}\right)^3$; $\left(y^{\frac{1}{15}}\right)^3$; $\left(y^{-\frac{3}{10}}\right)^3$. **3.36.** 1) 5; 2) 2. **3.37.** 1) $x=y^{\frac{3}{2}}$; 2) $x=y^{\frac{7}{4}}$; 3) $x=y^{-\frac{2}{3}}$; 4) $x=y^{-\frac{4}{3}}$; 5) $x=\left(\frac{y}{5}\right)^{\frac{5}{4}}$; 6) $x=(6y)^{-\frac{3}{2}}$. **3.38.** 1) 1; 2) x. **3.39.** 1) $1+C$; 2) $-2b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{4}}$; 3) $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}$; 4) $4a^{0,2}x^{0,2}$; 5) $x-y$; 6) $b^{\frac{3}{2}}-c^{\frac{3}{2}}$. **3.40.** 1) $x=25$; 2) $x=8$; 3) $x=9$; 4) $x=\frac{1}{32}$; 5) $x=1$; 6) $x=-25$. **3.41.** 1) $p+q$; 2) $b^6-2b^3c^3+c^6$; 3) $\left(a^{\frac{1}{3}}+2\right)^3$; 4) $\left(x^{\frac{2}{3}}-3\right)^3$. **3.42.** 1) $-2,7m^{\frac{1}{2}}$; 2) $-240x^{0,1}$. **3.43.** 1) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}+1\right)$; 2) $\left(u^{\frac{1}{2}}-v^{\frac{1}{2}}\right)\left(u^{\frac{1}{2}}+v^{\frac{1}{2}}+1\right)$; 3) $\left(a^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1\right)$; 5) $\left(x^{\frac{1}{2}}+4\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)$; 6) $\left(y^{\frac{1}{4}}-9\right)\left(y^{\frac{1}{4}}-4\right)$. **3.44.** 1) $\left(x^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+1\right)$; 2) $\left(x^{\frac{1}{5}}-1\right)\times$ $\times\left(x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{1}{5}}+1\right)$; 3) $\left(x^{\frac{1}{6}}-1\right)\left(x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}+1\right)$. **3.45.** 1) $x=\frac{1}{y}$; 2) $x=y^2$; 3) $y=\frac{2\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$; 4) $y=\frac{4^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}}{3}$. **3.46.** $\frac{a-1}{2}$. **3.47.** 1) $(-2;-1)\cup(0;+\infty)$; 2) $\left(-2;-\frac{4}{5}\right)\cup(0;1)$.

3.48. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$ $=\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}$. **3.49.** 3) $3^{\frac{1}{2}}$; 5) $250^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{3}{2}}$; $(x+1)^{\frac{9}{4}}$;

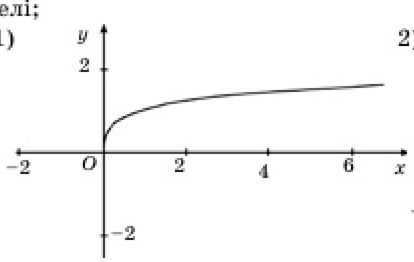
3.50. 1) $x^{\frac{1}{6}}$; 3) $y^{\frac{-1}{21}}$; 6) $x^{\frac{1}{4}}$; 7) $x^{\frac{1}{2}}$; 9) 1. **3.51.** 1) $\frac{5\sqrt[3]{16}}{4}$; 2) $\frac{2\sqrt[4]{27^3}}{3}$; 4) $-\frac{2\sqrt[3]{49^2}}{49}$; 6) $-\frac{7}{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$; 8) $\frac{20}{11}\left(\sqrt{20}+\sqrt{9}\right)$. **3.52.** 1) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$;

3) $4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$. **3.53.** 1) $\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{b}$; 4) $\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{ab^3}+b$. **3.54.** 1) $\dfrac{27+3\sqrt{2}-9\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}}{79}$;

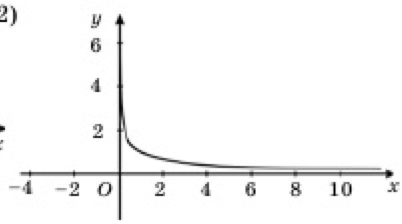
3) $\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}\right)\left(9+3\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}\right)}{9}$; 5) $\left(\sqrt[8]{5}-\sqrt[8]{3}\right)\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$; 6) $\dfrac{1}{3}\left(1-\sqrt[4]{2}\right)\times$

$\times\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)$. **3.55.** $x^2\sqrt[3]{y}$. **3.57.** 2) -1; **3.58.** Нұсқау: теңдіктің екі жағын квадраттау керек. **3.59.** 1) -2017. **3.60.** 2) a^6-b^6. **3.61.** 2) $(-3;\ 1)$, $(3;\ -1)$. **3.62.** $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{0}$; $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-\frac{7}{11}}$; $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$. **3.63.** 4) $0{,}01^{-0,5}<0{,}01^{-0,6}$. **3.64.** 1) өспелі;

3.65. 1)

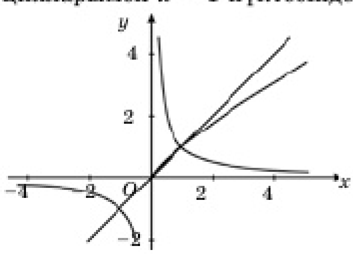


2)



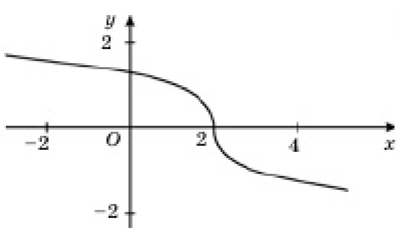
3.66. 1) <; 4) <. **3.67.** 1) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-0,2}<\left(\dfrac{3}{2}\right)^{0,2}<\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$; 4) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(\dfrac{125}{8}\right)^{-\frac{1}{15}}<\left(\dfrac{4}{25}\right)^{-4}$.

3.68. 1) өспелі; 3) өспелі; **3.69.** $y=x^{\sqrt{\frac{2}{3}}}$ функциясы $y=x$ және $y=\dfrac{1}{x}$ функцияларымен $x=1$ нүктесінде қиылысады.

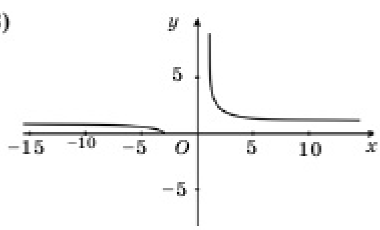


3.70. 1) $3\sqrt[4]{8}$; 4) $3\sqrt{2}$. **3.71** 1) 4.

3.73. 1)



3)



3.74. $|f(x)|$. **3.77.** $2\sqrt{a-1}$. **3.78.** 1) 1. **3.81.** Болмайды. **3.83.** 1) $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

3.84. 2) $\frac{2}{3t^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3t^{\frac{2}{3}}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$. **3.85.** 1) 0,5; 4) -1. **3.87.** 3) $-\frac{8}{3}x^{-\frac{3}{2}} + C$;

4) $5x^{\frac{7}{5}} + C$. **3.88.** 1) $2x^{\frac{3}{2}} + C$; 3) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$. **3.90.** 2) $10x^{1,4} + C$. **3.92.** 1) $\frac{26}{5\sqrt[5]{4}}$.

3.93. 2) $\frac{4}{17}x^{\frac{17}{4}} + C$; 3) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$. **3.94.** 1) $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} + C$;

3) $4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{7}{2}} + C$. **3.95.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt[3]{x} - \frac{4}{6}$. **3.96.** 2) $-\frac{4}{x^{\frac{1}{3}}} + 2x^{\frac{5}{2}} + C$.

3.97. 4) $-\frac{8}{9}x^2\sqrt[4]{x} + C$; 6) $\frac{4}{\sqrt[3]{x}} + C$. **3.98.** $\frac{4}{3}$. **3.99.** 2) 8. **3.100.** 1) +; 2) +;

3) +; 4) 0. **3.101.** $\frac{513}{16}$.

IV бөлім

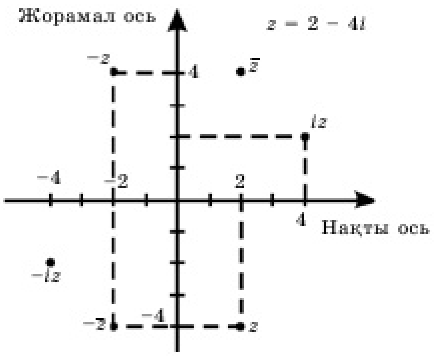
4.2. 1) иә; 2) жоқ; 3) иә; 4) иә. **4.3.** 1) жоқ; 2) иә; 3) жоқ. **4.4.** 1) $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 3) R; 4) $[-2; +\infty)$. **4.5.** 1) $[4; +\infty)$; 2) $x = 0$. **4.6.** 1) -3; 3; 2) -6; 6; 3) -6; 6; 4) -18. **4.7.** 1) 3; 2) 3; 3) 5; 4) 8. **4.8.** 1) $2+\sqrt{2}$; 2) 4; 3) 5; 4) 10. **4.9.** 1) 1; 3; 2) 5; 3) 0; 3; 4; 4) 2; 4. **4.10.** 1) (27; -1); 2) (4; 64); 3) (16; 81); 4) (20; 5). **4.11.** 1) 3; 2) 5; 3) 10; 4) 0; 0,4. **4.12.** 1) 61; 2) 4; 3) -2; 4) 3. **4.13.** 1) 4; 2) 7; 3) 6; 4) -12. **4.14.** 1) (9; 1); 2) (-2; 4). **4.15.** 1) 84; 2) 0; 3) 630; 4) -2; 2. **4.16.** 1) 0; 2) 0; 3) 7; 8; 4) 1. **4.17.** 1) $\varnothing$; 2) 4; 3) 1; 4) 2. **4.18.** 1) -6; -1; 2) 0; 1; 3) 1; 4) $-1\frac{1}{3}$; 5) -1; 4; 6) $-4{,}5$; 3. **4.19.** 1) $\frac{5}{3}$; 3) $-1{,}25$; 4) $\frac{1}{3}$. **4.20.** 2) (4; 4). **4.21.** 1) (2; 4). **4.23.** 1) $\varnothing$; 2) [2; 3]. **4.25.** 1) $4\pi n$. **4.26.** $a \in [-3-2\sqrt{6}; -3] \cup \{5\}$. **4.28.** 1) $[-3; 1]$; 2) [3; 28); 3) $[3; +\infty)$; 4) [-5; 11). **4.29.** 1) [5; 7). **4.30.** 1) $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right]$; 2) $\varnothing$; $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$; 4) $(18; +\infty)$. **4.31.** 1) $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 2) $(-\sqrt{14}; \sqrt{14})$. 3) $(-\infty; -8) \cup (-2; +\infty)$. **4.32.** 1) $(-5{,}25; -3] \cup [-1{,}25; 1)$; 2) $(-\infty; -2{,}5) \cup$ $\cup\, (3; +\infty)$; 3) $(-1; 0] \cup [1; 2)$; 4) [0; 6]. **4.36.** 1) $(-\infty; 3)$; 2) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{3}{4}; 2\right]$; 4) $\{1\}$. **4.37.** 1) [0; 3]; 2) $(3; +\infty)$. **4.38.** 1) $\varnothing$; 2) $\left[-18; \frac{-3+\sqrt{65}}{2}\right)$.

4.39. 1) $[16 - a; +\infty)$; 2) $\left[-\dfrac{a}{2}; +\infty\right]$. **4.40.** 1) $\left[-3; \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$; 2) $(3 - \sqrt{13};$ $3 + \sqrt{13})$. **4.42.** $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

V бөлім

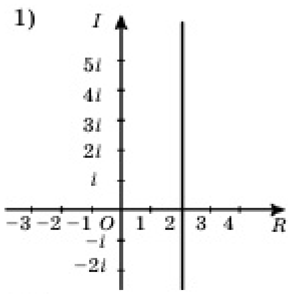
5.3. 1) 2; – 4; $2 - 3i$. **5.4.** 1) $9i$; 2) $0{,}25i$. **5.5.** 1) 5; 2) 13. **5.6.** 1) $\sqrt{13}$; 2) 4.
5.7. 1) (– 2; 1); (1; – 2); (2; 1); (1; 2). **5.8.** 1) (1; 4); (– 1; 4).

5.9.

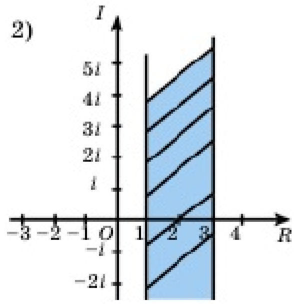


5.10. $|z_1| = 2$; $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}$; $|z_2| = 2\sqrt{2}$; $\varphi_2 = -\dfrac{3\pi}{4}$.

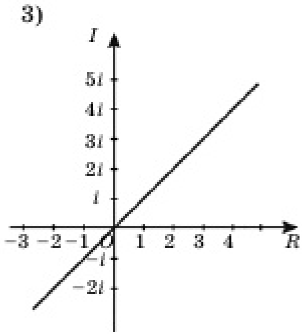
5.14. 1)



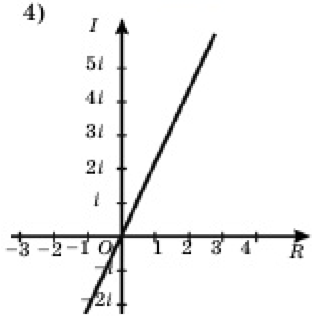
2)



3)

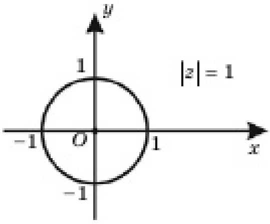


4)

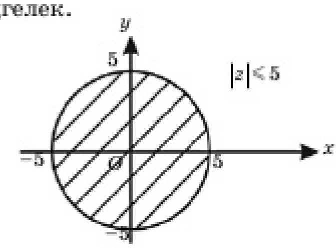


5.15. 1) центрі координаталар басында және радиусы 5-ке тең шеңбер; 2) центрі координаталар басында және радиусы 6-ға тең дөңгелек; 3) центрі (2;1) және радиусы 3-ке тең дөңгелек.

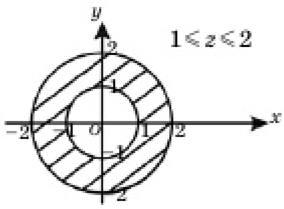
5.16. 1)



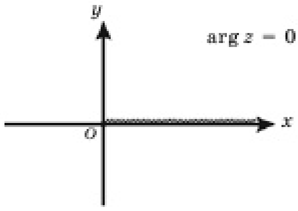
2)



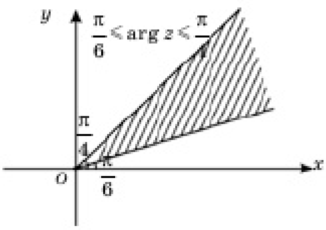
3)



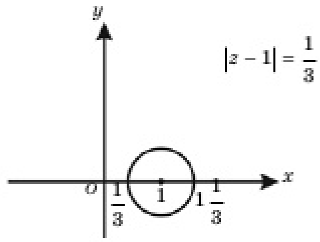
4)



5)



6)



5.19. 1) $10i + 14$; 4) $21i + 12$. **5.20.** 3) $40 + 42i$; 5) $43 + 76i$. **5.21.** 1) $8 + i$; 4) 0; 5) -39. **5.22.** $p = \frac{3}{25}$; $q = -\frac{4}{25}$. **5.23.** 1) $\mathrm{Re}(Z) = \frac{5}{169}$, $\mathrm{Im}(Z) = -\frac{12}{169}$; 4) $\mathrm{Re}(Z) = \frac{6}{37}$, $\mathrm{Im}(Z) = \frac{1}{37}$. **5.24.** 1) $a = 5$; $b = 2$; 4) $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ және $a = b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. **5.25.** 1) $0{,}5i + 2{,}5$; 4) $\frac{11}{10}i + \frac{4}{5}$. **5.26.** 1) $-\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$. **5.27.** 1) $-2-2i$; 4) $-0{,}25+0{,}25i$. **5.28.** 1) ± 2; 2) $\pm 2i$; 3) $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i\right)$; 4) $\pm\left(-\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}i\right)$. **5.31.** 1) $x = 1$; $y = 2$; 2) $x = 3$; $y = -2$. **5.32.** 1) $\pm(4 - 3i)$; 2) $\pm(16 - 2i)$. **5.33.** 1) i; 2) i; 3) $0{,}15i$. **5.34.** 3) $-\frac{3}{58} - \frac{7}{58}i$; 4) $-i$. **5.35.** $-i$, -1, i; егер $n = 4k + 1 \Rightarrow \frac{1}{i^n} = -i$; егер $n = 4k + 2 \Rightarrow \frac{1}{i^n} = -1$; егер $n = 4k + 3 \Rightarrow \frac{1}{i^n} = i$; егер $n = 4k \Rightarrow \frac{1}{i^n} = 1$.

5.36. 1) $-2-3i$; 2) $\frac{pr+qs}{r^2+s^2}+\frac{qr-ps}{r^2+s^2}i$. **5.37.** 1) $-0{,}2i$; 2) $-7i+3$. **5.38.** 1) $4-4i$. **5.39.** 1. **5.43.** 1) $1\frac{5}{13}-\frac{i}{13}$; 2) $0{,}72+0{,}96i$. **5.44.** 1) $x=1\frac{1}{3}$; $y=1\frac{2}{3}$; 4) $x=10$; $y=6$. **5.45.** 1) $-64(i+1)$; 2) -1. **5.46.** 2) $x=1$; $y=2$; 3) $x=0$; $y=-\frac{2}{3}$. **5.47.** 1) $z=2-i$. **5.48.** $z=-1\pm\sqrt{3}\,i$. **5.50.** 4) $a=-7$; $b=11$. **5.51.** Нұсқау: теңдеудің екі жағын квадраттау керек. **5.54.** 1) $x=\pm 3i$; 4) $x=\pm 5$. **5.55.** 1) 0; ± 2. **5.56.** 1) $\pm\sqrt{2}$; $\pm i\sqrt{3}$; 3) ± 3; $\pm 3i$. **5.57.** 1) $5\pm 2i$; 2) $-3\pm 4i$. **5.58.** 3) $(x-\sqrt{7}\,i)(x+\sqrt{7}\,i)$. **5.59.** 1) -1; $\pm i$; 6) $-2\pm\sqrt{2}\,i$. **5.60.** 1) ± 1; $\pm\sqrt{3}\,i$; 6) $\pm i$. **5.61.** $z^2-4z+7=0$. **5.62.** 1) $z=-2i\pm 3$; 2) $z=3i\pm 1$. **5.63.** 1) $\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; 2) $(x-1)(x+1-\sqrt{3}\,i)(x+1+\sqrt{3}\,i)$. **5.64.** $z_1=1+3i$; $z_2=1-3i$; $z_1=-\frac{4}{3}$. **5.65.** $-1\pm\sqrt{3}\,i$. **5.66.** 1) $1-2i$; 2) $z=-1{,}5$; $k=15$. **5.67.** 1) $p=-78$; 2) $2\pm 3i$. **5.68.** 2) $z_2=1-i$; $z_3=-5$. **5.69.** $p=-1$; $q=7$; $z_2=1-2i$. **5.70.** 1) $(x+3)\left(x-\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right)$. **5.71.** 2) $z_1=0$; $z_2=-1$; $z_{3/4}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

МАЗМҰНЫ

10-СЫНЫП МАТЕРИАЛДАРЫН ҚАЙТАЛАУ

I бөлім. АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛ

II бөлім. МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКАНЫҢ БАСТАПҚЫ ТҮСІНІКТЕРІ

III бөлім. ДӘРЕЖЕЛЕР ЖӘНЕ ТҮБІРЛЕР. ДӘРЕЖЕЛІК ФУНКЦИЯ

IV бөлім. ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР

V бөлім. КОМПЛЕКС САНДАР

Оқу басылымы

Шыныбеков Әбдухали Насырұлы
Шыныбеков Данияр Әбдухалиұлы
Жұмабаев Ринат Нұрланұлы

АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

ЕКІ БӨЛІМДІ

1-БӨЛІМ

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныпқа арналған оқулық

Редакторы *Ж. Баданова*
Көркемдеуші редакторы *А. Искаков*
Корректор *Е. Амангелді*
Техникалық редакторы *Ү. Рысалиева*
Компьютерде беттеген *Е. Огурцова*

ИБ 077

Теруге 25.03.2019 берілді. Басуға 10.06.2020 қол қойылды.
Пішімі 60х90 $^{1}/_{16}$. Офсеттік қағаз. Шартты баспа табағы 12,0.
Есептік баспа табағы 8,8. Таралымы 13000 дана. Тапсырыс 5167.

«Атамұра» корпорациясы» ЖШС, 050000, Алматы қаласы, Абылай хан даңғылы, 75.

Қазақстан Республикасы «Атамұра» корпорациясы» ЖШС-нің
Полиграфкомбинаты, 050002, Алматы қаласы, М.Мақатаев көшесі, 41.

Оглавление

page34
page35
page36
page37
page38
page39
page40
page41
page42
page43
page44
page45
page46
page47
page48
page49
page50
page51
page52
page53
page54
page55
page56
page57
page58
page59
page60
page61
page62
page63
page64

page69
page70
page71
page72
page73
page74
page75
page76
page77
page78
page79
page80
page81
page82
page83
page84
page85
page86
page87
page88
page89
page90
page91
page92
page93
page94
page95
page96
page97
page98
page99

page104
page105
page106
page107
page108
page109
page110
page111
page112
page113
page114
page115
page116
page117
page118
page119
page120
page121
page122
page123
page124
page125
page126
page127
page128
page129
page130
page131
page132
page133
page134

page139
page140
page141
page142
page143
page144
page145
page146
page147
page148
page149
page150
page151
page152
page153
page154
page155
page156
page157
page158
page159
page160
page161
page162
page163
page164
page165
page166
page167
page168
page169

page174
page175
page176
page177
page178
page179
page180
page181
page182
page183
page184
page185
page186
page187
page188
page189
page190
page191
page192