А. Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д. А. ШЫНЫБЕКОВ, Р. Н. ЖУМАБАЕВ

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА АНАЛИЗА

В двух частях

Часть 1

Учебник для 11 класса общеобразовательной школы
естественно-математического направления

11

Рекомендовано Министерством образования и науки
Республики Казахстан

Алматы «Атамұра» 2020

1–5101

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72
Ш 98

Учебник подготовлен в соответствии с Типовой учебной программой обновленного содержания по предмету «Алгебра» для 11 класса уровня общего среднего образования, утвержденной Министерством образования и науки РК.

Под редакцией **М. Отелбаева** – доктора физико-математических наук, профессора, академика НАН Республики Казахстан

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Вопросы по основным материалам

Материалы из истории математики

Практические, прикладные и творческие работы

A Задачи первого уровня сложности

B Задачи второго уровня сложности

C Задачи третьего уровня сложности

* Задачи повышенной трудности, материал для классов с углубленным изучением математики

▲ Начало решения задачи, доказательства теоремы

■ Конец решения задачи, доказательства теоремы

Шыныбеков А.Н. и др.
Ш 98 **Алгебра и начала анализа:** Учебник для 11 кл. общеобразоват. шк. ест.-мат. направления: в 2 ч. / А. Н. Шыныбеков, Д. А. Шыныбеков, Р. Н. Жумабаев. – Алматы: Атамұра, 2020. – 192 с.

ISBN 978-601-331-741-0

ч. 1 – 2020. – 192 с.
ISBN 978-601-331-743-4

ISBN 978-601-331-743-4 – (ч. 1)
ISBN 978-601-331-741-0

ВВЕДЕНИЕ

Данный учебник, предназначенный для учащихся 11 класса средней общеобразовательной школы, составлен в соответствии с обновленной учебной программой и охватывает все цели обучения. Для эффективного использования учебного времени даются ссылки на онлайн-ресурсы (графические онлайн-калькуляторы, учебные программы). Заметим, что материалы, включенные в программу для классов с углубленным изучением математики, отмечены звездочкой (*). Кроме того, задачи группы С также в первую очередь предназначены для учеников классов с углубленным изучением математики. Ученики, проявляющие повышенный интерес к математике, могут выполнять данные задания самостоятельно во внеучебное время. Это особенно важно для учеников, которые принимают участие в математических олимпиадах и других конкурсах.

Пользуясь этим учебником, нужно придерживаться следующих принципов: в конце каждого раздела вам необходимо выполнить задания для закрепления пройденного материала. Каждый ученик должен изучить и выполнить задания группы А, и только после этого переходить по очереди к решению задач групп В и С. Кроме того, после изучения каждого раздела полезно проверять себя, отвечая на контрольные теоретические вопросы.

Любознательность, упорство и самоотдача приведут вас к успеху!

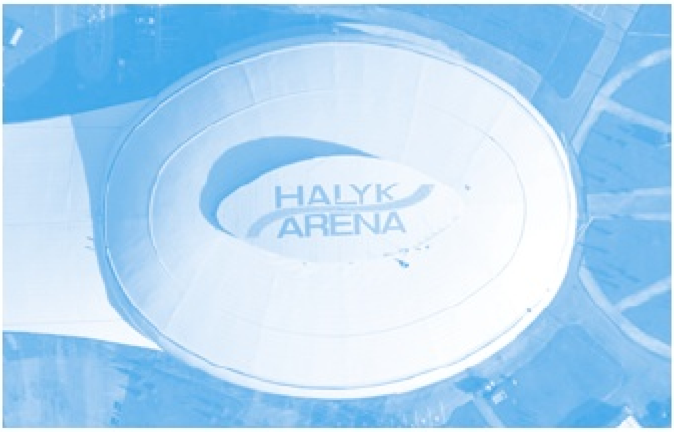
Работа с графическим онлайн-калькулятором (https://www.desmos.com/calculator)

Desmos – это графический онлайн-калькулятор, полезный тем, кому необходимо быстро и просто построить график функции.

Полное руководство по работе с графическим калькулятором можно бесплатно скачать, перейдя по следующей ссылке:

https://desmos.s3.amazonaws.com/Desmos_User_Guide_RU.pdf

Раздел-повторение. ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИАЛА, ПРОЙДЕННОГО В 10 КЛАССЕ



Вид сверху на ледовый дворец «Halyk Arena».
Крышей дворца является геометрическая фигура – эллипс.

С математикой мы встречаемся везде, на каждом шагу. Без математики нельзя изучить ни физику, ни химию, ни географию, ни черчение. Без математики невозможно представить себе развитие экономики и бухгалтерии, информатики и программирования. Математика включает и геометрию, которая необходима архитекторам и конструкторам, и высшую математику, которая необходима для инженеров. Математика неисчерпаема. Одних покоряет ее логическая стройность, другие ценят в ней точность, а третьи восхищаются ее красотой.

В данном разделе:

- вы повторите материал, пройденный в 10 классе;
- подготовитесь к освоению нового материала.

Упражнения

А

0.1. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+4} - \dfrac{x+4}{2x-3}$; 2) $f(x) = \sqrt{x+1}$;

3) $f(x) = \sqrt{|x|+1}$; 4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x+2}$.

0.2. Запишите сложную функцию $f(g(x))$:

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x - 2$;

2) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \sin x$;

3) $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2 - 2x - 3$;

4) $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$.

0.3. Найдите значение выражения:

1) $4\cos 45^\circ \cdot \sin 135^\circ$;
2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sin\dfrac{\pi}{3}$;

3) $\sin 420^\circ \cdot \cos 600^\circ$;
4) $\sin\dfrac{5\pi}{6}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{7\pi}{3}$.

0.4. Упростите тригонометрическое выражение:

1) $\dfrac{3\mathrm{tg}^2(\alpha + 3\pi) - 1}{3 - \mathrm{tg}^2\left(\alpha + \dfrac{5\pi}{2}\right)}$;
2) $\dfrac{\mathrm{tg}2\alpha + \mathrm{tg}3\alpha}{1 - \mathrm{tg}2\alpha\,\mathrm{tg}3\alpha}$;

3) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$;
4) $\dfrac{\sin 3\alpha - \sin\alpha\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha + \sin\alpha}$;

5) $\cos^4\dfrac{\alpha}{2} - \sin^4\dfrac{\alpha}{2} - \cos\alpha$;
6) $\cos^4\alpha(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) + \sin^2\alpha$.

0.5. Определите знак выражения:

1) $\sin 138^\circ + \cos 50^\circ$;
2) $\sin\dfrac{7\pi}{5} - \sin\dfrac{17\pi}{10}$;

3) $\sin\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $\mathrm{tg}3{,}14 - \mathrm{tg}\pi$.

0.6. Постройте график тригонометрической функции и проверьте результат с помощью онлайн-калькулятора https://www.desmos.com/calculator:

1) $y = 2\sin x$;
2) $y = \cos 2x$;

3) $y = \mathrm{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$;
4) $y = \mathrm{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

0.7. Вычислите:

1) $\cos\left(2\arcsin\dfrac{1}{2}\right)$;
2) $\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}3)$;

3) $\mathrm{ctg}(2\,\mathrm{arcctg}2)$;
4) $\sin(\mathrm{arctg}3)$.

0.8. Решите уравнение:

1) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0$;

3) $6\sin x - 5 = 0$; 4) $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$;

5) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; 6) $\operatorname{tg} 3x = 9$.

0.9. Решите неравенство:

1) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x + 0{,}5 < 0$;

3) $3\operatorname{tg} x - \sqrt{3} > 0$; 4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{2}\right) > 1$;

5) $2\cos x \geqslant -\sqrt{2}$; 6) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < 1$.

0.10. Найдите производную функции:

1) $y = x - x^3$; 2) $y = \sqrt{x} + \frac{x^2}{2}$;

3) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$; 4) $y = \sin 3x$;

5) $y = x \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 6) $y = \left(3x + \frac{x^6}{6}\right) \cdot \cos x$.

0.11. Найдите производную функции:

1) $y = (2 - 3x)^7$; 2) $y = (x^2 - 4x + 1)^4$;

3) $y = \frac{1}{\sqrt{3x + 1}}$; 4) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

5) $y = x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$; 6) $y = \left(\frac{x^2 + 2x}{6}\right) \cdot \cos 3x$.

0.12. С помощью производной найдите наименьшее и наибольшее значения функции на указанном отрезке:

1) $y = 4x - x^4$, $x \in [-1; 2]$; 2) $y = \frac{2x - 5}{x^2 - 4}$, $x \in [3; 5]$.

0.13. Найдите промежутки возрастания функции:

1) $y = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$; 2) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$; 3) $y = 3\cos x$.

0.14. Проведите исследование функции с помощью производной и постройте ее график (результат проверьте с помощью графического онлайн-калькулятора https://www.desmos.com/calculator):

1) $y = (x - 3)^3$; 2) $y = -x^3 + 3x^2$.

0.15. Решите неравенство методом интервалов:

1) $4 - x > \frac{1}{x-1}$; 2) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} > 3$.

0.16*. Решите неравенство методом интервалов:

1) $\sqrt{9x - 20} < x$; 2) $\sqrt{\frac{x+3}{4-x}} \geqslant 2$.

B

0.17. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{4-x}}$; 2) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{4-x}}$.

0.18. Даны функции $f(x) = x^2 + 1$ и $g(x) = \sqrt{3-x}$. Область определения функции $f(x)$ – $(-\infty; +\infty)$, а функции $g(x)$ – $(-\infty; 3]$. Найдите следующие сложные функции:

1) $f(g(x))$; 2) $g(f(x))$.

0.19. Даны функции $f(x) = x^2+1$, $x \geqslant 1$ и $g(x) = \sqrt{3-x}$, $x \in (-\infty; 3]$. Найдите обратные им функции:

1) $f^{-1}(x)$; 2) $g^{-1}(x)$.

С помощью графического онлайн-калькулятора выясните взаимное расположение графиков данных функций и обратных им функций.

0.20. Упростите выражение:

1) $4\sin\left(\frac{5}{2}x\right)\cos x\cos\frac{x}{2}$; 2) $\frac{1}{\mathrm{tg}3x - \mathrm{tg}x} - \frac{1}{\mathrm{ctg}3x - \mathrm{ctg}x}$;

3) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x - \cos 3x}$; 4) $\frac{\cos^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha}$.

0.21*. Постройте график функции, содержащей модуль, и объясните результат:

1) $y = \left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$; 2) $y = \sin\left|2x - \frac{\pi}{3}\right|$.

0.22. Решите уравнение:

1) $\sin 2x - 3\cos^2 x = 4$;
2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x$;
3) $4\sin 3x - 3\cos 3x = \frac{5}{2}$;
4) $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$;
5) $\arccos x - \pi = \arcsin\frac{4x}{3}$;
6) $\mathrm{arctg}\, 2x + \mathrm{arctg}\, 3x = \frac{3\pi}{4}$.

0.23. Решите неравенство:

1) $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x \geqslant 1$;
2) $1 - \sin x + \cos x < 0$;
3) $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x \geqslant 2$;
4) $|\sin x| > |\cos x|$.

0.24. Найдите производную функции:

1) $y = \sqrt{x-2} \cdot \sin(3x-2)$;
2) $y = \frac{\sin(2x-1)}{\sqrt{x+4}}$;
3) $y = (x^2+1)\,\mathrm{tg}\, x$;
4) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

0.25. Найдите точки разрыва функции и определите их тип:

1) $y = \frac{x+1}{x^2-4x-5}$;
2) $y = \begin{cases} x-3, & x \leqslant 2, \\ 1-x^2, & x > 2. \end{cases}$

0.26. Найдите предел:

1) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$;
2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$;
3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{2x^2}$.

0.27. С помощью второй производной найдите интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции:

1) $y = x^4 + 4x^3 - 18x^2 + x - 17$;
2) $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$.

0.28. Постройте график функции. В чем особенности графиков четной и нечетной функций?

1) $y = x^4 + 2x^2 - 3$;
2) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2(x-2)^3$;
3) $y = x^3 - 3x$.

0.29. В пассажирском поезде 20 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде трех пассажиров при условии, что все они должны ехать в разных вагонах?

0.30. Какова вероятность того, что при двух подбрасываниях игральной кости выпадет: а) разное количество очков; б) одинаковое количество очков?

0.31*. С помощью метода математической индукции докажите:

1) $(n^3 + 3n^2 + 2n) \vdots 6$; 2) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$.

0.32. Разложите многочлен на множители:

1) $4x^4 + 8x^3 - x^2 - 8x - 3$; 2) $(x^2 + x + 3)(x^2 + x + 4) - 12$.

C

0.33. Найдите значение $\operatorname{tg}2x$, если $\frac{\cos x + 2\sin x}{2\sin x - 3\cos x} = 2$.

0.34. Докажите, что выражение

$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x + y) + 2\cos x\cos y\cos(x + y) - 3$

не зависит от x и y.

0.35. Решите уравнение:

1) $\sin x = \cos\sqrt{x}$; 2) $\sin(\pi\operatorname{ctg}x) = \cos(\pi\operatorname{tg}x)$;

3) $2\arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$; 4) $\arccos x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

0.36. Решите неравенство:

1) $4\sin^3 x < 2\sin x + \cos 2x$; 2) $\cos(\sin x) < 0$.

0.37*. Найдите асимптоты функции и постройте ее график:

1) $y = 3x - \frac{4}{x+1} - 2$; 2) $y = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$.

0.38. При каком значении параметра m функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3+9}-5}{x^2-5x+4}, & \text{если } x \neq 4, \\ m, & \text{если } x = 4 \end{cases}$$

является непрерывной в точке $x = 4$?

0.39. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 6x$, параллельной прямой $y = 6x - 5$.

0.40. Покажите, что точки перегиба функции $y = 3x^5 - 10x^3 + 3x$ лежат на одной прямой.

0.41. Вероятность попадания стрелком в цель равна 0,8. Стрелок выстрелил 15 раз. Сколько раз он попал в цель?

Раздел 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

В городе Нур-Султан на здании «Москва» можно увидеть параболу. Изучив этот раздел, вы узнаете, как с помощью интеграла рассчитать площадь поверхности здания, заключенную внутри параболы.

Вы начинаете изучение интеграла – одной из самых интересных тем математического анализа. Понятие интеграла тесно связано с понятиями производной функции и дифференциала. Интегральное исчисление имеет широкое применение, поскольку математические модели многих явлений и процессов науки и техники описываются дифференциальными и интегральными уравнениями. Вам необходимо изучить данный раздел, посвященный понятию интеграла, для того чтобы научиться строить и исследовать математические модели, а также развить навыки математического и логического мышления.

Содержание раздела

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица интегралов.
1.2. Методы интегрирования.
1.3. Площадь криволинейной трапеции. Определенный интеграл.
1.4. Применение определенного интеграла к решению геометрических и прикладных задач.

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица интегралов

Изучив пункт, вы:

- узнаете определения первообразной для функции и неопределенного интеграла;
- научитесь применять свойства неопределенного интеграла;
- узнаете основные формулы для неопределенного интеграла и сможете применять их при вычислении.

1.1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Мы хорошо знаем, как находить производную заданной функции. Теперь рассмотрим обратную задачу. Например, требуется найти функцию, производная которой равна $3x^2$. Нахождение функции по ее производной называют интегрированием функции, или просто интегрированием. Интеграл часто используют в науке. К примеру, зная закон движения тела, с помощью производной мы определяем его мгновенную скорость, зная закон изменения его скорости в каждой точке, с помощью интеграла мы можем найти закон движения тела.

Определение. *Если для всех x из промежутка I выполняется равенство*

$$F'(x) = f(x),$$

*то функцию $F(x)$ называют **первообразной** для функции $f(x)$ на промежутке I.*

Для функции имеется бесконечно много первообразных. Например, первообразными для функции $f(x) = 2x$ являются следующие функции:

$$F_1 = x^2,$$

$$F_2 = x^2 + 1,$$

$$F_3 = x^2 - 3,$$

т.к. производная каждой из них равна $2x$.

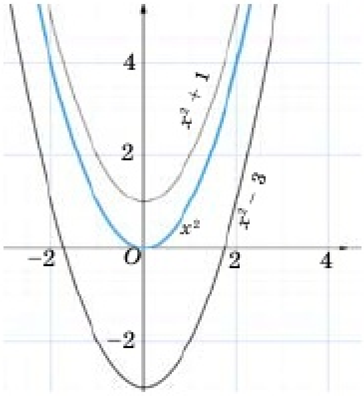


Рис. 1.1

Теорема. *Если функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$ на некотором промежутке I, то и функция $y = F(x) + C$, где C – любая постоянная, также является первообразной для функции $y = f(x)$ на этом промежутке. Первообразных другого вида для функции $y = f(x)$ на промежутке I нет.*

▲ Если функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$ на промежутке I, то для любой постоянной C выполняется равенство

$$(F(x) + C)' = F(x)' + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Следовательно, функция $y = F(x) + C$ также является первообразной для $y = f(x)$.

Покажем теперь, что кроме функций вида $y = F(x) + C$ других первообразных нет. Предположим, что для функции $y = f(x)$ найдется первообразная $y = \Phi(x)$, которую нельзя представить в виде $y = F(x) + C$. Так как обе функции $y = \Phi(x)$ и $y = F(x)$ – первообразные для функции $y = f(x)$,

$$\text{то } (\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Отсюда $\Phi(x) - F(x) = C \Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$. Мы пришли к противоречию, предполагая, что $y = \Phi(x)$ – первообразная другого вида. ■

Из теоремы следует, что если функция $y = F(x)$ – некоторая первообразная для функции $y = f(x)$, то все первообразные для функции $f(x)$ находятся по формуле $y = F(x) + C$, где C – любая постоянная.

Работа в группе

Назовите первообразные для элементарных функций, используя их производные. Например, *производная x^3 равна $3x^2$, следовательно, первообразная для функции $3x^2$ в общем виде записывается так: $x^3 + C$.*

Пусть функция $y = f(x)$ и первообразные для нее определены на некотором промежутке I.

Определение. *Для любого $x \in I$ множество всех первообразных для функции $y = f(x)$ называют* ***неопределенным интегралом*** *от данной функции и обозначают так:* $\int f(x)dx$.

Материалы из истории

Знак интеграла

Знак $\int$ используется для обозначения интеграла в математике. Впервые он был использован немецким математиком и одним из основателей дифференциального и интегрального исчислений Лейбницем в конце XVII века. Символ $\int$ образовался из буквы S, что в переводе с латинского языка означает сумму.

Если функция $y = F(x)$ – некоторая первообразная для функции $y = f(x)$ на промежутке $(a; b)$, то согласно определению имеет место следующее равенство:

подынтегральная функция

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$ ← *постоянная интегрирования*

переменная интегрирования

Отсюда, для примеров, рассмотренных выше, выполняются равенства

$$\int 3x^2dx = x^3 + C,$$
$$\int 2xdx = x^2 + C.$$

Дополнительные электронные ресурсы

https://www.youtube.com/watch?v=tZ_rMl6MOEI

Из определения неопределенного интеграла и равенства $(x^{n+1})' = (n + 1)x^n$ получаем следующую формулу:

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.}$$

Пользуясь этой формулой, можно найти интеграл от функции такого же вида, как на стр. 13, показатель степени которой отличен от -1.

Для того чтобы найти интеграл от такой же функции с некоторым показателем, как на стр. 13, нужно увеличить этот показатель на единицу, разделить на это число и добавить постоянную величину.

Данную формулу нельзя применять к функции $\frac{1}{x} = x^{-1}$. В самом деле, $\int x^{-1}dx = \frac{x^0}{0} + C$, но это действие не определено, так как на 0 делить нельзя.

Рассмотрим примеры на применение полученной формулы.

Пример 1. Найдем интеграл $\int x^3 dx$:

▲ *увеличим показатель на 1*

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$ *прибавим постоянную интегрирования*

разделим на полученный показатель степени

Не забудьте прибавить постоянную интегрирования!

Ученики, которые забывают сделать это, теряют баллы при оценке их работ. Для проверки правильности результата интегрирования, надо найти производную от полученного выражения, которая должна быть равна подынтегральной функции.

Проверка: $\left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 + 0 + x^3$. ■

Пример 2. Найдем интеграл $\int \frac{1}{x^3}dx$.

▲ Выполняя действия над степенями с отрицательными показателями с применением правила $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, приведем данный интеграл к виду $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx$. Затем, применяя формулу $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, получим:

$$\int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

Проверка:

$$\left(-\frac{1}{2x^2}+C\right)' = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)' + 0 = \left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\left(-2x^{-3}\right) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}.$$ ■

Пример 3. Найдем интеграл $\int 7dx$.

▲ Принимая во внимание формулу $x^0 = 1$, получим:

$$\int 7dx = \int 7\cdot x^0 dx = 7\cdot\frac{x^{0+1}}{0+1} + C = 7x + C.$$

Интеграл от постоянного числа k равен $kx+C$: $\int kdx = kx + C$. Например, $\int 2dx = 2x + C$, $\int 2019dx = 2019x + C$, $\int \pi dx = \pi x + C$. ■

1.1.2. Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot\int f(x)dx.$$

Свойство 2. *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций:*

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f\,(x)dx + \int g(x)dx.$$

Для того чтобы проинтегрировать функцию, содержащую несколько слагаемых, нужно проинтегрировать каждое слагаемое отдельно.

Пример 1. Вычислим интеграл $\int\left(3x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2}\right)dx$.

▲ Интеграл от суммы равен сумме интегралов, поэтому заданный интеграл разбиваем на сумму слагаемых, каждое из которых интегрируем по отдельности:

запишем сумму интегралов от слагаемых

$$\int\left(3x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2}\right)dx = \boxed{\int 3x^2dx - \int\frac{2}{\sqrt{x}}dx + \int\frac{7}{x^2}dx} =$$

$$= 3\cdot\frac{x^3}{3} - 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx + 7\int x^{-2}dx = x^3 - 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 7\frac{x^{-1}}{-1} + C \leftarrow$$ *найдем интеграл от каждого слагаемого*

$$= x^3 - 4\sqrt{x} - \frac{7}{x} + C.$$

прибавим постоянную интегрирования только один раз

Постоянную интегрирования записываем только один раз, так как сумма нескольких постоянных также является некоторой постоянной величиной. ■

Пример 2. Найдем функцию $y(x)$, зная ее производную $y'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^{\frac{3}{2}}x$.

▲ Так как функция $y(x)$ является первообразной для функции $y'(x)$, получаем:

$$y(x) = \int\left(\frac{1}{2}x^3 - 4x^{\frac{3}{2}}x\right)dx.$$

Интегрируем каждое слагаемое по отдельности:

$$y(x) = \int\frac{1}{2}x^3dx - 4\int x^{\frac{3}{2}}xdx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} - 4\int x^{2,5}dx =$$

$$= \frac{x^4}{8} - 4\frac{x^{3,5}}{3,5} + C = \frac{x^4}{8} - \frac{8x^3\sqrt{x}}{7} + C.$$

Напомним, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, поэтому при решении мы учли равенство $x^{\frac{3}{2}}x = x^{2,5}$. ■

Пример 3. Найдем интеграл $\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$.

▲ Преобразуем числитель дроби по формуле «Квадрат разности» и разделим каждый член полученного выражения на знаменатель:

$$\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx = \int\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}}dx = \int\frac{x^2}{\sqrt{x}}dx - \int\frac{2x}{\sqrt{x}}dx + \int\frac{1}{\sqrt{x}}dx =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\textit{приведем подынте-}\\ \textit{гральные функции к}\\ \textit{степенному виду}\end{array}\right| = \int x^{1,5}dx - 2\int x^{0,5}dx + \int x^{-0,5}dx =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\textit{найдем интеграл от}\\ \textit{каждого слагаемого}\end{array}\right| = \frac{x^{2,5}}{2,5} - 2\frac{x^{1,5}}{1,5} + \frac{x^{0,5}}{0,5} + C =$$

$$= \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} - \frac{4x\sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x} + C.$$ ■

При нахождении некоторых интегралов необходимо предварительно преобразовать подынтегральную функцию, разложив на слагаемые и приведя их к степенному виду.

При изучении пункта 3.5 мы с вами повторим еще раз эту тему.

1.1.3. Таблица интегралов

Из таблицы производных и определения неопределенного интеграла получаем следующую таблицу интегралов.

Таблица производных		*Таблица интегралов*
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\Rightarrow$	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
$(\sin x)' = \cos x$	$\Rightarrow$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\Rightarrow$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\Rightarrow$	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
$(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\Rightarrow$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$

Найдем интегралы следующих функций, пользуясь таблицей интегралов.

Пример 1. Найдем общий вид первообразной для функции:

$$1)\ f(x) = 2\sqrt{3}\sin x\ ;\ 2)\ f(x) = x^4 - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

▲ 1) $F(x) = 2\sqrt{3}(-\cos x) + C = -2\sqrt{3}\cos x + C$;

$$2)\ F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \mathrm{ctg} x + C = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \mathrm{ctg} x + C =$$

$$= \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - \mathrm{ctg} x + C. \ ■$$

Пример 2. Найдем интеграл:

$$1)\ \int(2\sin x - 3\cos x)dx;\quad 2)\ \int\frac{\cos 2y}{\sin^2 y \cdot \cos^2 y}dy.$$

▲ 1) $\int(2\sin x - 3\cos x)dx =$ | *интеграл от суммы равен сумме интегралов* | $= \int 2\sin x\, dx -$

$$-\int 3\cos x\,dx = \left| \textit{если функция имеет постоянный множитель, его можно вынести за знак интеграла} \right| =$$

$$= 2\int \sin x\,dx - 3\int \cos x\,dx = -2\cos x - 3\sin x + C.$$

При необходимости следует воспользоваться формулами тригонометрии.

2) $$\int \frac{\cos 2y}{\sin^2 y\cdot\cos^2 y}dy = \left| \begin{array}{c} \textit{формула двойного} \\ \textit{аргумента} \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{array} \right| = \int \frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\sin^2 y\cdot\cos^2 y}dy =$$

$$= \int \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y\cdot\cos^2 y}dy - \int \frac{\sin^2 y}{\sin^2 y\cdot\cos^2 y}dy = \int \frac{1}{\sin^2 y}dy -$$

$$-\int \frac{1}{\cos^2 y}dy = -\mathrm{ctg}\,y - \mathrm{tg}\,y + C.$$ ■

Рассмотрим примеры применения первообразной к решению прикладных задач.

Пример 3. Мяч подбросили вертикально вверх с высоты 80 м, придав ему начальную скорость 20 м/с (рис. 1.2). Принимая ускорение свободного падения равным 10 м/с^2, выполните следующее задание.

1) Запишите функцию $h = h(t)$, устанавливающую зависимость пути, пройденного мячом относительно земли, от времени.

2) Через какое время мяч упадет на Землю?

▲ Найдем функцию $h = h(t)$, устанавливающую зависимость пути, пройденного мячом относительно земли, от времени. В начальный момент времени ($t = 0$) мяч был на высоте 80 м, т.е. $h(0) = 80$. Из механического смысла производной получаем:

$$v(t) = h'(t),\ a(t) = v'(t).$$

Мяч подброшен вверх с начальной скоростью 20 м/с (при $t = 0$), следовательно, $v(0) = h'(0) = 20$. Направление движения мяча и ускорение свободного падения противоположны, поэтому $g = -10$ и $g = v'(0) = h''(0) \Rightarrow h''(0) = -10$. Таким образом, мы получили систему уравнений:

$$\begin{cases} h(0) = 80, \\ h'(0) = 20, \\ h''(0) = -10. \end{cases}$$

Здесь функция $h'(t)$ является первообразной для функции $h''(t)$, следовательно,

$$h'(t) = \int h''(t)dt = \int (-10)dt = -10t + C_1.$$

Найдем значение постоянной интегрирования C_1 из условия $h'(0) = 20$:

$$h'(0) = -10 \cdot 0 + C_1 = 20 \Rightarrow C_1 = 20 \Rightarrow h'(t) = -10t + 20.$$

Функция $h(t)$ в свою очередь является первообразной для функции $h'(t)$, отсюда

$$h(t) = \int h'(t)dt = \int (-10t + 20)dt = -5t^2 + 20t + C_2.$$

Постоянную интегрирования C_2 определим из условия $h(0) = 80$:

$$h(0) = -5 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + C_2 = 80 \Rightarrow C_2 = 80 \Rightarrow h(t) = -5t^2 + 20t + 80.$$

Таким образом, мы нашли искомую функцию, описывающую изменение расстояния от мяча до земли с течением времени.

Перейдем к вычислению времени, по истечении которого мяч коснется земли. В тот момент, когда мяч коснется земли, расстояние от мяча до земли будет равна нулю:

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 80 = 0.$$

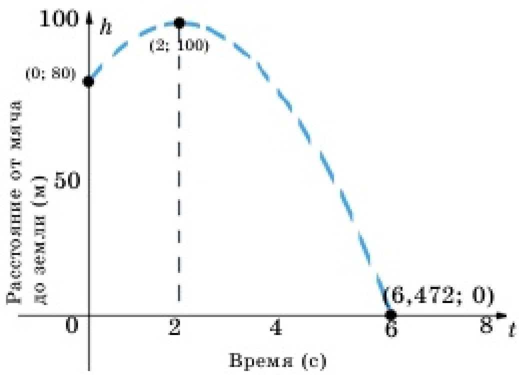


Рис. 1.2

Решая квадратное уравнение, получим:

$$D = 20^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 80 = 2000.$$

Учитывая, что $t > 0$, найдем время:

$$t = \frac{-20 + \sqrt{2000}}{-10} = 6,472 \text{ с.}$$

1. Что называют первообразной для данной функции? Приведите пример.
2. Что такое неопределенный интеграл?
3. Сформулируйте правила нахождения неопределенного интеграла.
4. Напишите по памяти табличные интегралы, выведите эти формулы.

Упражнения

A

1.1. Найдите первообразную для данной функции (устное задание):

1) $f(x) = 8x^7$; 2) $f(x) = 4x^3$; 3) $f(x) = 8x + 1$;
4) $f(x) = -5x^4$; 5) $f(x) = -11 + \sin x$; 6) $f(x) = 5x - 4$;
7) $f(x) = \frac{3}{5}x^2$; 8) $f(x) = 5x\sqrt{x}$; 9) $f(x) = 4x^3 - 5\cos x + 7x$;
10) $f(x) = \frac{1}{6}x^3$; 11) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$; 12) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x}$;
13) $f(x) = x^3 - 3x^5 + \sin x$; 14) $f(x) = 5 - \cos x$;
15) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 5$; 16) $f(x) = 3 - 4x + \sin x$;
17) $f(x) = 2 - 6x^4 + 3x$; 18) $f(x) = 3 + \sin x$;
19) $f(x) = 1 - 2\cos x$; 20) $f(x) = 4x^6 - 5x^3 + 3$.

1.2. Пользуясь формулой

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,$$

найдите интегралы от следующих функций (устное задание):

1) $-4x^{-5}$; 2) x^{-4}; 3) $x^{\frac{1}{2}}$;
4) $x^{\frac{1}{3}}$; 5) $24\,x^{-25}$; 6) $-\frac{1}{4}x^{-3,5}$.

1.3. Покажите, что заданная функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$:

1) $F(x) = 2\sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

2) $F(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + x$, $f(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}} + 1$;

3) $F(x) = \frac{x^4}{4} + 3x + 1$, $f(x) = x^3 + 3$;

4) $F(y) = \cos 5y + y$, $f(y) = -5\sin 5y + 1$;

5) $F(z) = \frac{1}{z-1}$, $f(z) = -\frac{1}{(z-1)^2}$.

1.4. Найдите первообразную для следующей функции:

1) $f(x) = 2x - 1$; 2) $f(x) = 5x^3 - 4$;

3) $f(x) = 7x^2 - 3\cos x - 3$; 4) $f(x) = 2 - \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

5) $f(x) = (5x - 4)^3$; 6) $f(x) = 7\sin x - 3x^2 - 3\cos x - 3$.

1.5. С помощью производной проверьте выполнение следующего равенства:

1) $\int\left(-\dfrac{6}{x^4}\right)dx = \dfrac{2}{x^3} + C$; 2) $\int\left(8x^3 + \dfrac{1}{2x^2}\right)dx = 2x^4 - \dfrac{1}{2x} + C$;

3) $\int(x-4)(x+4)\,dx = \dfrac{x^3}{3} - 16x + C$.

1.6. Найдите интеграл от данной функции, проверьте найденный результат с помощью производной:

1) $\int x^{\frac{2}{3}}\,dx$; 2) $\int 7x^{\frac{4}{3}}\,dx$; 3) $\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$.

1.7. Заполните таблицу.

Заданный интеграл		Преобразуйте		Найдите интеграл		Упростите
$\int\left(\dfrac{7}{x^2} - x + 1\right)dx$	=		=		=	
$\int\dfrac{x^5 - 3}{x^2}dx$	=		=		=	
$\int\dfrac{x^3 - 8}{2 - x}dx$	=		=		=	

1.8. Восстановите функцию $f(x)$ по ее известной производной $f'(x)$:

1) $5x + 3x^{-4}$; 2) $4x(x^2 - 1)$; 3) $(x - 3)^2$;

4) $x\left(6x + \dfrac{4}{x^4}\right)$; 5) $\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^2$; 6) $x\left(3x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{2}{x^{\frac{4}{3}}}\right)$;

7) $6\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2}$; 8) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} - 7x^2\sqrt{x}$; 9) $5\left(\sqrt{x}\right)^3 - \dfrac{3x}{\sqrt{x}}$.

1.9. Пользуясь таблицей интегралов, найдите:

1) $\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$; 2) $\int (\sin x + 3\cos x)\,dx$;

3) $\int (x^3 - \sin x)\,dx$; 4) $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{3\cos x}{2}\right)dx$;

5) $\int \left(3\cos x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$; 6) $\int \left(6x^5 - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx$.

1.10. Пользуясь таблицей интегралов, найдите:

1) $\int x^7 dx$; 2) $\int x^3 \sqrt[4]{x}\,dx$; 3) $\int \frac{x^3 + 3x^2 - \sqrt[3]{x} + 1}{x\sqrt{x}}dx$;

4) $\int \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4}dx$; 5) $\int \left(8\sin x - \frac{9}{\cos^2 x}\right)dx$; 6) $\int \left(6\cos x - \frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; 8) $\int 5\sqrt{x}\,dx + \int \frac{10dx}{\cos^2 x}$; 9) $\int \frac{5dx}{\sin^2 x} - \int \frac{6}{x\sqrt{x}}dx$.

1.11. Найдите первообразную для функции $y = f(x)$, график которой проходит через точку M:

1) $f(x) = 6x^2 - 2x - 5$, $M(1;-6)$; 2) $f(x) = \sqrt{x}, M(1;1)$;

3) $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}$, $M(1;1,5)$.

▲ 1) Для того чтобы найти первообразную, проинтегрируем заданную функцию:

$$F(x) = \int (6x^2 - 2x - 5)dx = 6\cdot\frac{x^3}{3} - x^2 - 5x + C =$$

$$=2x^3 - x^2 - 5x + C.$$

Точка $M(1; -6)$ принадлежит графику функции $F(x)$, что означает $F(1) = -6$, или

$$2\cdot 1^3 - 1^2 - 5\cdot 1 + C = -6 \Rightarrow C = -2.$$

Следовательно, $F(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$. ■

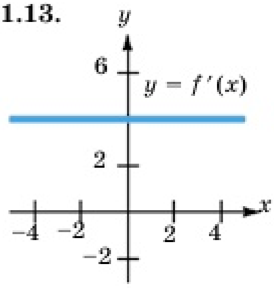
1.12. Найдите функцию $y = f(x)$, график которой проходит через точку М, если известна производная $f'(x)$:

1) $f'(x) = 2x - 1$, $M(2;3)$;
2) $f'(x) = 3x^2 - 3$, $M(1;2)$;
3) $f'(x) = \dfrac{6}{x^3}$, $M(1;4)$;
4) $f'(x) = 3 - x^2$, $M(6;1)$;
5) $f'(x) = 6x^2 + 12\sqrt{x}$, $M(4;10)$.

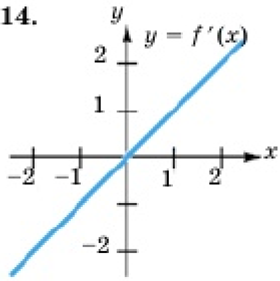
B

В задачах 1.13–1.16 дается график производной $y = f'(x)$ функции $y = f(x)$. Постройте два варианта графика функции $y = f(x)$. По графику производной найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$.

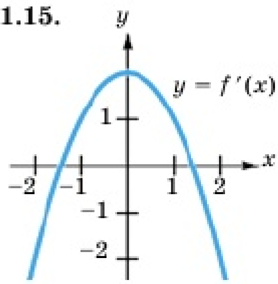
1.13.



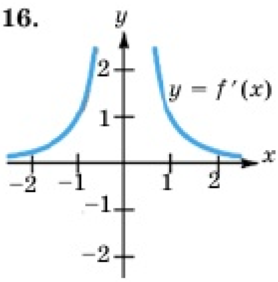
1.14.



1.15.



1.16.



1.17. Найдите первообразную для функции $f(x)$:

1) $f(x) = 1{,}5x^2 - \dfrac{4}{x^2}$;
2) $f(x) = \dfrac{4}{3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4} + 5x^{\frac{3}{2}}$.

1.18. Найдите интеграл:

1) $\displaystyle\int \frac{y^6 + 8y^4}{y}\,dy$;
2) $\displaystyle\int \left(\sqrt{y} + 1\right)\left(\sqrt{y} - 1\right)dy$.

1.19. Докажите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$:

1) $F(x) = 7x^5 + 5\cos^2 3x - 2$, $f(x) = 35x^4 - 15\sin 6x$;

2) $F(x) = 6x^4 + 5\sin^2 2x + 5$, $f(x) = 24x^3 + 10\sin 4x$.

1.20. Вычислите интеграл:

1) $\int \frac{z^3 + 2z}{z\sqrt{z}}\,dz$; 2) $\int (z+2)^2(z^2+2)\,dz$.

1.21. Найдите интеграл, предварительно преобразовав подынтегральную функцию:

1) $\int \left(3x - 5\sqrt{x}\right)^2 dx$; 2) $\int \sqrt{x}\left(3 - \sqrt{x}\right)^2 dx$;

3) $\int \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3\right) dx$; 4) $\int \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$.

1.22. Вычислите:

1) $\int \left(1 + \frac{3}{2t^2}\right) dt$; 2) $\int t\left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2}\right) dt$.

1.23. Вычислите:

1) $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x}}{x}\,dx$; 2) $\int \frac{10x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x}}\,dx$;

3) $\int \frac{(5x-3)^2}{\sqrt{x}}\,dx$; 4) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\,dx$.

1.24. Найдите первообразную для функции $f(x)$, график которой проходит через точку A:

1) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}$, $A\left(\frac{5\pi}{4}; \sqrt{2}\right)$;

2) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$, $A\left(\frac{7\pi}{4}; 2\sqrt{2}\right)$.

1.25. Используя тригонометрические формулы, вычислите:

1) $\int \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} d\alpha$; 2) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$;

3) $\int \frac{\sin x dx}{\sin^4 2x + 2\sin^2 2x \cos^2 2x + \cos^4 2x}$; 4) $\int \frac{1}{2}\sin^2 \frac{y}{2} dy$.

Прикладная задача

1.26. Мяч подбросили вертикально вверх с высоты 2 м, придав ему начальную скорость 6 м/с. Принимая ускорение свободного падения равным 10 м/с², выполните следующее задание:

- запишите функцию $h(t)$, определяющую зависимость расстояния между мячом и землей от времени;
- определите, через какое время мяч упадет на землю.
- вычислите, на какую высоту поднимется мяч.

1.27. Вычислите:

1) $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + 1} dx$; 2) $\int (x+3)^7 dx$;

3) $\int \sqrt{x-3}\, dx$; 4) $\int \frac{x^2 + 4x\sqrt{x} + 4x}{\left(\sqrt{x} - 2\right)^2} dx$.

1.28. Найдите функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую следующему условию:

1) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f(9) = 1$;

2) $f''(x) = 6$, $f'(-1) = 2$, $f(-1) = 0$;

3) $f''(x) = 12x^2 + 2$, угловой коэффициент касательной, проходящей через точку с координатой (1;1), равен 3.

4) $f'(x) = x^2$, прямая $y = 4x + 7$ является касательной к графику функции $y = f(x)$.

1.29. Восстановите функцию по заданной для нее первообразной:

1) $F(x) = \frac{x^7}{7} + 2\cos 2x$; 2) $F(x) = \operatorname{arctg}^2 3x$;

3) $F(x) = \operatorname{tg}^3 2x - \cos 5x$; 4) $F(x) = \cos\sqrt{x} - \sin\left(x^2\right)$.

C

1.30*. Найдите первообразную для функции $y = f(x)$, график которой проходит через точку M:

1) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{если } x < 0, \\ 1, \text{если } x \geqslant 0, \end{cases}$ $M\ (0;0)$;

2) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x < 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \text{если } x \geqslant 1, \end{cases}$ $M\ (4;0)$.

▲ 1) Чтобы определить первообразную для функции, найдем неопределенный интеграл:

$$F(x) = \begin{cases} \int \cos x dx \text{ при } x < 0, \\ \int 1 dx \text{ при } x \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} \sin x + C_1 \text{ при } x < 0, \\ x + C_2 \text{ при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Точка $M(0;0)$ принадлежит графику функции $F(x)$. Это означает $F(0) = 0$, $\begin{cases} \sin 0 + C_1 = 0, \\ 0 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$

Поэтому $F(x) = \begin{cases} \sin x \text{ при } x < 0, \\ x \text{ при } x \geqslant 0. \end{cases}$ ■

1.31. Напишите уравнение кривой, проходящей через точку $M(0;\ 7)$, если угловой коэффициент касательной, проведенной в любой точке кривой, равен $\left(3 - \dfrac{x}{5}\right)$.

1.32. Напишите уравнение кривой, проходящей через точку $M(2;1)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен: 1) абсциссе точки касания; 2) квадрату абсциссы точки касания.

1.33. Напишите уравнение касательной, график которой проходит через точку $M(2;1)$, если касательная в любой точке кривой параллельна оси абсцисс.

1.34. Напишите уравнение касательной, проходящей через точку M(2;1), если известно, что касательная, проведенная в любой точке данной кривой, составляет с осью абсцисс угол в 45^0.

1.35. Два тела одновременно начинают прямолинейное движение из одной точки в одном направлении. Скорость первого тела равна $v(t) = = 3t^2 - 6t$, а скорость второго равна $v(t) = 10t +$

$+ 20$. Через какое время и на каком расстоянии от начальной точки тела встретятся? (Скорость измеряется в м/с).

Прикладная задача

1.36. Тело массой 10 кг начинает двигаться под действием силы $F = 6H$. Найдите закон движения тела, если в начальный момент времени (t=0) оно находилось в начале координат.

▲ Для того чтобы определить закон движения тела $S(t)$, вычислим ускорение.

По второму закону Ньютона $F = ma \Rightarrow a = \frac{6}{10}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$.

$$a = v'(t) \Rightarrow v(t) = \int a dt = \frac{3}{5}t + C_1,$$

$$S(t) = \int v(t)dt = \int\left(\frac{3}{5}t + C\right)dt = \frac{3}{10}t^2 + C_1t + C_2.$$

В момент времени $t = 0$ тело находилось в начале координат, отсюда

$$S(0) = 0 \Rightarrow \frac{3}{10}\cdot 0^2 + C_1\cdot 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Следовательно, $S(t) = \frac{3}{10}t^2 + C_1t$. ■

Прикладная задача

1.37. Высота монумента «Байтерек» в г. Нур-Султан вместе с фундаментом составляет 105 м. С какой начальной скоростью надо запустить петарду фейерверка, чтобы достичь этой высоты? Массу снаряда для фейерверка можно не учитывать. ($g \approx 10$ м/с^2.)

1.38. Верно ли, что первообразная для всякой нечетной функции является четной функцией? Почему? И наоборот, будет ли первообразная для любой четной функции нечетной функцией? Подтвердив ответы примерами, сделайте вывод.

Упражнения для повторения

1.39. Найдите производную функции:

1) $y = (x - 1)^2 \cdot \sin x$; 2) $y = \frac{\cos 2x}{1 - x^2}$;

3) $y = \operatorname{arctg}(x + 1)$; 4) $y = (x^2 - 2x + 3) \cdot \sin 2x$.

1.40. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)$, проведенной в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$, x_0 — точка пересечения графика функции с осью абсцисс;

2) $f(x) = (7 - 3x)^3$, x_0 — точка пересечения графика функции с прямой $y = 1$;

3) $f(x) = (4x + 3)^5$, x_0 — точка пересечения графика функции с прямой $y = -1$;

4) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$, $x_0 = 1$.

1.41. Решите уравнение:

1) $2\cos x = 3\operatorname{tg}x$; 2) $\sqrt{3}\sin 3x = 2\cos x \cdot \sin 3x$.

1.2. Методы интегрирования

Изучив пункт, вы научитесь:

- интегрировать методом замены переменной;
- интегрировать методом интегрирования по частям.

1.2.1. Интегрирование методом замены переменной

Данный метод основан на правиле дифференцирования сложной функции.

Теорема. *Пусть задана сложная функция $y = f(g(t))$, где $y = f(x)$ и $x = g(t)$ – дифференцируемые функции, и выполняется равенство $\int f(x)dx = F(x) + C$.*

Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int f[g(t)] \cdot g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx \,\big|_{x = g(t)} \qquad (1)$$

Данная формула на практике применяется следующим образом:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \left| \begin{matrix} u = g(x), \\ du = g'(x)dx \end{matrix} \right| = \int f(u)du = F(u)\big|_{u=g(x)} = F(g(x)) + C.$$

Если в этой формуле сделать линейную замену $u(x) = kx + b$, то, учитывая $u'(x) = k$, получим равенство

$$\boxed{\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C,} \qquad (2)$$

т.е. достаточно разделить первообразную на угловой коэффициент линейной функции.

Пример 1. Найдем первообразную для следующей функции:

1) $f(x)=\cos\left(\sqrt{5}x+3\right)$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{(8-5x)^7}$;

3) $f(x)=3\sqrt{5-2x}$; 4) $f(x)=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)+7x^5-4$.

▲ 1) $f(x)=\cos\left(\sqrt{5}x+3\right)$, здесь $k=\sqrt{5}$. Применив формулу (2), получим $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\left(\sqrt{5}x+3\right)+C$.

2) $f(x)=\dfrac{1}{(8-5x)^7}$. Сначала перепишем данную функцию в виде $f(x)=(-5x+8)^{-7}$. Учитывая, что $k=-5$, получим:

$$F(x)=-\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(-5x+8)^{-6}+C=\frac{1}{30(8-5x)^6}+C.$$

3) $f(x)=3\sqrt{5-2x}$, здесь $k=-2$. Следовательно,

$$F(x)=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=-(5-2x)^{\frac{3}{2}}+C=-\sqrt{(5-x)^3}+C.$$

4) $f(x)=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)+7x^5-4$. Так как $k=3$, получим:

$$F(x)=-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\right)+7\frac{x^6}{6}-4x+C=$$

$$=\frac{2}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{7}{6}x^6-4x+C.\ ■$$

Пример 2.

▲ $$\int x\sqrt{x-3}dx=\left|\begin{matrix}x-3=t,\\ x=t+3,\\ dx=dt.\end{matrix}\right|=\int(t+3)\sqrt{t}dt=\int\left(t^{\frac{3}{2}}+3t^{\frac{1}{2}}\right)dt=$$

$$=\frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5}+2t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}+2\sqrt{(x-3)^3}+C.\ ■$$

Пример 3.

$$\blacktriangle \int \sin^6 x\cos x dx = \int \sin^6 x d\sin x = |\sin x = t| =$$

$$= \int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^7 x}{7} + C. \blacksquare$$

Пример 4.

$$\blacktriangle \int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = |\cos x = t| =$$

$$= -\int \left(1 - \cos^2 x\right) d\cos x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C. \blacksquare$$

1.2.2. Метод интегрирования по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции. Дифференциал произведения этих функций вычисляется по следующей формуле:

$$d(uv) = udv + vdu$$

Проинтегрировав обе части данного равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu.$$

Принимая во внимание $\int d(uv) = uv + C$, получим $uv + C = \int udv + \int vdu$, или $\int udv = uv - \int vdu + C$. Если включить переменную C в состав интеграла, получаем формулу

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Согласно этой формуле, интегрирование выражения udv сводится к интегрированию выражения vdu, которое в некоторых случаях оказывается проще для интегрирования. Вычисление интеграла по этой формуле называют методом ***интегрирования по частям***.

Пример 5.

$$\blacktriangle \int x\sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x, dv = \sin x dx, \\ du = dx, v = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= -x\cos x - \int (-\cos x) dx = -x\cos x + \sin x + C. \blacksquare$$

Пример 6.

$$\blacktriangle \int x\cos 3x dx = \left| \begin{matrix} u = x,\ dv = \cos 3x dx, \\ du = dx, v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix} \right| = x \cdot \frac{1}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x dx =$$

$$= \frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C. \blacksquare$$

1. Напишите формулу, по которой можно вычислить интеграл методом замены переменной, поясните ее смысл.
2. Напишите формулу, по которой можно вычислить интеграл методом интегрирования по частям, поясните ее смысл.

Упражнения

А

1.42. Найдите первообразную для функции $f(x)$, проходящую через указанную на графике точку:

1) $f(x) = 2x - 1$; 2) $f(x) = 2(x - 1)$.

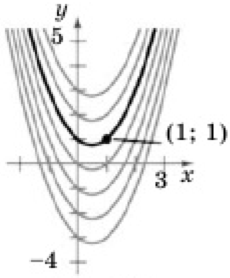


Рис. 1.3

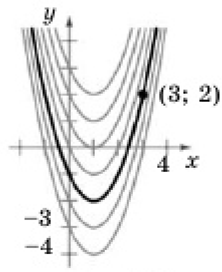


Рис. 1.4

1.43. Применяя формулу $\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$, найдите интеграл от следующей функции:

1) $f(x) = 10\cos 9x$; 2) $f(x) = 7\sin 4x$; 3) $f(x) = (2x - 3)^6$;
4) $f(x) = (7x - 9)^5$; 5) $f(x) = 2\cos 3x$; 6) $f(x) = (3x - 8)^5$;
7) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 4x}$; 8) $f(x) = (3x - 1)^8$; 9) $f(x) = 1 + \cos 3x$.

1.44. Вычислите интеграл:

1) $\int (3x+2)^3\,dx$; 2) $\int \left(\frac{x}{2}-1\right)^5 dx$; 3) $\int \frac{dx}{(2x-1)^3}$; 4) $\int \frac{dx}{(3x+1)^4}$.

1.45. Вычислите интеграл:

1) $\int (2 - 9x)^6 dx$; 2) $\int (7 + 5x)^{13} dx$; 3) $\int 6\left(\frac{x}{3}+1\right)^5 dx$.

1.46. Вычислите интеграл:

1) $\int \frac{dx}{\cos^2(2x-1)}$; 2) $\int \sin\left(\frac{x}{2}-1\right) dx$; 3) $\int \sin(3 - 4x)\,dx$;

4) $\int \cos(3x - 2)\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{\sin^2(x-4)}$; 6) $\int \frac{dx}{\cos^2(4x+4)}$;

7) $\int 3\cos 3x\,dx$.

1.47. Укажите первообразную для функции $f(x)$.

№	Функция	Выберите первообразную из предложенных вариантов		
		A	B	C
1	$f(x) = 7x^2 - 3\cos x - 3$	$\frac{7x^3}{3} - 3\sin x - 3x + C$	$14x - 3\sin x - 3x$	$\frac{7x^3}{3} - 3\cos x - 3x + C$
2	$f(x) = 5x^3 - 4$	$\frac{5}{4}x^4 - 4x + C$	$\frac{5}{4}x^4 - 4x$	$5x^4 - x + C$
3	$f(x) = (5x-4)^3$	$\frac{5}{2}x^2 - 4x + C$	$\frac{(5x-4)^4}{5} + C$	$\frac{(5x-4)^4}{20} + C$
4	$f(x) = 7\sin 7x - 3x^2$	$7\cos x - x^3 + C$	$-\cos 7x - x^3 + C$	$49\cos x - 6x$
5	$f(x) = 10\cos 9x$	$\frac{10}{9}\sin 9x$	$90\sin 9x + C$	$\frac{10}{9}\cos 9x + C$

1.48. Применяя формулы понижения степени, найдите интеграл:

1) $\int \cos^2 x dx$; 2) $\int \sin^2 x dx$; 3) $\int \sin^2 2x dx$; 4) $\int \cos^2 2x dx$.

▲ 3) Преобразуем подынтегральную функцию с помощью формулы понижения степени, затем найдем интеграл от каждого слагаемого:

$$\int \sin^2 2x dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C. \ \blacksquare$$

1.49. Преобразовав подынтегральное выражение, вычислите интеграл:

1) $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$; 2) $\int (\operatorname{tg}^2 x + 1) dx$;

3) $\int (\operatorname{ctg}^2 x + 1) dx$; 4) $\int \cos x \sin x dx$.

1.50*. Применяя метод интегрирования по частям, найдите интеграл:

1) $\int x\cos x dx$; 2) $\int x\sin 2x dx$; 3) $\int x\cos 2x dx$.

B

1.51. Найдите общий вид первообразной для функции $f(x)$:

1) $f(x) = \dfrac{3}{\cos^2(4x-1)} + 2\sin(3-2x) + 5$;

2) $f(x) = \dfrac{4}{\sin^2(3x-2)} + 5\cos(7-4x) - 2$.

1.52. Упростив подынтегральную функцию, найдите интеграл:

1) $\int\left(\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)dx$;

2) $\int \sin 2x \, \sin 6x dx$;

3) $\int \cos 3x \, \cos 5x dx$;

4) $\int \sin 4x \, \cos 3x dx$;

5) $\int 12\cos\left(\dfrac{\pi}{8} - x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8} - x\right)dx$.

▲ 4) Преобразуем подынтегральное выражение с помощью известной нам формулы $\sin\alpha \cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$. Затем, учитывая, что интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов, получим:

$$4)\ \int \sin 4x \cos 3x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin x)dx = \int \frac{1}{2}\sin 7x dx + \int \frac{1}{2}\sin x dx = -\frac{\cos 7x}{14} - \frac{\cos x}{2} + C. \ ■$$

1.53. Вычислите интеграл:

1) $\int\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^8 dx$; 2) $\int \dfrac{ydy}{\sqrt{3y^2+1}}$;

3) $\int \dfrac{3x^2dx}{\sqrt{(1-5x^3)^3}}$; 4) $\int \dfrac{6x^2dx}{\sqrt{(2x^3-1)^2}}$.

▲ 3) $$\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{(1-5x^3)^3}} = \left|x^3 = t, \quad 3x^2dx = dt\right| =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{(1-5t)^3}} = \int (1-5t)^{-\frac{3}{2}}dt = \frac{1}{-5}\,\frac{(1-5t)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{2}{5\sqrt{1-5t}} + C = \frac{2}{5\sqrt{1-5x^3}} + C. \ ■$$

1.54*. Найдите интеграл методом замены переменной:

1) $\int x(x+1)^3\,dx$; 2) $\int (2x+1)\sqrt{x-5}\,dx$;

3) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$.

▲ 2) $\int (2x+1)\sqrt{x-5}\,dx = \left|\begin{matrix} x-5=t, dx=dt \\ x=t+5 \end{matrix}\right| = \int (2t+11)\sqrt{t}\,dt =$

$= \frac{4t^2\sqrt{t}}{5} + \frac{22t\sqrt{t}}{3} = \frac{4(x-5)^2\sqrt{x-5}}{5} + \frac{22(x-5)\sqrt{x-5}}{3} + C$. ■

1.55. Вычислите интеграл, выбрав подходящий метод:

1) $\int x(2x-3)^8 dx$; 2) $\int x(1-2x)^5 dx$;

3) $\int \frac{1-x^3}{1-x}dx$; 4) $\int \frac{x^5-3}{x^2}dx$.

▲ 4) $\int \frac{x^5-3}{x^2}dx = \int x^3 dx - \int \frac{3}{x^2}dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{x} + C$. ■

1.56. Найдите интеграл методом замены переменной:

1) $\int \cos x\sqrt{\sin x}\,dx$; 2) $\int \sin x\sqrt{\cos x}\,dx$;

3) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$; 4) $\int \frac{\operatorname{tg} x+1}{\cos^2 x}dx$.

1.57. Вычислите интеграл:

1) $\int \sin^3 x\,dx$; 2) $\int \cos^3 x\,dx$;

3) $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{\sin^2 x}dx$; 4) $\int 7\frac{\operatorname{tg}^6 x}{\cos^2 x}dx$.

▲ 1) $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x\,dx = \int \sin x \cdot (1-\cos^2 x)dx =$

$= |\cos x = t, -\sin x\,dx = dt| = \int -(1-t^2)dt = \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C =$

$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$. ■

1.58*. Найдите интеграл методом замены переменной:

1) $\int \frac{x+3}{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}dx$; 2) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$; 3) $\int \frac{x^2}{(x-1)^4}dx$.

1.59*. Вычислите интеграл:

1) $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt[3]{3x+12}}$; 2) $\int \frac{2x}{(5-2x)^3}dx$;

3) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2-2x+1}$; 4) $\int (2x+1)\cos(x^2+x+4)dx$.

C

1.60. Найдите интеграл методом замены переменной:

1) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$; 2) $\int \sqrt{t}\sqrt{1+t\sqrt{t}}\,dt$.

1.61*. Найдите интеграл с помощью формулы интегрирования по частям:

1) $\int x^2\sin x dx$; 2) $\int x^3\cos 3x dx$;

3) $\int x\cdot\cos^2 x dx$; 4) $\int x\cdot\sin^2 x dx$.

▲ 1) Чтобы решить задачу, применим метод интегрирования по частям два раза:

$$\int x^2\sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2,\ dv = \sin x dx \\ du = 2xdx,\ v = -\cos x \end{matrix} \right| = -x^2\cos x -$$

$$-\int 2x(-\cos x)dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx;$$

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x,\ \ dv = \cos x dx, \\ du = dx,\ \ v = \sin x \end{matrix} \right| = x\sin x - \int \sin x dx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C \Rightarrow$$

$$\int x^2\sin x dx = -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C = -x^2\cos x +$$

$$+ 2x\sin x + 2\cos x + C.$$ ■

1.62. Найдите интеграл $\int \sin 2x\cos^4 x dx$.

1.63. Найдите интеграл, дважды применив формулу понижения степени:

1) $\int \cos^4 x dx$; 2) $\int \sin^4 x dx$.

Упражнения для повторения

1.64. Найдите значение производной заданной функции в указанной точке:

1) $y = \frac{x-1}{x+1}$, $x_0 = 2$; 2) $y = x\cdot\sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$.

1.65*. Проведите исследование функции $f(x)$ и постройте ее график: $f(x) = x^2(x - 2)^2$.

1.66. Дана функция $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$. Найдите значение $y'(2)$.

1.67. Постройте график функции $f(x) = \dfrac{1 + x - 2x^2}{x+1}$.

1.68. Найдите область определения функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{18x^2 - 3x - 1}}.$$

1.3. Площадь криволинейной трапеции. Определенный интеграл

Изучив пункт, вы:

- узнаете определение криволинейной трапеции;
- научитесь применять формулу Ньютона–Лейбница для нахождения площади криволинейной трапеции;
- познакомитесь с понятием определенного интеграла и научитесь его вычислять;
- научитесь вычислять площади фигур, ограниченных кривыми.

1.3.1. Площадь криволинейной трапеции

Определение. ***Криволинейной трапецией*** *называется фигура, ограниченная графиком неотрицательной непрерывной функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$* (рис. 1.5).

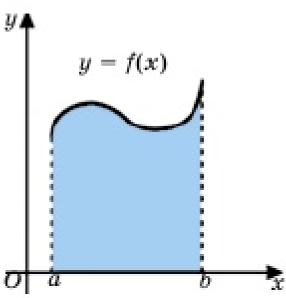


Рис. 1.5

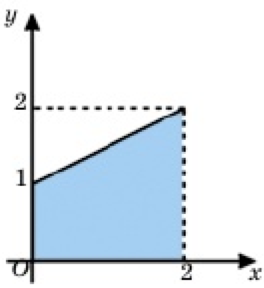


Рис. 1.6

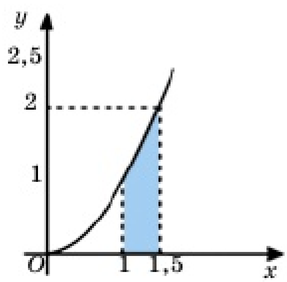


Рис. 1.7

Основанием криволинейной трапеции служит отрезок $[a; b]$ оси Ox. Например, если $f(x) = 0{,}5x + 1$, $x \in [0; 2]$, то соответствующей криволинейной трапецией будет привычная нам трапеция (рис. 1.6).

Криволинейная трапеция для функции $f(x) = x^2$, $x \in [1; 1{,}5]$ изображена на рис. 1.7.

Пусть задана функция $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant 0$. Обозначим через $S(x)$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной заданной функцией и отрезком $[a; x]$ оси Ox (рис. 1.8). Таким образом, $S(x)$ можно рассматривать как функцию, определенную на отрезке $[a; b]$, и $S(a) = 0$.

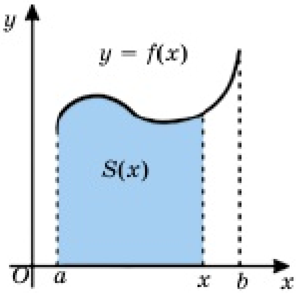


Рис. 1.8

Теорема. *Пусть дана непрерывная функция* $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant 0$, *функция* $F(x)$ – *первообразная для данной функции. Тогда площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции* $y = f(x)$, *осью* Ox *и прямыми* $x = a$, $x = b$, *вычисляется по формуле*

$$S = F(b) - F(a).$$

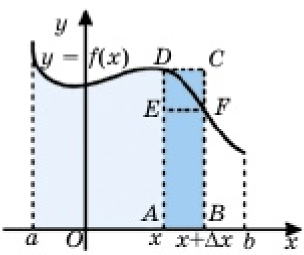


Рис. 1.9

▲ Сначала покажем, что функция $S(x)$ (площадь криволинейной трапеции) является первообразной для функции $f(x)$, т.е. выполнение равенства $S'(x) = f(x)$. По определению производной

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x}.$$

Из рис. 1.9 мы видим, что $S(x + \Delta x) - S(x) = S_{ABFD}$ и $S_{ABFE} \leqslant S_{ABFD} \leqslant S_{ABCD}$.

Площади четырехугольников $ABFE$ и $ABCD$ таковы:

$$S_{ABFE} = f(x + \Delta x) \cdot \Delta x \text{ и } S_{ABCD} = f(x) \cdot \Delta x.$$

Разделив все части неравенства $f(x + \Delta x) \cdot \Delta x \leqslant S_{ABFD} \leqslant f(x) \cdot \Delta x$ на Δx, получим:

$$f(x + \Delta x) \leqslant \frac{S_{ABFD}}{\Delta x} \leqslant f(x). \qquad (1)$$

При $\Delta x \to 0$ из $f(x + \Delta x) \to f(x)$ следует $\dfrac{S_{ABFD}}{\Delta x} \to f(x)$. Принимая во внимание, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{S_{ABFD}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x}$, из двойного неравенства (1) получаем равенство $S'(x) = f(x)$.

Из свойства первообразной (п.1.1) следует, что $S(x) = F(x) + C$. Значит, площадь S данной криволинейной трапеции определяется формулой $S = S(b) = F(b) + C$. Учитывая, что $S(a) = 0$, или $0 = S(a) = F(a) + C$, найдем $C = -F(a)$. Таким образом, получаем равенство $S = F(b) - F(a)$. ■

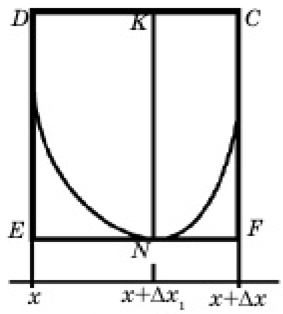


Рис. 1.10

Замечание. В ходе доказательства мы считали, что функция $y = f(x)$ убывает на отрезке $[x;\ x + \Delta x]$ (рис. 1.9). В случае если функция монотонно возрастает на данном отрезке, теорема доказывается аналогично. Тогда достаточно изменить знаки двойного неравенства (1) на противоположные. Если же функция не является монотонной на отрезке $[x;\ x + \Delta x]$, то, уменьшая Δx, этот отрезок можно заменить на отрезок, на котором функция будет монотонной. Например, на рис. 1.10, заменяя Δx на Δx_1, надо взять четырехугольник $DENK$.

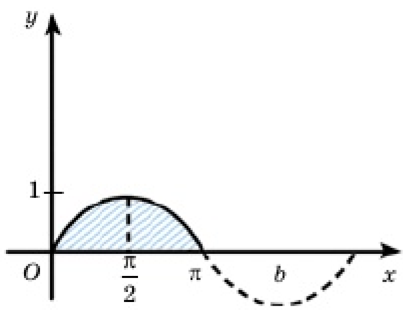


Рис. 1.11

Пример 1. Найдем площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$, $x \in [0;\ \pi]$ и осью абсцисс (рис. 1.11).

▲ В качестве одной из первообразных для функции $y = \sin x$ можно взять функцию $y = -\cos x$. Из $x \in [0;\ \pi]$ получаем $a = 0$, $b = \pi$ (рис. 1.11). Тогда по формуле

$$S = F(b) - F(a)$$

вычисляем площадь данной фигуры: $S = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$, т.е. площадь данной фигуры равна 2.

Ответ: 2 кв.ед. ■

Итак, для вычисления площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$, $f(x) \geqslant 0$, применяется следующий алгоритм:

1) *на координатной плоскости строим график функции* $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$;

2) *находим первообразную* $F(x)$ *для функции* $y = f(x)$;

3) *в случае если начальная и конечная точки отрезка, являющегося основанием криволинейной трапеции, не заданы, вычисляем абсциссы этих точек* (точек a и b);

4) *находим площадь криволинейной трапеции по формуле* $S = F(b) - F(a)$.

Пусть фигура ограничена непрерывными на отрезке $[a; b]$ функциями $f(x) > 0$, $g(x) \geqslant 0$, для которых выполняется условие $f(x) \geqslant g(x)$, $x \in [a; b]$ (рис. 1.12). Тогда площадь этой фигуры вычисляется по формуле

$$S = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)).$$

Здесь функции $F(x)$ и $G(x)$ – первообразные для функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ соответственно.

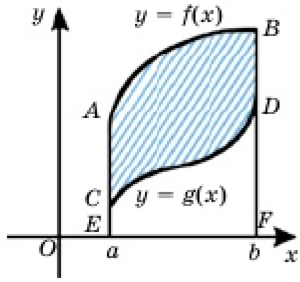


Рис. 1.12

▲ В самом деле из рис. 1.13 видно, что

$S = S_1 - S_2 = (F(b) - F(a)) - (G(b) - G(a)) = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a))$. ■

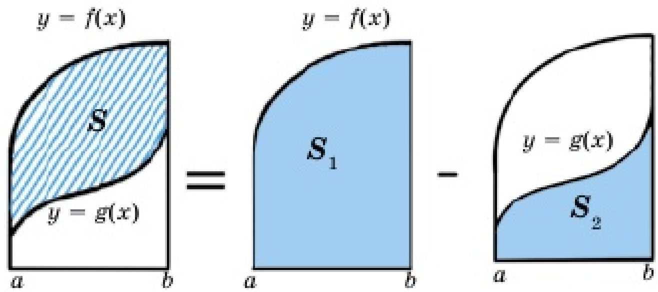


Рис. 1.13

Пример 2. Вычислим площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 5 - x^2$ и $y = (x - 1)^2$ (рис. 1.14).

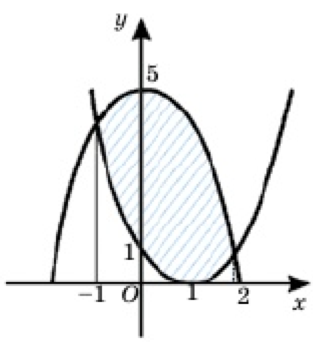


Рис. 1.14

▲ Сначала найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 5 - x^2$ и $y = (x - 1)^2$. Для этого приравняем эти функции (т.к. значения функций в этих точках равны между собой). Получили квадратное уравнение $(x - 1)^2 = 5 - x^2$, его корни таковы: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Одной из первообразных для функции $y = 5 - x^2$ является функция $y = 5x - \dfrac{x^3}{3}$, а для функции $y = (x - 1)^2$ одна из первообразных такова: $y = \dfrac{1}{3}(x - 1)^3$, следовательно,

$$S = \left(5x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}(x-1)^3\right)\bigg|_{x=2} - \left(5x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}(x-1)^3\right)\bigg|_{x=-1} =$$

$$= \left(10 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(-5 + \frac{1}{3} + \frac{8}{3}\right) = 9.$$

Ответ: 9 кв.ед. ■

1.3.2. Определенный интеграл и его свойства

Определение. *Пусть дана непрерывная функция $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$. Разность значений первообразной для данной функции в точках b и a называют* ***определенным интегралом*** *от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ и обозначают так:* $\int\limits_a^b f(x)dx$, *а иногда так:* $\int_a^b f(x)dx$. *Читается: «Определенный интеграл от a до b функции $f(x)$ дэ икс». Числа a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования, а $f(x)$ – подынтегральной функцией.*

Итак, по определению

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Эта формула называется ***формулой Ньютона–Лейбница.***

Разность $F(b) - F(a)$ для сокращения записи обозначают $F(x)\big|_a^b$, поэтому формулу Ньютона–Лейбница можно записать в таком виде:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b. \qquad (2)$$

Пример 3. Вычислим интеграл: 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; 2) $\int\limits_1^2 (x^2 - 3)dx$.

▲ 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

2) $\int\limits_1^2 (x^2 - 3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 3x\right)\bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 3\cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 3\cdot 1\right) = -\frac{2}{3}.$ ■

Определенный интеграл можно применить при вычислении площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $f(x) \geqslant 0$, снизу – осью абсцисс и с боков – прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 1.15). Например, площадь фигуры, ограниченной параболой $f(x) = 4x - x^2$ и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла: $S = \int_0^4 \left(4x - x^2\right) dx$ (рис. 1.16).

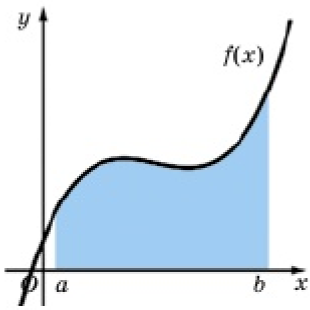


Рис. 1.15

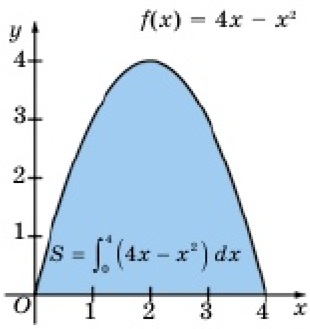


Рис. 1.16

Таким образом, геометрический смысл определенного интеграла от неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant 0$ заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, снизу – осью абсцисс, слева и справа – отрезками прямых $x=a$, $x=b$.

Пример 4. Изобразите фигуру, площадь которой равна данному интегралу, и вычислите эту площадь:

1) $\int\limits_1^3 4dx$; 2) $\int\limits_0^3 (x+2)\,dx$; 3) $\int\limits_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

▲ 1) Геометрический смысл определенного интеграла $\int\limits_1^3 4dx$ – площадь прямоугольника, представленного на рис. 1.17. Вычислим ее геометрическим способом. Площадь прямоугольника такова: $S = 2 \cdot 4 = 8$ (кв.ед.). Теперь найдем площадь этой фигуры с помощью определенного интеграла:

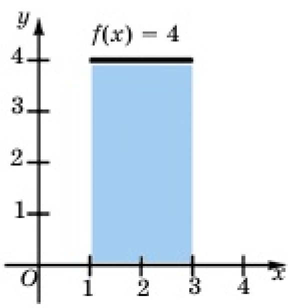


Рис. 1.17

$$S = \int\limits_1^3 4dx = 4x \,\Big|_1^3 = 4 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 12 - 4 =$$

$$= 8 \text{ (кв.ед.)}.$$

2) Трапеция, площадь которой выражается определенным интегралом $\int_0^3 (x+2)\,dx$, изображена на рис. 1.18. Вычислим сначала площадь трапеции геометрическим способом. Ее большее основание $a = 5$, меньшее основание $b = 2$, а высота $h = 3$, следовательно,

$$S = \frac{a+b}{2}\cdot h = \frac{5+2}{2}\cdot 3 = \frac{21}{2} = 10{,}5 \text{ (кв.ед.)}.$$

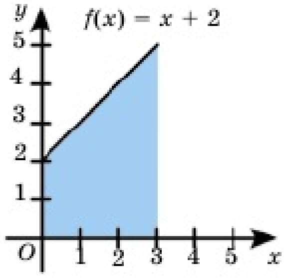


Рис. 1.18

Теперь вычислим площадь фигуры по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_0^3 (x+2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^3 = \left(\frac{9}{2} + 6\right) - 0 = 10{,}5.$$

3) $S = \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx.$

Рассмотрим подынтегральную функцию $y = \sqrt{4 - x^2}$. Возведя обе части равенства в квадрат и перенеся переменные в одну его часть, получим уравнение $y^2 + x^2 = 4$, т.е. уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом 2 (рис. 1.19). Данный определенный интеграл выражает площадь верхнего полукруга. Вычислим ее геометрическим способом:

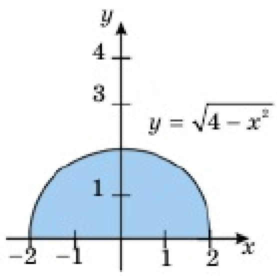


Рис. 1.19

$$S = \frac{\pi \cdot R^2}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi \text{ (кв.ед.)}.$$

Работа в группе

Решите задачу (3), применяя метод замены переменной: $x = 2\sin t$.

Свойства определенного интеграла

1°. *При перестановке пределов интегрирования знак определенного интеграла меняется на противоположный:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Например, $\int_3^0 (x+2)\,dx = -\int_0^3 (x+2)\,dx$.

2°. *Для любой функции $f(x)$ имеет место следующее равенство:*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Убедимся в этом на примере интеграла $\int_\pi^\pi \sin x dx$:

$$\int_\pi^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_\pi^\pi = -\cos\pi + \cos\pi = 0.$$

3°. *Для любых чисел a, b и c справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Например, $\int_{-1}^1 |x|dx = \int_{-1}^0 (-x)dx + \int_0^1 xdx = 0,5 + 0,5 = 1.$

4°. *Для любых функций $f(x)$, $g(x)$ и постоянного числа k справедливы следующие равенства:*

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \quad и \quad \int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

5°. *Для любой неотрицательной функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant 0$, выполняется следующее неравенство:*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

Работа в группе

С помощью формулы Ньютона–Лейбница докажите свойства определенного интеграла и их следствия.

Докажем, например, свойство 3°.

$$▲ \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = (F(b) - F(c)) + (F(c) - F(a)) =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. ■$$

Пример 5. Найдем площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x \geqslant 0$ и осью ординат (рис. 1.20).

▲ Сначала найдем точки пересечения данных кривых. Для этого решим уравнение

$$\sin x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$$

Из множества всех решений уравнения условию задачи удовлетворяет $x = \frac{\pi}{4}$.

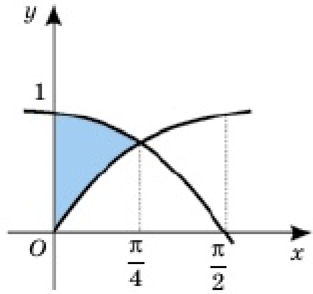


Рис. 1.20

Таким образом,

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx = (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - \sin 0 - \cos 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1 \text{ (кв. ед.)}. \blacksquare$$

При вычислении определенного интеграла с помощью метода замены переменной необходимо также изменить пределы интегрирования, соответствующие новой переменной.

$$\int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2+1\right)^3 (2x)\,dx =$$

Пределы интегрирования по переменной x

$$= \left|u = x^2 + 1\right| = \frac{1}{2}\int_1^2 u^3 du = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right)$$

Пределы интегрирования по переменной u

Закончим вычисление интеграла:

$$\frac{1}{2}\int_1^2 u^3 du = \frac{1}{2}\frac{u^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{1}{8}(16-1) = \frac{15}{8}.$$

1. Что называется криволинейной трапецией?
2. Какая формула применяется для вычисления площади криволинейной трапеции?
3. Что называют определенным интегралом?
4. Запишите формулу Ньютона–Лейбница.
5. Напишите свойства определенного интеграла и поясните их смысл.

Дополнительные электронные ресурсы

https://www.desmos.com/calculator–графический онлайн-калькулятор

Упражнения

А

1.69. Найдите площади фигур, изображенных на рисунках 1.21, 1.22, геометрическим способом и с помощью определенного интеграла.

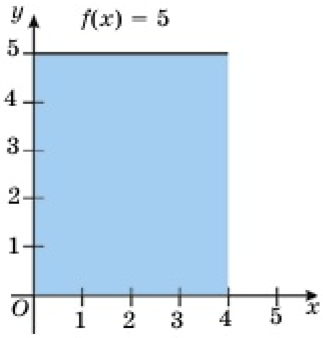


Рис. 1.21

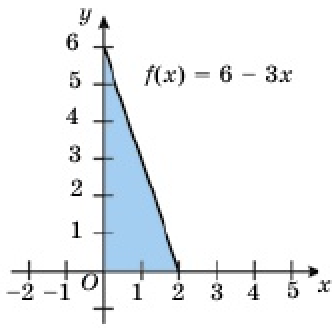


Рис. 1.22

1.70. Выразите с помощью определенного интеграла площади криволинейных трапеций, изображенных на рисунках 1.23, 1.24, и вычислите их.

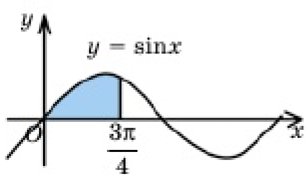


Рис. 1.23

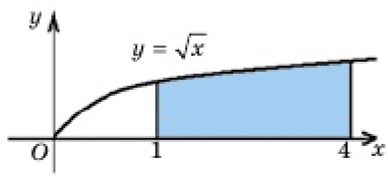


Рис. 1.24

1.71. Вычислите площади криволинейных трапеций, изображенных на рисунках 1.25 –1.27, записав их с помощью определенного интеграла.

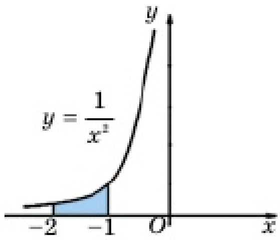


Рис. 1.25

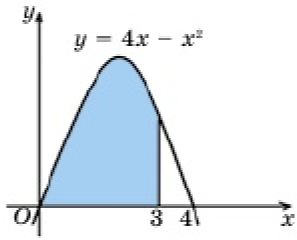


Рис. 1.26

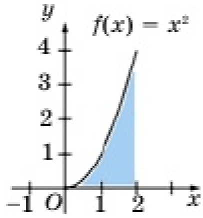


Рис. 1.27

1.72. Изобразите фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс. Результат проверьте с помощью графического онлайн-калькулятора:

1) $y = x$, $a = 0$, $b = 2$; 2) $y = x^2$, $a = 0$, $b = 2$;

3) $y = \cos x$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$; 4) $y = 1 - x^2$, $a = -1$, $b = 1$.

1.73. Изобразите криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс:

1) $y = x^2$, $a = 1$, $b = 3$; 2) $y = x^3$, $a = 0$, $b = 1$;

3) $y = 4x - x^2$, $a = 2$, $b = 4$; 4) $y = \frac{1}{x^2}$, $a = -2$, $b = -1$.

1.74. Определите функции, графики которых ограничивают криволинейные трапеции, изображенные на рисунках 1.28, 1.29, и вычислите площади этих трапеций.

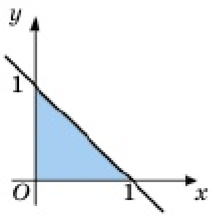


Рис. 1.28

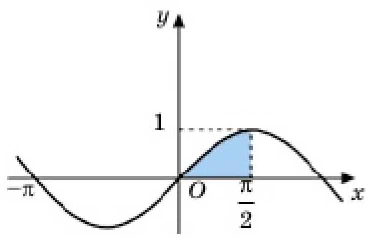


Рис. 1.29

1.75. Найдите площади фигур, данных в задаче **1.72.**

1.76. Найдите площади фигур, данных в задаче **1.73.**

1.77. Вычислите:

1) $\int_{2}^{6} 8dx$; 2) $\int_{-2}^{3} xdx$; 3) $\int_{-1}^{1} x^3dx$;

4) $\int_{1}^{4} 4x^2 dx$;   5) $\int_{-2}^{1} (2x^2 + 3) dx$.

1.78. Найдите площади фигур, ограниченных следующими кривыми, сделайте соответствующий чертеж:

1) $y = 2 - x$, $x = 0$, $y = 0$;

2) $y = 2x - x^2$, $y = 0$;

3) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$;

4) $y = x - 1$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.

1.79. Определите функции, графики которых ограничивают фигуру, изображенную на рисунке 1.30, и вычислите площадь этой фигуры.

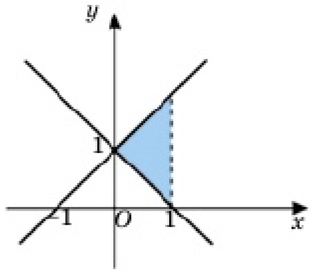


Рис. 1.30

1.80. С помощью формулы Ньютона–Лейбница вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, снизу – заданным отрезком оси абсцисс:

1) $f(x) = x + 2$ и отрезок $[0; 4]$;

2) $f(x) = 4 - x^2$ и отрезок $[-1; 2]$.

1.81. Пользуясь формулой Ньютона–Лейбница, вычислите значение определенного интеграла:

1) $\int_{-5}^{5} 10x^3 dx$;   2) $\int_{-1}^{6} 6x(x-1) dx$;   3) $\int_{-1}^{3} (3x^2 - 5) dx$;

4) $\int_{-2}^{1} (12x^5 - 36) dx$;   5) $\int_{-1}^{1} (x^4 + x^2) dx$;   6) $\int_{-5}^{4} x^2 dx$.

1.82. Вычислите:

1) $\int_{-2}^{3} (2x - 1) dx$;   2) $\int_{1}^{8} (3 - x) dx$;   3) $\int_{1}^{9} \sqrt{x} dx$;   4) $\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

1.83. Вычислите:

1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$;   2) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{2\sin^2 x}$;   3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$;

4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$;   5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin x dx$.

1.84. Выполните тестовое задание: вычислите значения данных определенных интегралов.

1. $\int_0^4 \sqrt{x}dx$.

a) 5; b) – 3; c) 10; d) $5\frac{1}{3}$; e) $2\frac{1}{4}$.

2. $\int_0^{\frac{1}{2}} 4\cos\pi x dx$.

a) 4; b) $-\frac{1}{2\pi}$; c) 2π; d) $2\frac{1}{3}$; e) $\frac{4}{\pi}$.

3. $\int_0^1 2\sin\pi x dx$.

a) $\frac{4}{\pi}$; b) $\frac{1}{2\pi}$; c) 15π; d) $\frac{2}{\pi}$; e) $\frac{1}{\pi}$.

4. $\int_0^9 \left(1+\sqrt{x}\right)dx$.

a) – 3; b) 9; c) 27; d) 3; e) 2.

1.85. Вычислите:

1) $\int\limits_1^2 \frac{x^2+\sqrt{x}}{x}dx$; 2) $\int\limits_0^2 \left(x^2+2x\right)dx$;

3) $\int\limits_1^3 \left(x^2+1\right)dx$; 4) $\int\limits_0^2 \left(2x-x^2\right)dx$.

1.86. Вычислите:

1) $\int\limits_0^2 \left(x^2+2\right)dx$; 2) $\int\limits_0^4 3\sqrt{x}dx$;

3) $\int\limits_{-1}^1 \left(\frac{1}{x^2}+x^{-3}\right)dx$; 4) $\int\limits_{-2}^1 \left(\frac{3}{x^3}-2x^2\right)dx$.

1.87. Вычислите:

1) $\int\limits_1^2 \frac{4x^5-3x^4+x^3-1}{x^2}dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{5x^7-4x^6+2x}{x^3}dx$;

3) $\int\limits_2^3 \frac{6x^4-4x^3+7x^2-1}{x^2}dx$; 4 $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{3x^6-4x^5-7x^4+3x^2}{x^4}dx$.

1.88. Вычислите:

1) $\int\limits_0^{\pi} \left(5x^4-5\cos x\right)dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(7\sin x-3x^2\right)dx$;

3) $\int\limits_{0}^{1}\left(3x^2-2x+1\right)dx$;

4) $\int\limits_{1}^{3}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$.

1.89. Вычислите интеграл, предварительно упростив подынтегральное выражение:

1) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{\left(x^2-2x\right)\left(3-2x\right)}{x-2}dx$;

2) $\int\limits_{2}^{3}\frac{\left(x^2-3x+2\right)\left(2+x\right)}{x-1}dx$;

3) $\int\limits_{2}^{3}\frac{\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)}{x^2+x-2}dx$;

4) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\left(9-x^2\right)\left(x^2-16\right)}{x^2-7x+12}dx$.

1.90. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{8}}\sin 2x\,dx$;

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}4\cos 3x\,dx$.

1.91. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx$;

2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2\sin\frac{x}{3}dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{5}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx$;

4) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{7}{\cos^2 3x}dx$.

1.92. Вычислите интеграл, преобразовав подынтегральную функцию:

1) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cos^2\frac{x}{2}dx$;

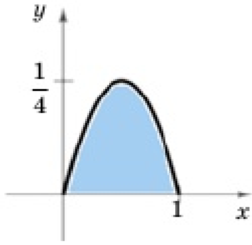
2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cos 3x\,dx$;

3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 3x\,dx$;

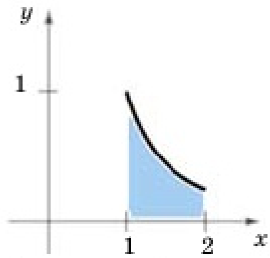
4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos 7x\cos 5x\,dx$.

1.93. С помощью определенного интеграла, вычислите площади следующих криволинейных трапеций:

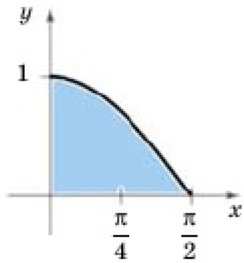
1) $y = x - x^2$



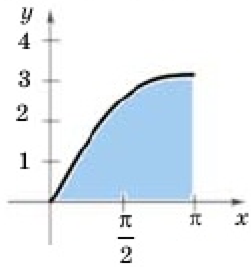
2) $y = \dfrac{1}{x^2}$



3) $y = \cos x$



4) $y = x + \sin x$



1.94. Изобразите трапецию, ограниченную указанными линиями, и вычислите ее площадь геометрическим способом:

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ x = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

1.95. Найдите площадь трапеции, ограниченной указанными прямыми, геометрическим способом и с помощью интеграла, сделайте чертеж:

1) $\begin{cases} y = -\dfrac{2}{3}x + 4, \\ y = 0, \\ x = 0, \\ x = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 4x - 5, \\ y = 0, \\ x = -2, \\ x = -3. \end{cases}$

1.96. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной кубической параболой и прямыми:

1) $\begin{cases} y = x^3 - x, \\ y = 0, \\ x = -1, \\ x = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x^3, \\ y = 0, \\ x = -3, \\ x = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 4x^3, \\ y = 0, \\ x = 1, \\ x = 2. \end{cases}$

1.97. Изобразите криволинейную трапецию, ограниченную заданной параболой и осью абсцисс, и вычислите ее площадь:

1) $\begin{cases} y = 9 - x^2, \\ y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x^2 + 2x, \\ y = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - x - 6, \\ y = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4, \\ y = 0. \end{cases}$

1.98. Изобразите криволинейную трапецию, ограниченную указанными параболой и прямыми, и вычислите ее площадь:

1) $\begin{cases} y = 0, \\ y = 2x^2 + 1, \\ x = -1, \\ x = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x^2 + 1, \\ y = 0, \\ x = 1, \\ x = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - x, \\ y = 0, \\ x = 0, \\ x = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 2, \\ y = 0, \\ x = 0, \\ x = 2. \end{cases}$

▲ 4) Фигура, ограниченная заданными параболой и прямыми, изображена на рис. 1.31. Для того чтобы найти площадь этой фигуры, достаточно вычислить интеграл:

$$S = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)\,dx =$$

$$= \left(2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^2 = \left(2\frac{2^3}{3} - 3\frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right) - \left(2\frac{0^3}{3} - 3\frac{0^2}{2} + 2\cdot 0\right) = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$ ■

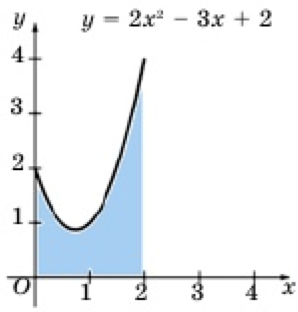


Рис. 1.31

1.99. Выполните следующее задание.

1) Выполняется ли равенство $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, если $f(x)$ – четная функция? Почему?

2) Вычислите рациональным способом площади фигур, изображенных на рисунках 1.32, 1.33.

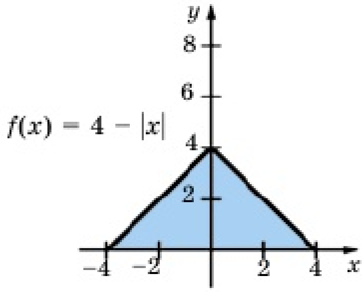


Рис. 1.32

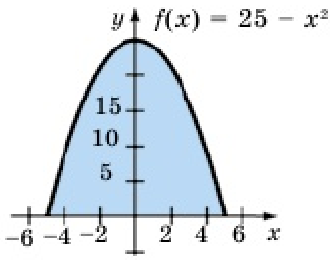


Рис. 1.33

B

1.100. Изобразите фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс, и вычислите ее площадь:

1) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $a = 1$, $b = 2$; 2) $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $xy = 4$, $a = 1$, $b = 4$; 4) $y = 4 - x^2$.

1.101. Изобразите трапецию, ограниченную указанными линиями, и найдите ее площадь:

1) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{9}x^2, \\ y = x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2 + 4, \\ y = 6 - x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 2x^2 - x, \\ y = x. \end{cases}$

1.102. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной следующими кривыми:

1) $\begin{cases} f(x) = x^2, \\ g(x) = 2x - x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}x^2, \\ g(x) = 4 - x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}, \\ g(x) = x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x}, \\ x = 1, \\ x = 9. \end{cases}$

▲ 1) Построим графики функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = 2x - x^2$ (рис. 1.34).
Мы видим, что на отрезке, на котором задана криволинейная трапеция, график функции $g(x)$ расположен выше графика функции $f(x)$. Для того чтобы

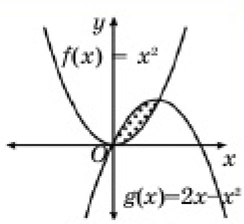


Рис. 1.34

найти точки пересечения парабол, приравняем функции и решим полученное уравнение:
$x^2 = 2x - x^2$;
$2x^2 - 2x = 0$;
$2x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$.
Теперь найдем первообразные для заданных функций

$$F(x) = \frac{x^3}{3},\ G(x) = x^2 - \frac{x^3}{3}.$$

Применяя формулу Ньютона–Лейбница, вычислим искомую площадь:

$$S = \int_0^1 (G(x) - F(x))dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

1.103. Изобразите фигуру, ограниченную указанными линиями, и вычислите ее площадь:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 5 + 3x - 2x^2, \\ y = x + 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 + 4x, \\ y = x + 4. \end{cases}$

1.104. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_1^2 x\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)dx$; 2) $\int_1^2 \frac{x^6 + 8x^4 + x}{x}dx$;

3) $\int_{-1}^1 (x+1)^2(2x+3)dx$; 4) $\int_6^8 (x-7)^7 dx$.

1.105. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_{-1}^1 (2x+3)^6 dx$; 2) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x-3)^{10}}dx$;

3) $\int_3^4 \sqrt{x-3}\, dx$; 4) $\int_{-8}^8 \frac{dx}{\sqrt{5 + \frac{x}{2}}}$.

1.106. Вычислите определенный интеграл, предварительно преобразовав подынтегральное выражение:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{16}} \sin 2x \cos 2x dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin x + \cos x)^2 dx$; 3) $\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x dx$;

4) $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 x dx$; 5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) dx$.

1.107*. Вычислите интеграл $\int_{-1}^{4} f(x) dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leqslant x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x < 2, \\ 3, & 2 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$$

1.108. Вычислите интеграл, используя свойства модуля:

1) $\int_0^3 |x - 2| dx$; 2) $\int_{-3}^{1} |x| dx$; 3) $\int_0^4 |2x - 6| dx$; 4) $\int_0^2 |2x - 1| dx$.

▲ 4) Найдем значение интеграла $\int_0^2 |2x - 1| dx$ (рис. 1.35). По определению модуля запишем подынтегральную функцию в виде:

$$|2x - 1| = \begin{cases} -(2x - 1), & x < 0,5, \\ 2x - 1, & x \geqslant 0,5. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int_0^2 |2x - 1| dx = \int_0^{0,5} (-2x + 1) dx + \int_{0,5}^2 (2x - 1) dx,$$

$$\int_0^{0,5} (-2x + 1) dx = \frac{1}{4}, \text{ а}$$

$$\int_{0,5}^2 (2x - 1) dx = 2,25, \quad \int_0^2 |2x - 1| dx = 0,25 + 2,25 = 2,5. ■$$

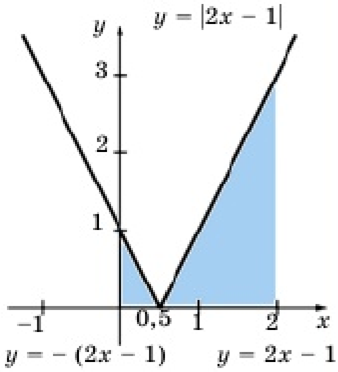


Рис. 1.35

1.109. Разбив отрезок интегрирования подходящим образом, найдите следующий интеграл:

1) $\int_0^3 f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}4, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & 2\leqslant x\leqslant 3;\end{cases}$

2) $\int_{-2}^2 f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x<-1,\\ 4, & -1\leqslant x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

1.110. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

1) $y = x^4 - 29x^2 + 100$, $y = 0$;

2) $y = 2\cos x$, $y = 1$, $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

1.111. Найдите значения A, B и C, при которых выполняется следующее равенство:

1) $\int_{-1}^{1}\left(Ax^2+Bx+C\right)dx=0$; 2) $\int_{-1}^{1}\left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot xdx=0$.

C

1.112*. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

1) $4y = x^2$, $y^2 = 4x$; 2) $y = \cos^5 x\sin 2x$, $y = 0$, $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

▲ Методом замены переменной найдем следующий интеграл:

$$\int\cos^6 x\sin x dx = \left|\cos x = t \Rightarrow -\sin x = dt\right| =$$

$$=\int -t^6dt = -\frac{t^7}{7}+C = -\frac{\cos^7 x}{7}+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\sin x dx = -\frac{2\cos^7 x}{7}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2\cos^7\frac{\pi}{2}}{7}+\frac{2\cos^7 0}{7}=\frac{2}{7}.$$ ■

1.113. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$, $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

1.114. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_0^1 (2x^2-5)^3\,dx$; 2) $\int_3^{-18} \sqrt[3]{2-\frac{x}{3}}\,dx$; 3) $\int_0^3 (1+2x)^9\,dx$;

4) $\int_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}$; 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$; 6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

1.115. Чему равно значение интеграла $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, если функция $f(x)$ – нечетная? Сделайте вывод.

1.116. Объясните, почему следующие выводы не верны:

1) $\int_{-1}^{1} x^{-2}dx = \left(-x^{-1}\right)\Big|_{-1}^{1} = (-1)-1 = -2$;

2) $\int_{-2}^{1} \frac{2}{x^3}dx = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\Big|_{-2}^{1} = -\frac{3}{4}$.

Творческая работа

Найдите площадь части здания «Москва», ограниченной параболой (рис. 1.36).

Примечание. По количеству этажей, охваченных параболой, подсчитаем ее высоту и расстояние между крайними точками дуги. Вершина параболы расположена на пятом этаже. Параболой охвачено 17 этажей здания. Высота каждого этажа равна примерно 3 м. Расстояние между крайними точками дуги параболы, расположенными на верхнем этаже, приблизительно равно 44 м. В результате получаем график параболы (рис. 1.37).

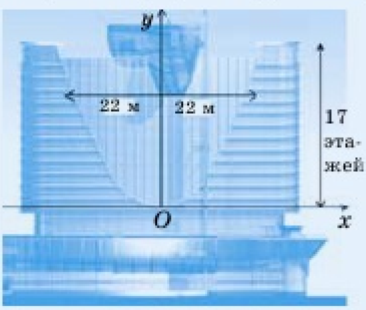


Рис. 1.36

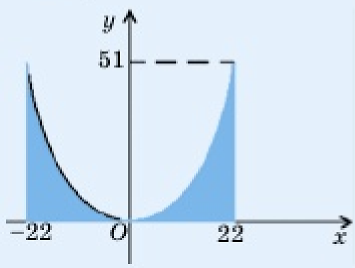


Рис. 1.37

Упражнения для повторения

1.117. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y}$; 2) $\dfrac{\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}$.

1.118. Найдите сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 1.

1.119. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 8$;

2) $y = 3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + 49$.

1.4. Применение определенного интеграла к решению геометрических и прикладных задач

Изучив пункт, вы:

- научитесь применять определенный интеграл к решению физических задач на нахождение пути по заданной скорости и вычисление работы переменной силы;
- узнаете формулу вычисления объема тела вращения с помощью определенного интеграла и научитесь ее применять.

1.4.1. Применение определенного интеграла к решению задач на нахождение пути и работы

С помощью определенного интеграла можно решать задачи на нахождение пройденного пути. Вам известно, что механический смысл производной заключается в том, что производная пути по времени равна скорости:

$$v(t) = s'(t).$$

Следовательно, пройденный путь вычисляется по формуле

$$s(t) = \int v(t)dt.$$

Рассмотрим пример. Пусть автомобиль в течение 15 мин ($\frac{1}{4}$ ча-

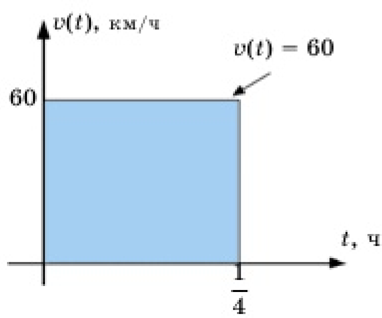


Рис. 1.38

са) движется с постоянной скоростью 60 км/ч. Тогда путь, пройденный автомобилем таков:

$$s = v \cdot t = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15 \text{ км}.$$

Если построить график зависимости скорости от времени (рис. 1.38), то он представляет собой горизонтальную прямую, а путь, пройденный автомобилем, равен площади закрашенного прямоугольника. Следовательно, пройденный автомобилем путь можно вычислить с помощью определенного интеграла:

$$s = \int_0^{\frac{1}{4}} 60\, dt = 15 \text{ км}.$$

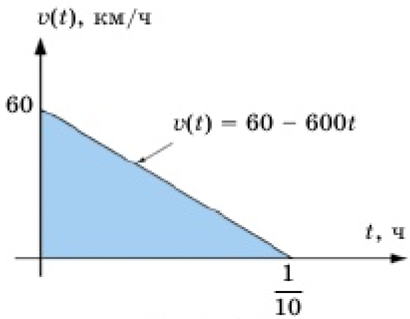


Рис. 1.39

Предположим теперь, что скорость автомобиля равномерно убывает, и через 6 мин автомобиль остановится (рис.1.39). В этом случае средняя скорость такова:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{60 + 0}{2} = 30 \text{ км/ч}.$$

Тогда пройденный автомобилем путь найдем так:

$$s = v_{\text{ср.}} \cdot t = 30 \cdot \frac{1}{10} = 3 \text{ км}.$$

Вычислим теперь путь, пройденный автомобилем, с помощью определенного интеграла и убедимся, что мы придем к тому же результату.

Сначала найдем уравнение линейной функции, выражающей зависимость скорости от времени. Применим формулу для нахождения уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{v - v_1}{v_2 - v_1} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \frac{v - 60}{0 - 60} = \frac{t - 0}{\frac{1}{10} - 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}(v - 60) = -60t \Rightarrow v = 60t - 600t.$$

Теперь, применяя определенный интеграл, получим:

$$s = \int_0^{\frac{1}{10}} (60 - 600t)\,dt = \left(60t - 300t^2\right)\Big|_0^{\frac{1}{10}} = 3\ \text{км}.$$

Из приведенных выше двух примеров мы видим, что в случае если направление скорости не меняется, путь, пройденный материальной точкой, можно вычислить по формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt. \qquad (1)$$

Если же изменить направление скорости, то определенный интеграл примет отрицательное значение. Так как расстояние может выражаться только положительным числом, в общем случае пройденный путь вычисляется с помощью следующего интеграла:

$$s = \left|\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt\right|.$$

Заключение. Пусть скорость движения материальной точки задана непрерывной функцией $v(t)$. Тогда путь, пройденный материальной точкой за время от момента t_1 до момента t_2, численно равен величине площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = v(t)$, прямыми $t = t_1$, $t = t_2$ и отрезком $[t_1;\ t_2]$ оси абсцисс.

Пример 1. Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t) = t^3 - 2t + 3$ (м/с). Найдем путь, пройденный точкой, за промежуток времени [0; 2].

▲ По формуле (1) получим:

$$s = \int_0^2 \left(t^3 - 2t + 3\right)dt = \left(\frac{t^4}{4} - t^2 + 3t\right)\Big|_0^2 = 6\ \text{м}.$$

Ответ: 6 м. ■

Пусть тело, рассматриваемое как материальная точка, движется вдоль оси Ox под действием переменной силы $F = F(x)$. Под действием силы F тело перемещается из точки a в точку b и при этом совершаемая работа вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \qquad (2)$$

Пример 2. Для того чтобы растянуть пружину на 1 см, нужно приложить силу 0,2 кН. Какую работу нужно совершить для растяжения пружины на 10 см?

▲ Согласно закону Гука сила упругости пропорциональна этому растяжению, т.е. $F = kx$, где x – величина растяжения пружины. Согласно условию задачи под действием силы $F = 0{,}2$ кН пружина растягивается на $x = 1$ см. Следовательно, $0{,}2 = k \cdot 0{,}01 \Rightarrow k = 20$ – коэффициент пропорциональности. Таким образом, под действием силы $F = 20x$ пружина растягивается на 0,1 м (10 см), при этом совершаемая работа вычисляется по формуле (2):

$$A = \int_0^{0,1} 20x\,dx = 10x^2\Big|_0^{0,1} = 0{,}1 \text{ кДж.}$$

Ответ: 0,1 кДж. ■

Примечание. Помните, что формулы (1) и (2) можно применять только в случае прямолинейного движения материальной точки.

1.4.2. Вычисление объема тела

Мы видели, что с помощью определенного интеграла можно находить площади криволинейных трапеций. Теперь покажем, как определенный интеграл применяется для вычисления объема тела. Заметим, что точное определение понятия объема и его свойства мы изучим в курсе геометрии.

Пусть дано тело D. Обозначим через $S(x)$площадь сечения данного тела плоскостью, параллельной плоскости Oyz и проходящей через точку с абсциссой x (рис. 1.40). Будем считать, что функция $S(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Найдем объем тела D.

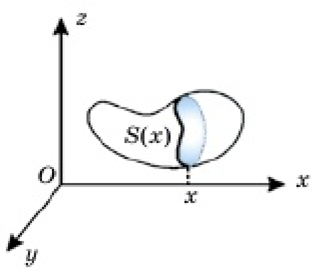


Рис. 1.40

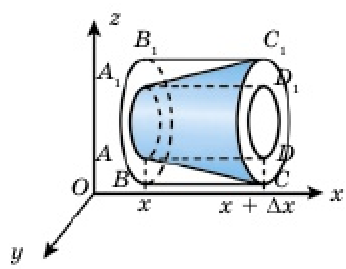


Рис. 1.41

Обозначим через $V(x)$ объем части тела D, соответствующей отрезку a до x, $x\in[a; b]$. Тогда имеет место равенство $V'(x) = S(x)$. В самом деле, если мы дадим x приращение Δx, $\Delta x > 0$, то соответствующее приращение функции $V(x)$ запишется в виде: $\Delta V = V(x+\Delta x) - V(x)$. Из рисунка 1.41 видно, что $\Delta V = V_{AA_1C_1C}$. Объем этой части тела D больше объема цилиндра AA_1D_1D, но меньше объема цилиндра BB_1C_1C. Из условий $S_{AA_1D_1D} = S(x)\cdot\Delta x$, $S_{BB_1C_1C} = S(x+\Delta x)\cdot\Delta x$ следует выполнение неравенства

$$S(x)\cdot\Delta x \leqslant \Delta V \leqslant S(x+\Delta x)\cdot\Delta x \Rightarrow S(x) \leqslant \frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x} \leqslant S(x+\Delta x).$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $\Delta x \to 0$ и принимая во внимание $\lim\limits_{\Delta x\to 0} S(x) = S(x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} S(x+\Delta x) = S(x)$, получим $V'(x) =$ $= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x} = S(x)$.

Из этого равенства следует, что $V(x)$ является первообразной для функции $S(x)$. Отсюда в силу формулы Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b S(x)\,dx = V(b) - V(a).$$

Учитывая $V(b)=V$, $V(a)=0$, получаем формулу $V = \int_a^b S(x)\,dx$.

Таким образом, для применения формулы $V = \int_a^b S(x)\,dx$ нам должна быть известна функция $S(x)$. Конечно, самостоятельно определить вид функции $S(x)$ довольно сложно, но все же в некоторых случаях можно найти такую функцию. К таким частным случаям относятся тела вращения.

1.4.3. Объем тела вращения

Определение. ***Телом вращения*** *называется тело, полученное вращением вокруг оси Ox графика функции* $y = f(x)$, *непрерывной на отрезке* $[a; b]$ (рис. 1.42).

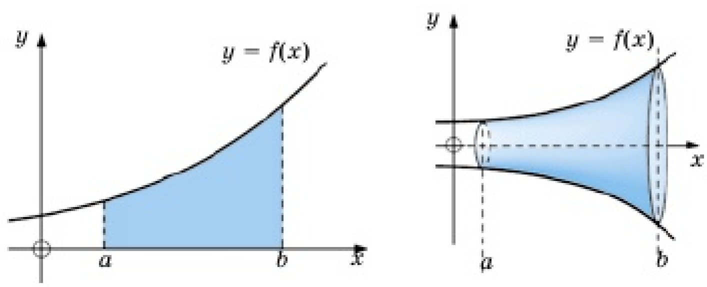
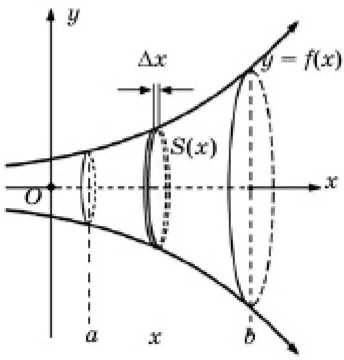


Рис. 1.42

Работа в паре

Какие фигуры и как должны быть расположены относительно осей абсцисс и ординат, чтобы при вращении получить цилиндр, конус, усеченный конус, шар?



1.43-сурет

Для вычисления объема тела применяется определенный интеграл. Возьмем любую точку x на отрезке $[a;b]$ и проведем через эту точку плоскость, перпендикулярную оси Ox. В сечении получим круг (рис. 1.43). Радиус этого круга равен $f(x)$. Значит, $S(x) = \pi f^2(x)$.

Применяя формулу $V = \int_a^b S(x)dx$, получим следующую формулу для вычисления объема тела вращения:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (3)$$

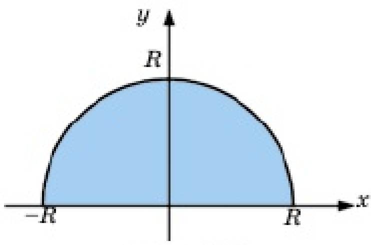


Рис. 1.44

Пример 1. Докажем справедливость формулы $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ для нахождения объема шара радиуса R.

▲ Шар получается вращением верхнего полукруга вокруг оси Ox (рис. 1.44). Уравнение верхней полуокружности записывается в виде $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Следовательно,

$$V = \pi\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3. \ ■$$

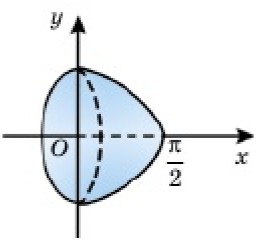


Рис. 1.45

Пример 2. Найдем объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox графика функции $y = \cos x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис 1.45).

▲ Применяя формулу (3) и формулу понижения степени, получим

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \pi\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$ ■

1. Напишите формулу для вычисления пути, пройденного материальной точкой, двигавшейся прямолинейно со скоростью $v = v(t)$, $t\in[t_1; t_2]$.
2. Объясните, чему равно значение площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции, описывающей зависимость скорости от времени.
3. Выведите формулу объема шара.
4. Напишите формулу вычисления объема тела с помощью определенного интеграла.
5. Какое тело называют телом вращения?
6. По какой формуле находят объем тела вращения?
7. Как найти работу переменной силы $F = F(x)$, $x\in[a; b]$?

Дополнительные электронные ресурсы

https://www.desmos.com/calculator – графический онлайн-калькулятор

Упражнения

А

1.120. Ученик бежит со скоростью, график зависимости которой от времени показан на рисунке 1.46. Найдите путь, который пробежал ученик.

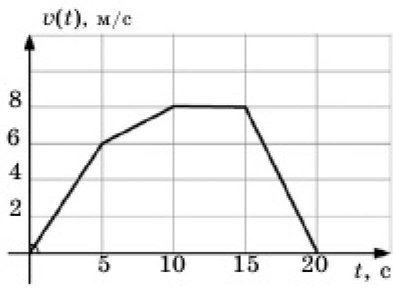


Рис. 1.46

1.121. Найдите путь, пройденный материальной точкой за время t, если скорость движения точки задана функцией $v(t)$:

1) $v(t) = t - 3,\ t = 3$; 2) $v(t) = 3t + 5,\ t = 5$;
3) $v(t) = t^2 + 4t - 1,\ t = 3$; 4) $v(t) = 3t^2 - 2t + 4,\ t = 2$.

1.122. Зависимость скорости движения материальной точки от времени задана формулой $v(t) = t^2 - 3t + 2$. Найдите путь, пройденный точкой за первые четыре секунды движения, и расстояние, на которое она удалилась от начальной точки.

▲ График параболы $v(t) = t^2 - 3t + 2$ изображен на рисунке 1.47. Площади криволинейных трапеций, расположенных выше оси t, соответствуют пути, пройденного точкой в положительном направлении. Согласно графику за первую секунду точка, двигаясь в положительном направлении, прошла следующий путь:

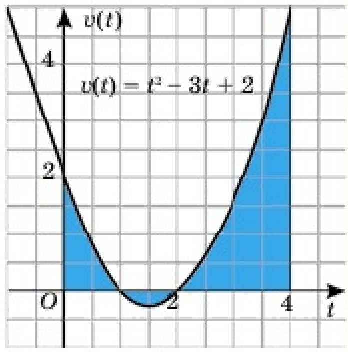


Рис. 1.47

$$s_1 = \int_0^1 (t^2 - 3t + 2)dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Затем в течение второй секунды точка двигалась в противоположном направлении, пройдя такой путь:

$$s_2 = \int_1^2 |t^2 - 3t + 2|dt = \left|\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right)\Bigg|_0^2\right| = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}.$$

После второй секунды точка сменила направление на положительное и прошла следующий путь:

$$s_3 = \int_2^4 (t^2 - 3t + 2)dt = \frac{14}{3}.$$

Таким образом, весь путь, пройденный точкой, таков:

$$s = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = 5\frac{2}{3} \text{ (ед.).}$$

А расстояние, на которое материальная точка удалилась от начальной точки за первые четыре секунды, таково:

$$D = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ (ед.).}$$

1.123. Скорость движения материального тела задана функцией $v(t) = 1 - 2t$ м/с. Найдите путь, пройденный телом за первую секунду, и расстояние, на которое оно удалилось от начальной точки.

1.124. Найдите путь, пройденный материальным телом за первые три секунды движения, и расстояние, на которое удалено тело от начальной точки, если его скорость задана функцией: 1) $v(t) = t^2 - t - 2$ м/с; 2) $v(t) = 3t^2 + 4t$ м/с.

Прикладная задача

1.125. Скорость движения поезда задана функцией $v(t) = \frac{t}{10} - 3$ м/с. Найдите путь, пройденный поездом за первую минуту движения, если его начальная скорость равна 45 м/с.

1.126. Применяя формулу $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$, вычислите объемы тел вращения, изображенных на рис. 1.48, 1.49:

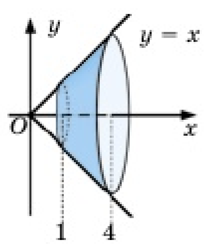


Рис. 1.48

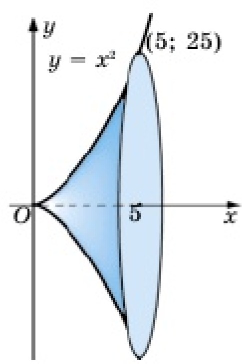


Рис. 1.49

1.127. Найдите объемы тел, полученных вращением вокруг оси Ox криволинейных трапеций, изображенных на рис 1.50 *а, б, в:*

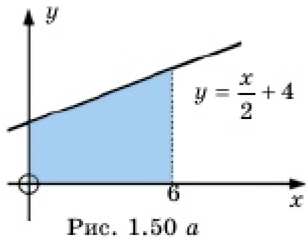


Рис. 1.50 *а*

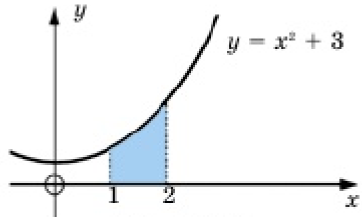


Рис. 1.50 *б*

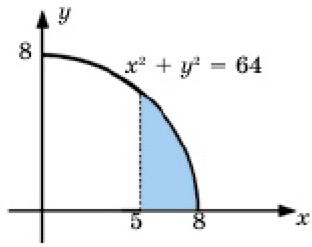


Рис. 1.50 *в*

1.128. Изобразите тело, полученное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, и вычислите его объем:

1) $y = 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$; 2) $y = x^3$, $1 \leqslant x \leqslant 2$;

3) $y = x^2$, $2 \leqslant x \leqslant 4$; 4) $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

1.129. Изобразите тело, полученное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, и вычислите его объем:

1) $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; 2) $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$;

3) $y = x$, $1 \leqslant x \leqslant 2$; 4) $y = \sqrt{x}$, $2 \leqslant x \leqslant 3$.

1.130. Изобразите тело, полученное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, и вычислите его объем:

1) $y = \cos x$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; 2) $y = 2x - x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$;

3) $y = -\dfrac{x}{2} + 2$, $0 \leqslant x \leqslant 4$; 4) $y = \sqrt{x - 2}$, $2 \leqslant x \leqslant 11$.

1.131. Для того чтобы растянуть пружину на 1 см, нужно приложить силу 0,1 кН. Какую работу нужно совершить для растяжения пружины на 5 см?

B

Прикладная задача

1.132. Автомобиль движется прямолинейно со скоростью, график которой представлен на рисунке 1.51.

1) Объясните, что означает расположение графика выше оси t, ниже оси t и на оси t.

2) Найдите весь путь, пройденный автомобилем.

3) Найдите расстояние, на которое удалился автомобиль от начальной точки.

Рис. 1.51

Прикладная задача

1.133. Велосипедист, начав движение, в течение первых 3 мин развил скорость до 40 км/ч. Затем, следующие 10 мин, он ехал с постоянной скоростью. Устав, велосипедист в течение 1 мин снизил скорость до 30 км/ч и сохранял эту скорость следующие 10 мин. Затем он уменьшал скорость в течение 2 мин до полной остановки. Постройте график зависимости скорости от времени и вычислите расстояние, пройденное велосипедистом.

Прикладная задача

1.134. Скорость движения материального тела задана функцией $v(t) = -4t^3 + 16t$ м/с. Найдите путь, пройденный телом, за следующий промежуток времени:

1) $0 \leqslant t \leqslant 3$ с; 2) $1 \leqslant t \leqslant 3$ с.

Прикладная задача

1.135. Скорость движения материального тела задана функцией $v(t) = -3t^2 + 2t$ м/с. Найдите путь, пройденный телом за первую секунду, и расстояние, на которое оно удалилось от начальной точки.

1.136. Вычислите объем тела, полученного вращением вокруг Ox фигуры, ограниченной заданными линиями:

1) $y = x + 1,\ y = 1,\ x = 2$; 2) $y + x = 2,\ y = x,\ x = 0$;

3) $y = \frac{x^2}{2},\ y = x$; 4) $y = 2\sqrt{x},\ y = x$.

1.137. Изобразите тело, полученное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, и вычислите его объем:

1) $y = \cos 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$; 2) $y = (x - 1)^3,\ 1 \leqslant x \leqslant 3$;

3) $y = 4\sin 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$; 4) $y = \sqrt{\sin x},\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$.

1.138*. Пусть $y = f(x)$ – непрерывная и монотонная на отрезке $[a; b]$ функция, удовлетворяющая неравенству $c \leqslant f(x) \leqslant d,\ x \in [a; b]$. Покажите, что объем тела, полученного вращением данной функции вокруг оси Oy, вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_c^d \left(f^{-1}(x)\right)^2 dx. \qquad (3)$$

На практике формула (3) чаще применяется в другом виде. В общем, для вычисления объемов тел, полученных вращением функции вокруг оси Ox, пользуются формулой

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx,$$

а для вычисления объемов тел, полученных вращением функции вокруг оси Oy – формулой

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy.$$

Например, объем тела, полученного вращением параболы $y = x^2,\ x \in [0; 1]$ вокруг оси Ox, вычисляется следующим образом (рис. 1.52):

$$V_x = \pi\int_0^1 y^2 dx = \pi\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi}{5}.$$

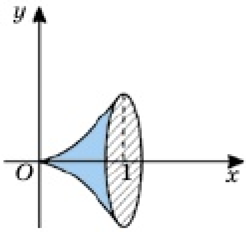


Рис. 1.52

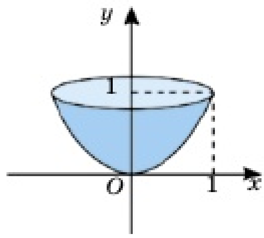


Рис. 1.53

А для того чтобы найти объем тела, полученного вращением этой же параболы вокруг оси Oy, мы перепишем заданную функцию в виде $x = \sqrt{y}$, $y \in [0; 1]$ (выразив x через y). Тогда объем этого тела, изображенного на рисунке 1.53, вычисляется следующим образом:

$$V_y = \pi\int_0^1 x^2 dy = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi\int_0^1 y dy = \frac{\pi}{2}.$$

1.139. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной прямой $y = 0$ и параболой: 1) $y = 6x - x^2 - 5$; 2) $y = 2x - x^2$.

1.140. Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v = 2t + 1$ м/с. За какое время точка пройдет первые 6 м пути?

Прикладная задача

1.141. Для растяжения пружины на 1 см требуется сила 1 кН. На сколько сантиметров можно растянуть пружину, если совершить работу $A = 5$ кДж?

C

1.142. Дана функция, описывающая зависимость скорости материального тела от времени: $v(t) = \cos t$ м/с. Докажите, что материальное тело движется только между двумя точками. Найдите расстояние между этими точками.

1.143. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy дуги кривой $y = \sqrt{4 - x^2}$, расположенной выше оси Ox.

1.144. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделайте соответствующий чертеж.

1) $y = 3\sin x$, $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$;

2) $y = 5\cos x$, $y = \cos x$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

3) $y = 2x - x^2$, $y = 2 - x$;

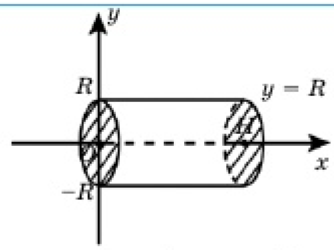
4) $y = x^2$, $y^2 = x$.

1.145. С помощью определенного интеграла вычислите объем: 1) цилиндра; 2) конуса, если радиус основания равен R, а высота равна H.

▲ 1) $y = R$

$$V = \pi\int_0^H R^2 dx = \pi R^2 x\Big|_0^H =$$

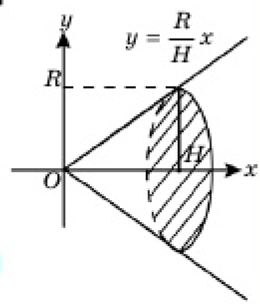
$$= \pi R^2 (H - 0) = \pi R^2 H.$$



2) $y = \dfrac{R}{H}x$

$$V = \pi\int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi\frac{R^2}{H^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^H =$$

$$= \pi\frac{R^2}{H^2}\left(\frac{H^3}{3} - 0\right) = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \ ■$$



1.146. Найдите объем усеченного конуса, радиусы оснований которого равны R и r, а высота равна H.

1.147. Найдите объем шарового сектора радиуса R с центральным углом α.

Прикладная задача

1.148. Найдите работу, которую необходимо совершить, чтобы поднять гирю массой 16 кг на высоту 1 м от поверхности земли.

1.149. Постройте графики кривой $y = 2x^2$ и прямой $x + y = 3$, расположенных в первой четверти координатной плоскости. Найдите точку пересечения параболы и прямой. Вычислите объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной данными линиями.

1.150*. Поверхность фары легкового автомобиля моделируется уравнениями $x = 2t^2$, $y = 4t$, $-\sqrt{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$. Покажите, что уравнение этой кривой записывается в виде $y^2 = 8x$. Найдите объем тела, полученного вращением данной кривой вокруг оси Ox.

Упражнения для повторения

1.151. Покажите, что прямая $x+7y=50$ касается окружности $x^2 + y^2 = 50$. Найдите координаты точки касания.

1.152. В геометрической прогрессии $q = \dfrac{1}{2}$, $b_n = 2$, $S_n = 254$. Найдите первый член прогрессии и n.

1.153. Найдите наибольшее значение выражения:
1) $1 - \cos2\alpha + \sin2\alpha$; 2) $\cos2\alpha \operatorname{tg}2\alpha + 5\cos2\alpha - 1$.

1.154. Найдите все решения уравнения $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

Выводы раздела «ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ»

Если для всех x из интервала $(a; b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$, то функцию $F(x)$ называют ***первообразной*** для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$.

Если функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$ на некотором промежутке $(a; b)$ то и функция $y = F(x) + C$, где C – любая постоянная, также является первообразной для функции $y = f(x)$ на этом промежутке.

Для любого $x \in I$ множество всех первообразных для функции $y = f(x)$ называют ***неопределенным интегралом*** от данной функции и обозначают символом $\int f(x)dx$.

1) $\int k dx = kx + C$; 2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ n \neq -1$;

3) $\int \cos x dx = \sin x + C$; 4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$; 6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$.

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx.$$

Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Два метода интегрирования: метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C, \ \int u dv = uv + \int v du.$$

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком неотрицательной непрерывной функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле $S = F(b) - F(a)$.

Разность значений первообразной для данной функции в точках b и a называют ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают так: $\int_a^b f(x)dx$.

Формула Ньютона–Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Определенный интеграл применяется к решению физических задач на нахождение пути по заданной скорости и вычислению работы переменной силы. Также с помощью определенного интеграла можно вычислить объемы тел.

Термины на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Первообразная	Алғашқы функция	Antiderivative
Неопределенный интеграл	Анықталмаған интеграл	Indefinite integral
Подынтегральная функция	Интеграл астындағы функция	Integrand
Подынтегральное выражение	Интеграл астындағы өрнек	Expression under the integral sign
Криволинейная трапеция	Қисықсызықты трапеция	Curvilinear trapezium
Определенный интеграл	Анықталған интеграл	Definite integral
Формула Ньютона – Лейбница	Ньютон – Лейбниц формуласы	Newton–Leibniz formula
Интегрирование по частям	Бөліктеп интегралдау	Integration by parts
Метод замены переменной	Айнымалыны алмастыру тәсілі	Integration by substitution

Раздел 2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Термин «статистика» происходит от латинского слова *status*, что означает «состояние», «положение вещей». Процессы, происходящие в природе и обществе, разнообразны и сложны. С помощью статистики, применяя количественные и качественные методы анализа, исследователи изучают природные и социальные явления. Например, юристы, социологи, психологи собирают и изучают информацию, связанную с преступностью. Для анализа больших объемов количественных данных и статистической информации применяют математическую статистику. Математическая статистика – это раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов. В наше время ни одна из отраслей науки, техники, народного хозяйства, политики не обходится без использования статистических методов. В этом разделе мы изучим начальные понятия математической статистики.

Фермер выращивает пшеницу в Акмолинской области. Качество урожая пшеницы оценивается количеством зерен в колосьях. Фермер решил провести исследование влияния удобрений на повышение урожайности пшеницы. С этой целью он внес удобрения на одном участке земли, и не вносил никаких удобрений на втором участке, однако он в равной мере ухаживал за посевами на обоих участках. Изучив данный раздел, с помощью статистических методов вы научитесь сравнивать урожайность пшеницы на обоих участках.

Содержание раздела

2.1. Генеральная и выборочная совокупности. Дискретная и интервальная таблицы частот. Основные числовые характеристики выборки

Изучив пункт, вы:

- узнаете определения генеральной и выборочной совокупностей и сможете привести примеры;
- научитесь определять объем генеральной совокупности и выборки;
- узнаете, как вычислять основные числовые характеристики выборки;
- научитесь различать дискретные случайные величины и непрерывные случайные величины, сможете приводить примеры;
- научитесь составлять таблицы частот и таблицы относительных частот.

2.1.1. Генеральная и выборочная совокупности

На практике возникает необходимость исследования совокупности однородных объектов относительно некоторого количественного признака. Например, нужно проверить партию деталей, изготовленных на заводе, измерив их длину, площадь, объем, вес, вместимость и т.д. В таких случаях мы собираем количественные данные. Иногда совокупность данных объектов проверяется полностью, т.е. каждый объект совокупности проверяется на исследуемый признак. Но на практике проводить такое обследование не всегда возможно. Особенно в случае, когда данная совокупность содержит очень большое количество объектов, становится невозможной проверка каждого объекта в отдельности. Например, пусть на определенном земельном участке требуется определить всхожесть посеянных семян пшеницы, т.е. количество процентов проросших семян. Невозможно исследовать полностью весь земельный участок, проверив, взошло ли каждое посеянное семя или нет. В таких случаях из всей совокупности случайно отбирают ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Определение. *Множество исследуемых объектов называют **генеральной совокупностью**, а случайно отобранное из генеральной совокупности множество объектов называют **выборочной совокупностью**, или **выборкой**.*

В приведенном выше примере множество всех посеянных на земельном участке семян пшеницы составляет генеральную совокупность, а множество семян, посеянных на случайно отобранной части земли, образует выборку.

Работа в паре

Приведите примеры генеральной совокупности и выборки. Например, для пошива школьной формы для учеников

11 класса школ нашей страны потребовалось собрать данные о росте учеников. Для этого из случайно выбранных четырех школ измерили рост учеников 11 класса. Здесь множество всех учеников 11 класса школ страны является генеральной совокупностью, а ученики 11 класса случайно выбранных четырех школ – выборочной совокупностью.

Количество объектов, принадлежащих множеству, называют ***объемом множества***. Например, если из 10 000 деталей случайно отобрать для проверки 100 деталей, то объем выборки равен 100, а объем генеральной совокупности равен 10 000.

2.1.2. Таблица частот

Рассмотрим следующий пример.

Фермер выращивает пшеницу в Акмолинской области. Он решил провести исследование влияния удобрений на повышение урожайности пшеницы. С этой целью он внес удобрения на одном участке земли, и не вносил никаких удобрений на втором участке. Но уход за посевами на обоих участках был одинаковый. Осенью фермер с каждого из участков случайно отобрал по 150 колосьев пшеницы и подсчитал количество зерен в них.

Количество зерен в колосьях пшеницы, отобранных с удобренного участка земли:

6 7 7 4 9 5 5 5 8 9 8 9 7 7 5 8 7 6 6 7 9 7 7 7 8 9 3 7 4 8 5 10 8
6 7 6 7 5 6 8 7 9 4 4 9 6 8 5 8 7 7 4 7 8 10 6 10 7 7 7 9 7 7 8 6 8 6 8
7 4 8 6 8 7 3 8 7 6 9 7 6 9 7 6 8 3 9 5 7 6 8 7 9 7 8 4 8 7 7 7 6 6 8 6
3 8 5 8 7 6 7 4 9 6 6 6 8 4 7 8 9 7 7 4 7 5 7 4 7 6 4 6 7 7 6 7 8 7 6 6
7 8 6 7 10 5 13 4 11 12

Изучение приведенных данных в таком виде вызывает существенные трудности для исследователей, потому что эти данные не обработаны и не удобны для изучения. Существуют разные способы обработки данных для их упорядоченного и наглядного представления. Один из них – создание таблицы частот. Чтобы составить таблицу частот, выбираем по одному из каждого числового значения выборки, и записываем выбранные числа в порядке возрастания. Составленную таким образом последовательность называют ***вариационным рядом***, а каждый элемент вариационного ряда называют ***вариантой***.

Рассматривая данные о количестве зерен в колосьях пшеницы, отобранных с удобренных участков земли, мы приходим к выводу, что количество зерен в каждом колоске колеблется от 3 до 13. Итак, выборочные значения равны 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, других значений в выборке нет. Эта числовая последовательность в нашем примере является *вариационным рядом*, а каждый элемент этого ряда – его *вариантой*. Наименьшая варианта здесь равна 3 и встречается 4 раза в выборке, варианта 4 встречается 13 раз, варианта 5 – 11 раз и т.п. Данные выборки можно представить таблицей 2.1.

Количество зерен в колосе – x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Вариационный ряд
Частота – n_i	4	13	11	28	46	27	14	4	1	1	1	Объем выборки равен 150

Таблица 2.1. Количество зерен в колосьях пшеницы, отобранных с удобренного участка земли

Если варианта x_i в выборке повторяется n_i раз, то число n_i называют ***частотой*** варианты x_i.

Определение. *Вариационный ряд – ряд, в котором по степени возрастания сопоставлены варианты и соответствующие им частоты.*

В нашем примере частота варианты 5 равна 11, частота варианты 6 равна 28, частота варианты 7 равна 46 и т.д. Сумма частот всех вариант равна *объему* выборки. Если составить таблицу, в первой строке которой записать в порядке возрастания варианты, а во второй строке – соответствующие им частоты, то полученную таблицу называют *таблицей частот вариационного ряда*, или *таблицей частот*. Таблица частот имеет следующий вид:

x_i – варианты выборки	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i – частота	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Таблица 2.2. Таблица частот

Работа в группе

Ниже приведены данные о количестве зерен в колосьях пшеницы, отобранных с неудобренного участка земли. По этим данным составьте таблицу частот и сравните результат с таблицей 2.1.

4 6 5 6 5 6 4 6 4 9 5 3 6 8 5 4 6 8 6 5 6 7 4 6 5 2 8 6 5 6 5
5 5 4 4 4 6 7 5 6 7 5 5 6 4 8 5 3 7 5 3 6 4 7 5 6 5 7 5 7 6 7 5 4
7 5 5 5 6 6 5 6 7 5 8 6 8 6 7 6 6 3 7 6 8 3 3 4 4 7 6 5 6 4 5 7 3
7 7 6 7 7 4 6 6 5 6 7 6 3 4 6 6 3 7 6 7 6 8 6 6 6 6 4 7 6 6 5 3 8
6 7 6 8 6 7 6 6 6 8 4 4 8 6 6 2 6 5 7 3

Дополнительные электронные ресурсы

http://ourmath.ru/articles/tablitsa-i-diagramma-na-excel-legko.html

Некоторые данные полезно представлять в процентах. В таком случае пользуются *таблицей относительных частот*. Если частота варианты x_i равна n_i, а объем выборки равен n, то отношение $\frac{n_i}{n}$ называют *относительной частотой* варианты. Заменив в таблице 2.2. частоты на относительные частоты, получим *таблицу относительных частот*. Если относительную частоту варианты умножить на 100, то получим процентную долю этой варианты в составе выборки. Например, таблица относительных частот вариационного ряда для количества зерен в колосках, собранных с удобренного участка земли, имеет следующий вид (таблица 2.3). Здесь процентная доля варианты 8 в выборке равна $\frac{27}{150} \cdot 100\% = 18\%$.

Количество зерен в колосьях пшеницы – x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Всего
Относительная частота – $\frac{n_i}{n}$	$\frac{4}{150}$	$\frac{13}{150}$	$\frac{11}{150}$	$\frac{28}{150}$	$\frac{46}{150}$	$\frac{27}{150}$	$\frac{14}{150}$	$\frac{4}{150}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{150}$	1

Таблица 2.3. Количество зерен в колосьях пшеницы, отобранных с удобренного участка земли

Таблица относительных частот имеет следующий вид:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

2.1.3. Основные числовые характеристики выборки

Для исследования выборки пользуются следующими ее числовыми характеристиками: размах выборки, мода и медиана выборки, выборочная средняя. Мы начали их изучение в предыдущих классах. Напомним их определения.

Определение. *Разность между наибольшим и наименьшим значениями вариант называют* ***размахом выборки*** *и обозначают буквой R.*

$$R = x_{max} - x_{min}$$

Например, размах выборки для количества зерен в колосьях пшеницы, собранных с удобренного участка земли, равен $R = 13 - 3 = 10$.

Определение. ***Модой выборки*** *называют наиболее часто встречающуюся варианту выборки.* Моду обозначают Mo.

Например, мода выборки для количества зерен в колосьях пшеницы, отобранных с удобренного участка земли, равна 7. В самом деле, колосья с количеством зерен, равным 7, встретились в выборке 47 раз. По сравнению с другими вариантами выборки это наибольшее количество повторений. Мода выборки не всегда определяется однозначно, т.к. две и более варианты выборки могут иметь одинаковые частоты с самым большим значением.

Дополнительные электронные ресурсы

http://ourmath.ru/articles/kak-nayti-modu-neskolykih-tchisel-ispolyzuya-excel.html

Определение. *Среднее арифметическое значений выборки называют* ***выборочным средним*** *и обозначают* $\overline{X}$.

$$\overline{X} = \frac{\text{сумма всех элементов выборки}}{\text{количество элементов}}$$

Найдем выборочное среднее для количества зерен в колосьях пшеницы, собранных с удобренного участка земли. Для этого сначала сложим все элементы выборки, а затем разделим на количество элементов. Количество элементов в выборке (объем выборки) равен 150:

$$\overline{X} = \frac{\text{сумма всех элементов выборки}}{\text{количество элементов}} = \frac{6+7+7+4+\ldots+4+11+12}{150}.$$

Для выборок с большим объемом вычисление выборочного среднего становится затруднительным. Поэтому при расчете нужно пользоваться таблицей частот:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i\, n_i}{\sum n_i} = \frac{3\cdot 4 + 4\cdot 13 + 5\cdot 11 + \ldots + 12\cdot 1 + 13\cdot 1}{150} \approx 6{,}85$$

Итак, выборочное среднее для количества зерен в колосьях пшеницы, собранных с удобренного участка земли, равно 6,85.

Дополнительные электронные ресурсы

http://ourmath.ru/articles/vtchislyaem-srednee-znatchenie-neskolykih-tchisel.html

Определение. *Запишем все элементы выборки в порядке возрастания в виде числового ряда. Если объем выборки является нечетным числом, то элемент, расположенный в середине ряда, называется* ***выборочной медианой****. Если количество элементов выборки является четным числом, то выборочной* ***медианой*** *называют среднее арифметическое двух элементов, расположенных в середине ряда. Медиану обозначают Me.*

С удобренного участка земли отобрано 150 пшеничных колосьев, поэтому, если расположить элементы выборки в возрастающем порядке, выборочной медианой будет среднее арифметическое 75-го и 76-го элементов:

$$Me = \frac{x_{75} + x_{76}}{2} = \frac{7+7}{2} = 7.$$

Медиана делит выборку на две равные части. Например, если медиана количества баллов, полученных учениками класса за контрольную работу, равна 15, то это означает, что по крайней мере половина класса набрала не меньше 15 баллов. Медиана является одной из полезных статистических характеристик, особенно в случаях, когда другие характеристики не дают полных сведений о выборке.

Дополнительные электронные ресурсы

http://ourmath.ru/articles/vtchislenie-median-neskolykih-tchisel.html

Работа в группе

Пользуясь таблицей 2.4, найдите размах выборки, выборочное среднее, моду и медиану.

Количество зерен в пшеничном колосе – x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота – n_i	2	11	19	29	51	25	12	1

Таблица 2.4. Количество зерен в колосьях пшеницы, отобранных с неудобренного участка земли

1. Что такое генеральная совокупность?
2. Что называют выборкой?
3. В чем заключается основная цель математической статистики?
4. Что вы понимаете под объемом генеральной совокупности (выборки)?
5. Что такое варианта выборки? Как составляется таблица частот (относительных частот)?

Упражнения

А

2.1. В следующем примере определите объем генеральной совокупности и выборки (рис 2.1).

- Для изучения распределения легковых автомобилей в Казахстане исследователи решили рассмотреть данные о легковых автомобилях в Мангистауской, Алматинской и Восточно-Казахстанской областях.
- Для проверки моторов автомобилей, эксплуатируемых более 10 лет, исследователи решили отобрать автомобили Жамбылской области.

Данные о количестве легковых автомобилей (в единицах) на сентябрь 2016 г.

	Всего	Менее 3 лет	От 3 до 7 лет	От 7 до 10 лет	Более 10 лет
Казахстан	**3 853 705**	**622 546**	**391 282**	**350 054**	**2 264 640**
Акмолинская	177 457	23 855	14 612	15 134	115 335
Актюбинская	155 584	36 511	19 834	15 239	72 727
Алматинская	467 912	39 099	29 332	34 406	349 908
Атырауская	116 809	45 317	16 012	11 388	30 449
ЗКО	118 949	27 945	12 807	11 400	57 991
Жамбылская	189 600	10 598	11 300	11 972	151 763
Карагандинская	284 717	34 174	26 061	23 987	188 063
Костанайская	176 960	32 960	16 015	14 918	101 904
Кызылординская	109 866	13 575	9 015	9 017	72 913
Мангистауская	140 403	34 561	19 632	16 059	56 324
ЮКО	473 580	48 364	43 594	36 557	326 771
Павлодарская	159 265	15 402	10 341	10 671	116 297
СКО	150 278	20 008	12 859	14 425	95 836
ВКО	306 342	46 584	27 107	28 893	187 001
Нур-Султан	346 434	74 101	33 702	23 431	90 447
Алматы	463 674	90 562	72 570	60 736	205 812
Дипломатические	21 628	8 187	4 931	2 306	3 930
Не указан регион	93 977	20 743	11 558	9 515	41 169
Источник: КС МНЭ РК					

Рис. 2.1

2.2. В течение 13 дней учитель вел записи о количестве учеников, не посещавших занятия. Были получены следующие результаты: 4 6 3 2 7 8 3 5 5 7 6 6 4. Найдите выборочное среднее, размах выборки, моду и медиану, поясните их смысл.

2.3. Из генеральной совокупности извлечена выборка:
1) 2, 1, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 2, 2, 3, 4, 3, 1, 5, 4, 2, 3;
2) 4, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 5, 3, 5, 6, 8, 5, 3, 4, 6.
Для данной выборки: 1) найдите объем выборки; 2) найдите размах выборки, выборочное среднее, моду, медиану; 3) составьте таблицу частот.

2.4. Из генеральной совокупности извлечена выборка: 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4.
1) составьте вариационный ряд выборки; 2) найдите объем и основные числовые характеристики выборки; 3) составьте таблицу частот.

2.5. По результатам опроса 50 учеников 11 классов получены следующие данные о размере их обуви: 40, 38, 38, 39, 36, 42, 41, 37, 37, 39, 39, 40, 41, 40, 40, 39, 42,40, 39, 38, 39, 40, 39, 40, 36, 35, 41, 41, 36, 42, 37, 40, 39, 38, 41, 38, 42, 42, 37, 35, 41, 36, 38, 39, 40, 40, 38, 39, 37, 41. Найдите объем и варианты выборки, составьте таблицу частот и таблицу относительных частот.

▲ 1) По условию задачи объем выборки равен 50.
2) В ходе опроса наблюдались следующие значения размера обуви : 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42. Эти числа являются вариантами выборки.
3) Выяснилось, что 35-й размер обуви носят 2 ученика, 36-й – 4 ученика, 37-й – 5 учеников, 38-й – 7 учеников, 39-й – 10 учеников, 40-й – 10 учеников, 41-й – 7 учеников, 42-й – 5 учеников. Следовательно, таблица частот имеет следующий вид:

x_i – размер обуви	35	36	37	38	39	40	41	42
n_i – частота	2	4	5	7	10	10	7	5

4) Чтобы получить таблицу относительных частот, надо разделить все числа в строке частот на объем выборки, равный 50. Получим:

x_i – размер обуви	35	36	37	38	39	40	41	42
$n_i/50$ – относительная частота	0,04	0,08	0,1	0,14	0,2	0,2	0,14	0,1

■

B

2.6. Для того чтобы выяснить, сколько времени школьники тратят на дорогу от дома до школы, был проведен опрос 60 учеников школы. Получили следующие данные (в минутах):
12 15 16 8 10 17 25 34 42 18 24 18 45 33 38 45 40 3 20 12 10
10 27 16 37 45 15 16 26 32 35 8 14 18 15 27 19 32 6 12 14 20

10 16 14 28 31 21 25 8 32 46 14 15 20 18 8 10 25 22. Найдите выборочное среднее (с помощью калькулятора) и медиану, поясните их смысл.

2.7. Дана таблица частот выборки. Найдите объем выборки, выборочное среднее, моду и медиану.

1)

x_i	1	5	9	13
n_i	20	10	14	6

2)

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

2.8. В результате 40 независимых наблюдений некоторой величины были получены следующие данные:
10, 13, 10, 9, 9, 12, 12, 6, 7, 9, 8, 9, 11, 9, 14, 13, 9, 8, 8, 7,10, 10, 11, 11, 11, 12, 8, 7, 9, 10,14, 13, 8, 10, 9, 7, 10, 9, 8, 12.
Для данной выборки: 1) найдите основные числовые характеристики; 2) составьте таблицу относительных частот.

C

2.9. Выборка состоит из 30 элементов. Среднее значение первых 10 элементов равно 15,7, а среднее значение оставшихся 20 элементов – 14,3. Найдите выборочное среднее.

2.10. Аскар выполнил семь тестовых заданий, каждое из которых состоит из 12 задач. За каждую верно решенную задачу добавляется 1 балл. Он узнал результаты пяти из семи тестов: 9, 5, 7, 9 и 10 баллов. Аскар спросил учителя о результатах оставшихся двух тестов. Учитель ответил, что мода всех результатов Аскара равна 9 баллам, а среднее значение – 8 баллам. Чему равны результаты оставшихся двух тестов?

2.2. Статистические диаграммы: полигон частот и гистограмма

Изучив пункт, вы:

- сможете различать дискретные и непрерывные случайные величины;
- научитесь строить полигон частот с помощью таблицы частот и таблицы относительных частот;

- узнаете, как строить интервальную таблицу частот;
- научитесь строить гистограмму с помощью интервальной таблицы частот.

2.2.1. Полигон частот

Случайной величиной (СВ) называют величину, которая в результате опыта принимает то или иное числовое значение. Например, при подбрасывании игральной кости может выпасть значение от одного до шести, поэтому число выпавших очков является случайной величиной, а числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 являются значениями этой случайной величины. Различают два вида случайных величин: дискретные и непрерывные. Если множество значений СВ является конечным, или все значения СВ можно перенумеровать, то такая величина называется ***дискретной случайной величиной***. Если дискретные случайные величины могут принимать только «изолированные» значения, то ***непрерывные случайные величины*** принимают все значения из некоторого числового промежутка.

В качестве примера дискретной величины можно привести пример нахождения количества людей. Их количество мы измеряем с помощью натуральных чисел 1,2,3, ... Это «изолированные» числа, т.е. в данном случае мы не можем, к примеру, взять число между числами 1 и 2, т. е. число 1,5, так как нет такого понятия как «полтора человека». Второй пример дискретной случайной величины – количество набранных баллов в результате тестирования. Так, ученик может набрать 4 или 5 баллов, но количество баллов не может быть равным числу между числами 4 и 5, т. е. число 4,002. В качестве примера непрерывной случайной величины можно взять рост учеников. Для любого числа между 150 см и 170 см найдется ученик с таким ростом. В данном случае множество значений случайной величины не имеет разрывов.

Работа в группе

Приведите примеры дискретных и непрерывных случайных величин из повседневной жизни.

Если объектом исследования является дискретная величина, то полученные данные можно представить графически с помощью полигона частот.

Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты выборки, а на оси ординат – соответствующие им частоты. ***Полигоном частот*** называется ломаная, концами отрезков которой являются точки $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_k; n_k)$. С помощью полигона частот можно получить представление о том, по какому закону распределены элементы выборки, а также на основе статистических средних делать определенные выводы. Пользуясь таблицей частот для количества зерен в пшеничных колосьях, отобранных с удобренного участка земли, построим полигон частот (можно воспользоваться прикладной программой Microsoft Excel).

Полигон частот для количества зерен в пшеничных колосьях, отобранных с удобренного участка земли

Полигоном относительных частот называется ломаная, концами отрезков которой являются точки $(x_i; \frac{n_i}{n})$.

Построим полигон относительных частот (с помощью Microsoft Excel) на основе таблицы относительных частот для количества зерен в пшеничных колосьях, отобранных с удобренного участка земли.

Полигон относительных частот

Дополнительные электронные ресурсы

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/565707/

Работа в группе

Пользуясь таблицей частот для количества зерен в пшеничных колосьях, отобранных с неудобренного участка земли (таблица 2.4), постройте полигон частот и полигон относительных частот.

Практическая работа

Фермер выращивает пшеницу в Акмолинской области. Качество урожая пшеницы оценивается количеством зерен в колосьях. Фермер решил провести исследование влияния удобрений на повышение урожайности пшеницы. С этой целью он внес удобрения на одном участке земли, и не вносил никаких удобрений на втором участке, однако он одинаково ухаживал за посевами на обоих участках.

Изучая данный раздел, вы по данным выборок пшеничных колосьев с обоих участков земли, вычислили статистические характеристики обеих выборок. Теперь подведем итоги, проведя сравнительный анализ.

№	Статистическая характеристика	Результат для урожая с удобренного участка земли	Результат для урожая с неудобренного участка земли	Анализ, выводы
1	Размах выборки	10	7	Размах количества зерен в пшеничных колосьях с удобренного участка больше, значит, число зерен в колосе увеличилось после применения удобрений.
2	Выборочное среднее	6,85	5,63	Среднее число зерен в пшеничных колосьях с удобренного участка земли равно 6,85, в то время как с неудобренного участка – 5,63, т.е. применение удобрений может увеличить количество зерен в колосе на 1,22.

3	Медиана	7	6	Более половины колосьев с удобренного участка содержат более 7 зерен, а более половины колосьев с неудобренного участка содержат не более 6 зерен.
4	Мода	7	6	Применение удобрений увеличивает число зерен в большинстве колосьев с 6 до 7.

Таблица 2.5. Полигоны частот для количества зерен в пшеничных колосьях, собранных с неудобренного и удобренного участков земли

2.2.2. Гистограмма

Полученные в ходе исследования случайных величин выборочные значения могут принимать любые значения из некоторого числового промежутка. Такие случайные величины называют ***непрерывными случайными величинами***. В случаях, когда исследуемая случайная величина является непрерывной, или выборка содержит очень большое количество элементов, становится невозможным использование полигонов частот для получения информации. В таких случаях применяют интервальный вариационный ряд и гистограмму. Например, рост учеников 11 класса может принимать любые значения, скажем, между 140 см и 200 см. Не найдется двух учеников с абсолютно одинаковым ростом, росту каждого отдельного ученика может соответствовать отдельная варианта. Очевидно, что исследование таких выборочных данных с помощью вариационного ряда

Гистограмма

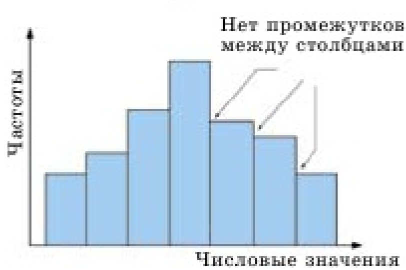


Рис. 2.2

частот не даст нужных результатов. Здесь используется другой подход. Весь промежуток значений выборки разбивают на равные интервалы. Например, промежуток значений роста учеников между 140 см и 200 см можно разделить на промежутки 140–150 см, 151–160 см и т.д. (рис. 2.2). В качестве частоты, соответствующей каждому интервалу, принимают количество учеников, рост которых принимает значение из данного интервала.

Определение. ***Интервальным вариационным рядом*** *называют таблицу, содержащую интервалы значений случайной величины, расположенные в возрастающем порядке, и соответствующие частоты попаданий в каждый из них значений случайной величины.*

Интервал	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	....	$[x_{n-1}; x_n)$
Частота	N_1	N_2	....	N_{n-1}

Для того чтобы составить интервальный вариационный ряд, нужно выполнить следующие задания.

- Определить количество интервалов разбиения. Для этого можно воспользоваться формулой Стерджеса: $K = \log_2 n + 1$, где n – объем выборки.
  Замечание. Понятие логарифма мы изучим в 7-м разделе. Это значение можно приближенно вычислить с помощью калькулятора.
- Определить ширину каждого интервала. Для этого размах выборки следует разделить на количество интервалов K и найти конечные точки интервалов.
- Посчитать количество значений случайной величины, попавших в каждый интервал, и заполнить таблицу.

Для изображения интервального вариационного ряда применяют гистограмму, представляющую собой ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основания которых равны ширине интервалов $[x_k; x_{k+1})$, а высота – частоте N_k (рис. 2.2). Гистограммы для непрерывных СВ не имеют промежутков между столбцами, а для дискретных СВ с очень большим объемом выборки гистограммы изображают с промежутками между столбцами.

Дополнительные электронные ресурсы

https://www.youtube.com/watch?v=EE4ZQFdFIrE

https://statanaliz.info/excel/diagrammy/gistogramma-chastot-v-excel-2016/

Пример 1. На уроке физкультуры измерили дистанцию, которую пробежал каждый из 30 учеников класса за 1 мин. Получены следующие результаты (в метрах): 244,6; 245,1; 248,0; 248,8; 250,0; 251,1; 251,2; 253,9; 254,5; 254,6; 255,9; 257,0; 260,6; 262,8; 262,9; 263,1; 263,2; 264,3; 264,4; 265,0; 265,5; 265,6; 266,5; 267,4; 269,7; 270,5; 270,7; 272,9; 275,6; 277,5.

На основе приведенных данных составим интервальный вариационный ряд и построим гистограмму.

▲ Для построения интервального вариационного ряда для данной выборки подсчитаем количество интервалов: $K = \log_2 30 + 1 \approx 6$. Наименьшее из значений выборки равно 244,6 м, а наибольшее – 277,5 м, т.е. размах выборки равен 277,5 – 244,6 = 32,9. Таким образом, разобьем промежуток [240;278,5) на 6 равных интервалов шириной 5,5 м и подсчитаем частоты, соответствующие каждому интервалу: дистанцию между 240 м и 245,5 м пробежал 1 ученик, дистанцию между 245 м и 250 м пробежали 3 ученика и т.д. Получим следующий интервальный вариационный ряд.

Интервал	[240; 245,5)	[245,5; 251)	[251; 256,5)	[256,5; 262)	[262; 267,5)	[267,5; 273)	[273; 278,5)
Частота	2	3	6	2	11	4	2

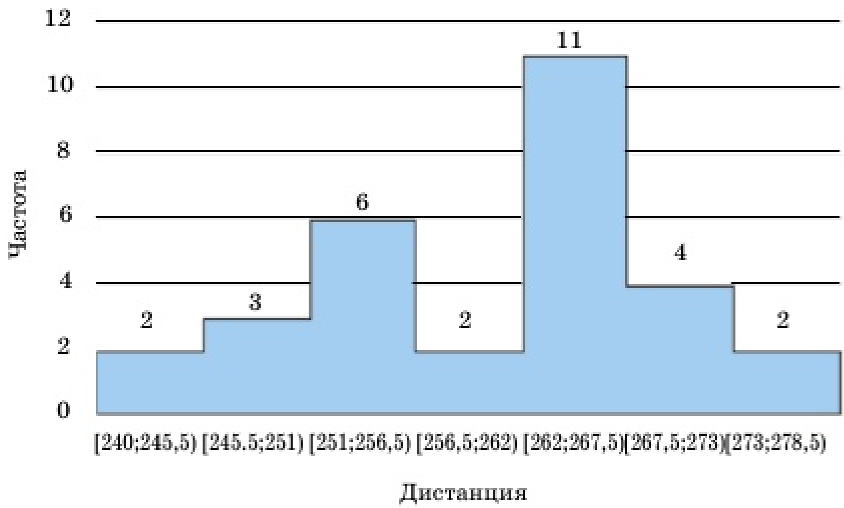


Рис. 2.3

Гистограмма для полученного вариационного ряда показана на рис. 2.3. ■

Пример 2. На ферме измерили жирность молока, полученного от 25 случайно отобранных коров, и получили следующие данные (в процентах): 3,45; 3,56; 3,68; 3,66;3,70; 3,75; 3,78; 3,80; 3,94; 3,88; 3,86; 3,88; 3,94; 3,93; 3,90; 3,96;4,03; 4,03; 3,98; 4,00; 4,08; 4,10; 4,18; 4,35; 4,02.

Для данной выборки составим интервальный вариационный ряд и построим гистограмму.

▲ Найдем значение $K = \log_2 25 + 1 \approx 5$. Таким образом, разобьем промежуток между числами $a = 3,4$ и $b = 4,4$ на 5 равных частей. Определив количество вариант выборки, попавших в интервалы [3,4; 3,5), [3,5; 3,6), [3,6; 3,7), ..., [4,2; 4,3), [4,3; 4,4), получим следующий интервальный вариационный ряд.

Интервал	[3,4; 3,6)	[3,6; 3,8)	[3,8; 4,0)	[4,0; 4,2)	[4,2; 4,4)
Частота	2	5	10	7	1

Гистограмма для данной выборки показана на рис. 2.4. ■

Гистограммы можно строить и для интервальных вариационных рядов с относительными частотами.

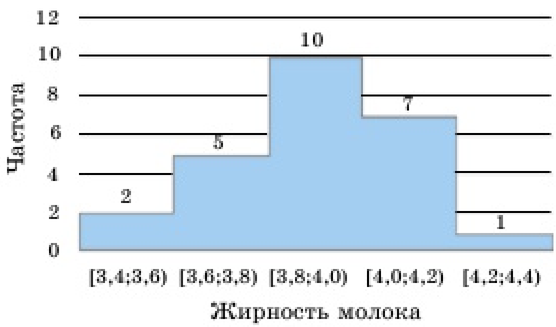


Рис. 2.4

1. Приведите пример дискретной случайной величины.
2. Приведите пример непрерывной случайной величины.
3. Что называют полигоном частот? Как его строят?
4. Что называют интервальным вариационным рядом? Как он составляется?
5. Как построить гистограмму?

Упражнения

А

2.11. Постройте полигон частот для выборки, заданной таблицей частот:

x_i – размер обуви	35	36	37	38	39	40	41	42
n_i	2	4	5	7	10	10	7	5

2.12. Постройте полигон частот для выборки, заданной таблицей частот:

x_i	1	5	9	13
n_i	20	10	14	6

2.13. Постройте полигон частот для выборки, заданной таблицей частот:

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

2.14. Дана интервальная таблица относительных частот выборки. Постройте ее гистограмму.

Интервал	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Относительная частота	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

2.15. Дана интервальная таблица относительных частот выборки. Постройте ее гистограмму.

Интервал	[1; 3)	[3; 6)	[6;9)	[9;12)
Относительная частота	0,24	0,40	0,20	0,16

2.16. Из генеральной совокупности значений дискретной случайной величины извлечена следующая выборка:
1, 2, 1, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 2, 2, 3, 4, 3, 1, 5, 4, 2, 3, 4, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 5, 3, 5, 6, 8, 5, 3, 4, 6. Постройте полигон частот.

2.17. На почте измерили вес посылок, отправленных в определенный день. Были получены следующие данные (в килограммах):
2,1; 3,0; 0,6; 1,5; 1,9; 2,4; 3,2; 4,2; 2,6; 3,1; 1,8; 1,7; 3,9; 2,4; 0,3; 1,5; 1,2.
1) Заполните интервальную таблицу частот; 2) постройте гистограмму.

Интервал	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)	[4;5)
Частота					

2.18. Определите, какую из диаграмм (полигон частот или гистограмму) следует применить для статистической обработки следующих данных, постройте соответствующую диаграмму.
1) Количество спичек в 30 коробках:

x_i – количество спичек	47	49	50	51	52	53	55
n_i – частота	1	1	9	12	4	2	1

2) Рост 25 учеников (округленный до сантиметров):

Рост	120–129	130–139	140–149	150–159	160–169
Частота	1	2	7	14	1

B

2.19. Дана интервальная таблица частот выборки.1) Найдите объем выборки; 2) составьте интервальную таблицу сравнительных частот; б) постройте гистограмму.

Интервал	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22)	[22; 24)
n_i	2	4	8	12	16	10	3

2.20. В следующей таблице приведены данные о росте производительности труда работников областных учреждений (в % по сравнению с прошлым годом).

%	80 – 90	90 – 100	100 – 110	110 – 120	120 – 130
Количество учреждений	2	14	60	20	4

1) Составьте интервальную таблицу относительных частот выборки; 2) постройте гистограмму.

2.21. Из генеральной совокупности значений дискретной случайной величины извлечена следующая выборка: 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4. Постройте полигон частот.

2.22. В результате 40 независимых наблюдений дискретной случайной величины получены следующие данные:
10, 13, 10, 9, 9, 12, 12, 6, 7, 9, 8, 9, 11, 9, 14, 13, 9, 8, 8, 7, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 8, 7, 9, 10, 14, 13, 8, 10, 9, 7, 10, 9, 8, 12. Постройте полигон относительных частот выборки.

2.23. Получены данные о финансовых фондах 30 организаций (в млрд тенге): 2,2; 5,3; 3,4; 4,5; 5,1; 3,4; 4,3; 2,7; 3,5; 5,8; 2,3; 4,4; 4,7; 2,1; 4,8; 3,6; 3,5; 4,2; 5,7; 3,7; 4,2; 3,4; 4,3; 3,4; 4,3; 4,1; 5,3; 4,8; 5,1; 2,4.
1) Используя разбиение на интервалы [2; 2,7), [2,7; 3,4), [3,4; 4,1), [4,1; 4,8) [4,8; 5,5), [5,5; 6), составьте таблицу интервальных частот; 2) постройте гистограмму.

C

2.24. При обследовании заработной платы 50 случайно выбранных рабочих строительных организаций были получены следующие данные (в тысячах тенге):
71,4; 70,4; 71,2; 70,1; 69,9; 72,2; 72,6; 72,8; 74,0; 71,6; 72,4; 72,0; 76,0; 70,4; 74,0; 69,0; 71,8; 73,2; 75,4; 72,4; 70,4; 72,1; 75,6; 76,0; 72,8; 73,2; 70,4; 68,2; 73,2; 73,0; 74,2; 72,2; 76,0;

69,8; 71,6; 69,8; 73,2; 74,2; 71,6; 72,6; 70,8; 72,1; 70,4; 72,2; 69,6; 72,2; 73,8; 72,4; 73,4; 72,3.

1) Составьте интервальную таблицу частот (начните с 68 тысяч тенге, ширину интервалов примите равной 1 тысяче тенге); 2) постройте гистограмму.

2.25. Садовник извлек случайную выборку 6-месячных саженцев и измерил их длину с точностью до миллиметра. Результаты измерений приведены в следующей интервальной таблице частот.

Длина саженца (мм)	300 – 324	325 – 349	350 – 374	375 – 399	400 – 424	425 – 449
Частота	12	18	42	28	14	6

1) Постройте гистограмму данной выборки.
2) Сколько саженцев имеет длину, не меньшую 400 мм?
3) Сколько процентов всех саженцев имеет длину, большую 349 мм и меньшую 400 мм ?
4) Сколько процентов саженцев имеет длину, меньшую 400 мм, если общее количество саженцев равно 1462?

Упражнения для повторения

2.26. Проверьте функцию $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$ на четность, постройте ее график.

2.27. Найдите точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-2x-1}$.

2.28*. Вычислите определенный интеграл $\int_0^2 |1-x|\,dx$.

2.3. Выборочные числовые характеристики случайной величины

Изучив пункт, вы научитесь вычислять:

- выборочное среднее дискретной случайной величины;
- выборочное среднее непрерывной случайной величины;
- выборочную дисперсию;
- выборочное стандартное отклонение.

Рассмотрим следующий пример.

Пусть в каждом из классов «А» и «Б» имеется 32 ученика. Ученики обоих классов сдали экзамен (тест IELTS). 5 учеников из класса «А» получили 3 балла, 22 ученика – 4 балла и 5 учеников – 5 баллов. 1 ученик из класса «Б» получил 1 балл, 2 ученика – 2 балла, 7 учеников – 3 балла, 12 учеников – 4 балла, 7 учеников – 5 баллов, 2 ученика – 6 баллов и 1 ученик – 7 баллов. Вычислим статисти-

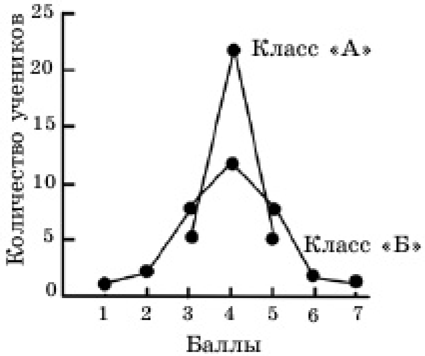


Рис. 2.5

ческое среднее оценок учеников обоих классов: в обоих классах и среднее, и медиана равны 4. Если делать выводы на основе статистического среднего, то получается, что ученики обоих классов получили одинаковые результаты. Но мы знаем, что есть различия в результатах тестирования. Построим полигоны частот для количества набранных баллов в обоих классах (рис. 2.5). Мы видим, что в классе «А» средний балл равен 4, а отклонение от среднего равно 1 баллу. В то же время в классе «Б» с таким же средним баллом, равным 4, отклонение от среднего больше, чем в классе «А». Для измерения таких отклонений в статистике пользуются следующими числовыми характеристиками:

- дисперсия;
- стандартное (среднее квадратичное) отклонение.

Пусть выборка задана таблицей частот:

x_i – варианты выборки	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i – частоты	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Здесь $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k = n$. Выборочное среднее обозначают $\overline{x}$ и вычисляют по формуле

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \ldots + x_k \cdot n_k).$$

Выборочную *дисперсию* $\overline{D}$ и *стандартное* (*среднее квадратичное*) *отклонение* σ вычисляют с помощью следующих формул:

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \overline{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot n_2 + (x_3 - \overline{x})^2 \cdot n_3 + \ldots + (x_k - \overline{x})^2 \cdot n_k\right],$$

$$\sigma = \sqrt{\overline{D}}.$$

Дисперсия и стандартное отклонение являются мерами разброса значений выборки вокруг выборочного среднего. Таким образом, если их значения малы, то выборка является «компактной», с маленьким размахом.

Пусть дана интервальная таблица частот непрерывной случайной величины:

Интервал	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	...	$[x_{k-1}; x_k)$
Частота	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Найдем середины интервалов:

$$x_1^* = \frac{x_0 + x_1}{2},\ x_2^* = \frac{x_1 + x_2}{2},\ \ldots\ x_k^* = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

Заменим первую строку в интервальной таблице частот найденными значениями, получим следующий вариационный ряд:

x_i^* – элементы выборки	x_1^*	x_2^*	x_3^*	...	x_k^*
n_i – частоты	n_1	n_2	n_3	...	n_k

С помощью этой таблицы вычисляют дисперсию и стандартное отклонение непрерывной случайной величины.

Пример 1. По заданной интервальной таблице частот найдем выборочное среднее, дисперсию и стандартное отклонение:

Интервал	[3,5; 3,6)	[3,6; 3,7)	[3,7; 3,8)	[3,8; 3,9)	[3,9; 4,0)	[4,0; 4,1)	[4,1; 4,2)	[4,2; 4,3)
Частота	1	2	3	4	6	5	2	1

▲ Сначала найдем середины интервалов:

$$x_1^* = \frac{3,5+3,6}{2} = 3,55,\ x_2^* = \frac{3,6+3,7}{2} = 3,65,\ \ldots\ x_8^* = \frac{4,2+4,3}{2} = 4,25.$$

Построим таблицу частот для найденных значений:

x_i^*	3,55	3,65	3,75	3,85	3,95	4,05	4,15	4,25
Частота	1	2	3	4	6	5	2	1

$$\overline{x} = \frac{1}{24}(3,55\cdot1 + 3,65\cdot2 + 3,75\cdot3 + \ldots + 4,25\cdot1) = 3,92,$$

$$\overline{D} = \frac{1}{24}\Big[(3,55-3,92)^2\cdot1 + (3,65-3,92)^2\cdot2 + (3,75-3,92)^2\cdot3 + \ldots +$$

$$+ (4,25-3,92)^2\cdot1\Big] = 0,029,\quad \sigma = \sqrt{0,029} = 0,17.$$ ■

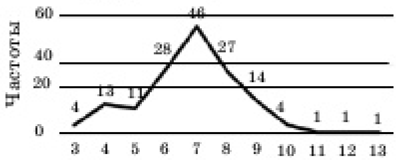
1. Как вычисляется выборочное среднее для дискретной случайной величины?
2. Как вычисляется выборочное среднее для непрерывной случайной величины?
3. Напишите формулы для вычисления дисперсии и стандартного отклонения.
4. В чем заключается статистический смысл дисперсии и стандартного отклонения?

Упражнения

А

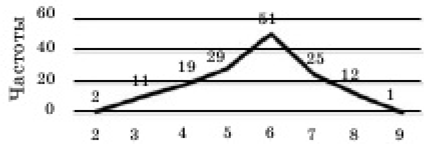
2.29. Представлены полигоны частот двух выборок:

Полигон частот для количества зерен в пшеничных колосьях с неудобренного участка земли



Количество зерен в колосьях

Полигон частот для количества зерен в пшеничных колосьях с удобренного участка земли



Количество зерен в колосьях

Таблица 2.6. Полигоны частот для количества зерен в пшеничных колосьях, собранных с неудобренного и удобренного участков земли

- По полигону частот определите, размах какой выборки больше.
- Вычислите выборочное среднее, дисперсию и стандартное отклонение каждой выбороки. Поясните полученные результаты.

2.30. Выборка задана таблицей частот:

x_i – варианты	1	5	9	13
n_i – частоты	20	10	14	6

Вычислите выборочное среднее, дисперсию и стандартное отклонение.

2.31. В таблице показаны очки, набранные Нуркеном и Ергазы в 8 баскетбольных играх:

Очки, набранные Нуркеном	23	17	31	25	25	19	28	32
Очки, набранные Ергазы	9	29	41	26	14	44	38	43

Для каждого игрока вычислите среднее количество очков и стандартное отклонение. Кого из двух игроков вы считаете сильнее и почему?

2.32. Выборка задана таблицей частот:

x_i – варианты	3	4	5	7	10
n_i – частоты	1	2	3	4	2

Вычислите выборочное среднее, дисперсию и стандартное отклонение.

B

2.33. Выборка задана интервальной таблицей частот:

Интервал	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22)	[22; 24)
n_i – частота	2	4	8	12	16	10	3

Вычислите выборочное среднее, дисперсию и стандартное отклонение.

2.34. Садовник извлек случайную выборку 6-месячных саженцев и измерил их длину с точностью до миллиметра. Результаты измерений приведены в следующей интервальной таблице частот:

Длина саженца (мм)	300 – 324	325 – 349	350 – 374	375 – 399	400 – 424	425 – 449
Частота	12	18	42	28	14	6

Вычислите выборочное среднее, дисперсию и стандартное отклонение.

Упражнения для повторения

2.35. Найдите сумму ординат точек экстремума функции

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}.$$

2.36. Найдите область определения функции $g(x) = \arcsin\frac{x-1}{x+1}$.

2.37. Вычислите:

1) $\int (2x-3)^3 dx$;   2) $\int (2x^3-3)^3 dx$.

Выводы раздела «ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ»

Множество исследуемых объектов называют ***генеральной совокупностью***, а случайно отобранное из генеральной совокупности множество объектов называют ***выборочной совокупностью***, или ***выборкой***. Сумма частот всех вариант равна объему выборки.

Таблица частот имеет следующий вид:

x_i – варианты выборки	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i – частота	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Таблица относительных частот имеет следующий вид:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Разность между наибольшим и наименьшим значениями вариант называют ***размахом выборки*** и обозначают буквой R.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

Модой выборки называют наиболее часто встречающуюся варианту выборки. Моду обозначают Mo.

Среднее арифметическое значений выборки называют ***выборочным средним*** и обозначают $\overline{X}$.

Элемент, расположенный в середине ряда, называется ***выборочной медианой***. Если количество элементов выборки является четным числом, то ***выборочной медианой*** называют среднее арифметическое двух элементов, расположенных в середине ряда. Медиану обозначают Me.

Если множество значений СВ является конечным, или все значения СВ можно перенумеровать, то такая величина называется ***дискретной случайной величиной***.

Полигоном относительных частот называется ломаная, концами отрезков которой являются точки $(x_i; \frac{n_i}{n})$.

Интервальным вариационным рядом называют таблицу, содержащую интервалы значений случайной величины, расположенные в возрастающем порядке, и соответствующие частоты попаданий в каждый из них значений случайной величины.

Интервал	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	...	$[x_{n-1}; x_n)$
Частота	N_1	N_2	...	N_{n-1}

Часто применяются такие числовые характеристики: выборочное среднее, дисперсия и стандартное (среднее квадратичное) отклонение.

Выборочное среднее обозначают $\overline{x}$ и вычисляют по формуле

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \ldots + x_k \cdot n_k).$$

Дисперсию $\left(\overline{D}\right)$ и стандартное среднее квадратичное отклонение σ вычисляют с помощью следующих формул:

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \overline{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot n_2 + (x_3 - \overline{x})^2 \cdot n_3 + \ldots + (x_k - \overline{x})^2 \cdot n_k\right],$$

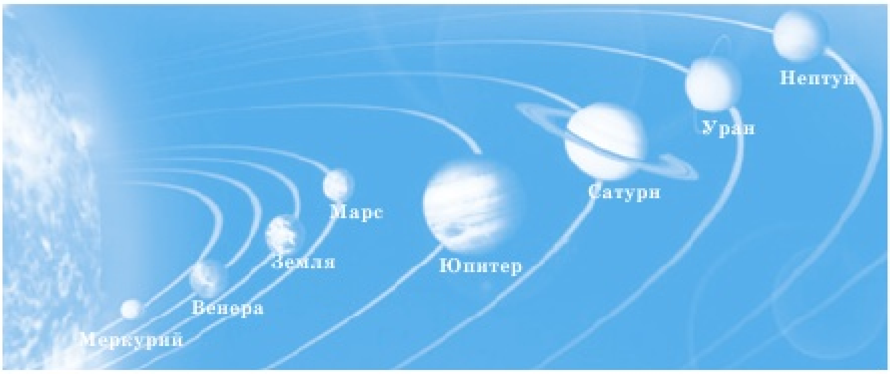
$$\sigma = \sqrt{\overline{D}}\ .$$

Дисперсия и стандартное отклонение являются мерами разброса значений выборки вокруг выборочного среднего. Если их значения малы, то выборка является «компактной», с маленьким размахом.

Термины на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Таблица частот	Жиілік кестесі	Frequency table
Медиана	Медиана	Median
Мода	Мода	Mode
Средняя величина	Орта мән	Mean
Гистограмма	Гистограмма	Histogram
Размах	Құлаш	Range
Дисперсия	Дисперсия	Variance
Стандартное отклонение	Стандартты ауытқу	Standard deviation

Раздел 3. СТЕПЕНИ И КОРНИ. СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ



Степенная функция наряду с другими функциями широко применяется в построении и исследовании математических моделей реальных процессов и явлений. Одним из примеров может служить закон Кеплера. По окончании раздела, зная расстояние между Солнцем и Землей, вы научитесь находить период вращения Венеры вокруг Солнца и расстояние от Солнца до Марса.

Содержание раздела

3.1. Корень n-й степени и его свойства

Изучив пункт, вы:

- узнаете определение корня n-й степени;
- познакомитесь с понятием арифметического корня n-й степени;
- сможете применять свойства корня n-й степени при решении задач.

3.1.1. Определение корня n-й степени

Определение. *Пусть n – натуральное число ($n > 1$), a и b – действительные числа. Если выполняется равенство*

$$b^n = a, \qquad (1)$$

то число b называют корнем n-й степени из числа a.

Таким образом, корнем n-й степени из числа a называется такое число b, n-я степень которого равна a. Корень n-й степени из числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$. Решив уравнение

$$x^n = a, \qquad (2)$$

мы найдем корни n-й степени из числа a. Определим корни уравнения (2) графическим способом.

Предположим сначала, что n – нечетное число. Решения уравнения (2) равны абсциссам точек пересечения графиков функций $y = x^n$ и $y = a$.

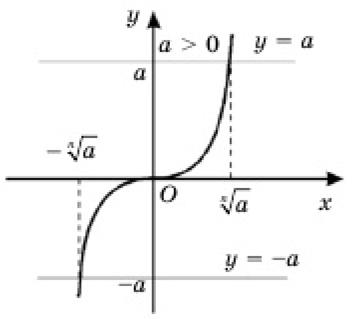


Рис. 3.1

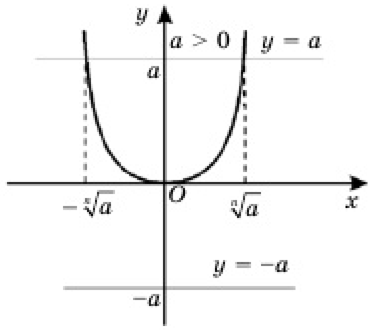


Рис. 3.2

Из рисунка 3.1 мы видим, что для любого числа a графики функций $y = x^n$ и $y = a$ пересекаются в одной точке. При $a > 0$ корень n-й степени из этого числа является положительным числом. При $a = 0$ корень n-й степени из этого числа равен 0. При $a < 0$ корень n-й степени из этого же числа является отрицательным числом.

Предположим теперь, что n – четное число. Из рисунка 3.2 видно, что при $a > 0$ уравнение (2) имеет два корня. При $a = 0$ уравнение имеет один корень ($x = 0$). При $a < 0$ уравнение (2) не имеет корней, в этом случае графики функций $y = x^{2k}$ ($n = 2k$) и $y = a$ ($a < 0$) не пересекаются.

Таким образом, если n – нечетное число, то существует единственный корень n-й степени из любого числа. В выражении $\sqrt[n]{a}$ число n называют показателем корня, а число a – подкоренным числом (выражением). Например, из $2^5 = 32$ следует $\sqrt[5]{32} = 2$, из $(-3)^3 = -27$ получаем $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[9]{0} = 0$.

Если $a > 0$, n – четное число, то имеется два значения корня n-й степени из числа a: $-\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{a}$. При $n = 2$ получаем знакомый нам квадратный корень и показатель 2 не записываем. Например, вместо $\sqrt[2]{3}$ следует писать $\sqrt{3}$.

Если $a = 0$, то $\sqrt[n]{0} = 0$.

Если $a < 0$, n – четное число, то выражения $\sqrt[n]{a}$ (в множестве действительных чисел) не существуют, т.е. данное выражение не имеет смысла (не определено).

Если $a < 0$, n – нечетное число, выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет отрицательное значение.

Например, из $3^4 = 81$ следует $\sqrt[4]{81} = 3$, из $2^6 = 64$ следует $\sqrt[6]{64} = 2$, а $\sqrt[4]{-81}$ и $\sqrt[6]{-64}$ в области действительных чисел не имеют смысла.

В случае корня четной степени, например, 2-й, 4-й и т.д., символом $\sqrt[n]{a}$ обозначают только неотрицательное значение корня, например, $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[6]{64} = 2$. Их называют ***арифметическими корнями*** или арифметическими значениями корней.

3.1.2. Свойства корня n-й степени

Теперь перейдем к изучению свойств корня n-й степени. Во избежание путаницы будем считать, что подкоренные выражения являются неотрицательными числами.

1°. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ (*n-я степень корня n-й степени равна подкоренному числу*).

2°. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ (*корень n-й степени из произведения нескольких чисел равен произведению корней той же степени из каждого числа*).

3°. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ (*чтобы возвести корень n-й степени в степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель корня*).

4°. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$ (*чтобы извлечь корень n-й степени из дроби, надо извлечь его из числителя и знаменателя, и первый результат разделить на второй*).

5°. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ (*чтобы извлечь корень m-й степени из корня n-й степени, достаточно перемножить показатели корней*).

6°. $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ (*если подкоренное выражение есть степень, показатель которой имеет общий множитель с показателем корня, то на этот множитель можно разделить оба показателя*).

Докажем перечисленные шесть свойств.

Свойство 1° вытекает из определения корня.

Доказательство свойства 2°. Согласно свойству 1° имеем: $\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab$. С другой стороны, пользуясь свойством степени произведения чисел, получим: $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$. Свойство 2° доказано.

Доказательство свойства 3°. Из равенств $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k$ и $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = a^k$ получим равенство $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$.

Работа в группе

Докажите свойство 4° и приведите примеры.

Доказательство свойства 5° вытекает из равенств $\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ и $\left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn} = a$.

Доказательство свойства 6°. Применяя свойства 1°, 3° и 5°, получим: $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{km}}} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[k]{a^m}\right)^k} = \sqrt[n]{a^m}$.

Пример 1. Упростим выражение $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{2}$.

▲ Показатели данных корней равны 2, 3 и 6. Так как наименьшее общее кратное этих чисел равно 6, то, пользуясь свойством 6°, умножим показатели корней $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{4}$ на числа, чтобы показатели данных корней были равны 6. Тогда из свойства 2° следует, что

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^4}\cdot\sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3\cdot 2^4\cdot 2} = \sqrt[6]{2^8}.$$

Вновь, применяя свойство 6°, сократим показатель степени подкоренного числа 8 и показатель корня 6 на их общий делитель 2. Получим: $\sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3\cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$. Итак, $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{2} = 2\sqrt[3]{2}$. ■

Пример 2. Найдем значение выражения $\sqrt[7]{2^{58}}$.

▲ $\sqrt[7]{2^{58}} = \sqrt[7]{2^{7\cdot 8+2}} = \sqrt[7]{2^{7\cdot 8}\cdot 2^2} = \sqrt[7]{2^{7\cdot 8}}\cdot\sqrt[7]{2^2} = 2^8\sqrt[7]{2^2} = 256\sqrt[7]{4}$. ■

Пример 3. Найдем значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[4]{9}}{\sqrt[6]{24}}$.

$$▲ \frac{\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[4]{9}}{\sqrt[6]{24}} = \frac{\sqrt[12]{36^4}\cdot\sqrt[12]{9^3}}{\sqrt[12]{24^2}} = \frac{\sqrt[12]{2^8\cdot3^8\cdot3^6}}{\sqrt[12]{2^6\cdot3^2}} = \sqrt[12]{\frac{2^8\cdot3^{14}}{2^6\cdot3^2}} = \sqrt[12]{2^2\cdot3^{12}}$$

$$= 3\sqrt[12]{2^2} = 3\sqrt[6]{2}. ■$$

1. Дайте определение корня n-й степени из числа a.
2. Какие свойства корня n-й степени вы знаете? Докажите их.

Упражнения

A

3.1. Решите уравнение:

1) $x^3 = 8$; 2) $3x^4 - 48 = 0$; 3) $x^5 = -32$;
4) $x^3 = 4$; 5) $x^4 = 10$; 6) $x^5 = 6$;
7) $x^3 = -4$; 8) $x^4 = -10$; 9) $x^6 = 7$.

3.2. При каких значениях x выполняется равенство:

1) $\sqrt{x^2} = x$; 2) $\sqrt[3]{x^3} = x$; 3) $\sqrt[4]{x^4} = -x$?

3.3. Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt[4]{x}$; 2) $\sqrt[3]{x}$; 3) $\sqrt[6]{-x}$; 4) $\sqrt[8]{x-2}$;

5) $\sqrt[5]{3-x}$; 6) $\sqrt[6]{\frac{1}{2x-5}}$; 7) $\sqrt[3]{\frac{17}{x-6}}$; 8) $\sqrt[14]{\frac{x+3}{x-3}}$;

9) $\sqrt[10]{\frac{x-5}{2-x}}$; 10) $\sqrt[7]{\frac{x-2}{2+x}}$; 11) $\sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}}$; 12) $\sqrt[8]{\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}}$.

3.4. Вычислите:

1) $\sqrt[6]{2^6}$; 2) $\sqrt[4]{(-3)^4}$; 3) $-\sqrt[6]{25^3}$; 4) $\sqrt[3]{125} - \sqrt[4]{(-9)^4}$;
5) $\sqrt[5]{7^5}$; 6) $\sqrt[3]{(-2)^3}$; 7) $\left(-3\sqrt[3]{3}\right)^3$; 8) $\sqrt[5]{32} - \sqrt[6]{27^2}$.

3.5. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[4]{16}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$; 3) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; 4) $\sqrt[3]{0,027}$;

5) $\sqrt[5]{-32}$; 6) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; 7) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$; 8) $\sqrt[4]{0,0625}$;

9) $\sqrt[12]{1}$; 10) $\sqrt[7]{-1}$; 11) $\sqrt[6]{11\frac{25}{64}}$; 12) $\sqrt[5]{-0,00001}$.

3.6. Сравните числа:

1) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[4]{5}$; 2) $\sqrt{0,5}$ и $\sqrt[4]{0,5}$; 3) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[5]{3}$;

4) $\sqrt[3]{0,7}$ и $\sqrt[5]{0,7}$; 5) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[5]{4}$; 6) $\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[4]{5}$;

7) $\sqrt[10]{8}$ и 1; 8) $\sqrt[7]{0,85}$ и 1; 9) $\sqrt[5]{-0,2}$ и $\sqrt[5]{-0,3}$;

10) $\sqrt[18]{\dfrac{4}{7}}$ и $\sqrt[18]{0,57}$.

3.7. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{8\cdot 27}$; 2) $\sqrt[4]{625\cdot 16}$; 3) $\sqrt[5]{243\cdot \dfrac{1}{32}}$; 4) $\sqrt[3]{125\cdot 27}$;

5) $\sqrt[3]{0,001\cdot 125}$; 6) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}\cdot 10000}$; 7) $\sqrt[4]{16\cdot 81}$; 8) $\sqrt[4]{0,0016\cdot 81}$;

3.8. Предполагая $a > 0$, вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{4\cdot a}$; 2) $\sqrt{50\cdot a^3}$; 3) $\sqrt[4]{16\cdot a}$; 4) $\sqrt[4]{81\cdot a^6}$;

5) $\sqrt[4]{81a^2}$; 6) $\sqrt[3]{27a^3}$; 7) $\sqrt[3]{5a^4}$; 8) $\sqrt[6]{10a^8}$.

3.9. Внесите множитель под знак корня:

1) $2\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt[3]{5}$; 3) $3\sqrt[4]{\dfrac{1}{9}}$; 4) $3\sqrt{5}$;

5) $3\sqrt{2}$; 6) $5\sqrt[3]{2}$; 7) $2\sqrt[5]{\dfrac{1}{8}}$; 8) $b\sqrt[4]{5},\ b > 0$.

B

3.10. Определите знак разности:

1) $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{7}$; 2) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}}-\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}}$; 3) $\sqrt[6]{0,28}-\sqrt[6]{\dfrac{2}{7}}$;

4) $\sqrt[8]{11}-\sqrt[8]{10}$; 5) $1-\sqrt[4]{0,99}$; 6) $\sqrt[7]{\dfrac{7}{11}}-\sqrt[7]{\dfrac{9}{19}}$;

7) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[5]{2}$; 8) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}-\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}$; 9) $\sqrt[k]{3}-\sqrt[2k]{3}$.

3.11. Расположите числа в порядке возрастания:

1) $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[6]{6}$; 2) $\sqrt{\dfrac{1}{2}},\ \sqrt[3]{0,35},\ \sqrt[6]{0,15}$;

3) $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{0,3}$, $\sqrt[5]{0,2}$; 4) $5\sqrt{0,1}$, $3\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$, $2\sqrt[6]{\frac{1}{3}}$.

3.12. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{\frac{64\cdot 27}{125}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{81}{16\cdot 625}}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{3^{10}\cdot 5^5}{7^{10}}}$; 4) $\sqrt[6]{\frac{9^9}{2^{12}\cdot 5^6}}$.

3.13. Буквами обозначены положительные числа. Вынесите множитель из-под знака корня.

1) $\sqrt{16x^2y}$; 2) $\sqrt[4]{81ab^4}$; 3) $\sqrt[3]{125a^5x^3}$; 4) $\sqrt[3]{64b^{12}\cdot y^7}$.

3.14. Буквами обозначены положительные числа. Внесите множитель под знак корня.

1) $a\cdot\sqrt{\frac{5}{a}}$; 2) $x\cdot\sqrt[3]{\frac{8}{x^2}}$; 3) $b\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{b^3}}$; 4) $2c\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{16c^4}}$.

3.15. Пусть $a > 0$. Докажите справедливость следующего равенства:

1) $\sqrt[n+1]{a\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}$; 2) $\sqrt[2n+2]{a^3\cdot\sqrt[n]{a^3}} = \sqrt[2n]{a^3}$.

3.16. Докажите, что верно следующее равенство:

1) $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} = 1$; 2) $\sqrt[6]{1,5-\sqrt{2}} : \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[6]{0,5}$.

3.17. Преобразуйте данное выражение так, чтобы его знаменатель не содержал корней:

1) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{10}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$; 4) $\frac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$.

C

3.18. Упростите выражение:

1) $\sqrt[6]{8x\left(7+4\sqrt{3}\right)}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}$;

2) $\frac{a}{2}\sqrt[4]{(a+1)\left(a^2-1\right)\left(1+2a+a^2\right)}\cdot\left(\frac{a^2+3a+2}{\sqrt{a-1}}\right)^{-1}$.

3.19. Упростите выражение:

1) $\sqrt{\frac{(a+1)\sqrt[3]{a+1}}{3a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}}$;

2) $ab\sqrt[n]{a^{1-n}b^{-n}-a^{-n}b^{1-n}}\cdot\sqrt[n]{(a-b)^{-1}}$.

3.20*. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

Упражнения для повторения

3.21. Постройте график уравнения $4x^2 - 3y = 0$.

3.22. Могут ли быть корнями уравнения $x^3 + x^2 = 6x$ следующие числа: 1) 0; 2) −3; 3) −2?

3.23. Постройте график уравнения $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20 = 0$.

3.2. Степень с рациональным показателем и ее свойства

Изучив пункт, вы:

- узнаете определение степени с рациональным показателем и ее свойства;
- научитесь применять свойства степени с рациональным показателем при преобразовании алгебраических выражений.

3.2.1. Степень с рациональным показателем

Если число m делится на число n без остатка, то имеет место равенство $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$. Например, $\sqrt[5]{2^{10}}=2^{\frac{10}{5}}=2^2$. Это равенство дает возможность определить степень с любым дробным показателем.

Пусть $a > 0$ и дано рациональное число $r=\dfrac{m}{n}$ (здесь m – целое число, а n – натуральное). Тогда ***степенью с основанием a и рациональным показателем r*** называют выражение $\sqrt[n]{a^m}$,

$$\text{т. е. } a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Если $r > 0$ и $a = 0$, то по определению $0^r = 0$.

Приведем примеры:

$$(0,2)^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{0,2^2},\ 3^{-\frac{3}{4}}=3^{\frac{-3}{4}}=\sqrt[4]{3^{-3}}=\sqrt[4]{\frac{1}{27}},$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2,1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{21}{10}}=\sqrt[10]{\left(\frac{1}{3}\right)^{21}},\ 0^{\frac{1}{2}}=0.$$

Выражения $0^{-\frac{2}{3}}$, $(-2)^{\frac{3}{4}}$ и $(-8)^{\frac{1}{6}}$ не имеют смысла.

Десятичную дробь можно записать в виде обыкновенной дроби различными способами. Например, десятичную дробь 0,5 можно представить в виде таких дробей: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ и т.п. Покажем, что значение степени с рациональным показателем r не изменится, если показатель степени r равен одному из равных дробей.

▲ Действительно, каждое рациональное число r можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$. Тогда любая другая дробь, представляющая число r, может быть получена умножением и числителя, и знаменателя дроби $\frac{m}{n}$ на одно и то же натуральное число k. Следовательно, нам остается показать, что $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}}$. В самом деле, $a^{\frac{km}{kn}} = \sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. ■

3.2.2. Свойства степени с рациональным показателем

Степени с рациональным показателем обладают теми же свойствами, что и степени с целым показателем.

Пусть $a > 0$, $b > 0$. *Тогда для любых рациональных чисел* p *и* q *имеет место равенство*:

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; 2) $a^p : a^q = a^{p-q}$; 3) $(a^p)^q = a^{pq}$;

4) $(ab)^p = a^p \cdot b^p$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

▲ **Доказательство** свойства 1. Запишем данные рациональные числа p и q в виде дробей с одинаковым знаменателем: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$ (например, вместо дробей $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{2}{3}$ можно взять дроби $p = \frac{3}{6}$, $q = \frac{4}{6}$). Тогда $a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} =$
$= \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{p+q}$.

Из свойства 1 следует, что для всякого рационального числа p справедливо равенство

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Действительно, $a^p \cdot a^{-p} = a^0 = 1$. Отсюда $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

Доказательство свойства 2 вытекает из равенства $a^{p-q} \cdot a^{q} = a^{p-q+q} = a^{p}$.

Доказательство свойства 3. Пусть $a > 0$, $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$. Тогда

$$\left(a^{p}\right)^{q} = \sqrt[l]{\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{k}} = \sqrt[l]{\sqrt[n]{a^{mk}}} = \sqrt[ln]{a^{mk}} = a^{\frac{mk}{ln}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}} = a^{p\cdot q}.$$

Доказательство свойства 4. Если $p = \frac{m}{n}$, то

$$(a\cdot b)^{p} = (a\cdot b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a\cdot b)^{m}} = \sqrt[n]{a^{m}\cdot b^{m}} = \sqrt[n]{a^{m}}\cdot\sqrt[n]{b^{m}} = a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}} = a^{p}\cdot b^{p}.$$ ■

Работа в группе

Докажите свойство 5 и приведите соответствующий пример.

Рассмотрим пример на преобразование выражения, содержащего степени с рациональными показателями.

Пример 1. Упростим выражение $\dfrac{x^{\frac{3}{4}} - 25x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{4}}}$.

▲ Область определения данного выражения задается неравенством $x > 0$. Чтобы упростить это выражение, разложим числитель и знаменатель дроби на множители.

$$\frac{x^{\frac{3}{4}} - 25x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{2}{4}} - 25)}{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{4}} + 5)} = \frac{x^{\frac{2}{4}} - 25}{x^{\frac{1}{4}} + 5} = \frac{(x^{\frac{1}{4}})^{2} - 5^{2}}{x^{\frac{1}{4}} + 5} =$$

$$= \frac{(x^{\frac{1}{4}} + 5)(x^{\frac{1}{4}} - 5)}{x^{\frac{1}{4}} + 5} = x^{\frac{1}{4}} - 5.$$ ■

1. Что вы понимаете под степенью с рациональным показателем?
2. Какие свойства степеней с рациональными показателями вы знаете? Докажите их.

Упражнения

А

3.24. Запишите степень с дробным показателем с помощью знака корня:

1) $7^{\frac{5}{3}}, 5^{\frac{1}{7}}, 6^{-\frac{1}{3}}, 10^{-0,5}$;
2) $3x^{\frac{1}{2}}, (3x)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{5}y^{\frac{1}{5}}, -y^{-\frac{2}{3}}$;

3) $2,5^{-\frac{2}{3}}, \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}, 0,5^{0,5}$; 4) $(ab)^{\frac{2}{3}}, ab^{\frac{2}{3}}, (a+b)^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$;

5) $a^{0,5}, b^{1,2}, c^{-0,6}, d^{-0,5}$; 6) $xy^{-1,5}, 4(x-y)^{-1,5}, 2x(x+y)^{-\frac{1}{8}}$;

7) $5x^{\frac{2}{3}}, 7a^{-1,5}, ab^{\frac{5}{8}}, (x+y)^{\frac{2}{3}}$; 8) $-3y^{-\frac{1}{2}}, -1,2b^{-1,2}, (ab)^{\frac{5}{8}}, x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

3.25. Запишите данное выражение в виде суммы:

1) $a^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})$; 2) $e^{-\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}(e^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})$;

3) $(a^{\frac{2}{3}}-1)(a^{\frac{1}{3}}+2)$; 4) $(x^{-\frac{3}{4}}+2)(x^{-\frac{1}{4}}-3)$;

5) $(1+b^{\frac{1}{2}})(1-b^{\frac{1}{2}})$; 6) $(2-y^{1,5})(2+y^{1,5})$.

3.26. Вычислите:

1) $100^{\frac{1}{2}}, 8^{\frac{1}{3}}, 3,61^{-\frac{1}{2}}$; 2) $0^{\frac{5}{6}}, 8^{1\frac{1}{3}}, \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $27^{-\frac{1}{3}}, 81^{\frac{3}{4}}, 0,25^{-\frac{3}{2}}$; 4) $\left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}}, 16^{\frac{1}{4}}, 343^{\frac{1}{3}}$;

5) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25}, 0,0081^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{1}{625}\right)^{\frac{1}{4}}$; 6) $(0,001)^{\frac{2}{3}}, 256^{\frac{1}{8}}, (0,000001)^{-\frac{1}{3}}$.

3.27. Упростив выражение, запишите его в виде степени с рациональным показателем:

1) $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}}$; 2) $b^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$; 3) $x^{0,2} \cdot x^{-1} \cdot x^{0,6}$;

4) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{5}{3}}$; 5) $y^{0,8} \cdot y^{-5} \cdot y^{7,2}$; 6) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$;

7) $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{9}}$; 8) $\left(x^{0,1}\right)^{-2,5}$; 9) $\left(y^{-0,5}\right)^{-1}$;

10) $\dfrac{x^{\frac{3}{7}} \cdot x^{\frac{5}{21}}}{x^{\frac{1}{6}}}$; 11) $\dfrac{a^{5,2} \cdot a^{-0,8}}{a \cdot a^{0,9}}$; 12) $\dfrac{b^{0,2} \cdot b^{0,5}}{b^{-1,5} \cdot b^{3}}$.

3.28. Вычислите:

1) $5^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{-0,25} \cdot 5^{\frac{4}{5}} \cdot 5^{-0,75}$; 2) $3^{\frac{3}{8}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} \cdot 3^{-0,25} \cdot 3^{\frac{11}{40}}$;

3) $4^{0,7} \cdot 2^{-0,4}$; 4) $25^{0,3} \cdot 5^{\frac{14}{10}}$;

5) $9^{-\frac{4}{3}} \cdot 27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$; 6) $64^{\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{8}{3}}$;

7) $(81 \cdot 16)^{\frac{1}{4}}$; 8) $(81 \cdot 16)^{-\frac{1}{4}}$;

9) $\left(0,01 \cdot \frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 10) $\left(\frac{1}{27} \cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

3.29. Запишите в виде суммы:

1) $\left(2p^{\frac{1}{3}} + q^{-1}\right)\left(2p^{\frac{1}{3}} - q^{-1}\right)$; 2) $\left(1 + b^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

3) $\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^2$; 4) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}\right)^2$;

5) $\left(\left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$; 6) $\left(\left(x^{-\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{-\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$.

3.30. Разложите на множители, используя формулу $a^2 - b^2 = (a - b) \times$ $\times (a + b)$:

1) $3 - x^2$; 2) $y^4 - 5$; 3) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 4$;

4) $y^{\frac{2}{5}} - 9$; 5) $25 - p^{\frac{4}{7}}$; 6) $a - b^{\frac{1}{2}}$.

3.31. Разложите на множители:

1) $x - 2$; 2) $10 - y$; 3) $a^{\frac{1}{16}} - 16$;

4) $9c^{0,3} - 4$; 5) $a^{1,5} - y^2$; 6) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}} - 49$.

3.32. Разложите на множители, используя формулу $a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \times$ $\times \left(a^2 \mp ab + b^2\right)$:

1) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 - 8$; 2) $\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^3 + 27$; 3) $\left(p^{\frac{1}{3}}\right)^2 + 1$;

4) $q^{\frac{6}{5}} - 125$; 5) $125 - b$; 6) $y - 2^{\frac{3}{2}}$;

7) $a^{0,9} - 8b$; 8) $x + 1000$; 9) $a^{2,4} + b^{0,5}$.

B

3.33. Упростите выражение:

1) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{0,6} \cdot x^{-\frac{2}{5}}$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $\left(y^{-\frac{5}{8}}\right)^{0,4} \cdot y^{0,25}$; 4) $\left(c^{\frac{5}{12}}\right)^{1,2} : \left(c^{-\frac{1}{3}}\right)^{-1,5}$;

5) $a^{\frac{5}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{6}}\left(a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}\right)^{4}$; 6) $\left(c^{-\frac{3}{7}} \cdot y^{-0,4}\right)^{3} c^{\frac{2}{7}} \cdot y^{0,2}$;

7) $\left(a^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right)^{1\frac{1}{3}} a^{0,7} \cdot x^{0,8}$; 8) $p^{-1}q^{\frac{5}{4}}\left(p^{-\frac{2}{7}} \cdot q^{\frac{1}{14}}\right)^{-3,5}$.

3.34. Пусть $x > 0$. Представьте следующие выражения в виде квадрата: x^6, x^{40}, x^{23}, x^{-14}, x^5, x^{-3}, x, $x^{\frac{1}{4}}$, x^{-1}, $x^{\frac{1}{3}}$.

3.35. Пусть $y > 0$. Представьте следующие выражения в виде куба: y^6, y^{-21}, y^7, y, $y^{\frac{1}{2}}$, $y^{-1,5}$, $y^{-\frac{1}{3}}$, $y^{0,2}$, $y^{-0,9}$.

3.36. Вычислите значение выражения:

1) $\left(\dfrac{a^{\frac{5}{12}} \cdot a^{-\frac{3}{8}}}{a^{\frac{7}{24}}}\right)^{-\frac{4}{3}}$ при $a = 125$;

2) $\left(\dfrac{b^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{6}} \cdot c^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}}$ при $b = 0{,}001$, $c = 25$.

3.37. Пусть $x > 0$ и $y > 0$. Выразите x через y:

1) $y = x^{\frac{2}{3}}$; 2) $y = x^{\frac{4}{7}}$; 3) $y = x^{-\frac{3}{2}}$;

4) $y = x^{-0,75}$; 5) $y = 5x^{\frac{4}{5}}$; 6) $y = \dfrac{1}{6}x^{-\frac{2}{3}}$.

3.38. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{4}{c^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\dfrac{c^{\frac{3}{4}}}{8}\right)^{\frac{1}{9}}$; 2) $\left(\dfrac{27x^{\frac{1}{2}}}{z^{0,2}}\right)^{2,5} \cdot \left(\dfrac{z^{\frac{1}{12}}}{3\sqrt[4]{3}x^{\frac{1}{24}}}\right)^{6}$.

3.39. Упростите выражение:

1) $\left(1+c^{\frac{1}{2}}\right)^2-2c^{\frac{1}{2}}$; 2) $b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}-\left(b^{\frac{1}{4}}+c^{\frac{1}{4}}\right)^2$;

3) $\left(x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{3}}\right)^2+2x^{\frac{7}{12}}$; 4) $(a^{0,2}+x^{0,2})^2-(a^{0,2}-x^{0,2})^2$;

5) $\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$; 6) $\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\left(b+b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}+c\right)$.

3.40. Решите уравнение:

1) $x^{\frac{1}{2}}=5$; 2) $x^{\frac{2}{3}}=4$; 3) $x^{\frac{3}{2}}=27$;

4) $x^{-0,8}=16$; 5) $x^{\frac{4}{5}}\cdot x^{1,8}=1$; 6) $x^{\frac{5}{8}}\cdot x^{\frac{3}{8}}=-25$.

3.41. Упростите:

1) $\left(p^{\frac{1}{3}}+q^{\frac{1}{3}}\right)\left(p^{\frac{2}{3}}-p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}+q^{\frac{2}{3}}\right)$; 2) $\left(b^{1\frac{1}{2}}-c^{1\frac{1}{2}}\right)^2\left(b^{1\frac{1}{2}}+c^{1\frac{1}{2}}\right)^2$;

3) $a+6a^{\frac{2}{3}}+12a^{\frac{1}{3}}+8$; 4) $x^2-9x^{\frac{4}{3}}+27x^{\frac{2}{3}}-27$.

3.42. Упростите выражение:

1) $\left(-\dfrac{15m^{3,5}}{8n^{\frac{1}{2}}}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{4n^{\frac{3}{8}}}{5m^{2,5}}\right)^4$; 2) $\left(-\dfrac{10x^{0,4}}{9a^{0,6}}\right)^4\cdot\left(-\dfrac{5x^{\frac{1}{2}}}{27a^{0,8}}\right)^{-3}$.

3.43. Разложите на множители:

1) $x-y+x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$; 2) $u-v^{\frac{1}{2}}+u^{\frac{1}{2}}-v$;

3) $a+2a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}+1$; 4) $2b^2+b^{\frac{8}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+2$;

5) $x+5x^{\frac{1}{2}}+4$; 6) $y^{\frac{1}{2}}-13y^{\frac{1}{4}}+36$.

C

3.44. Пользуясь формулой $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)$, разложите выражение $x-1$ на множители, один из которых равен: 1) $x^{\frac{1}{4}}-1$; 2) $x^{\frac{1}{5}}-1$; 3) $x^{\frac{1}{6}}-1$.

3.45. Найдите зависимость между x и y:

1) $\begin{cases} x = t^{\frac{1}{2}}, \\ y = t^{-\frac{1}{2}}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t^{\frac{1}{3}}, \\ y = t^{\frac{1}{6}}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 3t^{\frac{1}{2}}, \\ y = 2t^{-\frac{1}{3}}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}, \\ y = \frac{1}{3}t^{-\frac{1}{3}}. \end{cases}$

3.46. Пусть $x = \frac{a^2+1}{2a}$, где $0 < a < 1$. Упростите выражение

$$\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x-1)^{-0,5} - (x+1)^{-0,5}}.$$

Упражнения для повторения

3.47. Решите неравенства:

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geqslant \frac{1}{x+2}$; 2) $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x} > \frac{3}{x-1}$.

3.48*. Найдите значения следующих выражений, не пользуясь таблицей:

1) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$; 2) $8\cos10°\cos30°\cos50°\cos70°$.

▲ 1) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$

$$= \frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}. \ ■$$

3.3. Преобразование иррациональных выражений. Понятие степени с иррациональным показателем

Изучив пункт, вы:

- научитесь применять свойства корня n-й степени к преобразованию иррациональных выражений;
- узнаете и научитесь применять формулу сложного радикала.

3.3.1. Понятие степени с иррациональным показателем

Продолжим изучение степени с основанием $a > 0$ и рассмотрим случай, когда показатель степени является действительным числом. Как нам известно, множеством действительных чисел является объединение множеств рациональных и иррациональных чисел. Поэтому понятие степени с действительным показателем можно считать определенным, когда определены степени с рациональным и иррациональным показателями. Про степень с рациональным показателем мы говорили в предыдущем разделе. Для определения понятия степени с иррациональным показателем применяется следующий метод. Рассмотрим приближения к иррациональному числу рациональных чисел по избытку и недостатку. Например, чтобы определить выражение $3^{\sqrt{2}}$, запишем последовательность двойных неравенств, в которых $\sqrt{2}$ приближается к рациональным числам слева и справа:

$$3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2,$$

$$3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5},$$

$$3^{1,41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,42},$$

....

Если продолжать этот процесс неограниченно, то показатели степеней в левой и правой частях неравенства можно представить в виде бесконечных десятичных дробей. Причем количество равных десятичных знаков после запятой в левой и правой частях неравенства увеличивается с каждым шагом этого процесса. Эти десятичные знаки мы будем считать десятичными знаками иррационального числа $3^{\sqrt{2}}$. На этом мы остановимся, т.к. строгое определение степени с иррациональным показателем вводится в курсе высшей математики, после изучения специальных разделов.

В общем, если $a > 0$, то для любого действительного числа x определено число a^x. Для степени с действительным показателем остаются справедливыми свойства степени с рациональным показателем, т.е. перечисленные в предыдущем пункте свойства 1–5.

Мы знаем, что степень с рациональным показателем может быть определена и в случае, когда ее основание – отрицательное число ($a < 0$). Это возможно при условии, что показатель степени – несократимая дробь $\frac{m}{n}$, и число n – нечетное. Тогда степень с рациональным показателем определяется формулой $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Однако иррациональная степень отрицательного числа не определена.

Пример 1. Упростим выражение $\sqrt[5]{\frac{8}{90}} \cdot \sqrt[7]{\frac{3}{16}}$.

$$▲\ \sqrt[5]{\frac{8}{9}}\cdot\sqrt[7]{\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{9}}\cdot\frac{\sqrt[7]{3}}{\sqrt[7]{16}}=\frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{3^2}}\cdot\frac{\sqrt[7]{3}}{\sqrt[7]{2^4}}=\frac{2^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{2}{5}}}\cdot\frac{3^{\frac{1}{7}}}{2^{\frac{4}{7}}}=$$

$$=2^{\frac{3}{5}}\cdot3^{-\frac{2}{5}}\cdot3^{\frac{1}{7}}\cdot2^{-\frac{4}{7}}=2^{\frac{1}{35}}\cdot3^{-\frac{9}{35}}=\sqrt[35]{\frac{2}{3^9}}\ ■$$

Если $a>0,\ b>0,\ a^2>b$, то имеет место следующая формула:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Эта формула называется ***формулой сложного радикала***.

Пример 2. Упростим выражение $\sqrt{9-6\sqrt{2}}$.

▲ *I способ.* Применим формулу сложного радикала:

$$\sqrt{9-6\sqrt{2}}=\sqrt{9-\sqrt{72}}=\sqrt{\frac{9+\sqrt{81-72}}{2}}-\sqrt{\frac{9-\sqrt{81-72}}{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{3}.$$

II способ. Приведя подкоренное выражение к полному квадрату, получим:

$$\sqrt{9-6\sqrt{2}}=\sqrt{6-6\sqrt{2}+3}=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-2\sqrt{6\cdot3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{6}-\sqrt{3}.\ ■$$

1. Как можно определить степень с иррациональным показателем?
2. Напишите формулу сложного радикала.
3. Как показатель корня влияет на область определения?

Упражнения

А

3.49. Представьте данное выражение в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{143^2},\ \sqrt[6]{\frac{1}{15}}$; 2) $\sqrt{0,2},\ \sqrt[5]{73^3},\ \sqrt[8]{2^{-2}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt[4]{3^{-2}}},\ \sqrt[3]{2b},\ \sqrt[4]{7+a}$; 4) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}},\ \sqrt[4]{3a},\ \sqrt[5]{2+b}$;

5) $2,5\sqrt{40},\ a\sqrt{a},\ (x+1)^2\cdot\sqrt[4]{x+1}$; 6) $-8\sqrt[3]{2},\ -b\sqrt[3]{b},\ (y-5)^3\cdot\sqrt[4]{y-5}$.

3.50. Представьте данное выражение в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[15]{x}$; 2) $\sqrt[8]{a^3}\cdot\sqrt[12]{a}$; 3) $\sqrt[7]{y^2}\cdot\sqrt[3]{y^{-1}}$;

4) $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$; 5) $\sqrt[10]{y\cdot\sqrt[3]{y^2}}$; 6) $\sqrt[5]{x^2\cdot\sqrt[4]{x^{-3}}}$;

7) $\dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[14]{x}}$; 8) $\sqrt[5]{a^3\cdot\sqrt[3]{a^2}}$; 9) $\dfrac{\sqrt[5]{b^2\cdot\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{b\cdot\sqrt{b}}}$.

3.51. Преобразуйте данное выражение так, чтобы его знаменатель не содержал корней:

1) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4}}$; 2) $\dfrac{18}{\sqrt[4]{27}}$; 3) $\dfrac{6}{\sqrt[5]{8}}$; 4) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{-49}}$;

5) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 6) $\dfrac{7}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$; 7) $\dfrac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$; 8) $\dfrac{29}{\sqrt{20}-\sqrt{9}}$.

B

3.52. Преобразуйте данное выражение так, чтобы его знаменатель не содержал корней:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; 2) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$; 3) $\dfrac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$; 4) $\dfrac{29}{3+\sqrt[3]{2}}$.

3.53. Сократите дробь:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{b}-a^3}{a\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+b}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

4) $\dfrac{\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt{b}}$; 5) $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}}$; 6) $\dfrac{b\sqrt{b}-\sqrt[3]{a^2}}{a^2+b^4\sqrt{b}}$.

3.54. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

1) $\dfrac{1}{3+\sqrt[4]{2}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}}$;

4) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}$; 5) $\dfrac{2}{\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{3}}$; 6) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

3.55. Упростите выражение:

$$x\sqrt[6]{x^3y\sqrt{7-4\sqrt{3}}}\cdot\sqrt[6]{x^3y\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$$

C

3.56. Докажите тождество $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$.

▲ Обозначив $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=a$, возведем в куб обе части равенства:

$$2+\sqrt{5}+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+3\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+2-\sqrt{5}=a^3,$$

$$4+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+3\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=a^3.$$

Вынесем за скобки общий множитель второго и третьего слагаемых в левой части равенства:

$$4+3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)=a^3,$$

$$4+3\sqrt[3]{4-5}\cdot\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)=a^3.$$

Учитывая, что выражение в скобках равно a, получаем кубическое уравнение $4-3a=a^3$.
Разложим на множители выражение
$a^3+3a-4=a^3-1+3a-3=(a-1)(a^2+a+1)+3(a-1)=$
$=(a-1)(a^2+a+4)$.
Отсюда получим, что корень кубического уравнения таков: $a=1$. ■

3.57. Упростите выражение:

1) $\left(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right)^{-\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[10]{(a-b)^3}$;

2) $y\left[\left(\frac{x\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x^2y^3}}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}}-\sqrt[4]{xy}\right):\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)-\sqrt[4]{x}\right]^{-4}$.

3.58. Докажите формулу сложного радикала:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

3.59. Найдите значение выражения:

1) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1+\sqrt[32]{a}\right)\left(1-\sqrt[32]{a}\right)$

при $a=2017$;

2) $\left(a-\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1\right)$ при $a = 5$.

Упражнения для повторения

3.60. Запишите выражение в виде двучлена:

1) $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2)$;

2) $(a + b)(a - b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.

3.61. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + xy + x = 14, \\ y^2 + xy + y = 27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 1, \\ 3y + x = 0. \end{cases}$

3.4. Степенные функции, их свойства и графики

Изучив пункт, вы:

- узнаете определение степенной функции с действительным показателем степени;
- научитесь строить график степенной функции с разными показателями степеней;
- узнаете и научитесь применять свойства степенной функции;
- познакомитесь с примерами применения степенной функции в повседневной жизни.

Определение. *Функция вида $y = ax^{\alpha}$, $(x > 0)$, где a и α – данные действительные числа, называется* ***степенной функцией****, x является аргументом, α – показателем степени.*

Согласно определению, показатель степени α является действительным числом, т.е. может быть и рациональным числом, и иррациональным. Но степень с иррациональным показателем определяется через степень с рациональным показателем. Поэтому во избежание ненужных сложностей будем считать показатель степени рациональным числом. В общем случае степень с рациональным показателем определена для положительных чисел, следовательно, в качестве области определения степенной функции возьмем множество $(0; +\infty)$.

Свойства степенной функции

1°. *Степенная функция принимает только положительные значения, т.е. для любого действительного числа α и всех $x \in (0; +\infty)$ выполняется неравенство $x^{\alpha} > 0$.*

▲ Если $\alpha = 0$, то $x^\alpha = x^0 = 1 > 0$. Если $\alpha = \frac{m}{n}$ $(m,\ n \in N)$, то $x^\alpha = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$. По условию $x > 0$, значит, $x^m > 0$. Тогда $\sqrt[n]{x^m} > 0$. Если $\alpha = -\frac{m}{n}$ $(n,\ m \in N)$, то в этом случае также $x^\alpha = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} > 0$. ■

2°. *Степенная функция с положительным показателем степени строго возрастает, т.е. если $\alpha > 0$, то для всех $x_1,\ x_2 \in (0;\ +\infty)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $x_1^\alpha < x_2^\alpha$.*

▲ Проверим функцию $y = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha > 0$ на возрастание с помощью производной. Действительно, $y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0$, т.к. $\alpha > 0$ и $x^{\alpha-1} > 0$ (следует из свойства 1°). Значит, функция $y = x^\alpha$, $\alpha > 0$ возрастает на множестве $(0;\ +\infty)$. ■

3°. *Степенная функция с отрицательным показателем степени строго убывает, т.е. если $\alpha < 0$, то для всех $x_1,\ x_2 \in (0;\ +\infty)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $x_1^\alpha < x_2^\alpha$.*

▲ Пусть $y = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha < 0$. Тогда $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} < 0$, т.к. $\alpha < 0$, $x^{\alpha-1} > 0$. Следовательно, данная функция убывает на множестве $(0;\ +\infty)$. ■

Как было сказано выше, аналогичными свойствами обладает и степенная функция с любым действительным показателем. На рисунках 3.3, 3.4 представлены графики функций $y = x^\alpha$ с показателями, равными $2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -2$.

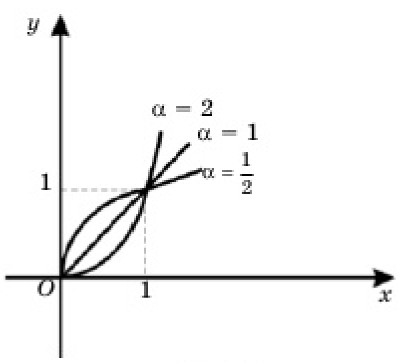


Рис. 3.3

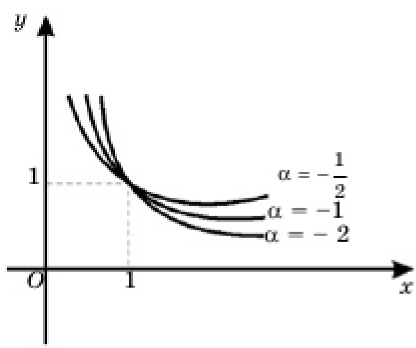


Рис. 3.4

В случае, когда показатель степенной функции является дробным числом с нечетным знаменателем, можно считать, что аргумент принимает и отрицательные значения. Например, графики таких функций $y = x^{\frac{1}{3}}$ и $y = x^{-\frac{1}{3}}$ изображены на рисунках 3.5 и 3.6.

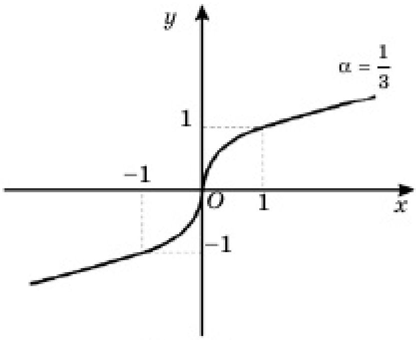


Рис. 3.5

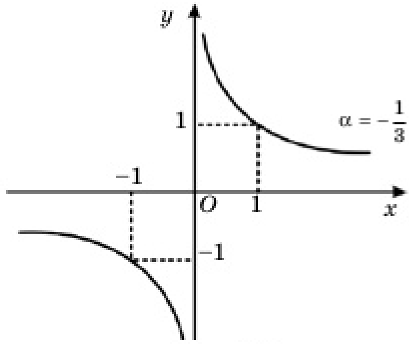


Рис. 3.6

1. Сформулируйте свойства 1° – 3° степенной функции и докажите их.
2. Почему в общем случае в качестве области определения степенной функции принимают множество $(0; +\infty)$?
3. Определена ли в точке $x = 0$ степенная функция, если ее показатель: а) положителен; б) отрицателен? Обоснуйте ответ.
4. Почему степенная функция при $\alpha = \dfrac{m}{2n-1}$, $(n \in N,\ m \in Z)$ определена для отрицательных значений аргумента?

Упражнения

А

3.62. Расположите числа в порядке возрастания:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{7}{11}}, \left(\frac{4}{3}\right)^{0}, \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$;

3) $0{,}12^{-\frac{1}{2}}, 0{,}12^{-\frac{1}{3}}, 0{,}12^{-\frac{1}{4}}$; 4) $2{,}24^{-\frac{1}{2}}, 2{,}24^{-\frac{1}{3}}, 2{,}24^{-\frac{1}{4}}$.

3.63. Сравните числа:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$ и $\left(\frac{4}{7}\right)^{0}$;

3) $\left(\frac{9}{4}\right)^{0{,}2}$ и $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$; 4) $0{,}01^{-0{,}5}$ и $0{,}01^{-0{,}6}$.

3.64. Какая функция возрастающая и какая убывающая:

1) $y = x^{\frac{4}{3}}$; 2) $y = x^{-0{,}2}$; 3) $y = x^{0{,}2}$; 4) $y = x^{-\frac{7}{11}}$?

3.65. Постройте график функции:

1) $y = x^{\frac{3}{2}}$; 2) $y = \sqrt[4]{x}$; 3) $y = x^2$; 4) $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

Материалы из истории

Степенная функция широко применяется в науке. Один из примеров ее применения – третий закон Джона Кеплера (1571–1630), исследовавшего движение планет в Солнечной системе. Согласно этому закону, время, за которое планета совершает полный оборот вокруг Солнца (называемое периодом обращения) зависит от расстояния, на которое планета удалена от Солнца. Точнее говоря, если p – *период обращения планеты и* d – *расстояние от нее до Солнца, то* $d^3 - p^2$ (*квадраты периодов планет Солнечной системы пропорциональны кубам их расстояний от Солнца*).

Используя кубический корень и введя коэффициент пропорциональности k, данную зависимость можно записать с помощью формулы

$$d = k\sqrt[3]{p^2}.$$

Вычислим коэффициент k. Учитывая, что период обращения Земли вокруг Солнца равен 365,25 суток, а расстояние от нее до Солнца равно $1{,}496 \cdot 10^8$ км, получим:

$$d = k\sqrt[3]{p^2} \Rightarrow k = \frac{d}{\sqrt[3]{p^2}} = \frac{1{,}496 \cdot 10^8}{\sqrt[3]{365{,}25^2}} = 2{,}928 \cdot 10^7.$$

Таким образом, третий закон Кеплера можно записать так:

$$d = 2{,}928 \cdot 10^7 \cdot \sqrt[3]{p^2}$$

- Как, согласно закону Кеплера, меняется расстояние планет от Солнца при увеличении их периода обращения? Почему?
- Зная, что период обращения планеты Марс вокруг Солнца равен 687 суткам, найдите расстояние от Марса до Солнца. Результат сравните с информацией, найденной в Интернете.
- Расстояние от планеты Венера до Солнца равно $1{,}082 \times \times 10^8$ км. Найдите период обращения Венеры.

B

3.66. Сравните числа:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}}$ и $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{5}}$; 2) $0,132^{\sqrt{2}}$ и $0,132^{-\sqrt{2}}$;

3) $\left(3\sqrt{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$ и $(12)^{-\frac{1}{3}}$; 4) $\left(\sqrt{76}\right)^{-\frac{6}{11}}$ и $\left(5\sqrt{3}\right)^{-\frac{6}{11}}$.

3.67. Расположите числа в порядке возрастания:

1) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-0,2}, \left(\frac{3}{2}\right)^{0,2}, \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{10}{3}}, \left(\frac{2}{7}\right)^{-\frac{6}{5}}, \left(\frac{13}{17}\right)^{0}$;

3) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}, \left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}, \left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{5}}, \left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{1}{15}}, \left(\frac{4}{25}\right)^{-4}$.

3.68. Какая функция убывающая и какая возрастающая:

1) $y = x^{\sqrt{2}}$; 2) $y = x^{-\sqrt{3}}$; 3) $y = x^{\sqrt{\frac{2}{3}}}$; 4) $y = x^{-\sqrt{\frac{2}{3}}}$?

3.69. Постройте графики функций из упражнения **3.68**. Сравните их с графиками функций $y = x$ и $y = \frac{1}{x}$.

3.70. Вычислите:

1) $\left(27^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 32^{\frac{2}{5}} \cdot 81^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}$; 2) $\left(100^{-\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{4}{3}} \cdot 0,25^{0,5} \cdot 16^{-0,75}\right)^{\frac{3}{4}}$;

3) $\left(6,25^{0,5} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} \cdot 100^{-\frac{1}{2}} \cdot 0,01^{-1}\right)^{-\frac{3}{2}}$;

4) $\left(3^{2,5} \cdot \left(3^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right) : \left(3^{-\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{5}{6}}\right) : \left(\frac{1}{32} \cdot \frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{7}}$.

3.71*. Вычислите:

1) $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[3]{25 + 4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1 + 2\sqrt{6}}$;

3) $\left(\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\right)\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$.

Практическая работа

3.72. Скорость бега человека пропорциональна квадрату длины его шага. Мальчик, длина шага которого равна 0,6 м, бежит со скоростью 7 м/с. Какой будет скорость мальчика, если он увеличит длину шага до 0,65 м?

C

3.73*. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt[3]{x-2}$; 2) $y = (x+3)^{-\frac{1}{2}} + 1$; 3) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$.

3.74. Пусть функция $f(x)$ – четная и такая, что:

1) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x \geqslant 0$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \geqslant 0$; 3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$, $x > 0$.

Запишите уравнение функции $f(x)$ одной формулой.

3.75*. Нечетная функция $f(x)$ удовлетворяет условию:

1) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x \geqslant 0$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \geqslant 0$; 3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$, $x > 0$.

Запишите уравнение функции $f(x)$ одной формулой.

3.76. Найдите значение выражения $\left(a + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a - x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$, если $x = 4(a-1)$, $a > 2$.

3.77. Пусть $1 \leqslant a \leqslant 2$. Найдите значение выражения

$\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

3.78. Решите уравнение:

1) $\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{6}{5}} = \left(\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)^{\frac{6}{5}}$; 2) $\left(\dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}\right)^{\frac{6}{7}}$.

3.79. Расположите числа 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$ в порядке возрастания.

3.80. Площадь кожного покрова тела человека (в м^2) зависит от его роста и веса и вычисляется по приближенной формуле $S = 0{,}007184 \cdot h^{\frac{3}{4}} \cdot w^{\frac{2}{5}}$, где h – рост человека, а w – его вес (в кг).

Посчитайте с помощью калькулятора площадь своего кожного покрова.

Упражнения для повторения

3.81. Определите, является ли последовательность
$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots$
1) ограниченной снизу; 2) ограниченной сверху?

3.82. При каких значениях a числа $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}$ являются членами: 1) арифметической прогрессии; 2) геометрической прогрессии; 3) и арифметической, и геометрической прогрессий?

3.5. Производная степенной функции с действительным показателем и интеграл от нее

Изучив пункт, вы:

- узнаете и научитесь применять формулу вычисления производной степенной функции с действительным показателем;
- узнаете и научитесь применять формулу вычисления неопределенного интеграла от степенной функции с действительным показателем.

Вычисление производной степенной функции с действительным показателем производится по такой же формуле, как и для функции с целым показателем.

Пусть $x > 0$ и r – рациональное число. Производная степенной функции $y = x^r$ вычисляется по формуле

$$\left(x^r\right)' = rx^{r-1}.$$

Пример 1. Найдем производную функции $y = \sqrt[3]{x^2}$.

▲ Пользуясь $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ (определение степени с рациональным показателем), представим данную функцию в виде степени: $y = x^{\frac{2}{3}}$. Тогда

$$y' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}. \ ■$$

Пример 2. Вычислим значение производной функции $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ в точке $x_0 = 1$.

▲ Согласно определению степени с рациональным показателем, имеем: $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$. Следовательно,

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}},$$

$$y'(1) = \frac{1}{3\cdot1\cdot\sqrt[3]{1}} = -\frac{1}{3}. \blacksquare$$

Формула вычисления неопределенного интеграла от степенной функции с действительным показателем остается такой же, как и для степени с целым показателем:

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1.}$$

Пример 3. Найдем интеграл $\int \sqrt[3]{x^4}\,dx$.

▲ Пользуясь $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ (определение степени с рациональным показателем), представим подынтегральную функцию в виде степени: $\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$. Тогда

$$\int x^{\frac{4}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^7}}{7} + C.$$

При делении на дробь будьте внимательны! *Деление на число $\frac{a}{b}$ равносильно умножению на число $\frac{b}{a}$.*

Проверим результат интегрирования, найдя производную:

$$\left(\frac{3\sqrt[3]{x^7}}{7} + C\right)' = \left(\frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7}\right)' + 0 = \frac{3}{7}\cdot\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4}. \blacksquare$$

1. Напишите формулу вычисления производной степенной функции.
2. Напишите формулу вычисления интеграла от степенной функции.

Упражнения

A

3.83. Найдите производную функции:

1) $y = \sqrt[5]{x}$; 2) $y = \sqrt[4]{x}$;

3) $y = \sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$; 4) $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$.

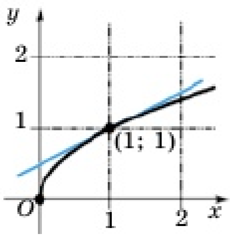
3.84. Найдите производную функции:

1) $f(x) = x^{\frac{4}{5}} - x^{\frac{2}{3}}$; 2) $f(t) = t^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{1}{3}} + 4$;

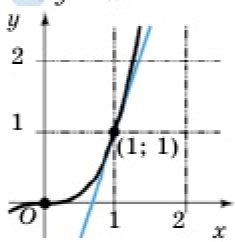
3) $f(x) = 6\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

3.85. Найдите угловые коэффициенты касательных, проведенных в точке (1;1) к графикам степенных функций, представленных на рисунках.

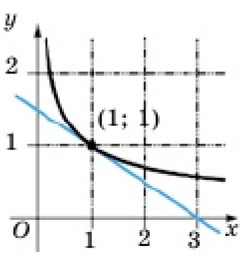
1. $y = x^{\frac{1}{2}}$



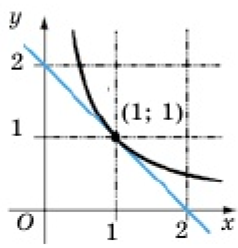
2. $y = x^3$



3. $y = x^{-\frac{1}{2}}$



4. $y = x^{-1}$



3.86. Заполните таблицу.

Функция	Преобразуйте	Найдите первообразную	Упростите
$y = \dfrac{5}{2x^2}$	$y = \dfrac{5}{2}x^{-2}$	$y' = \dfrac{5}{2}\cdot(-2)x^{-2-1}$	$y' = -5x^{-3}$

$y=\dfrac{6}{(5x)^3}$			
$y=\dfrac{\pi}{(3x)^{\frac{5}{2}}}$			
$y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{3x^{-\frac{3}{2}}}$			

3.87. Пользуясь формулой $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq -1,$ найдите интегралы от следующих функций (устное задание):

1) $1,5x^{\frac{1}{2}}$; 2) $4x^{\frac{1}{3}}$; 3) $4x^{-2,5}$; 4) $7x^{\frac{2}{5}}$.

3.88. Найдите первообразные для следующих функций:

1) $f(x)=5x\sqrt{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{6}x^{1,75}$;

3) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$; 4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2x}$.

3.89. Заполните таблицу.

Неопределенный интеграл	Преобразуйте	Найдите интеграл	Упростите
$\int\sqrt[7]{x^3}dx$	$\int x^{\frac{3}{7}}dx$	$\dfrac{x^{\frac{10}{7}}}{\frac{10}{7}}+C$	$\dfrac{7\sqrt[7]{x^{10}}}{10}+C$
$\int\sqrt{x}dx$			
$\int\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$			

3.90. Найдите интегралы от степенных функций. Результат проверьте дифференцированием.

1) $\int 2x^{-\frac{1}{3}}dx$; 2) $\int 14x^{0,4}dx$; 3) $\int -1,2x^{-0,6}dx$.

B

3.91. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$ в точке $M(1;\ 2)$. Результат проверьте с помощью графического онлайн-калькулятора https://www.desmos.com/calculator.

3.92. Найдите производную функции в указанной точке:

1) $y=x^{-\frac{2}{5}}(2x-2),\ x_0=-2$; 2) $y=x^3(x-5)^{\frac{6}{7}},\ x_0=2$.

3.93. Вычислите интегралы:

1) $\int x^7dx$; 2) $\int x^3\sqrt[4]{x}dx$;

3) $\int \dfrac{x^3+3x^2-\sqrt[3]{x}+1}{x\sqrt{x}}dx$; 4) $\int 5\sqrt{x}dx+\int \dfrac{6}{x\sqrt{x}}dx$.

3.94. По заданной производной $f'(x)$ найдите функцию $f(x)$. Результат проверьте дифференцированием.

1) $x\left(3x^{\frac{1}{2}}-\dfrac{2}{x^{\frac{4}{3}}}\right)$; 2) $6\sqrt{x}-\dfrac{1}{x^2}$; 3) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}-7x^2\sqrt{x}$; 4) $5\left(\sqrt{x}\right)^3-\dfrac{3x}{\sqrt{x}}$.

3.95. Дана функция $f(x)=\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}$. Найдите для нее первообразную, проходящую через точку $M(1;\ 1{,}5)$.

3.96. Найдите первообразные для функции $f(x)$:

1) $f(x)=1{,}5x^2-\dfrac{4}{x^2}$; 2) $f(x)=\dfrac{4}{3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4}+5x^{\frac{3}{2}}$.

3.97. Найдите интегралы, пользуясь свойствами степени с рациональным показателем:

1) $\int \sqrt[3]{x}dx$; 2) $\int \sqrt[3]{x^7}dx$; 3) $\int -12\sqrt[10]{x^6}dx$;

4) $\int -2\sqrt[4]{x^5}dx$; 5) $\int -\dfrac{3}{2\sqrt{x}}dx$; 6) $\int -\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}dx$.

3.98. Изобразите фигуру, ограниченную данными кривыми, и найдите ее площадь:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2}, \\ y=\sqrt{2x}. \end{cases}$$

3.99. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_3^4 \sqrt{x-3}dx$; 2) $\int_{-8}^{8} \frac{dx}{\sqrt{5+\frac{x}{2}}}$.

Упражнения для повторения

3.100. Определите знак выражения:

1) $\sin\frac{17\pi}{4}$; 2) cos2; 3) tg3, 3π; 4) ctg90.

3.101. Найдите сумму первых 10 членов последовательности, общий член которой задается формулой $a_n = 2^{7-n}$.

Выводы раздела «СТЕПЕНИ И КОРНИ. СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ»

Если выполняется равенство $b^n = a$, то число b называют корнем n-й степени из числа a, где n – натуральное число ($n > 1$). Неотрицательный корень n-й степени из неотрицательного числа a называют арифметическим корнем n-й степени из a: $\sqrt[n]{a}$, $a \geqslant 0$.

Свойства корня n-й степени

1°) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$; 2°) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$; 3°) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;

4°) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$; 5°) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; 6°) $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степенью с основанием a рациональным показателем r называют выражение $\sqrt[n]{a^m}$,

$$\text{т.е. } a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Свойства степени с рациональным показателем ($a > 0$, $b > 0$)

1°) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; 2°) $a^p : a^q = a^{p-q}$; 3°) $(a^p)^q = a^{pq}$;

4°) $(ab)^p = a^p \cdot b^p$; 5°) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Формула сложного радикала

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad (a > 0,\ b > 0,\ a^2 > b).$$

Функция вида $y = ax^{\alpha}$, $(x > 0)$, где a и α – данные действительные числа, называется ***степенной функцией***. Степенная функция принимает только положительные значения, т.е. для любого действительного числа α и всех $x \in (0; +\infty)$ выполняется неравенство $x^{\alpha} > 0$. Производная степенной функции $y = x^r$, $(x > 0$, r – рациональное число) вычисляется по следующей формуле:

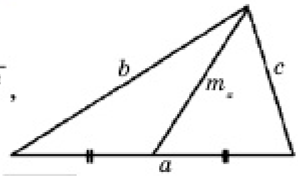
$$(x^r)' = rx^{r-1}.$$

Термины на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Степенная функция	Дәрежелік функция	Power function
Показатель степени	Дәреже көрсеткіші	Exponent
Иррациональный	Иррационал	Irrational
Рациональный	Рационал	Rational
Свойства функции	Функция қасиеттері	Function properties
Корень n-ой степени	n-ші дәрежелі түбір	n-th root
Область определения	Анықталу облысы	Domain

Раздел 4. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

$$\omega = \sqrt{\frac{P_1 + P_2 + P_3}{P_1 l_1 + P_2 l_2} \cdot g}, \quad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2},$$



$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad v = \frac{G_0 - \phi \sin(i - \tau)}{G_g \rho \pi R^2}, \quad l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Иррациональные уравнения применяются не только в математике, но и в биологии, физике, спорте, авиации. В фигурном катании с помощью иррационального уравнения можно рассчитать длину шага при вращении фигуриста. Для того чтобы рассчитать плотность среды обитания насекомого, скорость тела в теории относительности Эйнштейна, или скорость самолета, нужно решить иррациональные уравнения.

Иррациональные уравнения так же, как и иррациональные числа, встречаются во всех областях науки. Мы сталкиваемся с иррациональными уравнениями при решении геометрических задач, начиная с теоремы Пифагора. Такие уравнения возникают в задачах физики, химии, биологии и других областей знания. Поэтому вы приступаете к изучению иррациональных уравнений и неравенств – одной из интереснейших тем математики. К тому же это поможет вам в развитии математического мышления.

Содержание раздела

4.1. Иррациональные уравнения и их системы

Изучив пункт, вы:

- узнаете определение иррационального уравнения и научитесь определять область его допустимых значений;
- научитесь решать иррациональные уравнения с помощью возведения в степень;
- сможете решать иррациональные уравнения с помощью замены переменной;
- научитесь решать системы иррациональных уравнений.

Определение. *Уравнение, в котором переменная находится под знаком корня, называют* ***иррациональным уравнением.***

Примерами иррациональных уравнений могут служить уравнения

$$\sqrt[3]{x}-2=0,\ \sqrt{6-x}-\sqrt{x-7}=5,\ \sqrt{x^2-5}=2.$$

Уравнение же вида $x^2-\sqrt[5]{3+\sqrt{3}}=\sqrt{7}$ не является иррациональным, потому что переменная в нем не находится под знаком корня.

Может оказаться, что иррациональные уравнения, содержащие корень четной степени, не имеют смысла при всех значениях переменной. Поэтому при решении иррационального уравнения обычно находят его область допустимых значений (ОДЗ).

Например, ОДЗ уравнения $\sqrt{6-x}-\sqrt{x-7}=5$ определяется системой неравенств $\begin{cases}6-x\geqslant 0,\\ x-7\geqslant 0,\end{cases}$ т.е. ОДЗ есть пустое множество. Следовательно, данное уравнение не имеет решений.

Рассмотрим еще одно уравнение $\sqrt{2-x}-\sqrt{x-2}=0$. Найдем ОДЗ этого уравнения, которое определяется системой неравенств $\begin{cases}2-x\geqslant 0,\\ x-2\geqslant 0.\end{cases}$ Решив систему, получим, что ОДЗ состоит только из одного элемента: $\{2\}$. Подставляя $x=2$ в уравнение, мы видим, что это число является его корнем.

Решение иррациональных уравнений с помощью возведения в степень

Одним из стандартных методов решения иррациональных уравнений является возведение обеих частей уравнения в степень. Цель метода – освобождение от иррациональности. В зависимости от показателя корня, возводя в квадрат или куб обе части уравнения, необходимо избавиться от иррациональности. Но следует учесть, что возведение обеих частей уравнения в четную степень может привести к появлению посторонних корней. Поэтому найденные корни необходимо проверить, подставив их в исходное уравнение.

Пример 1. Решим уравнение $\sqrt{x^2-5}=2$.

▲ Возведя в квадрат обе части данного уравнения, получим уравнение $x^2-5=4$. Отсюда $x^2=9$, т.е. $x=3$ и $x=-3$. Проверим, являются ли найденные числа решениями исходного уравнения. Действительно, подставив их в уравнение, получаем тождества

$\sqrt{3^2-5}=2$ и $\sqrt{(-3)^2-5}=2$. Таким образом, $x=3$ и $x=-3$ являются корнями уравнения.

Ответ: ± 3.

Вспомним определение, которое мы изучали в 8–9 классах.

Определение. *Уравнения (неравенства) называют* ***равносильными****, если они имеют одно и то же множество корней. Такие уравнения (неравенства) называют также* ***эквивалентными****.*

Теорема. *Уравнение* $\sqrt[2k]{g(x)}=h(x)$ *равносильно системе* $\begin{cases} g(x)=(h(x))^{2k}, \\ h(x)\geqslant 0. \end{cases}$

Уравнение $\sqrt[2k+1]{f(x)}=g(x)$ *равносильно уравнению* $f(x)=(g(x))^{2k+1}$.

Чтобы доказать, что иррациональное уравнение $\sqrt[2k]{g(x)}=h(x)$ равносильно системе $\begin{cases} g(x)=(h(x))^{2k}, \\ h(x)\geqslant 0, \end{cases}$ достаточно вспомнить определение арифметического корня. А из того, что при возведении числа в нечетную степень знак числа сохраняется, следует равносильность уравнений $\sqrt[2k+1]{f(x)}=g(x)$ и $f(x)=(g(x))^{2k+1}$.

Пример 2. Решим уравнение $\sqrt{x}=x-2$.

▲ **I способ.** Возведем обе части уравнения в квадрат и запишем систему, равносильную исходному уравнению.

$$\sqrt{x}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=x^2-4x+4, \\ x-2\geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x+4=9, \\ x\geqslant 2\ (\text{ОДЗ}). \end{cases}$$

Первое уравнение полученной системы имеет два корня: $x=1$ и $x=4$. Число $x=1$ не является корнем исходного уравнения, т.к. оно не входит в ОДЗ. Число $x=4$ принадлежит ОДЗ и, следовательно, является решением уравнения.

Ответ: $x=4$.

II способ. Возведя обе части данного уравнения в квадрат, получим квадратное уравнение $x^2-5x+4=9$. Его корнями являются числа 1 и 4. Проверим, удовлетворяют ли найденные корни исходному уравнению, подставив их в это уравнение.

Проверка. Если $x = 1$, то $\sqrt{1} = 1 - 2$, т.е. $\sqrt{1} = -1$ – неверное равенство. Поэтому число 1 не может быть корнем исходного уравнения, его называют *посторонним корнем*.

Если $x = 4$, то $\sqrt{4} = 4 - 2$, т. е. $\sqrt{4} = 2$ – верное равенство. Следовательно, $x = 4$ – корень данного уравнения.

Ответ: $x = 4$. ■

В некоторые иррациональные уравнения входит несколько корней, содержащих переменную x. В этом случае возведение в степень приходится повторять несколько раз.

Пример 3. Решим уравнение $\sqrt{2x+2} - \sqrt{3x-2} = 1$.

▲ Сначала найдем ОДЗ: $\begin{cases} 2x+2 \geqslant 0, \\ 3x-2 \geqslant 0, \\ \sqrt{2x+2} - 1 \geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x \geqslant \dfrac{2}{3}, \end{cases} \Rightarrow x \geqslant \dfrac{2}{3}.$

Перепишем данное уравнение в виде $\sqrt{2x+2} = 1 + \sqrt{3x-2}$. Возведя обе части полученного уравнения в квадрат, получим:

$$\left(\sqrt{2x+2}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{3x-2}\right)^2 \Rightarrow 2x + 2 = 1 + 2\sqrt{3x-2} + 3x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3x-2} = 3 - x .$$

Согласно теореме последнее уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 3 - x \geqslant 0, \\ \left(2\sqrt{3x-2}\right)^2 = (3-x)^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 3 \text{ (ОДЗ)}, \\ 12x - 8 = 9 - 6x + x^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 3, \\ x^2 - 18x + 17 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение имеет два корня: $x = 1$ и $x = 17$. Учитывая ОДЗ, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 3, \\ x = 17 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing \text{ и } \begin{cases} \dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 3, \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

Ответ: $x = 1$. ■

Из последнего примера мы видим, что в ходе решения уравнения его ОДЗ может уточняться. Если в начале решения уравнения его ОДЗ определялось неравенством $x \geqslant \dfrac{2}{3}$, то в конце решения ОДЗ уравнения определялось двойным неравенством $\dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 3$.

Работа в группе

Что можно сказать об ОДЗ уравнения, которое содержит корень нечетной степени?

Решение иррациональных уравнений методом введения новой переменной

При решении иррациональных уравнений часто применяют метод введения новой переменной. Этот метод позволяет упростить иррациональное уравнение или привести его к рациональному уравнению. Если в составе иррационального уравнения имеются подобные выражения, то для его решения используют введение новой переменной.

Пример 4. Решим уравнение $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}+\sqrt{\dfrac{2x+3}{3x-2}}=2,5.$

▲ Заметим, что уравнение содержит взаимно обратные выражения. Введем новую переменную $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}=t$. Тогда $\sqrt{\dfrac{2x+3}{3x-2}}=\dfrac{1}{t}$. Используя новую переменную, перепишем данное уравнение в виде:

$$t+\frac{1}{t}=2,5\Rightarrow t^2-2,5t+1=0\Rightarrow t_1=2,\ t_2=\frac{1}{2}.$$

Подставив найденные значения t в равенство $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}=t$, получим иррациональные уравнения

$$\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}}=2 \text{ и } \sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}}=\frac{1}{2}.$$

Найдем решения полученных уравнений:

1) $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}=2\Rightarrow\dfrac{3x-2}{2x+3}=4\Rightarrow x=-2,8.$

2) $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}=2\Rightarrow\dfrac{3x-2}{2x+3}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow x=1,1.$

Часто вместо того, чтобы предварительно находить ОДЗ уравнения и затем проверять найденные решения на принадлежность ОДЗ, легче, решив уравнение, проверить найденные корни подстановкой в уравнение. В нашем примере удобно сделать такую проверку.

Проверим, удовлетворяют ли найденные корни данному уравнению.

Если $x = -2{,}8$, то $\sqrt{\dfrac{3\cdot(-2{,}8)-2}{2\cdot(-2{,}8)+3}} + \sqrt{\dfrac{2\cdot(-2{,}8)+3}{3\cdot(-2{,}8)-2}} = \sqrt{4} + \sqrt{\dfrac{1}{4}} = 2{,}5$,

т.е. $x = -2{,}8$ – корень уравнения.

Если $x = 1{,}1$, то $\sqrt{\dfrac{3\cdot1{,}1-2}{2\cdot1{,}1+3}} + \sqrt{\dfrac{2\cdot1{,}1+3}{3\cdot1{,}1-2}} = \sqrt{\dfrac{1{,}3}{5{,}2}} + \sqrt{\dfrac{5{,}2}{1{,}3}} = 2{,}5$, т.е. $x = 1{,}1$ – корень уравнения.

Ответ: 1,1; –2,8. ■

Рассмотрим еще одно решение иррационального уравнения с помощью введения новой переменной.

Пример 5. Решим уравнение $\sqrt[5]{(x-2)^2} - \sqrt[5]{x-2} = 2$.

▲ Пусть $\sqrt[5]{x-2} = u$, тогда $\sqrt[5]{(x-2)^2} = u^2$.

Данное уравнение введением новой переменной сводится к квадратному уравнению

$$u^2 - u - 2 = 0 \Rightarrow u_1 = -1,\ u_2 = 2.$$

Получаем иррациональные уравнения $\sqrt[5]{x-2} = -1$ и $\sqrt[5]{x-2} = 2$. Найдем их корни:

1) $\sqrt[5]{x-2} = -1 \Rightarrow \left(\sqrt[5]{x-2}\right)^5 = (-1)^5 \Rightarrow x_1 = 1;$

2) $\sqrt[5]{x-2} = 2 \Rightarrow \left(\sqrt[5]{x-2}\right)^5 = 2^5 \Rightarrow x_2 = 34.$

Сделав проверку, убеждаемся, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: 1; 34. ■

Системы иррациональных уравнений

Для решения систем, в которые входят иррациональные уравнения, применяют те же методы, что и для решения других систем (метод подстановки, метод сложения, метод введения новой переменной). Рассмотрим пример.

Пример 6. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ x + y - \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} = 2 \end{cases}$$

▲ ОДЗ данной системы уравнений определяется неравенствами $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Сначала преобразуем второе уравнение системы:

$$x + y - \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} = 2 \Rightarrow x - 2\sqrt{xy} + y - \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 - \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) - 2 = 0.$$

Введя обозначение $\sqrt{x} - \sqrt{y} = u$, получим квадратное уравнение $u^2 - u - 2 = 0$, корнями которого являются числа 2 и -1. Следовательно, $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2$ или $\sqrt{x} - \sqrt{y} = -1$. Таким образом, данная система уравнений равносильна совокупности следующих систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\sqrt{x} = 10, \\ 2\sqrt{y} = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sqrt{x} = 7, \\ 2\sqrt{y} = 9 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 25, \\ y = 9; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 12,25, \\ y = 20,25. \end{cases} \end{array}\right.$$

Найденные решения входят в ОДЗ.

Ответ: (25;9), (12,25; 20,25).

Работа в группе

Покажите, что следующая система имеет единственное решение и найдите его:

$$\begin{cases} \sqrt{-x-3} + y = 2t, \\ 5 + 2y - \sqrt{3 - 2x - x^2} = t. \end{cases}$$

1) Какова ОДЗ системы?
2) Какой вывод можно сделать из ОДЗ?
3) Чему равно решение системы?
4) Если бы ОДЗ уравнения находилась на некотором числовом промежутке, сколько решений имела бы система?

Обоснуйте ответы.

1. Дайте определение иррационального уравнения.
2. Как определяется область допустимых значений иррационального уравнения?
3. Опишите алгоритм решения иррационального уравнения с помощью возведения в степень.
4. Опишите метод введения новой переменной при решении иррационального уравнения.

Упражнения

А

4.1. Решите устно уравнение:

1) $\sqrt{x} = 2$; 2) $\sqrt{x} = 3$; 3) $\sqrt{x} = 0$; 4) $\sqrt{x} = -1$.

4.2. Определите, какое из уравнений является иррациональным:

1) $x + \sqrt{x} = 2$; 2) $x\sqrt{7} = 1 + x$;

3) $y + \sqrt{y^2 + 9} = 2$; 4) $\sqrt{x-1} = 3$.

4.3. Определите, является ли число x_0 корнем уравнения?

1) $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$, $x_0 = 4$;

2) $\sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{x-2}$, $x_0 = 2$;

3) $\sqrt{1-x} = -\sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$.

4.4. Найдите ОДЗ уравнения:

1) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$; 2) $\sqrt{x-7} + 3 = \sqrt{5-x}$;

3) $\sqrt[3]{2-3x} + \sqrt[3]{3x+5} = 1$; 4) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} = 5$.

4.5. Определите, при каких значениях переменной выполняется равенство:

1) $\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x+4} = \sqrt{x^2 - 16}$; 2) $\sqrt{x(x-1)} = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{1-x}$.

4.6. Решите уравнение с помощью возведения обеих его частей в степень:

1) $\sqrt{x^4 + 19} = 10$; 2) $\sqrt[3]{x^2 - 28} = 2$;

3) $\sqrt{61 - x^2} = 5$; 4) $\sqrt[3]{x-9} = -3$.

4.7. Найдите решение уравнения с помощью возведения в степень и проверьте результат графическим способом:

1) $\sqrt{x+1} = x - 1$; 2) $x + \sqrt{2x+3} = 6$;

3) $\sqrt{2x-1} = x - 2$; 4) $3 + \sqrt{3x+1} = x$.

▲ 1) Чтобы найти решение уравнения $\sqrt{x+1} = x - 1$ графическим методом, нужно построить графики функций $y = \sqrt{x+1}$ и $y = x - 1$ и найти абсциссу точки их пересечения. ■

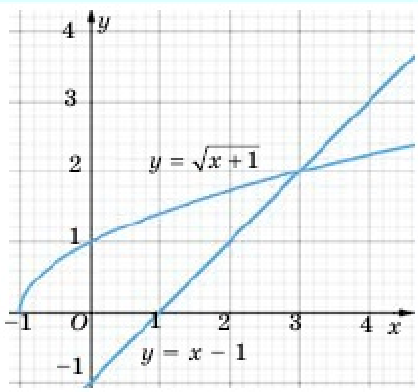


Рис. 4.1

4.8. Решите уравнение:

1) $\sqrt{2x-1}-x=-1$;
2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=2$;
3) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6$;
4) $3\sqrt{x-1}+11=2x$.

4.9. Решите уравнение:

1) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2-2x+4}$;
2) $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-3}$;
3) $\sqrt[3]{x^2-8}=x-2$;
4) $\sqrt[3]{x^2+x^3-6x+8}=x$.

4.10. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=1,\\ 3\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=10;\end{cases}$
2) $\begin{cases}4\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=2\sqrt{2},\\ 2\sqrt[4]{x}+3\sqrt[4]{y}=8\sqrt{2};\end{cases}$
3) $\begin{cases}2\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=7,\\ -3\sqrt[4]{x}+4\sqrt[4]{y}=6;\end{cases}$
4) $\begin{cases}\sqrt{x}+3\sqrt{y}=5\sqrt{5},\\ 5\sqrt{y}-2\sqrt{x}=\sqrt{5}.\end{cases}$

4.11. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+6}=6$;
2) $\dfrac{x+1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{x-1}$;
3) $\dfrac{x+6}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{3x+2}$;
4) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}=2x$.

4.12. Решите уравнение, дважды возведя в степень обе его части:

1) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3$;
2) $\sqrt{\sqrt{x^2-16}+x}=2$;
3) $\sqrt{18-\sqrt[3]{x+10}}=4$;
4) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-5}}=1$.

4.13. Решите уравнение, дважды возведя в степень обе его части:

1) $\sqrt{x-3}=1+\sqrt{x-4}$;
2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$;
3) $2+\sqrt{10-x}=\sqrt{22-x}$;
4) $\sqrt{1-2x}-3=\sqrt{16+x}$.

4.14. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5,\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=3;\end{cases}$
2) $\begin{cases}\sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10,\\ 4\sqrt{3y+4}-5\sqrt{6+x}=6.\end{cases}$

4.15. Решите уравнения методом введения новой переменной:

1) $\sqrt{x-3}-6=\sqrt[4]{x-3}$;
2) $\sqrt[3]{x+1}+2\sqrt[6]{x+1}=3$;

3) $\sqrt[4]{x-5} = 30 - \sqrt{x-5}$; 4) $3\sqrt[10]{x^2-3} + \sqrt[5]{x^2-3} = 4$.

B

4.16. Решите уравнение:

1) $\dfrac{2}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{\dfrac{x+6}{x+3}}$; 2) $\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{2x+1}$;

3) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$; 4) $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-2}$.

4.17. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{4x+7}$; 2) $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = \sqrt{3(x-1)}$;

3) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-1}$; 4) $\sqrt{4x+8} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{x+2}$.

4.18. Решите уравнение методом введения новой переменной:

1) $\sqrt{3-x} + \dfrac{6}{\sqrt{3-x}} = 5$; 2) $x^2 - x + \sqrt{x^2-x+9} = 3$;

3) $\sqrt{2-x} + \dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2$; 4) $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + 2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} = 3$;

5) $x^2 - 3x + \sqrt{x^2-3x+5} = 7$; 6) $2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2+3x+9} = 30$.

▲ 6) Для решения уравнения $2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x+9} = 30$ введем новую переменную $y = \sqrt{2x^2+3x+9}$, $y \geqslant 0$. Тогда $2x^2 + 3x = y^2 - 9$, и исходное уравнение можно записать в виде: $y^2 - 9 - 3 + y = 30$.

Решим систему $\begin{cases} y^2+y-42=0, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$ квадратное уравнение имеет два решения, поэтому $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ y = -7 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$ и $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow y = 6$.

Вернемся к прежней переменной: $\sqrt{2x^2+3x+9} = 6$, $2x^2 + 3x + 9 = 36$, $2x^2 + 3x - 27 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = -4{,}5$.

Ответ: $-4{,}5$; 3. ■

4.19. Решите уравнение с помощью разложения на множители:

1) $\sqrt{\dfrac{3x-5}{3x+5}} + \left(\dfrac{3}{4}x+2\right)\cdot\sqrt{9x^2-25} = 0$;

2) $\sqrt{\dfrac{6x-5}{6x+5}}+(3x+4)\cdot\sqrt{36x^2-25}=0$;

3) $\sqrt{(4x+5)(3x-2)}=4x+5$;

4) $\sqrt{(3x-1)(4x+3)}=3x-1$.

4.20. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8,\\ \sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=12;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+2xy}=8,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4.\end{cases}$

4.21. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{3y-2x}{y}}+\sqrt{\dfrac{4y}{3y-2x}}=2\sqrt{2},\\ 3\left(x^2+1\right)=(y+1)(y-x+1);\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{1-5x}=5-\sqrt{5x-3y},\\ \sqrt{2-3y}-1=\sqrt{5x-3y}.\end{cases}$

C

4.22. Не решая уравнение $\sqrt{x-5}+\sqrt{x^2+4}=0$, объясните, почему оно не имеет решений.

4.23*. Решите уравнение с помощью выделения полного квадрата:

1) $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-2x+1}$;

2) $\sqrt{x^2+4-4x}+\sqrt{x^2+9-6x}=1$.

4.24. Решите уравнение $\sqrt{x-4a+16}-2\sqrt{x-2a+4}+\sqrt{x}=0$ в зависимости от значений параметра a.

▲ Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{x-4a+16}+\sqrt{x}=2\sqrt{x-2a+4}.$$

Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим:

$$2x-4a+16+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4a+16}=4x-8a+16, \text{ или}$$

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4a+16}=x-2a.$$

Снова возведем в квадрат обе части последнего уравнения: $16x=4a^2$, $x=\dfrac{a^2}{4}$.

Определим, при каких значениях параметра a это уравнение имеет решение. Для этого подставим вместо x выражение $\frac{a^2}{4}$:

$$\sqrt{a^2-16a+64}-2\sqrt{a^2-8a+16}+\sqrt{a^2}=0,$$

$$\sqrt{(a-8)^2}-2\sqrt{(a-4)^2}+\sqrt{a^2}=0,$$

$$|a-8|-2|a-4|+|a|=0.$$

Чтобы решить уравнение, содержащее модули, рассмотрим 4 промежутка, в которых выражения под знаком модуля имеют соответствующие знаки:

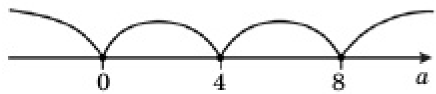


Рис. 4.2

Если $a \leqslant 0$, то $8-a-2(4-a)-a=0$, $0=0$. Следовательно, при $a \leqslant 0$ данное уравнение имеет решение.
Если $0 < a < 4$, то $8 - a - 2(4 - a) + a = 0$, $a = 0$. Но т.к. $0 < a < 4$, то уравнение не имеет решений.
Если $4 \leqslant a < 8$, то $8 - a - 2(a - 4) + a \neq 0$, т.е. уравнение не имеет решений.
Если $8 \leqslant a < \infty$, то $a - 8 - 2a + 8 + a = 0$, $0 = 0$.

Ответ: при $a \in (-\infty; 0] \cup [8; \infty)$ решением уравнения является $x=\frac{a^2}{4}$, при $0 < a < 8$ уравнение не имеет решений. ■

4.25*. Решите уравнение:

1) $\sqrt{\cos^2 0,5x-6\cos 0,5x+9}-\sqrt{4\cos^2 0,5x-12\cos 0,5x+9}=1$;

2) $\sqrt{(\sin 3x-4)^2}+\sqrt{9-6\sin 3x+\sin^2 3x}=6$.

▲ $\sqrt{(\cos 0,5x-3)^2}-\sqrt{(2\cos 0,5x-3)^2}=1 \Rightarrow |\cos 0,5x-3|-$
$-|2\cos 0,5x-3|=1.$

Чтобы раскрыть модуль, оценим выражение под модулем. Из $-1 \leqslant \cos 0,5x \leqslant 1$ получим $-4 \leqslant \cos 0,5x - 3 \leqslant -2$, следовательно, $|\cos 0,5x-3|=3-\cos 0,5x$. Аналогично, $|2\cos 0,5x-$ $-3|=3-2\cos 0,5x$.

Таким образом, данное уравнение запишем в виде $3 - \cos 0{,}5x - 3 + 2\cos 0{,}5 = 1 \Rightarrow \cos 0{,}5x = 1 \Rightarrow x = 4\pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $4\pi n,\ n \in Z$. ■

4.26*. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x - a = 2\sqrt{y}, \\ y^2 - x^2 + 2x + 8y + 15 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

4.2. Иррациональные неравенства

Изучив пункт, вы научитесь решать иррациональные неравенства следующих видов:

- $\sqrt[2k+1]{f(x)} > a$, $\sqrt[2k+1]{f(x)} < a$;
- $\sqrt[2k]{f(x)} > a$, $\sqrt[2k]{f(x)} < a$.

Теорема. *При возведении обеих частей иррационального неравенства в нечетную степень получается неравенство, равносильное данному неравенству.*

Пример 1. Решим неравенство $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}} > -1$.

▲ Учитывая, что показатель корня нечетный, получим ОДЗ: $x \neq 0$. Если мы возведем в куб обе части неравенства, то его знак не изменится. Получим неравенство $\dfrac{x+1}{x} > -1$, которое решим методом интервалов.

$$\frac{x+1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{x+1+x}{x} > 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{x} > 0$$

Найдем значения x, при которых числитель или знаменатель дроби в левой части неравенства равен нулю: $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = 0$. Эти точки разбивают

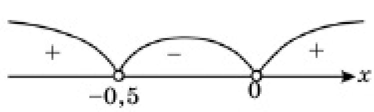


Рис. 4.3

числовую ось на три интервала. Определим знаки левой части последнего неравенства на каждом из интервалов (см. рис. 4.3).

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty)$. ■

Теорема. *Если обе части иррационального неравенства возвести в четную степень, то получится неравенство, равносильное исходному, только в том случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны.*

Пусть показатель корня, входящего в неравенство, является четным. Чтобы решить иррациональное неравенство вида

$$\sqrt[2k]{f(x)} \geqslant a,$$

необходимо рассмотреть все возможные значения числа a, т.е. его неотрицательные и отрицательные значения (рис. 4.4). Если $a \geqslant 0$, то согласно теореме, возведя обе части уравнения в соответствующую четную степень, мы получим равносильное неравенство $f(x) \geqslant a^{2k}$. Если же $a < 0$, то, учитывая, что подкоренное выражение должно быть неотрицательным, в качестве решения неравенства принимаем его область допустимых значений: $f(x) \geqslant 0$.

$$\sqrt[2k]{f(x)} \geqslant a$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant a^{2k} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} a < 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{array}}$$

Рис. 4.4

Пример 2. Решим неравенство $\sqrt[4]{5x-4} \geqslant 2$.

▲ Обе части данного неравенства неотрицательны, поэтому согласно теореме мы можем возвести их в четвертую степень. Получим равносильное неравенство $5x - 4 \geqslant 16$. Решив его, получим: $x \geqslant 4$.

Ответ: $[4; +\infty)$. ■

Теперь рассмотрим иррациональное неравенство вида

$$\sqrt[2k]{f(x)} < a.$$

Схема решения этого неравенства в зависимости от возможных значений числа a показана на рисунке 4.5. Если $a \leqslant 0$, то неравенство не имеет решений, т.к. арифметический корень не может быть меньше отрицательного числа. Если же $a > 0$, то, возведя обе части неравенства в соответствующую четную степень и учитывая ОДЗ, получим равносильную систему неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < a^{2k}. \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} < a$$

$a \leqslant 0$, нет решений

$a > 0$, $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < a^{2k} \end{cases}$

Рис. 4.5

Пример 3. Решим неравенство $\sqrt{3x+2} < 4$.

▲Обе части неравенства неотрицательны, поэтому согласно теореме мы можем возвести их в квадрат. Учитывая ОДЗ, получим равносильную систему неравенств: $\begin{cases} 3x+2 \geqslant 0, \\ 3x+2 < 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{2}{3}, \\ x < \dfrac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{2}{3} \leqslant x < 4\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $\left[-\dfrac{2}{3}; 4\dfrac{2}{3}\right)$. ■

1. Сформулируйте теоремы об иррациональных неравенствах.
2. Начертите схему решения иррационального неравенства, содержащего корень с четным показателем. Поясните схему.

Упражнения

А

4.27. Решите устно неравенство:

1) $\sqrt{x} > 2$; 2) $\sqrt{x} < 3$; 3) $\sqrt{x} \geqslant 0$; 4) $\sqrt{x} < -1$.

4.28. Решите иррациональное неравенство:

1) $\sqrt{1-x} \leqslant 2$; 2) $\sqrt{x-3} < 5$; 3) $\sqrt{2x+3} \geqslant 3$; 4) $\sqrt{x+5} < 4$.

4.29. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{14+5x-x^2}} + \sqrt{x^2-x-20}$;

2) $y = \sqrt{4x-x^2} \cdot \sqrt{x^2-1}$.

4.30. Решите иррациональное неравенство, предварительно выяснив, имеет ли оно решения:

1) $\sqrt[4]{3-5x} > -2$; 2) $\sqrt[4]{3-5x} < -2$;

3) $\sqrt{x^2+x-6} > -2$; 4) $\sqrt{x-2} > 4$.

4.31. Решите неравенство:

1) $\sqrt[3]{9-2x} \leqslant 2$; 2) $\sqrt[3]{1-2x^2} > -3$; 3) $\sqrt[5]{\dfrac{2x-2}{3x+6}} < 1$.

4.32. Решите иррациональное неравенство:

1) $\sqrt{(x+3)(4x+5)} < 6$; 2) $\sqrt{(x-2)(2x+3)} > 3$;

3) $\sqrt{x^2-x} < \sqrt{2}$; 4) $\sqrt[4]{6x-x^2} \geqslant -5$.

B

4.33. Решите неравенство методом интервалов:

1) $\sqrt[6]{\dfrac{x-2}{3x+6}} > 1$; 2) $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}} > -1$;

3) $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} > 1$; 4) $\sqrt{x^3-x^2} \geqslant \sqrt{2-x-x^2}$.

4.34. Решите неравенство:

1) $\sqrt[5]{x^2-4x} > \sqrt[5]{3-2x}$; 2) $\sqrt[3]{x^2+1} > x+1$;

3) $\sqrt[3]{x^2+3x+3} < \sqrt[3]{2x+4}$.

4.35. Решите неравенство, обе части которого являются иррациональными выражениями. При решении пользуйтесь схемой, приведенной на рисунке 4.6.

1) $2\sqrt{2x+1} > 3\sqrt{-x^2-x+6}$; 2) $\sqrt{3x-10} > \sqrt{6-x}$;

3) $\sqrt{x-1} > \sqrt{2x^2-3x-5}$; 4) $\sqrt{x-1} < \sqrt{x^2+1}$.

$$\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{\varphi(x)}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} f(x) > \varphi(x), \\ \varphi(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Рис. 4.6

4.36. Учитывая знаки обеих частей неравенства, с помощью схемы, приведенной на рис. 4.7, найдите решения иррационального неравенства:

1) $\sqrt{7-2x} > x-2$; 2) $\sqrt{5-2x} > 6x-1$;

3) $\sqrt{x^2} > x+1$; 4) $\sqrt{(x+4)(x+3)} > 6-x$.

$$\sqrt[2k]{f(x)} > \varphi(x)$$

$$\begin{cases}\varphi(x)\geqslant 0,\\ f(x) > \varphi^{2k}(x)\end{cases} \qquad \begin{cases}\varphi(x) < 0,\\ f(x)\geqslant 0\end{cases}$$

Рис. 4.7

$$\sqrt{7-2x} > x-2$$

1) $x-2\geqslant 0$

$$\begin{cases}7-2x > (x-2)^2,\\ x-2\geqslant 0\end{cases}$$

$2\leqslant x<3$

2) $x-2<0$

$$\begin{cases}x-2<0,\\ 7-2x\geqslant 0\end{cases}$$

$(-\infty;\ 2)$

$(-\infty;\ 3)$

4.37. Решите иррациональное неравенство, используя схему, приведенную на рисунке 4.8.

1) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$; 2) $\sqrt{x+61} < x+5$;

3) $\sqrt{x^2-3x+2} < 5-x$.

$$\sqrt[2k]{f(x)} < \varphi(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}\varphi(x) > 0,\\ f(x)\geqslant 0,\\ f(x) < \varphi^{2k}(x)\end{cases}$$

Рис. 4.8

$$\sqrt{x^2-3x+2}<5-x$$

$$\begin{cases}5-x>0\\ x^2-3x+2\geqslant 0,\\ x^2-3x+2<(5-x)^2\end{cases} \qquad\qquad 5-x\leqslant 0,$$

$$(-\infty;\,1]\cup\left[2;\,\frac{23}{7}\right) \qquad\qquad \varnothing$$

4.38. Решите иррациональное неравенство:

1) $\sqrt{2x-3}>x$; 2) $\sqrt{x+18}>2+x$;

3) $\sqrt{4x+5}<x$; 4) $\sqrt[3]{2x-1}<x-1$;

5) $\sqrt{2x-x^2}<5-x$; 6) $\sqrt{x^2+3x+x}<2x+1$.

C

4.39. Решите иррациональное неравенство с параметром:

1) $\sqrt[4]{x+a}\geqslant 2$; 2) $\sqrt{5x^2+a^2}\geqslant -3x$;

3) $\sqrt{x-a}\geqslant 2x+1$; 4) $\sqrt[3]{a+x^3}-x<\sqrt[3]{a}$.

4.40*. Решите иррациональное неравенство, содержащее модуль:

1) $\sqrt{3-|x|}\geqslant x$; 2) $\sqrt{4x+5}>|x-1|$;

3) $\sqrt[3]{x^2-4|x|}>\sqrt[3]{|3-2x|}$.

Упражнения для повторения

4.41. Найдите производную функции $y=(x^2-2x+3)\cdot\sin 2x$.

4.42. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Выводы раздела «ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА»

Уравнение, в котором переменная находится под знаком корня, называют ***иррациональным уравнением***.

Уравнение $\sqrt[2k]{g(x)} = h(x)$ равносильно системе $\begin{cases} g(x) = (h(x))^{2k}, \\ h(x) \geqslant 0. \end{cases}$

Уравнение $\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x)$ равносильно уравнению $f(x) = (g(x))^{2k+1}$.

Иррациональные уравнения часто решают с помощью возведения в степень и методом введения новой переменной.

Вместо того, чтобы предварительно находить ОДЗ уравнения и затем проверять найденные решения на принадлежность ОДЗ, легче, решив уравнение, проверить найденные корни подстановкой в уравнение.

При возведении обеих частей иррационального неравенства в нечетную степень получается неравенство, равносильное данному неравенству. Если обе части иррационального неравенства возвести в четную степень, то получится неравенство, равносильное исходному, только в том случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны.

Схемы решения иррациональных неравенств:

$\sqrt[2k]{f(x)} \geqslant a$

- $a \geqslant 0,\ f(x) \geqslant a^{2k}$
- $a < 0,\ f(x) \geqslant 0$

$\sqrt[2k]{f(x)} < a$

- $a \leqslant 0$, нет решений
- $a > 0$, $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < a^{2k} \end{cases}$

$$\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x), \\ \varphi(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

$\sqrt[2k]{f(x)} > \varphi(x)$

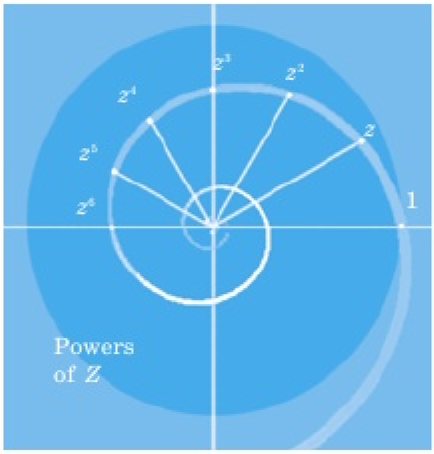
- $\begin{cases} \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) > \varphi^{2k}(x) \end{cases}$
- $\begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$

Термины на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Иррациональное уравнение	Иррационал теңдеу	Irrational equation
Иррациональное неравенство	Иррационал теңсіздік	Irrational inequality
Система уравнений	Теңдеулер жүйесі	System of equations
Область допустимых значений (ОДЗ) уравнения (неравенства)	Теңдеудің (теңсіздіктің) мүмкін мәндер жиыны (ММЖ)	Domain of equation
Корень уравнения	Теңдеудің түбірі	A root of an equation
Решение неравенства	Теңсіздіктің шешімі	A solution of an inequality

Раздел 5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

$$i = \sqrt{-1}$$



Комплексные числа занимают важное место в прикладной математике, в том числе в расчете цепей переменного тока. Возникшая на основе комплексных чисел теория функций комплексного переменного широко применяется в картографии, электротехнике и электронике, гидромеханике, аэромеханике, теории чисел и многих других отраслях естествознания и техники. В этом разделе мы научимся выполнять различные действия с комплексными числами.

Содержание раздела

5.1. Мнимая единица. Определение комплексного числа

Изучив пункт, вы:

- узнаете определение комплексного числа и его модуля;
- научитесь изображать комплексные числа на комплексной плоскости;
- познакомитесь с определением сопряженного комплексного числа и его свойствами.

5.1.1. Понятие комплексного числа

До сих пор мы рассматривали лишь действительные числа. Во множестве действительных чисел линейные уравнения и квадратные уравнения с неотрицательным дискриминантом всегда имеют решения. Если же дискриминант квадратного уравнения отрицательный, то такое уравнение не имеет решений во множестве действительных чисел. К примеру, мы хорошо знаем, что для таких уравнений, как $x^2 + 1 = 0$ и $x^2 - 4x + 5 = 0$, нет действительных решений. Поэтому возникает необходимость расширить множество действительных чисел таким образом, чтобы подобные уравнения имели решения. Такие методы нам хорошо известны. Например, так как не всегда возможно решить уравнение $x + a = b$, $(a, b \in N)$ на множестве натуральных чисел, введением нуля и отрицательных целых чисел мы расширили множество натуральных чисел до множества целых чисел. Из-за невозможности решить уравнение $ax = b$ на множестве целых чисел, мы определили множество рациональных чисел, введя понятие дробных чисел. И наконец, рассматривая уравнение $x^2 - 2 = 0$, мы показали, что оно не имеет рациональных решений. Введя понятие иррационального числа, мы расширили множество рациональных чисел до множества действительных чисел.

Аналогично, появляется необходимость расширить множество действительных чисел до такого множества, в котором любое квадратное уравнение имеет корни. Такое множество называется множеством комплексных чисел и обозначается буквой C (первой буквой слова *complex*).

Итак, мы ввели такие множества: N – множество натуральных чисел, Z – множество целых чисел, Q – множество рациональных чисел, R – множество действительных чисел. Для них выполняются следующие соотношения (рис. 5.1):

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C.$$

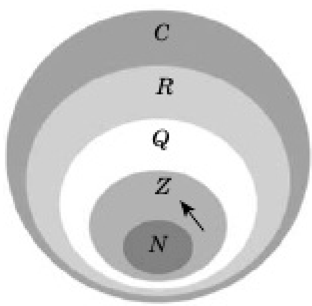


Рис. 5.1

Начнем знакомство со множеством комплексных чисел с рассмотрения уравнения $x^2 + 1 = 0$. Это уравнение не имеет корней на множестве действительных чисел, так как нет такого действительного числа, квадрат которого равен -1. Следовательно, для того чтобы решить данное уравнение, нужно ввести понятие числа, квадрат которого равен -1. Это новое число обозначается буквой i. Тогда будем считать, что выполняется равенство $i^2 = -1$. Число i называется ***мнимой единицей***.

Таким образом, корнями уравнения $\boldsymbol{x^2 + 1 = 0}$ являются числа $\boldsymbol{x_1 = i}$, $\boldsymbol{x_2 = -i}$. С помощью мнимой единицы можно извлечь арифметический квадратный корень из отрицательного числа. Например,

$$\sqrt{-4} = 2i,\ \sqrt{-9} = 3i,\ \sqrt{-64} = 8i.$$

Теперь можно определить понятие комплексного числа.

Определение. *Если a и b – действительные числа, то выражение $z = a + bi$ называется* ***комплексным числом****, заданным в алгебраической форме.*

Здесь i – мнимая единица, $i^2 = -1$. Число a называется действительной частью комплексного числа, b – его мнимой частью: $\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{b}$.

Определение. *Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные и мнимые части.*

Если $a = 0$, то число z называют *чисто мнимым числом*, если $b = 0$, то число z – действительное число.

Для комплексного числа $z = 0 = 0 + 0i$ и действительная, и мнимая части равны нулю.

Если $z = 2 + 5i$, то его действительная часть $\mathrm{Re}(z) = 2$ и мнимая часть $\mathrm{Im}(z) = 5$.

Для комплексного числа $z = 3 - 4i$ действительная и мнимая части равны соответственно $\mathrm{Re}(z) = 3$ и $\mathrm{Im}(z) = -4$.

Для комплексного числа $z = 6i$ действительная часть $\mathrm{Re}(z) = 0$, а мнимая часть $\mathrm{Im}(z) = 6$.

В переводе с английского языка *real* означает «действительный», *imaginary* – «мнимый».

Поскольку множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел, каждое действительное число можно считать комплексным числом, так как для $\forall a \in R$ имеет место равенство $a = a + 0i$.

Пример 1. Считая комплексные числа $z = x + 3i$ и $w = -2 + yi$ равными, найдите значения x и y.

▲ Согласно определению, из равенства $z = w$ следует $x = -2$, $y = 3$. ■

Определение. *Комплексное число $\bar{z} = a - bi$ называют числом,* ***сопряженным*** *комплексному числу $z = a + bi$. Числа z и $\bar{z}$ называют* ***взаимно сопряженными****.*

Пример 2. Вычислите i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^{-1}, i^{-2}.

▲ $i^2 = i \cdot i = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -(-1) = 1,$

$i^5 = i^4 \cdot i = i,$ $\quad i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1,$ $\quad i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = -i$,

$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1$. ■

Материалы из истории

История возникновения комплексных чисел

Впервые идея комплексного числа возникла в XVI веке у итальянских математиков Дж. Кардано и Р. Бомбелли в связи с решением квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом, и в особенности с решением кубических уравнений. Р. Бомбелли в своей книге «Алгебра», вышедшей в 1572 году, установил правила арифметических операций над комплексными числами. Долгое время считалось, что для комплексных чисел не может быть никакого реального истолкования, поэтому их называли «фиктивными», «воображаемыми», а уравнения с такими корнями относили к уравнениям, для которых «нет корней». Всестороннее применение комплексных чисел началось лишь в XVIII веке. Использование комплексных чисел в геометрических и механических приложениях интегрального исчисления зародило условие для создания теории функций комплексного аргумента. В 1797 году датский землемер К. Вессель (1745–1818) впервые предложил геометрическую интерпретацию комплексных чисел в виде точек плоскости или векторов. Немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) ввел термин «комплексное число» и первым доказал основную теорему алгебры.

5.1.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Комплексные числа можно изображать точками на плоскости Oxy (рис. 5.2). Если $z = a$ – действительное число, то ему соответствует точка $A(a;\ 0)$ на оси Ox; если $z = bi$ – чисто мнимое число, то ему соответствует точка $B(0;\ b)$ на оси Oy. Таким образом, действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые числа – точками оси ординат. Поэтому ось Ox называют **действительной осью**, а ось Oy – **мнимой осью**. Каждой точке $C(a;\ b)$ плоскости мы ставим в соответствие комплексное число $z = a + bi$, и наоборот. Таким образом установлено

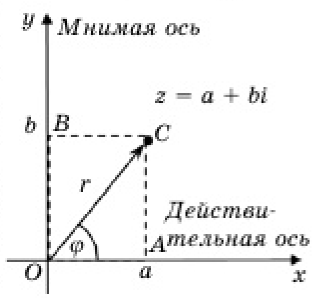


Рис. 5.2

взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости.

Иногда для изображения комплексного числа вместо точки $C(a; b)$ используют радиус-вектор $\overline{OC}$. Представление комплексных чисел радиус-векторами удобно тем, что при этом операции над комплексными числами получают простое геометрическое толкование. Длина радиус-вектора называется *модулем комплексного числа*. Так как ΔOAC – прямоугольный треугольник, то согласно теореме Пифагора имеем:

$$OA = a,\ OB = b,\ r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$|z| = r$ – модуль комплексного числа ($r \geqslant 0$).

> **Определение.** *Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называют угол между радиус-вектором $\overline{OC}$, соответствующим данному числу, и положительным направлением оси Ox. Аргумент комплексного числа z считают положительным, если угол отсчитывается против часовой стрелки, и отрицательным – в противном случае. Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ обозначается $\varphi = Arg\,z$ или $\varphi = Arg(a + bi)$.*

Для числа $z = 0$ аргумент не определен. Поэтому, говоря об аргументе комплексного числа, будем считать $z \neq 0$.

Для заданного комплексного числа $z \neq 0$ аргумент определяется с точностью до числа кратного 2π, т.е. если φ – аргумент данного числа, то все углы $\varphi \pm 2\pi k$ ($k \in Z$) также будут аргументами числа z. Таким образом, каждое комплексное число имеет бесконечное множество значений аргумента, отличающихся друг от друга лишь на слагаемые, кратные 2π. Поэтому с целью однозначного определения аргумента комплексного числа договорились выбирать только одно из множества его значений. Его обозначают $\varphi = arg\,z$ и называют ***главным значением аргумента***, полагая, что для него выполняется соотношение $-\pi \leqslant arg\,z \leqslant \pi$.

Из определения тригонометрических функций следует, что для $\varphi = Arg(a + bi)$ имеют место следующие равенства

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пример 3. Найти модули комплексных чисел $z_1 = 4 - 3i$ и $z_2 = -2 - 2i$.

▲ $r_1 = |z_1| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$ ■

Работа в группе

Изобразите на комплексной плоскости комплексное число $z = a + bi$ и сопряженное ему число $\overline{z} = a - bi$. Сформулируйте утверждение относительно их модулей и аргументов и приведите соответствующий пример.

Изобразите на комплексной плоскости комплексное число z и противоположное ему число $(-z)$. Сформулируйте утверждение об их взаимном расположении и приведите соответствующий пример.

Комплексную плоскость иногда называют также диаграммой Аргана.

Дополнительные электронные ресурсы

Перейдя по указанной ссылке, вы можете оценить красоту изображения чисел на комплексной плоскости.

https://www.geogebra.org/m/xzEhH5K5

Пример 4. Выясним геометрический смысл множества комплексных чисел z, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$1)\ |z - 3 + 2i| = 4;\ 2)\ |z - 3 + 2i| \leqslant 4.$$

▲ 1) Множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих уравнению $|z - 3 + 2i| = 4$, определяет на комплексной плоскости окружность с центром в точке $(3; -2)$ и радиусом, равным 4. В самом деле

$$|z - 3 + 2i| = |(x - 3) + i(y + 2)| =$$
$$= \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = 4 \Rightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16.$$

Получаем уравнение окружности.

2) Аналогично из соотношений $|z - 3 + 2i| \leqslant 4 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 16$ заключаем, что данное неравенство определяет круг радиуса 4 с центром в точке $(3; -2)$. ■

1. Какое число называют мнимой единицей? Чему равен квадрат этого числа?
2. Дайте определение комплексного числа и объясните, почему его части обозначаются Re(z) и Im(z)?
3. В каком случае комплексное число является действительным?
4. Какое условие должно выполняться для равенства двух комплексных чисел?
5. Как изображают комплексное число на комплексной плоскости?

6. В чем геометрический смысл модуля и аргумента комплексного числа?
7. Какое число называют сопряженным данному комплексному числу?

Упражнения

А

5.1. Запишите число с помощью мнимой единицы (устное задание):

1) $\sqrt{-9}$; 2) $\sqrt{-\frac{1}{4}}$; 3) $\sqrt{-64}$; 4) $\sqrt{-5}$; 5) $\sqrt{-8}$.

5.2. Назовите действительную и мнимую части комплексных чисел $z = 3 + 4i$ и $w = 1 - 2i$, определите сопряженные им комплексные числа (устное задание).

5.3. Даны числа $z = 2 + 3i$ и $w = 6 - 4i$. Найдите число:

1) $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(w)$, $\bar{z}$, 2) $-\bar{z}$, $\mathrm{Re}(\bar{z})$, $\mathrm{Im}(z)$;

3) $\mathrm{Re}(\bar{w}) - \bar{w}$, $\bar{w}$.

5.4. Извлеките корни из числа и изобразите их на комплексной плоскости:

1) $\sqrt{-81}$; 2) $\sqrt{-\frac{1}{16}}$; 3) $\sqrt{64}$; 4) $\sqrt[3]{-27}$; 5) $\sqrt[3]{125i}$.

5.5. Для чисел $z = 3 + 4i$ и $w = 5 - 12i$ найдите:

1) $|z|$; 2) $|w|$; 3) $|\bar{z}|$; 4) $|\bar{w}|$.

Сравнив найденные значения, сформулируйте утверждение о модулях взаимно сопряженных комплексных чисел.

5.6. Изобразите комплексное число на комплексной плоскости и найдите его модули:

1) $z = 3 + 2i$; 2) $z = 4i$; 3) $z = -5 + i$; 4) $z = -6 - 5i$.

В

5.7. Считая комплексные числа z и w равными, найдите значения действительных чисел x и y:

1) $z = x^2 + xyi - 5 + i$ и $w = xi - y^2 + yi$;

2) $z = x^2(1 + i) - 3x$ и $w = y^2(i - 1) - i$.

5.8. Считая комплексные числа z и w взаимно сопряженными, найдите значения действительных чисел x и y:

1) $z = 2x^2 - 3i - 1 + yi$, $w = y + x^2i - 3 - 2i$;
2) $z = (x + i)^2 + y^2$, $w = 12 + yi + i$.

5.9. Дано комплексное число $z = 2 - 4i$. Изобразите на комплексной плоскости число:

1) z; 2) $-z$; 3) $\overline{z}$; 4) $-\overline{z}$;
5) iz; 6) $-iz$; 7) $i\,\overline{z}$; 8) $\overline{(iz)}$.

5.10. Найдите модули и аргументы комплексных чисел $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ и $z_2 = -2 - 2i$.

5.11. Докажите, что для комплексного числа z выполняются следующие равенства:

1) $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; 2) $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

5.12. Изобразите число на комплексной плоскости:
-1; i; $-\sqrt{2}$; $-3i$; $2 - 3i$; $-4 - 2i$; $3 + i$; $-6 + 2i$; $2 + 2i$; $-2 + 2i$; $-2 - 2i$.

5.13. Найдите модули и аргументы данного комплексного числа и изобразите его на комплексной плоскости:

1) $z = 1 + i$; 2) $z = \sqrt{3} - i$; 3) $z = \sqrt{2}i$; 4) $z = 2$; 5) $z = -i$.

C

5.14. Изобразите на комплексной плоскости множества всех чисел $z = x + yi$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $x = 2$; 2) $1 \leqslant x \leqslant 3$; 3) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$; 4) $\operatorname{Im} z = 2\operatorname{Re} z$.

5.15. Изобразите множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $|z| = 5$; 2) $|z| \leqslant 6$; 3) $|z - (2 + i)| \leqslant 3$; 4) $6 \leqslant |z - i| \leqslant 7$.

5.16. Изобразите множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $|z| = 1$; 2) $|z| \leqslant 5$; 3) $1 \leqslant |z| \leqslant 2$;
4) $\arg z = 0$; 5) $\dfrac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; 6) $|z - 1| = \dfrac{1}{3}$;
7) $|z - 3 + 2i| \leqslant 2$.

Упражнения для повторения

5.17. Упростите: $\dfrac{\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[4]{9}}{\sqrt[6]{24}}$

5.18. Постройте и опишите график уравнения $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$.

5.2. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Изучив пункт, вы:

- узнаете, как производить арифметические операции над комплексными числами, заданными в алгебраической форме;
- сможете использовать при решении задач закономерности возведения мнимой единицы в целую степень;
- научитесь извлекать квадратный корень из комплексного числа.

5.2.1. Арифметические действия с комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Арифметические действия, применимые к действительным числам, производятся и над комплексными числами.

Пусть $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ – комплексные числа.

Операция сложения

1°. $z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$

Операция вычитания

2°. $z_1 - z_2 = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$

Операция умножения (для применения этого действия достаточно при раскрытии скобок учесть, что $i^2 = -1$)

3°. $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + a \cdot di + bi \cdot c + b \cdot d \cdot i^2 = ac + adi + bci - bd = ac - bd + (ad + bc)i$

Операция деления (выполняется с помощью умножения на сопряженное знаменателю комплексное число и с учетом $i^2 = -1$)

4°. $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Пример 1. Произведем арифметические действия над комплексными числами.

▲ 1) Найдем сумму чисел $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = -4 + 3i$.

$$z_1 + z_2 = (2 + (-1) \cdot i) + (-4 + 3i) = (2 + (-4)) + ((-1) + 3)i = -2 + 2i.$$

2) Найдем произведение чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4 + 5i$.

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (-4 + 5i) = 2 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-3i) + 2 \cdot 5i - 3i \cdot 5i = 7 + 22i.$$

3) Найдем частное чисел $z_1 = 3 - 2i$ и $z_2 = 3 - i$.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(3-2i)}{(3-i)} = \frac{(3-2i)\cdot(3+i)}{(3-i)\cdot(3+i)} = \frac{11-3i}{9+1} = \frac{11}{10} - \frac{3}{10}i.$$ ■

Пример 2. Представьте число $\dfrac{9-4i}{2+3i}$ в виде $x + yi$.

▲ Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на число $2 - 3i$, сопряженное числу $2 + 3i$:

$$\frac{9-4i}{2+3i}=\frac{(9-4i)\cdot(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{18-27i-8i+12i^2}{4-(3i)^2}=\frac{18-27i-8i-12}{4+9}=$$

$$=\frac{6-35i}{13}=\frac{6}{13}-2\frac{9}{13}i. ■$$

Работа в группе

Докажите следующее равенство для $x, y \neq 0$:

$$\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

5.2.2. Применение закономерности возведения мнимой единицы в целую степень к решению задач

Учитывая, что $i^2 = -1$, выявим закономерность возведения в целую положительную степень:

$$i^3 = i \cdot i^2 = -i,\ i^4 = (i^2)^2 = 1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1.$$

Следовательно, для любого натурального числа k

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i\ (k \in N).$$

Пример 3. Вычислите $i^{17} + i^{18} + i^{19}$.

▲ $i^{17} + i^{18} + i^{19} = (i^4)^4 \cdot i + (i^4)^4 \cdot i^2 + (i^4)^4 \cdot i^3 = i - 1 - i = -1.$ ■

5.2.3. Извлечение квадратного корня из комплексного числа

Пример 4. Вычислим корень $\sqrt{3-4i}$.

▲ Обозначим $\sqrt{3-4i} = x + yi$, тогда выполняется равенство $(x + yi)^2 = 3 - 4i$. Раскрыв скобки, получим: $x^2 + 2xyi - y^2 = 3 - 4i$. Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы действительные и мнимые части чисел справа и слева были равны:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = -4. \end{cases}$$

Данная система уравнений имеет следующие решения:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

11–5191

Итак, $\sqrt{3-4i}=2-i$ и $\sqrt{3-4i}=-2+i$, или $\sqrt{3-4i}=\pm(2-i)$. ■

Практическая работа

Изобразите на комплексной плоскости число $z = 1 + i$ и его степени 2,3,4,..., 10. Соедините точки линией. Опишите полученную фигуру. Затем на этой же плоскости изобразите число $z = 1 - i$ и его степени 2,3,4,..., 10. Соедините точки комплексной плоскости линией. Опишите полученную фигуру.

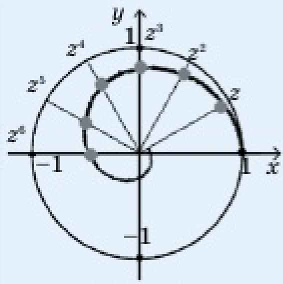


Рис. 5.3

1. Какие арифметические действия можно производить над комплексными числами?
2. Как произвести операцию деления комплексных чисел.
3. Сформулируйте закономерность для вычисления i^n. Докажите.

Упражнения

А

5.19. Выполните следующее действие:

1) $(8 + 6i) + (6 + 4i)$; 2) $(5 - i) - (6 - 2i)$;
3) $3(4 + 6i) + 9(1 - 2i)$; 4) $3i(7 - 4i)$.

5.20. Упростите выражение:

1) $(9 + 2i)(1 + 3i)$; 2) $(4 - i)(3 + 2i)$;
3) $(7 + 3i)^2$; 4) $(3 + 2i)^3$;
5) $(1 + 2i)(3 - 4i)(5 + 6i)$.

5.21. Даны комплексные числа $z = 2 + 3i$ и $w = 6 - 4i$. Найдите следующее число:

1) $\overline{z}+\overline{w}$; 2) $\overline{z}-\overline{w}$; 3) $\mathrm{Im}(z+\overline{z})$;
4) $\mathrm{Re}(w-\overline{w})$; 5) $z\overline{z}-w\overline{w}$; 6) $z\overline{w}-\overline{z}w$.

5.22. Найдите значения p и q, для которых выполняется равенство

$$p+qi=\frac{1}{3+4i}.$$

5.23. Найдите действительную и мнимую части данного комплексного числа, умножив числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю:

1) $\dfrac{1}{5+12i}$; 2) $\dfrac{1}{6+8i}$; 3) $\dfrac{1}{3+i}$; 4) $\dfrac{1}{6-i}$.

5.24. Найдите действительные числа a ($a > 0$) и b, удовлетворяющие равенству:

1) $(a + bi)^2 = 21 + 20i$; 2) $(a + bi)^2 = -40 - 42i$;
3) $(a + bi)^2 = -9 - 12i$; 4) $(a + bi)^2 = i$.

5.25. Запишите следующие числа в виде $x + yi$:

1) $\dfrac{2+3i}{1+i}$; 2) $\dfrac{-4+3i}{-2-i}$; 3) $\dfrac{5i}{6-2i}$; 4) $\dfrac{7+5i}{6-2i}$.

5.26. Найдите значение действительного числа y, для которого произведение $(3 + 2i)(1 + yi)$ является: 1) действительным числом; 2) мнимым числом.

5.27. Дано число $z = 1 - i$. Вычислите:

1) z^3; 2) $\dfrac{1}{z^3}$; 3) $z^3\,\overline{z}$.

▲ 2) $z^{-3} = \dfrac{1}{(1-i)^3} = \dfrac{1}{1-3i+3i^2-i^3} = \dfrac{1}{-2-2i} =$

$= \dfrac{-2+2i}{(-2)^2+(-2)^2} = \dfrac{-2+2i}{8} = -0,25+0,25i$ ■

5.28. Используя равенство $(x + yi)^2 = a + bi$, вычислите значение квадратного корня:

1) $\sqrt{4}$; 2) $\sqrt{-4}$; 3) $\sqrt{9i}$; 4) $\sqrt{-25i}$.

5.29. Используя равенство $(x + yi)^2 = a + bi$, вычислите значение квадратного корня:

1) $\sqrt{4-3i}$; 2) $\sqrt{3+4i}$; 3) $\sqrt{12+5i}$; 4) $\sqrt{6+8i}$.

B

5.30. Вычислите:

1) $(3 - 2i) + (5 + 3i)$; 2) $(1 + 2i) - (3 - i)$;

3) $3(2-i)(1-i)$; 4) $(1+3i)(-7+2i)$;
5) $(2-i)^2$; 6) $(1+2i)^3$.

5.31. Решите уравнение (x, $y \in R$):
1) $(1+i)x+(2+i)y=5+3i$; 2) $2x+(1+i)(x+y)=7+i$;
3) $(3-y+x)(1+i)+(x-y)(2+i)=6-3i$.

5.32. Вычислите значение корня:
1) $\sqrt{7-24i}$; 2) $\sqrt{-252-64i}$;
3) $\sqrt{16-12i}$; 4) $\sqrt{21+20i}$.

5.33. Вычислите:
1) i^{13}; 2) i^{65}; 3) $\left(\dfrac{1}{1-i}\right)^2$;
4) $\dfrac{5}{1+2i}$; 5) $\dfrac{2i-3}{1+i}$; 6) $\dfrac{2+3i}{i}$;
7) $\dfrac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$; 8) $\dfrac{2+i}{2-i}-(3+4i)+\dfrac{4-i}{3+2i}$; 9) $(2-i)^2$.

5.34. Найдите z^{-1}:
1) $z=7-12i$; 2) $z=3+4i$; 3) $z=-3+7i$; 4) $z=i$.

5.35. Вычислите $\dfrac{1}{i}$, $\dfrac{1}{i^2}$ и $\dfrac{1}{i^3}$, найдите закономерность для вычисления значения $\dfrac{1}{i^n}$ для любого натурального n.

5.36. Представьте следующие числа в виде $x+yi$:
1) $\dfrac{3-2i}{i}$; 2) $\dfrac{p+qi}{r+si}$; 3) $\dfrac{(2+i)(3-2i)}{1+i}$; 4) $\dfrac{(1-i)^3}{(2+i)^2}$.

5.37. Упростите:
1) $\dfrac{1}{3+i}-\dfrac{1}{3-i}$; 2) $\dfrac{1+i}{1-i}-(1+2i)(2+2i)+\dfrac{3-i}{1+i}$;
3) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; 4) $2i(-1+i)+\left(\sqrt{3}-i\right)^3+(1+i)(1-i)$.

5.38. Возведите в степень:
1) $(-1+i)^5$; 2) $(1+i)^{10}$.

5.39. Вычислите:

$i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + i^{44} + i^{54} + i^{64} + i^{74} + i^{84}$

5.40. Докажите тождество:

1) $\dfrac{2-i}{3-i} = \dfrac{13+4i}{17-9i}$; 2) $\dfrac{\sqrt{m}+i\sqrt{n}}{\sqrt{m}-i\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}+i\sqrt{m}}{\sqrt{n}-i\sqrt{m}}$.

5.41. Найдите действительные числа a и b, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{a}{3+i} + \frac{b}{1+2i} = 1-i.$$

5.42. Упростите выражение $\left(\dfrac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}$.

▲ $$\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4} = 16\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^{4}.$$

Теперь найдем частное двух комплексных чисел:

$$\frac{-7-2i}{2-7i} = \frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)} = \frac{-14-49i-4i+14}{4+49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Вычислим значение выражения: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$. ■

5.43. Найдите действительную и мнимую части комплексного числа:

1) $\dfrac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$; 2) $\dfrac{4+3i}{3+4i} - \dfrac{5-4i}{4+5i}$;

3) $\dfrac{1+i}{2-i} + \dfrac{2-i}{3+i} + 2i$; 4) $\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^2$.

5.44. Найдите действительные числа x и y, удовлетворяющие равенству:

1) $\dfrac{x}{1+i} + \dfrac{y}{1-2i} = 1$; 2) $3x - (1-i)(x-yi) = 2+3i$;

3) $\dfrac{x}{2-i} + \dfrac{yi}{3+i} = \dfrac{2}{1+i}$; 4) $x + yi = (1-i)(2+8i)$.

▲ 2) $3x - (1 - i)(x - yi) = 2 + 3i$, $3x - ((x - y) + (-x - y)i) = 2 + 3i$, $(2x + y) + (x + y)i = 2 + 3i$. Равенство этих комплексных чисел возможно, если равны их действительные и мнимые части. Следовательно, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x + y = 3, \end{cases} \quad x = -1,\ y = 4.$$ ■

C

5.45. Вычислите:

1) $(1 + i\sqrt{3})^9(1 - i)^7$; 2) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$; 3) $\dfrac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}$.

5.46. Найдите все действительные значения x и y, удовлетворяющие уравнению:

1) $\dfrac{i}{x} + \dfrac{i}{y} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{5i}{y}$; 2) $(1 + i)x + (1 - i)y = 3 - i$;

3) $-\dfrac{2}{y} + xi = 3$; 4) $(2 - i)x + (1 + i)y = 5 - i$.

5.47. Решите следующие уравнения на множестве комплексных чисел. Запишите найденные решения в виде $a + bi$.

1) $(1 + i)z = 3 + i$; 2) $(3 - 4i)(z - 1) = 10 - 5i$;

3) $(2 + i)(z - 7 + 3i) = 15 - 10i$; 4) $(3 + 5i)(z + 2 - 5i) = 6 + 3i$.

5.48. Найдите все комплексные числа z, удовлетворяющие уравнению $z^2 = 2\bar{z}$.

5.49. Комплексные числа z и w являются решениями следующей системы:

$$\begin{cases} z + iw = 13, \\ 3z - 4w = 2i. \end{cases}$$

Найдите z и w и запишите их в виде $x + yi$.

5.50. Комплексное число $z = 2 + 3i$ является корнем уравнения $z^2 + (a - i)z + 16 + bi = 0$, где a и b – действительные числа. Найдите значения a и b.

5.51*. Докажите, что верна следующая формула:

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right).$$

Упражнения для повторения

5.52. Запишите следующее выражение в виде двучлена:
$(a + b)(a - b)(a^2 - ab + b^2))(a^2 - ab + b^2)$.

5.53. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 1, \\ 3y + x = 20. \end{cases}$

5.3. Комплексные корни квадратного уравнения. Основная теорема алгебры

Изучив пункт, вы:

- сможете решать квадратные уравнения на множестве комплексных чисел;
- познакомитесь с основной теоремой алгебры и ее следствием.

Комплексные числа возникли при решении алгебраических уравнений. Мы знаем, что при решении квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ и $a, b, c \in R$ корни уравнения находят по формуле $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где число $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом. При этом нам известно, что для разных значений дискриминанта возможны следующие случаи.

1) *Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня.*

2) *Если $D = 0$, то уравнение имеет два равных действительных корня.*

3) *Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.*

Однако и в случае $D < 0$ квадратное уравнение имеет корни, которые принадлежат множеству комплексных чисел.

Пример 1. Решим следующие уравнения: 1) $x^2 = -4$; 2) $x^2 + x + 2 = 0$.

▲ 1) $x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$.

2) $x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$. ■

Пример 2. Разложим на множители следующие выражения:

1) $x^2 + 4$; 2) $x^2 + 11$.

▲ 1) $x^2 + 4 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$;

2) $x^2 + 11 = \left(x - \sqrt{11}i\right)\left(x + \sqrt{11}i\right)$. ■

На этих примерах можно увидеть, что если $z = a + bi$ является комплексным корнем некоторого уравнения, то сопряженное с ним комплексное число $\overline{z} = a - bi$ также будет корнем этого уравнения (проверьте самостоятельно).

Основная теорема алгебры. *Любой многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один корень в множестве комплексных чисел.*

Доказательство теоремы довольно сложное и в школьном курсе не приводится.

Следствие из основной теоремы алгебры. *Любой многочлен n-й степени имеет ровно n корней в множестве комплексных чисел. Среди них могут быть и кратные корни.*

Нам было уже известно, что линейное уравнение имеет один корень, и мы узнали, что для квадратного уравнения найдется два корня в множестве комплексных чисел. В самом деле, мы встречались и с кубическими уравнениями, которые имеют три корня. Если у кубического уравнения есть только один корень в множестве действительных чисел, то два оставшихся корня принадлежат множеству комплексных чисел.

Учитывая тот факт, что если число $z = a + bi$ является комплексным корнем некоторого уравнения, то сопряженное с ним число $\overline{z} = a - bi$ также будет корнем этого уравнения, мы можем сформулировать следующее утверждение о корнях кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Кубическое уравнение имеет либо три действительных корня, либо один действительный корень и два сопряженных комплексных корня.

Работа в группе

Сформулируйте утверждение о том, из каких чисел может состоять множество корней уравнения четвертой степени.

Пример 3. Покажите, что комплексное число $1 + 2i$ является корнем уравнения $4z^3 - 11z^2 + 26z - 15 = 0$. Найдите остальные корни.

▲ Для начала убедимся, что число $1 + 2i$ является корнем данного уравнения. В самом деле, найдя $z^2 = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i$ и $z^3 = (1 + 2i)^3 = (1 + 2i)(-3 + 4i) = -11 - 2i$ и подставив найденные значения в данное уравнение, получим следующее тождество: $4z^3 - 11z^2 + 26z - 15 = 4(-11 - 2i) - 11(-3 + 4i) + 6(1 + 2i) - 15 = (-44 + 33 + 26 - 15) + (-8 - 44 + 52)i = 0 + 0i = 0$.

Теперь найдем другие корни уравнения. Согласно следствию из основной теоремы алгебры, уравнение третьей степени имеет три корня. Если комплексное число $1 + 2i$ является одним из корней уравнения, то сопряженное с ним число $1 - 2i$ также будет корнем данного уравнения. Если два корня – комплексные числа, то третий корень – действительное число. Обозначив этот корень буквой a, разложим многочлен на множители:

$4z^3 - 11z^2 + 26z - 15 = 4(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)(z - a)$.

Раскроем скобки:

$4z^3 - 11z^2 + 26z - 15 = 4(z^2 - z + 2iz - z + 1 - 2i - 2iz + 2i + 4) \times$
$\times(z - a) = 4(z^2 - 2z + 5)(z - a) = 4z^3 - 4az^2 - 8z^2 + 8az + 20z - 20a$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z (метод коэффициентов): при z^2: $-11 = -4a - 8$; при z: $26 = 8a + 20$; свободный член: $-15 = -20a$. Получили, что решение каждого из этих уравнений $a = \frac{3}{4}$.

Ответ: $z_1 = 2i$, $z_2 = 1 - 2i$, $z_3 = \frac{3}{4}$. ■

1. Если известен один комплексный корень квадратного уравнения, можно ли сразу найти его второй корень?
2. Сформулируйте и поясните основную теорему алгебры и ее следствие.

Упражнения

А

5.54. Решите квадратное уравнение относительно комплексного числа x:

1) $x^2 + 9 = 0$; 2) $4x^2 - 9 = 0$; 3) $x^2 + 5 = 0$;
4) $x^2 - 25 = 0$; 5) $x^2 + 25 = 0$; 6) $x^2 - 5 = 0$.

5.55. Разложив на множители, решите кубическое уравнение относительно комплексного числа x:

1) $x^3 - 4x = 0$; 2) $x^3 + 2x = 0$; 3) $x^3 + 4x = 0$;
4) $x^3 - 3x = 0$; 5) $x^3 + 3x = 0$.

5.56. Решите уравнение четвертой степени относительно комплексного числа x:

1) $x^4 + x^2 = 6$; 2) $x^4 - 1 = 0$; 3) $x^4 = 81$.

5.57. Решите квадратное уравнение:

1) $x^2 - 10x + 29 = 0$; 2) $x^2 + 6x + 25 = 0$;
3) $x^2 + 14x + 50 = 0$; 4) $2x^2 + 5 = 6x$;
5) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 4 = 0$; 6) $2x + \frac{1}{x} = 1$.

5.58. Разложите на линейные множители:

1) $x^2 - 9$; 2) $x^2 - 7$; 3) $x^2 + 7$;
4) $2x^2 + 9$; 5) $4x^2 - 1$; 6) $4x^2 + 1$;
7) $2x^2 - 9$; 8) $x^3 - x$; 9) $x^4 - 16$;
10) $x^4 - 1$; 11) $x^3 + x$.

5.59. Решите уравнение:

1) $z^2 + 2z + 2 = 0$; 2) $z^2 - 2z + 5 = 0$;
3) $z^2 - 4z + 13 = 0$; 4) $z^2 + 6z + 34 = 0$;
5) $4z^2 - 4z + 17 = 0$; 6) $z^2 + 4z + 6 = 0$.

5.60. Решите биквадратное уравнение:

1) $z^4 + 2z^2 = 3$; 2) $z^4 = z^2 + 6$; 3) $z^4 + 5z^2 = 36$;
4) $z^4 + 9z^2 + 14 = 3$; 5) $z^4 + 1 = 2z^2$; 6) $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$.

B

5.61. Составьте квадратное уравнение по его корням $2 \pm \sqrt{3}i$.

5.62. Решите уравнение на множестве комплексных чисел:

1) $z^2 + 4iz - 13 = 0$; 2) $z^2 - 6iz - 10 = 0$;
3) $z^2 - iz - 0{,}5 = 0$; 4) $z^2 + 8iz - 25 = 0$.

5.63. Решите уравнение на множестве комплексных чисел и разложите многочлен на линейные множители:

1) $x^2 + x + 1 = 0$; 2) $x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0$;
3) $x^2 + 3x + 4 = 0$; 4) $x^3 - 27 = 0$;
5) $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$; 6) $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0$.

5.64. Для кубического уравнения $3z^3 - 2z^2 + 22z + 40 = 0$:

1) покажите, что число $1 + 3i$ является корнем уравнения;
2) объясните, почему данное уравнение имеет только один действительный корень.
Найдите остальные корни уравнения.

5.65. Зная, что число $z = -4$ является корнем уравнения $z^3 + 6z^2 + 12z + 16 = 0$, найдите остальные корни уравнения.

5.66. Один из корней уравнения $2z^3 - z^2 + 4z + k = 0$ равен числу $z = 1 + 2i$.

1) Определите другой комплексный корень уравнения.
2) Найдите действительный корень уравнения и значение k.

5.67. Зная, что $z = 6$ – корень уравнения $z^3 - 10z^2 + 37z + p = 0$:
1) найдите значение p;
2) определите остальные корни.

5.68. Комплексное число $a = 1 + i$ является корнем уравнения $z^3 + 3z^2 + pz + q = 0$ (здесь p и q – действительные числа). Покажите, что $p = -8$ и $q = 10$, предварительно посчитав a^2 и a^3 и подставив найденные значения в уравнение. Найдите два оставшихся корня уравнения.

C

5.69. Известно, что p и q – действительные числа, а число $a = 1 + 2i$ – корень уравнения $z^2 + (p + 5i)z + q(2 - i) = 0$. Определите значения p и q. Найдите второй корень уравнения.

5.70. Решите уравнение на множестве комплексных чисел и разложите многочлен на линейные множители:

1) $x^3 - 6x + 9 = 0$; 2) $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$;
3) $x^3 + 9x - 26 = 0$; 4) $x^3 - 4x + 2 = 0$;
5) $x^3 + 18x + 15 = 0$; 6) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$.

5.71*. Пусть $\overline{z}$ число, сопряженное комплексному числу z. Найдите значение z, удовлетворяющее следующему уравнению:

1) $z^2 + \overline{z} = 0$; 2) $z^2 - \overline{z} = 0$.

5.72. Составьте многочлен четвертой степени, корнями которого являются комплексные числа $a = 1 + i$ и $b = 2 - i$.

5.73. Число $a = 1 + 4i$ является корнем уравнения $z^3 + 5z^2 + kz + m = 0$ (здесь k и m – действительные числа). Определите значение коэффициента k и покажите, что $m = 119$. Найдите остальные корни уравнения.

Упражнение для повторения

5.74. Определите знак выражения:

1) $\sin\dfrac{17\pi}{4}$; 2) tg3, 3π.

Выводы раздела «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»

Число i называется мнимой единицей, если $i^2 = -1$.

Выражение $z = a + bi$ называется ***комплексным числом***, если a и b – действительные числа. Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные и мнимые части.

Комплексное число $\overline{z} = a - bi$ называют числом, ***сопряженным*** комплексному числу $z = a + bi$.

Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называют угол между радиус-вектором, соответствующим данному числу, и положительным направлением оси Ox. Аргумент комплексного числа z считают положительным, если угол отсчитывается против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае. Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ обозначается $\varphi = Argz$ или $\varphi = Arg\,(a + bi)$.

Пусть $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ – комплексные числа.

Операция сложения

1°. $z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$

Операция вычитания

2°. $z_1 - z_2 = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$

Операция умножения (для применения этого действия достаточно при раскрытии скобок учесть, что $i^2 = -1$)

3°. $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + a \cdot di + bi \cdot c + b \cdot d \cdot i^2 = ac + adi + bci - bd = ac - bd + (ad + bc)i$

Операция деления (выполняется с помощью умножения на сопряженное знаменателю комплексное число и с учетом $i^2 = -1$)

4°. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

Для любого натурального числа k

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i\ (k \in N).$$

Любой многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один корень в множестве комплексных чисел. Любой многочлен n-й степени имеет ровно n корней в множестве комплексных чисел.

Термины на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Мнимая единица	Жорамал бірлік	Imaginary unit
Комплексное число	Комплекс сан	Complex number
Сопряженное число	Түйіндес сан	Conjugate number
Действительное число	Нақты сан	Real number
Корень уравнения	Теңдеудің түбірі	Root of the equation
Плоскость комплексных чисел (диаграмма Аргана)	Комплекс сандар жазықтығы (Арган диаграммасы)	Complex number plane (Argand diagram)

ОТВЕТЫ

Раздел 0

0.1. 1) $(-\infty; -4) \cup (-4; 1{,}5) \cup (1{,}5; +\infty)$. 2) $x \geqslant -1$; 3) R; 4) $x \geqslant 2$. **0.2.** 1) $(3x - 2)^2$; 2) $\sqrt{\sin x + 1}$. **0.3.** 1) 2; 2) 0. **0.4.** 1) $\operatorname{tg}^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}5\alpha$; 3) $-\cos\alpha - \sin\alpha$. **0.5** 1) Положительный; 2) Отрицательный; 3) 0; 4) отрицательный. **0.7** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$. **0.8** 1) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$; 3) $x = (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n,\ n \in Z$, 5) $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$. **0.9.** 1) $\left[-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$; 4) $\left(-\frac{\pi}{6} + 4\pi n; \frac{5\pi}{6} + 4\pi n\right)$.

0.10. 3) $\frac{2}{(x+1)^2}$; 6) $(3 + x^5)\cos x - \left(3x + \frac{x^6}{6}\right)\sin x$. **0.11.** 2) $8(x^2 - 4x + 1)^3(x - 2)$; 5) 1. **0.12.** 1) $\min\limits_{[-1;\,2]} y = -8$, $\max\limits_{-1 \le x \le 2} y = 3$. **0.13.** 2) $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$. **0.15.** 1) $(4; +\infty)$. **0.16.** 1) $(0; 4) \cup (5; +\infty)$; 2) $\left[-3; \frac{13}{5}\right]$. **0.17.** 1) $(-\infty; -2] \cup [2; 4)$. **0.18.** 1) $4 - x$. **0.19.** 1) $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$. **0.20.** 1) $4\sin(2{,}5x)\cos x\cos(0{,}5x)$. **0.22** 1) $\varnothing$; 2) $\frac{\pi n}{2}, n \in Z$. **0.23.** 1) $\left[\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$; 3) $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$. **0.24.** 1) $\frac{\sin(3x - 2)}{2\sqrt{x - 2}} + 3\sqrt{x - 2}\cos(3x - 2)$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$. **0.25.** 1) $x = -1$, точка разрыва II типа, $x = 5$, точка разрыва I типа. **0.26.** 1) $\frac{1}{192}$; 3) $-\frac{1}{4}$. **0.27.** 1) На $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ – функция вогнута, на $(-3; 1)$ – функция выпукла. **0.29.** 6840. **0.30.** $\frac{5}{6}; \frac{1}{6}$. **0.32.** 2) $x(x + 1)(x^2 + x + 7)$. **0.33** $-\frac{28}{45}$. **0.34.** Применяя формулы $\sin(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha - \beta)$, нужно показать, что выражение равно постоянному числу. **0.35.** 1) Нужно решить уравнение $\frac{\pi}{2} - x = \sqrt{x}$; 2) $\varnothing$. **0.36.** 2) $\varnothing$. **0.37.** 1) $x = -1$ – вертикальная асимптота, $y = 3x - 2$ – наклонная асимптота. **0.38.** $m = \frac{4}{15}$. **0.41.** $n = 12$.

Раздел 1

1.3. 1) $F'(x) = \left(2\sqrt{x}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $F'(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + x\right)' = \left(2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + x\right)' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} + 1 = -\frac{1}{x\sqrt{x}} + 1$. **1.4.** 1) $F(x) = x^2 - x + C$; 2) $F(x) = \frac{5}{4}x^4 - 4x + C$;

3) $F(x)=\frac{7}{3}x^3-3\sin x-3x+C$. **1.5.** 1) $\left(\frac{2}{x^3}+C\right)'=\left(2x^{-3}+C\right)=2\cdot(-3)\cdot x^{-4}=$ $=-\frac{6}{x^4}$; 2) $\left(2x^4-\frac{1}{2x}+c\right)'=8x^3+\frac{1}{2x^2}$. **1.6.** 1) $\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+C=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$.

Проверка: $\left(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+c\right)'=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}=x^{\frac{2}{3}}$; 2) $\int 7x^{\frac{4}{3}}dx=7\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1}+C=3x^{\frac{7}{3}}+C$.

Проверка: $\left(3x^{\frac{7}{3}}+C\right)'=3\cdot\frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1}=7x^{\frac{4}{3}}$; 3) $\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=2\sqrt{x}+C$. Проверка: $\left(2\sqrt{x}+C\right)'=2\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=x^{-\frac{1}{2}}$. **1.7.** 1) $\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$;

2) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=2\sqrt{x}+C$; 3) $\int\left(\frac{7}{x^2}-x+1\right)dx=\int\left(7x^{-2}-x+1\right)dx=$ $=-7x^{-1}-\frac{x^2}{2}+x+C$. **1.8.** 1) $f(x)=\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{x^3}+C$; 2) $f(x)=x^4-2x^2+C$;

3) $f(x)=\frac{(x-3)^3}{3}+C$; 4) $f(x)=2x^3-\frac{2}{x^2}+C$; 5) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{4}{x}+4x+C$.

1.9. 1) $\mathrm{tg}x+x+C$; 2) $-\cos x+3\sin x+C$; 3) $\frac{x^4}{4}+\ +\cos x+C$;

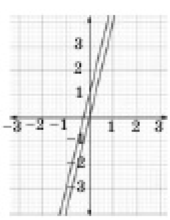
4) $-\mathrm{ctg}x+\frac{3}{2}\sin x+C$; 5) $3\sin x-\mathrm{ctg}x+C$; 6) $x^6+\frac{1}{2}\cos x+C$.

1.10. 1) $\frac{x^8}{8}+C$; 2) $\frac{4}{17}x^{\frac{17}{4}}+C$; 3) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+2x\sqrt{x}+\frac{6}{\sqrt[6]{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$; 4) $\frac{x^3}{3}-4x+C$;

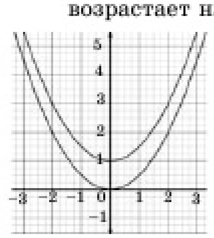
5) $-8\cos x-9\mathrm{tg}x+C$. **1.11.** 2) $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}$; 3) $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{2}x\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3}$.

1.12. 1) $f(x)=x^2-x+1$; 2) $f(x)=x^3-3x+4$; 3) $-\frac{3}{x^2}+7$.

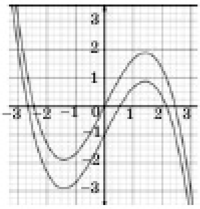
1.13. Возрастает на $(-\infty;+\infty)$.



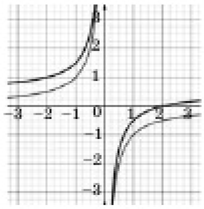
1.14. Убывает на $(-\infty;0)$;
возрастает на $(0;+\infty)$.



1.15. Убывает на $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$; возрастает на $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$.



1.16. Возрастает на $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$.



1.17. 1) $F(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{4}{x}+C$; 2) $F(x)=-\frac{4}{\sqrt[3]{x}}+2x^2\sqrt{x}+C$. **1.19.** 1) $F'(x) = 35x^4 + 5\cdot 2\cos 3x\cdot(-\sin 3x)\cdot 3 = 35x^4 - 15\sin 6x$; 2) $24x^3 + 5 \times 2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2 = 24x^3 + 10\sin 4x$. **1.21.** 1) $3x^3-12x^2\sqrt{x}+12,5x^2+C$; 2) $6x\sqrt{x}-3x^2+0,4x^2\sqrt{x}+C$. **1.22.** 1) $t-\frac{3}{2t}+C$; 2) $2t+\frac{1}{6}t^3+C$. **1.23.** 1) $\frac{2}{3}x^3-2\sqrt{x}+C$; 2) $4x^2\sqrt{x}+2x\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C$. **1.24.** 1) $F(x)=\sin x+\cos x+2\sqrt{2}$. **1.25.** 1) $\sin\alpha - \cos\alpha + c$; 2) $\operatorname{tg}x - x + C$. **1.26.** 1) $h(t) = -5t^2 + 6t + 2$; 2) $t=\frac{6+\sqrt{76}}{10}$; 3) $h_{max}(t) = 3{,}8$. **1.27.** 1) $\frac{x^2}{2}-x+C$; 2) $\frac{(x+3)^8}{8}+C$. **1.28.** 1) $f(x)=2\sqrt{x}-5$; 2) $3x^2 + 8x + 5$. **1.29.** 1) $F'(x) = x^6 - 4\sin 2x$; 2) $F'(x)=\frac{6\operatorname{arctg}3x}{1+9x^2}$. **1.30.** $F(x) = x$. **1.31.** $f(x)=3x-\frac{1}{10}x^2+7$. **1.32.** 1) $f(x)=\frac{x^2}{2}-1$; 2) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{3}$. **1.33.** $f(x) = 2$. **1.34.** $f(x) = x - 1$. **1.35.** $t = 10$ с, $S = 700$ м. **1.37.** $V_0=10\sqrt{21}$. **1.39.** 1) $y' = (x - 1)[2\sin x + x\cos x - \cos x]$; 2) $y'=\frac{2x\cos 2x}{\left(1-x^2\right)^2}-\frac{2\sin 2x}{1-x^2}$. **1.40.** 1) $x_0 = 1$, $y = 0{,}5x - 0{,}5$.

1.43. 1) $\frac{10}{9}\sin 9x+C$; 2) $-\frac{7}{4}\cos 4x+C$; 3) $\frac{1}{14}(2x-3)^7+C$; 4) $\frac{1}{42}(7x-9)^6+C$; 5) $\frac{2}{3}\sin 3x+C$; 6) $\frac{1}{18}(3x-8)^6+C$; 7) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}4x+C$; 8) $\frac{1}{12}(3x-1)^4+C$; 9) $x+\frac{1}{3}\sin 3x+C$. **1.44.** 1) $\frac{1}{12}(3x+2)^4+C$; 2) $\frac{1}{192}(x-2)^6+C$; 3) $-\frac{1}{4(1-2x)^2}+C$;

4) $-\frac{1}{9(3x+1)^3}+C$. **1.45.** 3) $\frac{1}{243}(x+3)^6+C$. **1.46.** 1) $-\frac{1}{2}\mathrm{tg}(1-2x)+C$; 2) $-2\cos\left(1-\frac{x}{2}\right)+C$; 3) $\frac{1}{4}\cos(3-4x)+C$; 4) $-\frac{1}{3}\sin(2-3x)+C$; 5) ctg(4 − − x) + C; 6) $\frac{1}{4}\mathrm{tg}(4(x+1))+C$; 7) sin3$x$ + C. **1.48.** 1) $\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C$; 2) $\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)+C$; 3) $\frac{1}{8}(4x-\sin 4x)+C$; 4) $\frac{1}{8}(4x+\sin 4x)+C$.

1.49. 1) sin$x$cos$x$ + C; 2) tg$x$ + C; 3) −ctg$x$ + C; 4) $-\frac{1}{2}\cos^2 x+C$. **1.50.** 1) $x$sin$x$ + cos$x$ + C; 2) $\frac{1}{4}(\sin 2x-2x\cos 2x)+C$; 3) $\frac{1}{4}(2x\sin 2x+\cos 2x)+C$.

1.51. 1) $\frac{3\mathrm{tg}(4x-1)}{4}+\cos(2x-3)+5x+C$; 2) $-2x-\frac{5}{4}\sin(7-4x)+\frac{4}{3}\mathrm{ctg}$ × × $(2-3x)+C$. **1.52.** 1) $\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+C$; 2) $\frac{1}{16}(2\sin 4x-\sin 8x)+C$; 3) $\frac{1}{16}(4\sin 2x+\sin 8x)+C$; 4) $-\frac{1}{14}(7\cos x+\cos 7x)+C$; 5) $3\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+C$.

1.53. 1) $\frac{(x+2)^9}{2304}+C$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt{3y^2+1}+C$; 3) $\frac{2(1-5x^3)}{\sqrt[5]{(1-5x^3)^3}}+C$; 4) $\frac{1}{1-2x^3}+C$.

1.56. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x}+C$; 2) $-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+C$; 3) $-3\sqrt[3]{\cos x}+C$; 4) $\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+\mathrm{tg}x+C$.

1.57. 1) $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$; 2) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$; 3) $-\frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5 x+C$; 4) $\mathrm{tg}^7 x+C$. **1.58.** 1) $\frac{1}{9}\left(2\sqrt{3x-4}-\frac{26}{\sqrt{3x-4}}\right)+C$; 2) $\frac{3\sqrt[3]{(x^2+1)^5}}{10}-\frac{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}{4}+C$; 3) $-\frac{3x^2-3x+1}{3(x-1)^3}+C$. **1.59.** 1) $\frac{1}{10}\left(\sqrt[3]{(3x+12)^2}(8x-33)\right)+C$; 2) $\frac{4x-5}{4(5-2x)^2}+C$; 3) $\ln|x-1|+C$; 4) $\sin(x^2+x+4)+C$. **1.60.** 1) $\frac{4}{3}\left(\sqrt{(\sqrt{t}+1)^3}\right)+C$; 2) $\frac{4}{9}\left(\sqrt{(\sqrt{t^3}+1)^3}\right)+C$. **1.61.** 1) $2x\sin x-(x^2-2)\cos x+C$; 2) $\frac{1}{27}\left((9x^3-6x)\sin 3x\right)+\left(9x^2-2\right)\cos 3x+C$; 3) $\frac{x\sin 2x}{4}+\frac{\cos 2x}{8}+\frac{x^2}{4}+C$;

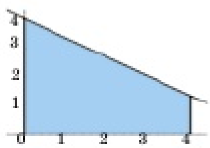
4) $-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}+\frac{x^2}{4}+C$. **1.62.** $-\frac{\cos^6 x}{3}+C$. **1.63.** 1) $\frac{3x}{8}+\frac{3\cos x\sin x}{8}+\frac{\cos^3 x\sin x}{4}+C$; 2) $\frac{3x}{8}-\frac{3\cos x\sin x}{8}-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+C$. **1.64.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$.

1.66. $-\frac{\sqrt{2}}{36}$. **1.67.** 0. **1.68.** $\left(-\infty;-\frac{1}{6}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\infty\right)$. **1.74.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1. **1.75.** 1) 2; 2) $\frac{8}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{4}{3}$. **1.76.** 1) $8\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $5\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$. **1.77.** 1) 32; 2) $\frac{5}{2}$; 3) 0; 4) 84; 5) 15.

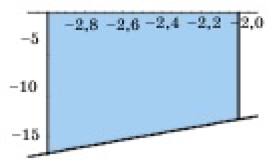
1.78. 1) 2; 2) $\frac{4}{3}$; 3) 1; 4) 4. **1.79.** 1. **1.80.** 1) 16; 2) 9. **1.81.** 2) 329; 3) 8; 4) -234; 5) $\frac{16}{15}$; 6) 63. **1.82.** 1) 0; 2) $-10{,}5$; 3) $17\frac{1}{3}$; 4) 2. **1.83.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) $\sqrt{3}$. **1.84.** 1) $\frac{16}{3}$; 2) $\frac{4}{\pi}$; 3) $\frac{4}{\pi}$; 4) 27. **1.85.** 1) $\frac{4\sqrt{2}-1}{2}$; 2) $\frac{20}{3}$; 3) $\frac{32}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$. **1.86.** 1) $\frac{20}{3}$; 2) 16; 3) -2; 4) $-\frac{57}{8}$. **1.87.** 1) 9; 2) 47; 3) $\frac{209}{6}$; 4) $\frac{15}{2}$. **1.88.** 1) π^5; 2) $7-\frac{\pi^3}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{28}{3}$. **1.89.** 1) $-\frac{13}{6}$; 2) $\frac{7}{3}$; 3) $\frac{11}{6}$; 4) $-\frac{74}{3}$. **1.90.** 1) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **1.91.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $3\sqrt{3}-3$; 3) $\frac{10}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{7}{3}$.

1.92. 1) $\frac{2\sqrt{2}+5\pi}{8}$; 2) $-\frac{2}{5}$; 3) π; 4) $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **1.93.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) $\frac{4+\pi^2}{2}$.

1.95. 1) $\frac{32}{3}$

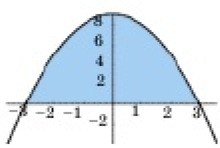


2) 15

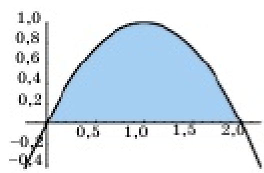


1.96. 1) 0.5; 2) 13.5, 3) 15.

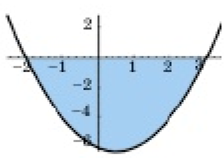
1.97. 1) 36



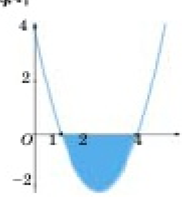
2) $\frac{4}{3}$



3) $\frac{125}{6}$

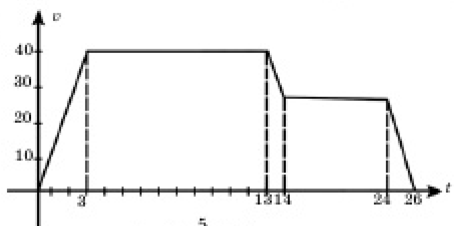


4) $\frac{9}{2}$



1.98. 1) $\frac{10}{3}$; 2) $\frac{160}{9}$; 3) $\frac{2}{3}$. **1.99.** 1) 16; 2) $\frac{500}{3}$. **1.100.** 1) 0.5; 2) 1; 3) ln256; 4) $\frac{32}{3}$. **1.101.** 1) 13.5; 2) 4.5; 3) $\frac{1}{3}$. **1.102.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 18; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{104}{3}$. **1.103.** 1) $\frac{8}{3}$; 2) 9; 3) $\frac{125}{6}$. **1.104.** 1) $\frac{19}{6}$; 2) $37\frac{3}{4}$; 3) $\frac{32}{3}$; 4) 0. **1.105.** 1) $\frac{39062}{7}$; 2) $\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4^9}-\frac{1}{5^9}\right)$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 8. **1.106.** 1) $\frac{2-\sqrt{2}}{16}$, 2) $\frac{1}{4}+\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $1-\frac{\pi}{4}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1.107.** 1) 8,5. **1.108.** 1) 2,5; 2) 5; 3) 10; 4) 2,5. **1.109.** 1) 9, 2) $\frac{38}{3}$. **1.110.** 1) $\frac{10244}{15}$; 2) $\frac{12\sqrt{3}-12-\pi}{3}$. **1.111.** 1) $A = -3C$, B – любое число; 2) $B = 0$; A, C – любые числа. **1.112.** 1) $\frac{16}{3}$; 2) $\frac{2}{7}$. **1.113.** $2\sqrt{2}$. **1.114.** 1) $-85\frac{6}{7}$; 6) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$. **1.120.** 110 м. **1.121.** 1) 4,5; 3) 24. **1.123.** 0,5 м; 1 м. **1.124.** 1) $\frac{31}{6}$ м; 1,5 м. **1.125.** 2880 м. **1.126.** 1) 21π; 2) 625π. **1.127.** *а*) 186π; *б*) $29,2\pi$; *в*) 63π. **1.128.** 1) 36π; 2) $\frac{127\pi}{7}$; 3) $198,4\pi$; 4) 8π. **1.129.** 2) $2\frac{2}{3}\pi$; 4) $2,5\pi$. **1.130.** 2) $1\frac{1}{15}\pi$; 4) $40,5\pi$. **1.131.** 12,5 Дж. **1.132.** 1) Движется в положительном направлении, в отрицательном направлении – не движется; 2) 16 км; 3) 8 км.

1.133.



$s = 14\frac{5}{12}$ км

1.134. 1) 9 м; 2) 13 м. **1.135.** $\frac{1}{12}$ м. **1.136.** 1) $8\frac{2}{3}\pi$; 3) $1,6\pi$. **1.137.** 2) $\frac{128\pi}{7}$; 4) 2π. **1.139.** 2) $\frac{16}{15}\pi$. **1.140.** 2 с. **1.141.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$ см. **1.142.** 1 м. **1.143.** $\frac{16}{3}\pi$. **1.144.** 2) $\frac{25}{4}\pi$; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) $\frac{3}{10}\pi$. **1.148.** 156,8 Дж. **1.149.** $\frac{32}{15}\pi$. **1.150.** $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$ **1.151.** (1;7). **1.152.** $b_1 = \frac{1}{32}$, $n = 7$. **1.153.** 1) Наибольшее значение: $\sqrt{2}+1$; наименьшее значение: $-\sqrt{2}+1$; 2) [–4; 4]. **1.154.** $\frac{5}{6}\pi$ и $-\frac{7}{6}\pi$.

Раздел 2

2.1. 1) 3853705; 914657; 2) 2264640; 151763. **2.2.** $\bar{x} \approx 5{,}17$, R = 6, Mo = 6, Me = 5,5. **2.3.** 1) Объем выборки – 20, R = 4, Mo = 3, Me = 3, $\bar{x}$ = 3,15. **2.4.** Объем – 15, R = 8, Mo = 7, Me = 5, $\bar{x} \approx$ 5,33.

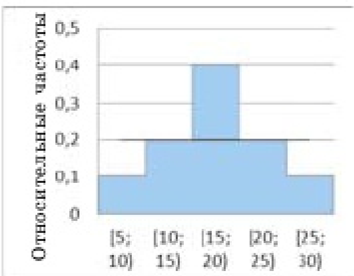
$x(i)$	2	3	4	5	7	10
n	3	1	2	3	4	2

2.6. Me = 18, $\bar{x} \approx$ 21,5. **2.7.** 1) Объем выборки – 50, Mo = 1, Me = 5, $\bar{x}$ = 5,48. **2.8.** 1) Объем – 40, Mo = 9, Me = 9,5, $\bar{x}$ = 9,8, R = 8. **2.9.** $\bar{x} \approx$ 14,8. **2.10.** 7;9.

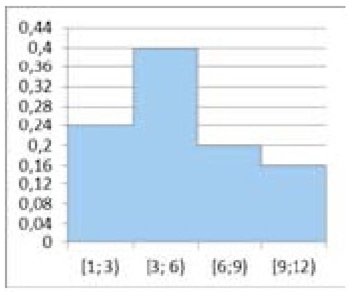
2.11.

2.12.

2.14.

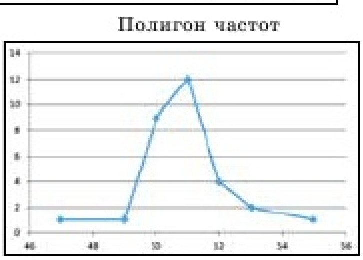


2.15.



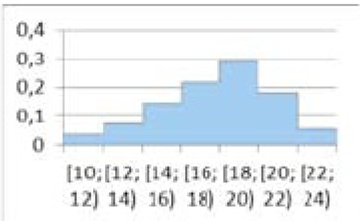
2.16.

2.18. 1)

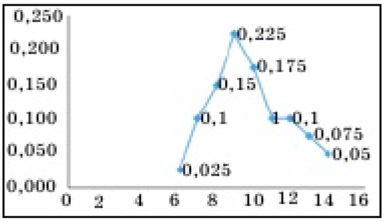


2.19. 2)

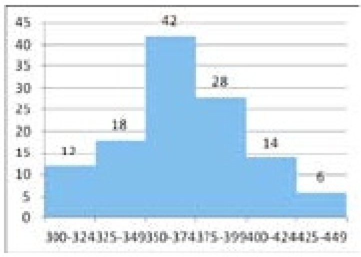
Интервал	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22)	[22; 24)
n_i	0,04	0,07	0,15	0,22	0,29	0,18	0,05



2.22.



2.25. 1)



2.29. Для пшеничных колосьев с удобренного участка: $\bar{x} \approx 6,85$, $D \approx 2,97$, $\sigma \approx 1,72$. Для пшеничных колосьев с неудобренного участка: $\bar{x} \approx 5,63$, $D \approx 1,98$, $\sigma \approx 1,41$. **2.30** $\bar{x} = 5,48$, $D \approx 18,3$, $\sigma \approx 4,3$. **2.31.**

	Среднее число очков	Стандартное отклонение	Судя по среднему числу очков, Ергазы более сильный игрок, чем Нуркен, однако стандартное отклонение у Нуркена меньше, что означает, что он более стабильный игрок.
Нуркен	25	24,75	
Ергазы	30,5	157,75	

2.32. $\bar{x} \approx 6,2$, $D \approx 4,64$, $\sigma \approx 2,15$. **2.33.** $\bar{x} \approx 17,8$, $D \approx 8,39$, $\sigma \approx 2,9$. **2.34.** $\bar{x} \approx 368,67$, $D \approx 1018,06$, $\sigma \approx 31,91$.

Раздел 3

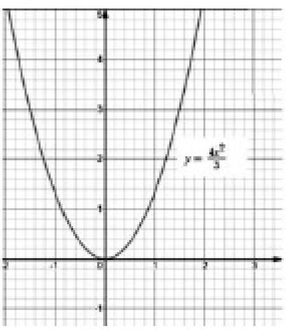
3.1. 4) $\sqrt[3]{4}$; 5) $\pm\sqrt[4]{10}$; 6) $\sqrt[5]{6}$; 7) $-\sqrt[3]{4}$; 8) $\varnothing$; 9) $\pm\sqrt[6]{7}$. **3.2.** 1) Положительный; 2) любой; 3) отрицательный. **3.3.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $[2; +\infty)$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $(2,5; +\infty)$; 7) $(-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$; 8) $(-\infty; -3] \cup (3; +\infty)$; 9) $(2; 5]$; 10) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; 11) $(-2; 1] \cup (2: +\infty)$; 12) $(-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$. **3.4.** 1) 2; 2) 3; 3) -5; 4) -4; 5) 7; 6) -2; 7) -81; 8) -1. **3.5.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $1\frac{1}{2}$; 4) 0,3; 5) -2; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-1\frac{1}{2}$; 8) 0,5; 9) 1; 10) -1; 11) $1\frac{1}{2}$; 12) $-0,1$. **3.6.** 1) $\sqrt{5} > \sqrt[4]{5}$;

2) $0,5 < \sqrt[4]{0,5}$; 3) $\sqrt[3]{2} > \sqrt[5]{3}$; 4) $\sqrt[3]{0,7} < \sqrt[5]{0,7}$; 5) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{4}$; 6) $\sqrt[4]{3} < \sqrt[4]{5}$; 9) $\sqrt[5]{-0,2} > \sqrt[5]{-0,3}$; 10) $\sqrt[18]{\frac{4}{7}} > \sqrt[18]{0,57}$. **3.7.** 1) 6; 2) 10; 3) 1,5; 4) 15; 5) 0,5; 6) $\frac{10}{3}$; 7) 6; 8) 0,6. **3.8.** 1) $2\sqrt{a}$; 2) $5a\sqrt{2a}$; 3) $2\sqrt[4]{a}$; 4) $3a\sqrt{a}$; 6) $3a$; 7) $a\sqrt[3]{5a}$. **3.9.** 1) $\sqrt{12}$; 2) $\sqrt[3]{40}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{45}$; 5) $\sqrt{18}$; 6) $\sqrt[3]{250}$; 7) $\sqrt[5]{4}$; 8) $\sqrt[4]{5b^4}$. **3.10.** 1) +; 2) +; 3) −; 4) +; 5) +; 6) +; 7) +; 8) −; 9) +. **3.11.** 1) $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{0,35}$; $\sqrt[6]{0,15}$; 3) $\sqrt[3]{0,3}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[5]{0,2}$; 4) $5\sqrt{0,1}$; $3\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$; $2\sqrt[6]{\frac{1}{3}}$.

3.12. 1) $2\frac{2}{5}$; 2) $\frac{3}{10}$; 3) $\frac{45}{49}$; 4) $1\frac{7}{20}$. **3.13.** 1) $4x\sqrt{y}$; 2) $3b\sqrt[4]{b}$; 3) $5ax\sqrt[3]{a^2}$; 4) $4b^4y^2\sqrt[3]{y}$. **3.14.** 1) $\sqrt{5a}$; 2) $\sqrt[3]{8x}$; 3) $\sqrt[4]{3b}$; 4) $\sqrt[5]{2c}$. **3.17.** 1) $\frac{\sqrt[3]{75}}{5}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$; 3) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$; 4) $\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}$. **3.18.** 1) $2\sqrt[3]{x}$; 2) $\frac{a}{2}\frac{\sqrt[4]{a-1}\sqrt{a-1}}{a+2}$.

3.19. 1) $\frac{\sqrt[6]{a}}{3}$; 2) 1. **3.20.** $2\sqrt{2}$.

3.21.



3.24. 1) $\sqrt[5]{7^3}$, $\sqrt[7]{5}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 2) $3\sqrt{x}$, $\sqrt{3x}$, $\frac{1}{5}\sqrt[5]{y}$, $-\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{6,25}}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{0,5}$; 4) $\sqrt[3]{(ab)^2}$, $a\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[3]{(a+b)^2}$, $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$; 5) $\sqrt{a}$, $b\sqrt[5]{b}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{c^3}}$, $\frac{1}{\sqrt{d}}$; 6) $\frac{x}{y\sqrt{y}}$, $\frac{4}{(x-y)\sqrt{x-y}}$, $\frac{2x}{\sqrt[8]{x+y}}$; 7) $5\sqrt[3]{x^2}$, $\frac{7}{a\sqrt{a}}$, $a\sqrt[8]{b^5}$, $\sqrt[8]{(y+y)^2}$; 8) $-\frac{3}{\sqrt{y}}$, $-\frac{1,2}{b\sqrt[5]{b}}$, $\sqrt[8]{(ab)^3}$, $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}$. **3.25.** 1) $ax^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x$; 2) $y^{\frac{1}{3}}+e^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$; 3) $a+2a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}-2$; 4) $x^{-1}-3x^{-\frac{3}{4}}+2x^{-\frac{1}{4}}+6$; 5) $1-b$; 6) $4-y^3$. **3.26.** 1) 10; 2; $\frac{10}{19}$; 2) 0; 16; $\frac{4}{9}$;

3) $\frac{1}{3}$; 27; 8; 4) $\frac{1}{7}$; 2; 7; 5) 2; 0,3; $\frac{1}{5}$; 6) 0,01; 2; 100. **3.27.** 1) $c^{\frac{5}{6}}$; 2) $b^{\frac{1}{6}}$; 3) $x^{-0,2}$; 4) $a^{\frac{15}{8}}$; 5) y^3; 6) $a^{\frac{1}{6}}$; 7) $a^{\frac{2}{3}}$; 8) $x^{-\frac{1}{4}}$; 9) $y^{\frac{1}{2}}$; 10) $x^{\frac{1}{2}}$; 11) $a^{\frac{5}{2}}$; 12) $b^{-\frac{4}{5}}$.

3.28. 1) 1; 2) $3^{0,8}$; 3) 2; 4) 25; 5) 9; 6) 32; 7) 6; 8) $\frac{1}{6}$; 9) 70; 10) 15.

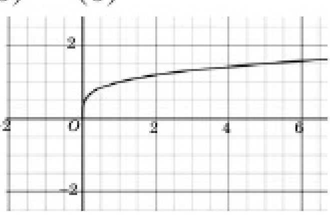
3.29. 1) $4p^{\frac{2}{3}} - q^{-2}$; 2) $1 + 2b^{\frac{1}{2}} + b$; 3) $x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$; 4) $a + 2a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} + b^{-1}$; 5) $a - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b$; 6) $x^{-2} - 2x^{-1}y^{\frac{1}{2}} + y$. **3.30.** 1) $(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$; 2) $(y^2 - \sqrt{5}) \times (y^2 + \sqrt{5})$; 3) $\left(x^{\frac{1}{3}} - 2\right)\left(x^{\frac{1}{3}} + 2\right)$; 4) $\left(y^{\frac{1}{5}} - 3\right)\left(y^{\frac{1}{5}} + 3\right)$; 5) $\left(5 - p^{\frac{2}{7}}\right) \times \left(5 + p^{\frac{2}{7}}\right)$; 6) $\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{4}}\right)$. **3.31.** $(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})$; 2) $(\sqrt{10} - \sqrt{y}) \times (\sqrt{10} + \sqrt{y})$; 3) $\left(a^{\frac{1}{32}} - 4\right)\left(a^{\frac{1}{32}} + 4\right)$; 4) $(3c^{0,15} - 2)(3c^{0,15} + 2)$; 5) $(a^{0,75} - y)(a^{0,75} + y)$; 6) $\left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{8}} - 7\right)\left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{8}} + 7\right)$. **3.32.** 1) $\left(x^{\frac{1}{2}} - 2\right)\left(x + 2x^{\frac{1}{2}} + 4\right)$; 2) $\left(y^{\frac{1}{2}} + 3\right) \times \left(y - 3y^{\frac{1}{2}} + 9\right)$; 3) $\left(p^{\frac{1}{3}} + 1\right)\left(p^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{1}{3}} + 1\right)$; 4) $\left(q^{\frac{2}{5}} - 5\right)\left(q^{\frac{4}{5}} + 5p^{\frac{2}{5}} + 25\right)$; 5) $\left(5 - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(25 + 5b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$; 6) $\left(y^{\frac{1}{3}} - \sqrt{2}\right)\left(y^{\frac{2}{3}} + \sqrt{2}y^{\frac{1}{3}} + 2\right)$; 7) $\left(a^{0,3} - 2b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{0,6} + 2a^{0,3}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$; 8) $\left(x^{\frac{1}{3}} + 10\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - 10x^{\frac{1}{3}} + 100\right)$; 9) $\left(a^{0,8} + b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{0,16} - a^{0,8}b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}\right)$.

3.33. 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{7}{6}}$; 6) $\frac{1}{cy}$; 7) $a^{\frac{31}{30}}x^{-\frac{4}{45}}$; 8) q. **3.34.** $(x^3)^2$; $(x^{20})^2$; $\left(x^{\frac{23}{2}}\right)^2$; $(x^{-7})^2$; $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^2$; $\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^2$; $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2$; $\left(x^{\frac{1}{8}}\right)^2$; $\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2$; $\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2$. **3.35.** $(y^2)^3$; $(y^{-7})^3$; $\left(y^{\frac{7}{3}}\right)^3$; $\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3$; $\left(y^{\frac{1}{6}}\right)^3$; $\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^3$; $\left(y^{-\frac{1}{9}}\right)^3$; $\left(y^{\frac{1}{15}}\right)^3$; $\left(y^{-\frac{3}{10}}\right)^3$. **3.36.** 1) 5; 2) 2. **3.37.** 1) $x = y^{\frac{3}{2}}$; 2) $x = y^{\frac{7}{4}}$; 3) $x = y^{-\frac{2}{3}}$; 4) $x = y^{-\frac{4}{3}}$; 5) $x = \left(\frac{y}{5}\right)^{\frac{5}{4}}$;

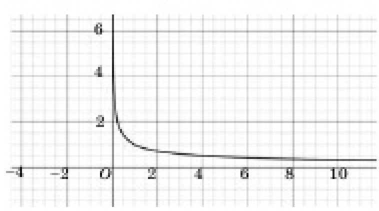
6) $x=(6y)^{-\frac{3}{2}}$. **3.38.** 1) 1; 2) x. **3.39.** 1) $1+C$; 2) $-2b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{4}}$; 3) $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}$; 4) $4a^{0,2}x^{0,2}$; 5) $x-y$; 6) $b^{\frac{3}{2}}-c^{\frac{3}{2}}$. **3.40.** 1) $x=25$; 2) $x=8$; 3) $x=9$; 4) $x=\frac{1}{32}$; 5) $x=1$; 6) $x=-25$. **3.41.** 1) $p+q$; 2) $b^6-2b^3c^3+c^6$; 3) $\left(a^{\frac{1}{3}}+2\right)^3$; 4) $\left(x^{\frac{2}{3}}-3\right)^3$.

3.42. 1) $-2,7m^{\frac{1}{2}}$; 2) $-240x^{0,1}$. **3.43.** 1) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}+1\right)$; 2) $\left(u^{\frac{1}{2}}-v^{\frac{1}{2}}\right)\times$ $\times\left(u^{\frac{1}{2}}+v^{\frac{1}{2}}+1\right)$; 3) $\left(a^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1\right)$; 5) $\left(x^{\frac{1}{2}}+4\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)$; 6) $\left(y^{\frac{1}{4}}-9\right)\times$ $\times\left(y^{\frac{1}{4}}-4\right)$. **3.44.** 1) $\left(x^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+1\right)$; 2) $\left(x^{\frac{1}{5}}-1\right)$ $\left(x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{2}{5}}+\right.$ $\left.+x^{\frac{1}{5}}+1\right)$; 3) $\left(x^{\frac{1}{6}}-1\right)\left(x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}+1\right)$. **3.45.** 1) $x=\frac{1}{y}$; 2) $x=y^2$; 3) $y=\frac{2\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$; 4) $y=\frac{4^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}}{3}$. **3.46.** $\frac{a-1}{2}$. **3.47.** 1) $(-2;\ -1)\cup(0;\ +\infty)$; 2) $\left(-2;-\frac{4}{5}\right)\cup(0;\ 1)$. **3.49.** 3) $3^{\frac{1}{2}}$; 5) $250^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $(x+1)^{\frac{9}{4}}$; **3.50.** 1) $x^{\frac{1}{6}}$; 3) $y^{\frac{-1}{21}}$; 6) $x^{\frac{1}{4}}$; 7) $x^{\frac{1}{2}}$; 9) 1. **3.51.** 1) $\frac{5\sqrt[3]{16}}{4}$; 2) $\frac{2\sqrt[4]{27^3}}{3}$; 4) $-\frac{2\sqrt[3]{49^2}}{49}$; 6) $-\frac{7}{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$; 8) $\frac{20}{11}\left(\sqrt{20}+\sqrt{9}\right)$. **3.52.** 1) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$; 3) $4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$. **3.53.** 1) $\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{b}$; 4) $\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{ab^3}+b$. **3.54.** 1) $\frac{27+3\sqrt{2}-9\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}}{79}$; 3) $\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}\right)\left(9+3\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}\right)}{9}$; 5) $\left(\sqrt[8]{5}-\sqrt[8]{3}\right)\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$; 6) $\frac{1}{3}\left(1-\sqrt[4]{2}\right)\times$ $\times\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)$. **3.55.** $x^2\sqrt[3]{y}$. **3.57.** 2) -1. **3.57.** Возведите в квадрат обе части равенства. **3.60.** 2) a^6-b^6. **3.61.** 2) $(-3;\ 1)$, $(3;\ -1)$. **3.62.** $\left(\frac{4}{3}\right)^0$, $\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{7}{11}}$, $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$. **3.63.** 4) $0,01^{-0,5}<0,01^{-0,6}$. **3.64.** 1) Возрастает.

3.65. 1)

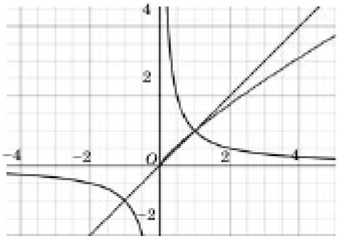


2)



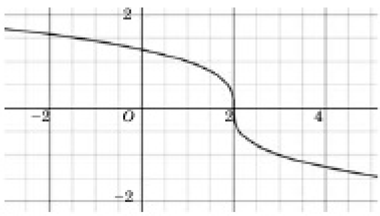
3.66. 1) $<$; 4) $<$; **3.67.** 1) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-0,2} < \left(\frac{3}{2}\right)^{0,2} < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{1}{15}} < \left(\frac{4}{25}\right)^{-4}$.

3.68. 1) Возрастает; 3) возрастает. **3.69.** График функции $y = x^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ пересекается с графиками функций $y = x$ и $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$.

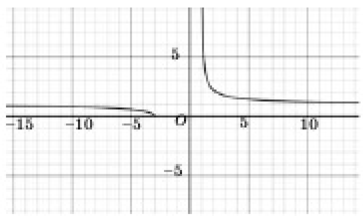


3.70. 1) $3\sqrt[4]{8}$; 4) $3\sqrt{2}$. **3.71** 1) 4.

3.73. 1)



3)



3.74. $|f(x)|$. **3.77.** $2\sqrt{a-1}$. **3.78.** 1) 1; **3.81.** Нет. **3.83.** 1) $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

3.84. 2) $\frac{2}{3t^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3t^{\frac{2}{3}}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$. **3.85.** 1) 0,5; 4) − 1. **3.87.** 3) $-\frac{8}{3}x^{-\frac{3}{2}} + C$;

4) $5x^{\frac{7}{5}} + C$. **3.88.** 1) $2x^{\frac{5}{2}} + C$. 3) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$. **3.90.** 2) $10x^{1,4} + C$. **3.92.** 1) $\frac{26}{5\sqrt[5]{4}}$.

3.93. 2) $\frac{4}{17}x^{\frac{17}{4}} + C$; 3) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$. **3.94.** 1) $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} + C$;

3) $4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{7}{2}} + C$. **3.95.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} - \frac{4}{6}$. **3.96.** 2) $-\frac{4}{x^{\frac{1}{3}}} + 2x^{\frac{5}{2}} + C$.

3.97. 4) $-\frac{8}{9}x^2\sqrt[4]{x} + C$. 6) $\frac{4}{\sqrt[3]{x}} + C$. **3.98.** $\frac{4}{3}$. **3.99.** 2) 8 **3.100.** 1) +; 2) +; 3) +;

4) 0. **3.101.** $\frac{513}{16}$.

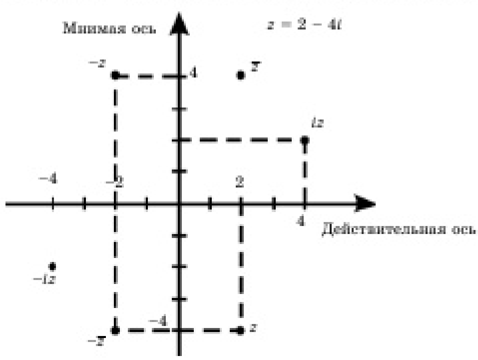
Раздел 4

4.2. 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) да. **4.3.** 1) Нет; 2) да; 3) нет. **4.4.** 1) $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$; 3) R; 4) $[-2;+\infty)$. **4.5.** 1) $[4;+\infty)$; 2) $x=0$. **4.7.** 1) -3; 3 2) -6; 6; 3) -6; 6; 4) -18. **4.7.** 1) 3; 2) 3; 3) 5; 4) 8. **4.8.** 1) $2+\sqrt{2}$; 2) 4; 3) 5; 4) 10. **4.9.** 1) 1; 3; 2) 5; 3) 0; 3; 4; 4) 2; 4. **4.10.** 1) (27; $-$ 1); 2) (4; 64); 3) (16; 81); 4) (20; 5). **4.11.** 1) 3; 2) 5; 3) 10; 4) 0; 0,4. **4.12** 1) 61; 2) 4; 3) $-$ 2; 4) 3. **4.13.** 1) 4; 2) 7; 3) 6; 4) $-$ 12. **4.14.** 1) (9; 1); 2) ($-$ 2; 4). **4.15.** 1) 84; 2) 0; 3) 630; 4) $-$ 2; 2. **4.16.** 1) 0; 2) 0; 3) 7; 8; 4) 1. **4.17.** 1) $\varnothing$; 2) 4; 3) 1; 4) 2. **4.18.** 1) $-$ 6; $-$ 1; 2) 0; 1; 3) 1; 4) $-1\frac{1}{3}$; 5) $-$ 1; 4; 6) $-$ 4,5; 3. **4.19.** 1) $\frac{5}{3}$; 3) $-$ 1,25; 4) $\frac{1}{3}$. **4.20.** 2) (4; 4). **4.21.** 1) (2; 4). **4.23.** 1) $\varnothing$; 2) [2; 3]. **4.25.** 1) $4\pi n$. **4.26.** $a\in[-3-2\sqrt{6};-3]\cup\{5\}$. **4.28.** 1) $[-3;1]$; 2) [3; 28); 3) [3; $+\infty$); 4) [$-$ 5; 11). **4.29.** 1) [5; 7). **4.30.** 1) $\left(-\infty;\frac{3}{5}\right)$; 2) $\varnothing$; $(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$; 4) (18; $+\infty$). **4.31.** 1) $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$; 2) $(-\sqrt{14};\ \sqrt{14})$; 3) $(-\infty;-8)\cup(-2;+\infty)$. **4.32.** 1) $(-5{,}25;-3]\cup[-1{,}25;1)$; 2) $(-\infty;-2{,}5)\cup$ $\cup\,(3;+\infty)$; 3) $(-1;0]\cup[1;2)$; 4) [0; 6]. **4.36.** 1) ($-\infty$; 3); 2) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{3}{4};2\right)$; 4) {1}. **4.37.** 1) [0; 3]; 2) (3; $+\infty$). **4.38.** 1) $\varnothing$; 2) $\left[-18;\frac{-3+\sqrt{65}}{2}\right)$. **4.39.** 1) $[16-a;+\infty)$; 2) $\left(-\frac{a}{2};+\infty\right]$. **4.40.** 1) $\left[-3;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$; 2) $(3-\sqrt{13};\ 3+\sqrt{13})$. **4.42.** $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Раздел 5

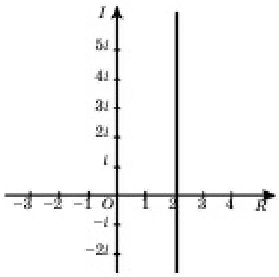
5.3. 1) 2; $-$ 4; $2-3i$. **5.4.** 1) $9i$; 2) $0{,}25i$. **5.5.** 1) 5; 2) 13. **5.6.** 1) $\sqrt{13}$; 2) 4. **5.7.** 1) ($-$ 2; 1), (1; $-$ 2), (2; 1), (1; 2). **5.8.** 1) (1; 4), ($-$ 1; 4).

5.9.

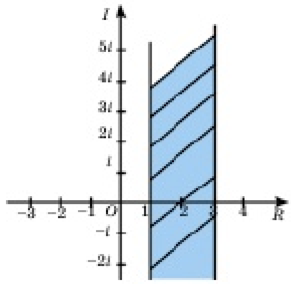


5.10. $|z_1| = 2$, $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}$, $|z_2| = 2\sqrt{2}$, $\varphi_2 = -\dfrac{3\pi}{4}$.

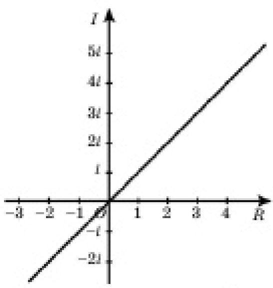
5.14. 1)



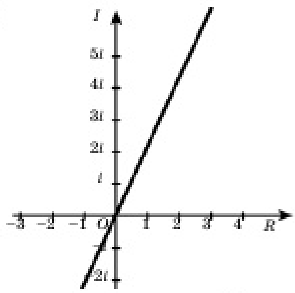
2)



3)

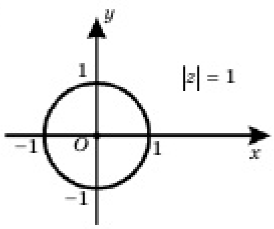


4)

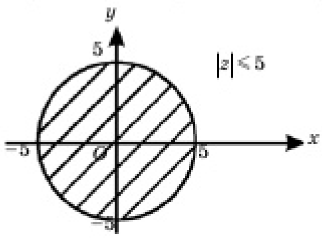


5.15. 1) Окружность радиуса 5 с центром в начале координат; 2) круг радиуса 6 с центром в начале координат; 3) круг радиуса 3 с центром в точке (2;1).

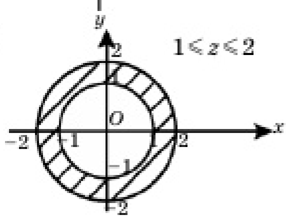
5.16. 1)



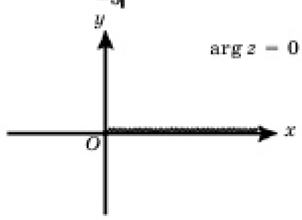
2)



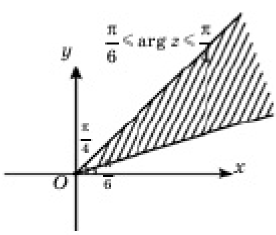
3)



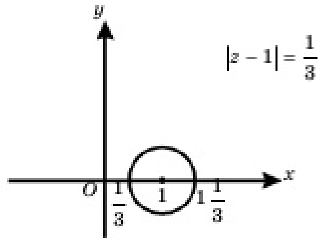
4)



5)



6)



5.19. 1) $10i + 14$; 4) $21i + 12$. **5.20.** 3) $40 + 42i$; 5) $43 + 76i$. **5.21.** 1) $8 + i$; 4) 0; 5) -39. **5.22.** $p = \frac{3}{25}$, $q = -\frac{4}{25}$. **5.23.** 1) $\mathrm{Re}(z) = \frac{5}{169}$, $\mathrm{Im}(z) = -\frac{12}{169}$; 4) $\mathrm{Re}(z) = \frac{6}{37}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{37}$.**5.24.** 1) $a = 5, b = 2$; 4) $a = b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. **5.25.** 1) $0{,}5i + 2{,}5$; 4) $\frac{11}{10}i + \frac{4}{5}$. **5.26.** 1) $-\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$. **5.27.** 1) $-2-2i$; 2) $-0{,}25 + 0{,}25i$. **5.28.** 1) ± 2; 2) $\pm 2i$; 3) $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i\right)$; 4) $\pm\left(-\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}i\right)$. **5.31.** 1) $x = 1$; $y = 2$; 2) $x = 3$; $y = -2$. **5.32.** 1) $\pm(4 - 3i)$; 2) $\pm(16 - 2i)$. **5.33.** 1) i; 2) i; 3) $0{,}5i + 0{,}25i$. **5.34.** 3) $-\frac{3}{58} - \frac{7}{58}i$; 4) $-i$. **5.35.** $-i$, $-1i$; если $n = 4k + 1 \Rightarrow \frac{1}{i^n} = -i$; если $n = 4k + 2 \Rightarrow \frac{1}{i^n} = -1$; если $n = 4k + 3 \Rightarrow \frac{1}{i^n} = i$; если $n = 4k \Rightarrow \frac{1}{i^n} = 1$. **5.36.** 1) $-2-3i$; 2) $\frac{pr+qs}{r^2+s^2} + \frac{qr-ps}{r^2+s^2}i$. **5.37.** 1) $-0{,}2i$; 2) $-7i + 3$. **5.38.** 1) $4 - 4i$. **5.39.** 1. **5.43.** 1) $1\frac{5}{13} - \frac{i}{13}$; 2) $0{,}72 + 0{,}96i$. **5.44.** 1) $x = 1\frac{1}{3}$, $y = 1\frac{2}{3}$; 4) $x = 10$, $y = 6$. **5.45.** 1) $-64(i + 1)$; 2) -1. **5.46.** 2) $x = 1$, $y = 2$; 3) $x = 0$, $y = -\frac{2}{3}$. **5.47.** 1) $z = 2 - i$. **5.48.** $z = -1 \pm \sqrt{3}i$. **5.50.** 4) $a = -7$, $b = 11$. **5.51.** Возведите в квадрат обе части равенства. **5.54.** 1) $x = \pm 3i$; 4) $x = \pm 5$. **5.55.** 1) 0, ± 2. **5.56.** 1) $\pm\sqrt{2}$, $\pm i\sqrt{3}$; 3) ± 3, $\pm 3i$. **5.57.** 1) $5 \pm 2i$; 2) $-3 \pm 4i$. **5.58.** 3) $(x - \sqrt{7}i)(x + \sqrt{7}i)$. **5.59.** 1) $-1 \pm i$; 6) $-2 \pm \sqrt{2}i$. **5.60.** 1) ± 1, $\pm\sqrt{3}i$; 6) $\pm i$. **5.61.** $z^2 - 4z + 7 = 0$. **5.62.** 1) $z = -2i \pm 3$; 2) $z = 3i \pm 1$. **5.63.** 1) $\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; 2) $(x - 1)(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$. **5.64.** $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 1 - 3i$, $z_3 = -\frac{4}{3}$. **5.65.** $-1 \pm \sqrt{3}i$. **5.66.** 1) $1 - 2i$; 2) $z = -1{,}5$, $k = 15$. **5.67.** 1) $p = -78$; 2) $2 \pm 3i$. **5.68.** $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -5$. **5.69.** $p = -1$, $q = 7$, $z_2 = 1 - 2i$. **5.70.** 1) $(x+3)\left(x - \frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right)$. **5.71.** 1) $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_{3/4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел-повторение. ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИАЛА, ПРОЙДЕННОГО В 10 КЛАССЕ

Раздел 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Раздел 2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Раздел 3. СТЕПЕНИ И КОРНИ. СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Раздел 4. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Раздел 5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Учебное издание

Шыныбеков Абдухали Насырулы
Шыныбеков Данияр Абдухалиулы
Жумабаев Ринат Нурланович

АЛГЕБРА

Учебник для 11 класса общеобразовательной школы
естественно-математического направления

В двух частях

Часть 1

Редактор *А. Изтлеуова*
Художественный редактор *А. Лукманов*
Технический редактор *О. Рысалиева*
Корректор *Ю. Гюльоглу*
Компьютерная верстка *Е. Огурцовой*

ИБ 051

Сдано в набор 28.03.2019. Подписано в печать 25.06.2020. Формат 60х90 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Школьная». Усл. печ.л. 12,0.
Учет.-изд. л. 8,8. Тираж 6000 экз. Заказ № 5191.

ТОО «Корпорация «Атамұра», 050000, г. Алматы, пр. Абылай хана, 75.

Полиграфкомбинат ТОО «Корпорация «Атамұра», Республика Казахстан, 050002,
г. Алматы, ул. М. Макатаева, 41.

Оглавление

page34
page35
page36
page37
page38
page39
page40
page41
page42
page43
page44
page45
page46
page47
page48
page49
page50
page51
page52
page53
page54
page55
page56
page57
page58
page59
page60
page61
page62
page63
page64

page69
page70
page71
page72
page73
page74
page75
page76
page77
page78
page79
page80
page81
page82
page83
page84
page85
page86
page87
page88
page89
page90
page91
page92
page93
page94
page95
page96
page97
page98
page99

page104
page105
page106
page107
page108
page109
page110
page111
page112
page113
page114
page115
page116
page117
page118
page119
page120
page121
page122
page123
page124
page125
page126
page127
page128
page129
page130
page131
page132
page133
page134

page139
page140
page141
page142
page143
page144
page145
page146
page147
page148
page149
page150
page151
page152
page153
page154
page155
page156
page157
page158
page159
page160
page161
page162
page163
page164
page165
page166
page167
page168
page169

page174
page175
page176
page177
page178
page179
page180
page181
page182
page183
page184
page185
page186
page187
page188
page189
page190
page191
page192