А. Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д. А. ШЫНЫБЕКОВ, Р. Н. ЖУМАБАЕВ

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА АНАЛИЗА

В двух частях

Часть 2

Учебник для 11 класса общеобразовательной школы
естественно-математического направления

11

Рекомендовано Министерством образования и науки
Республики Казахстан

Алматы «Атамұра» 2020

1–5192

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72
Ш 98

Учебник подготовлен в соответствии с Типовой учебной программой обновленного содержания по предмету «Алгебра» для 11 класса уровня общего среднего образования, утвержденной Министерством образования и науки РК.

Под редакцией **М. Отелбаева** – доктора физико-математических наук, профессора, академика НАН Республики Казахстан.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- Вопросы по основным материалам
- Материалы из истории математики
- Практические и творческие работы
- A — Задачи первого уровня сложности
- B — Задачи второго уровня сложности
- C — Задачи третьего уровня сложности
- ✻ — Задачи повышенной трудности, материал для классов с углубленным изучением математики
- ▲ — Начало решения задачи, доказательства теоремы
- ■ — Конец решения задачи, доказательства теоремы

Шыныбеков А.Н. и др.
Ш 98 **Алгебра и начала анализа:** Учебник для 11 кл. общеобразоват. шк. ест.-мат. направления: в 2 ч. / А.Н. Шыныбеков, Д.А. Шыныбеков, Р.Н. Жумабаев. – Алматы: Атамұра, 2020. – 144 с.

ISBN 978-601-331-741-0

ч. 2 – 2020. – 144 с.
ISBN 978-601-331-742-7

ISBN 978-601-331-742-7 – (ч.2)
ISBN 978-601-331-741-0

ВВЕДЕНИЕ

Данный учебник, предназначенный для учащихся 11 класса средней общеобразовательной школы, составлен в соответствии с обновленной учебной программой и охватывает все цели обучения. Для эффективного использования учебного времени даются ссылки на онлайн-ресурсы (графические онлайн-калькуляторы, учебные программы). Заметим, что материалы, включенные в программу для классов с углубленным изучением математики, отмечены звездочкой (*). Кроме того, задачи группы C также в первую очередь предназначены для учеников классов с углубленным изучением математики. Ученики, проявляющие повышенный интерес к математике, могут выполнять данные задания самостоятельно во внеучебное время. Это особенно важно для учеников, которые принимают участие в математических олимпиадах и других конкурсах.

Пользуясь этим учебником, нужно придерживаться следующих принципов: в конце каждого раздела вам необходимо выполнить задания для закрепления пройденного материала. Каждый ученик должен изучить и выполнить задания группы A, и только после этого переходить по очереди к решению задач групп B и C. Кроме того, после изучения каждого раздела полезно проверять себя, отвечая на контрольные теоретические вопросы.

Любознательность, упорство и самоотдача приведут вас к успеху!

Работа с графическим онлайн-калькулятором (https://www.desmos.com/calculator)

Desmos – это графический онлайн-калькулятор, полезный тем, кому необходимо быстро и просто построить график функции.

Полное руководство по работе с графическим калькулятором можно скачать бесплатно, перейдя по следующей ссылке:

https://desmos.s3.amazonaws.com/Desmos_User_Guide_RU.pdf

Раздел 6. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Согласно статистическим данным Министерства национальной экономики, численность населения Казахстана на начало 2016 года составляла 17669896 человек, а на начало 2017 года – 17918214 человек. По мере изучения раздела, вы узнаете, как с помощью показательной и логарифмической функций можно определить время, за которое численность населения нашей страны превысит 20 миллионов человек.

Вы уже изучили многие функции и их применение к решению различных задач. Теперь вы приступаете к изучению показательной и логарифмической функций, которые используются в науке и окружающей нас действительности. Спектр их применения очень широк: медицина, естественные науки. Математические модели многих природных явлений и процессов описываются с помощью этих функций, их производных и интегралов. Знание показательной и логарифмической функций поможет вам в будущем в анализе и исследовании различных процессов.

Содержание раздела

6.1. Показательная функция, ее свойства и график

Изучив пункт, вы:

- узнаете определение показательной функции и научитесь строить ее график;

- познакомитесь с числом *e*, узнаете о свойствах показательной функции с основанием, равным *e*, и научитесь применять ее при решении практических задач;
- узнаете, как применять свойства показательной функции при решении задач.

6.1.1. Определение показательной функции

Иногда нам приходится иметь дело с числами, умноженными на себя несколько раз. Для таких выражений мы используем понятие степени. Например, $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. Это понятие применяется в инженерной отрасли, физике, биологии и информатике. В задачах показатель степени может увеличиваться или уменьшаться с течением времени. В качестве примеров таких явлений можно назвать экспоненциальный рост или спад.

По легенде шахматы создал изобретатель по имени Сета. Древнему индийскому царю настолько понравилась игра в шахматы, что он решил наградить Сету за это изобретение. Царь приказал привести изобретателя во дворец и, спросив его о награде, пообещал выполнить любое желание Сеты. За первую из 64 клеток шахматной доски Сета попросил 1 зерно, за вторую – 2 зерна, за третью – 4 зерна, за четвертую – 8 зерен и т.д., другими словами за каждую клетку шахматной доски он попросил в два раза больше зерна, чем за предыдущую. Царя сначала удивило «ничтожное» желание Сеты, и все же он приказал выполнить его. Но позже, когда царь понял, что всей его казны недостаточно для исполнения желания изобретателя, он пожалел о своем обещании.

Ответьте на следующие вопросы.

1. Имеется ли функция, описывающая число зерен на каждой клетке шахматной доски?

2. Сколько зерен будет на 40-й клетке?

3. С помощью прогрессии найдите количество зерен, которое царь должен был выдать в качестве награды.

При изучении степенной функции мы рассмотрели определение степени с положительным основанием и любым действительным показателем. Например, имеют смысл числа $2^{-\frac{1}{3}}$, $2^{-\sqrt{2}}$, 2^0, $2^{-\frac{1}{4}}$, $2^{\sqrt{3}}$

и т.д. Таким образом, считая показатель степени x переменной величиной $x \in (-\infty; +\infty)$, мы получаем функцию $y = 2^x$. Ее называют ***показательной функцией*** с основанием 2.

Определение. *Если $a > 0$, $a \neq 1$, то функция $y = a^x$ называется показательной функцией с основанием a. Здесь $x \in (-\infty; +\infty)$.*

Например, показательными являются функции $y = 3^x$, $y = 10^x$, $y = 0{,}2^x$, $y = \dfrac{1}{2^x}$, $y = \sqrt{2}^{\,x}$. Условия $a > 0$, $a \neq 1$ в определении показательной функции очень важны. Во-первых, из того, что степень с действительным показателем определена только для степеней с положительным основанием, вытекает необходимость выполнения условия $a > 0$. Во-вторых, если взять $a = 1$, то при всех значениях $x \in (-\infty; +\infty)$ функция принимает одно и то же значение $y = a^x = 1^x = 1$ и не зависит от x.

6.1.2. Свойства показательной функции

Итак, будем считать, что показательная функция $y = a^x$ определена при $a > 0$ и $a \neq 1$. Показательная функция обладает следующими свойствами.

1°. *Область определения показательной функции такова*: $(-\infty; +\infty)$.

2°. *Область значений показательной функции такова*: $(0; +\infty)$, *т.е. для всех $x \in (-\infty; +\infty)$ выполняется неравенство $a^x > 0$.*

3°. 1) *Если $a > 1$ и $x > 0$, то $a^x > 1$;*

2) *если $a > 1$ и $x < 0$, то $a^x < 1$;*

3) *если $a < 1$ и $x > 0$, то $a^x < 1$;*

4) *если $a < 1$ и $x < 0$, то $a^x > 1$;*

5) *если $a > 0$ и $x = 0$, то $a^0 = 1$.*

4°. *Если $a > 1$, то показательная функция $y = a^x$ является возрастающей, т.е. для любых действительных чисел x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $a^{x_1} < a^{x_2}$.*

5°. *Если $0 < a < 1$, то показательная функция $y = a^x$ является убывающей, т.е. для любых действительных чисел x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$.*

▲ 1°. Доказательство этого свойства вытекает из определения.

2°. Мы знаем, что степень с положительным основанием и рациональным показателем является положительным числом, т.е. если число x – рациональное, то имеет место неравенство $a^x > 0$. Тогда неравенство $a^x > 0$ выполняется и для любого иррационального числа x.

3°. 1) Если $a > 1$ и $x > 0$, то согласно свойству степени с действительным показателем $a^x > 1^x = 1$. 2) Если $a > 1$ и $x < 0$, то $a^x < 1^x = 1$. Пункты 3) и 4) доказываются аналогично. Доказательство пункта 5) следует из определения степени с показателем, равным 0.

4°. Пусть $a > 1$ и $x_1 < x_2$. Тогда $a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1} - 1\right) > 0$, т.к. из $x_2 - x_1 > 0$ следует $a^{x_2-x_1} - 1 > 0$. Следовательно, $a^{x_2} > a^{x_1}$.

5°. Пусть $0 < a < 1$ и $x_1 < x_2$. Тогда $a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1} - 1\right)$, т.к. $a^{x_1} > 0$, а из $x_2 - x_1 > 0$ и $0 < a < 1$ следует $a^{x_2-x_1} < 1$.

Свойства полностью доказаны. ■

6.1.3. График показательной функции

Начнем с построения графиков функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ с помощью таблицы их значений.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Отметив найденные точки на координатной плоскости, соединим их линией. Получим графики функций $y = 2^x$ (рис. 6.1) и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 6.2).

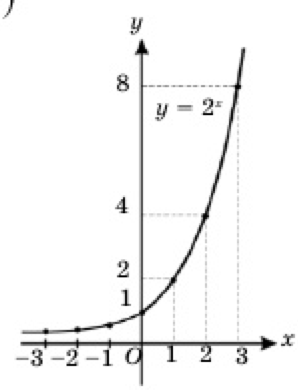


Рис. 6.1

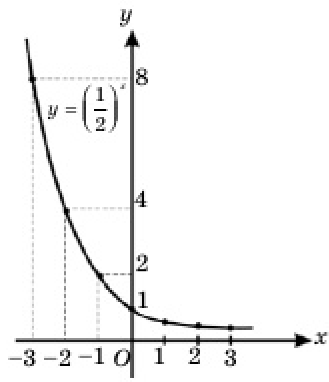


Рис. 6.2

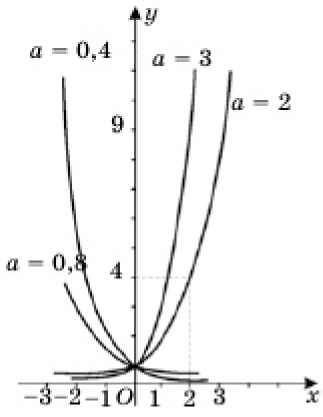


Рис. 6.3

Пусть $1 < a < b$. Согласно свойству степени, если $x > 0$, то выполняется неравенство $a^x < b^x$, а если $x < 0$, то выполняется неравенство $a^x > b^x$.

Пусть теперь $0 < a < b < 1$. Если $x > 0$, то выполняется неравенство $a^x < b^x$, если $x < 0$, то имеет место неравенство $a^x > b^x$. Следовательно, чем больше единицы основание a, тем «быстрее растет» показательная функция $y = a^x$, чем меньше единицы основание a, тем «быстрее убывает» показательная функция $y = a^x$. Например, на рисунке 6.3 изображены графики показательных функций с основаниями $a = 0,8$, $a = 0,4$, $a = 3$, $a = 2$.

6.1.4. Число *e*. Показательная функция с основанием *e*

В науке, технике, а также при решении задач в повседневной жизни часто встречается показательная функция, основание которой равно числу $e \approx 2,7183$. Число e занимает особое место в математике. Как и число π оно является иррациональным. Нам известно, что значение числа π выражает отношение длины окружности к ее диаметру. Число e тоже имеет свой математический смысл. Чтобы выяснить его, рассмотрим следующий пример.

Практическая работа

Сумма, начисленная по депозиту с непрерывным сложным процентом, вычисляется по следующей формуле: $u_n = u_0(1 + i)^n$, где u_n – конечная сумма, u_0 – первоначальная сумма вклада, i – процентный прирост за ограниченный промежуток времени, а n – количество периодов начисления процентов на счет вкладчика. Рассчитаем конечную сумму за большой период времени.

Сначала решите следующую задачу.

На депозит внесена сумма 100000 тг с годовой процентной ставкой 10%. С помощью калькулятора посчитайте сумму, которая будет на счете вкладчика через год, если начисления производятся:

1) 1 раз в год ($n = 1$, $i = 10\% = 0,1$); 2) ежеквартально ($n = 4$, $i = \frac{10\%}{4} = 0,025$); 3) каждый месяц; 4) каждый день; 5) каждую секунду; 6) каждую миллисекунду.

Прокомментируйте полученные результаты.

Если i – годовая процентная ставка, t – количество лет, N – количество начислений процентов в год, то $i = \dfrac{t}{N}$ и $n = Nt$. Следовательно, формула для вычисления наращенной суммы имеет вид:

$$u_n = u_0\left(1+\frac{t}{N}\right)^{Nt}.$$

Если ввести обозначение $a = \dfrac{N}{t}$, то последняя формула запишется в виде $u_n = u_0\left(\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^{a}\right)^{t^2}$. Заполните с помощью калькулятора таблицу 6.1. Убедитесь, что при увеличении a получим

a	$\left(1+\frac{1}{a}\right)^a$
10	
100	
1000	
10000	
100000	
...	

Таблица 6.1

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^a \approx 2{,}71828182\ \ldots$$

Значение предела $\lim\limits_{a\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^a$ называют числом e:

$$e \approx 2{,}71.$$

Таким образом, конечная сумма депозита с непрерывным сложным процентом может быть рассчитана по формуле $u_n = u_0e^{rt}$, где u_0 – первоначальная сумма вклада, r – годовая процентная ставка, t – количество лет.

С помощью полученной формулы вычислите конечную сумму, если 10000 тг были внесены на депозит с годовой процентной ставкой 10% на 4 года.

Ряд вида

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \ldots$$

имеет бесконечное количество членов. Доказано, что сумма этого ряда может быть выражена с помощью показательной функции с основанием e:

$$f(x) = e^x.$$

Проверьте это утверждение на примере, вычислив сумму пяти первых членов этого ряда при $x = 1$ и сравнив найденное значение с $f(1)$.

Практическое применение показательной функции.

1) При благоприятных условиях (отсутствие врагов, достаточное количество пищи) размножение живых организмов происходит по закону показательной функции. Например, одна комнатная муха за лето может произвести $8 \cdot 10^{14}$ особей потомства. Их вес составил бы несколько миллионов тонн. Но так как, кроме мух имеются и другие животные и растения, препятствующие их размножению, количество мух не достигает вышеуказанных значений.

Рост количества различных бактерий и микроорганизмов подчиняется следующему закону: $N = N_0 e^{kt}$, где N_0 – начальное количество бактерий и микроорганизмов, k – постоянный коэффициент, t – время.

2) Радиоактивное вещество распадается по закону $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$.

Здесь m – масса вещества в момент времени t, m_0 – начальная масса вещества (t=0), а T – период полураспада. С помощью этого закона ученые вычислили возраст Земли.

3) Рост населения за небольшой промежуток времени описывается формулой $N = N_0 e^{kt}$. Здесь N_0 – начальное количество населения ($t = 0$), N – количество населения в момент времени t, k – постоянная величина.

4) В прикладной математике встречаются самые разнообразные задачи. Одна из них – задача о расчете массы топлива M, необходимого для достижения ракетой скорости v. Эта масса зависит от массы самой ракеты m и скорости истечения продуктов сгорания топлива из ракетного двигателя v_0. Если не учитывать силу земного притяжения, необходимая масса топлива вычисляется по формуле $M = m(e^{v/v_0} - 1)$ (формула К.Э. Циолковского). Например, для того, чтобы ракета весом 1,5 т достигла скорости 8000 м/с при скорости истечения газов 2000 м/с, необходимо около 80 т топлива.

5) Если выключить чайник с кипящей водой, то сначала она быстро остывает, но по истечении некоторого времени скорость охлаждения воды уменьшается. Изменение температуры воды выражается формулой

$$T = (T_1 - T_0)e^{-kt} + T_1.$$

1. Какую функцию называют показательной?
2. Почему для определения показательной функции необходимо выполнение условий $a > 0$, $a \neq 1$?
3. Сформулируйте и докажите свойства показательной функции.
4. Постройте графики функций $y = 4^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Упражнения

А

6.1. При каких значениях x значение выражения 3^x:
1) больше 1; 2) меньше 1; 3) равно 1?

6.2. При каких значениях x значение выражения $0{,}3^x$:
1) больше 1; 2) меньше 1; 3) равно 1??

6.3. Постройте график функции. Найдите область определения и множество значений функции.

1) $f(x) = 3^x$; 2) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $f(x) = 5^x$; 4) $f(x) = 0{,}3^x$.

6.4. Найдите область определения функции:

1) $y = e^{\frac{x-1}{x+3}}$; 2) $y = e^{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

6.5. Возрастает или убывает данная функция? Постройте график функции.

1) $y = e^{3-x}$; 2) $y = e^{2x-5}$.

Практическая работа

6.6. Площадь пораженных саранчой полей определяется формулой $A_n = 1000 \cdot 2^{0,2n}$ га, где n – количество недель. Найдите:
1) начальную площадь полей, пораженных саранчой;
2) площадь полей, пораженных саранчой через 10 недель.

6.7. В благоприятных условиях бактерии размножаются очень быстро. Их масса растет по закону $W_t = 100 \cdot 2^{0,1t}$ (в граммах), где t – время (в часах).
1) Найдите начальную массу бактерий; 2) определите массу бактерий через 4 ч; 3) постройте график зависимости массы бактерий от времени.

6.8. Планируется восстановить исчезнувшую популяцию тигров. В 2018 г. были завезены 6 пар тигров. Рост популяции тигров определяется законом $N_t = N_0 \cdot 2^{0,18t}$, где N_0 – начальное количество тигров, t – время (в годах). Вычислите: 1) количество тигров, ожидаемое в 2030 г.; 2) процентный прирост в период с 2018 г. по 2030 г.

B

6.9. Сравните числа:

1) $2^{1,5}$ и $2^{\sqrt{2}}$; 2) $2^{\frac{1}{3}}$ и $2^{0,3}$; 3) $3^{0,1}$ и 3^{0};

4) $3^{-0,1}$ и 3^{0}; 5) $2^{-1,42}$ и $2^{-\sqrt{2}}$; 6) $2^{\frac{1}{7}}$ и $2^{0,143}$.

Практическая работа

6.10. Радиоактивное вещество распадается согласно закону $M = 250 \cdot 0,998^t$, где M – масса (г), t – время (годы). Найдите: 1) начальную массу радиоактивного вещества; 2) массу радиоактивного вещества через 400 лет; 3) время, за которое вещество распадется до 125 г (воспользуйтесь графическим калькулятором).

6.11. Жидкость поместили в морозильник. Скорость изменения температуры жидкости определяется по формуле $T(t) = 100 \times 2^{-0,02t}$, где T – температура (C^0), t – время (мин). Вычислите: 1) начальную температуру жидкости; 2) температуру жидкости через 15 мин; 3) температуру жидкости через 20 мин (воспользуйтесь калькулятором).

6.12. Постройте график функции. Найдите область определения и множество значений функции.

1) $f(x) = 3^x + 1$; 2) $f(x) = 3^{x-1}$; 3) $f(x) = 3^{|x|}$; 4) $f(x) = 3^{-|x|}$.

6.13. Возрастает или убывает данная функция?

1) $f(x) = \sqrt{5^x}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5^x}}$; 3) $f(x) = \left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^x$;

4) $f(x) = \left(\dfrac{2}{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x$; 5) $f(x) = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$; 6) $f(x) = \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^x$;

7) $f(x) = \left(4 - \sqrt{7}\right)^x$; 8) $f(x) = \left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{9}\right)^x$.

6.14. Имеет ли корень данное уравнение? Если да, то каков знак корня?

1) $5^x = 6$; 2) $5^x = \dfrac{1}{6}$; 3) $5^x = 0{,}01$;

4) $5^x = 100$; 5) $5^x = -1$.

6.15*. При каких значениях a из неравенства $a^m > a^n$ следует неравенство $m < n$?

6.16. Постройте график функции:

1) $y = e^{-|x|}$; 2) $y = e^{|x-1|}$;

3) $y = e^{|x|-1}$; 4) $y = \left|e^{|x|-1} - 1\right|$.

C

6.17. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \left(2 - \sqrt{3}\right)^x$ на отрезке $[-1; 1]$.

6.18. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \left(\sqrt{17} - 3\right)^x$ на отрезке $[0; 1]$.

6.19. С помощью графического онлайн-калькулятора постройте графики функций $y = \sqrt{2^x}$ и $y = \sqrt{3^x}$ на одной координатной плоскости.

1) Решите уравнение $\sqrt{3^x} = \sqrt{2^x}$;

2) решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{3^x}} < \dfrac{1}{\sqrt{2^x}}$.

6.20. Постройте график функции $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

6.21*. Закон распада радиоактивного вещества описывается формулой $m = m_0 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, где m – масса вещества в момент времени t, m_0 – начальная масса вещества ($t = 0$), T – период полураспада. В контейнере имеется два радиоактивных вещества, массы которых равны 50 г и 20 г соответственно. Период полураспада первого вещества равен 1 ч, а второго – 2 ч.

1) Постройте график изменения массы каждого вещества.

2) Постройте график изменения общей массы двух веществ.

Упражнения для повторения

6.22. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 4(x-1)-2(x+1)>0, \\ 3x-1-4(x-10)<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+8-(2x-5)<0, \\ 2(6x-4)-3(x+1)>0. \end{cases}$

6.23. Вычислите:

1) $\dfrac{a-4\cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}+2a^{\frac{1}{2}}}$, если $a=81$; 2) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-9\cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}-3a^{\frac{1}{6}}}$, если $a=64$.

6.24. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если:

1) $\begin{cases} a_4+a_{11}=0,2, \\ a_9-a_5=2,4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_2+a_4=18, \\ a_3\cdot a_5=144. \end{cases}$

6.2. Логарифм и его свойства

Изучив пункт, вы:

- узнаете определение логарифма числа;
- познакомитесь с десятичными и натуральными логарифмами;
- изучите свойства логарифма;
- научитесь применять свойства логарифмов в преобразовании логарифмических выражений.

6.2.1. Определение логарифма

Рассмотрим уравнение $a^x=b$, $(a>0,\ a\neq 1)$. Корень этого уравнения равен абсциссе точки пересечения графика показательной функции $y=a^x$ и прямой $y=b$. Из рисунка 6.4 мы видим, что если $b>0$, то график функции $y=a^x$ пересекается с прямой $y=b$ только в одной точке. Если же $b\leqslant 0$, то, как видно из рисунка 6.5, график функции $y=a^x$ не пересекается с прямой $y=b$. Следовательно, при $b>0$ уравнение $a^x=b$ имеет единственный корень $(x=c)$, а при $b\leqslant 0$ уравнение не имеет корней. Корень уравнения $a^x=b$, где $b>0$, называют ***логарифмом*** числа b по основанию a.

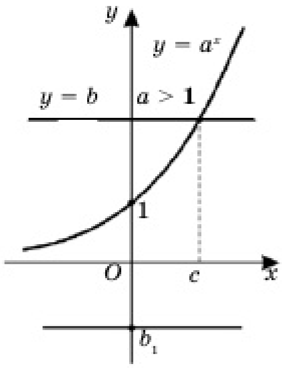


Рис. 6.4

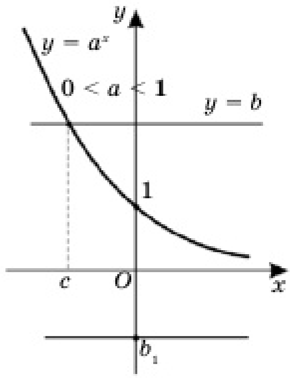


Рис. 6.5

Определение. *Логарифмом положительного числа b по положительному и не равному единице основанию a называют показатель степени c, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b, т.е. логарифмом числа $b > 0$ по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называют число c, удовлетворяющее равенству*

$$a^c = b. \tag{1}$$

Логарифм числа b по основанию a обозначают так: $\log_a b$.

Согласно определению, равенство (1) можно переписать в виде

$$b = a^{\log_a b}. \tag{2}$$

Равенство (2) называют *основным логарифмическим тождеством*.

Пример 1. Вычислим: 1) $\log_3 81$; 2) $\log_2 0{,}125$.

▲ 1) $81 = 3^4$, поэтому по определению $\log_3 81 = 4$;

2) $0{,}125 = \dfrac{1}{8} = 2^{-3}$, следовательно, $\log_2 0{,}125 = -3$. ■

6.2.2. Основные свойства логарифмов

Для любых чисел $a > 0$ ($a \neq 1$), $b > 0$, $c > 0$ справедливы следующие равенства:

1°) $\log_a 1 = 0$;

2°) $\log_a a = 1$;

3°) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$;

4°) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;

5°) $\log_a b^m = m\log_a b$, $m \in R$;

6°) $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b$, $n \in R$, $n \neq 0$;

7°) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1$.

8°) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$;

9°) $\log_m a \cdot \log_n b = \log_n a \cdot \log_m b$, $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

▲ **Доказательство** свойств 1° и 2° вытекает из определения логарифма.

Доказательство свойства 3°. Введем обозначения $\log_a b = u$, $\log_a c = v$. Тогда согласно (2) получим следующие равенства

$$b = a^u, \ c = a^v \tag{3}$$

Из равенств (3) в силу свойств степени мы видим, что $b \cdot c = a^{u+v}$. Отсюда по определению логарифма получим равенство

$$\log_a bc = u + v = \log_a b + \log_a c.$$

Доказательство свойства 4°. Из (3) вытекает равенство $\dfrac{b}{c} = a^{u-v}$. Тогда из определения логарифма получим равенство

$$\log_a \frac{b}{c} = u - v = \log_a b - \log_a c.$$

Доказательство свойства 5°. Если $\log_a b = u$, то $b = a^u$. Из равенства $b^m = a^{mu}$ и определения логарифма следует

$$\log_a b^m = m \cdot u = m\log_a b.$$

Доказательство свойства 6°. Согласно равенству (2)

$$\left(a^n\right)^{\log_{a^n} b} = b, \ a^{\log_{a^n} b} = \left[\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{\log_{a^n} b} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}\log_{a^n} b}.$$

Следовательно, $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b$.

Логарифмирование – это преобразование, при котором логарифм выражения с переменными приводится к сумме или разности логарифмов переменных.

Доказательство свойства 7°. Прологарифмируем обе части равенства $a^{\log_a b} = b$ по основанию c. Получим $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. Следовательно, $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Доказательство свойства 8°. Покажем выполнение равенства $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

$\log_a b = c \Rightarrow a^c = b$, $\log_b a = d \Rightarrow b^d = a$.

$(b^d)^c = b \Rightarrow b^{dc} = b \Rightarrow dc = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{d} \Rightarrow \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$. ■

Работа в группе

Применяя свойства 7°, 8°, докажите свойство 9°:
$\log_m a \cdot \log_n b = \log_n a \cdot \log_m b, \quad a, b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1.$
Быстрый способ определения знака числа $\log_a b$:
если $a > 1$, $b > 1$ или $0 < a$, $b < 1$, то $\log_a b > 0$;
если $a > 1$, $0 < b < 1$ или $0 < a < 1$, $b > 1$, то $\log_a b < 0$.

Пример 2. Вычислим: 1) $\log_2 16$; 2) $\log_4 2$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 27$.

▲ 1) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4$;

2) $\log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \dfrac{1}{2}\log_2 2 = \dfrac{1}{2}$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{3^{-1}} 3^3 = -3\log_3 3 = -3$. Здесь мы воспользовались свойствами 2°, 5° и 6°. ■

Пример 3. Пусть $\log_a 27 = b$. Вычислим значение выражения $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$.

▲ $\log_a 27 = b \Rightarrow \log_a 3^3 = b \Rightarrow 3 \cdot \log_a 3 = b \Rightarrow \dfrac{\log_3 3}{\log_3 a} = \dfrac{b}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{\log_3 a} = \dfrac{b}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 a = \dfrac{3}{b}$. Отсюда $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a} = \dfrac{2}{6}\log_3 a = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{b} = \dfrac{1}{b}$.

Ответ: $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a} = \dfrac{1}{b}$. ■

Пример 4. Докажем тождество $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$.

▲ $\log_{ab} x = \log_{ab} a \cdot \log_a x \Rightarrow \dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \dfrac{1}{\log_{ab} a} \cdot \dfrac{\log_a x}{\log_a x} = \dfrac{1}{\log_{ab} a} \cdot 1 =$

$= \log_a ab = \log_a a + \log_a b = 1 + \log_a b$ ■

▲ Из свойства 9°
$\log_{ab} x = \log_{ab} x \cdot \log_a a = \log_{ab} a \cdot \log_a x \Rightarrow \log_{ab} x = \log_{ab} a \cdot \log_a x$. Применим это равенство в знаменателе дроби:

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \frac{1}{\log_{ab} a} \cdot \frac{\log_a x}{\log_a x} = \frac{1}{\log_{ab} a}.$$

Согласно свойству 8° $\dfrac{1}{\log_{ab} a} = \log_a ab \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \frac{1}{\log_{ab} a} = \log_a ab = 1 + \log_a b. \ ■$$

Определение. Логарифм по основанию 10 называют *десятичным логарифмом* и для его обозначения используют символ lg, т.е. $\log_{10} a = \lg a$.

Логарифм по основанию e называют *натуральным логарифмом* и для его обозначения используют символ ln, т.е. $\log_e a = \ln a$.

1. Сколько решений имеет уравнение $a^x = b$, $(a > 0,\ a \neq 1)$, если: 1) $b > 0$; 2) $b < 0$?
2. Что называют логарифмом положительного числа?
3. Напишите основное логарифмическое тождество.
4. Сформулируйте и докажите основные свойства логарифма.
5. Почему понятие логарифма не определено для отрицательных чисел?
6. Может ли основание логарифма быть равным 1?
7. Что называют натуральным логарифмом? Как его обозначают?
8. Что называют десятичным логарифмом?

Упражнения

А

6.25. Найдите логарифм данного числа по основанию 2:

1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 4; 4) $\frac{1}{4}$;

5) $\frac{1}{8}$; 6) 32; 7) 64; 8) $\frac{1}{16}$.

6.26. Найдите логарифм данного числа по основанию 3:

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 9; 4) $\frac{1}{9}$;

5) $\frac{1}{27}$; 6) 27; 7)243; 8) $\frac{1}{81}$.

6.27. Покажите справедливость следующего равенства (устное задание):

1) $\lg 10000 = 4$; 2) $\lg 0{,}1 = -1$; 3) $\lg\sqrt{10} = \frac{1}{2}$;

3) $\log_2 8 = 3$; 4) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; 6) $\log_2 \sqrt{27} = 1{,}5$.

6.28. Вычислите:

1) $\lg 100000$; 2) $\lg 0{,}01$; 3) $\log_3 \sqrt{3}$; 4) $\log_2 128$;

5) $\log_5 25$; 6) $\log_5 125$; 7) $\log_9 3$; 8) $\log_2 \sqrt[3]{2}$;

9) $\log_a a^x$; 10) $\log_8 2$; 11) $\log_a \frac{1}{a}$; 12) $\log_6 6\sqrt{6}$;

13) $\log_4 1$; 14) $\log_9 9$.

6.29. Вычислите с помощью калькулятора:

1) $\lg 152$; 2) $\lg 25$; 3) $\lg 74$; 4) $\lg 0{,}8$.

6.30. Пользуясь основным логарифмическим тождеством, найдите x:

1) $\log_2 x = 2$; 2) $\log_3 x = 2$; 3) $\log_4 x = -3$;

4) $\log_5 x = 3$; 5) $\log_x 4 = 2$; 6) $\log_x 3 = -\frac{1}{2}$.

6.31. Вычислите:

1) $\log_2 32$; 2) $\log_{\sqrt{3}} 81$; 3) $\log_{a^2} \sqrt[7]{a}$; 4) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[4]{a^3}$;

5) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{1}$; 6) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$; 7) $\log_7 343$; 8) $\lg_2 0{,}01$.

6.32. Вычислите десятичный логарифм:

1) $\lg 0{,}001$; 2) $\lg 1$; 3) $\lg \sqrt[3]{10}$;

4) $\lg \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; 5) $\lg 10\sqrt{10}$; 6) $\lg 1000\sqrt{10}$.

6.33. Запишите число в виде степени числа 10:

1) 6; 2) 60; 3) 6000; 4) 0,6; 5) 0,006.

6.34. Упростите:

1) $\lg 8 + \lg 2$; 2) $\ln 8 - \ln 2$; 3) $\lg 40 - \lg 5$;
4) $\ln 4 + \ln 5$; 5) $\lg 2 + \lg 3 + \lg 4$; 6) $1 + \ln 3$;
7) $\lg 4 - 1$; 8) $\ln 6 - \ln 2 - \ln 3$; 9) $\lg 5 + \lg 4 - \lg 2$;

10) $\ln \frac{4}{3} + \ln 3 + \ln 7$.

6.35. Упростите:

1) $5\lg 2 + \lg 3$; 2) $2\ln 3 + 3\ln 2$; 3) $3\lg 4 - \ln 8$;

4) $2\ln 5 - 3\ln 2$; 5) $\frac{1}{2}\ln 4 + \ln 3$; 6) $\frac{1}{3}\ln \frac{1}{8}$;

7) $3 - \lg 2 - 2\lg 5$; 8) $2 - \frac{1}{2}\lg 4 - \lg 5$.

6.36. Упростите:

1) $\frac{\lg 4}{\lg 2}$; 2) $\frac{\ln 27}{\ln 9}$; 3) $\frac{\lg 3}{\lg 9}$; 4) $\frac{\ln 25}{\ln 0{,}2}$.

6.37. Докажите, что равенство является верным:

1) $\lg 300 = \lg 3 + 2$; 2) $\lg 0{,}05 = \lg 5 - 2$;

3) $\lg 5000 = 4 - \lg 2$; 4) $\lg 5 = 1 - \lg 2$.

6.38. Вычислите:

1) $2^{\log_2 19}$; 2) $3^{\log_9 5}$; 3) $\log_5 5^{21}$;

4) $5^{1+\log_5 8}$; 5) $4^{\log_{0,25} 7}$; 6) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{27}$.

6.39. Известно, что $p = \log_b 2$, $q = \log_b 3$ и $r = \log_b 5$. Выразите число через p, q и r:

1) $\log_b 6$; 2) $\log_b 108$; 3) $\log_b 45$.

6.40. Сравните числа:

1) $\log_5 2$ и $\dfrac{1}{\log_4 25}$; 2) $\log_2 3$ и $\dfrac{1}{\log_3 2}$;

3) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$ и $\dfrac{1}{\log_3 2}$.

6.41. Какое из чисел больше:

1) $\lg \sqrt[6]{10}$ и $\log_2 \sqrt{2}$; 2) $\log_4 2$ и $\log_{0,0625} 0,25$;

3) $\log_5 \dfrac{1}{625}$ и $\log_3 \dfrac{1}{27}$; 4) $\lg 2$ и $\dfrac{1}{\log_4 1000}$?

Практическая работа

6.42. Вкладчик положил 10 000 тг на депозит под 12% годовых. Через сколько лет сумма его вклада удвоится?

▲ Воспользуемся формулой сложных процентов: $S = A\left(1 + \dfrac{P}{100}\right)^n$, где A – начальная сумма, P – годовая процентная ставка, n – срок хранения вклада (в годах), а S – накопленная конечная сумма. В нашем случае получаем $S = 10000\left(1 + \dfrac{12}{100}\right)^n$. Нам нужно найти n. По условию задачи удвоенная сумма равна 20 000, поэтому получаем следующее равенство:

$20000 = 10000\left(1 + \dfrac{12}{100}\right)^n$, или $2 = \left(1 + \dfrac{12}{100}\right)^n$. Чтобы решить последнее уравнение, воспользуемся определением логарифма:

$$2 = 1{,}12^n \Rightarrow n = \log_{1,12}2.$$

Применив свойство 7° логарифма, найдем значение $\log_{1,12}2$ с помощью десятичных логарифмов.

$$n = \log_{1,12}2 = \frac{\lg 2}{\lg(1{,}12)} \approx \frac{0{,}3010\ \dots}{0{,}0492\ \dots} = 6{,}11.$$

Итак, немногим более, чем через 6 лет, или 73,5 месяца, сумма вклада удвоится. ■

Логарифмами пользуются финансисты, инженеры. Рассмотрим пример применения логарифма в биологии.

Практическая работа

6.43. Рост количества бактерий в зависимости от времени определяется следующей формулой:

$$x = \frac{t(\lg B - \lg q)}{\lg \frac{p}{q}},$$

где q – начальное количество бактерий, p – количество бактерий через время t, B – заданное количество бактерий, x – время, через которое количество бактерий достигнет значения B.

В начальный момент времени было 8 бактерий, через 2 ч после размещения бактерий в питательную среду их число возросло до 100. Через сколько времени с момента размещения бактерий в питательную среду их число достигнет 500?

▲ Из условия задачи определим значения переменных, входящих в формулу: $q = 8$, $t = 2$, $p = 100/8$, $B = 500$. Подставив найденные значения в формулу, получим:

$$\frac{2 \cdot (\lg 500 - \lg 8)}{\lg \frac{100}{8}} = \frac{2 \cdot 1{,}7959\ \dots}{1{,}0970\ \dots} = 3{,}27,$$ т.е. примерно через 3,27 ч, или 3 ч 15 мин, число бактерий увеличится до 500. ■

B

6.44. Вычислите:

1) $3^{1+\log_3 3}$; 2) $2^{4+\log_2 5}$; 3) $\sqrt{25^{2+\frac{1}{2}\log_5 36}}$; 4) $2^{\log_{\sqrt{2}} 5+4\log_{0,5} 5}$.

6.45. Известно, что $\log_a x = n$, $\log_b x = m$, $\log_c x = k$. Найдите $\log_{abc} x$.

6.46. Вычислите:

1) $\log_3 \log_4 \log_2 16$; 2) $\log_4 \log_2 \log_3 81$;

3) $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36 + \log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81$;

4) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

6.47*. Докажите, что для любого положительного числа a $(a \neq 1)$ выполняется равенство:

1) $\dfrac{1}{\log_a e} + \dfrac{1}{\log_{a^2} e} + \dfrac{1}{\log_{a^3} e} + \dfrac{1}{\log_{a^4} e} = 10\ln a$;

2) $\log_{e^{n+1}} ae^n = \dfrac{\ln a + n}{1+n}$

6.48. Запишите данное число в виде логарифма по основанию a $(a > 0,\ a \neq 1)$:

1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) -1; 4) $\frac{1}{3}$; 5) 1; 6) 0; 7) $-\frac{3}{4}$.

6.49. Докажите, что для любых положительных и не равных 1 чисел a и b справедливо следующее тождество:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

6.50. Известно, что $\log_6 2 = m$. Найдите $\log_{24} 72$.

6.51. Известно, что $\log_{36} 8 = m$. Найдите $\log_{36} 9$.

6.52*. Известно, что $\log_{100} 3 = m$ и $\log_{100} 2 = n$. Найдите $\log_5 6$.

6.53. Выполните действия:

1) $\log_a \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}$; 2) $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

6.54. Упростите:

1) $\left(25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}\right)^{\frac{1}{2}}$; 2) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 3^{\frac{1}{\log_7 9}} + 27^{\log_9 36}$;

3) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$; 4) $49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$.

6.55*. Покажите, что выполняется равенство $\log_3 12 = \log_3 8 \cdot \log_8 5 \times$ $\times \log_5 4 + 1$.

6.56. Упростите выражение:

1) $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$; 2) $\sqrt{a^{1+\frac{1}{2\log_4 a}} + 8^{\frac{1}{3\log_{a^2} 2}} + 1}$.

6.57*. Докажите равенство $a^{\frac{\ln\ln a}{\ln a}} = \ln a$, $(a > 0)$.

C

6.58. Известно, что $\lg 5 = a$, $\lg 7 = b$. Найдите $\lg 122{,}5$.

6.59. Известно, что $b = \log_c 0{,}25 + 3\log_u 4$, $u = 27$, $c = \dfrac{1}{9}$.
Найдите 3^b.

6.60. Пусть $1 < a < b$. Упростите выражение $\sqrt{\sqrt{\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2} - 2}$.

6.61*. Разложите на множители выражение
$\log_a A \cdot \log_b A + \log_b A \cdot \log_c A + \log_c A \cdot \log_a A$.

6.62. Докажите справедливость равенства $\log_3 12 = \log_3 7 \cdot \log_7 5 \times$ $\times \log_5 4 + 1$.

6.63*. Докажите тождество:

1) $\dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\log_{a^2} x} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{a^n} x} = \dfrac{n(n+1)}{2\log_a x}$;

2) $\log_{abc} x = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\log_b x} + \dfrac{1}{\log_c x}}$.

6.64*. Даны положительные и не равные единице числа a, b, c, x, y, z. Известно, что числа $\log_x a$, $\log_y b$, $\log_z c$ являются последовательными членами арифметической прогрессии. Докажите, что выполняется равенство

$$\log_b y(\log_a x + \log_c z) = 2\log_a x \cdot \log_c z.$$

6.65. Пусть $4a^2 + 9b^2 = 4ab (a > 0)$. Докажите, что выполняется равенство $\log_3 \dfrac{2a+3b}{4} = \dfrac{\log_3 a + \log_3 b}{2}$.

6.66. Докажите тождество:

1) $\log_{xy} z = \dfrac{\log_x z \cdot \log_y z}{\log_x z + \log_y z}$; 2) $1 + \log_x y = \dfrac{\log_x z}{\log_{xy} z}$.

6.67. Найдите значение выражения $5x + 6y$, если $x = \dfrac{3}{\log_2 5}$, $y = (\log_5 6)^{-1}$.

6.68. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\left(\lg a \cdot 2^{\log_2 \lg a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \lg a^2}{\sqrt{\dfrac{\lg a + 1}{2\lg a} + 1 - 10^{0{,}5\lg\lg\sqrt{a}}}}$; 2) $\dfrac{1 - \log_{\frac{1}{a}} \dfrac{1}{(a-b)^2} + \log_a^2 (a-b)}{\left(1 - \log_{\sqrt{a}}(a-b) + \log_a^2(a-b)\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Упражнения для повторения

6.69. Сколько решений имеет уравнение:

1) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 0$; 2) $x^2 + 6x + y^2 - 10y + 34 = 0$?

6.70. Покажите, что прямая $x + 7y = 50$ касается окружности $x^2 + y^2 = 50$, и найдите координаты точки касания.

6.71. Покажите, что при x, равных -2, -1, 0, 1, 2, значения выражения 2^x являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите знаменатель этой прогрессии.

6.3. Логарифмическая функция, ее свойства и график

Изучив пункт, вы:

- узнаете определение логарифмической функции;
- научитесь строить график логарифмической функции;
- изучите и научитесь применять свойства логарифмической функции.

6.3.1. Логарифмическая функция и ее свойства

> **Определение.** *Функция вида* $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ *называется логарифмической функцией, где* $x \in (0; +\infty)$.

Например, $y = \log_2 x$ – логарифмическая функция по основанию 2, а $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ – логарифмическая функция по основанию $\dfrac{1}{2}$.

Логарифмическая функция обладает рядом свойств. Остановимся на некоторых основных свойствах.

1°. *Область определения логарифмической функции – множество всех положительных действительных чисел* R^+, т.е.

$D(\log_a x) = (0; +\infty)$. Действительно, логарифмическая функция определена только для положительных значений аргумента.

2°. *Область значений логарифмической функции – множество всех действительных чисел R, т.е.* $(-\infty; +\infty)$.

▲ В самом деле, для любого числа $y_0 \in R$ при $a > 0$ определено выражение a^{y_0}. А из определения логарифма следует, что имеет место равенство $\log_a a^{y_0} = y_0$. Тогда логарифмическая функция принимает значение, равное y_0, в точке $x_0 = a^{y_0}$, т.е. логарифмическая функция принимает любое действительное значение. ■

3°. *Если* $a > 1$, *то логарифмическая функция* $y = \log_a x$ *возрастает.*

▲ Пусть числа x_1 и x_2 – любые положительные числа, удовлетворяющие неравенству $0 < x_1 < x_2$. Тогда из $x_1 = a^{\log_a x_1}$, $x_2 = a^{\log_a x_2}$ следует неравенство $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$. Нам известно, что при $a > 1$ показательная функция $y = a^x$ является возрастающей. Тогда из последнего неравенства следует неравенство $\log_a x_1 < \log_a x_2$, что и требовалось доказать. ■

4°. *Если* $0 < a < 1$, *то логарифмическая функция* $y = \log_a x$ *убывает.*

Доказательство этого свойства аналогично доказательству свойства 3°.

5°. *Графики логарифмической функции* $y = \log_a x$ *и показательной функции* $y = a^x$ *с равными основаниями симметричны относительно прямой* $y = x$, являющейся *биссектрисой I и III координатных четвертей.*

▲ Из курса геометрии нам известно, что точки $A(n; m)$, $A'(m; n)$ расположены симметрично относительно прямой $y = x$. Пусть точка $A(n; m)$ принадлежит графику функции $y = a^x$. Тогда $m = a^n \Rightarrow$ $\Rightarrow \log_a m = \log_a a^n = n \Rightarrow n = \log_a m$. Это значит, что точка $A'(m; n)$ принадлежит графику функции $y = \log_a x$. ■

Пример 1. Сравним следующие числа: 1) $\log_2 3$ и $\log_2 5$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ и $\log_{\frac{1}{2}} 5$; 3) $\log_4 17$ и $\log_5 23$.

▲ 1) Функция $y = \log_2 x$ возрастает, т.к. ее основание больше 1. Тогда из неравенства $3 < 5$ следует неравенство $\log_2 3 < \log_2 5$.

2) Функция $\log_{\frac{1}{2}} x$ убывает, поэтому выполняется неравенство $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 5$.

3) Из $\log_4 17 > \log_4 16 = 2$ и $\log_5 23 < \log_5 25 = 2$ следует $\log_4 17 > \log_5 23$. ■

6.3.2. График логарифмической функции

Согласно свойству 5° график логарифмической функции $y = \log_a x$ можно получить из графика показательной функции $y = a^x$ с помощью симметрии относительно прямой $y = x$.

Мы построим график логарифмической функции на основе его свойств. График любой логарифмической функции пересекает ось Ox в точке (1; 0) (т.к. $\log_a 1 = 0$), но не пересекает ось Oy.

Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ возрастает. Функция принимает положительные значения при $x \in (1; +\infty)$ и отрицательные значения при $x \in (0; 1)$.

Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ убывает. Функция принимает отрицательные значения при $x \in (1; +\infty)$ и положительные значения при $x \in (0; 1)$.

Теперь с помощью таблицы значений построим, например, графики функций $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y = \log_3 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2 x$	–3	–2	–1	0	1	2	3
$\log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	–1	–2	–3

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$\log_3 x$	–2	–1	0	1	2
$\log_{\frac{1}{3}} x$	2	1	0	–1	–2

На рисунке 6.6 изображены графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$, а на рисунке 6.7 – графики функций $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

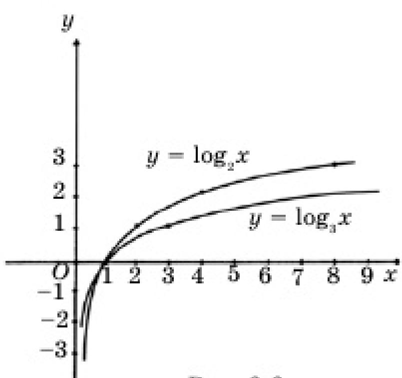


Рис. 6.6

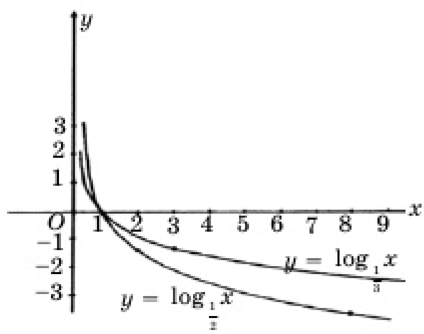


Рис. 6.7

Пусть $a > 1$. Чем больше значение основания a, тем «медленнее растет» соответствующая логарифмическая функция. Пусть теперь $0 < a < 1$. Чем меньше значение основания a, тем «медленнее убывает» соответствующая логарифмическая функция.

На примере рисунков 6.8 и 6.9 мы можем убедиться, что графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ симметричны относительно прямой $y = x$.

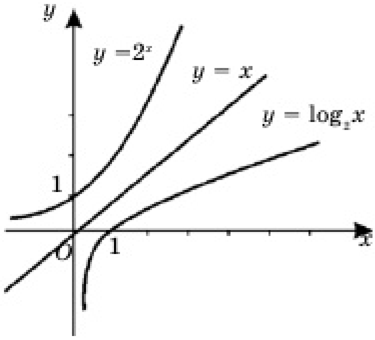


Рис. 6.8

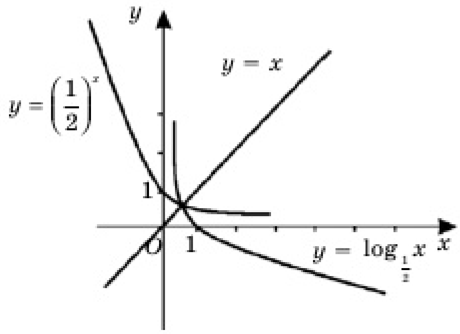


Рис. 6.9

Пример 2. Определим знаки чисел: 1) $\log_2 5$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 5$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 4) $\log_3 \frac{1}{5}$.

▲ 1) Из $5 > 1$, $2 > 1$ получаем $\log_2 5 > 0$; 2) $5 > 1$, $\frac{1}{2} < 1$, следовательно, $\log_{\frac{1}{2}} 5 < 0$; 3) $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{1}{3} < 1$, поэтому $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} > 0$; 4) $\frac{1}{5} < 1$, $3 > 1$, следовательно, $\log_3 \frac{1}{5} < 0$. ■

Основания десятичного и натурального логарифмов больше 1, поэтому функции $y = \lg x$ и $y = \ln x$ являются возрастающими (рис. 6.10).

На рисунке 6.11 изображены графики функций $y = \ln x$ и $y = e^x$, а на рисунке 6.12 – графики функций $y = \lg x$ и $y = 10^x$. Графики этих функций симметричны относительно прямой $y = x$.

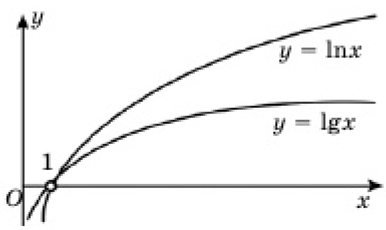


Рис. 6.10

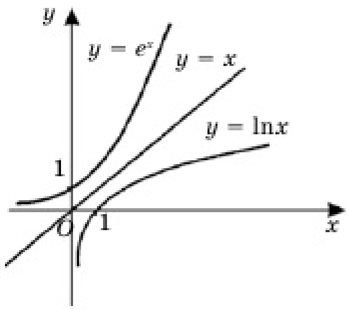


Рис. 6.11

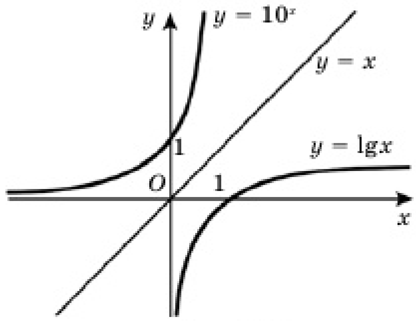


Рис. 6.12

1. Какая функция называется логарифмической?
2. Почему областью определения логарифмической функции является множество $(0;+\infty)$, а областью ее значений – множество $(-\infty;\ +\infty)$?
3. Докажите, что логарифмическая функция является возрастающей, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.
4. Докажите, что графики функций $y = \log_a x$ и $y = a^x$ симметричны относительно прямой $y = x$.
5. На одной координатной плоскости постройте графики следующих функций (с помощью графического онлайн-калькулятора или схематически): 1) $y = \log_2 x$ и $y = \log_{10} x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y = \log_{0,1} x$; 3) $y = \log_2 x$ и $y = 2^x$; 4) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Дополнительные электронные ресурсы

Графический онлайн-калькулятор https://www.desmos.com/calculator

Упражнения

А

6.72. Укажите, какие из следующих функций являются логарифмическими (устное задание):

1) $y = 4x$; 2) $y = \log_5 25 + x^2$; 3) $y = \ln(x + 2)$;
4) $y = 2{,}5^x$; 5) $y = \log_5 125 + x$.

6.73. Определите знак выражения:

1) $\log_2 3$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 3$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 4) $y = \log_{\frac{1}{3}} 2$;

5) $y = \log_{\frac{\pi}{3}} 4$; 6) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$; 7) $\log_2 \pi$; 8) $\log_{\frac{1}{3}} \pi^{-1}$.

6.74. Найдите область определения функции:

1) $y = \log_3(x-1)^2$;
2) $y = \log_2^2(x-1)$;
3) $y = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x-1}{2x+3}$;
4) $y = \log_3(x^2 + 2x - 3)$.

6.75. Совпадают ли графики функций $f(x) = x + 1$ и $g(x) = 2^{\log_2(x+1)}$? Обоснуйте ответ.

6.76. Сравните числа:

1) $\log_3 4$ и $\log_3 5$;
2) $\log_{\frac{1}{2}} 4$ и $\log_{\frac{1}{2}} 5$;
3) $\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{65}$ и $\log_{\frac{3}{2}} 8$;
4) $\log_{\frac{2}{3}} \dfrac{4}{7}$ и $\log_{\frac{2}{3}} \dfrac{9}{14}$.

6.77. С помощью графического онлайн-калькулятора постройте графики следующих функций на одной координатной плоскости. На основе построенных графиков сформулируйте вывод.

1) $y = \lg x$ и $y = \lg(x+2)$;
2) $y = \lg x$ и $y = \lg(-x)$;
3) $y = \lg x$, $y = \log_2 x$ и $y = \log_4 x$;
4) $y = \log_3 x$ и $y = -\log_3 x$.

▲ 1) Графики функций $y = \lg x$ и $y = \lg(x+2)$ приведены на рисунке 6.13. Мы видим, что график функции $y = \lg(x+2)$ получен параллельным переносом графика функции $y = \lg x$ на две единицы влево. Следовательно, можно сделать вывод: чтобы построить график функции $y = \lg(x+a)$, нужно сделать параллельный перенос графика функции $y = \lg x$ на a единиц влево. ■

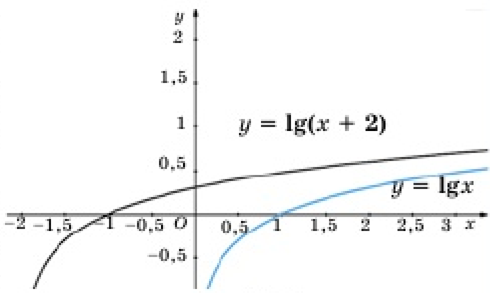


Рис. 6.13

6.78. Постройте график функции и проверьте результат с помощью графического онлайн-калькулятора:

1) $y = \log_3 x$;
2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$;
3) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$;
4) $y = \log_{\frac{1}{2}} x - 1$;
5) $y = \log_4(x+3)$;
6) $y = \log_4 x + 3$.

6.79. Определите, принадлежат ли данные точки графику функции $y = \lg x$.

1) $A(100;\ 2)$; 2) $B(0{,}001;\ -3)$;

3) $C\left(\sqrt[5]{100};\ \dfrac{1}{5}\right)$; 4) $D\left(\sqrt[5]{10};\ \dfrac{1}{5}\right)$.

6.80. Найдите область определения функции:

1) $y = \ln(x(x-1)(x-2))$; 2) $y = \ln\dfrac{x^2(2x-4)}{x+6}$;

3) $y = \dfrac{1}{\ln\sqrt{6 - x - x^2}}$.

6.81. Выясните, является ли функция возрастающей (убывающей), и найдите область определения функции:

1) $y = \ln(x+5)$; 2) $y = \ln(3-x)$.

B

6.82. Найдите область определения функции:

1) $y = \log_3(x^2 - 6x + 8)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}}(4 - x - 3x^2)$;

3) $y = \log_x \dfrac{2x-1}{x^2-4}$; 4) $y = \log_{\sqrt{7}} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 3}$.

6.83. Сравните числа:

1) $\lg\sqrt[6]{10}$ и $\log_2\sqrt{2}$; 2) $\log_4 5$ и $\log_6 5$; 3) $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{6}$ и $\log_9 7$;

4) $\log_3 2$ и $\log_2 3$; 5) $\log_4 2$ и $\log_{0,09} 0{,}3$; 6) $\log_3 \pi$ и $\log_\pi 3$.

6.84. Какое из чисел больше:

1) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$ или $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}$; 2) $\log_5 7$ или $3\log_5 2$;

3) $\log_3 15$ или $4\log_3 2$; 4) $\log_{\frac{1}{5}} 48$ или $2\log_{\frac{1}{5}} 7$?

6.85. Известно, что $\lg 3 = p$, $\lg 2 = q$. Найдите $\log_5 6$.

6.86. Вычислите:

1) $\sqrt[3]{\log_{\sqrt{2}}\left(2\sin\dfrac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}\right)}$;

2) $3^{\log_{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)+\log_{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\right)}$.

6.87. Постройте график функции и определите множество ее значений:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) - 2$; 2) $y = \log_2(x - 3) + 4$.

6.88. Равносильны ли функции $y = 2\log_2 x$ и $y = \log_2 x^2$? Обоснуйте ответ.

6.89. Постройте график функции и определите множество ее значений:

1) $y = \log_2(x - 1)$; 2) $y = \log_2|x - 1|$; 3) $y = \ln|x|$;

4) $y = |\ln x|$; 5) $y = \left|\ln|x|\right|$; 6) $y = \ln^2 x$.

6.90. Вычислите:

1) $\left(\log_{\sqrt[4]{5}} \sqrt{5}\right)^2 - \log_{\sqrt[4]{5}} 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{3}+1}\left(4 + 2\sqrt{3}\right)$;

2) $2^{6\log_{2\sqrt{2}}\left(5-\sqrt{10}\right)+8\log_{0,25}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}$.

6.91. Сравните числа:

1) $2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}$ и $3\log_8 26$; 2) $2\log_3 4$ и $3\log_{27} 17$;

3) $\log_{135} 675$ и $\log_{45} 75$.

C

6.92*. Известно, что $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 18 = b$. Найдите $\log_{25} 24$.

6.93. Сравните числа:

1) $\sqrt{11}$ и $9^{0,5\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_8 2}$; 2) $2^{\log_3 5} - 0,1$ и $5^{\log_3 2}$;

3) $\sqrt{8}$ и $2^{2\log_2 5+\log_{0,5} 9}$; 4) $\sqrt{15}$ и $8^{\frac{1}{3}\log_2\left(1+\frac{1}{32}\right)+2\log_{27} 3}$.

6.94. Вычислите:

$4\sqrt{3} + 5^{\log_5 \frac{3}{5}} - 15^{\frac{1}{2}+\log_{15}\frac{4}{\sqrt{5}}}$.

6.95. Вычислите:

$49^{0,5\log_7 9-\log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4}$.

6.96. Постройте график функции $y = \log_2(x - 3)$.

6.97. Постройте график функции $y = |\log_2(x - 3)|$.

6.98. Постройте график функции $y = \log_2|x - 3|$.

6.99. Постройте график функции $y = |\log_2|x - 3||$.

9.100. Имеют ли смысл выражения:

1) $\sqrt{\log_2 1,4 + \log_2 0,7}$; 2) $\sqrt{\lg 15 + \lg 0,07}$; 3) $\lg\lg\lg 11$?

6.101*. Пусть $a^2 + b^2 = 11ab$ и $a \cdot b \neq 0$. Докажите справедливость равенства

$$\log_2 \frac{|a-b|}{3} = \frac{1}{2}\left|\log_2|a| + \log_2|b|\right|.$$

6.102*. Известно, что $\lg 2 \cdot \lg 5 = k$. Найдите $\lg 2$ и $\lg 5$.

6.103*. Пусть $m^2 = a^2 - b^2$. Упростите выражение $\log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2\log_{a+b} m \cdot \log_{a-b} m$.

Упражнения для повторения

6.104. Решите уравнение:

1) $\dfrac{6x}{x+3} + 2 = \dfrac{x+3}{x}$; 2) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x-9} = 1$.

6.105. Имеется 10%-й раствор кислоты объемом 4 л. К нему добавили воды и получили 4%-й раствор кислоты. Сколько литров воды добавили к раствору?

6.106. Известно, что $\mathrm{tg}\,x = 3$. Найдите значения следующих выражений:

1) $\dfrac{3\sin x - 4\cos x}{5\cos x - \sin x}$; 2) $\dfrac{2\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x}$.

6.4. Производная показательной функции и интеграл от нее

Изучив пункт, вы:

- научитесь находить производную показательной функции;
- научитесь находить интеграл от показательной функции;
- сможете применять производную показательной функции и интеграл от нее к решению практических задач.

6.4.1. Производная показательной функции

Выведем формулы для нахождения производной показательной функции и интеграла от нее. Сначала докажем следующие равенства:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \qquad (2)$$

▲ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$.

Для доказательства формулы (2) введем обозначение $a^x - 1 = y$. Тогда $x = \log_a(1 + y)$. Если $x \to 0$, то $y \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left|\begin{matrix}a^x-1=y,\\ x=\log_a(1+y)\\ x\to 0\Rightarrow y\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$ ■

Теперь докажем справедливость следующих формул:

$$(a^x)'=a^x\ln a,\ (e^x)'=e^x.$$

▲ Пусть дана функция $y=a^x$, $a>1$, $a\neq 1$, $x\in(-\infty;+\infty)$. Найдем приращение этой функции в точке x: $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$. Тогда по определению производной

$$y'=(a^x)'=\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

Таким образом, $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$. Если $a=e$, то $(e^x)'=e^x\cdot\ln e=e^x$. ■

Производная показательной функции определяется следующими формулами:

$$(a^x)'=a^x\ln a,$$
$$(e^x)'=e^x.$$

Пример 1. Найдем производную функции $y=2^{x-3}$.

▲ Применив формулу производной показательной функции, получим $y'=(2^{x-3})'=2^{x-3}\cdot\ln 2$. ■

Пример 2. В какой точке касательная к графику функции $y=e^{3x}-2x$ составляет с осью Ox угол в 45°? Напишите уравнение этой касательной.

▲ Угловой коэффициент нужной нам касательной равен 1, т.к. $\operatorname{tg}45^\circ=1$. Тогда должно выполняться равенство $y'=3e^{3x}-2=1$. Отсюда $x=0$, т.е. в точке $x=0$ касательная к графику данной функции составляет с осью Ox угол в 45°. Учитывая, что $y(0)=1$, напишем уравнение этой касательной:

$$y-1=1\cdot(x-0)\Rightarrow y=x+1.$$ ■

6.4.2. Интеграл от показательной функции

Из равенств

$$(a^x)'=a^x\ln a,\ (e^x)'=e^x$$

следует, что первообразными для функций $y=a^x$ и $y=e^x$ являются соответственно функции $y=\dfrac{a^x}{\ln a}$ и $y=e^x$. Тогда получим следующие формулы:

$$(e^x)'=e^x\Rightarrow\int e^x dx=e^x+C,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Пример 3. Вычислим интегралы: 1) $\int (2^x \cdot 5^x) dx$; 2) $\int \frac{xe^x - x}{x} dx$.

▲ 1) $\int (2^x \cdot 5^x) dx = \int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C$.

Чтобы найти интегралы от некоторых функций, надо их предварительно упростить.

$$2)\ \int \frac{xe^x - x}{x} dx = \int \frac{x(e^x - 1)}{x} dx = \int (e^x - 1) dx =$$

$$= \int e^x dx - \int dx = e^x - x + C. \ ■$$

1. Напишите формулу нахождения производной показательной функции.
2. Напишите формулу вычисления интеграла от показательной функции.
3. Докажите равенство $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e$.
4. Докажите равенство $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Упражнения

А

6.107. Найдите производную функции:

1) $y = e^{3x}$; 2) $y = e^{2 + 5x}$; 3) $y = a^{1 - x}$; 4) $y = 3^{1 - 2x}$.

6.108. Укажите первообразную для функции $y = 5^{7 - 2x}$:

A) $-2 \cdot 5^{7 - 2x} \ln 5 + C$; B) $-\frac{1}{2} \cdot 5^{7 - 2x} \ln 5 + C$;

C) $-\frac{2 \cdot 5^{7-2x}}{\ln 5} + C$; D) $-\frac{5^{7-2x}}{2\ln 5} + C$;

E) $(7 - 2x)5^{7 - 2x} \ln 5 + C$.

6.109. Укажите первообразную для функции $y = 2^{-3x + 1}$:

A) $-3 \cdot 2^{-3x + 1} \ln 2 + C$; B) $-\frac{1}{3} \cdot 2^{-3x + 1} \ln 2 + C$;

C) $-\frac{3 \cdot 2^{-3x+1}}{\ln 2} + C$; D) $-\frac{2^{-3x+1}}{3\ln 2} + C$;

E) $(-2x + 1)2^{-3x + 1} \ln 2 + C$.

6.110. Вычислите интеграл:

1) $\int 3^x dx$; 2) $\int e^{3x} dx$; 3) $\int e^{5x-1} dx$;

4) $\int e^{x+1}dx$;   5) $\int 2^{2x-1}dx$.

6.111. Найдите интеграл, применяя метод интегрирования по частям:
1) $\int xe^{x}dx$;   2) $\int (2x+1)e^{x-1}dx$;   3) $\int xe^{3x}dx$.

6.112. Вычислите определенный интеграл:
1) $\int\limits_0^1 (5e^{x}+x^3-4)dx$;   2) $\int\limits_0^1 (e^{x}+x)dx$;
3) $\int\limits_0^1 e^{2x}dx$;   4) $\int\limits_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx$.

6.113. Изобразите криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = e^x$, прямыми $x = 0$, $x = 1$ и осью абсцисс. Найдите ее площадь.

6.114. Изобразите криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = e^x$, прямыми $x = -1$, $x = 1$ и осью абсцисс. Найдите ее площадь.

B

6.115. Дана функция $f(x) = e^x + \sin x$. Найдите для нее первообразную, график которой проходит через точку $M(0;\ \sqrt{2}\ )$.

6.116. Найдите производную функции:
1) $y = e^x(4x - 1)$;   2) $y = e^{-x}(1 - x)$;
3) $y = (x^2 - 2x + 2) \cdot 2^x$;   4) $y = 3{,}5x^4e^{2x}$.

6.117. Напишите уравнение прямой, касающейся графика функции $y = e^x$ и параллельной прямой $y = ex + 1$.

6.118. Напишите уравнение прямой, касающейся графика функции $y = e^x$ и перпендикулярной прямой $y = -2x$.

6.119. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и касающейся кривой $y = e^{-x}$.

6.120. Определите, под каким углом кривая $y = e^{2x}$ пересекается с осью Oy.
При решении задания применим следующее определение: «Угол, под которым кривая пересекает ось ординат, есть угол наклона касательной, проведенной к графику функции в точке пересечения, к оси ординат».

6.121. Напишите уравнение касательной к кривой $y = 1 - e^{\frac{x}{2}}$ в точке пересечения кривой с осью Oy. Постройте график кривой.

6.122. Найдите производную второго порядка функции:
1) $y = e^x + e^{-x}$; 2) $y = (x + 1)e^{2x}$; 3) $y = (x^2 - 2x - 3) \cdot e^{x-3}$.

6.123. Проведите исследование функции $y = x^2e^x$ и постройте ее график.

6.124. Применяя метод замены переменной, найдите интеграл:

1) $\int xe^{x^2}dx$; 2) $\int xe^{-x^2}dx$;

3) $\int \frac{e^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}dx$; 4) $\int e^{\cos x}\sin x dx$.

C

6.125. Найдите производные указанных порядков для функции:

1) $y = e^{\frac{x}{2}}\sin 2x$, y^{IV} – ? 2) $y = e^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x)$, y''' – ?

6.126. С помощью метода замены переменной найдите интеграл $\int x^2e^{x^3}dx$.

6.127. Известно, что $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C$. С помощью метода замены переменной, вычислите интеграл $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.

6.128*. Найдите интеграл с помощью метода интегрирования по частям:

1) $\int e^x \cdot \cos x dx$; 2) $\int e^x \cdot \sin x dx$.

Упражнения для повторения

6.129. Найдите сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 11.

6.130. Выясните, проходит ли прямая $y = 0{,}5x - 5$ через точку пересечения прямых $y = 2x - 8$ и $3y + 7x = 2$.

6.131. Докажите тождество

$$\frac{1 + 2\cos t\sin t}{\sin^2 t - \cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t + 1}{\operatorname{tg} t - 1}.$$

6.5. Производная логарифмической функции

Изучив пункт, вы:

- научитесь находить производную логарифмической функции;
- сможете решать практические задачи, применяя производную логарифмической функции.

Выведем формулу нахождения производной логарифмической функции. В предыдущем разделе мы доказали равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

Теперь докажем следующие формулы: $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

▲ Пусть дана логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in (0; +\infty)$. Найдем ее приращение в точке x:

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Тогда

$$y' = \lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x}\cdot\log_a e = \frac{1}{x\ln a}.$$

Таким образом, $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$. Если $a = e$, то производная функции $y = \ln x$, $x > 0$ определяется формулой $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. ■

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a},$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Пример 1. Найдем производную функции: 1) $y = \ln(x + 1)$; 2) $y = \ln(1 + \sin x)$.

▲ Согласно правилу нахождения производной сложной функции

1) $y' = (\ln(x + 1))' = \frac{1}{x+1}\cdot(x+1)' = \frac{1}{x+1}\cdot 1 = \frac{1}{x+1}$.

2) $y' = (\ln(\sin x + 1))' = \frac{1}{\sin x+1}\cdot(\sin x + 1)' = \frac{1}{\sin x+1}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{\sin+1}$. ■

Из равенства $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ следует, что первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ является функция $F(x) = \ln x + C$. Тогда

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Пример 2. Вычислим интеграл: 1) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$; 2) $\int\frac{1}{x^2-a^2}dx$.

▲ 1) $\int \mathrm{ctg}x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left| \begin{array}{c} \text{Применим} \\ \text{метод замены} \\ \text{переменной} \\ \sin x = y \\ \cos x dx = dy \end{array} \right| = \int \frac{1}{y} dy = \ln|y| + C =$

$= \ln|\sin x| + C.$

2) Предварительно с помощью метода неопределенных коэффициентов запишем разложение подынтегрального выражения в таком виде: $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$. Тогда

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a}\left(\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right) + C. \ ■$$

Пример 3. Вычислим интеграл $\int \ln x dx$.

▲ Применяя метод интегрирования по частям, получим:

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x,\ dx = dv \\ du = \frac{dx}{x},\ x = v \end{array} \right| = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C. \ ■$$

1. Докажите формулу нахождения производной логарифмической функции.
2. Напишите формулу нахождения производной натуральной логарифмической функции.

Упражнения

A

6.132. Найдите производную функции:

1) $y = \ln(3x - 2)$; 2) $y = \ln\sqrt{x}$;

3) $y = \ln(1 - x)^2$; 4) $y = \log_a(2x - 3)$.

6.133. Найдите производную функции $y = \log_3 2x$.

A) $\frac{1}{2x}$; B) $\frac{1}{x\ln 3}$; C) $\frac{1}{2x\ln 3}$; D) $\frac{2}{x\ln 3}$; E) $\frac{2}{x}$.

6.134. Найдите производную функции $y = 3\lg x$.

A) $\dfrac{3}{x\lg x}$; B) $\dfrac{1}{x}$; C) $\dfrac{3}{x}$; D) $\dfrac{3}{x\ln 10}$; E) $\dfrac{1}{3x\lg x}$.

6.135. Вычислите интеграл:

1) $\int \dfrac{dx}{2x-1}$; 2) $\int \dfrac{dx}{5x-1}$; 3) $\int \dfrac{x-3}{x-1}dx$; 4) $\int \dfrac{1}{x(x+1)}dx$.

6.136. Найдите интеграл с помощью метода интегрирования по частям:

1) $\int \ln 4x dx$; 2) $\int x\ln x dx$; 3) $\int x\ln 2x dx$; 4) $\int \dfrac{\ln x}{x^2}dx$.

6.137. Определите, при каком значении a площади криволинейных трапеций, показанных на рис. 6.14, равны между собой.

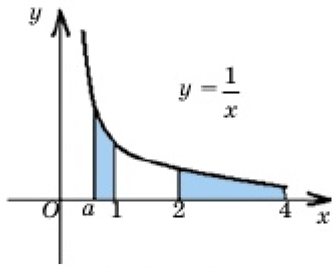


Рис. 6.14

6.138. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_0^1 \left(e^x - \dfrac{3}{x+1}\right)dx$; 2) $\int_1^3 \dfrac{2}{x}dx$;

3) $\int_1^2 \left(x - \dfrac{1}{x}\right)dx$; 4) $\int_0^2 \left(\dfrac{5}{x+1}\right)dx$; 5) $\int_0^1 \dfrac{1}{x+2}dx$.

6.139. Изобразите криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = \dfrac{1}{x}$, прямыми $x = 1$, $x = 3$ и осью абсцисс. Найдите площадь трапеции.

6.140. Изобразите криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = \dfrac{4}{x}$, прямыми $x = 1$, $x = e$ и осью абсцисс. Найдите площадь трапеции.

B

6.141. Найдите производную функции:

1) $y = \dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$; 2) $y = \log_2 \sin 3x$; 3) $y = \ln \operatorname{tg} 2x$.

6.142. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и касающейся кривой $y = \ln x$.

6.143. Найдите производную второго порядка функции:

1) $y = \ln(3x - 2)$; 2) $y = (x + 1)\ln(x + 1)$; 3) $y = x\ln\sqrt{x}$.

6.144. Найдите первообразную для функции $f(x) = \frac{1}{x}$, график которой проходит через точку $M(e^3; 3)$.

6.145. Вычислите интеграл:

1) $\int \frac{2x+3}{4x-7}dx$; 2) $\int \frac{3x-4}{5x+3}dx$.

6.146. Найдите интеграл с помощью метода замены переменной:

1) $\int \frac{\ln x}{x}dx$; 2) $\int \frac{2\ln^2 x+2}{x}dx$; 3) $\int \mathrm{tg}\,x\,dx$;

4) $\int \frac{x}{x^2-4}dx$; 5) $\int \frac{\cos x}{\sin x-4}dx$.

Практическая работа

6.147. Согласно статистическим данным Национального министерства экономики численность населения Казахстана на начало 2016 г. составила 17669896 человек, а на начало 2017 г. – 17918214 человек. С помощью логарифмической и показательной функций определите приблизительно, когда численность населения Казахстана превысит 20000000 человек.

▲ Рост населения за небольшой промежуток времени описывается формулой $N(t) = N_0e^{kt}$. Здесь N_0 – начальная численность населения ($t = 0$), N – численность населения в момент времени t, k – постоянная величина, характеризующая темп роста численности населения. Определим значение k.

Если $N(t)$ – функция, описывающая изменение численности населения в зависимости от времени, то ее производная $N'(t)$ характеризует скорость изменения этой функции. Но скорость изменения численности населения пропорциональна его численности (чем больше численность населения, тем быстрее она растет). Следовательно, $N'(t) = k \cdot N(t)$. Запишем это уравнение с помощью дифференциала: $\frac{dN}{dt} = k \cdot N \Rightarrow \frac{dN}{N} = kdt$. Проинтегрируем обе части этого равенства, применив формулу $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$.

Тогда

$$\int \frac{1}{N} dN = \int k dt \Rightarrow \ln N = kt + C_1 \Rightarrow N = Ce^{kt}.$$

Если $t = 0$, то $C = N_0 \Rightarrow N(t) = N_0 e^{kt}$.
Если принять за начальный момент времени начало 2016 г., то согласно условию задачи имеем: $t = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_0 = 17669896$. В 2017 г. численность населения составила 17918214 человек, т.е. $t = 1 \Rightarrow N = 17918214$. Теперь, используя эти данные, мы можем вычислить постоянную k: $17918214 = 17669896e^{k \cdot 1} \Rightarrow e^k =$ $= \dfrac{17918214}{17669896} \approx 1{,}014053$. По определению натурального логарифма $k = \ln 1{,}014053 \approx 0{,}01396$. Таким образом, функция $N(t) = 17669896e^{0{,}01396t}$ описывает рост населения нашей страны. Теперь мы можем сделать прогноз, через какое время численность населения превысит 20 миллионов. Для этого подставим соответствующие значения в найденную нами функцию. Получим
$20000000 = 17669896e^{0{,}01396t} \Rightarrow e^{t0{,}01396t} = \dfrac{20000000}{17669896} \approx$ $\approx 1{,}131866$.

$$0{,}01396t = \ln 1{,}131866 \approx 0{,}12387 \Rightarrow t \approx 9.$$

Итак, если считать от начала 2016 г., то через 9 лет население нашей страны достигнет 20 миллионов, т.е. в 2016 + + 9 = 2025 году. ■

6.148. Проведите исследование функции $y = x\log_2 x$ и постройте ее график.

C

6.149. Найдите производные указанного порядка следующих функций:
1) $y = \dfrac{\log_3 x}{x^2}$, y^{IV} – ? 2) $y = (5x - 1)\ln^2 x$, y''' – ?

6.150. Если кривые в общей точке имеют общую касательную, то говорят, что кривые касаются друг друга. Покажите, что парабола $y = \dfrac{x^2}{2e}$ касается кривой $y = \ln x$, и найдите точку их касания.

6.151. Изобразите криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = \ln x$, прямой $x = e$ и осью абсцисс. Найдите ее площадь.

6.152*. Вычислите интеграл, разложив подынтегральное выражение методом неопределенных коэффициентов:

1) $\int \frac{1}{x^2-4}dx$; 2) $\int \frac{7x+8}{(x-1)(2x+3)}dx$; 3) $\int \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}dx$.

Упражнения для повторения

6.153. Проходит ли прямая $3x + 0{,}6y = 3{,}5$ через точку пересечения прямых $y = 2x - 8$ и $3y + 7x = 2$?

6.154. Докажите тождество

$$\frac{1+\mathrm{tg}\,t+\mathrm{tg}^2 t}{1+\mathrm{ctg}\,t+\mathrm{ctg}^2 t} = \mathrm{tg}^2 t.$$

Выводы раздела «ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ»

Если $a > 0$, $a \neq 1$, то функция $y = a^x$ называется ***показательной функцией*** с основанием a. Здесь $x \in (-\infty; +\infty)$. Область определения показательной функции такова: $(-\infty; +\infty)$. Область значений показательной функции такова: $(0; +\infty)$, т.е. для всех $x \in (-\infty; +\infty)$ выполняется неравенство $a^x > 0$.

Значение предела $\lim\limits_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^a$ называют числом e.

Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от единицы основанию a называют показатель степени c, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b: $a^c = b$

Для любых чисел $a > 0$ $(a \neq 1)$, $b > 0$, $c > 0$ справедливы следующие равенства:

1°) $\log_a 1 = 0$; 2°) $\log_a a = 1$;

3°) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$; 4°) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;

5°) $\log_a b^m = m \log_a b$, $m \in R$; 6°) $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$, $n \in R$, $n \neq 0$;

7°) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1$.

Логарифм по основанию 10 называют ***десятичным логарифмом*** и для его обозначения используют символ lg, т.е. $\log_{10} a = \lg a$.

Логарифм по основанию e называют ***натуральным логарифмом*** и для его обозначения используют символ ln, т.е. $\log_e a = \ln a$.

Функция вида $y = \log_a x (a > 0,\ a \neq 1)$ называется логарифмической функцией по основанию a. Область определения логарифмической функции – множество всех положительных действительных чисел $R+$, т.е. $D(\log_a x) = (0;\ +\infty)$. Область значений логарифмической функции – множество всех действительных чисел R, т.е. $(-\infty;\ +\infty)$.

Если $a > 1$, то логарифмическая функция $y = \log_a x$ возрастает. Если $0 < a < 1$, то логарифмическая функция $y = \log_a x$ убывает. Графики логарифмической функции $y = \log_a x$ и показательной функции $y = a^x$ с равными основаниями симметричны относительно прямой $y = x$, являющейся биссектрисой I и III координатных четвертей.

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Термины на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Логарифм	Логарифм	Logarithm
Показательная функция	Көрсеткіштік функция	Exponential function
Десятичный логарифм	Ондық логарифм	Decimal logarithm
Натуральный логарифм	Натурал логарифм	Natural logarithm
Возрастающая функция	Өспелі функция	Increasing function
Убывающая функция	Кемімелі функция	Decreasing function

Раздел 7. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

В 2014 г. численность сайгаков в степях Казахстана составила 257 тыс. особей, в 2015 г. – 295470 особей, но в этом же году вследствие пастереллеза в одной только Бетпакдалинской популяции погибло 130000 сайгаков. По результатам переписи в 2016 г. их количество составило 108300. Изучив раздел, с помощью логарифмических и показательных уравнений вы сможете определить, в каком году количество сайгаков превысит показатель 2015 г. Сведения взяты из следующего источника: https://www.inform.kz/ru/msh-rk-chislennost-saygakov-v-kazahstane-sostavlyaet-bolee-108-tys-osobey_a2914497

В предыдущем разделе мы узнали, что область применения показательной и логарифмической функций очень широка. С их помощью мы можем строить и исследовать математические модели различных явлений. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства имеются во всех сферах науки и техники. С ними связано решение многих задач физики, химии, биологии и т.п. Поэтому в этом разделе вы начнете изучение одной из интересных тем математики – показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Содержание раздела

7.1. Показательные уравнения и системы уравнений

Изучив пункт, вы:

- узнаете определение простейшего показательного уравнения;

- овладеете методами решения показательных уравнений;
- научитесь решать системы показательных уравнений.

Уравнения, содержащие переменную в показателе степени, называются ***показательными уравнениями***.

Например, показательными являются уравнения

$$2^x = 32,\ 7^x + 3 \cdot 7^{1-x} = 6{,}25^x - 13^x + 8^x = 0.$$

Определение. Если $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, то уравнение вида $a^x = b$ называют ***простейшим показательным уравнением***.

В предыдущем разделе мы показали, что если $b > 0$, то простейшее показательное уравнение имеет только одно решение, а если $b < 0$, то уравнение не имеет решений. Следовательно, при $b > 0$ уравнение $a^x = b$ имеет единственное решение, определяемое равенством

$$x = \log_a b. \qquad (1)$$

Пример 1. Решим уравнение $2^{x-2} = 16$.

▲ Согласно формуле (1) имеем:

$$x - 2 = \log_2 16 \Rightarrow x = 2 + \log_2 2^4 \Rightarrow x = 2 + 4\log_2 2 \Rightarrow x = 6.$$

Ответ: $x = 6$. ■

Показательные уравнения обычно решают приведением их к виду

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ (a > 0,\ a \neq 1).$$

Это уравнение в общей области определения функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Для решения показательных уравнений существуют разные методы: метод приведения обеих частей уравнения к одному основанию, метод разложения на множители, метод введения новой переменной и т.д. Познакомимся с каждым из методов при решении примеров.

Метод приведения обеих частей уравнения к одному основанию

Чтобы решить простейшее уравнение $a^x = b$, его правую часть записывают в виде степени с основанием a. Например, в рассмотренном выше примере, если учесть, что $16 = 2^4$, то данное уравнение достаточно переписать в виде $2^{x-2} = 2^4$. Отсюда $x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6$.

Ответ: $x = 6$.

Пример 2. Решим уравнение: 1) $5^x = 125$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$; 3) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$.

▲ 1) Представим правую часть уравнения в виде степени с основанием 5 : $125 = 5^3$. Тогда $5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$. Ответ: $x = 3$.

2) Чтобы решить уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$, запишем правую его часть в виде $81 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$. Отсюда $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \Rightarrow x = -4$. Ответ: $x = -4$.

3) Решим уравнение $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$. Пользуясь свойствами степени с рациональным показателем, запишем правую часть уравнения в виде $16\sqrt{2} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{4,5}$. Тогда данное уравнение запишем в виде $2^{x^2-6x-2,5} = 2^{4,5}$. Отсюда получим квадратное уравнение $x^2 - 6x - 2,5 = 4,5$, или $x^2 - 6x - 7 = 0$, корни которого равны 7 и -1. Ответ: $x = -1$, $x = 7$.

4) Решим уравнение $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$. Применив к левой части уравнения свойство степени $a^x \cdot b^x = (ab)^x$, получим: $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64} \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \Rightarrow x = 3$. Ответ: $x = 3$. ■

Пример 3. Решим уравнение $2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}} \cdot 0,5^{\frac{1}{\sqrt{x}+1}} = 4^{\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}}$.

▲ ОДЗ уравнения определяется неравенствами $x > 0$, $x \neq 1$. Поэтому данное уравнение запишем так: $2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}} \cdot 2^{-\frac{1}{\sqrt{x}+1}} = 2^{\frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}} \Rightarrow$ $\Rightarrow 2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}} = 2^{\frac{2}{\sqrt{x}+1}}$.

Отсюда $\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{2}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{3}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow 2\sqrt{x} = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 4$.

Ответ: $x = 4$. ■

При решении уравнений в основном часто применяются два метода: введение новой переменной и разложение на множители. В обоих методах данное сложное уравнение приводят к простейшему уравнению. Рассмотрим примеры решения показательных уравнений этими методами.

Метод разложения на множители

Решая показательное уравнение этим методом, степень в качестве общего множителя выносят за скобки, тем самым данное уравнение приводят к простейшему показательному уравнению.

Пример 4. Решим уравнение: 1) $6^{x+2} - 6^x = 210$; 2) $3^{3\cos x - 1} + 3^{3\cos x - 2} + 3^{3\cos x - 3} = 13$.

▲ 1) Преобразуя уравнение, получим $6^x \cdot 36 - 6^x = 210 \Rightarrow 35 \cdot 6^x = 210 \Rightarrow 6^x = 6 \Rightarrow x = 1$. Ответ: $x = 1$.

2) В левой части уравнения $3^{3\cos x - 1} + 3^{3\cos x - 2} + 3^{3\cos x - 3} = 13$ вынесем общий множитель за скобки. Получим $3^{3\cos x - 3}(3^2 + 3 + 1) = 13 \Rightarrow 3^{3\cos x - 3} = 1 = 3^0 \Rightarrow 3\cos x - 3 = 0 \Rightarrow \cos x = 1$. Последнее тригонометрическое уравнение имеет такое решение: $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = 2\pi n$, $n \in Z$. ■

Пример 5. Решим уравнение $x^2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + x + 2 = 2^{1+\sqrt{x}} + x^2 + x \cdot 2^{\sqrt{x}}$.

▲ ОДЗ уравнения определяется неравенством $x \geqslant 0$ Группируя подобные слагаемые, приведем уравнение к виду $x^2\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)-x\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)-2\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)=0$, или $\left(x^2-x-2\right)\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)=0$. Тогда данное уравнение равносильно совокупности уравнений $x^2 - x - 2 = 0$ и $2^{\sqrt{x}} - 1 = 0$. Корни первого уравнения таковы: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, корень второго уравнения $x_3 = 0$. Так как $(-1) \notin [0; +\infty)$ и $0 \in [0; +\infty)$, $2 \in [0; +\infty)$, то получаем ответ: 0; 2. Ответ: $x = 0$, $x = 2$. ■

Метод введения новой переменной

Пример 6. Решим уравнение $81^x - 2 \cdot 9^x - 3 = 0$.

▲ Введя обозначение $9^x = y$, запишем данное уравнение в виде $y^2 - 2y - 3 = 0$. Отсюда $y_1 = -1$, $y_2 = 3$. Так как показательная функция $y = 9^x$ принимает только положительные значения, то надо отобрать из этих корней положительные, т.е. значение корня y_2. Из уравнения $9^x = 3$ получаем $x = 0{,}5$.

Ответ. 0,5. ■

Пример 7. Решим уравнение $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$.

▲ Перепишем уравнение в виде $6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0$ и разделим обе части полученного уравнения на $2^{2x}(2^{2x} \neq 0)$: $6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0$. Введя новую переменную $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$, получим уравнение $6y^2 - 13y + 6 = 0$. $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = \frac{3}{2}$ – корни уравнения. Вместо y подставив значения y_1 и y_2, получим $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$. Решив эти уравнения, получим ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. ■

Наряду с показательными уравнениями встречаются также уравнения вида

$$[a(x)]^{f(x)} = [a(x)]^{g(x)},$$

т.е. так называемые степенно-показательные уравнения. ОДЗ этих уравнений определяется пересечением областей определения выражений $f(x)$, $g(x)$ и множеством значений x, при которых выполняется неравенство $a(x) > 0$. Если $m > 0$ и $m \neq 1$, то степенно-показательное уравнение равносильно уравнению

$$f(x)log_m a(x) = g(x)log_m a(x).$$

Последнее уравнению, в свою очередь, равносильно совокупности уравнений

$$\log_m a(x) = 0,\ f(x) = g(x).$$

Если же в ОДЗ выполняются равенства $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, то к указанной совокупности уравнений необходимо присоединить уравнение $a(x) = 0$.

Пример 8. Решим уравнение $|x-3|^{x^2-x} = (x-3)^2$.

▲ Данное уравнение имеет смысл для любых действительных значений x, т.е. ОДЗ уравнения есть множество $(-\infty; \infty)$. Учитывая предыдущее замечание, получим, что данное уравнение равносильно совокупности уравнений $x - 3 = 0$, $|x - 3| = 1$ и $x^2 - x = 2$. Отсюда $x_1 = 3$; $|x - 3| = 1 \Rightarrow x_2 = 2$; $x_3 = 4$; $x^2 - x = 2 \Rightarrow x_4 = = -1$, $x_5 = 2$.

Ответ: $x_1 = 3$, $x = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = -1$, $x_5 = 2$. ■

Рассмотрим решение системы показательных уравнений.

Пример 9. Решим систему уравнений $\begin{cases} 3^x + 2^{x+2y+1} = 5, \\ 3^{x+1} - 2^{x+2y} = 1. \end{cases}$

▲ Перепишем данную систему в виде $\begin{cases} 3^x + 2 \cdot 2^{x+2y} = 5, \\ 3 \cdot 3^x - 2^{x+2y} = 1 \end{cases}$ и введем обозначения: $3^x = u$, $2^{x+2y} = v$. Получим $\begin{cases} u + 2v = 5, \\ 3u - v = 1. \end{cases}$ Отсюда $u = 1$, $v = 2 \Rightarrow 3^x = 1$, $2^{x+2y} = 2 \Rightarrow x = 0$, $x + 2y = 1$.

Ответ: $x = 0$, $y = 0{,}5$. ■

1. Какое уравнение называется простейшим показательным уравнением?
2. Сформулируйте свойства показательной функции.
3. Опишите основные методы решения показательных уравнений.
4. Напишите свойства степени с рациональным показателем.

Упражнения

А

7.1. Решите простейшие показательные уравнения:

1) $5^x = 625$; 2) $2^x = 1024$; 3) $3^x = 729$;

4) $7^x = \dfrac{1}{343}$; 5) $2^{x+3} = 64$; 6) $3^{\frac{x}{2}} = 27$;

7) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 216$; 8) $\sqrt[4]{7^x} = \sqrt[5]{343}$; 9) $6^{3-x} = 216$;

10) $8^x = 4^{0,5}$; 11) $3^x = 7$; 12) $(0,2)^{x+1} = 5$.

7.2. Решите показательное уравнение, приведя обе его части к одному основанию:

1) $2^{3x} = 512^{\frac{1}{3x}}$; 2) $0,5^{x^2+x-2,5} = \sqrt{2}$;

3) $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$; 4) $\left(\dfrac{1}{0,125}\right)^x = 128$;

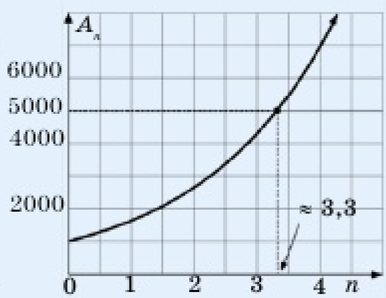
5) $5^{x^2+x-5} = \dfrac{1}{125}$; 6) $(0,5)^{x^2-9x+17,5} = \dfrac{8}{\sqrt{2}}$.

Практическая работа

Прирост (убыль) популяции

7.3. Фермер, наблюдая за процессом повреждения посевных полей насекомыми-вредителями, пришел к следующему выводу: площадь пораженных полей определяется закономерностью $A_n = 1000 \cdot 2^{0,7n}$ (га), где n – количество недель. Постройте график функции A_n и вычислите, через сколько дней насекомые могут повредить 5000 га полей.

▲ Закономерность повреждения посевных полей определяется показательной функцией $y = 1000 \cdot 2^{0,7x}$. Так как основание степени больше 1, данная функция является возрастающей. С помощью графического онлайн-калькулятора https://www.desmos.com/calculator построим график этой функции.



Теперь вычислим время, за которое будут повреждены 5000 га полей. Для этого решим показательное уравнение.

$A_n = 5000 \Rightarrow 1000 \cdot 2^{0,7n} = 5000,\ 2^{0,7n} = 5,$

$0,7n = \log_2 5,\ n = \dfrac{10}{7}\log_2 5 \Rightarrow \log_2 5 = \dfrac{\lg 5}{\lg 2},\ n = \dfrac{10\lg 5}{7\lg 2} \approx 3,3.$

Таким образом, через 3,3 недели, т.е. через 3 недели и 2 дня (или 23 дня) будет повреждено 5000 га полей. ■

7.4. Бактерии помещены в благоприятную среду. Их общая масса (в граммах) увеличивается с течением времени (в часах) по следующему закону: $M_t = 20 \cdot 2^{0,15t}$. Определите время, необходимое для того, чтобы масса бактерий составила: 1) 30 г; 2) 100 г.

7.5. Бактерии помещены в благоприятную среду. Их общая масса (в граммах) увеличивается с течением времени (в часах) по следующему закону: $M_t = 25 \cdot e^{0,1t}$. Определите время, необходимое для того, чтобы масса бактерий составила: 1) 50 г; 2) 100 г.

7.6. Биолог провел мониторинг распространения муравьев на новых участках. В результате наблюдений выявилось, что площадь распространения муравьев определяется законом $A_n = 2000 \cdot e^{0,57n}$ (га), где n – количество недель. Постройте график функции и найдите время, необходимое для распространения муравьев на участке площадью 10000 га.

Финансовый рост

Если инвестировать сумму в объеме U_0 при сложной процентной ставке r % за определенный период, то накопленная за n периодов сумма вычисляется по формуле $U_n = U_0 \cdot (1 + r)^n$. Значение n можно вычислить, решив показательное уравнение и используя логарифмы.

7.7. Максат вложил 200000 тг на депозит под 10% годовых. Сколько ему нужно ждать, чтобы вложенная им сумма увеличилась до 1000000 тг?

▲ Воспользуемся формулой $U_n = U_0 \cdot (1 + r)^n$. Получим:

$$U_n = 1000000,\ U_0 = 200000,\ r = 0,1$$

$$1000000 = 200000 \cdot (1 + 0,1)^n \Rightarrow 5 = 1,1^n.$$

$n = \log_{1,1} 5 = \dfrac{\lg 5}{\lg 1,1} = 16,89$, т.е. через 16,89 лет, или приблизительно 203 месяца, сумма, вложенная Максатом на депозит, вырастет до миллиона тенге. ■

7.8. Стоимость дома с течением времени растет, увеличиваясь ежегодно на 7,5 %. Определите, через какое время стоимость дома достигнет 25000000 тг, если на данный момент она составляет 16000000 тг.

7.9. Темирлан вложил 100000 тг на депозит под 12,8 % годовых. Через какое время сумма вклада вырастет до 150000 тг?

7.10. Дамир положил 15000 тг на депозитный счет при ежемесячной сложной процентной ставке 4,8%. Через сколько месяцев сумма вклада достигнет 25000 тг?

7.11. Решите показательное уравнение методом разложения на множители:

1) $5^{x+2} - 5^x = 120$;
2) $3^{x+2} - 3^x = 72$;
3) $2^x - 2^{x-4} = 15$;
4) $3^{x-3} + 3^{x-2} + 3^{x-1} = 3159$;
5) $2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x-2} = 1443$;
6) $3^{x^2+1} + 3^{x^2-1} = 270$.

7.12. Решите показательное уравнение:

1) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$;
2) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;
3) $2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280$;
4) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$;

7.13. Решите показательное уравнение методом введения новой переменной:

1) $9^{x+3} + 3^{x+2} = 10$;
2) $4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1 = 0$;
3) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$;
4) $5^{4\sqrt{x}} - 14 \cdot 5^{2\sqrt{x}} - 275 = 0$.

7.14. Решите уравнение:

1) $5^{2x^2-x} = 6^{2x^2-x}$;
2) $8 \cdot 7^{x^2-5x+7} = 7 \cdot 8^{x^2-5x+7}$;
3) $0,6^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$;
4) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{125}{27}\right)^3$.

7.15. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{0,5y} = 25; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 3^{2x} + 3^y = 12, \\ 3^{x+y} = 27. \end{cases}$

B

Практическая работа

7.16. Радиоактивное вещество с течением времени t (в неделях) распадается, и его масса M_t (в граммах) уменьшается по закону $M_t = 1000 \cdot e^{-0,04t}$. Определите время, в течение которого распадется половина первоначальной массы вещества. Через какое время масса вещества составит 25 г?

7.17. Парашютист совершает прыжок с аэроплана. Скорость его падения определяется формулой $V = 50(1 - e^{-0,2t})$ м/с. Через какое время скорость будет равна 40 м/с?

7.18. Температура жидкости, помещенной в морозильную камеру холодильника, подчиняется закону $T = 4 + 96 \cdot e^{-0,03t}\ C^\circ$, где t – время (в минутах). Найдите время, необходимое для охлаждения жидкости до: 1) 25 C°; 2) 5 C°. Какова температура в морозильной камере?

7.19. Радиоактивное вещество с течением времени t (в неделях) распадается, и его масса M_t (в граммах) уменьшается по закону $M_t = 1000 \cdot 2^{-0,04t}$. Определите время, в течение которого распадется половина первоначальной массы вещества. Через какое время масса вещества составит 1% первоначальной массы?

7.20. Решите уравнение:

1) $2^{2x^2-5x-1} = 0,5\sqrt[3]{4^{2x}}$;

2) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$;

3) $25^{x-1} - 9^{2x-2} + 8 \cdot 5^{2x-3} = 4 \cdot 9^{2x-3}$;

4) $81^x - 5^{2x} - 4 \cdot 9^{2x-1} = 4 \cdot 5^{2x-1}$.

7.21. Найдите единственный корень уравнения:

1) $7^x + 24^x = 25^x$;   2) $12^x + 5^x = 13^x$;

3) $2^{x^2} + 5^{x^4} = 2 - \mathrm{tg}^2 x$;   4) $3^{x^2+1} + 5^{x^4} = 4 - \sin^2 x$.

7.22. Решите уравнение:

1) $2^{x^2-6x+0,5} = \dfrac{1}{16\sqrt{2}}$;   2) $16\sqrt[5]{8^{x^2-3x-5}} = 128$;

3) $3^{x+1} \cdot 4^x = 0,25 \cdot 12^{3x-1}$;   4) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3$.

7.23. Решите уравнение:

1) $5^{x-1} = 2$; 2) $16^{2x-1} = 8^{x-2}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = 3$; 4) $2^{3x-1} = (0,25)^{2-x}$.

7.24. Решите уравнение:

1) $\sqrt{3^{x-54}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-58}} = 162$; 2) $5^{2x-1} + 4^x = 5^{2x} - 4^{x+1}$;

3) $6^x + 4^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$; 4) $9^x - 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$.

7.25. Решите уравнение:

1) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$; 2) $5^{x-3} - 5^{x-4} = 16 \cdot 5^{x-5} + 4$;

3) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$.

7.26. Решите уравнение:

1) $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$; 2) $3^{2-x} \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x$.

7.27. Решите уравнение:

1) $\sqrt[x]{3} - \sqrt[2x]{3} - 2 = 0$; 2) $6 \cdot \sqrt[x]{9} - 13 \cdot \sqrt[x]{6} + 6 \cdot \sqrt[x]{4} = 0$.

7.28. Решите уравнение:

1) $4^{x-\sqrt{x^2-1}} + 2^{x-\sqrt{x^2-1}} = 6$; 2) $3^{1-x} - 3^{1+x} + 9^x + 9^{-x} = 0$.

7.29*. Решите уравнение:

1) $\left(4+\sqrt{5}\right)^x + \left(4-\sqrt{5}\right)^x = 2$; 2) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

7.30. Решите систему показательных уравнений:

1) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 5, \\ 2^{x+y} = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^x = 1,5 + y^{-x}, \\ y^{2,5+x} = 64. \end{cases}$

7.31. С помощью графического метода определите, сколько решений имеет данное уравнение:

1) $2^x + x - 2 = 0$; 2) $3^x = x + 2$.

7.32. Решите уравнение:

1) $2^{3x} = \sqrt[3x]{512}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \sqrt[x]{\frac{4}{3}} = \frac{9}{16}$;

3) $7^{x+2} - 7^{x+1} = 6 \cdot 2^{x+1}$; 4) $7^{1-|x|} = 49$.

7.33. Решите уравнение:

1) $4^{\sqrt{x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} + 2 = 0$; 2) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{1-\sqrt{9-x}} = 5^{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{5}$;

3) $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$; 4) $5^{x}\sqrt[x]{8^{x-1}} = 500$;

5) $27^{x} - 13 \cdot 9^{x} + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$.

C

7.34*. При каких значениях параметра a данное уравнение имеет два корня?
1) $25^{x+0,5} - (5a + 2) \cdot 10^{x} + a \cdot 4^{x+0,5} = 0$;
2) $2 \cdot 9^{x} - (2a + 3) \cdot 6^{x} + 3a \cdot 4^{x} = 0$.

В задачах **7.35 – 7.37** решите данные уравнения и системы уравнений:

7.35. 1) $\begin{cases} 2^{x} \cdot 3^{y} = 6, \\ 3^{x} \cdot 4^{y} = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{y} = 243, \\ \sqrt[y]{1024} = \left(\frac{2x}{3}\right)^{2}. \end{cases}$

7.36. 1) $5^{2+4+\ldots+2x} = 0{,}04^{-45}$; 2) $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$.

7.37. 1) $|x-3|^{3x^{2}-10x+3} = 1$; 2) $(x^{2} - x - 1)^{x^{2}-1} = 1$.

7.38*. Решите уравнение $9^{-|x+2|} - 4 \cdot 3^{-|x+2|} - a = 0$ для всех действительных значений параметра a.

Упражнения для повторения

7.39. Упростите выражения:

1) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} \div \dfrac{1}{x^{1,5}-1}$; 2) $\left(2^{\frac{3}{2}} + 27y^{\frac{3}{5}}\right) \div \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{1}{5}}\right)$.

7.40. Постройте график функции $y = 2^{|x+3|} - 5$.

7.41. Пусть $\lg 2 = m$, $\lg 3 = n$. Найдите $\log_{5} 6$.

7.2. Логарифмические уравнения и системы уравнений

Изучив пункт, вы:

- научитесь решать логарифмические уравнения;
- научитесь решать системы логарифмических уравнений.

Определение. ***Простейшими логарифмическими уравнениями называют уравнения вида*** $\log_a x = p$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Покажем, что для любого значения p простейшее логарифмическое уравнение имеет единственный корень. В самом деле, нам известно, что корень уравнения $\log_a x = p$ равен абсциссе точки пересечения графика функции $y = \log_a x$ и прямой $y = p$. На рисунках 7.1 и 7.2 мы видим, что при любых значениях с график логарифмической функции и прямая пересекаются только в одной точке. Это значит, что уравнение $\log_a x = p$ при любых значениях p имеет единственный корень. Применяя основное логарифмическое тождество $x = a^{\log_a x}$, мы получаем, что единственное решение уравнения $\log_a x = p$ определяется формулой $x = a^p$.

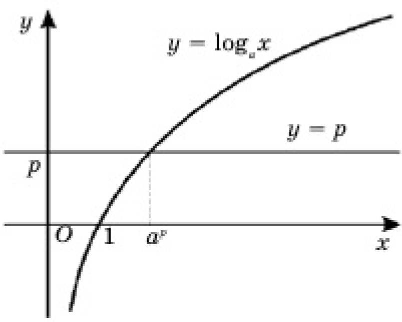


Рис. 7.1

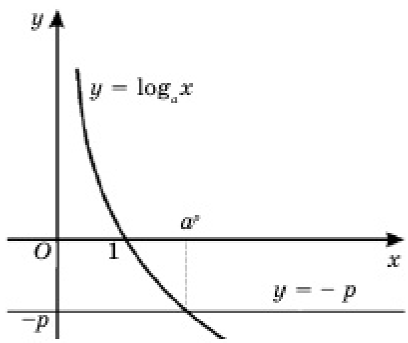


Рис. 7.2

Рассмотрим основные методы решения логарифмических уравнений.

Использование определения логарифма

Пример 1. Решим уравнение $\log_x(x^3 - 5x + 10) = 3$.

▲ По определению логарифма $x^3 - 5x + 10 = x^3 \Rightarrow 5x = 10$, $x = 2$. *Проверка*. $\log_2(2^3 - 5 \cdot 2 + 10) = \log_2 8 = 3$. ■

Приведение логарифмического уравнения к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Пример 2. Решим уравнение $\lg(x + 5) - \lg(x^2 - 25) = 0$.

▲ $\lg(x + 5) - \lg(x^2 - 25) \Rightarrow x + 5 = x^2 - 25 \Rightarrow x^2 - x - 30 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = -5$.

Проверим, являются ли найденные значения x корнями данного уравнения: $x = 6$ – корень уравнения, т.к. $\lg(6 + 5) - \lg(6^2 - 25) = \lg 11 - \lg 11 = 0$; $x = -5$ не может быть корнем уравнения, т.к. выражение $\lg(-5 + 5) - \lg(25 - 25)$ не определено.

Ответ: $x = 6$. ■

Метод введения новой переменной

Пример 3. Решить уравнение $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$.

▲ Введя новую переменную $y = \log_2 x$, получим $y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y_1 = 2,\ y_2 = -1$. Теперь найдем значения переменной x:

$\log_2 x = 2 \Rightarrow x_1 = 4$, $\log_2 x = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$. Сделав проверку, убедимся, что оба значения x удовлетворяют уравнению.

Ответ: $4;\ \frac{1}{2}$. ■

Метод почленного логарифмирования

Пример 4. Решим неравенство $x^{\log_2 x - 2} = 8$.

▲ $x^{\log_2 x - 2} = 8 \Rightarrow x^{\log_2 x} \cdot x^{-2} = 8 \Rightarrow x^{\log_2 x} = 8x^2$. Прологарифмируем обе части последнего уравнения по основанию 2:

$$\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 8 + \log_2 x^2 \Rightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$$

Введя новую переменную $\log_2 x = y$, получим

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = 3,\ y_2 = -1.$$

Итак,

$$\log_2 x = 3 \Rightarrow x_1 = 8;$$

$$\log_2 x = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $8;\ \frac{1}{2}$. ■

Пример 5. Решим уравнение $\log_3(x + 3) + \log_3(x + 1) = 1$.

▲ Используя формулу $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$, приведем левую часть данного уравнения к виду $\log_3(x + 3)(x + 1)$, или $\log_3(x^2 + 4x + 3)$. Тогда уравнение запишется в виде

$$\log_3(x^2 + 4x + 3) = 1.$$

Отсюда $x^2 + 4x + 3 = 3^1 \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -4.$

Так как логарифмическая функция определена не на всей числовой оси, необходимо проверить, удовлетворяют ли найденные решения данному уравнению.

Проверка: $x = 0$ – корень уравнения, так как $\log_3(3 + 0) + \log_3(1 + 0) = \log_3 3 = 1$; $x = -4$ не является корнем уравнения, так как выражение $\log_3(3 - 4) + \log_3(1 - 4)$ не определено. Ответ : $x = 0$.

Проверку найденных значений x можно провести другим способом – по найденной заранее области допустимых значений (сокращенно ОДЗ). Для данного уравнения ОДЗ определяется из системы неравенств $\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0. \end{cases}$ Решив эту систему, получим $x > -1$, т.е. ОДЗ есть множество $(-1; +\infty)$. Из того, что $0 \in (-1; +\infty)$, но $-4 \notin (-1; +\infty)$ получаем ответ: $x = 0$. ■

Приведение логарифмического уравнения к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $(a > 1,\ a \neq 1)$

Потенцирование – это преобразование, обратное логарифмированию.

Это уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Последние два неравенства в этой системе определяют ОДЗ данного уравнения. Обычно ОДЗ находят перед тем, как приступить к решению логарифмического уравнения.

Часто встречаются уравнения с переменным основанием логарифма:

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x).$$

Для такого уравнения ОДЗ определяется из системы неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

В этой ОДЗ данное уравнение равносильно уравнению

$$f(x) = g(x).$$

Пример 6. Решим уравнение $\ln(x + 4) + \ln(2x + 3) = \ln(1 - 2x)$.

▲ Сначала определим ОДЗ из системы неравенств:

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ 2x + 3 > 0 \Rightarrow -1,5 < x < 0,5, \\ 1 - 2x > 0, \end{cases}$$

т.е. ОДЗ является интервал $(-1,5;\ 0,5)$.

Преобразуем данное уравнение:

$\ln(x + 4)(2x + 3) = \ln(1 - 2x) \Rightarrow (x + 4)(2x + 3) = 1 - 2x \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 + 13x + 11 = 0.$

Отсюда $x_1 = -5,5$, $x_2 = -1$. Из найденных значений x только второе входит в ОДЗ.

Ответ: -1. ■

Пример 7. Решим уравнение

$$\log_{2x^2-3x+1}\left(3x^2 - x + 1\right) = \log_{2x^2-3x+1}\left(x^3 - x^2 - x + 1\right).$$

▲ Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 > 0, \\ 2x^2 - 3x + 1 \neq 1, \\ 3x^2 - x + 1 > 0, \\ x^2 - x^2 - x + 1 > 0, \\ 3x^2 - x + 1 = x^3 - x^2 - x + 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0,5) \cup (1; -\infty), \\ x \neq 0, x \neq 1,5, \\ x \in (-\infty; +\infty), \\ (x-1)^2 \cdot (x+1) > 0, \\ x^3 - 4x^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (0; 0,5) \cup (1; 1,5) \cup (1,5; +\infty), \\ x \in (-1; 1) \cup (1; +\infty), \\ x_1 = 0, x_2 = 4. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-1; 0) \cup (0; 0,5) \cup (1; 1,5) \cup (1,5; +\infty), \\ x = 4. \end{cases}$$

Ответ: $x = 4$. ■

Рассмотрим напоследок пример решения системы, состоящей из показательного и логарифмического уравнений.

Пример 8. Решим систему уравнений $\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 2, \\ \log_3 x + \log_3 y = 1. \end{cases}$

▲ ОДЗ определяется системой неравенств $x > 0$, $y > 0$. В этом множестве имеет место равенство

$$\log_3 x + \log_3 y = \log_3 xy = 1 \Rightarrow xy = 3.$$

Введя обозначения $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = u$, $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} = v$, получим $u \cdot v = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} =$ $= xy = 3$. Тогда данную систему можно переписать в виде $\begin{cases} u - v = 2, \\ uv = 3. \end{cases}$
Решениями полученной системы являются $u_1 = 3$, $v_1 = 1$ и $u_2 = -1$, $v_2 = -3$.

При $u = 3$, $v = 1$ получим $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = 3$, $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 1$. Учитывая, что $xy = 3$, найдем $x_1 = 9$, $y_1 = \frac{1}{3}$.

Аналогично, при $u = -1$, $v = -3$ получим $x_2 = -\frac{1}{3}$, $y_2 = -9$. Принимая во внимание ОДЗ данной системы ($x > 0$, $y > 0$), получим ответ: $x = 9$, $y = \frac{1}{3}$. ■

1. Дайте определение простейшего логарифмического уравнения.
2. Как определяется область допустимых значений переменной в логарифмическом уравнении?
3. Опишите суть метода введения новой переменной при решении логарифмического уравнения.

Упражнения

А

7.42. Решите простейшее логарифмическое уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(2x + 3) = 0$; 2) $\log_2(x + 1) = 3$; 3) $\ln(3x - 5) = 0$;

4) $\log_{0,3}(5 - x) = -1$; 5) $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_2(3 - x)$; 6) $\lg(2x - 1) = \lg 3$.

7.43. Решите уравнение:

1) $\lg(3 - x) = \lg(x + 2)$; 2) $\lg x + \lg(x - 1) = \lg 2$;

3) $\log_5(x + 1) = \log_5(4x - 5)$; 4) $\log_2(4 - x) = \log_2(1 - 2x)$.

7.44. Решите уравнение:

1) $\lg(5 - x) + \lg x = \lg 4$; 2) $\lg(x + 1) + \lg(x - 1) = \lg 3$;

3) $\ln(6 - x) + \ln x = \ln 5$; 4) $\lg x + \lg(x - 3) = 10$.

7.45. Решите логарифмическое уравнение:

1) $\log_2 x = 3 - \log_2 5$; 2) $\log_3(2x - 1) = -2\log_3 \frac{1}{4}$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} x = 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 7$; 4) $\log_{0,2}(x - 1) = 4$;

5) $\log_5 \log_3 \log_2(x^2 + 7x) = 0$; 6) $\log_4 \log_2 x = 0,5$.

7.46. Найдите число, обратное корню уравнения $\log_5(2x + 33) - \log_5 13 = \log_5 x$.

7.47. Найдите произведение корней уравнения

$$\sqrt[3]{10 + 3x - x^2} \cdot \lg(7 - x - x^2) = 0.$$

7.48. Решите уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1) = \log_{\frac{1}{2}}(2x - 5)$; 2) $0{,}1 \cdot \lg x - \lg x + 0{,}9 = 0$;

3) $\lg(x^2 - x) = 1 - \lg 5$; 4) $\log_6(2x^2 - x) = 1 - \log_6 2$.

7.49. Решите логарифмическое уравнение методом введения новой переменной:

1) $\frac{1}{12}\ln^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\ln x$; 2) $\log_2^2 x^3 - 20 \cdot \log_2 \sqrt{x} + 1 = 0$;

3) $2\log_3^2 x - 7\log_3 x + 3 = 0$; 4) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$.

7.50. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ \lg x + \lg y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 34, \\ \log_2 x + \log_2 y = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x + y) = 2, \\ \log_3(x - y) = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 20, \\ \log_4 x + \log_4 y = \log_4 36. \end{cases}$

7.51. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 80, \\ \log_2 x + \log_2 y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ \lg x + \lg y = \lg 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_{15} x = 1 - \log_{15} y, \\ \log_2(x + y) = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 20, \\ \log_4 x + \log_4 y = \log_4 36. \end{cases}$

B

7.52. Решите уравнение:

1) $\log_3 \sqrt{2x + 1} = 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2x - 1} = -2$;

3) $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2x + 3}{x - 2} = 1$; 4) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{3x - 5} = 0$.

7.53. Решите уравнение:

1) $2\log_x 3 + \log_{3x} 3 + 3\log_{9x} 3 = 0$;

2) $\log_2(x+1)^2 + \log_2|x+1| = 6$;

3) $\lg\ln x + \lg(\ln x^2 - 1) = 1$;

4) $\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0$.

7.54. Решите уравнение:

1) $\lg\sqrt{3x+1} + \lg\sqrt{x+4} = \lg 12$;

2) $\lg(x-2) - \lg\sqrt{x-4} = \lg 3$;

3) $(x^2-4)\log_3(1 - x^2 - 3x) = 0$;

4) $(x^2 - x - 2)\log_2(x^2 - 4x + 4) = 0$.

7.55. Решите уравнение:

1) $\lg x + \lg x^2 + \lg x^3 = 6$;

2) $\dfrac{\lg x}{1 - \lg x} = 3$;

3) $\log_2\log_2\log_2 x = 0$;

4) $10^{x+\lg 2} = 20$.

7.56. Решите уравнение:

1) $\log_3(5^{2x} - 2\cdot 5^x) = 2\log_9 15$;

2) $\log_2(2^{2(x+1)} + 2^{4x}) = 2\log_4 5$;

3) $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$;

4) $\log_7(6 + 7^{-x}) = 1 + x$.

7.57. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\log_2 x}{\log_x 2} + \log_4 2x = 2$;

2) $\dfrac{\log_3 x}{\log_x 3} = \log_3 x$;

3) $\dfrac{1}{5 - \log_2 x} + \dfrac{1}{1 + \log_2 x} = \dfrac{6}{5}$;

4) $\ln\sqrt{x-3} - \dfrac{1}{2}\left(\ln(x-1)^2 - \ln(x+2)\right) = 0$.

7.58. Решите уравнение:

1) $x^{\log_5 x - 2} = 125$;

2) $x = 10^{1 - \frac{1}{4}\lg x}$;

3) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$;

4) $0{,}1 \cdot x^{\lg x - 2} = 100$;

5) $x^{\lg 2} \cdot 2^{-\lg x} = 1$;

6) $\log_x(9x^2) \cdot \log_3^2 x = 4$;

7) $\log(\log x) + \log(\log x^3 - 2) = 0$;

8) $x^{\log_x 2(x^2-1)} = 5$;

9) $\log\left(\sqrt{6+x} + 6\right) = \dfrac{2}{\log_{\sqrt{x}} 10}$;

10) $2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400$.

7.59. Решите систему логарифмических уравнений:

1) $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 - \lg 8, \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = \lg 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_x(3x + 2y) = 2, \\ \log_y(2x + 3y) = 2. \end{cases}$

7.60. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4^{x+y} = 2^{y-x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4 - 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^y = 3^{12}, \\ y - \log_3 x = 11; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$

7.61. Применяя графический метод, определите, сколько решений имеет уравнение:

1) $\lg x - \dfrac{x}{2} + 4 = 0;$ 2) $\log_2(x + 3) = 3 - x.$

7.62. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \log_8(x+y) + \log_8(7-y) = 1 + \log_8 5; \\ 2^{\log_2(x-y)} = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3^{\log_3(3y-x+24)} = 27; \\ \log_2(2x - 2y) - \log_2(5 - y^2) = 1. \end{cases}$

C

В задачах **7.63 – 7.66** решите уравнения и системы уравнений:

7.63. 1) $\log_8 x + \log_8^2 x + \ldots + \log_8^n x + \ldots = \dfrac{1}{2};$
2) $3^{\lg x} = 18 - x^{\lg 3};$
3) $\log_{x-2}(2x - 9) = \log_{x-2}(23 - 6x);$
4) $\log_{5x-2} 2 + 2 \cdot \log_{5x-2} x = \log_{5x-2}(x + 1).$

7.64. 1) $\log_{x+1}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = \log_{x-\frac{1}{2}}(x+1);$ 2) $0,4^{\lg^2 x+1} = 6,25^{2-\lg x^3};$

3) $\log_x(2x^{x-2} - 1) + 4 = 2x;$ 4) $\dfrac{\lg\left|x^4 + 2x^3 + 2x - 1\right|}{\lg\left|x^2 + x - 1\right|} = 2;$

5) $|x - 1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x - 1|^3.$

7.65. 1) $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y}, \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2 \cdot y^{\log_3 x} = 27, \\ \log_3 y - \log_3 x = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_x (x - 3y) = 2, \\ x \cdot y^{\log_x y} = y^{\frac{5}{2}}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |x|^{\lg|y|} = 4, \\ xy = 40. \end{cases}$

7.66. 1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4; \\ \log_4 x + \log_2 y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 5; \\ 2\log_9 x - \log_3 y = -1. \end{cases}$

7.67. При каких значениях a уравнение $x^2 - 4x - \log_2 a = 0$ имеет действительные корни?

7.68. При каких значениях a уравнение $\lg(x^2 + 2ax) - \lg(8x - 6a - 3) = 0$ имеет единственный корень?

Упражнения для повторения

7.69. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - ab)^{\frac{2}{3}}} : \dfrac{a^{-\frac{3}{2}}\sqrt[3]{a - b}}{a^{1,5} - b^{1,5}}$;

2) $\left(\dfrac{\left(a + \sqrt[3]{a^2x}\right) : \left(x + \sqrt[3]{ax^2}\right) - 1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$.

7.70. Постройте график функции $y = |3^{x-1} - 5|$.

7.71*. Известно, что $\log_a 27 = b$. Найдите $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$.

7.3. Показательные неравенства

Изучив пункт, вы:

- научитесь решать показательные неравенства;
- научитесь решать системы показательных неравенств.

Из свойств показательной функции следует, что: 1) если $a > 1$, то $u > v \Leftrightarrow a^u > a^v$; 2) если $0 < a < 1$, то $u > v \Leftrightarrow a^u > a^v$. Таким образом, простейшие неравенства вида $a^x < b$ сводятся к решению неравенств $a^x > a^{\log_a b}$. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решим неравенство: 1) $5^{3x-2} < 5^{x+3}$; 2) $3^{\frac{x}{2}} < 9$.

▲ 1) Основания обеих частей неравенства $5^{3x-2} < 5^{x+3}$ равны 5. Т.к. $5 > 1$, то знак неравенства не меняется, поэтому $3x - 2 < x + 3 \Rightarrow \Rightarrow 2x < 5 \Rightarrow x < 2{,}5$.

2) Чтобы решить неравенство $3^{\frac{x}{2}} < 9$, нужно обе его части привести к одному основанию: $9 = 3^2 \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} < 3^2$. Знак последнего неравенства не меняется, т.к. $3 > 1$, поэтому $\frac{x}{2} < 2 \Rightarrow x < 4$. ■

Пример 2. Решим неравенство $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 \leqslant 0$.

▲ Введя обозначение $3^x = y$, данное неравенство запишем в виде $y^2 - 10y + 9 \leqslant 0$. Найдем решение этого неравенства: $1 \leqslant y \leqslant 9$. Тогда для переменной x получим неравенство $1 \leqslant 3^x \leqslant 9$. Отсюда $3^0 \leqslant 3^x \leqslant 3^2 \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $[0; 2]$. ■

Пример 3. Решим неравенство $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2^{3-x} + 25^{\frac{1}{\log_3 5}}$.

▲ Принимая во внимание $\frac{1}{4} = 2^{-2}$ и $25^{\frac{1}{\log_3 5}} = 9$, перепишем данное неравенство в виде

$$(2^{-2})^x < 2^{3-x} + 9 \Rightarrow 2^{-2x} - 8 \cdot 2^{-x} - 9 < 0.$$

Обозначив $2^{-x} = y$, получим неравенство $y^2 - 8y - 9 < 0 \Rightarrow \Rightarrow -1 < y < 9$. Возвращаясь к переменной x, получим

$$2^{-x} < 9 \Rightarrow -x < \log_2 9 \Rightarrow -\log_2 9 < x.$$

Ответ: $(-\log_2 9; +\infty)$. ■

Пример 4. Решим неравенство $3^{x-1} > \frac{2 - 3^x}{3^x - 4}$.

▲ Сделав замену $3^x = y$, получим неравенство

$$\frac{1}{3}y > \frac{2-y}{y-4} \Rightarrow \frac{y^2 - y - 6}{3(y-4)} > 0 \Rightarrow \frac{(y+2)(y-3)}{3(y-4)} > 0.$$

Найдем решение последнего неравенства: $y \in (-2; 3)2(4; +\infty)$. Учитывая $3^x = y > 0$, для переменной x получим $\{3^x < 3$ или $4 < 3^x\} \Rightarrow \Rightarrow \{x < 1$ или $\log_3 4 < x\}$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (\log_3 4; +\infty)$. ■

1. Опишите основной алгоритм решения показательного неравенства.
2. Влияет ли основание показательной функции на решение показательного неравенства? Если да, почему?

Упражнения

А

7.72. Решите простейшее логарифмическое неравенство, приведя обе его части к одному основанию:

1) $4^x < 256$; 2) $5^{-x+2} \geqslant 125$; 3) $3^{x+1} < 243$;

4) $3^{2x+1} > 3^{5x+4}$; 5) $\sqrt{5^x} > \sqrt[3]{25}$; 6) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{x-3} \leqslant \left(\dfrac{7}{5}\right)^{2x+5}$;

7) $(0{,}25)^{2-x} > \dfrac{256}{2^{x+3}}$.

7.73. Решите неравенство:

1) $3^x < \dfrac{1}{27}$; 2) $2^x < \dfrac{1}{8}$; 3) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x+2} > \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}$;

4) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x^2-x} < \dfrac{1}{16}$; 5) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3-x} < 25$; 6) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+3} < 9$.

7.74. Найдите наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству:

1) $5^{x-1} < 25$; 2) $3^{3-x} \geqslant 9$; 3) $6^{2x} \leqslant \dfrac{1}{36}$;

4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-2} \geqslant 4$; 5) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{5-3x} \leqslant 81$; 6) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-3} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}$.

Практическая работа

7.75. В 2014 г. количество сайгаков в нашей стране оценивалось в 257 тыс. особей, в 2015 г. их количество увеличилось до 295 тыс. Но в этом же году вследствие инфекционной болезни (пастереллез) численность сайгаков резко сократилась (только в Бетпакдалинской популяции погибло 130 тыс. сайгаков). Согласно ежегодной переписи в 2016 г. их общее количество составило 108300 особей. С помощью логарифмической и показательной функций определите, в каком году численность сайгаков в нашей стране при благоприятных условиях превысит показатель 2015 г.

▲ Прирост или убыль популяции описывается показательной функцией $y = y_0 a^x$. Примем начальное количество сайгаков равным 257 тыс. (2014 г.). Тогда получим $y = 257000 \cdot a^x$. Через год количество сайгаков увеличилось до 295 тыс., следовательно, $295000 = 257000 \cdot a^1$, или $a \approx 1,149$. Но в 2015 г. из-за болезни количество сайгаков сократилось до 108300. Поэтому, считая 2016 г. начальным временем прироста, численность сайгаков можно описать следующей функцией:

$$y = 108300 \cdot 1,149^x$$

Подсчитаем, сколько времени понадобится, чтобы количество сайгаков превысило 295 тыс.:

$$108300 \cdot 1,149^x > 295000 \Rightarrow 1,149^x > 2,724,$$

$$x > \log_{1,149} 2,724,$$

$$x > \frac{\lg 2,724}{\lg 1,149} = 7,215 \approx 7.$$

Таким образом, чтобы вернуться к уровню 2015 г., т.е., чтобы количество сайгаков составило 295000, начиная с 2016 г. потребуется 7 лет, т.е. это произойдет в 2016+7=2023 г. ■

7.76. Решите неравенство методом введения новой переменной:

1) $\pi^x - \pi^{2x} \geqslant 0$;

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$;

3) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$;

4) $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \leqslant 0$.

7.77. Решите неравенство методом разложения на множители:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > 2,5$;

2) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} < 448$;

3) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{3}{16}$;

4) $3^{x-2} + 3^{x-1} < 28$.

7.78. Решите неравенство методом введения новой переменной:

1) $6^{2x} - 6^{x+1} + 5 > 0$;

2) $3 \cdot 2^x + 18 \cdot 2^{-x} < 29$;

3) $9^x - 6 \cdot 3^x < 27$;

4) $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$.

7.79. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{2^{x+1} - 8}$; 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{0,2^{3x} - 125}}$; 3) $y = \sqrt{x^2 \cdot 4^x - 4^{x+1}}$.

7.80. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 5^x > 25, \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-8} < \dfrac{1}{27}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8 > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{6-x}, \\ 3^{4x} > 81. \end{cases}$

7.81. Решите неравенство графически:

1) $2^x \leqslant 3 - x$; 2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \leqslant 2x + 5$;

3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x \geqslant 2x + 1$; 4) $3^x \leqslant 4 - x$.

B

7.82. Решите неравенство, приведя обе его части к одному основанию:

1) $3^{-2x} < \sqrt{3}$; 2) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-\frac{2x}{3}} > 25$; 3) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3x+1} > \sqrt{3}$;

4) $2^{\frac{3x}{2}+3} < 16$; 5) $5^{\frac{x+1}{3}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$; 6) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3} > \dfrac{9}{4}$.

7.83. Решите неравенство:

1) $0,2^{\frac{6x-1}{3-x}} < \left(\dfrac{1}{5}\right)^2$; 2) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\dfrac{9}{49}\right)^{x+1,5}$;

3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2+4x} \geqslant \left(\dfrac{8}{27}\right)^{x+2}$; 4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} \leqslant 4$;

5) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\frac{x}{4-x}} > 49$; 6) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x^2+1} > \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-x^2+8x}$.

7.84. Решите показательное неравенство:

1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-|x+2|} \geqslant 81$; 2) $(0,(4))^{x^2-1} > (0,(6))^{x^2+6}$;

3) $(0,2)^{2+4+\ldots+2x} > (0,2)^{72}$; 4) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{13x^2} \leqslant \left(\dfrac{3}{7}\right)^{x^4+36} < \left(\dfrac{49}{9}\right)^{-6x^2}$.

7.85. Решите показательное неравенство методом введения новой переменной::

1) $36^x - 2 \cdot 18^x - 8 \cdot 9^x > 0$; 2) $4^{x+1,5} + 9^x < 9^{x+1}$;

3) $2^{2x+2} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} > 0$.

7.86. Решите неравенство:

1) $2^{2x^2+5x-1} < 0,5\sqrt[3]{(0,25)^{2x}}$; 2) $\sqrt{3^{46-x}} - 7\sqrt{3^{42-x}} > 162$;

3) $\left(2-\sqrt{3}\right)^x > 7 - 4\sqrt{3}$.

7.87. Решите неравенство:

1) $\dfrac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1} < 2$; 2) $3^{x-1} > \dfrac{2-3^x}{3^x-4}$;

3) $3^{|x+2|} + 3^{|x+1|} \geqslant 4$; 4) $10 \cdot 4^x \leqslant 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$.

7.88. Найдите наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству:

1) $9^{x+1} - 3^{x+3} < 3^x - 3$; 2) $13 \cdot 2^{x+4} - 208 \cdot 2^{-2x-3} < 0$;

3) $7 \cdot 3^{x-2} + 20 \cdot 3^{2-x} < \dfrac{41}{3^{x-2}}$; 4) $\dfrac{440}{6^x} - 2 \cdot 6^x > 8 \cdot 6^{-x}$.

7.89. Найдите наименьшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству:

1) $7^{2x-1} - 7^{x+1} \leqslant 7^{x-1} - 7$; 2) $3^{2x+2} - 3^{x+4} < 3^x - 9$;

3) $2^{2x+1} - 2^{x+3} \leqslant 2^{x+1} - 8$; 4) $5^{2x} - 5^{x+2} > 5^x - 25$.

C

7.90. Решите неравенство:

1) $\left(\sqrt{5}-2\right)^x > 9 - 4\sqrt{5}$; 2) $\left(\sqrt{5}+2\right)^x < 9 - 4\sqrt{5}$; 3) $\dfrac{x^2-2}{2^x-3} < 0$;

4) $x \cdot 2^x > 8$; 5) $\left(2+\sqrt{3}\right)^x < 7 - 4\sqrt{3}$; 6) $\dfrac{x^2-3}{3^x-5} < 0$;

7) $x^3 \cdot 3x > \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

7.91*. Решите неравенство:

1) $(x+1)^{x^2-36} < 1$; 2) $(x-3)^{x^2-9} > 1$;

3) $(x-2)^{x^2-1}>1$; 4) $(x-1)^{\frac{2x-7}{x-1}}\geq 1$.

1) $(x+1)^{x^2-36}<1$;

▲ Согласно определению показательной функции выражение в левой части данного неравенства имеет смысл только в том случае, если основание степени положительное и не равное единице. Следовательно, должно выполняться условие $x>-1$. Рассмотрим два случая: $x+1>1$ и $0<x+1<1$.

1) Если $x+1>1$, т.е. $x>0$, то

$$\begin{cases}(x+1)^{x^2-36}<1,\\ x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+1)^{x^2-36}<(x+1)^0,\\ x>0.\end{cases}$$

Из условия $x+1>1$ вытекает, что полученная система неравенств равносильна следующей системе: $\begin{cases}x^2-36<0,\\ x>0.\end{cases}$

Решив эту систему, получим

$$\begin{cases}(x-6)(x+6)<0,\\ x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-6;6)\\ (0;+\infty)\end{cases}\Rightarrow(0;6).$$

2) Если $0<x+1<1$, или $-1<x<0$, получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases}x^2-36>0,\\ -1<x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-6)(x+6)>0,\\ -1<x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-\infty;-6)\cup(6;+\infty),\\ (-1;0)\end{cases}\Rightarrow\varnothing.$$

3) Если $x+1=1$, т.е. $x=0$, то $1<1\Rightarrow\varnothing$.

Ответ: (0; 6). ■

7.92. Решите неравенство:

1) $(x-2)^{x^2-6x+8}>1$; 2) $\left|2^{4x^2-1}-5\right|\leqslant 3$;

3) $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}}\geqslant(x^2+x+1)^3$; 4) $(2^x+3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x-\log_2(x-6)}>1$.

7.93. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{8}{9}\right)^{-x}>\frac{27}{64},\\ 2^{x^2-6x-3,5}<8\sqrt{2};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^{x+2}-0,75\cdot 2^{x+2}>1,\\ 0,2^x\leqslant 0,04^{x^2};\end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-2)^{2x^2-11x+9} < 1, \\ 0,3^{\sqrt{4x^2-3x+2}} > 0,3^{\sqrt{x}}. \end{cases}$

7.94*. При каких значениях a неравенство $x^2 - x \cdot 2^{a+2} - 2^{a+3} + 12 > 0$ выполняется для любых значений x?

Упражнения для повторения

7.95. Упростите выражения:

1) $\left(\left(\sqrt{a}+1\right)^2 - \dfrac{2a-2\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} - 1\right)^{-3}$; 2) $\left(\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}} + \dfrac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^2$.

7.96. Постройте график функции $y = ln\left|x+2\right|$.

7.97. Вычислите: $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 8}$.

7.4. Логарифмические неравенства и системы неравенств

Изучив пункт, вы:

- научитесь решать логарифмические неравенства;
- научитесь решать системы логарифмических неравенств.

Решение логарифмического неравенства приводится к решению простейшего неравенства $\log_a u(x) < \log_a v(x)$. Из свойств логарифмической функции следует, что:

1) если $a > 1$, то неравенство $\log_a u(x) < \log_a v(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0, \\ u(x) < v(x); \end{cases} \qquad (1)$$

2) если $0<a<1$, то неравенство $\log_a u(x) < \log_a v(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0, \\ u(x) > v(x). \end{cases} \qquad (2)$$

Решение неравенства

$$\log_a u(x) < b$$

приводится к решению неравенства

$$\log_a u(x) < \log_a a^b.$$

На практике вместо решения громоздких систем вида (1) и (2) удобнее находить ОДЗ неравенств отдельно из условий $\{u>0,\ v>0,\ a>0,\ a\neq 1\}$. Эта запись значительно сокращает объем работы. Теперь, учитывая вышеизложенное, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решим неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < -2$.

▲ Основание логарифма $a = \frac{1}{3} < 1$, поэтому изменим знак неравенства. Учитывая ОДЗ, получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x+5>0, \\ 2x+5>9 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x>-2,5, \\ x>2. \end{cases}$$

Ответ: $(2;\ +\infty)$. ■

Пример 2. Решим неравенство $\lg(x+1) \leqslant 1 - \lg(2x-6)$.

▲ $\lg(x+1) + \lg(2x-6) \leqslant 1 \Rightarrow \lg((x+1)(2x-6)) \leqslant \lg 10$.

Т.к. основание логарифма $a = 10 > 1$, то знак неравенства не меняется. Учитывая ОДЗ, получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x+1>0, \\ 2x-6>0, \\ (x+1)(2x-6)\leqslant 10 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x>-1, \\ x>3, \\ [-2;4]. \end{cases}$$

Ответ: $(3;\ 4]$. ■

Пример 3. Решим неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x^2-4x-6}{4x-11} \leqslant -1$.

▲ ОДЗ определяется неравенством

$$\frac{2x^2-4x-6}{4x-11} > 0 \Rightarrow \frac{2(x+1)(x-3)}{4\left(x-\frac{11}{4}\right)} > 0.$$

Решив неравенство, получим ОДЗ:

$\left(-1;\frac{11}{4}\right)\cup(3;+\infty)$ (рис. 7.3).

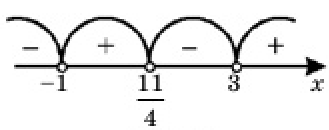


Рис. 7.3

В найденной ОДЗ перепишем данное неравенство в виде

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x^2-4x-6}{4x-11} \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 2.$$

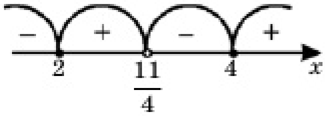


Рис. 7.4

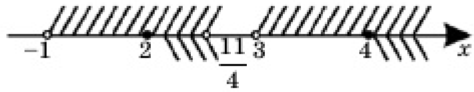


Рис. 7.5

Учитывая $0 < \frac{1}{2} < 1$, имеем:

$$\frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \geqslant 2 \Rightarrow \frac{2x^2 - 12x + 16}{4x - 11} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{2(x-2)(x-4)}{4\left(x - \frac{11}{4}\right)} \geqslant 0.$$

Решение последнего неравенства: $x \in \left[2; \frac{11}{4}\right) \cup [4; +\infty)$ (рис.7.4). Теперь, найдя пересечение полученного множества и ОДЗ (рис. 7.5), получим решение данного неравенства:

$$x \in \left[2; \frac{11}{4}\right) \cup [4; +\infty).$$ ■

Пример 4. Решим неравенство $\log_3(7-x) \leqslant \frac{9}{16}\log^2_{2\sqrt{2}}\frac{1}{4} + \log_{7-x}9$.

▲ Найдем ОДЗ из системы неравенств: $\begin{cases} 7 - x > 0, \\ 7 - x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 7, \\ x \neq 6. \end{cases}$

Следовательно, $x \in (-\infty; 6) \cup (6; 7)$ – ОДЗ.

Учитывая

$$\log^2_{2\sqrt{2}}\frac{1}{4} = \left(-\frac{4}{3}\log_2 2\right)^2 = \frac{16}{9} \text{ и } \log_{7-x}9 = 2\cdot\log_{7-x}3 = \frac{2}{\log_3(7-x)},$$

запишем полученное равенство в виде

$$\log_3(7-x) \leqslant 1 + \frac{2}{\log_3(7-x)}.$$

Обозначив $\log_3(7-x) = y$, получим

$$y \leqslant 1 + \frac{2}{y} \Rightarrow \frac{(y+1)(y-2)}{y} \leqslant 0 \Rightarrow y \in (-\infty; -1] \cup (0; 2].$$

Следовательно, для переменной x получим следующую совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(7-x) \leqslant -1, \\ 0 < \log_3(7-x) \leqslant 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 7 - x \leqslant \frac{1}{3}, \\ 1 < 7 - x \leqslant 9 \end{array}\right. \Rightarrow x \in [-2; 6) \cup \left[\frac{20}{3}; +\infty\right).$$

Здесь мы учли, что основание логарифма 3>1. Найдя пересечение найденного решения и ОДЗ, получим ответ $x \in [-2;6) \cup \left[\dfrac{20}{3};7\right)$. ■

Пример 5. Решим неравенство $x^{\log_2 x} + 16 \cdot x^{-\log_2 x} < 17$.

▲ ОДЗ: $x \in (0;\ +\infty)$. Обозначим $x^{\log_2 x} = y$ и перепишем данное неравенство в виде

$$y + 16 \cdot \frac{1}{y} < 17 \Rightarrow \frac{y^2 - 17y + 16}{y} < 0 \Rightarrow \frac{(y-1)(y-16)}{y} < 0.$$

Получили $y \in (-\infty;\ 0) \cup (1;\ 16)$. Если $x > 0$, то $x^{\log_2 x} > 0$. Следовательно, нам нужно решить неравенство $1 < x^{\log_2 x} < 16$. Прологарифмировав все части неравенства по основанию 2, получим

$$0 < \log_2 x \cdot \log_2 x < \log_2 16 \Rightarrow 0 < |\log_2 x| < 2.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} 0 < \log_2 x < 2, \\ -2 < \log_2 x < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 4, \\ \dfrac{1}{4} < x < 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{1}{4};1\right) \cup (1;4)$. ■

Есть много методов решения логарифмических неравенств. Одним из них является метод рационализации при решении логарифмических неравенств. Предлагаем изучить названный метод через следующий электронный ресурс.

Дополнительный электронный ресурс

https://youtu.be/JljcryzkFg8

1. Сформулируйте свойства логарифмической функции.
2. Нужно ли менять знак логарифмического неравенства в зависимости от основания логарифма?

Упражнения

А

7.98. Решите простейшее логарифмическое неравенство:

1) $\log_5(3 + 8x) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(7 - x) > -2$;

3) $\log_2(x - 3) \leqslant 3$; 4) $\lg(4x - 1) \leqslant 1$.

7.99. Решите простейшее логарифмическое неравенство:

1) $\log_2(5 + 2x) > \log_2(x - 7)$; 2) $\log_5(3x - 2) > \log_5(x + 6)$;

3) $\log_3(3x-1) < \log_3(2x+3)$; 4) $\log_{\frac{1}{9}}(4x-3) > \log_{\frac{1}{9}}(x+3)$.

7.100. Решите простейшее логарифмическое неравенство:
1) $\log_2(2x-1) > \log_2(x+1)$; 2) $\log_5(3x+1) > \log_5(x-2)$;
3) $\log_{0,2}(x-2) < \log_{0,2}(3-x)$; 4) $\log_{\frac{1}{7}}(12-x) \geqslant -2$.

7.101. Решите простейшее логарифмическое неравенство:
1) $\log_3(5x-2) > 1$; 2) $\log_{0,3}(5x-2) > 1$;
3) $\log_3|5x-2| < 1$; 4) $\log_{0,5}(x^2-5x+7) \geqslant 0$;
5) $\log_5(x^2-11x+43) > 2$; 6) $\log_2(x^2-3x) \leqslant 2$.

7.102. Решите неравенство:
1) $\log_2(3x-2) < \log_2(2x-3)$;
2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(2x-4) > 0$;
3) $\log_x(x-1) + \log_x(x-2) < \log_x(x+7)$;
4) $\ln x - \ln(2x-5) \leqslant \ln 2 - \ln(x-3)$.

7.103. Решите неравенство:
1) $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \leqslant 0$; 2) $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$;
3) $\log_{0,1}^2 x + 3\log_{0,1} x > 0$; 4) $2 - \lg^2 x > \lg x$.

7.104. Найдите область определения функции $y = f(x)$:
1) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x}{x-1}}$; 2) $f(x) = \sqrt{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}}$.

B

7.105. Решите логарифмическое неравенство:
1) $\lg(x^2+2x+2) < 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2) > -2$;
3) $\log_2(x^2+10) < 4$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3x-1) < -1$.

7.106. Решите логарифмическое неравенство:
1) $2^{\log_2 \frac{x-1}{3x+3}} \leqslant \frac{1}{4}$; 2) $3^{\log_3 \frac{x-1}{x+1}} < \frac{1}{9}$;
3) $(5x+1)\lg(4-x) \leqslant 0$; 4) $(3-x)\lg(2x-1) \geqslant 0$.

7.107. Решите логарифмическое неравенство:
1) $\log_{\frac{1}{6}}\left(\log_2 \sqrt{6-x}\right) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3 \frac{x+1}{x-1}\right) \geqslant 0$;
3) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_5 \frac{x-2}{x+2}\right) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 1$; 6) $\log_{\frac{5}{2}}\left(\log_3\left(9^x-6\right)\right) \geqslant 0$.

7.108. Найдите область определения функции $y=f(x)$:

1) $f(x)=\sqrt{\log_{2,1}\dfrac{3x-1}{5-x}}+\sqrt{x-4}$;

2) $f(x)=\sqrt{\log_6\left(x+x^2\right)}+\sqrt{-x^2+3x-2}$.

7.109. Решите логарифмическое неравенство методом введения новой переменной:

1) $\ln^2 x-2\cdot\ln x-3\leqslant 0$;
2) $\left(\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\right)^2>4$;

3) $\log_3^2 x-\log_3 x>2$;
4) $\dfrac{2}{\lg x+1}\geqslant 1$.

7.110. Решите логарифмическое неравенство:

1) $(\log_2 x-4)\left(5x^2+x-6\right)\geqslant 0$; 2) $(\log_3 x+3)\left(x^2+2x-8\right)\geqslant 0$.

7.111. Решите логарифмическое неравенство:

1) $\log_{1-x}(2x+3)\geqslant 1$;
2) $\log_{x-1}(x-8)\leqslant 1$;
3) $\log_{3x}(2{,}5x+1)\geqslant 0$.

7.112. Найдите область определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2\ln x-\ln x^4}}$.

7.113. Решите логарифмическое неравенство:

1) $\dfrac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}100-\log_{0,3}9}<1$;
2) $2\cdot\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\dfrac{2}{3}$;

3) $0{,}5+\log_9 x-\log_3 5x>\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$;
4) $\left(\log_{0,2}(x-1)\right)^2>4$.

7.114. Решите неравенство:

1) $\log_x(x-1)\geqslant 2$;
2) $\log_x\sqrt{21-4x}>1$;

3) $\log_x\dfrac{x+3}{x-1}>1$;
4) $\log_x(16-6x-x^2)\leqslant 1$.

7.115. Решите неравенство:

1) $\log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}}x-\log_9 x\right)<1$;
2) $\log_2^2(x-1)^2-\log_{0,5}(x-1)>5$;

3) $\log_{0,5}(\log_2\log_{x-1}9)>0$;
4) $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\log_{\frac{1}{3}}x\right)>0$.

7.116. Пусть $a>1$, $b\geqslant 1$, $c>0$. Докажите неравенство

$(1+\log_a b)\left(\log_{ab}^2 c+1\right)\geqslant 2\cdot\log_a c$.

C

7.117. Решите неравенство:

1) $\log_2\left(2^x-1\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1}-2\right)>-2$; 2) $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3^2 x}<6$;

3) $2^{\log_{2-x}\left(x^2+8x+15\right)}<1$; 4) $\log_x\left(\log_9\left(3^x-9\right)\right)<1$.

7.118. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}(x-1)\ln 2+\ln\left(2^{x+1}+1\right)<\ln\left(7\cdot 2^x+12\right),\\ \log_x(x+2)>2.\end{cases}$$

7.119. Докажите, что верно неравенство $2<\log_3 2+\log_2 3<3$.

7.120. Найдите все целые решения неравенства

$\log_{0,3}\left(\sqrt{x+5}-x+1\right)>0$.

7.121. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\log_3|x-3|}$.

7.122. Докажите неравенство $\ln\dfrac{n+1}{2}>\dfrac{\ln 1+\ln 2+\ln 3+\ldots+\ln n}{n}$.

7.123. Докажите неравенство $\dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_5\pi}>2$.

Упражнения для повторения

7.124. Упростите выражение:

1) $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right)\div\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$;

2) $\left(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

7.125. Найдите область значений функции $y=3-\log_{\frac{1}{3}}x^2$.

7.126. Вычислите: $\left(27^{\log_3 2}+5^{\log_{25}49}\right)\cdot\left(81^{\log_9 4}-8^{\log_4 9}\right)$.

Выводы раздела «ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА»

Если $a>0$, $a\neq 1$ и $b>0$, то уравнение вида $a^x=b$ называют ***простейшим показательным уравнением***.

Методы решения показательных уравнений: приведение обеих частей уравнения к одному основанию, разложение на множители и метод введения новой переменной.

Простейшими логарифмическими уравнениями называют уравнения вида $\log_a x = p$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Основные методы решения логарифмических уравнений: использование определения логарифма, приведение логарифмического уравнения к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, введение новой переменной и метод почленного логарифмирования.

Логарифмические уравнения решают приведением их к виду

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \ (a > 1, a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Логарифмические неравенства решают приведением их к простейшим неравенствам вида $\log_a u(x) < \log_a v(x)$.

1) Если $a > 1$, то неравенство $\log_a u(x) < \log_a v(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0, \\ u(x) < v(x); \end{cases}$$

2) если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a u(x) < \log_a v(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0, \\ u(x) > v(x). \end{cases}$$

Неравенство вида $\log_a u(x) < b$ решается приведением его к виду $\log_a u(x) < \log_a a^b$.

Термины на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Логарифмическое уравнение	Логарифмдік теңдеу	Logarithmic equation
Логарифмическое неравенство	Логарифмдік теңсіздік	Logarithmic inequality
Показательное уравнение	Көрсеткіштік теңдеу	Exponential equation
Показательное неравенство	Көрсеткіштік теңсіздік	Exponential inequality
Экспоненциальный рост (спад)	Экспоненттік өсу(кему)	Exponential growth(decay)

Раздел 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Температура в комнате равна 20° С. Температура чая понизилась от 100° С до 90° С в течение 5 мин. Через какое время чай остынет до 50° С? Ответить на этот вопрос вы сможете, изучив этот раздел.

Вы приступаете к изучению раздела «Дифференциальные уравнения» – одного из интереснейших разделов математического анализа. Сфера применения дифференциальных уравнений очень широка. Это объясняется тем, что математические модели многих природных явлений и процессов описываются интегро-дифференциальными уравнениями. Для исследования и понимания различных процессов вам необходимо изучить данный раздел.

Большое количество различных процессов, таких как рост или спад численности населения, популяции животных, бактерий, распространение инфекции, простое гармоническое движение и т.д., моделируются с помощью дифференциальных уравнений. Изменение температуры также можно описать дифференциальным уравнением.

Содержание раздела

8.1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях

Изучив пункт, вы:

- узнаете определение дифференциального уравнения;

- познакомитесь с примерами практического применения дифференциальных уравнений;
- узнаете определения общего и частного решений дифференциального уравнения.

Многие природные явления описываются особыми уравнениями, которые называют дифференциальными уравнениями. *Дифференциальным уравнением* называют уравнение, содержащее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные. Например, дифференциальными являются уравнения $f'(x) + 5f(x) = 0$, $f''(x) = x \cdot f^3(x)$ и др.

Раздел «Дифференциальные уравнения» тесно связан с понятием «дифференциал функции».

Дифференциалом функции $y = f(x)$ *в точке* x называется произведение производной функции и приращения аргумента (dx). Дифференциал функции обозначается через $df(x)$.

$df(x) = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$. Более подробно о дифференциале функции можно изучить во внешкольном курсе высшей математики.

В следующих примерах рассмотрим несколько конкретных задач, приводящих к понятию дифференциального уравнения.

Пример 1. (Численность населения.) Демографические исследования показали, что скорость прироста населения прямо пропорциональна его количеству. Пусть в момент времени t численность населения равна $N(t)$. Тогда скорость прироста за время t равна производной $N'(t)$. Следовательно, учитывая упомянутую пропорциональную зависимость, получим уравнение

$$N'(t)=k \cdot N(t).$$

Здесь k – постоянная величина, характеризующая скорость прироста населения. Данное уравнение запишем в виде

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = k$$

и, проинтегрировав обе части уравнения, получим

$$\int \frac{N'(t)}{N(t)}dt = \int kdt \Rightarrow N'(t) = \frac{dN(t)}{dt} \Rightarrow \int \frac{dN(t)}{N(t)} = kt + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln N(t)=kt + C \Rightarrow N(t) = Ce^{kt}.$$

Здесь мы обозначили $e^c = C$. Мы пришли к выводу, что все решения дифференциального уравнения $N'(t) = k \cdot N(t)$ записываются в виде $N(t) = Ce^{kt}$. Полученной формулой определяется закон роста численности населения.

Пример 2. (Радиоактивный распад.) Экспериментальные исследования показали, что скорость распада радиоактивного вещества прямо пропорциональна его начальному количеству. Знание этой закономерности позволяет решать большое количество задач о радиоактивном распаде. Пусть $m(t)$ – количество радиоактивного вещества (в граммах) в момент времени t. Тогда выполняется равенство

$$m'(t) = -\lambda m(t),$$

где $\lambda > 0$ – коэффициент пропорциональности, знак «–» указывает на уменьшение количества радиоактивного вещества с течением времени. Следовательно, производная $m'(t)$ должна быть отрицательной. Решив уравнение, как показано в примере 1, получим, что радиоактивный распад определяется функцией

$$m(t) = Ce^{-\lambda t}.$$

Если в начальный момент времени ($t = 0$) количество радиоактивного вещества равно m_0 г, то получим

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t},$$

$(m_0 = m(0) = Ce^{-\lambda 0} = C)$.

Пример 3. Пусть материальное тело массой m движется прямолинейно под действием силы F. Предположим, что сила F совпадает с направлением движения тела. Тогда согласно второму закону Ньютона ускорение тела в момент времени t равно отношению действующей силы F к массе тела m: $a = \frac{F}{m}$. Нам известен механический смысл второй производной: вторая производная функции $S(t)$ равна ускорению в момент времени t. Следовательно, получаем дифференциальное уравнение

$$m \cdot S''(t) = F(t).$$

Пример 4. Составим дифференциальное уравнение кривой, для которой отрезки касательных, заключенных между осями координат, имеют постоянную длину, равную a.

▲ Пусть $y = f(x)$ – уравнение данной кривой. Тогда уравнение касательной к этой кривой, проведенной в точке $(x;\ f(x))$, имеет вид: $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$. Найдем точки пересечения касательной с осями Ox и Oy:

$$Ox\colon\ Y = 0 \Rightarrow X = \frac{xf'(x) - f(x)}{f'(x)};\ Oy\colon\ X = 0 \Rightarrow Y = f(x) - xf'(x).$$

Итак, касательная пересекается с осями координат в точках $A\left(\frac{xf'(x) - f(x)}{f'(x)}; 0\right)$ и $B(0;\ f(x) - xf'(x))$. По условию задачи $AB = a$, т.е.

$$\left(\frac{xf'(x) - f(x)}{f'(x)}\right)^2 + \left(f(x) - xf'(x)\right)^2 = a^2.$$

Обозначив $f'(x) = y'$, $f(x) = y$, получим дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{xy' - y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2 = a^2,$$

или

$$x^2(y')^2 + y^2 - 2xyy' + y^2(y')^2 - 2xy(y')^3 + x^2(y')^4 = a^2(y')^2.$$

Мы познакомились с примерами различных явлений, описываемых дифференциальными уравнениями. Теперь кратко остановимся на понятии дифференциального уравнения.

Определение. ***Дифференциальным уравнением*** *называют уравнение, связывающее неизвестную функцию $y(x)$, ее производные и независимую переменную x.*

Наивысший порядок производной неизвестной функции, входящей в дифференциальное уравнение, называют *порядком* этого уравнения. Например, порядок дифференциального уравнения $y''' = (y'' + 2y)^2$ равен 3, а уравнение $y'' = \dfrac{\sin x}{y + x}$ – дифференциальное уравнение второго порядка.

Работа в группе

Назовите порядок дифференциальных уравнений из примеров 1–4.

Определение. ***Решением дифференциального уравнения*** *называют любую функцию $y(x)$, если при подстановке этой функции и ее производных в уравнение получается тождество.*

Например, как показано выше, функции $y = Ce^{ax}$ являются решениями дифференциального уравнения $y' = ay$. Аналогично функции $y(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2x^2} + C$ (C – $const$) являются решениями уравнения $y' = \dfrac{x^4 - 1}{x^3}$. В самом деле, $y' = x - \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{x^4 - 1}{x^3}$.

График решения дифференциального уравнения называют *интегральной кривой* этого уравнения.

Простейшими дифференциальными уравнениями первого порядка являются уравнения вида

$$y' = f(x).$$

Чтобы решить это уравнение, надо найти неизвестную функцию $y(x)$ по ее производной $f(x)$. Это можно сделать, проинтегрировав обе части уравнения:

$$y(x) = \int f(x)dx.$$

Если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$, то решение уравнения запишется в виде $y(x) = F(x) + C$. Мы видим, что уравнение $y' = f(x)$ имеет бесконечное множество решений. Их графики (интегральные кривые) получаются один из другого параллельным переносом в направлении оси ординат. При этом через каждую точку $M_0(x_0;y_0)$ плоскости проходит только одна интегральная кривая (рис. 8.1).

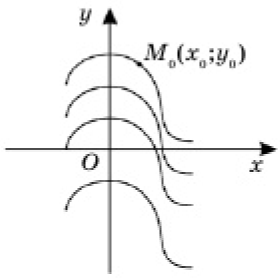


Рис. 8.1

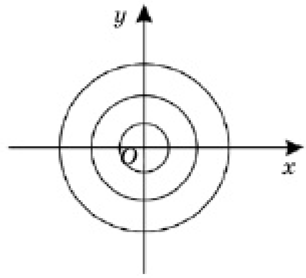


Рис. 8.2

Например, интегральными кривыми уравнения $y \cdot y' + x = 0$ являются концентрические окружности с центром в начале координат.

В самом деле, запишем данное уравнение в виде $y \cdot y' = -x$ и воспользуемся тем, что дифференциалы равных функций тоже равны: $y \cdot y'dx = -xdx$. Учитывая, что $y'dx = dy$, получим $y \cdot dy = -xdx$. Проинтегрируем полученное равенство:

$$\int ydy = -\int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = C.$$

Здесь мы намеренно заменили C на $\frac{C}{2}$ для удобства преобразований. Это не влияет на результат, так как C является произвольной постоянной. Нам хорошо известно, что уравнениями $x^2 + y^2 = C$, $(C > 0)$ определяются концентрические окружности (рис. 8.2).

На приведенных примерах мы увидели, что решения дифференциальных уравнений первого порядка зависят от постоянной C. Эта постоянная возникает при нахождении неопределенного интеграла. Следовательно, в общем решении дифференциального уравнения первого порядка содержится одна произвольная постоянная.

Дополнительные электронные ресурсы

https://www.youtube.com/watch?v=48vearVtLLs&list=PLEOOwQomrpAggQM2ub3EW1OEPEd36s9Jd

Таким образом, функция $y = \pm\sqrt{C - x^2}$ является общим решением уравнения $y \cdot y' + x = 0$.

Наряду с общим решением дифференциального уравнения вводится понятие частных решений. А именно, решение дифференциального уравнения, получаемое из общего решения путем придания произвольной постоянной C определенного значения, называют ***частным решением*** этого уравнения.

К примеру, найдем решение дифференциального уравнения $y \cdot y' + x = 0$, удовлетворяющее условию $y(1) = -2$. Чтобы решить эту задачу, в равенстве $y = \pm\sqrt{C - x^2}$ предположим, что $x = 1$, $y = -2$. Получим $C = 5$. Учитывая, что $y < 0$, получим частное решение $y = -\sqrt{5 - x^2}$.

Перейдем теперь к дифференциальным уравнениям второго порядка. Простейшие из них записываются в виде

$$y'' = f(x).$$

Чтобы решить это уравнение, введем новую функцию $z = y'$. Тогда $z' = (y')' = y''$, и данное уравнение примет вид $z' = f(x)$. Отсюда найдем $z = \int f(x)dx = F(x) + C_1$. Здесь $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$. Теперь из $y' = z$ имеем $y' = F(x) + C_1$. Проинтегрировав последнее уравнение, получим

$$y = \int (F(x) + C_1)\, dx = \Phi(x) + C_1x + C_2$$

Здесь $\Phi(x)$ – первообразная для функции $F(x)$, а C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. На этом примере мы видим, что общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные C_1, C_2. В общем решении дифференциального уравнения n-го порядка содержится n произвольных постоянных. Строгое доказательство этого утверждения приводится в курсе высшей математики.

1. Какие уравнения называют дифференциальными?
2. Приведите примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.
3. Что называют порядком дифференциального уравнения?
4. Дайте определение решения дифференциального уравнения. Что является общим решением уравнения?

Упражнения

А

8.1. Среди следующих уравнений укажите дифференциальные и назовите порядок этих уравнений:

1) $y''' - 2x(y')^2 = x^2$;   2) $\dfrac{xy''}{x^2 + y^2} = 1$;

3) $\ln y = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$;   4) $x^2 + 3xy^2 = 0$.

8.2. Проверьте, что функция $f(x)$ является решением указанного дифференциального уравнения:

1) $f(x) = e^{2x}$, $y' = 2y$;   2) $f(x) = e^{-x} + 1$, $y' + y = 1$;

3) $f(x) = e^{-3x} + e^x$, $y' + 3y = 4e^x$;   4) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $y' + y^2 = 0$.

8.3. Докажите, что функция $v = 20e^{-2t} + 5$ является частным решением дифференциального уравнения $\dfrac{dv}{dt} = 10 - 2v$.

8.4. Ускорение тонущего в жидкости камня описывается уравнением $\dfrac{dv}{dt} = 4 - v$. Покажите, что функция $v(t) = Ae^{-t} + 4$ удовлетворяет дифференциальному уравнению. Найдите значение A, если известно, что начальная скорость камня равна 8 м/с.

8.5. Покажите, что функция $y = Ae^x - (x^2 + 2x + 2)$ является решением дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dx} = y + x^2$.

8.6. Покажите, что функция $v = 20(1 - e^{-0,5t})$ является решением дифференциального уравнения $\dfrac{dv}{dt} = 10 - 0,5v$. Найдите значение v при $t = 0$. Как влияют большие значения t на функцию v?

8.7. Какая из следующих функций является решением уравнения $\dfrac{dy}{dx} = -8y$:

A. $y = 4e^{-8x}$ B. $y = 8e^{-4x}$ C. $y = 4e^{-8x} + 2$

D. $y = 4e^{-8x} + 8$ E. $y = 8e^{-8x}$?

8.8. Математическая модель изменения температуры тела T описывается дифференциальным уравнением $\frac{dT}{dt} = 2 - 0{,}1T$. Покажите, что функция $T = 20 + 60e^{-0{,}1t}$ является решением дифференциального уравнения.

8.9. Найдите общее решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - x + 1$ с помощью интегрирования обеих частей уравнения. Найдите частное решение уравнения, удовлетворяющее такому условию: $y = 4$ при $x = 1$.

8.10. Найдите общее решение дифференциального уравнения $\frac{ds}{dt} = 4 - 10t$. Найдите частное решение, удовлетворяющее такому условию: $s = 11$ при $t = 0$.

B

8.11. Найдите функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению $y^2y' = 2$ и условию $y(2) = 2$.

8.12. Считая данную функцию решением указанного дифференциального уравнения, найдите значение k:

1) $y = kx + 1$, $y' = 2$; 2) $x = kt^2$, $x' = 12t$;

3) $y = e^{kx}$, $y' = y$; 4) $y = e^{kx}$, $y' = ky$;

5) $u = x^3$, $u' = kx^2$; 6) $y = \frac{1}{x+1}$, $y' = ky^2$.

8.13. Постройте графики семейства парабол $y = Cx^2$ при $C = 0$, $C = \pm 1$, $C = \pm 2$. Составьте дифференциальное уравнение, общим решением которого является данное семейство функций.

8.14. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной в точке (1; 2) к интегральной кривой дифференциального уравнения:

1) $y' = 2x$; 2) $y' = -y$; 3) $y' = y + x$; 4) $y' + xy = 1$.

8.15. Составьте дифференциальное уравнение первого порядка по его общему решению:

1) $y^2 = 2Cx$; 2) $y = C_1x + C_2$; 3) $y = Ce^x$; 4) $x^2 + y^2 = C^2$.

8.16. Докажите, что касательные, проведенные к интегральным кривым уравнения $y' + xy = 1$ в точках их пересечения с осью Oy, параллельны друг другу.

8.17. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

1) $y' = e^{-3x}$; 2) $y' = \frac{x}{2} + \text{tg}x$; 3) $e^{y'} = 1$; 4) $\cos y' = 1$.

C

8.18. Напишите общее уравнение кривых, для которых тангенс угла между любой касательной и положительным направлением оси Ox равен $\frac{2}{3}$ абсциссы точки касания.

8.19. Составьте дифференциальное уравнение свободного падения тела в среде с сопротивлением, если сила сопротивления среды прямо пропорциональна квадрату скорости.

Упражнения для повторения

8.20*. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int \ln(x^2 + 4)dx$; 2) $\int (5x - 2)\, e^{3x}dx$;

3) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; 4) $\int x\sin^2 x dx$.

8.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Изучив пункт, вы:

- научитесь решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными;
- примените дифференциальные решения к решению физических и прикладных задач.

Решение уравнений с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет общий вид:

$$F(x;\ y;\ y') = 0 \tag{1}$$

или следующий вид, если это уравнение можно разрешить относительно производной y':

$$y' = f(x;\ y). \tag{2}$$

Различные методы решения уравнений вида (1) и (2) (и, вообще, уравнений любого порядка) рассматриваются в курсе высшей математики. Мы рассмотрим простейший случай уравнения вида (2) – уравнение с разделяющимися переменными, которое записывается в виде

$$y' = f(x) \cdot g(y). \tag{3}$$

В правой части этого уравнения – произведение двух функций, одна из которых зависит от x, а другая – от y (предполагается, что функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны), в левой части уравнения – производная неизвестной функции.

Если при некотором значении y_0 выполняется равенство $g(y_0) = 0$, то функция $y = y_0$ будет одним из решений уравнения (3).

В самом деле, подставив в уравнение y_0 вместо y, получим равенство $(y_0)' = f(x) \cdot g(y_0)$. Но $(y_0)' = 0$ (производная постоянной равна нулю), следовательно, последнее равенство обращается в тождество $0 = f(x) \cdot 0$.

Дифференциалы равных функций также равны. Поэтому

$$\frac{y'}{g(y)}dx = f(x)dx.$$

Учитывая, что $y'dx = dy$, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \tag{4}$$

Если $G(y)$ – первообразная для функции $\frac{1}{g(y)}$, а $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то, интегрируя уравнение (4), получим

$$\int\frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \Rightarrow G(y) = F(x) + C. \tag{5}$$

Таким образом, мы увидели, что если $g(y) \neq 0$, уравнение с разделяющимися переменными (3) решается с помощью непосредственного интегрирования, и его решение записывается в виде (5).

Кроме того, мы обосновали переход от уравнения с разделяющимися переменными (3) к уравнению вида (4). Фактически при решении задач чаще применяется «формальный» переход от уравнения (3) к уравнению (4), основанный на свойстве пропорции:

$$y' = f(x) \cdot g(y),\ g(y) \neq 0 \ \Rightarrow \ \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx\ .$$

Приведем пример.

Пример 1. Найдем общее решение уравнения $x^3 \cdot y' = 2y$.

▲ Функция $y = 0$ является решением данного уравнения. Если $y \neq 0$, $x \neq 0$, то разделив переменные в обеих частях уравнения, запишем его в виде

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x^3}\ .$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получим

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x^3} \Rightarrow \ln y = -\frac{1}{x^2} + C_1 \Rightarrow y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Ответ: $y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}$. ■

Определение. *Задача отыскания решения уравнения $y' = f(x; y)$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.*

Условие $y(x_0) = y_0$ называют *начальным условием* задачи Коши.

Пример 2. Найдем решение задачи Коши: $y' = xe^{-y}$, $y(1) = 0$.

▲ Разделим переменные в обеих частях равенства:

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-y} \Rightarrow \frac{dy}{e^{-y}} = xdx \Rightarrow e^y dy = xdx\ .$$

Проинтегрировав обе части последнего равенства, получим

$$\int e^y dy = \int xdx \Rightarrow e^y = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

Используя условие $y(1) = 0$, найдем $0 = \ln(0{,}5 + C) \Rightarrow C = 0{,}5$. Таким образом, решением задачи Коши является функция $y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$. ■

1. Напишите общий вид дифференциального уравнения первого порядка.
2. Какие дифференциальные уравнения называют уравнениями с разделяющимися переменными?
3. Как решаются дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными?

Упражнения

А

8.21. Среди следующих дифференциальных уравнений укажите уравнения с разделяющимися переменными:
1) $y' = xy^2$; 2) $u' + x^2u = e^x$;
3) $y' = \dfrac{1}{x-1}$; 4) $y' = \dfrac{x^2}{x^2 - y^2}$.

8.22. Решите дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:
1) $y' = y$; 2) $y' = 2x$; 3) $y' = xy^2$; 4) $y' = e - x$.

8.23. Найдите общее решение дифференциального уравнения с помощью разделения переменных:

1) $\dfrac{dy}{dx} = xy$; 2) $\dfrac{dy}{dx} = x + yx$; 3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin x}{y^2}$;

4) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 e^{-y}$; 5) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$; 6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x(x-1)}$.

8.24. Решите задачи Коши для уравнений с разделяющимися переменными:

1) $x\dfrac{dy}{dx} = y^2$, $y = 10$ при $x = 1$;

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x}$, $y(1) = 2$;

3) $\dfrac{dy}{dx} = e^{-y}\sin 2x$, $y = 0$ при $x = 0$;

4) $\dfrac{dy}{dx} = x^2e^{-y}$, $y = 10$ при $x = 0$.

Дифференциальные уравнения часто применяются для решения прикладных задач. Один из примеров – закон охлаждения Ньютона. Математическая модель физического процесса – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

Закон охлаждения Ньютона

Скорость охлаждения тела прямо пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

Закон охлаждения Ньютона записывается в виде дифференциального уравнения

$$T' = k(T - T_{\text{окр.}}),$$

где $T_{\text{окр.}}$ – температура окружающей среды.

Практическая работа

8.25. Температура в комнате равна 20° С. Температура чая понизилась от 100° С до 90° С в течение 5 мин. Через какое время чай остынет до 50° С?

▲ По закону охлаждения Ньютона $T' = k(T - 20)$. Решим это дифференциальное уравнение разделением переменных.

$$T' = k(T-20) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = k(T-20) \Rightarrow \frac{dT}{T-20} = kdt.$$

Проинтегрировав обе части последнего равенства, получим

$$\int \frac{dT}{T-20} = \int kdt \Rightarrow \ln|T-20| = kt + C.$$

Температура чая не может опуститься ниже 20°С – температуры в комнате, поэтому $T - 20 > 0$, $|T - 20| = T - 20$. Преобразуем обе части полученного равенства, записав их в виде степени с основанием e, найдем общее решение дифференциального уравнения:

$$T - 20 = e^{kt+C} \Rightarrow T = 20 + e^{kt+C}.$$

По условию задачи чай остыл за 5 мин, с температуры 100° С до 90° С, т.е. $T(0) = 100$, $T(5) = 90$. Из этих условий определим значения k и C:

$$T(0) = 100 \Rightarrow 20 + e^{k0+C} = 100 \Rightarrow e^C = 80 \Rightarrow C = \ln 80,$$

$$T(5) = 90 \Rightarrow 20 + e^{5k+\ln 80} = 90 \Rightarrow 80e^{5k} = 70,$$

$$e^{5k} = \frac{7}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{5}\ln\frac{7}{8}.$$

Итак, $k = \frac{1}{5}\ln\frac{7}{8} \approx -0,027$ и $C = \ln 80 \approx 4,382$. Тогда

$$T = 20 + e^{-0,027t+4,382}.$$

Найдем время, через которое чай остынет до 50° С:

$$20 + e^{-0,027t+4,382} = 50 \Rightarrow e^{-0,027t+4,382} = 30,$$

$$-0,027t + 4,382 = \ln 30 \approx 3,401,$$

$$t = \frac{3,401 - 4,382}{-0,027} = 36,3.$$

Ответ: чай остынет до 50° С через 36,3 мин. ■

8.26. Покажите, что функция $T(t) = \alpha + Ae^{-kt}$ является решением дифференциального уравнения $\frac{dT}{dt} = -k(T - \alpha)$, $(k > 0)$ (закон охлаждения Ньютона). Чашку чая температурой 90° С принесли в комнату с температурой 25° С. Напишите закон Ньютона, описывающий процесс остывания чая, и найдите значения α и A.

8.27. Вскипевшая вода в течение 10 мин остыла от 100°С до 60°С. Найдите время, через которое температура воды остынет до 25°, если температура окружающей среды равна 20°С.

8.28. Математическая модель изменения скорости материальной точки описывается уравнением $\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{10}$. Начальная скорость равна 20 м/с. Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию. Сколько времени понадобится для уменьшения скорости на 10%?

8.29. Покажите, что функция $y = \frac{-2}{x^2+2}$ является решением дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = xy^2$, удовлетворяющим начальному условию $y(0) = -1$.

В

8.30. Движение материальной точки в жидкости описывается дифференциальным уравнением $\frac{dv}{dt} = -0{,}2\,(v + v^2)$. Найдите частное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $v(0) = 40$.

8.31. Решите дифференциальное уравнение:

1) $(1 + x^2)\,yy' = (1 + y^2)$; 2) $y' = xye^{x^2}\ln y$;

3) $y'\mathrm{tg}x = y + 1$; 4) $y'\sin x = (1 - y)\cos x$.

8.32. Найдите решение задачи Коши:

1) $y' + xy = x$, $y(0) = 2$;

2) $yy'\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+y^2} = 0$, $y(0) = -2$;

3) $(1 + e^x)\,yy' = e^x$, $y(0) = 2$.

Практическая работа

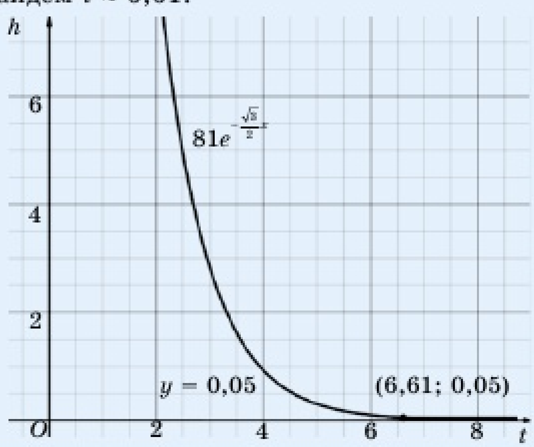
8.33. Вода вытекает из отверстия, расположенного в нижней части емкости. По мере уменьшения объема воды меняется высота воды в емкости. Математическая модель изменения высоты описывается дифференциальным уравнением $4\frac{dh}{dt}=-\sqrt{20h}$, где t – время (в минутах), h – высота (в сантиметрах). Найдите частное решение дифференциального уравнения, если известно, что начальная высота воды равна 81 см. Через сколько времени вода полностью вытечет из емкости? (Считается, что вода полностью вытекла, если ее высота равна 0,05 см).

▲ Решим дифференциальное уравнение разделением переменных:

$$4\frac{dh}{dt}=-\sqrt{20h} \Rightarrow 4\frac{dh}{h}=-\sqrt{20}dt.$$

$$4\int\frac{dh}{h}=-\sqrt{20}\int dt \Rightarrow 4\ln h=-\sqrt{20}t+C,$$

$\ln h=-\frac{\sqrt{5}}{2}t+C \Rightarrow h=Ce^{-\frac{\sqrt{5}}{2}t}$ – общее решение уравнения. По условию задачи начальная высота воды равна 81 см, т.е. $h(0)=81 \Rightarrow 81=Ce^{-\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 0} \Rightarrow C=81$. Следовательно, частное решение имеет вид $h=81e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}t}$. Считается, что вода полностью вытекла, если ее высота равна 0,05 см, поэтому из уравнения $0{,}05=81e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}t}$ с помощью инженерного калькулятора найдем $t\approx 6{,}61$.



■

Практическая работа

8.34. Начальная температура нагретого камня равна 100°C. Камень положили в воду температурой 20°C. Дифференциальное уравнение $\frac{dT}{dt} = -0,5(T - 20)$ является математической моделью процесса остывания камня, здесь t – время в минутах. 1) Найдите общее решение дифференциального уравнения. 2) Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию. 3) Определите, через сколько времени температура камня будет равна 50°C.

8.35. Напишите уравнение кривой, проходящей через точку $A(-2;1)$, если угловой коэффициент касательной, проведенной в любой точке кривой, равен квадрату ординаты точки касания.

Практическая работа

8.36. Масса крысы при рождении составляет 30 г, период ее взросления длится 3 месяца. Прирост массы крысы описывается следующим дифференциальным уравнением: $\frac{dm}{dt} = 120(t - 3)^2$, где m – масса крысы (в граммах), t – время (в месяцах). 1) Найдите общее решение дифференциального уравнения. 2) Найдите частное решение. 3) Вычислите массу взрослой крысы.

C

Практическая работа

8.37. Парашютист весом 80 кг прыгнул с вертолета. При падении на расстоянии x м от вертолета его скорость равна v м/с. Силы, оказывающие влияние на парашютиста: сила тяжести и сопротивление воздуха, равное kv^2. Конечная скорость парашютиста равна 70 м/с. Докажите, что математической моделью движения парашютиста является дифференциальное уравнение $v\frac{dv}{dx} = 9,8 - 0,002v^2$.

8.38. Напишите уравнение кривой, если касательная, проведенная в любой ее точке, перпендикулярна отрезку, соединяющему точку касания и начало координат.

Упражнение для повторения

8.39*. Вычислите:

1) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$; 2) $\int \frac{dx}{(x+1)(1-x)^2}$;

3) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; 4) $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}dx$;

5) $\int \frac{dx}{x^3+1}$; 6) $\int \frac{dx}{x^3-1}$.

8.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Изучив пункт, вы:

- узнаете определение однородного дифференциального уравнения;
- узнаете определение линейного дифференциального уравнения второго порядка и научитесь решать уравнения вида $ay'' + by' + cy = 0$, где a, b, c – постоянные;
- научитесь составлять и решать уравнения гармонических колебаний;
- примените дифференциальные уравнения к решению прикладных задач.

8.3.1. Решение линейного однородного уравнения второго порядка

Определение. *Дифференциальное уравнение вида $ay'' + by' + cy = 0$, где a, b, c – коэффициенты, называют линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка.*

Работа в группе

Докажите следующее утверждение.

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – решения уравнения $ay'' + by' + cy = 0$, то для любых постоянных C_1 и C_2 функция $y = C_1 \cdot f(x) + C_2 \cdot g(x)$ также является решением этого уравнения.

Общее решение дифференциального уравнения $ay'' + by' + cy = 0$ содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2. Перейдем к решению этого уравнения. Будем искать решение в виде показательной функции $y = e^{\lambda x}$, потому что производные этой функции отличаются от нее лишь постоянным множителем.

$$\left.\begin{array}{l} ay'' + by' + cy = 0, \\ y = e^{\lambda x}, y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\left(e^{\lambda x}\right)'' + b\left(e^{\lambda x}\right)' + ce^{\lambda x} = 0 \Rightarrow a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)e^{\lambda x} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $e^{\lambda x} > 0$, имеем $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Решая это квадратное уравнение, мы сможем найти частные решения исходного дифференциального уравнения в виде $y = e^{\lambda x}$.

Определение. *Уравнение $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ называется **характеристическим уравнением** линейного однородного дифференциального уравнения $ay'' + by' + cy = 0$.*

Уравнение $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ является квадратным, следовательно, в зависимости от дискриминанта, возможны следующие три его решения.

1. Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2. Тогда дифференциальное уравнение $ay'' + by' + cy = 0$ имеет два различных частных решения: $y = e^{\lambda_1 x}$ и $y = e^{\lambda_2 x}$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения записывается в виде

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. Если $D = b^2 - 4ac = 0$, то характеристическое уравнение имеет два равных действительных корня: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. В этом случае двумя различными частными решениями дифференциального уравнения $ay'' + by' + cy = 0$ являются функции $y = e^{\lambda x}$ и $y = xe^{\lambda x}$, и общее решение записывается в виде

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

или

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$$

3. Если $D = b^2 - 4ac < 0$, то корнями характеристического уравнения будут два взаимно сопряженных комплексных числа: $\lambda_1 = m + in$ и $\lambda_2 = m - in$. В этом случае дифференциальное уравнение $ay'' + by' + cy = 0$ имеет два различных частных решения $y = e^{mx}\cos nx$ и $y = e^{mx}\sin nx$, и общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{mx}\cos nx + C_2 e^{mx}\sin nx,$$

или

$$y = e^{mx}(C_1\cos nx + C_2\sin nx).$$

Замечание. Здесь мы воспользовались показательной и тригонометрической формами записи комплексного числа:

$$e^{(m+ni)x} = e^{mx}(\cos nx + i \cdot \sin nx).$$

Дополнительные электронные ресурсы

https://www.youtube.com/watch?v=QnSva-VNg_U

Пример 1. Решим следующие линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка:

1) $y'' + 5y' + 6y = 0$; 2) $3y'' - y' = 0$ и $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$;
3) $y'' + 6y' + 34y = 0$.

▲ 1) Для дифференциального уравнения $y'' + 5y' + 6y = 0$ запишем его характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, корни которого таковы: $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = -2$. Тогда общим решением данного уравнения является функция $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x}$.

2) Характеристическое уравнение дифференциального уравнения $3y'' - y' = 0$ имеет вид: $3\lambda^2 - \lambda = 0$. $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = \dfrac{1}{3}$ – корни уравнения, следовательно, общее решение данного уравнения записывается в виде

$$y = C_1e^{0x} + C_2e^{\frac{1}{3}x} = C_1 + C_2e^{\frac{1}{3}x}.$$

Теперь найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$. Для этого подставим данные значения в общее решение и определим значения постоянных C_1 и C_2:

$$y = C_1 + C_2e^{\frac{1}{3}x} \Rightarrow y' = 0 + C_2 \cdot \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x} = \frac{C_2}{3}e^{\frac{1}{3}x}.$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2e^{\frac{1}{3}\cdot 0} \Rightarrow C_1 + C_2 = 0,$$

$$y'(0) = 3 \Rightarrow \frac{C_2}{3}e^{\frac{1}{3}0} = 3 \Rightarrow C_2 = 9 \Rightarrow C_1 = -9.$$

Таким образом, частное решение данного уравнения имеет вид $y = -9 + 9e^{\frac{1}{3}x}$.

3) Для уравнения $y'' + 6y' + 34y = 0$ запишем его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 34 = 0$. Дискриминант этого уравнения отрицательный, поэтому оно имеет комплексные корни $\lambda_1 = -3 + 5i$ и $\lambda_2 = -3 - 5i$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения записывается в виде $y = C_1e^{-3x}\cos 5x + C_2e^{-3x}\sin 5x$. ■

8.3.2. Дифференциальное уравнение, являющееся математической моделью гармонических колебаний

Пример 2. Покажем, что функция

$$y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$$

при любых значениях постоянных C_1 и C_2 является решением дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 \cdot y = 0,$$

и найдем частное решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

▲ Найдем производные данной функции

$$y' = -C_1 \cdot \omega \cdot \sin\omega t + C_2 \cdot \omega \cdot \cos\omega t,$$

$$y'' = -C_1\omega^2 \cdot \cos\omega t - C_2\omega^2 \cdot \sin\omega t = -\omega^2(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t).$$

Подставив функцию y и ее вторую производную в уравнение $y'' + \omega^2 y = 0$, получим тождество

$$-\omega^2(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) + \omega^2(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) = 0.$$

Следовательно, функция $y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ для любых C_1 и C_2 является решением уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$.

Теперь найдем частное решение уравнения. При $t = 0$ имеем:

$$y(0) = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = C_1,\ y(0) = a \Rightarrow C_1 = a,$$

$$y'(0) = -C_1\omega\sin 0 + C_2\omega\cos 0 = C_2\omega,\ y'(0) = b \Rightarrow C_2 = \frac{b}{\omega}.$$

Итак, частное решение уравнения имеет такой вид:

$$y = a \cdot \cos\omega t + \frac{b}{\omega} \cdot \sin\omega t.$$ ■

Общее решение $y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ уравнения $y'' + \omega^2 \cdot y = 0$ можно записать в виде $y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$. В самом деле, применив метод вспомогательного угла, получим

$$y = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cdot \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos\omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin\omega t \right).$$

Введя обозначения $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\alpha = \arcsin\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$, по формуле синуса суммы получим равенство $y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$. Движения, совершаемые по этому закону, называют *гармоническими колебаниями*. Здесь A – амплитуда колебаний, ω – частота, α – начальная фаза.

1. Напишите определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.
2. Как решают линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
3. Как влияют решения характеристического уравнения на общее решение линейного однородного уравнения?
4. Что называют гармоническими колебаниями? Назовите их основные характеристики.

Упражнения

А

8.40. Напишите характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения и найдите его корни:

1) $y'' + 3y' + 2y = 0$;
2) $6y'' + 5y' + y = 0$;
3) $2y'' + y' - y = 0$;
4) $y'' + y' - 5y = 0$;
5) $y'' - 4y = 0$;
6) $y'' - 3y' = 0$.

8.41. Убедитесь, что данная функция является решением указанного дифференциального уравнения:

1) $y = C_1 \cdot \cos 2t + C_2 \cdot \sin 2t$, $y''+ 4y = 0$;
2) $y = C_1 + C_2e^{3x} + C_3e^{-3x}$, $y'''- 9y' = 0$.

8.42. Найдите общее решение дифференциального уравнения и его частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y = 1$ и $y' = 0$ при $x = 0$;
2) $y'' - 9y = 0$, $y(0) = 0$ и $y(0)' = 1$;
3) $y'' - 5y' = 0$, $y = 0$ и $y' = 4$ при $x = 0$;
4) $v'' - v = 0$, $v(-1) = -1$ и $v(1) = 1$.

8.43. Найдите амплитуду, частоту и начальную фазу гармонического колебания:

1) $y = \cos 2x + \sin 2x$;
2) $y = 3\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$;
3) $y = \cos\sqrt{2}x + \sin\sqrt{2}x$;
4) $y = -3\sin\frac{x}{3} + 4\cos\frac{x}{3}$.

8.44. Найдите общее решение данного дифференциального уравнения:

1) $y'' - 2y' + y = 0$;
2) $9y'' - 12y' + 4y = 0$;
3) $4y'' + 4y' + y = 0$;
4) $y'' + 8y' + 16y = 0$;
5) $9y'' - 6y' + y = 0$;
6) $y'' + 10y' + 25x = 0$.

8.45. Составьте дифференциальное уравнение второго порядка, если его общее решение имеет вид:

1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$;
2) $y = C_1e^{-x} + C_2\,xe^{-x}$.

8.46. Найдите общее решение дифференциального уравнения и его частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y = 1$ и $y' = 0$ при $x = 0$;
2) $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 4$ и $y(2) = 0$;
3) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 1$ и $y'(0) = 0$;
4) $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 0$ и $y(1) = 2$;
5) $y'' + 2ky' + k^2y = 0$, $y(0) = 0$ и $y'(0) = 2$.

8.47. Покажите, что сумма двух гармонических колебаний, начальные фазы которых равны нулю, а частоты взаимно равны, также является гармоническим колебанием.

8.48. Найдите общие решения следующих дифференциальных уравнений:

1) $y'' - 4y' + 5y = 0$; 2) $y'' - 2y' + 5y = 0$;
3) $y'' + 2y' + 4y = 0$; 4) $4y'' + 4y' + 5y = 0$;
5) $y'' + 3y' + 6y = 0$; 6) $y'' - 4y' + 8y = 0$.

B

8.49. Решите задачу Коши для функции $x(t)$:

1) $x'' + 9x = 0$, $x = 0$ и $x' = 1$ при $t = 0$;

2) $x'' + 4x = 0$, $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ и $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

3) $x'' + 12x = 0$, $x(0) = 0$ и $x(1) = 3$.

C

8.50. Покажите, что функция $y = A\cos(\omega t + \varphi)$ является решением уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$. Не противоречит ли этот факт ***примеру*** 2? Обоснуйте ответ.

8.51. Найдите частные решения дифференциальных уравнений:

1) $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$ и $y'(0) = 2$;
2) $y'' - 3y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$ и $y'(0) = 0$;
3) $4y'' + 8y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$ и $y'(0) = 0$.

Упражнения для повторения

8.52*. Найдите интеграл:

1) $\int \sin^4 x dx$; 2) $\int \cos^3 x dx$; 3) $\int x^2 e^{-2x} dx$.

8.53. Найдите первообразную для функции $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, график которой пересекается с осью ординат в точке $y = 2$.

Выводы раздела «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Дифференциальным уравнением называют уравнение, содержащее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные. *Решением дифференциального уравнения* называют любую функцию $y(x)$, если при подстановке этой функции и ее производных в уравнение получается тождество. Решение дифференциального уравнения, получаемое из общего решения путем придания произвольной постоянной C определенного значения, называют *частным решением* этого уравнения. График решения дифференциального уравнения называют *интегральной кривой* этого уравнения.

Наивысший порядок производной неизвестной функции, входящей в дифференциальное уравнение, называют *порядком* этого уравнения.

Задача отыскания решения уравнения $y' = f(x; y)$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши*. Условие $y(x_0) = y_0$ называют *начальным условием* задачи Коши. Дифференциальные уравнения, в которых возможно разделить переменные, называют уравнениями с разделяющимися переменными.Чтобы решить такие уравнения, после разделения переменных нужно найти интегралы обеих частей уравнения.

$$T' = k(T - T_{\text{окр.}}) - \text{закон охлаждения Ньютона.}$$

Дифференциальное уравнение вида $ay'' + by' + cy = 0$, где a, b, c – коэффициенты, называют *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка*.

Уравнение $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ называется *характеристическим уравнением* линейного однородного дифференциального уравнения $ay'' + by' + cy = 0$.

Уравнение $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ является квадратным, следовательно, в зависимости от дискриминанта, возможны следующие три его решения.

1. Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2. Тогда дифференциальное уравнение $ay'' + by' + cy = 0$ имеет два различных частных решения: $y = e^{\lambda_1 x}$ и $y = e^{\lambda_2 x}$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения записывается так:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}.$$

2. Если $D = b^2 - 4ac = 0$, то характеристическое уравнение имеет два равных действительных корня: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. В этом

случае двумя различными частными решениями дифференциального уравнения $ay'' + by' + cy = 0$ являются функции $y = e^{\lambda x}$ и $y = xe^{\lambda x}$, и общее решение запишется в виде

$$y = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}.$$

3. Если $D = b^2 - 4ac < 0$, то корнями характеристического уравнения будут два взаимно сопряженных комплексных числа: $\lambda_1 = m + in$ и $\lambda_2 = m - in$. В этом случае дифференциальное уравнение $ay'' + by' + cy = 0$ имеет два различных частных решения $y = e^{mx}\cos nx$ и $y = e^{mx}\sin nx$, и общее решение уравнения таково:

$$y = C_1e^{mx}\cos nx + C_2e^{mx}\sin nx,$$

$y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ при любых значениях постоянных C_1 и C_2 является решением дифференциального уравнения $y'' + \omega^2 \cdot y = 0$.

Движения, совершаемые по закону $y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$, называют *гармоническими колебаниями*. Здесь A – амплитуда колебаний, ω – частота, α – начальная фаза.

Термины на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Дифференциальное уравнение первого (второго) порядка	Бірінші (екінші) ретті дифференциалдық теңдеу	First (second) order differential equation
Разделение переменных	Айнымалыларды ажырату (бөлу)	Separation of variables
Характеристическое уравнение	Характеристикалық теңдеу	Auxiliary equation
Гармоническое колебание	Гармоникалық тербеліс	Harmonic motion
Однородная функция	Біртекті функция	Homogenous function
Закон охлаждения Ньютона	Ньютонның суу заңы	Newton's low of cooling

Раздел 9. ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Вы полностью завершили освоение программы по алгебре и началам анализа для средней школы. Для получения качественных знаний необходимо повторить изученные разделы. С этой целью предлагаются следующие задачи и материал для повторения.

9.1. Арифметика. Действительные числа

9.1.1. Натуральные числа. Целые числа

9.1. Какой цифрой нужно заменить a в числе $5431a$, чтобы оно было кратно числу: 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 6; 6) 9; 7) 10; 8) 11?

9.2. Назовите признаки делимости целого числа: 1) на 18; 2) на 25.

9.3. Пусть $a > c$. Докажите, что число $\overline{abc} - \overline{cba}$ делится на 9.

9.4. Докажите, что для любого натурального числа n: 1) число $n^4 - n^2$ делится на 12; 2) число $n^9 - n^3$ делится на 504; 3) число $5^n - 5$ делится на 20; 4) число $7^n - 7$ делится на 42.

9.5. Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел делится на 24.

9.6. Докажите, что разность куба натурального числа и самого числа делится на 6.

9.7. Докажите, что при уменьшении нечетного числа на 1 получается число, кратное 8.

9.8. Три простых числа, большие 3, являются последовательными членами арифметической прогрессии. Докажите, что разность этой прогрессии кратна 6.

9.9. Найдите числа a и b, если известно, что: 1) $a : b = 4 : 7$ и $(a, b) = 8$; 2) $[a, b] = 124$ и $(a, b) = 31$; 3) $ab = 375$ и $[a, b] = 75$. (a, b) – НОД чисел a и b, $[a, b]$ – НОК чисел a и b.

9.1.2. Рациональные и иррациональные числа. Квадратные корни

9.10. Вычислите:

1) $15\frac{6}{7} - 12\frac{6}{7} \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15}\right)$; 2) $\left(2{,}125 \cdot 1\frac{15}{17} - 1\frac{7}{12}\right) : 7{,}25$;

3) $\dfrac{12,8:0,64+3,05:0,05}{8\frac{2}{3}:1\frac{4}{9}-1}$; 4) $\dfrac{203,4:9-(5,39-7,39)}{\frac{3}{14}\cdot\frac{7}{9}-\frac{1}{3}}$.

9.11. Вычислите:

1) $\left(1\frac{1}{3}\cdot 0,27-3\frac{1}{3}\cdot 0,15\right)-1500\cdot(-0,1)^3$;

2) $\left(\frac{6}{64}\cdot 5\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)^3+(-1)^5$;

3) $(0,3)^{-3}+\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}+(-0,5)^{-2}\cdot\frac{3}{4}+(-1)^6\cdot 6$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}+\left(-\frac{6}{46}\right)^0\cdot\frac{1}{8}-0,25^{-2}\cdot 16$.

9.12. Вычислите:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+1$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}-3$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}$; 4) $\left(\sqrt{5}-3\right)\cdot\sqrt{14+6\sqrt{5}}$;

5) $\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\sqrt{9+4\sqrt{5}}$; 6) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

7) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

9.13. Сравните числа:

1) $\sqrt{0,63}$ и $\sqrt{0,83}$; 2) $\sqrt{0,63}$ и $\sqrt[3]{0,63}$;

3) $\sqrt{1,63}$ и $\sqrt[3]{1,63}$; 4) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$.

9.14. Покажите, что число является иррациональным:

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5}$.

9.15. Постройте график функции: 1) $y=\sqrt{x}$; $y=\sqrt{x^2}$; $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$.

9.2. Тождественные преобразования алгебраических выражений

9.2.1. Формулы сокращенного умножения

9.16. Докажите формулу:

1) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
2) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
5) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
6) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
7) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
8) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
9) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;
10) $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$;
11) $a^{2n+1} + 1 = (a + 1)(a^{2n} - a^{2n-1} + \dots - a + 1)$;
12) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$.

9.17. Разложите на множители:

1) $9(x + 5)^2 - (x - 7)^2$;
2) $49(y - 4)^2 - 9(y + 2)^2$;
3) $x^3 + y^3 + 2xy(x + y)$;
4) $5a^2 - 5 - 4(a - 1)^2$;
5) $2(x + y)^2 + x^2 - y^2$;
6) $a^2 + ab^3 - a^3b - b^4$;
7) $(x - y + 4)^2 - x^2 + 2xy - y^2$;
8) $(a - b)^3 + (a + b)^3$;
9) $(x + 2y)^3 + (2x - y)^3$.

9.18. Разложите на множители:

1) $5xy^3 + 30x^2z^2 - 6x^3yz - 25y^2z$;
2) $15m^3n^2p - 35p^2nq^3 + 25mn^3q^2 - 21m^2p^3q$;
3) $32c^5 - 3^5$;
4) $(4a)^5 + (2b)^5$;
5) $(2x)^6 + (3y)^6$.

9.19. Запишите выражение в виде двучлена:

1) $(2x + 1)(16x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 2x + 1)$;
2) $\left(\frac{2}{3}x - 3ab\right)\cdot\left(\frac{8}{27}x^3 + \frac{4}{3}x^2ab + 6xa^2b^2 + 27a^3b^3\right)$.

9.20. Докажите, что: 1) $143^{15} - 81^{15}$ кратно 62; 2) число $12^{31} + 28^{31}$ кратно 80.

9.2.2. Преобразование алгебраических выражений

В упражнениях **9.21–9.28** упростите выражения.

9.21. $\left(\frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{1}{x + y}\left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}\right)\right) : \frac{x - y}{x}$.

9.22. $\left(\dfrac{m^2-n^2}{m^2n^2}\cdot\left(\dfrac{1}{m^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)-\left(\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)\cdot\dfrac{p^2+n^2}{p^2n^2}\right):\dfrac{p^2+m^2}{p^2m^2}$.

9.23. $\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\right)\cdot\left(\dfrac{a(b-a)}{a^2-ab+b^2}+1\right)$.

9.24. $\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}-2\right):\left(\dfrac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}\right)$.

9.25. $\dfrac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2-c^2+2bc}$.

9.26. $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}$.

9.27. $\dfrac{(x^2-y^2-z^2-2yz)(x+y-z)}{(x+y+z)(x^2-y^2+z^2-2xz)}$.

9.28. $\dfrac{a\sqrt{a}+9a+27\sqrt{a}+27}{a+6\sqrt{a}+9}$.

9.3. Числовые последовательности и прогрессии. Комбинаторика

9.3.1. Числовая последовательность. Арифметическая и геометрическая прогрессии

9.29. Напишите первые пять членов последовательности:

1) $x_n = 2n + 3$;
2) $x_n = (-1)^n 2$;
3) $x_n = \dfrac{3n-1}{2n+3}$;
4) $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

9.30. Напишите формулу общего члена последовательности:

1) $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \ldots$;
2) $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$;
3) $1, \dfrac{2}{101}, \dfrac{4}{201}, \dfrac{8}{301}, \ldots$;
4) $\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}, -\dfrac{16}{81}, \ldots$.

9.31. Пусть последовательность $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ является арифметической прогрессией с разностью, равной d. Докажите следующие формулы:

$$a_n = a_1 + (n-1)d,\quad 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},\quad S_n = \dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$$

где S_n – сумма первых n членов арифметической прогрессии.

9.32. Пусть последовательность b_1, b_2, … b_n, … является геометрической прогрессией со знаменателем q. Докажите справедливость формул

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \quad b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, \quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},$$

где S_n – сумма первых n членов прогрессии.

9.33. Пусть b_1, b_2, …b_n, … – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $|q|<1$). Докажите справедливость формулы

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \frac{b_1}{1-q}.$$

9.34. Найдите сумму первых 10 членов арифметической прогрессии:
1) $a_2 = 7$, $a_4 = 11$; 2) $a_3 = 5$, $a_8 = 13$; 3) $a_5 + a_6 = 11$.

9.35. Пусть a_1, a_2, …a_n – последовательные члены арифметической прогрессии, $a_1 = a$, $a_n = b$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$). Выразите через a, b и n следующую сумму:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}.$$

9.36. Напишите формулу общего члена арифметических прогрессий – 7, 11, 29, … и –3, 11, 25, … .

9.37. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии:
1) $b_2 = 7$, $b_3 = -1$; 2) $b_3 = 2$, $b_5 = 8$;
3) $b_{12} = -131$, $b_{185} = 243$; 4) $b_2 + b_3 = 7$, $b_3 + b_4 = 49$.

9.38. Между числами 5 и 25 вставьте семь таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию.

9.39. При каких значениях a корни уравнений $x^2 - 5x + 4 = 0$ и $2x - a = 0$ являются тремя первыми членами геометрической прогрессии?

9.40. Пусть b_1, b_2, … b_n, … – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Выразите через b_1 и q суммы следующих рядов:
1) $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$; 2) $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots$; 3) $b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \ldots$.

9.41. Первый член и сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии соответственно равны 0,3 и 0,9. Найдите знаменатель прогрессии.

9.42. Найдите сумму ряда:

1) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots$; 2) $1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{125}+\ldots$.

9.43. Представьте периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

1) 1,21(32); 2) 0,27(345) 3) 3,(31); 4) 2,1(4).

9.44. Три числа, первое из которых равно 1, являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если одно из них удвоить, то эти числа, взятые в том же порядке, образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

9.45. В арифметической прогрессии восьмой член равен 60. Известно, что числа a_1, a_7 и a_{25} образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии.

9.3.2. Комбинаторика

9.46. Обозначим через n(A) количество элементов множества A. Докажите, что для любых счетных множеств A, B и C выполняются равенства:
1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$;
2) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

9.47. Докажите, что:

1) число всех размещений с повторениями из n элементов по k находят по формуле $\tilde{A}_n^k = n^k$;

2) число всех размещений без повторений из n элементов по k находят по формуле $A_k^n = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ или $A_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$;

3) число всех перестановок из n элементов находят по формуле $\mathrm{P}_n = n!$;

4) число всех сочетаний из n элементов по k находят по формуле $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

9.48. Докажите следующую формулу (бином Ньютона):

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

9.49. Сколько существует двузначных чисел, которые делятся и на 2, и на 7?

9.50. Сколькими способами можно: 1) распределить 8 учебников между двумя учениками; 2) распределить учебники поровну?

9.51. 1) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5? 2) Сколько таких чисел можно составить, если цифры не повторяются?

9.52. Сумма коэффициентов первого и третьего слагаемых в разложении бинома $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ равна 46. Найдите член разложения, не содержащий x.

9.53. Найдите коэффициент при x^5 для следующих многочленов: 1) $(1 + x + x^2)^3$; 2) $(1 + x^2 - x^3)^4$.

9.4. Алгебраические уравнения

9.4.1. Квадратные уравнения. Теорема Виета

9.54. Докажите, что корни уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$ при выполнении условия $k^2 - ac > 0$ определяются по формуле

$$x_{1/2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

9.55. Докажите теорему Виета.

9.56. Решив уравнение, разложите квадратный трехчлен на множители:

1) $2x^2 + 5x - 7 = 0$; 2) $4x^2 - x - 14 = 0$;
3) $3x^2 - 8x + 5 = 0$; 4) $7x^2 + x - 8 = 0$.

9.57. Докажите тождество: $a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = ax^2 + bx + c$.

9.58. Пусть $a+b+c=0$. Докажите, что корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равны $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{c}{a}$.

9.59. Пусть $a-b+c=0$. Докажите, что корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равны $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

9.60. При каких значениях a уравнение $(x^2 - a)(x^2 + 3ax + a) = 0$ имеет два различных корня?

9.61. При каких значениях a уравнение $(x^2 - 3x - 4)(x^2 - a) = 0$ имеет ровно три корня?

9.62. Не решая уравнение $3x^2 - x - 1 = 0$, найдите значения:

1) $x_1 + x_2$; 2) $x_1 x_2$;
3) $x_1^2 + x_2^2$; 4) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$;
5) $x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3$; 6) $x_1^4x_2 + x_1x_2^4$; 7) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$.

9.63. Составьте квадратное уравнение, если известны его корни:
1) $x_1 = -3,\ x_2 = 5$; 2) $x_1 = x_2 = 7$;
3) $x_1 = 3a + 1,\ x_2 = 5a - 2$; 4) $x_1 = 6 - \sqrt{5}, x_2 = 6 + \sqrt{5}$;
5) $x_1 = \sqrt{7} - \sqrt{6}, x_2 = \sqrt{7} + \sqrt{6}$.

9.64. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ xy = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 3y = 7, \\ xy = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$

9.4.2. Многочлены и их корни

9.65. Разделите многочлен на многочлен с остатком:
1) $x^4 + x^2 + 1$ на $x + 5$; 2) $x^7 - 1$ на $x^3 + x + 1$;
3) $x^6 - 64$ на $x - 3$.

9.66. При каком значении a остаток от деления $(x^3 + 6x^2 + ax + 12) : (x + 4)$ равен нулю?

9.67. Докажите, что остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$ равен $f(a)$ (теорема Безу).

9.68. Пусть число α является целым корнем многочлена $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – целые числа. Докажите, что число a_n делится на α без остатка.

9.69. Найдите целые корни многочлена и разложите его на множители:
1) $x^3 - 7x - 6$; 2) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$;
3) $x^3 - 5x^2 + 3x + 1$; 4) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$;
5) $x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 38x - 24$; 6) $x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 4$.

9.70. Докажите, что для любого натурального числа n выражение $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится без остатка на 120.

9.71. Решите уравнение:

1) $x^4 - 5x^2 + 7 = 0$; 2) $7x^4 - x^2 - 6 = 0$;

3) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$; 4) $(5x^2 + x + 1)^2 - (5x^2 + x + 1) - 2 = 0$;

5) $(3x^2 - x - 1)^2 - 18x^2 + 6x - 1 = 0$.

9.72. Решите уравнение:

1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x+\dfrac{1}{x}\right) + 6 = 0$; 2) $x^2 + 5x + 8 + \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$;

3) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$;

4) $10x^4 - 29x^3 + 30x^2 - 29x + 10 = 0$.

9.4.3. Рациональные уравнения

В упражнениях **9.73–9.76** решите уравнения.

9.73. 1) $\dfrac{3x+1}{5x-6} = 0$; 2) $\dfrac{9x^2-1}{3x+1} = 0$; 3) $\dfrac{5x+7}{49-25x^2} = 0$.

9.74. 1) $\dfrac{x^2-3x}{x^2+7x-30} = \dfrac{5x^2-x-42}{x^2+7x-30}$; 2) $x^2 + \dfrac{3x-1}{x+4} = 16 - \dfrac{1-3x}{4+x}$.

9.75. 1) $\dfrac{1}{3x+2} + \dfrac{3}{5x+6} = \dfrac{2}{7x+8}$; 2) $\dfrac{12}{x^2-9} + \dfrac{x}{x+3} = \dfrac{2}{x-3}$.

9.76. 1) $\dfrac{2x^2-5x+4}{3x-2} + \dfrac{15x-10}{2x^2-5x+4} = 6$; 2) $\dfrac{x^2+5x-1}{2x-1} + \dfrac{2x-1}{x^2+5x-1} = 5{,}2$.

9.4.4. Иррациональные уравнения

В упражнениях **9.77 – 9.82** решите уравнения.

9.77. 1) $\sqrt{4x+2} + \sqrt{4x-2} = 4$; 2) $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = 2$.

9.78. 1) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16$;

2) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x + 2\sqrt{x^2-16}$.

9.79. 1) $\sqrt{2x^2+5x+2} + \sqrt{2x^2+5x-9} = 1$;

2) $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}} - \sqrt{x-\sqrt{6x-9}} = \sqrt{6}$;

3) $x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9$.

9.80. 1) $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$;

2) $x\cdot\sqrt[3]{35-x^3}\cdot\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$.

9.81. 1) $\sqrt{\sqrt[3]{54}+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{\sqrt{54}-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}$;

2) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$.

9.82. 1) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$;

2) $\sqrt[3]{(1+x)^2}-\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+x}}=1$.

9.4.5*. Уравнения, содержащие модуль и параметр

В упражнениях **9.83–9.86** решите уравнения.

9.83. 1) $|x-2|+|x+4|=8$; 2) $|x-5|-|x-2|=-3$.

9.84. 1) $|x-3|+|x+2|-|x-4|=3$; 2) $|x^2-3x-2|=2$.

9.85. 1) $x|x|-|x^2+3x+3|+8=0$; 2) $(x-2)|x+3|=5|x^2-x+2|-20$.

9.86. 1) $||2x-8|-x|=7-x$; 2) $||2x-1|-5|+x=|6-x|$.

9.87. Решите уравнение для любого значения параметра a:

1) $a(a-1)x=a$; 2) $x^2+ax+36=0$;

3) $x^2-(2a+1)x+a^2+a=0$; 4) $\dfrac{x-a}{x-3}=0$;

5) $\dfrac{x^2-a^2}{x-3}=0$; 6) $\dfrac{x^2-a^2}{x+4}=0$.

9.88. Решите уравнение для любого значения параметра a:

1) $|x+3|-a(x-1)=4$; 2) $3|x-2|-a|2x+3|=10{,}5$.

9.89. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x-a=2|2|x|-a^2|$ имеет три различных корня.

9.90. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x|x+2a|+1=a$ имеет два различных корня.

9.4.6. Системы уравнений

В упражнениях **9.91–9.93** решите системы уравнений.

9.91. 1) $\begin{cases} 3x+5y=11, \\ 2x-3y=17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 20x-15y=51, \\ 4x-3y=10{,}2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+5y=20, \\ 6x+10y=7. \end{cases}$

9.92. 1) $\begin{cases} x+2y=3, \\ x^2-3xy+5y^2=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+4y=12, \\ x^2+y^2=5{,}76; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x-12y=60, \\ x^2+y^2=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2+5xy+7y^2=31. \end{cases}$

9.93. 1) $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ x^2+3xy+5y^2=47; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0, \\ x^2+3xy+5y^2=5. \end{cases}$

9.94. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y^2+2y(2+x)+(x^2+2x)(4-x^2)=0, \\ y-ax-3a=0 \end{cases}$$

имеет по крайней мере три различных корня?

9.95. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{16}{15}, \\ x^2-y^2=16. \end{cases}$

9.96. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} xy+x+y=7, \\ yz+y+z=-3, \\ xz+x+z=-5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy+xz=8, \\ yz+xy=9, \\ xz+yz=-7. \end{cases}$

9.97. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt{3x+y}+\sqrt{y-x}=7, \\ 2\sqrt{y-x}+\sqrt{4x+15}=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12, \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12. \end{cases}$

9.5. Алгебраические неравенства

9.5.1*. Доказательства неравенств

9.98. Докажите неравенство:

1) $(6u-1)(u+2)<(3u+4)(2u+1)$;

2) $(3v-1)(2v+1)>(2v-1)(2+3v)$;

3) $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$; 4) $a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2, a>0$.

9.99. Докажите неравенство:

1) $\dfrac{a+b+c}{2} \geqslant \sqrt[3]{abc}$; 2) $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \geqslant 4, (x>0, y>0)$;

3) $a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}, (a \geqslant 0, b \geqslant 0, c \geqslant 0)$;

4) $(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant 8abc, (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ a+b+c=1)$.

9.100. Докажите, что каждая сторона треугольника меньше его полупериметра.

9.101. Сравните числа:

1) $\dfrac{86}{87}$ и $\dfrac{87}{88}$; 2) $\sqrt{23}-\sqrt{11}$ и $\sqrt{22}-\sqrt{10}$;

3) $\dfrac{113}{112}$ и $\dfrac{112}{111}$; 4) $\sqrt{38}+\sqrt{20}$ и $\sqrt{37}+\sqrt{21}$.

9.102. Сравните время, за которое моторная лодка проплывает 20 км пути в стоячей воде, и время, за которое она проплывает 10 км пути по течению и 10 км пути против течения реки.

9.5.2. Решение рациональных неравенств. Метод интервалов

9.103. Решите неравенство:

1) $17-x>10-6x$; 2) $30+5x \leqslant 18-17x$;
3) $6x-34 \geqslant x+1$; 4) $3u-1<6u-1$;
5) $5x^2-5x(x+4) \geqslant 100$; 6) $p(p-1)-p^2>12-6p$.

9.104. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} -3<2x-3<-1, \\ 1-4x<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0<1-3x<1, \\ 3-4x<2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-3 \leqslant 0, \\ \dfrac{2x-5}{x-2} \geqslant 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-2 \leqslant 5x-8, \\ \dfrac{2x-1}{2-x}<4. \end{cases}$

9.105. Решите неравенство методом интервалов:

1) $(2x+7)(3x-4)(x+5)>0$; 2) $(x-6)(0{,}5x+4)(5x+10)<0$.

9.106. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$; 2) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}>3$;

3) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}>\dfrac{3}{x+2}$; 4) $\dfrac{x-2}{x+2} \geqslant \dfrac{2x-3}{4x-1}$.

9.107. Решите неравенство:
1) $x^2 - 3x - 4 > 0$; 2) $x^2 - 5x - 60 \leqslant 0$; 3) $x^2 \geqslant 16$.

9.108. Решите неравенство:
1) $\dfrac{x+4}{x-2} \leqslant \dfrac{2}{x+1}$; 2) $\dfrac{1}{x^2+x} \leqslant \dfrac{1}{2x^2+2x+3}$.

9.109. Решите неравенство:
1) $(x^2-x)^2 - 8(x^2-x) + 12 \geqslant 0$; 2) $x^2 + (x+2)^2 < \dfrac{60}{x^2+2x+3}$.

9.5.3. Иррациональные неравенства

В упражнениях **9.110–9.112** решите неравенства.

9.110. 1) $\sqrt{x^2-3x+2} > 2-x$; 2) $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} > 3$;
3) $\sqrt{x^2-3x-10} < x-5$; 4) $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} > 1$.

9.111. 1) $(x+1)\sqrt{9-x^2} \leqslant 0$; 2) $(x-1) + \sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0$;
3) $x\sqrt{10-x^2} > x^2 - 6$; 4) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \leqslant 1$.

9.112. 1) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} > 1,5\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$.
2) $(12-x)\sqrt{\dfrac{12-x}{x-2}} + (x-2)\sqrt{\dfrac{x-2}{12-x}} < \dfrac{82}{3}$.

9.5.4. Неравенства, содержащие модуль и параметр

9.113. 1) $|x-1| + |x-4| \geqslant 5$; 2) $|x-2| + |x+5| \leqslant 7$.

9.114. 1) $\left|\dfrac{x^2-3}{x+3}\right| \leqslant 1$; 2) $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \geqslant 1$.

9.115. 1) $|2x+3| \leqslant 4x$; 2) $x^2 - |5x+6| > 0$.

9.116. 1) $|x^2 - 7x + 5| \leqslant 5$; 2) $|x^2 - 3x| \leqslant x$; 3) $|x^2 - 3x| > x$.

9.117. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - 3ax + 1 > 0$ выполняется для любых x?

9.118. При каких значениях параметра a число $x = 1$ является корнем уравнения $ax^2 + (3a^2+1)x - 3 > 0$?

9.119. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства $x^2 - 3x - 4 < 0$ является решением неравенства $x^2 - a^2 < 0$?

9.120. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства $x^2 - 5x + 40 \leqslant 0$ является решением неравенства $x^2 - a^2 > 0$?

9.6. Тригонометрия

9.6.1. Основные формулы

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \alpha \neq \pi + \pi n, n \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z;$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}; \qquad \mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta}.$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}; \qquad \mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;\quad \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2};$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\alpha\neq\pi+2\pi n, n\in Z;$$

$$\sin\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Формулы тройного аргумента

$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;\quad \cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\mathrm{tg}3\alpha=\frac{3\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Таблица формул приведения

α	$\frac{\pi}{2}-\alpha$ $90°-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$ $90°+\alpha$	$\pi-\alpha$ $180°-\alpha$	$\pi+\alpha$ $180°+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$ $270°-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ $270°+\alpha$	$2\pi-\alpha$ $360°-\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$

9.6.2. Преобразование тригонометрических выражений

9.121. По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

1) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\mathrm{tg}\alpha = 2\sqrt{2}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 4) $\mathrm{ctg}\alpha = -2\sqrt{6}, \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

9.122. При каком значении a число $\frac{\pi}{6}$ является корнем уравнения

$3\sin 6x + 2\sin 5x + 5\cos 4x - 3\sin 3x + 2\cos 2x - \sin^2 x = a$?

9.123. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. На единичной окружности найдите точки, которые соответствуют следующим углам:

1) $x, \pi - x, \pi + x, \frac{\pi}{2} - x, \frac{\pi}{2} + x$; 2) $x + 2k\pi, k \in Z$;

3) $\pm x + 2k\pi, k \in Z$; 4) $x + k\pi, k \in Z$;

5) $(-1)^k + k\pi, k \in Z$.

9.124. Упростите выражение:

1) $1 + \sin(\pi - \varphi)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)$; 2) $1 - \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$;

3) $1 + \mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}2\beta$; 4) $\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}2\alpha$.

9.125. Докажите тождество:

1) $(1 + \mathrm{ctg}^2\alpha)(1 - \sin^2\alpha) = \mathrm{ctg}^2\alpha$; 2) $(1 + \mathrm{tg}^2\beta)(1 - \cos^2\beta) = \mathrm{tg}^2\beta$;

3) $\frac{\sin x + \cos x\,\mathrm{tg}x}{\cos x + \sin x\,\mathrm{ctg}x} = 2\mathrm{tg}x$; 4) $\frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 y} - \frac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2 y} = \cos 2y$.

9.126. Докажите, что значение выражения не зависит от y:

1) $\cos(38^\circ + y)\cos(52^\circ - y) - \sin(38^\circ + y)\sin(52^\circ - y)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{10} - y\right)\cos\left(\frac{\pi}{15} + y\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10} - y\right)\sin\left(\frac{\pi}{15} + y\right)$.

В упражнениях **9.127–9.129** упростите выражения.

9.127. 1) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x}$; 2) $\frac{\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x}{\cos x - 3\cos 2x + \cos 3x}$.

9.128. 1) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}, \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

2) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

9.129. 1) $\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}-2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\alpha$;

2) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}-\mathrm{tg}\beta\cdot\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}\right)$;

3) $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

9.130. Известно, что $\cos\alpha=-\dfrac{9}{41}, \pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$. Найдите значение $\mathrm{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

9.131. Известно, что $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4}{5}, 0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. Найдите значение выражения $\sqrt{1-\cos\alpha}+\sqrt{1+\cos\alpha}$.

9.132. Найдите значение $\cos2\alpha$, если $2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 1$.

9.133. Вычислите:

1) $\sin20^\circ\cdot\sin40^\circ\cdot\sin80^\circ$; 2) $\cos70^\circ\cdot\cos50^\circ\cdot\cos10^\circ$.

9.6.3. Тригонометрические уравнения

Основные формулы

$$\sin x = a, |a| < 1 \Rightarrow x = (-1)^n\arcsin a + \pi n, n \in Z;$$

$$\cos x = a, |a| < 1 \Rightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\mathrm{tg} x = a \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow x = \mathrm{arctg} a + \pi n, n \in Z;$$

$$\mathrm{ctg} x = a \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow x = \mathrm{arcctg} a + \pi n, n \in Z.$$

В частности, если $a = 0$, $a = 1$ и $a = -1$:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in Z;$$

$$\sin x = \pm1 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, n \in Z;$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z;$$
$$\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi n,\ n \in Z;$$
$$\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

В упражнениях **9.134–9.137** решите уравнения.

9.134. 1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

9.135. 1) $2\sin x + 3\cos x = 0$; 2) $\sin^2 3x = \cos^2 3x$.

9.136. 1) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\sin x\right) = \frac{1}{2}$; 2) $\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\sin 2x\right) = 1$.

9.137. 1) $2\cos x = 1 + \cos 2x$; 2) $2\sin^2 2x = 3\cos^2 2x$.

9.138. 1) $\sin 2x - 3\cos^2 x = 4$; 2) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

9.139. 1) $\sin x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 2$; 2) $3\sin 4x = (\cos 2x - 1)\operatorname{tg} x$.

9.140. 1) $\cos x = \sqrt{3}\sin x + 2\cos 3x$; 2) $\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x$.

9.141. 1) $\sin x - \sqrt{7}\cos x = \sqrt{7}$; 2) $\sqrt{3}\sin x - \sqrt{5}\cos x = \sqrt{3}$.

9.142. 1) $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$;
2) $4 - \sin 2x = 4(\cos x - \sin x)$.

9.143. Найдите все корни уравнения $\sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{2}\cos 3x$, принадлежащие промежутку $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

9.144. Решите уравнение для всех действительных значений параметра a:
$\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$.

9.6.4. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

Основные формулы

$$\arcsin x = \alpha,\ |\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \sin\alpha;$$
$$\arccos x = \alpha,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi \Rightarrow x = \cos\alpha;$$
$$\operatorname{arctg} x = \alpha,\ |\alpha| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \operatorname{tg}\alpha;$$
$$\operatorname{arcctg} x = \alpha,\ 0 < \alpha < \pi \Rightarrow x = \operatorname{ctg}\alpha.$$

В упражнениях **9.145–9.149** решите уравнения.

9.145. 1) $\arcsin\left(\frac{x}{2}-3\right)=\frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos(1-2x)=\frac{\pi}{2}$;

3) $\operatorname{arctg}(2-3x)=-\frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{arcctg}(3x+2)=\frac{\pi}{4}$.

9.146. 1) $\operatorname{arctg}^2(3x+2)+2\operatorname{arctg}(3x+2)=0$;

2) $2\arcsin x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{9\arcsin x}$.

9.147. 1) $\arccos\frac{x}{2}=2\operatorname{arcctg}(x-1)$; 2) $\arccos x-\pi=\arcsin\frac{4x}{3}$.

9.148. 1) $\arcsin x-\arccos\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2}$; 2) $\arccos x-\arcsin x=\arccos\sqrt{3x}$.

9.149. 1) $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$; 2) $\arccos x=\pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

9.150. Решите уравнение для всех действительных значений параметра a: $2\arccos x=a+\frac{a^2}{\arccos x}$.

9.6.5. Тригонометрические неравенства

Основные формулы

$\sin x>a,\ |a|<1\Rightarrow x\in(\arcsin a+2\pi n;\ \pi-\arcsin a+2\pi n),\ n\in Z$;
$\sin x<a,\ |a|<1\Rightarrow x\in(-\pi-\arcsin a+2\pi n;\ \arcsin a+2\pi n),\ n\in Z$;
$\cos x>a,\ |a|<1\Rightarrow x\in(-\arccos a+2\pi n;\ \arccos a+2\pi n),\ n\in Z$;
$\cos x<a,\ |a|<1\Rightarrow x\in(\arccos a+2\pi n;\ 2\pi-\arccos a+2\pi n),\ n\in Z$;

$\operatorname{tg}x>a,\ a\in R\Rightarrow x\in(\operatorname{arctg}a+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n),\ n\in Z$;

$\operatorname{tg}x<a,\ a\in R\Rightarrow x\in(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \operatorname{arctg}a+\pi n),\ n\in Z$;

$\operatorname{ctg}x>a,\ a\in R\Rightarrow x\in(\pi n;\ \operatorname{arcctg}a+\pi n),\ n\in Z$;
$\operatorname{ctg}x<a,\ a\in R\Rightarrow x\in(\operatorname{arcctg}a+\pi n;\ \pi+\pi n),\ n\in Z$.

В упражнениях **9.151–9.154** решите неравенства.

9.151. 1) $\sin 2x<\frac{1}{2}$; 2) $\cos\frac{x}{3}>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9.152. 1) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\geqslant 1$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$.

9.153. 1) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)>1$; 2) $4\sin 2x\cos 2x\geqslant\sqrt{2}$.

9.154. 1) $\sin x \geqslant \cos x$; 2) $\cos^2 x + \sin x \cos x \geqslant 1$;
3) $1 - \sin x + \cos x < 0$; 4) $2\cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x$.

9.155. Найдите решения неравенства на указанном промежутке:

1) $\cos\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2},\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; 2) $\sin 2x < \frac{\sqrt{2}}{2},\ x \in [0; \pi]$.

9.156. Найдите область определения функции:

1) $y = \arcsin(1 + \operatorname{tg}^2 \pi x)$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x - \sin x}$.

9.157. Решите неравенство:
1) $\sin 3x > 4\sin x \cos 2x$; 2) $5 + 2\cos 2x \leqslant 3|2\sin x - 1|$.

9.7. Степенная, показательная и логарифмическая функции

9.7.1. Степень с рациональным показателем

В упражнениях **9.158–9.163** упростите выражения.

9.158. 1) $\frac{x^{-1} + y^{-1}}{(x+y)^2}$; 2) $\frac{ab^{-1} - a^{-1}b}{a^{-1} - b^{-1}}$; 3) $\frac{a^5 + a^6 + a^7}{a^{-5} + a^{-6} + a^{-7}}$.

9.159. 1) $\frac{a^{-n} + b^{-n}}{a^{-2n} - b^{-2n}} : \left(\frac{1}{b^{-n}} - \frac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$; 2) $\frac{a^{-2n} - b^{-2n}}{a^{-n} - b^{-n}} \cdot \left(\frac{1}{b^{-n}} + \frac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$.

9.160. 1) $a^{\frac{5}{3}} b^{-\frac{1}{6}} \left(a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}\right)^4$; 2) $\left(c^{-\frac{7}{3}} x^{-0,4}\right)^3 c^{\frac{2}{7}} x^{0,2}$; 3) $\sqrt[10]{c\sqrt[3]{c^2}}$.

9.161. 1) $\sqrt[3]{y^2 \cdot \sqrt[4]{y^{-3}}}$; 2) $\sqrt[7]{x^4} : \sqrt[14]{x}$; 3) $\sqrt[5]{m^2\sqrt{m}} : \sqrt[3]{m^2\sqrt{m}}$.

9.162. $$\frac{\left(m^{\frac{5}{6}} n^{-\frac{1}{6}} + m^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(m^{\frac{5}{6}} n^{-\frac{1}{6}} - m^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(n^{-\frac{1}{3}} - m^{-\frac{1}{3}}\right)\left(n^{\frac{2}{3}} + m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{1}{3}} m^{\frac{1}{3}}\right)} - 2n + \frac{4n^2}{n-m}.$$

9.163. $$\frac{\left(a^{\frac{5}{9}} b^{-\frac{1}{9}} - a^{\frac{2}{9}} b^{\frac{2}{9}}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{a^4} - \sqrt[3]{a^3 b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}} + \sqrt[3]{b^{-1}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}\right)} - \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} + \frac{a+b}{2}.$$

9.164. Найдите зависимость между x и y:

1) $x = t^{\frac{1}{2}},\ y = t^{-\frac{1}{2}}$; 2) $x = t^{\frac{1}{3}},\ y = t^{\frac{1}{6}}$;

3) $x = 3t^{\frac{1}{2}},\ y = 2t^{-\frac{1}{2}}$; 4) $x = 0{,}5t^{-\frac{1}{2}},\ y = 0{,}4t^{-\frac{1}{2}}$.

9.7.2. Преобразование показательных и логарифмических выражений

9.165. Возрастают или убывают функции:

1) $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$; 2) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$;

3) $y = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{2}{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x$?

9.166. Сравните числа:

1) $2^{1,5}$ и $2^{\sqrt{2}}$; 2) $3^{-0,1}$ и 3^0; 3) $2^{\frac{1}{7}}$ и $2^{0,143}$.

9.167. Вычислите:

1) $\log_6 \sqrt{\frac{1}{6}}$; 2) $\log_{a^2} \sqrt[7]{a}$; 3) $\log_{\sqrt{c}} \sqrt[6]{c^5}$; 4) $5^{1+\log_5 4}$.

9.168. Сравните числа:

1) $\log_5 2$ и $\log_{25} 8$; 2) $\log_5 \frac{1}{625}$ и $\log_3 \frac{1}{27}$.

9.169. Вычислите:

1) $2^{\log_{\sqrt{2}} 3 + \log_{0,5} 5}$; 2) $\log_3 \log_4 \log_2 16$.

9.170. Известно, что $\log_6 2 = m$. Найдите $\log_{24} 72$.

В упражнениях 9.171–9.176 упростите выражения.

9.171. 1) $125^{\log_5 \sqrt{3}}$; 2) $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$; 3) $10^{3-\lg 4} - 49^{\log_7 15}$.

9.172. 1) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$; 2) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

9.173. 1) $\left(n^{\frac{\log_{100} m}{\lg m}} \cdot m^{\frac{\log_{100} n}{\lg n}}\right)^{2\log_{mn}(m+n)}$; 2) $\sqrt{a^{1+\frac{1}{2\log_4 a}} + 8^{\frac{1}{3\log_a \sqrt{2}}} + 1}$.

9.174. Докажите тождество $\log_{abc} x = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\log_b x} + \dfrac{1}{\log_c x}}$.

9.7.3. Показательные и логарифмические уравнения

В упражнениях **9.175–9.182** решите уравнения.

9.175. 1) $2^{3x} = 512^{\frac{1}{3x}}$; 2) $(0,2)^{x+1} = 5$.
3) $\log_{0,3}(5 - x) = -1$; 4) $\log_3(2x + 3) = 0$.

9.176. 1) $3^{|3x-4|} = 9^{2x-2}$; 2) $2^{2x-3} = 4^{x^2-3x-1}$.

9.177. 1) $\log_3 \log_2^2 (x-4) = 0$; 2) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5,5$.

9.178. 1) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1} = 6$; 2) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84$.

9.179. 1) $\lg^2(8x - 9) = \lg^2(6x - 4)$; 2) $\log_2 \dfrac{x-2}{x-1} - 1 = \log_2 \dfrac{3x-7}{3x-1}$.

9.180. 1) $4^{x+1,5} + 9^x = 6^{x+1}$; 2) $2 \cdot 4^x + 25 \cdot 25^x = 15 \cdot 10^x$.

9.181. 1) $\log_5 x = \sqrt{\log_2 5x - \log_5 x}$; 2) $\sqrt{\log_{27} \dfrac{1}{3x^2}} + \log_x 9 = 0$.

9.182. 1) $\lg^2 x^3 - 20 \lg \sqrt{x} + 1 = 0$; 2) $2\log_9 x + 9\log_x 3 = 10$;
3) $x^{\log_5 x - 2} = 125$; 4) $x = 10^{1 - \frac{1}{4}\lg x}$.

В упражнениях **9.183–9.186** решите системы уравнений.

9.183. 1) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 5, \\ 2^{x+y} = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4. \end{cases}$

9.184. 1) $\begin{cases} y^x = 15 + y^{-x}, \\ y^{2,5+x} = 64; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$

9.185. 1) $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y}, \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^y = 243, \\ \sqrt[y]{1024} = \left(\dfrac{2x}{3}\right)^2. \end{cases}$

9.186. 1) $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2, \\ x^2 + y = 42; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 6, \\ \log_4 x + \log_4 y = -3. \end{cases}$

9.187. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 4x - \log_2 a = 0$ имеет действительные корни?

9.188. Найдите натуральное число n, для которого выполняется равенство $3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^8 \cdot \ldots \cdot 3^{3n-1} = 27^5$.

9.189. При каких значениях параметра a уравнение $3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}$ имеет действительные корни?

9.7.4. Показательные и логарифмические неравенства

В упражнениях **9.190–9.194** решите неравенства.

9.190. 1) $2^x \cdot 5^x > 0{,}1(10^{x-1})^5$; 2) $(\lg 3)^{3x-7} > (\log_3 10)^{7x-3}$;

3) $6^{3-x} < 216$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-(x+2)} \geqslant 81$.

9.191. 1) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x} - 5 > 0$; 2) $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$;

3) $\log_5(x^2 - 11x + 43) < 0$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1$.

9.192. 1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x < \log_{\frac{1}{3}}(5x+24)$; 2) $\lg(x-2) + \lg(27-x) \leqslant 2$.

9.193. 1) $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \leqslant \frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{1+\lg x} + \frac{1}{1-\lg x} > 2$;

3) $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x)\right) > 0$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_4\left(x^2-5\right)\right) > 0$.

9.194. 1) $\log_x(2x - 0{,}75) > 2$; 2) $\log_{x+3}(x^2 - x) < 1$;

3) $\log_{-6x-5x^2} 6^x > 0$; 4) $2^{\sqrt{|x|-2}} > 4$.

9.195. Найдите область определения функции:

1) $y = \frac{\lg\left(2^x - 3^x\right)}{\sqrt{11 - 9x - 2x^2}}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{8 - \lg^3(3x-2)}}$.

9.196. Найдите все целые решения неравенства

$\log_{0,3}\left(\sqrt{x+5} - x + 1\right) > 0$.

9.8. Производная и ее приложения

9.8.1. Определение производной функции

В упражнениях **9.197–9.200** найдите производные функций.

9.197. 1) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$; 2) $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$.

9.198. 1) $y = x - 3\sqrt{x}$; 2) $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}$.

9.199. 1) $y = 9\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x}$; 2) $y = \frac{10}{\sqrt[5]{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

9.200. 1) $y = \sin 2x - \operatorname{tg} x$; 2) $y = x^2 - \operatorname{ctg} x$.

9.201. 1) $y = \frac{\sin x}{x}$; 2) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$.

9.202. 1) $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$; 2) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

9.203. 1) $y = (2 - 3x^2)^3$; 2) $y = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$.

9.204. 1) $y = x^2 + 3^x$; 2) $y = x^2 \cdot e^{-2x}$.

9.205. 1) $y = x - \operatorname{arctg} x$; 2) $y = \arccos(1 - 2x)$.

9.206. 1) $(x^2+4)\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - 2x$; 2) $y = x(\cos\ln x + \sin\ln x)$.

9.207. Найдите значения производной данной функции в указанных точках:

1) $f(x) = \frac{x}{2x-1}$, $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$; 2) $f(x) = \ln(1 + a^{-2x})$, $f'(0)$;

3) $f(x) = \sqrt{1+\cos^2 x^2}$, $f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$; 4) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$, $f'(1)$.

9.8.2. Приложения производной

9.208. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = x^2 - 2x$; 2) $y = x^3$; 3) $y = \ln x$; 4) $y = \frac{x^2-2}{2x+3}$.

9.209. Найдите промежутки возрастания функции:

1) $y = x^2 + 4x + 5$; 2) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3$; 3) $y = \frac{1}{1+x^2}$.

9.210. Найдите промежутки убывания функции:

1) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$; 2) $y = 4x - \frac{x^3}{3}$; 3) $y = \frac{1+\ln x}{x}$.

9.211. Напишите уравнения касательных к графикам функций из упражнения **9.209**, проведенных в точке с абсциссой $x = 1$.

9.212. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на указанном отрезке:

1) $f(x) = x^5 - x^3 + x + 2$, $[-1; 1]$;

2) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$, $[-2; 1]$;

3) $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

4) $f(x) = \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x$, $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

9.213. Найдите экстремумы функций из упражнения **9.210.**

9.214. Найдите экстремумы функции:

1) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$; 2) $y = \frac{x^2}{x-2}$; 3) $y = x - 2\ln x$.

9.215. Проведя исследование функции, постройте ее график:

1) $y = \frac{x^3}{3} + x^2$; 2) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$;

3) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$; 4) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$;

5) $y = \frac{\ln x}{x}$; 6) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

9.216. Для каждой из функций, данных в упражнении **9.209**, найдите угловой коэффициент касательной к графику функции, проведенной в точке его пересечения с осью Oy.

9.217. В какой точке касательная, проведенная к графику функции $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x - 4$, составляет с положительным направлением оси Ox угол в 45°?

9.218. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник с наибольшей площадью. Найдите площадь этого прямоугольника.

9.219. Во сколько раз объем шара больше объема наибольшего цилиндра, вписанного в этот шар?

9.220. Из круга вырезали сектор с центральным углом α, затем из сектора свернули конус. При каком значении α объем полученного конуса будет наибольшим?

9.221. Тело подброшено вертикально вверх на 10 м с начальной скоростью 20 м/с. На какую высоту x тело поднимется через t с? Через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на какой высоте она находится?

9.222. Зависимость между количеством вещества x, образующегося в результате химической реакции, и временем t, выражается равенством $x = A(1 - e^{-kt})$. Найдите скорость реакции.

9.9. Первообразная, интеграл и их приложения

9.9.1. Первообразная и неопределенный интеграл

9.223. Найдите первообразную для функции:

1) $f(x) = 3x^2 + 2x$; 2) $f(x) = \sin x$;

3) $f(x) = \dfrac{2}{\sin^2 x}$; 4) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$;

5) $f(x) = 4x^3 + \dfrac{3}{x^2+4}$; 6) $f(x) = \cos x + e^x$.

В упражнениях **9.224–9.229** найдите неопределенный интеграл.

9.224. 1) $\int\left(x^2 + 2x - \dfrac{1}{x}\right)dx$; 2) $\int\dfrac{x^2+1}{x^2}dx$;

3) $\int\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$; 4) $\int\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

9.225. 1) $\int\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$; 2) $\int\dfrac{3 - 2\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$;

3) $\int e^{-3x}\,dx$; 4) $\int(3x - \sin 4x)\,dx$.

9.226. 1) $\int\sin^2 x\cos x\,dx$; 2) $\int\cos^5 x\sin x\,dx$.

9.227. 1) $\int\sin^2 x\,dx$; 2) $\int\cos^2 2x\,dx$.

9.228. 1) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; 2) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$.

9.229. 1) $\int\cos^4 x\cdot\sin^3 x\,dx$; 2) $\int\sin 3x\cdot\cos 2x\,dx$.

9.9.2. Определенный интеграл. Формула Ньютона–Лейбница

В упражнениях **9.230–9.232** вычислите интегралы.

9.230. 1) $\int_0^2(x^3 - 12x + 3)\,dx$; 2) $\int_1^2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)dx$;

3) $\int_1^4\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$; 4) $\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

9.231. 1) $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$;

3) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$.

9.232. 1) $\int_0^a \left(x^2 - ax\right)dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$.

9.9.3. Приложения интеграла. Основные формулы

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, ($f(x) \geqslant 0$) прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox (рис. 9.1), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

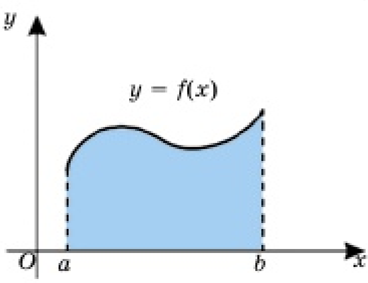


Рис. 9.1

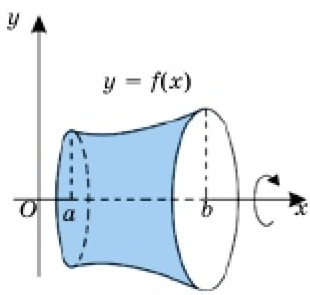


Рис. 9.2

Площадь фигуры, ограниченной сверху и снизу соответственно графиками функций $f(x)$ и $g(x)$, ($f(x) \geqslant g(x)$), с боков – прямыми $x = a$ и $x = b$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx.$$

Объем тела, полученного вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox (рис. 9.2), вычисляют следующим образом:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Работа, производимая силой $F(x)$ при перемещении материальной точки вдоль оси Ox от точки $x = a$ до точки $x = b$ вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

В упражнениях **9.233–9.243** найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной данными линиями, и выполните соответствующий чертеж.

9.233. $f(x) = 3x^2 + 2x$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

9.234. $f(x) = 4x^3$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

9.235. $f(x) = \frac{2}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

9.236. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

9.237. $f(x) = \sin 2x$, $x = \frac{\pi}{8}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$.

9.238. $f(x) = e^x$, $x = 0$, $x = \ln 4$, $y = 0$.

9.239. $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x + 1$.

9.240. $f(x) = 6 + 3x - 2x^2$, $g(x) = x + 2$.

9.241. $f(x) = x^3$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x = 2$.

9.242. $f(x) = x + 1$, $g(x) = (x - 1)^2$.

9.243. $f(x) = 3 - x^2$, $g(x) = x^2 + 1$.

В упражнениях **9.244–9.247** найдите объем тела, полученного вращением данной кривой вокруг оси Ox.

9.244. $y = \frac{x^3}{3}$, $x \in [0; 2]$.

9.245. $y = 2x - 6$, $x \in [3; 5]$.

9.246. $y = e^x$, $x \in [0; \ln 3]$.

9.247. $y = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

9.248. На материальную точку действует сила, линейно зависящая от пройденного точкой пути. Если в начале движения сила была равна 100 Н, то при перемещении точки на 10 м сила достигла значения 600 Н. Найдите работу, произведенную силой.

9.249. Вычислите работу, которую надо затратить, чтобы растянуть пружину, находящуюся в положении равновесия, на 10 см. Известно, что при растяжении пружины на 1 см сила натяжения равна 5 Н.

9.10. Задачи на составление уравнений

9.250. Мастер за три дня изготовил 48 деталей. Количество деталей, сделанных за первый, второй и третий дни, пропорционально соответственно числам 5, 4 и 3. Сколько деталей он изготовил за первые два дня?

9.251. Для перевозки 60 т груза заказали определенное количество грузовых автомобилей. В связи с тем, что на каждую машину погрузили на 0,5 т меньше запланированного, дополнительно было затребовано еще 4 машины. Сколько машин было запланировано первоначально?

9.252. Моторная лодка затратила 5 ч, чтобы проплыть 14 км по течению реки и 9 км против течения. Какова скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде равна 5 км/ч?

9.253. С двух земельных участков площадью 80 га и 120 га собрали 7200 ц зерновых. Сколько центнеров собрали с 1 га на каждом участке, если с каждых 3 га первого участка собрали на 10 ц зерновых больше, чем с 2 га второго участка?

9.254. Цена акварельных красок поднялась с 64 тг до 72 тг. На сколько процентов выросла цена?

9.255. Имеются два сплава цинка и никеля. В первом сплаве отношение этих металлов равно 2:3, а во втором – 3:7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором отношение цинка и никеля равно 5:11?

9.256. В зрительном зале было 320 посадочных мест. После того как количество посадочных мест в каждому ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, количество мест стало равным 420. Сколько рядов было в зрительном зале первоначально?

9.257. Бассейн наполняется двумя трубами за 12 ч. Первая труба заполняет бассейн на 10 ч быстрее, чем вторая. За сколько часов каждая труба, действуя отдельно, заполнит бассейн?

9.258. При продажной стоимости единицы товара 2,2 тыс. тенге магазин получает 10% прибыли. Если снизить цену до 1,8 тыс. тенге, то магазин понесёт убыток в сумме 43 тыс. тенге. Сколько единиц этого товара было в магазине?

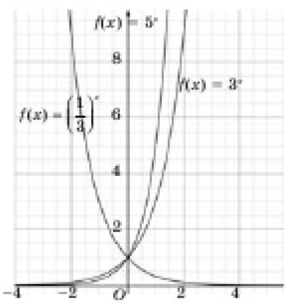
9.259. Если разделить двузначное число на сумму его цифр, то в частном получим 4 и в остатке – 3. Если же разделить это число на произведение его цифр, то в частном получим 3, а в остатке – 5. Найдите это число.

ОТВЕТЫ

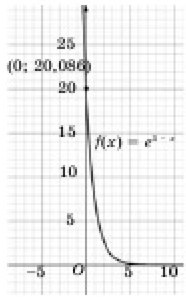
Раздел 6

6.1. 1) $x > 0$; 2) $x < 0$; 3) $x = 0$. **6.2.** 1) $x < 0$; 2) $x > 0$; 3) $x = 0$. **6.4.** 1) $x \neq -3$; 2) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

6.3.

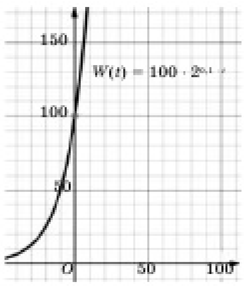


6.5. 1) Убывает.



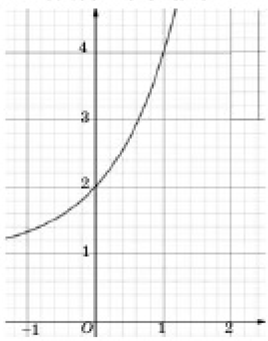
6.6. 1) 1000 га; 2) 4000 га. **6.7.** 1) 100 г; 2) ≈ 132.

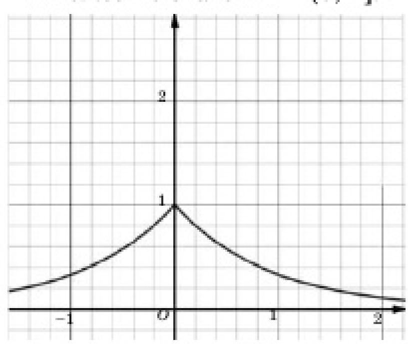
3)



6.8. 1) 27; 2) 450 %. **6.9.** 1) $2^{1,5} > 2^{\sqrt{2}}$; 2) $2^{\frac{1}{3}} > 2^{0,3}$; 3) $3^{0,1} > 3^{0}$; 4) $3^{-0,1} < 3^{0}$; 5) $2^{-1,42} < 2^{-\sqrt{2}}$; 6) $2^{\frac{1}{7}} < 2^{0,143}$. **6.10.** 1) 250; 2) ≈ 112; 3) ≈ 346. **6.11.** 1) 100 C°; 2) ≈ 81 C°; 3) ≈ 76 C°.

6.12. 1) Область определения – $(-\infty; +\infty)$, множество значений – $(1; +\infty)$. 4) Область определения – $(-\infty; +\infty)$, множество значений – $(0; 1]$.

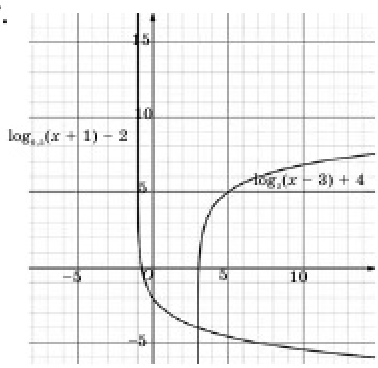




6.13. 1) Возрастает; 2) убывает; 3) убывает; 5) возрастает. **6.14.** 1) Да, положительный; 2) да, отрицательный; 5) нет. **6.15.** $0 < a < 1$. **6.17.** 2 +

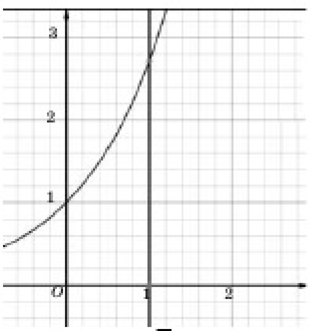
$+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$. **6.18.** $\sqrt{17}-3$; 1. **6.20.** Надо выделить полный квадрат. **6.22.** 1) $x > 39$. **6.25.** 1) 1; 2) − 1; 3) 2; 5) − 3. **6.26.** 1) 1; 2) − 1; 5) − 3. **6.28.** 1) 5; 2) − 2; 3) 0,5; 4) 7; 8) $\frac{1}{3}$. **6.30.** 1) 4; 2) 9; 3) $\frac{1}{64}$; 5) 2. **6.31.** 1) 5; 2) 8; 3) $\frac{1}{14}$; 4) 1,5; 5) 0. **6.32.** 2) 0; 5) 1,5. **6.33.** 1) $10^{\lg 6}$; 2) $10^{\lg 6+1}$. **6.34.** 1) lg16; 2) ln4; 3) lg8. **6.35.** 1) lg96; 2) ln72; 6) ln0,5. **6.36.** 1) 2; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) − 2. **6.38.** 2) $\sqrt{5}$; 6) 1,5. **6.39.** 1) $p+q$; 2) $2p+3q$; 3) $r+2q$. **6.40.** 1) $\log_5 2=\frac{1}{\log_4 25}$; 2) $\log_2 3=\frac{1}{\log_3 2}$; 3) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}=\frac{1}{\log_3 2}$. **6.41.** 1) $\lg\sqrt[3]{10} < \log_2\sqrt{2}$; 2) $\log_4 2=\log_{0,0625}0,25$. **6.44.** 1) 9; 2) 80; 3) 150; 4) $\frac{1}{25}$. **6.45.** $\frac{mnk}{mk+kn+mn}$. **6.46.** 2) 0,5; 4) 1/3. **6.48.** 1) $\log_a a^2$; 2) $\log_a\sqrt{a}$; 3) $\log_a\frac{1}{a}$. **6.50.** $\frac{2+m}{1+2m}$. **6.51.** $\frac{3-2m}{3}$. **6.52.** $\frac{2n+2m}{1-2n}$. **6.53.** 2) 3. **6.54.** 1) 10; 2) 346; 3) 20. **6.55.** Воспользуйтесь формулой $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$. **6.56.** 1) $a+b$; 2) $a+1$. **6.58.** $2a+2b-1$. **6.59.** 8. **6.60.** $\log_a b-\log_b a$. **6.69.** 1) 1; 2) 1. **6.70.** Дискриминант квадратного уравнения равен нулю, (1; 7). **6.71.** 2. **6.73.** 1) Положительный; 2) отрицательный; 3) положительный. **6.74.** 1) $x \neq 1$; 2) $x > 1$. **6.75.** Области определения не совпадают. **6.76.** 1) $\log_3 4 < \log_3 5$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 4 > \log_{\frac{1}{2}} 5$; 3) $\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{65} > \log_{\frac{3}{2}} 8$. **6.79.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **6.80.** 1) $(0;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -6) \cup (2;\ +\infty)$. **6.81.** 1) $x > -5$, возрастает; 2) $x < 3$, возрастает. **6.82.** 1) $(-\infty;\ 2) \cup (4;\ +\infty)$; 3) $(-2;\ 0,5) \cup (2;\ +\infty)$. **6.83.** 1) $\lg\sqrt[4]{10} < \log_2\sqrt{2}$; 2) $\log_4 5 > \log_8 5$; 3) $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{6} < \log_9 7$. **6.84.** 1) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3} < \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}$; 2) $\log_5 7 < 3\log_5 2$. **6.85.** $\frac{q+p}{1-q}$. **6.86.** 1) − 1; 2) $\frac{1}{3}$.

6.87.

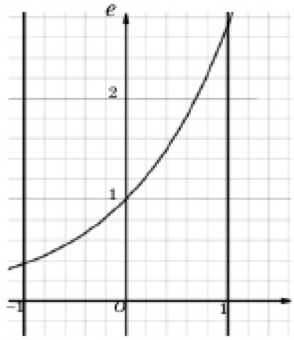


6.88. Области определения не совпадают. **6.90.** 1) $3\frac{3}{4}$; 2) 25. **6.91.** 1) $2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5} <$ $< 3\log_8 26$; 2) $2\log_3 4 < 3\log_{27}17$. **6.92.** $\frac{5-b}{2(ab+a-2b+1)}$. **6.93.** 1) $\sqrt{11} <$ $< 9^{0,5\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_3 2}$; 3) $\sqrt{8} > 2^{2\log_4 5+\log_{0,5} 9}$. **6.94.** 3/5. **6.100.** 1) Нет; 2) да. **6.104.** 1) $x = \pm\frac{3}{\sqrt{7}}$. **6.105.** 6 л. **6.106.** 1) 2,5. **6.107.** 1) $3e^{3x}$; 2) $5e^{2+5x}$; 3) $-a^{1-x}\ln a$. **6.108.** D. **6.109.** D. **6.110.** 2) $\frac{e^{3x}}{3}+C$; 5) $\frac{2^{2x-1}}{2\ln 2}+C$. **6.111.** 1) $xe^x -$ $- e^x + C$; 2) $(2x+1)\,e^{x-1} - 2e^{x-1} + C$. **6.112.** 1) $5e - 8\frac{3}{4}$; 2) $e - \frac{1}{2}$.

6.113. $S = e - 1$.

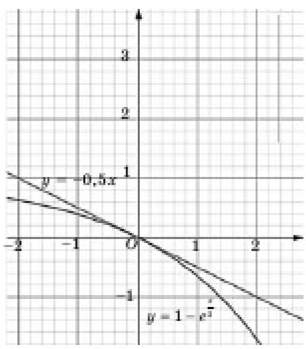


6.114. $S = e - \frac{1}{e}$.

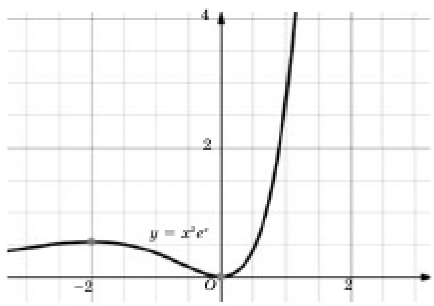


6.115. $e^x - \cos x + \sqrt{2}$. **6.116.** 1) $e^x(4x+3)$; 4) $7x^3e^{2x}(2+x)$. **6.117.** $y = ex$. **6.118.** $y = 0{,}5x + 0{,}5\,(1 - \ln 0{,}5)$. **6.119.** $y = -ex$. **6.120.** arctg2.

6.121.



6.123.



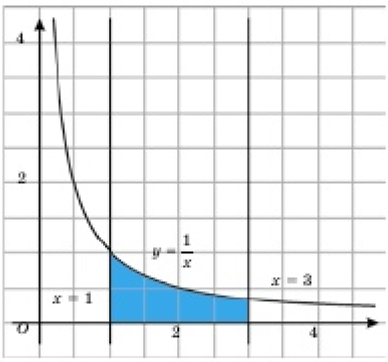
6.124. 1) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$; 3) $-e^{\operatorname{ctg} x}+C$; 4) $-e^{\cos x}+C$. **6.125.** 1) $-15e^{\frac{x}{2}}\cos 2x +$ $+10\frac{1}{16}e^{\frac{x}{2}}\sin 2x$. **6.126.** 1) $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$. **6.127.** $\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$. **6.128.** $\frac{1}{2}e^x(\cos x +$

$+\sin x)+C$. **6.129.** 44550. **6.130.** Да. **6.132.** 1) $\frac{3}{3x-2}$; 2) $\frac{1}{2x}$; 3) $-\frac{2}{1-x}$.

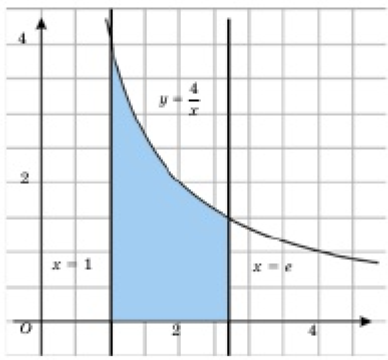
6.133. B. **6.134.** D. **6.135.** 1) $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$; 3) $x-2\ln|x-1|+C$.

6.136. 1) $x\ln 4x-x+C$; 2) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$; 3) $\frac{x^2}{2}\ln 2x-\frac{x^2}{4}+C$; 4) $-\frac{1}{x}\ln x-$ $-\frac{1}{x}+C$. **6.137.** $\frac{1}{2}$. **6.138.** 1) $e-\ln 8-1$; 2) $2\ln 3$; 3) $\frac{3}{2}-\ln 2$.

6.139. $S=\ln 3$.



6.140. $S=4$.



6.141. 1) $\frac{2}{x(\ln x+1)^2}$; 2) $\frac{3\operatorname{ctg}3x}{\ln 2}$; 3) $2(\operatorname{ctg}2x+\operatorname{tg}2x)=\frac{4}{\sin 4x}$. **6.142.** $y=\frac{x}{e}$.

6.143. 1) $-\frac{9}{(3x-2)^2}$; 2) $\frac{1}{x+1}$. **6.144.** $F(x)=\ln x$. **6.145.** 1) $\frac{1}{2}x+\frac{13}{8}\ln(4x-7)+C$; 2) $\frac{3x}{5}-\frac{29}{25}\ln(5x+3)+C$. **6.146.** 1) $\frac{(\ln x)^2}{2}+C$; 2) $\frac{2(\ln x)^3}{3}+2\ln x+C$; 3) $-\ln|\cos x|+C$; 4) $\frac{1}{2}\ln(x^2-4)+C$. **6.149.** 2) $-\left(\frac{10}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)\ln x+\frac{6}{x^3}$. **6.150.** $\sqrt{e}$.

6.151. 1. **6.152.** 1) $\frac{1}{4}\ln\frac{x-2}{x+2}+C$; 2) $3\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln(2x+3)+C$. **6.153.** Нет.

Раздел 7

7.1. 1) 4; 2) 10; 3) 6; 4) −3; 5) 3; 6) 6; 7) 6; 8) 2,4; 9) 0; 10) $\frac{1}{3}$; 11) $\log_3 7$; 12) −2. **7.2.** 1) ± 1; 2) −2; 1; 3) 6; 4) $2\frac{1}{3}$; 5) −2; 1; 6) 4; 5. **7.4.** 1) ≈ 3,9; 2) ≈ 15,5. **7.5.** 1) ≈ 6,9; 2) ≈ 13,9. **7.6.** 1) ≈ 20 дней. **7.8.** 1) ≈ 6,2 года или ≈ 74 месяца. **7.9.** 1) ≈ 3,4 года или ≈ 41 месяц. **7.10.** 1) ≈ 11 месяцев. **7.11.** 1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 8; 5) 3; 6) ± 2. **7.12.** 1) 1,5; 2) $\pm\sqrt{3}$; 3) 1; 4) 3. **7.13.** 1) − 2; 2) 0;

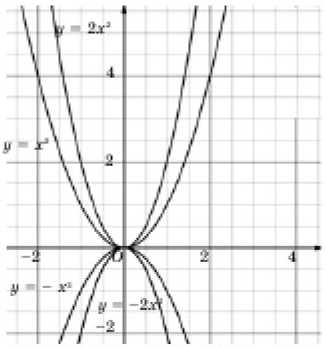
4; 3) 3; 11; 4) 1. **7.14.** 1) 0; $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3; 3) $-2{,}5$; 3; 4) $-3{,}5$; 2. **7.15.** 1) (3; 2); 2) (1; 2). **7.16.** 1) $\approx 17{,}3$ недель; 2) $\approx 92{,}2$ недели. **7.17.** 1) ≈ 8 с. **7.18.** 1) $\approx 50{,}7$; 2) $\approx 152{,}1$; 3) 4°. **7.19.** 1) 25; 2) ≈ 166. **7.20.** 1) 0; $3\frac{1}{6}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 1. **7.21.** 1) 2; 2) 1; 3) 0; 4) 0. **7.22.** 1) 1; 5; 2) -2; 5; 3) 1; 4) 1; 2. **7.23.** 1) $\log_5 10$; 2) $-0{,}4$; 3) $\log_{0,25} 1{,}5$; 4) -3. **7.24.** 1) 66; 2) 1; 3) 0; 4) $1\frac{1}{2}$. **7.25.** 1) 1,5; 2) 5; 3) $\pm\sqrt{3}$. **7.26.** 1) -2; 2) 0. **7.27.** 1) $x = \log_2 \sqrt{3}$; 2) 1. **7.28.** 1) 1; 2) $\log_3(1+\sqrt{2})$; $\log_3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **7.29**. 1) 0; 2) ± 2. **7.30**. 1) (0; 2); (2; 0); 2) (0,5; 4). **7.31.** 1) Единственное решение. **7.32.** 1) 1; 2) $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$; 3) -1; 4) $\varnothing$. **7.33.** 1) 4; 2) -7; 8; 3) 3; $\log_6 8$; 4) 3. **7.34.** 1) $a \neq 0{,}4$; 2) $a \neq 1{,}5$. **7.35.** 1) (1; 1); 2) (3; 5). **7.36**. 1) 1; 2) $\{-3\} \cup (-1; +\infty)$. **7.41.** $\frac{m+n}{1-m}$. **7.42.** 1) -1; 2) 7; 3) 2. **7.43.** 1) 0,5; 2) 2; 3) 2. **7.44.** 1) 1; 4; 2) 2; 3) 1; 5. **7.45.** 1) $1\frac{3}{5}$; 2) 8,5; 3) 49; 5) 1; -8; **7.46.** $\frac{1}{3}$. **7.47.** -3; -2; 2. **7.48.** 1) $\varnothing$; 2) 10; 3) 2. **7.49.** 1) e; e^{-4}; 2) 2; $\sqrt[9]{2}$. **7.50.** 1) (2; 5); (5; 2); 2) (2; 32); (32; 2); 3) $\left(\frac{41}{9}; -\frac{40}{9}\right)$. **7.51.** 1) (4; 8), (8; 4); 2) (2; 1), (1; 2); 3) (5; 3), (3; 5). **7.52.** 1) 4; 2) $32\frac{1}{2}$; 3) -3. **7.53.** 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{81}}$; 2) -5; 3; 3) $e^{2,5}$; e^{-2}. **7.54.** 1) 5; 2) 8; 5; 3) -3; -2; 0. **7.55.** 1) 10; 2) $\sqrt[4]{1000}$; 3) 4; 4) 1; **7.56.** 1) 1; 2) 0; 3) 2. **7.57.** 1) 2; $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 2) 3; 3) 1; 16. **7.58.** 1) $\frac{1}{5}$; 125; 2) $\sqrt[5]{10000}$; 3) $\frac{1}{9}$; 9; 4) $\frac{1}{10}$; 1000; 5) $x > 0$; $x \neq 1$; 6) 3; $\frac{1}{9}$. **7.59.** 1) (1; 0,5); 2) $\varnothing$. **7.60.** 1) (2; 6); 2) $\left(\frac{1}{2}; -1\frac{1}{2}\right)$; 3) (3; 12). **7.61.** 1) Два; 2) одно. **7.62.** 1) (7; 3), (6; 2); 2) (3; 2). **7.63.** 1) 2; 3) $\varnothing$. **7.64** 1) 1; 2) 10; 10^5. **7.65.** 1) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$; 2) (3; 9). **7.66.** 1) (4; 16). **7.67.** $a > \frac{1}{16}$. **7.72.** 1) $x < 4$; 2) $x \leqslant -1$; 3) $x < 4$; 5) $x > \frac{4}{3}$. **7.73.** 1) $x < -3$; 2) $x < -3$; 3) $x < -3$; 4) $x < -1$; $x > 2$. **7.74.** 1) 2; 2) 1; 3) -1. **7.76.** 1) $x \leqslant -0$; 2) $-1 < x < 1$. **7.77.** 1) $x < 0$; 2) $x < 4{,}5$. **7.78** 1) $x < 0$; $x > \log_6 5$; 2) $\log_2 \frac{2}{3} < x < \log_2 9$.

7.79. 1) $x \geqslant 2$; 2) $x < -1$. **7.80**. 1) $x > 11$; 2) (1; 9). **7.81.** 1) $x \leqslant 1$; 2) $x \geqslant -1$. **7.82.** 1) $x > -\frac{1}{4}$; 2) $x > 3$; 5) $x \geqslant -2$. **7.83.** 1) $\left(\frac{7}{8}; 3\right)$; 2) $(-1; 3)$; 3) $[-3; 2]$. **7.84.** 1) $(-\infty; -6] \cup [2; +\infty)$; 2) $(-\sqrt{8}; \sqrt{8})$. **7.85.** 1) $x > 2$; 2) $x > 0$. **7.86.** 1) $\left(-3\frac{1}{6}; 0\right)$; 2) $x < 34$; 3) $x < 2$. **7.87.** 1) R; 2) $x > \log_3 2$; 3) $x \leqslant -2 \cup \cup x \geqslant -1$. **7.88.** 1) 0; 2) -2. **7.89.** 1) 0; 2) -1; 3) 0. **7.90.** 1) $x < 2$; 2) $x < -2$; 3) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \log_2 3)$. **7.92.** 1) $(2; 3) \cup (4; +\infty)$; 2) $\left[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$. **7.93.** 1) $0 < x < 3$; 2) $x < 4{,}5$. **7.97.** 304. **7.98.** 1) $x > -\frac{1}{4}$; 2) $(-2; 7)$; 3) $(3; 11]$. **7.99.** 1) $x > 7$; 2) $x > 4$; 4) $\left(\frac{3}{4}; 2\right)$. **7.100.** 1) $x > 2$; 2) $x > 2$. **7.101.** 1) $x > 1$; 2) $(0{,}4; 0{,}46)$; 3) $(-0{,}2; 0{,}4) \cup (0{,}4; 1)$. **7.102.** 1) $\varnothing$; 2) $x > 2$; 3) $(2; 5)$. **7.103.** 1) $\left[\frac{1}{4}; 2\right]$; 2) $\left(\frac{1}{5^6}; 5\right)$; 3) $(0; 1) \cup (1000; +\infty)$. **7.104.** 1) $[-1; 0)$; 2) $x > 1$. **7.105.** 1) $(-4; 2)$; 2) $(-2; -1) \cup (2; 3)$; 3) $(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$. **7.106.** 1) $(1; 2]$; 2) $\left(1; 1\frac{2}{3}\right)$. **7.107.** 1) $(2; 5)$; 2) $x \geqslant 2$. **7.108.** 1) $[4; 5)$; 2) $[1; 2]$. **7.109.** 1) $\left(\frac{1}{e}; e^3\right)$; 2) $\left(2; 2\frac{1}{4}\right) \cup (6; +\infty)$. **7.110.** 1) $(0; 1] \cup [16; +\infty)$. **7.111.** 1) $-\frac{2}{3} \leqslant x < 0$; 2) $x > 8$. **7.112.** 1) $(0; 1) \cup \cup (2; +\infty)$. **7.113.** 1) $-1 < x < 10\frac{1}{9}$; 2) $(3; 4) \cup (4; +\infty)$. **7.114.** 1) $\varnothing$; 2) $(1; 3)$. **7.115.** 1) $\frac{1}{3} < x < 3$; 2) $\left(1; 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{32}}\right) \cup (3; +\infty)$. **7.117.** 1) $\left(\log_2 \frac{5}{4}; \log_2 3\right)$; 2) $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$. **7.118.** $(1; 2)$. **7.120.** 3. **7.121.** $[0; 2) \cup (4; 6]$. **7.124.** 1) $a\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})$.

Раздел 8

8.1. 1) 3-го порядка; 2) 2-го порядка. **8.4.** $A = 4$. **8.6.** $v(0) = 0$, по мере увеличения t скорость приближается к максимальному значению, рав-

ному 20. **8.7.** А; Е. **8.9.** $y = x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 2,5$. **8.10.** $S(t) = 4t - 5t^2 + C$ – общее решение, $S(t) = = 4t - 5t^2 + 11$ – частное решение. **8.11.** $y = \sqrt[3]{6x - 4}$.
8.12. 1) $k = 2$; 2) $k = 6$; 3) $k = 1$; 4) $k \in R$; 5) $k = 3$.
8.13. $y' = Cx$.



8.14. 1) $k = 2$; 2) $k = -2$; 3) $k = 3$; 4) $k = -1$; **8.15.** 1) $y' = \sqrt{\frac{c}{2x}}$; 2) $y' = C$; 3) $y' = Ce^x$. **8.16.** $x_0 = 0$, $k = y' = 1 - xy = 1$ – угловые коэффициенты всех касательных равны. **8.17.** 1) $y = -\frac{e^{-3x}}{3} + C$; 2) $y = \frac{x^2}{4} - \ln|\cos x| + C$; 3) $y = C$; 4) $y = 2\pi kx + C$. **8.18.** $y = \frac{x^2}{3} + C$. **8.19.** $y'' = = 10m - k(y')^2$. **8.20.** 1) $x\ln(x^2 + 4) - 2x + 4\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$. **8.21.** 1 и 3 уравнения. **8.22.** 1) $y = Ce^x$; 2) $y = x^2 + C$; 3) $y = -\frac{2}{x^2 + C}$; 4) $y = ex - \frac{x^2}{2} + C$.
8.23. 1) $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$; 2) $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$; 3) $y = \sqrt[3]{-3\cos x + C}$; 4) $y = \ln(x^3 + + C)$. **8.24.** 1) $y = \frac{1}{0,1 - \ln x}$; 2) $y = \frac{1}{0,5 - \ln x}$; 3) $y = \ln\left(\frac{3}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right)$.
8.26. $T(t) = 25 + 75e^{-kt}$, $\frac{dT}{dt} = -k(T - 25)$. **8.27.** ≈40 мин. **8.28.** $v = \frac{10}{0,5 + t}$; ≈0,056 с. **8.30.** $v = \frac{40}{41e^{0,2t} - 40}$. **8.31.** 1) $y = \sqrt{Ce^{2\operatorname{arctg} x} - 1}$; 2) $\ln(\ln y) = = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$. **8.32.** 1) $y = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}}$; 2) $\sqrt{1 + y^2} = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{5} - 1$. **8.34.** 1) $T = 20 + + Ce^{-0,5t}$; 2) $T = 20 + 80e^{-0,5t}$; 3) ≈20 мин. **8.35.** $y = -\frac{1}{1 + x}$. **8.36.** 1) $m = 40(t -$

$-3)^3 + C$; 2) $m = 40(t-3)^3 + 1110$; 3) 1110 г. **8.39.** 1) $\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C$; 2) $\frac{1}{8}\ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{4}(1-x^3) + C$. **8.40.** 1) $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$; 2) $6\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$; 3) $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -1$. **8.42.** 1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$, $y = 3e^{2x} - 2e^{3x}$; 2) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$, $y = \frac{1}{6}e^{3x} - \frac{1}{6}e^{-3x}$; 3) $y = C_1 + C_2e^{5x}$, $y = -\frac{4}{5} + \frac{4}{5}e^{5x}$. **8.43.** 1) $A = \sqrt{2}$, $\omega = 2$, $\frac{\pi}{4}$ – начальная фаза; 2) $A = \sqrt{10}$, $\omega = \frac{1}{2}$, $\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$ – начальная фаза; 3) $A = \sqrt{2}$, $\omega = \sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$ – начальная фаза. **8.44.** 1) $y = C_1e^x + C_2xe^x$; 2) $y = C_1e^{\frac{2}{3}x} + C_2xe^{\frac{2}{3}x}$; 3) $y = C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2xe^{-\frac{1}{2}x}$; 4) $y = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$. **8.45.** 1) $y'' - y = 0$; 2) $y'' + 2y' + y = 0$. **8.46.** 1) $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$, $y = e^{2x} - 2xe^{2x}$; 2) $y = C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2xe^{-\frac{1}{2}x}$, $y = 4e^{-\frac{1}{2}x} - 2xe^{-\frac{1}{2}x}$; 3) $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$, $y = e^{3x} - 3xe^{3x}$; 4) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$, $y = 2xe^{-x}$. **8.48.** 1) $y = C_1e^{2x}\cos x + C_2e^{2x}\times\sin x$; 2) $y = C_1e^x\cos 2x + C_2e^x\sin 2x$; 3) $y = C_1e^{-x}\cos\sqrt{3}x + C_2e^{-x}\sin\sqrt{3}x$. **8.49.** 1) $x = \frac{1}{3}\sin 3t$; 2) $x = \sin 2t$; 3) $x = \frac{3}{\sin 2\sqrt{3}}\sin 2\sqrt{3}t$. **8.51.** 1) $y = 2e^{-x}\sin x$; 2) $y = e^{\frac{3}{2}x}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$. **8.52.** 1) $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$; 2) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$. **8.53.** $F(x) = x^3 + x^2 + x + 2$.

Раздел 9

9.1. 4) 0; 5; 6) 5; 7) 0; 8) 8. **9.9.** 1) $a = 32$, $b = 56$. **9.11.** 1) 1,36. **9.12.** 1) $\sqrt{5}$; 2) $-\sqrt{5}$; 3) 2; 4) -4; 5) 1; 6) 1; 7) 9. **9.17.** 1) $8(x+11)\times(x+2)$; 4) $(a-1)(a+9)$; 8) $2a(a^2+3b^2)$. **9.18.** 2) $(5mn^2 - 7p^2q)(3m^2p + 5n\,q^2)$. **9.24.** $\frac{2}{b}$. **9.27.** 1. **9.30.** 1) $a_n = \frac{1}{n^2}$; 2) $a_n = 3\cdot 2^{n-1}$; 4) $a_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. **9.34.** 2) 90. **9.35.** $\frac{n-1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. **9.36.** $a_n = 18n - 25$, $b_n = 14n - 17$. **9.37.** 1) $b_1 = -49$,

$q=-\frac{1}{7}$; 4) $b_1=\frac{1}{8}$, $q=7$. **9.39.** $a=32$ или $a=\frac{1}{2}$, $a=\pm 4$. **9.40.** 3) $\frac{b_1^3}{1-q^3}$.
9.41. $\frac{2}{3}$. **9.42.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{5}{4}$. **9.44.** 1; $2+\sqrt{3}$; $(2+\sqrt{3})^2$. **9.45.** 3. **9.49.** 7. **9.50.** 1) 2^8; 2) $C_8^4=70$. **9.51.** 1) $\overline{A_5^3}=125$; 2) $A_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=60$. **9.52.** $C_{10}^5=252$. **9.60.** $a\in(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{4}{9}\right)$. **9.61.** $a=0$. **9.62.** 4) $\frac{1}{9}$; 7) $-\frac{7}{3}$. **9.64.** 1) (1; 6), (6; 1); 4) (1; 5), (5; 1); (2; 3) (3; 2). **9.65.** 2) $x^7-1=(x^3+x+1)(x^4-x^2-x+1)+2x^2-2$. **9.66.** $a=-11$. **9.69.** 3) $(x-1)(x^2-4x-1)$; 6) $(x+1)(x^3-7x^2-7x-4)$. **9.71.** 1) ± 1, ± 2. **9.72.** 2) $\left(1;\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)$. **9.73.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\varnothing$. **9.74.** 1) $-3{,}5$; 2) 4. **9.78.** 1) 3. **9.79.** 1) $\varnothing$; 2) $x\geqslant 3$; 3) 1; 4. **9.80.** 1) 4; 548; 2) 2; 3. **9.81.** 2) 0. **9.82.** 1) 0; 2) -1; -2; 0. **9.83.** 1) -5; 3; 2) $[5;+\infty)$. **9.84.** 1) -6; 2; 2) -1; 0; 3; 4. **9.85.** 1) $-\frac{5}{2}$; $\frac{5}{3}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 2. **9.86.** 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{15}{4}$; 2) $\left[\frac{1}{2};3\right]$. **9.87.** 3) $a\in(-\infty;+\infty)\Rightarrow x_1=a$, $x_2=a+1$; 4) $a\neq 3\Rightarrow x=a$; $a=3\Rightarrow x\in\varnothing$. **9.89.** $a=-2$; $-\frac{1}{2}$. **9.91.** 1) $\left(\frac{118}{19};-\frac{29}{19}\right)$; 2) $x=\frac{15y+51}{20}$, $y\in R$; 3) $\varnothing$. **9.92.** 1) (2,2; 0,4), (1; 1); 4) ($\pm$ 3; $\pm$ 1) **9.93.** 2) $\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3};\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$; $\left(\pm 4\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{33}};\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{33}}\right)$. **9.94.** Указание: рассмотрите первое уравнение системы как квадратное уравнение относительно y. **9.95.** 1) $\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right)$; 2) (5; 3), (– 5; – 3). **9.96.** 1) (3; 1; –2), (– 5; – 3; 0), 2) ($\pm$ 4; $\pm$ 3; $\mp$ 1). **9.97.** 1) $\left(-\frac{7}{2};\frac{67}{4}\right)$; $\left(\frac{21}{4};\frac{37}{4}\right)$; 2) (5; 4); (5; 3). **9.104.** 1) $\left(\frac{1}{4};1\right)$; 2) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$; 4) $[3;+\infty)$. **9.107.** 2) $[-1;6]$; 3) $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$. **9.108.** 1) $(-1;2)$; 2) $(-1;0)$. **9.109.** 1) $(-\infty;-2)\cup[-1;2]\cup[3;+\infty)$; 2) $(-3;1)$. **9.110.** 1) $(2;+\infty)$; 2) $[0;5]$; 3) $\varnothing$; 4) $[-1;1]$. **9.111.** 1) $[-3;-1]\cup\{3\}$; 3) $(-\sqrt{2};3)$; 4) $[1;5]$. **9.112.** 1) $\left[1;\frac{25}{16}\right)$; 2) $(3;11)$. **9.113.** 1) $(-\infty;0]\cup[5;+\infty)$; 2) $[-5;2]$. **9.114.** 1) $[-2;-1]\cup[0;3]$; 2) $(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0]$. **9.115.** 1) $[1{,}5;+\infty)$ 2) $(-\infty;-3)\cup(-2;-1)\cup(6;+\infty)$. **9.116.** 3) $(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(4;+\infty)$. **9.117.** $a\in\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. **9.118.** $a\in(-\infty;-1)\cup$

$\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. **9.119.** $a\in[4;+\infty)$. **9.121.** 1) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; 4) $\sin\alpha=-\frac{1}{5}$, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{12}$. **9.122.** $a=-\frac{15}{4}$. **9.124.** 2) 0; 3) $\frac{1}{\cos 2\beta}$. **9.127.** 1) $\operatorname{tg}2x$; 2) $\operatorname{tg}2x$. **9.128.** 1) $-2\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\frac{2}{\sin\alpha}$. **9.129.** 1) -1; 2) 0; 3) 1,5. **9.130.** $\frac{31}{49}$. **9.131.** 1,6. **9.132.** $1-\sqrt{3}$. **9.133.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **9.134.** 1) $\frac{\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. **9.135.** 1) $-\operatorname{arctg}1{,}5+\pi k$, $k\in Z$. **9.136.** 1) $(-1)^k\arcsin\frac{1}{4}+\pi k$, $k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$. **9.137.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k, 2\pi k, k\in Z$. **9.138.** 1) $\varnothing$. **9.139.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$. **9.140.** 1) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$; 2) $\pi k, \pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. **9.141.** 1) $2\operatorname{arctg}\sqrt{7}+2\pi k$; $\pi+2\pi k$; $k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, -2\operatorname{arctg}(4+\sqrt{15})+2\pi k, k\in Z$. **9.142.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. **9.145.** 1) $6+\sqrt{3}$; 4) $-\frac{1}{3}$. **9.146.** 1) $-\frac{2}{3}$; $-\frac{\operatorname{tg}2+2}{3}$. **9.147.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $-\frac{3}{5}$. **9.148.** 1) 0; 2) 0; $\pm\frac{1}{2}$. **9.149.** 1) $x\in[0;1]$; 2) $x\in[-1;0]$. **9.150.** 1) $a=0\Rightarrow x\in\varnothing$; $a\in(-\infty;-2\pi)\Rightarrow x\in\varnothing$; $a\in[-2\pi;0]\Rightarrow$ $\Rightarrow x=\cos\frac{a}{2}$; $a\in(0;\pi]\Rightarrow x=\cos a$; $a\in(\pi;+\infty)\Rightarrow x\in\varnothing$. **9.152.** 1) $[4\pi k;\pi+4\pi k]$, $k\in Z$. **9.153.** 1) $\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right), k\in Z$. **9.154.** 4) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;-\operatorname{arctg}2+\pi k\right), k\in Z$. **9.155.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3};0\right]$. **9.156.** 2) $\left[\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right), k\in Z$. **9.158.** 2) $-a-b$. **9.159.** 1) $a^a b^a$. **9.161.** 2) $\sqrt{x}$. **9.164.** 1) $x=y$; 4) $4x=5y$. **9.165.** 3) Убывает. **9.166.** 1) $2^{1,5}>2^{\sqrt{2}}$. **9.167.** 2) $\frac{1}{14}$. **9.168.** 1) $\log_5 2>\log_{25}8$. **9.169.** 2) 0. **9.170.** $\frac{m+2}{2m+1}$. **9.171.** 2) 3; 3) 25. **9.172.** 1) 20. **9.173.** 1) $m+n$; 2) $|a+1|$. **9.175.** 3) $\frac{5}{3}$; 4) $x=-1$. **9.176.** 1) $\frac{8}{7}$; 2) $2\pm\sqrt{3,5}$. **9.177.** 1) 6; 2) 27. **9.178.** 1) 1,54. **9.179.** 1) $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{6}$; 2) 3. **9.180.** 1) $\log_{1,5}2$; $2\log_{1,5}2$; 2) -1; $\log_{0,4}5$. **9.181.** 1) $5\sqrt{\log_2 5}$; 2) $\frac{1}{9}$. **9.182.** 1) $\sqrt[9]{10}$; 10; 2) 3; 3^9; 3) $\frac{1}{5}$; 125; 4) $\sqrt[5]{10^4}$. **9.183.** 1) (0; 2), (2; 0); 2) (2; 6). **9.184.** 1) $\left(\frac{1}{2};4\right)$. **9.185.** 1) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$; 2) (3; 5). **9.186.** 1) (6; 6).

9.187. $a \geqslant \frac{1}{16}$. **9.188.** $n = 3$. **9.189.** $a \in (3;\ 27)$. **9.190.** 1) $(-\infty;\ 1{,}5)$; 3) $(0;\ +\infty)$.
9.191. 1) $(-\infty;\ \log_{0,75}5)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{5}{8};+\infty\right)$. **9.192.** 1) $(8;\ +\infty)$; 2) $(2;\ 7] \cap [22;\ 27]$. **9.193.** 1) $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$; 2) $(0{,}1;\ 1) \cup (1;\ 10)$; 3) $(1;\ \sqrt[3]{5})$.
9.194. 1) $\left(\frac{3}{8};\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)$; 2) $(-3;\ -2) \cup (-1;\ 0) \cup (1;\ 3)$; 4) $(-\infty;\ -6) \cup (6;\ +\infty)$.
9.195. 1) $(-5{,}5;\ 0)$. **9.197.** 2) $2x + \frac{2}{x^3}$. **9.198.** 1) $1 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$. **9.199.** 2) $-\frac{2}{\sqrt[5]{x^6}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^4}}$.
9.200. 1) $2\cos 2x - \frac{1}{\cos^2 x}$. **9.201.** 2) $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$. **9.202.** 1) $\frac{1}{1-\sin x}$.
9.203. 2) $-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x}\right)^2$. **9.204.** 1) $2x + 3^x\ln 3$. **9.205.** 2) $\frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$. **9.206.** 1) $2x\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.
9.207. 2) $-\ln a$. **9.208.** 1) На $(-\infty;\ 1)$ убывает; на $(1;\ +\infty)$ возрастает.
9.209. 3) $(-\infty;\ 0)$. **9.210.** 3) $(e;\ +\infty)$. **9.212.** 1) $f(-1) = 1$ – наименьшее значение. $f(1) = 1$ – наибольшее значение. **9.213.** 2) $x = -2$ – точка максимума, $f(-2) = -2$, $x = 2$ – точка минимума, $f(2) = 2$. **9.214.** 3) $x = 2$ – точка минимума, $f(2) = 2 - 2\ln 2$. **9.216.** 2) $k = 0$. **9.217.** $\left(2;\frac{8}{3}\right)$, $\left(3;\frac{7}{2}\right)$. **9.219.** В $\sqrt{3}$ раз. **9.220.** $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.
9.221. $t \approx 2{,}04$, $h = 30{,}41$. Указание: воспользуйтесь тем, что движение тела подчиняется закону $x = 10 + 20t - \frac{gt^2}{2}$. **9.222.** $v(t) = kAe^{-kt}$. **9.223.** 1) $x^3 + x^2 + C$.
9.224. 1) $\frac{x^3}{3} + x^2 - \ln|x| + C$; 4) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x} + C$. **9.225.** 1) $-\frac{2}{\sin 2x} + C$; 4) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}\cos 4x + C$. **9.226.** 1) $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$. **9.227.** 1) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.
9.228. 2) $\frac{1}{2}\ln(2x + \sqrt{4x^2+1}) + C$. **9.229.** 1) $\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$.
9.230. 2) $\frac{17}{6}$; 3) 2. **9.231.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}\ln 2$. **9.232.** 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; 3) $\frac{\pi-2}{8}$.
9.233. 12. **9.236.** $\frac{\pi}{4}$. **9.238.** 3. **9.239.** $\frac{4}{3}$. **9.240.** 10. **9.241.** $\frac{15}{4} - \ln 2$.
9.242. 4,5. **9.243.** $\frac{8}{3}$. **9.244.** $\frac{128\pi}{63}$. **9.246.** 4π. **9.248.** 3500 Дж. **9.250.** 36.
9.251. 20. **9.252.** 2 км/ч. **9.253.** 30 ц, 40 ц. **9.254.** 12,5%. **9.255.** 1 кг, 7 кг.
9.256. 4 или 20. **9.257.** 20 ч, 30 ч. **9.259.** 23.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 6. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Раздел 7. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Раздел 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Раздел 9. ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Учебное издание

Шыныбеков Абдухали Насырулы
Шыныбеков Данияр Абдухалиулы
Жумабаев Ринат Нурланович

АЛГЕБРА

В двух частях

Часть 2

Учебник для 11 класса общеобразовательной школы
естественно-математического направления

Редактор *А. Изтлеуова*
Художественный редактор *А. Лукманов*
Технический редактор *О. Рысалиева*
Корректор *Ю. Гюльоглу*
Компьютерная верстка *Е. Огурцовой*

ИБ 050

Сдано в набор 25.03.2019. Подписано в печать 25.06.2020. Формат 60x90$^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Школьная». Усл. печ.л. 9,0.
Учет.-изд. л. 6,61. Тираж 6000 экз. Заказ № 5192.

ТОО «Корпорация «Атамұра», 050000, г. Алматы, пр. Абылай хана, 75.

Полиграфкомбинат ТОО «Корпорация «Атамұра», Республика Казахстан, 050002,
г. Алматы, ул. М. Макатаева, 41.

Оглавление

page34
page35
page36
page37
page38
page39
page40
page41
page42
page43
page44
page45
page46
page47
page48
page49
page50
page51
page52
page53
page54
page55
page56
page57
page58
page59
page60
page61
page62
page63
page64

page69
page70
page71
page72
page73
page74
page75
page76
page77
page78
page79
page80
page81
page82
page83
page84
page85
page86
page87
page88
page89
page90
page91
page92
page93
page94
page95
page96
page97
page98
page99

page104
page105
page106
page107
page108
page109
page110
page111
page112
page113
page114
page115
page116
page117
page118
page119
page120
page121
page122
page123
page124
page125
page126
page127
page128
page129
page130
page131
page132
page133
page134

page139
page140
page141
page142
page143
page144